

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2008 том 8 № 3 (29)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 3 (29) 2008

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Жамбыла, 25, к. 705
Телефон 8-(7272)-91-13-15, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2008г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 8, № 3 (29), 2008

| | |
|--|----|
| Модель динамики тоннеля мелкого заложения при действии транспортных нагрузок <i>Л. А. Алексеева, С. Р. Гирнис, В. Н. Украинец</i> | 5 |
| Двухсторонние оценки нелинейных разностных уравнений второго порядка <i>А. Э. Алимгамамбетова, Р. Ойнаров</i> | 12 |
| Существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения диффузии относительно давления пласта <i>Е. Аужани</i> | 22 |
| Граничные задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии нагрузки к временной оси в нуле или на бесконечности. I <i>Д. М. Ахманова, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов</i> | 26 |
| Численное моделирование истечения вскипающей жидкости <i>Е. Б. Закир, С. Д. Маусумбекова</i> | 39 |
| Замечание об инвариантных операторах алгебры Вейля <i>Р. Кампоамор-Штурсберг</i> | 46 |
| Виетово уравнение $x^2 + xy + y^2 = z^2$ <i>С. Ш. Кожегельдинов</i> | 52 |
| Refined definitions for Finitary and Infinitary similarity relations of theories Part 2: Cartesian interpretations and the definition to Finitary list <i>М. G. Peretyat'kin</i> | 58 |
| Свойства показателей линейных дифференциальных систем с неотрицательными матрицами <i>М. И. Рахимбердиев</i> , <i>А. А. Сеитова</i> | 73 |
| Об одной краевой задаче для полианалитических функций, приводящейся к краевой задаче Гильберта <i>С. Э. Сапакова</i> | 78 |
| О свойствах решений некоторого класса дифференциальных операторов с операторным коэффициентом <i>Ж. А. Серикбаев</i> | 84 |
| Использование одного метода интеллектуального обучения для моделирования и идентификации параметров обмоток силовых трансформаторов <i>Ал. М. Шинтемиров, Г. Б. Шинтемирова, Ас. М. Шинтемиров</i> | 93 |

ХРОНИКА

Марат Исимгалиевич Рахимбердиев 101

Рефераты 104

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТОННЕЛЯ МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

Л. А. АЛЕКСЕЕВА, С. Р. ГИРНИС, В. Н. УКРАИНЕЦ

Институт Математики МОиН РК

050010 Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Павлодарский гос. Университет им. С. Торайгырова МОН РК

140008 Павлодар ул. Ломова, 64, vitnikukr@mail.ru

На модельной задаче о дозвуковой нагрузке, равномерно движущейся вдоль круговой тонкостенной оболочки в упругом полупространстве, исследуется влияние дневной поверхности на напряженно-деформированное состояние массива в окрестности подкреплённого тоннеля мелкого заложения. На основе метода неполного разделения переменных и интегральных разложений построено аналитическое решение задачи. На его основе проведены численные эксперименты для тоннеля мелкого заложения в зависимости от скорости, периода движущейся в нём нагрузки и глубины заложения. Установлено, что земная поверхность по разному влияет на напряженно-деформированное состояние тоннеля неглубокого заложения при действии движущихся в нём нагрузок с разными периодами. При относительно больших периодах это влияние довольно существенное, и с увеличением скорости движения нагрузки усиливается. С уменьшением периода нагрузки влияние земной поверхности становится менее заметным, и при весьма малых периодах – неощутимым, независимо от скорости её движения.

Исследование динамики тоннелей и трубопроводов мелкого заложения при действии транспортных нагрузок на основе математических моделей относится к числу актуальных проблем механики деформируемого твердого тела. Как известно, такие сооружения относятся к классу наиболее распространенных подземных конструкций, широко используются в народном хозяйстве, поэтому необходимо знать их поведение при различных динамических и статических воздействиях для обеспечения их прочности и надежности при эксплуатации.

На основе методов математического моделирования наиболее изучена динамика подземных сооружений глубокого заложения. Подробная библиография для этого класса задач дана в монографии [1]. В ней же рассмотрен широкий класс модельных стационарных и нестационарных краевых задач для изучения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции и окружающего массива при дифракции сейсмических волн или воздействии транспортных нагрузок. Многовариантные численные эксперименты и расчетные данные ранее были проведены в основном без учета явления переотражения волн на дневной поверхности.

Keywords: *elastic semyspace, fine elastic shell, subsonic running loads, Lamé's*

2000 Mathematics Subject Classification: 74B10

© Л. А. Алексеева, С. Р. Гирнис, В. Н. Украинец, 2008.

В данной работе решается модельная задача о дозвуковой нагрузке, равномерно движущейся вдоль круговой тонкостенной упругой оболочки в упругом полупространстве. Учитывается влияние свободной поверхности на НДС массива и оболочки вследствие эффекта переотражения волн. Проведены численные эксперименты на моделях реальных сред и конструкций для разных значений скорости, периода движущейся в тоннеле нагрузки и глубины его заложения.

1. Постановка задачи в подвижной системе координат. Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую полость радиусом R в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве, подкрепленную тонкостенной упругой оболочкой толщиной h_0 . В силу малости h_0 будем полагать, что оболочка контактирует с окружающей упругой средой вдоль срединной поверхности. Контакт оболочки со средой принимаем жестким. Пусть в декартовой системе координат ось z совпадает с осью полости, параллельной свободной от нагрузок плоской границе полупространства, а ось x перпендикулярна к этой границе: $x < h$, где h – расстояние от оси полости до границы полупространства.

В направлении оси полости по внутренней поверхности оболочки с постоянной дозвуковой (меньшей, чем скорость волн сдвига в среде) скоростью c движется нагрузка $\mathbf{P} = (P_r, P_\theta, P_z)$. При этом составляющие интенсивности нагрузки $P_j = P_j(\theta, z - ct)$, т.е. являются стационарными в подвижной цилиндрической системе координат, ось которой $\eta = z - ct$ направлена вдоль оси полости.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной системе координат (r, θ, η) . Здесь рассматриваются периодические по z с произвольной зависимостью от угловой координаты нагрузки:

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta, \quad (1)$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки. В случае непериодических нагрузок преобразование Фурье по η приводит к решаемой здесь задаче.

Для описания движения полупространства воспользуемся динамическими уравнениями теории упругости в подвижной системе координат [1]:

$$\left(\frac{1}{M_p^2} - \frac{1}{M_s^2} \right) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{M_s^2} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2}, \quad (2)$$

где \mathbf{u} – трехмерный вектор смещения упругой среды; $M_p = c/c_p$, $M_s = c/c_s$ – числа Маха; $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде ($c_s < c_p$); $\lambda = 2\mu\nu/(1 - 2\nu)$; ν, μ, ρ – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность среды. Числа Маха ($M_p < M_s$) характеризуют скорость движущейся нагрузки по отношению к двум звуковым скоростям в упругой среде. Если $M_s < 1$ – нагрузки дозвуковые, $M_p > 1$ – сверхзвуковые, для межзвуковых (трансзвуковых) нагрузок $M_p < 1$, $M_s > 1$. Здесь рассматривается дозвуковой случай, характерный для современных транспортных нагрузок.

Для описания движения оболочки привлекаем приближённые уравнения теории тонких оболочек [2], которые в подвижной системе координат имеют вид:

$$\left[1 - \frac{(1 - \nu_0) \rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1 - \nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} = \frac{1 - \nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\eta - q_\eta),$$

$$\frac{1 + \nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1 - \nu_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} = \frac{1 - \nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\theta - q_\theta), \quad (3)$$

$$\frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \Delta \Delta u_{0r} + \frac{(1 - \nu_0) \rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} = -\frac{1 - \nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_r).$$

Здесь $u_{0\eta}$, $u_{0\theta}$, u_{0r} – перемещения точек срединной поверхности оболочки; $q_z = \sigma_{r\eta}|_{r=R}$, $q_\theta = \sigma_{r\theta}|_{r=R}$, $q_r = \sigma_{rr}|_{r=R}$ – составляющие реакции окружающей оболочку среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в среде ($i, j = \eta, \theta, r$); ν_0, μ_0, ρ_0 – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала оболочки.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x = h$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (4)$$

При жестком контакте оболочки с массивом, имеем

$$u_j|_{r=R} = u_{0j}, \quad j = \eta, \theta, r, \quad (5)$$

где u_j – компоненты вектора \mathbf{u} . С глубиной при $r \rightarrow \infty$ $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$, т.е. перемещения в среде затухают.

2. Решение задачи. Потенциалы Ламе. Преобразуем уравнение (3), выразив \mathbf{u} через потенциалы Ламе [3]

$$\mathbf{u} = \text{grad} \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rotrot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta). \quad (6)$$

где \mathbf{e}_η – орт оси η . Из (3) и (6) следует, что потенциалы φ_j удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta \varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь $M_1 = M_p, M_2 = M_3 = M_s$, все $M_j < 1$, т.к. рассматривается дозвуковой случай. Это характерно для транспортных задач, поскольку скорость звуковых волн в упругой среде много больше скоростей современных транспортных средств.

Потенциалы φ_j будем искать в виде периодических функций по η :

$$\varphi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим:

$$\Delta_2 \Phi_j - m_j^2 \xi^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, $m_j^2 = 1 - M_j^2$, $m_1 \equiv m_p$, $m_2 = m_3 \equiv m_s$.

Используя закон Гука можно получить выражения и для напряжений σ_{lm} в декартовой ($l, m = x, y, \eta$) и цилиндрической ($l, m = r, \theta, \eta$) системах координат как функции от Φ_j [1]. Таким образом, для определения компонент НДС массива нужно найти Φ_j .

Так как скорость движения нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей оболочку среде, то $M_s < 1$ ($m_s > 0$), и решения уравнений (9) можно представить в виде [1]:

$$\Phi_j = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \quad (10)$$

где

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta}, \quad \Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta.$$

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = m_j \xi$; a_{nj} , $g_j(\xi, \zeta)$ – неизвестные коэффициенты и функции, подлежащие определению.

Как показано в [1], представление потенциалов в форме (10) приводит к следующим выражениям для потенциалов в декартовой системе координат:

$$\Phi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (11)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}$, $\Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta+f_j}{k_j}\right)^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся граничными условиями (4), с учётом (11). Выделяя коэффициенты при $\exp(iy\xi)$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем $g_j(\xi, \zeta)$ через коэффициенты a_{nj} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk}. \quad (12)$$

Вид определителя Δ_* и алгебраических дополнений Δ_{jk}^* определён в [1]. Там же показано, что Δ_* – определитель Рэлея, который не обращается в ноль, если скорость бегущей нагрузки меньше скорости c_R рэлеевской волны в полупространстве. В этом случае все подынтегральные функции в (10) непрерывны и достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности. Поэтому интегралы существуют и удовлетворяют условиям затухания на бесконечности. Для вычислений интегралов (11) можно воспользоваться одним из численных методов интегрирования, предварительно определив коэффициенты a_{nj} .

Для дорэлеевской скорости движущейся нагрузки соотношения (11) переписутся в виде:

$$\Phi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk} \Phi_{nk} \right] e^{iy\zeta} d\zeta.$$

Воспользовавшись разложением $\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$, представим (10), используя (12), в цилиндрической системе координат:

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta},$$

где

$$b_{nj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mk} A_{nj}^{mk}, \quad A_{nj}^{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} \Phi_{mk} \Phi_{nj} e^{-h(f_k+f_j)} d\zeta,$$

$J_n(\dots), I_n(\dots)$ – цилиндрические функции Бесселя действительного и мнимого аргумента.

Подставляя найденные для потенциалов соотношения в выражения для u_l и σ_{lm} в декартовых и цилиндрических координатах, получим новые выражения, где неизвестными будут только коэффициенты a_{ni} . Для определения последних следует воспользоваться граничными условиями (5). В установившемся состоянии для перемещений точек срединной поверхности оболочки при действии нагрузки (1), имеем:

$$u_{0j}^*(\theta, \eta) = U_{0j}(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad U_{0j}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (13)$$

Подставляя (1) и (13) в уравнения (3), для n -го члена разложения получим:

$$\varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_{02} n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_{01} \xi_0 u_{0nr} = G_0 (P_{n\eta} - q_{n\eta}),$$

| c, м/с | T, м | | | | | |
|--------|---------------------------------|------|------|-------|-------|-------|
| | 4π | 2π | π | π/2 | π/4 | π/8 |
| | u _x [*] , м | | | | | |
| 200 | 0,71 | 0,47 | 0,16 | 0,020 | 0,000 | 0,000 |
| 400 | 0,76 | 0,54 | 0,20 | 0,026 | 0,001 | 0,000 |
| 600 | 0,86 | 0,73 | 0,31 | 0,048 | 0,002 | 0,000 |
| 800 | 1,12 | 1,67 | 1,16 | 0,185 | 0,011 | 0,000 |

Таб.1: Наибольшие прогибы земной поверхности

$$\nu_{02}n\xi_0u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2u_{0n\theta} - 2inu_{0nr} = G_0(P_{n\theta} - q_{n\theta}), \tag{14}$$

$$2i\nu_0\xi_0u_{0n\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_3^2u_{0nr} = G_0(P_{nr} - q_{nr}),$$

где $\varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_0^2 = \nu_{01}\xi_0^2M_{s0}^2$, $\xi_0 = \xi R$, $\alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + \nu_{01}n^2$, $\xi_0 = \xi R$, $\beta_0^2 = \nu_{01}\xi_0^2 + 2n^2$, $\gamma_0^2 = \chi^2(\xi_0^2 + n^2)^2 + 2$, $\nu_{01} = 1 - \nu_0$, $\nu_{02} = 1 + \nu_0$, $M_{s0} = \frac{c}{c_{s0}}$, $c_{s0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}$, $\chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}$, $G_0 = -\frac{\nu_{01}R^2}{\mu_0h_0}$; при $r = R$ $q_{n\eta} = (\sigma_{r\eta})_n$, $q_{n\theta} = (\sigma_{r\theta})_n$, $q_{nr} = (\sigma_{rr})_n$.

Разрешая (14) относительно $u_{0n\theta}$, $u_{0n\eta}$, u_{0nr} , находим:

$$\frac{u_{0n\eta}}{G_0} = \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{nj}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}), \quad \frac{u_{0n\theta}}{G_0} = \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\theta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}), \quad \frac{u_{0nr}}{G_0} = \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{rj}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}). \tag{15}$$

Здесь $\delta_n = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1\xi_1)^2 - (\varepsilon_2\xi_2)^2 + 2\xi_1\xi_2\xi_3$, $\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2\varepsilon_3)^2 - \xi_1^2$, $\delta_{\eta 2} = \xi_1\xi_2 - \xi_3\varepsilon_3^2$, $\delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2\xi_2 - \xi_1\xi_3)$, $\delta_{\theta 1} = \delta_{\eta 2}$, $\delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1\varepsilon_3)^2 - \xi_2^2$, $\delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2\xi_1 - \xi_2\xi_3)$, $\delta_{r1} = -\delta_{\eta 3}$, $\delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}$, $\delta_{r3} = (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 - \xi_3^2$, $\xi_1 = 2n$, $\xi_2 = 2\nu_0\xi_0$, $\xi_3 = \nu_{02}\xi_0n$; для P_{nj} и q_{nj} индекс $j = 1$ соответствует индексу η , $j = 2 - \theta$, а $j = 3 - r$.

Подставляя (15) в (5) и приравнивая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{nj} , которая имеет единственное решение, если её определитель $\Delta(\xi, c)$ не равен нулю. Последнее выполняется при дорэлеевских скоростях действующей нагрузки. Решение этой системы строилось с использованием метода последовательных отражений (см.[1]).

3. Численные эксперименты. Исследуем влияние земной поверхности на напряженно-деформированное состояние массива в окрестности подкреплённого тонкостенной обделкой тоннеля, в зависимости от скорости c и периода $T = 2\pi/\xi$ бегущей в нём нормальной осесимметричной нагрузки с амплитудой P_A , оказывающей давление на поверхность обделки в области начала подвижной системы координат. В качестве примера рассмотрим тоннель радиусом $R = 1$ м, проходящий в массиве алевролита ($\lambda = 1,688 \cdot 10^3$ МПа, $\mu = 2,532 \cdot 10^3$ МПа, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_s = 1006,4$ м/с, $c_R = 917$ м/с) на глубине $h = 2R$, подкреплённый бетонной обделкой ($h_0 = 0,02$ м, $\nu_0 = 0,2$, $\mu_0 = 12,1 \cdot 10^9$ Па, $\rho_0 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³).

В таблице 1 приведены числовые значения наибольших прогибов $u_x^* = u_x\mu/P_A$ земной поверхности (максимальные амплитуды колебаний земной поверхности в вертикальной плоскости), в зависимости от скорости c движения нагрузки и её периода T . Согласно данным таблицы на рис. 1 построены кривые, показывающие зависимость максимальных амплитуд u_x^*

| T/h | h/R | Комп. НДС | θ , град. | | | | | | |
|-------|---------|---------------------------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 |
| 3,1 | 2 | u_r^* | 1,869 | 1,510 | 0,815 | 0,335 | 0,213 | 0,298 | 0,358 |
| | | $\sigma_{\theta\theta}^*$ | 0,831 | 1,346 | 2,028 | 2,0 | 1,425 | 0,780 | 0,515 |
| | | $\sigma_{\gamma\gamma}^*$ | -1,500 | -1,312 | -0,942 | -0,654 | -0,537 | -0,538 | -0,554 |
| | $\gg 1$ | u_r^* | 0,444 | 0,444 | 0,444 | 0,444 | 0,444 | 0,444 | 0,444 |
| | | $\sigma_{\theta\theta}^*$ | 0,776 | 0,776 | 0,776 | 0,776 | 0,776 | 0,776 | 0,776 |
| | | $\sigma_{\gamma\gamma}^*$ | -0,538 | -0,538 | -0,538 | -0,538 | -0,538 | -0,538 | -0,538 |
| 0,4 | 2 | u_r^* | 0,174 | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 |
| | | $\sigma_{\theta\theta}^*$ | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 |
| | | $\sigma_{\gamma\gamma}^*$ | -1,043 | -1,042 | -1,040 | -1,040 | -1,040 | -1,040 | -1,040 |
| | $\gg 1$ | u_r^* | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 | 0,173 |
| | | $\sigma_{\theta\theta}^*$ | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 | -0,014 |
| | | $\sigma_{\gamma\gamma}^*$ | -1,040 | -1,040 | -1,040 | -1,040 | -1,040 | -1,040 | -1,040 |

Таб.2: НДС контура поперечного сечения тоннеля

колебаний земной поверхности в вертикальной плоскости от периода T при разных скоростях нагрузки. Кривая 1 соответствует $c = 200$ м/с, 2 - $c = 400$ м/с, 3 - $c = 600$ м/с, 4 - $c = 800$ м/с. Из анализа результатов следует, что при фиксированном T из интервала $\pi/4 < T < 4\pi$ увеличение скорости приводит к возрастанию прогибов. В то же время для любой скорости движения нагрузки с уменьшением периода прогибы становятся меньше (исключение наблюдается только при $c > 800$ м/с и $2\pi < T < 4\pi$), и при $T = \pi/4$ м ($T/h = 0,4$), они практически равны нулю. То же самое, как показывают расчёты, происходит и с другими компонентами НДС земной поверхности. В этом случае земная поверхность не оказывает существенного влияния на НДС массива и такой тоннель можно рассматривать как тоннель глубокого заложения (заглубленный тоннель), что хорошо видно из таблицы 2, где приведены результаты расчётов НДС контура поперечного сечения данного и заглубленного ($h/R \gg 1$) тоннелей в координатной плоскости xy , при $T/h = 3$, $T/h = 0,4$ и $c = 800$ м/с. В таблице приняты следующие обозначения: $u_r^* = u_r \mu / P_A$ (м), $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} / P_A$.

При дальнейшем уменьшении периода ($T/h < 0,4$), как показали проведенные для разных скоростей движения нагрузки расчёты, от земной поверхности начинает образовываться уже целая область массива с нулевыми компонентами, которая при достаточно малом периоде охватывает весь массив, за исключением небольшой толщины слоя вокруг тоннеля. Таким образом, земная поверхность оказывает неодинаковое влияние на НДС тоннеля неглубокого заложения при действии движущихся нагрузок с разными периодами. При относительно больших периодах это влияние довольно существенное, и с увеличением скорости движения нагрузки усиливается. С уменьшением периода нагрузки влияние земной поверхности становится менее заметным, и при весьма малых периодах - неощутимым, независимо от скорости её движения.

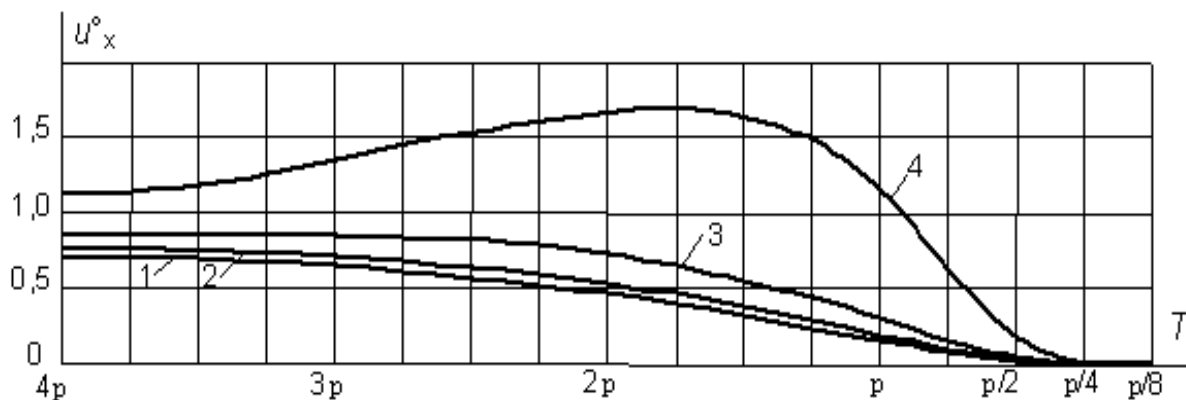


Рис. 1: Максимальные амплитуды колебаний земной поверхности в вертикальной плоскости

Цитированная литература

1. Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, 1989.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек М., 1972.
3. Гузь Л. И., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев, 1978.

Поступила в редакцию 28.08.2008г.

УДК 517.9

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. З. АЛИМАГАМБЕТОВА, Р. ОЙНАРОВ

Евразийский национальный университет им Л.Н.Гумилева
010080 Астана ул. Жубанова, 7 ainash_777@mail.ru
010080 Астана ул. Мунайтпасова, 5 o_ryskul@mail.ru

Для решений нелинейного разностного уравнения второго порядка получены двухсторонние оценки, на основе которых дано предельное поведение всех решений.

1. Введение. Рассмотрим нелинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(a_k | \Delta x_k |^{p-2} \Delta x_k) = b_{k+1} |x_{k+1}|^{p-2} x_{k+1}, k \in Z, \quad (1)$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $1 < p < \infty$, $\{a_k\} \equiv \{a_k : k \in Z\}$, $\{b_k\} \equiv \{b_k : k \in Z\}$ – положительные последовательности чисел, Z – множество целых чисел.

При $p = 2$ уравнение (1) становится линейным разностным уравнением второго порядка:

$$\Delta(a_k \Delta x_k) = b_{k+1} x_{k+1}, k \in Z. \quad (2)$$

В последние годы интенсивно исследуется качественное поведение решений уравнений (1),(2) (см., например [1-6] и приведенные там ссылки).

В работе [6] все ненулевые решения уравнения (1) разбиты на классы по свойству монотонности. А именно, если M совокупность всех ненулевых решений уравнения (1), то имеет место разложение:

$$M = M \uparrow \cup M \downarrow \cup M \uparrow \cup M \downarrow \cup M \uparrow \cup M \downarrow, \quad (3)$$

причем все классы разбиения (3) непусты, где

$$M \uparrow = \{ \{x_k\} : \Delta x_k > 0, \forall k \in Z \},$$

$$\downarrow M \uparrow = \{ \{x_k\} : \exists n_x \in Z, \Delta x_k < 0 \text{ при } k < n_x, \Delta x_k \leq 0 \text{ при } k = n_x \text{ и } \Delta x_k > 0 \text{ при } k > n_x \},$$

$$\uparrow M \downarrow = \{ \{x_k\} : \exists n_x \in Z, \Delta x_k > 0 \text{ при } k < n_x, \Delta x_k \geq 0 \text{ при } k = n_x \text{ и } \Delta x_k < 0 \text{ при } k > n_x \},$$

$$M \downarrow = \{ \{x_k\} : \Delta x_k < 0, \forall k \in Z \}.$$

Keywords: *nonlinear difference equation, nonoscillatory solutions, monotone solutions, extremal solutions, limit behavior*

2000 Mathematics Subject Classification: 39A10

© А. З. Алимагамбетова, Р. Ойнаров, 2008.

Обозначим через ${}^+M$ – множество всех положительных решений уравнения (1). Покажем, что ${}^+M \cap \uparrow M \downarrow = \emptyset$, ${}^+M \cap \downarrow M \uparrow \equiv {}^+M \downarrow \uparrow \neq \emptyset$, ${}^+M \cap M \downarrow \equiv {}^+M \downarrow \neq \emptyset$ и ${}^+M \cap M \uparrow \equiv {}^+M \uparrow \neq \emptyset$.

Из уравнения (1) имеем:

$$a_{k+1}|\Delta x_{k+1}|^{p-2}\Delta x_{k+1} = a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k + b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-2}x_{k+1}, \tag{4}$$

$$-a_{k-1}|\Delta x_{k-1}|^{p-2}\Delta x_{k-1} = -a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k + b_k|x_k|^{p-2}x_k. \tag{5}$$

Из (4) вытекает, что, если $x_k > 0$, $\Delta x_k > 0$ или $x_k < 0$, $\Delta x_k < 0$ при $k = k_0 \in Z$, то эти соотношения сохраняются при всех $k > k_0$, а из (5) следует, что, если $x_k > 0$, $\Delta x_k < 0$ или $x_k < 0$, $\Delta x_k > 0$ при $k = k_0 \in Z$, то эти соотношения сохраняются при всех $k \leq k_0$. Поэтому ${}^+M \cap \uparrow M \downarrow = \emptyset$, т.е. во множестве $\uparrow M \downarrow$ нет положительных решений. Так как $\downarrow M \uparrow = -\uparrow M \downarrow$ в силу однородности уравнения (1), то в множестве $\downarrow M \uparrow$ нет отрицательных решений, т.е. ${}^+M \downarrow \uparrow \neq \emptyset$. В теореме 1 работы [1] показано, что уравнение (1) имеет решение $\{x_k\}$ такое, что $x_k > 0$, $\Delta x_k < 0$ при $k \geq 1$. Тогда из вышесказанного следует, что $x_k > 0$, $\Delta x_k < 0$ при всех $k \in Z$, т.е. ${}^+M \downarrow \neq \emptyset$. Применяя методы доказательства теоремы 1 работы [1], легко можно доказать существование решения $\{x_k\}$ уравнения такое, что $x_k > 0$, $\Delta x_k > 0$ при $k \leq 1$, тогда для этого решения выполняется $x_k > 0$, $\Delta x_k > 0$ при всех $k \in Z$, т.е. ${}^+M \uparrow \neq \emptyset$.

Таким образом, ${}^+M = {}^+M \uparrow \cup {}^+M \downarrow \cup {}^+M \downarrow \uparrow$.

Основной целью настоящей работы является получение двухсторонней оценки для решения $\{x_k\} \in {}^+M$ и его квази-разности $\{u_k = a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k\}$, и на основе этих оценок изучение предельного поведения этих последовательностей.

Напомним [4], что решение $\{x_k\} \in {}^+M$ возрастающее в окрестности $+\infty$ называется регулярно возрастающим (regularly increasing), если $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$, $0 < \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k < \infty$; сильно возрастающим (strongly increasing), если $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$. Решение $\{x_k\} \in {}^+M$ убывающее в окрестности $+\infty$ называется регулярно разрушающим (regularly decaying), если $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$, $-\infty < \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k < 0$, сильно разрушающим (strongly decaying), если $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$. Сильно возрастающие, сильно разрушающие решения уравнения (1) называются экстремальными решениями.

Структура статьи следующая. В пункте 2 сформулированы основные результаты, а в пункте 3 приведены их доказательства.

2. Основные результаты.

Для $m < k_0$ положим:

$$\varphi_{m,k_0}^- = \inf_{m+1 \leq s \leq k_0} \left[\left(\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=m+1}^s b_k \right],$$

$$\psi_{m,k_0}^- = \inf_{m \leq s \leq k_0} \left[\sum_{n=m}^s a_n^{1-p'} + \left(\sum_{k=m}^s b_{k+1} \right)^{1-p'} \right]^{p-1},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

В случае $k_0 = +\infty$ полагаем $\varphi_{m,+ \infty}^- \equiv \varphi_m^-$, $\psi_{m,+ \infty}^- \equiv \psi_m^-$. Для $m > k_0$ определим

$$\varphi_{m,k_0}^+ = \inf_{k_0 \leq s \leq m-1} \left[\left(\sum_{k=s}^{m-1} a_k^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1} \right],$$

$$\psi_{m,k_0}^+ = \inf_{k_0 \leq s \leq m} \left[\sum_{k=s}^m a_k^{1-p'} + \left(\sum_{k=s}^m b_k \right)^{1-p'} \right]^{p-1}.$$

При $k_0 = -\infty$ полагаем $\varphi_{m,-\infty}^+ \equiv \varphi_m^+$, $\psi_{m,-\infty}^+ \equiv \psi_m^+$.

Теорема 1. Пусть $\{x_k\} \in {}^+M \downarrow$. Тогда для любого $t \in Z$ имеют место оценки:

$$a_m^{1-p'}(\varphi_m^-)^{p'-1} \geq \ln \frac{x_m}{x_{m+1}} \geq a_m^{1-p'}(\psi_m^-)^{1-p'}, \quad (6)$$

$$b_{m+1}\psi_{m+1}^- \geq \ln \left| \frac{u_m}{u_{m+1}} \right| \geq b_{m+1}(\varphi_m^-)^{-1}. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $\{x_k\} \in {}^+M \uparrow$. Тогда для любого $t \in Z$ имеют место оценки:

$$a_m^{1-p'}(\varphi_m^+)^{p'-1} \geq \ln \frac{x_{m+1}}{x_m} \geq a_m^{1-p'}(\psi_m^+)^{1-p'}, \quad (8)$$

$$b_{m+1}\psi_{m+1}^+ \geq \ln \frac{u_{m+1}}{u_m} \geq b_{m+1}(\varphi_m^+)^{-1}. \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть $\{x_k\} \in {}^+M \downarrow \uparrow$ и $k_0 \in Z$ такой, что $\Delta x_k < 0$ при $k < k_0$ и $\Delta x_k > 0$ при $k > k_0$. Тогда для $t < k_0$ имеют место оценки:

$$a_m^{1-p'}(\varphi_{m,k_0}^-)^{p'-1} \geq \ln \frac{x_m}{x_{m+1}} \geq a_m^{1-p'}(\psi_{m,k_0}^-)^{1-p'}, \quad (10)$$

$$b_{m+1}\psi_{m+1,k_0}^- \geq \ln \left| \frac{u_m}{u_{m+1}} \right| \geq b_{m+1}(\varphi_{m,k_0}^-)^{-1}, \quad (11)$$

а для $t > k_0$ справедливо:

$$a_m^{1-p'}(\varphi_{m,k_0}^+)^{p'-1} \geq \ln \frac{x_{m+1}}{x_m} \geq a_m^{1-p'}(\psi_{m,k_0}^+)^{1-p'}, \quad (12)$$

$$b_{m+1}\psi_{m+1,k_0}^+ \geq \ln \frac{u_{m+1}}{u_m} \geq b_{m+1}(\varphi_{m,k_0}^+)^{-1}. \quad (13)$$

Из теорем 1-3 легко получить предельное поведение решений $\{x_k\} \in {}^+M$ при $k \rightarrow -\infty$ и при $k \rightarrow +\infty$. Ниже охарактеризованы пределы $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = d$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = c$, а пределы последовательностей $\{x_k\}$ и $\{u_k\}$ при $k \rightarrow -\infty$ характеризуем аналогичным образом.

Теорема 4. Пусть $\{x_k\} \in {}^+M \downarrow$. Если при некотором $k \in Z$

$$a) \sum_{m=k}^{\infty} a_m^{1-p'}(\psi_m^-)^{1-p'} = \infty, \quad \sum_{m=k}^{\infty} b_{m+1}(\varphi_m^-)^{-1} = \infty,$$

то соответственно $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$;

$$b) \sum_{m=k}^{\infty} a_m^{1-p'}(\varphi_m^-)^{p'-1} < \infty, \quad \sum_{m=k}^{\infty} b_{m+1}(\psi_{m+1}^-)^{-1} < \infty,$$

то соответственно $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = d > 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = c < 0$.

Теорема 5. Пусть $\{x_k\} \in {}^+M \uparrow$. Если при некотором $k \in Z$

$$a) \sum_{m=k}^{\infty} a_m^{1-p'}(\psi_m^+)^{1-p'} = \infty, \quad \sum_{m=k}^{\infty} b_{m+1}(\varphi_m^+)^{-1} = \infty,$$

то соответственно $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \infty$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \infty$;

$$b) \sum_{m=k}^{\infty} a_m^{1-p'}(\varphi_m^+)^{p'-1} < \infty, \quad \sum_{m=k}^{\infty} b_{m+1}\psi_m^+ < \infty,$$

то соответственно $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = d < \infty$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = c < \infty$.

Замечание. Если в утверждении теоремы 5 выражение φ_m^+, ψ_m^+ заменим на $\varphi_{m,k_0}^+, \psi_{m,k_0}^+$ соответственно, то получим характеристику решений $\{x_k\} \in {}^+M \downarrow \uparrow$ при $k \rightarrow +\infty$.

Из теорем 4 и 5 следует, что утверждения а) в обоих случаях дают достаточные условия существования экстремальных решений уравнения (1), а именно, утверждение а) теоремы 4 – сильно разрушающего решения и утверждение а) теоремы 5 – сильно возрастающего решения уравнения (1). Если выполняется первое условие из а) и второе условие из в) теоремы 4, то решение $\{x_k\} \in {}^+M \downarrow$ регулярно разрушающее, а если выполняется первое условие из а) и второе условие из в) теоремы 5, то решение $\{x_k\} \in {}^+M \uparrow$ регулярно возрастающее.

3. Доказательство основных теорем.

Предварительно докажем несколько лемм, имеющих самостоятельное значение.

Лемма 1. Пусть $\{x_k\}$ – решение уравнения (1) такое, что $x_k > 0, \Delta x_k < 0$ при $k < k_0 \leq +\infty$. Тогда для любых $m < k_0$

$$a_m^{1-p'} (\varphi_{m,k_0}^-)^{p'-1} \geq \frac{|\Delta x_m|}{x_{m+1}}, \tag{14}$$

$$\frac{|\Delta u_m|}{|u_m|} \geq b_{m+1} (\varphi_{m,k_0}^-)^{-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть решение $\{x_k\}$ удовлетворяет условию леммы 1. Суммируя уравнение (1) от m до $n - 1 < k_0$, получим

$$a_n |\Delta x_n|^{p-2} \Delta x_n - a_m |\Delta x_m|^{p-2} \Delta x_m = \sum_{k=m}^{n-1} b_{k+1} |x_{k+1}|^{p-1}, \tag{16}$$

или с учетом $\Delta x_n < 0$ и $\Delta x_m < 0$

$$a_m |\Delta x_m|^{p-1} = a_n |\Delta x_n|^{p-1} + \sum_{k=m+1}^n b_k |x_k|^{p-1}. \tag{17}$$

Пусть $k_0 > s \geq n \geq m + 1$. Умножая обе части (17) на $a_n^{1-p'}$ и суммируя по n от $m + 1$ до s , а затем применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\begin{aligned} a_m |\Delta x_m|^{p-1} \sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} &= \sum_{n=m+1}^s a_n^{2-p'} |\Delta x_n|^{p-1} + \sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \sum_{k=m+1}^n b_k |x_k|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=m+1}^s a_n |\Delta x_n|^p \right)^{\frac{1}{p'}} + \sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \left(\sum_{k=m+1}^s b_k \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=m+1}^s b_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} + \left(\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \right)^p \sum_{k=m+1}^s b_k \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=m+1}^s (a_k |\Delta x_k|^p + b_k |x_k|^p) \right]^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Откуда

$$a_m^{p'} |\Delta x_m|^p \leq \left[\left(\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=m+1}^s b_k \right]^{p'-1} \sum_{k=m+1}^s (a_k |\Delta x_k|^p + b_k |x_k|^p). \tag{18}$$

Теперь уравнение (1) умножим на x_{k+1} и просуммируем по k от m до $s-1$. Тогда

$$\sum_{k=m}^{s-1} a_{k+1} |\Delta x_{k+1}|^{p-2} \Delta x_{k+1} x_{k+1} - \sum_{k=m}^{s-1} a_k |\Delta x_k|^{p-2} \Delta x_k x_{k+1} = \sum_{k=m}^{s-1} b_{k+1} |x_{k+1}|^p \quad (19)$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^s a_k |\Delta x_k|^{p-2} \Delta x_k x_k - \sum_{k=m}^{s-1} a_k |\Delta x_k|^{p-2} \Delta x_k x_{k+1} &= \sum_{k=m+1}^s b_k |x_k|^p, \\ a_s |\Delta x_s|^{p-2} \Delta x_s x_s - a_m |\Delta x_m|^{p-2} \Delta x_m x_{m+1} &= \sum_{k=m+1}^s (a_k |\Delta x_k|^p + b_k |x_k|^p). \end{aligned}$$

Так как $\Delta x_s x_s < 0$ и $\Delta x_m < 0$, то из последнего равенства имеем:

$$a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_{m+1} \geq \sum_{k=m+1}^s (a_k |\Delta x_k|^p + b_k |x_k|^p). \quad (20)$$

Из (18) и (20) следует:

$$a_m^{p'} |\Delta x_m|^p \leq a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_{m+1} \left[\left(\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=m+1}^s b_k \right]^{p'-1}$$

или

$$\frac{|\Delta x_m|}{x_{m+1}} \leq a_m^{1-p'} \left[\left(\sum_{n=m+1}^s a_n^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=m+1}^s b_k \right]^{p'-1}.$$

Так как s не зависит от m , то из последнего неравенства получим (14). Из (14) вытекает:

$$\frac{x_{m+1}}{|\Delta x_m|} \geq a_m^{p'-1} (\varphi_{m,k_0}^-)^{1-p'}.$$

Возведя обе части этого неравенства в степень $p-1$ и умножая полученное неравенство на b_{m+1} , имеем:

$$\frac{b_{m+1} |x_{m+1}|^{p-1}}{a_m |\Delta x_m|^{p-1}} \geq b_{m+1} (\varphi_{m,k_0}^-)^{-1}.$$

Откуда в силу уравнения (1)

$$\frac{\Delta(a_m |\Delta x_m|^{p-2} \Delta x_m)}{a_m |\Delta x_m|^{p-1}} \geq b_{m+1} (\varphi_{m,k_0}^-)^{-1}.$$

Так как квази-разность $u_m = a_m |\Delta x_m|^{p-2} \Delta x_m < 0$ и не убывает, то

$$\Delta u_m = u_{m+1} - u_m = |u_m| - |u_{m+1}| = ||u_{m+1}| - |u_m|| = |\Delta |u_m||.$$

Следовательно, последнее неравенство есть оценка (15). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\{x_k\}$ – решение уравнения (1) такое, что $x_k > 0$, $\Delta x_k < 0$ при $k < k_0 \leq +\infty$. Тогда для всех $m < k_0$

$$\frac{|\Delta x_m|}{x_m} \geq a_m^{1-p'} (\psi_{m,k_0}^-)^{1-p'}, \quad (21)$$

$$\frac{\Delta u_m}{|u_{m+1}|} \leq b_{m+1} \psi_{m+1, k_0}^- \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $m \leq n < k_0$. Применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$x_m = \sum_{i=m}^n (x_i - x_{i+1}) + x_{n+1} = \sum_{i=m}^n |\Delta x_i| + x_{n+1} \leq \left(\sum_{i=m}^n a_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=m}^n a_i |\Delta x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + x_{n+1}. \quad (23)$$

Умножим обе части (23) на b_{n+1} и просуммируем по n от m до $s < k_0$, а затем применим неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} x_m \sum_{n=m}^s b_{n+1} &\leq \sum_{n=m}^s b_{n+1} \left(\sum_{i=m}^n a_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=m}^n a_i |\Delta x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} x_{n+1} \right) \leq \\ &\leq \sum_{n=m}^s b_{n+1} \left(\sum_{i=m}^s a_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=m}^s a_i |\Delta x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} |x_{n+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[\left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} \right)^{p'} \sum_{i=m}^s a_i^{1-p'} + \sum_{n=m}^s b_{n+1} \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\left(\sum_{i=m}^s (a_i |\Delta x_i|^p + b_{i+1} |x_{i+1}|^p) \right) \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Откуда

$$x_m^p \leq \left[\sum_{i=m}^s a_i^{1-p'} + \left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} \right)^{1-p'} \right]^{p-1} \sum_{i=m}^s (a_i |\Delta x_i|^p + b_{i+1} |x_{i+1}|^p). \quad (24)$$

В (19) заменяя $s - 1$ на s , имеем:

$$a_{s+1} |\Delta x_{s+1}|^{p-2} \Delta x_{s+1} x_{s+1} - a_m |\Delta x_m|^{p-2} \Delta x_m x_m = \sum_{k=m}^s (a_k |\Delta x_k|^p + b_{k+1} |x_{k+1}|^p).$$

Откуда, в силу $\Delta x_{s+1} x_{s+1} < 0$ и $\Delta x_m < 0$

$$a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_m \geq \sum_{k=m}^s (a_k |\Delta x_k|^p + b_{k+1} |x_{k+1}|^p). \quad (25)$$

Из (24) и (25) имеем:

$$x_m^p \leq a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_m \left[\sum_{i=m}^s a_i^{1-p'} + \left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} \right)^{1-p'} \right]^{p-1}$$

или

$$a_m^{1-p'} \left[\sum_{i=m}^s a_i^{1-p'} + \left(\sum_{n=m}^s b_{n+1} \right)^{1-p'} \right]^{-1} \leq \frac{|\Delta x_m|}{x_m}.$$

Откуда, в силу независимости s от n следует (21). В (21) заменяя m на $m + 1$, имеем

$$\frac{b_{m+1} |x_{m+1}|^{p-1}}{a_{m+1} |\Delta x_{m+1}|^{p-1}} \leq b_{m+1} \psi_{m+1, k_0}^-.$$

Так как $b_{m+1}|x_{m+1}|^{p-1} = \Delta(a_m|\Delta x_m|^{p-2}\Delta x_m) = \Delta u_m$, то из последнего соотношения следует (22). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\{x_k\}$ – решение уравнения (1) такое, что $x_k > 0$, $\Delta x_k > 0$ при $k > k_0 \geq -\infty$. Тогда для всех $m > k_0$

$$a_m^{1-p'}(\varphi_{m,k_0}^+)^{p'-1} \geq \frac{\Delta x_m}{x_m}, \quad (26)$$

$$b_{m+1}(\varphi_{m+1,k_0}^+)^{-1} \geq \frac{\Delta u_m}{u_m}. \quad (27)$$

Доказательство. Пусть $\{x_k\}$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию леммы 3. Пусть $k_0 < n < m$. Суммируя уравнение (1) по k от n до $m-1$, имеем:

$$a_m|\Delta x_m|^{p-1} = a_n|\Delta x_n|^{p-1} + \sum_{k=n}^{m-1} b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-1}. \quad (28)$$

Умножим обе части (28) на $a_n^{1-p'}$, просуммируем по n от $s > k_0$ до $m-1$, а затем, применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} a_m|\Delta x_m|^{p-1} \sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} &= \sum_{n=s}^{m-1} a_n^{2-p'}|\Delta x_n|^{p-1} + \sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} \sum_{k=n}^{m-1} b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=s}^{m-1} a_n|\Delta x_n|^p \right)^{\frac{1}{p'}} + \sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} \left(\sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1}|x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} + \left(\sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} \right)^p \sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=s}^{m-1} (a_n|\Delta x_n|^p + b_{n+1}|x_{n+1}|^p) \right]^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Откуда

$$a_m^{p'}|\Delta x_m|^p \leq \left[\left(\sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1} \right]^{p'-1} \sum_{n=s}^{m-1} (a_n|\Delta x_n|^p + b_{n+1}|x_{n+1}|^p). \quad (29)$$

Далее, уравнение (1) умножим на x_{k+1} и просуммируем по k от s до $m-1$. Тогда

$$\sum_{k=s}^{m-1} a_{k+1}|\Delta x_{k+1}|^{p-1}x_{k+1} - \sum_{k=s}^{m-1} a_k|\Delta x_k|^{p-1}x_{k+1} = \sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1}|x_{k+1}|^p \quad (30)$$

или

$$a_m|\Delta x_m|^{p-1}x_m - a_s|\Delta x_s|^{p-1}x_s = \sum_{k=s}^{m-1} (a_k|\Delta x_k|^p + b_{k+1}|x_{k+1}|^p).$$

Следовательно,

$$a_m|\Delta x_m|^{p-1}x_m \geq \sum_{k=s}^{m-1} (a_k|\Delta x_k|^p + b_{k+1}|x_{k+1}|^p). \quad (31)$$

Из (29) и (31) имеем:

$$a_m^{p'} |\Delta x_m|^p \leq a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_m \left[\left(\sum_{k=s}^{m-1} a_k^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1} \right]^{p'-1}$$

или

$$\frac{\Delta x_m}{x_m} \leq a_m^{1-p'} \left[\left(\sum_{n=s}^{m-1} a_n^{1-p'} \right)^{1-p} + \sum_{k=s}^{m-1} b_{k+1} \right]^{p'-1}.$$

Откуда в силу независимости m от s получим (26). Далее как в лемме 2 из (26) получаем (27). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $\{x_k\}$ – решение уравнения (1) такое, что $x_k > 0, \Delta x_k > 0$ при $k > k_0 \geq -\infty$. Тогда для $m > k_0$

$$\frac{\Delta x_m}{x_{m+1}} \geq a_m^{1-p'} (\psi_{m,k_0}^+)^{1-p'}, \tag{32}$$

$$\frac{\Delta u_m}{u_m} \leq b_{m+1} \psi_{m,k_0}^+. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $k_0 < k \leq m$. Как в лемме 2 имеем:

$$x_{m+1} = \sum_{i=k}^m \Delta x_i + x_k \leq \left(\sum_{i=k}^m a_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^m a_i |\Delta x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + x_k. \tag{34}$$

Обе части (34) умножим на b_k , просуммируем по k от $s > k_0$ до m , а затем, применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} x_{m+1} \sum_{k=s}^m b_k &\leq \sum_{k=s}^m b_k \left(\sum_{i=k}^m a_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^m a_i |\Delta x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=s}^m b_k x_k \leq \\ &\leq \sum_{k=s}^m b_k \left(\sum_{i=s}^m a_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^m a_i |\Delta x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=s}^m b_k \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=s}^m b_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[\left(\sum_{k=s}^m b_k \right)^{p'} \sum_{i=s}^m a_i^{1-p'} + \sum_{k=s}^m b_k \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\sum_{i=s}^m (a_i |\Delta x_i|^p + b_i |x_i|^p) \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Откуда

$$x_{m+1}^p \leq \left[\sum_{i=s}^m a_i^{1-p'} + \left(\sum_{k=s}^m b_k \right)^{1-p'} \right]^{p-1} \sum_{i=s}^m (a_i |\Delta x_i|^p + b_i |x_i|^p). \tag{35}$$

Далее, в соотношении (30) s заменим на $s - 1$ и его представим в виде:

$$\sum_{k=s}^m a_k |\Delta x_k|^{p-1} x_k - \sum_{k=s-1}^{m-1} a_k |\Delta x_k|^{p-1} x_{k+1} = \sum_{k=s}^m b_k |x_k|^p,$$

откуда

$$a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_{m+1} - a_{s-1} |\Delta x_{s-1}|^{p-1} x_s = \sum_{k=s}^m (a_k |\Delta x_k|^p + b_k |x_k|^p).$$

Следовательно,

$$a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_{m+1} \geq \sum_{k=s}^m (a_k |\Delta x_k|^p + b_k |x_k|^p). \quad (36)$$

Из (31) и (36) имеем:

$$x_{m+1}^p \leq a_m |\Delta x_m|^{p-1} x_{m+1} \left[\sum_{i=s}^m a_i^{1-p'} + \left(\sum_{k=s}^m b_k \right)^{1-p'} \right]^{p-1}$$

или

$$a_m^{1-p'} \left[\sum_{i=s}^m a_i^{1-p'} + \left(\sum_{k=s}^m b_k \right)^{1-p'} \right]^{-1} \leq \frac{\Delta x_m}{x_{m+1}},$$

для всех $m, s : k_0 < s \leq n$. Следовательно, справедливо (32). Из (32) как в лемме 1 получаем (33). Лемма 4 доказана.

Доказательство теорем 1-3. Для положительных и невозрастающих последовательностей $\{y_k\}$ имеем:

$$\frac{|\Delta y_m|}{y_m} = \frac{1}{y_m} \int_{y_{m+1}}^{y_m} dt \leq \int_{y_{m+1}}^{y_m} \frac{dt}{t} = \ln \frac{y_m}{y_{m+1}},$$

$$\frac{|\Delta y_m|}{y_{m+1}} = \frac{1}{y_{m+1}} \int_{y_{m+1}}^{y_m} dt \geq \int_{y_{m+1}}^{y_m} \frac{dt}{t} = \ln \frac{y_m}{y_{m+1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{|\Delta y_m|}{y_m} \leq \ln \frac{y_m}{y_{m+1}} \leq \frac{|\Delta y_m|}{y_{m+1}}. \quad (37)$$

Аналогично, для положительных и неубывающих последовательностей $\{z_k\}$ имеем:

$$\frac{\Delta z_m}{z_{m+1}} \leq \ln \frac{z_{m+1}}{z_m} \leq \frac{\Delta z_m}{z_m}. \quad (38)$$

Пусть $\{x_k\} \in {}^+M$ такое, что $\Delta x_k < 0$ при $k < k_0 \leq +\infty$. Последовательность $\{x_k\}$ убывает при $-\infty < k < k_0$, поэтому на основании (37) для $m < k_0$ имеем:

$$\frac{|\Delta x_m|}{x_m} \leq \ln \frac{x_m}{x_{m+1}} \leq \frac{|\Delta x_m|}{x_{m+1}}.$$

Откуда на основании (14) и (21) имеем (10), если $k_0 < +\infty$ и (6), если $k_0 = +\infty$. Последовательность квази-разности $\{u_k\}$ отрицательна и не убывает при $-\infty < k < k_0$, тогда последовательность $\{|u_k|\}$ не возрастает при $-\infty < k < k_0$, следовательно, для $m < k_0$ имеем:

$$\frac{|\Delta |u_m||}{|u_m|} \leq \ln \left| \frac{u_m}{u_{m+1}} \right| \leq \frac{|\Delta |u_m||}{|u_{m+1}|}.$$

Откуда в силу (15) и (22) имеем оценку (11), если $k_0 < +\infty$ и оценку (7), если $k_0 = +\infty$. Аналогично, на основании (38), (26), (32) и (27), (33) имеем соответственно (12) и (13), если $k > -\infty$, и (8) и (9), если $k = -\infty$. Теоремы 1-3 доказаны.

Доказательство теорем 4-5. Пусть $\{x_k\} \in {}^+M \downarrow$. Тогда на основании теоремы 1 имеют место двухсторонние оценки (6) и (7). Суммируя эти соотношения по m от k до $n - 1$, имеем:

$$\sum_{m=k}^{n-1} a_m^{1-p'} (\varphi_m^-)^{p'-1} \geq \ln \frac{x_k}{x_n} \geq \sum_{m=k}^{n-1} a_m^{1-p'} (\psi_m^-)^{1-p'},$$

$$\sum_{m=k}^{n-1} b_{m+1} \psi_{m+1}^- \geq \ln \left| \frac{u_k}{u_n} \right| \geq \sum_{m=k}^{n-1} b_{m+1} (\varphi_m^-)^{-1}.$$

Откуда, соответственно

$$x_k \exp \left\{ - \sum_{m=k}^{n-1} a_m^{1-p'} (\varphi_m^-)^{p'-1} \right\} \leq x_n \leq x_k \exp \left\{ - \sum_{m=k}^{n-1} a_m^{1-p'} (\psi_m^-)^{1-p'} \right\}, \quad (39)$$

$$|u_k| \exp \left\{ - \sum_{m=k}^{n-1} b_{m+1} (\psi_{m+1}^-) \right\} \geq |u_n| \geq |u_k| \exp \left\{ - \sum_{m=k}^{n-1} b_{m+1} (\varphi_m^-)^{-1} \right\}. \quad (40)$$

Из (39) следует, что, если $\sum_{m=k}^{\infty} a_m^{1-p'} (\psi_m^-)^{1-p'} = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ и если $\sum_{m=k}^{\infty} a_m^{1-p'} (\varphi_m^-)^{p'-1} < \infty$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = d > 0$.

Точно также из (40) имеем, что, если $\sum_{m=k}^{\infty} b_{m+1} (\varphi_m^-)^{-1} = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ и, если $\sum_{m=k}^{\infty} b_{m+1} \psi_{m+1}^- < \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| < \infty$. Но, $u_n < 0 \forall n \in Z$, поэтому существует $-\infty < c < 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c$. Теорема 4 доказана.

Аналогичным образом доказывается теорема 5.

При $p = 2$ из теорем 1-5 и из лемм 1-4 получаем соответствующие утверждения для линейного уравнения (2), которые тоже являются новыми для уравнения (2).

Цитированная литература

1. Cecchi M., Dosla Z., Marini M. // Computers Math. Applic. 2001. Vol.42. P. 1401 – 1410.
2. Cecchi M., Dosla Z., Marini M. // Computers Math. Applic. 2003. Vol.45. P. 1113 – 1123.
3. Cecchi M., Dosla Z., Marini M. // S.Differ. Equations. Applic. 2004.
4. Cecchi M., Dosla Z., Marini M., Vrkoč I. // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol.302. P. 1 – 13.
5. Dosly O., Rehak P. // S.Differ. Equations. Applic., 2003. V.9. P. 49 – 61.
6. Алимагамбетова А.З. // Евразийский математический журнал. 2008. №1. С. 47 – 52.

Поступила в редакцию 24.01.2008г.

УДК 517.946

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДАВЛЕНИЯ ПЛАСТА

Е. АУЖАНИ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050012 Алматы ул.Масанчи, 39/47

В данной работе приводится обоснование корректности начально-краевой задачи для двумерного уравнения диффузии относительно давления пласта при известном χ (считаем коэффициент пьезопроводности заданным).

В действительных условиях мощность или эффективная толщина пласта h , проницаемость k , вязкость μ и другие показатели не являются постоянными. Поэтому, имея промышленные данные о забойных давлениях и дебитах скважин для какого-то момента времени, можно определить параметры пласта в призабойных зонах и тем самым облегчить представление о распределении проницаемости в пласте [1].

Представим неоднородный пласт, находящийся в условиях упругого режима с неизвестным параметром $\chi(x_1, x_2) = \frac{hk(x_1, x_2)}{\mu\beta}$ ($\chi(x_1, x_2)$ – коэффициент пьезопроводности, β – коэффициент сжимаемости пласта), но известными, например, промышленными данными о давлениях на контуре питания P_k , давлениях на скважинах $P_{1C}, P_{2C}, \dots, P_{MC}$ и дебитах скважин q_1, q_2, \dots, q_M . С помощью этих данных можно определить гидродинамический параметр $\chi(x_1, x_2)$ пласта в призабойных зонах скважин и других точках неоднородного пласта в предположении, что во всей области существует линейный закон фильтрации.

Известно, что нефтяные пласты представляют собой пористую среду (песок, песчаники и др.), пропитанную нефтью и находящуюся под большим давлением. Под влиянием перепада давлений между контуром питания и скважинами нефть течет сквозь поры пласта к скважинам. При этом распределение давления P в любой точке пласта удовлетворяет уравнению диффузии. В тех случаях, когда мощность пласта h бывает настолько малой, что изменением давления по вертикальной оси можно пренебречь, пространственная задача по определению давления пласта сводится к плоской [1].

Приведем постановку прямой задачи [2].

Keywords: *generalization solution, diffusion equation, layer pressure*

2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

© Е. Аужани, 2008.

Уравнение для давления при упругом режиме фильтрации в двумерной многосвязной области Ω может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1)$$

Граничные условия заданы на границах $\partial\Omega_j$ каждой скважины и на внешней границе $\partial\Omega$ нефтяного пласта Ω :

$$\int_{\partial\Omega_j} \chi \psi(x) \frac{\partial P}{\partial n} dl = q_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где M – количество скважин, ψ – решение сопряженной задачи.

Для замыкания модели задается давление пласта в начальный момент времени:

$$P(x, 0) = P_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Кроме того, задается дополнительное условие:

$$P(x, t) = P_C(x^j, t), \quad (5)$$

где $x^j = (x_1^j, x_2^j)$ – координаты скважин, $P_C(x^j, t)$ – фактические данные в разные моменты времени.

Введем в рассмотрение функционал

$$J = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{n_j} [P_C(x^j, t_i) - P(x^j, t_i)]^2, \quad (6)$$

где $P_C(x^j, t)$ – фактические данные, $P(x^j, t_i)$ – данные из вычисления на j -й скважине с координатами x^j , $j = \overline{1, M}$, а n_j – количество замеров на j -й скважине. Функционал (6) можно представить в виде [1]:

$$J = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi r_{Cj}} \int_0^T \int_{\partial\Omega_j} [P_C(x, t) - P(x, t)]^2 dt dl. \quad (7)$$

Сопряженную для (1) – (4) задачу запишем в виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

$$\chi \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_j} = 2(P - P_C) \Big|_{\partial\Omega_j}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (11)$$

Первую вариацию функционала (7) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_0^T \int_{\Omega} \delta \chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial P(\chi + \delta \chi)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial P(\chi + \delta \chi)}{\partial x_2} \right) dt dx + \\ & + \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi r_{Cj}} \int_0^T \int_{\partial \Omega_j} (\delta P)^2 dt dl - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi r_{Cj}} \int_0^T \int_{\partial \Omega_j} (\chi - \delta \chi) \delta \psi \frac{\partial P(\chi + \delta \chi)}{\partial n} dt dl. \end{aligned} \quad (12)$$

Определение 1. Обобщенным решением прямой задачи (1) – (4) будем называть функцию $P \in L^2([0, T] \times \Omega)$ такую, что для любых функций $\psi \in H^{2,1}([0, T] \times \Omega)$, удовлетворяющих условиям (9)– (11), имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \delta P \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) dt dx + \\ + \int_{\Omega} P_0 \psi(x, 0) dx + T \sum_{j=1}^M q_j - \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_{\partial \Omega_j} \chi P \frac{\partial \psi}{\partial n} dt dl = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для задачи (1) – (4) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $P_0 \in L^2(\Omega)$ и q_j – конечные числа, то начально-краевая задача (1) – (4) имеет единственное обобщенное решение \mathbf{P} , принадлежащее пространству $L^2([0, T] \times \Omega)$, причем

$$\|P\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq C \left(T \sum_{j=1}^M q_j + \|P_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (14)$$

Доказательство. Обе части уравнения (1) умножим на P и проинтегрируем по области Ω :

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial t} \right) P dx = 0.$$

Преобразуем выражение

$$P \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(P \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(P \chi \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) - \chi \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^2 \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} P^2 - P \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \right] dx = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} P^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(P \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(P \chi \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} P^2 + \chi \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx - \\ - \int_{\partial \Omega} P \chi \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma - \sum_{j=1}^M \int_{\partial \Omega_j} \chi P \frac{\partial P}{\partial n} dl = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} P^2 + \chi \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx - \sum_{j=1}^M q_j = 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} P^2|_{t=T} dx + \int_0^T \int_{\Omega} \chi(P_{x_1}^2 + P_{x_2}^2) dx = \int_{\Omega} P_0^2 dx + T \sum_{j=1}^M q_j$$

и

$$\|P\|_{C([0,T];W_2^1(\Omega))} \leq C_1 \left(T \sum_{j=1}^M q_j + \|P_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{15}$$

Так как $\|P\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} \leq C_2 \|P\|_{C([0,T];W_2^1(\Omega))}$, то

$$\|P\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} \leq C_3 \left(T \sum_{j=1}^M q_j + \|P_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{16}$$

Единственность обобщенного решения следует из оценки (14). Действительно, при $P_0 = 0$ и $q_j = 0$ имеем, что $\|P\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} = 0$, следовательно, $P = 0$. Существование обобщенного решения можно показать методом Галеркина. Теорема доказана.

Определение 2. Функцию $\psi \in L^2([0, T] \times \Omega)$ будем называть обобщенным решением сопряженной задачи (8) – (11), если для любых функций $P \in H^{2,1}([0, T] \times \Omega)$, удовлетворяющих условиям (2) – (4), имеет место равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \chi \frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \chi \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dt dx + \\ & + \int_{\Omega} P(x, T) \psi(x, T) dx - T \sum_{j=1}^M q_j + \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_{\partial \Omega_j} \chi P \frac{\partial \psi}{\partial n} dt dl = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Для сопряженной задачи (8) – (11) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $P \in L^2([0, T] \times \partial \Omega_j)$, $j = 1, M$. Тогда сопряженная задача (8) – (11) имеет единственное обобщенное решение ψ , принадлежащее пространству $L^2([0, T] \times \Omega)$, причем

$$\|\psi\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} \leq C \sum_{j=1}^M \|P - P_C\|_{L^2([0,T] \times \partial \Omega_j)}. \tag{18}$$

Теорема 2 доказывается аналогично Теореме 1.

Цитированная литература

1. **Крылов А.П. и др.** Научные основы разработки нефтяных месторождений. Москва–Ижевск, 2004.
2. **Жумагулов Б.Т., Мухамбетжанов С.Т., Шыганаков Н.** Моделирование вытеснения нефти с учетом массообменных процессов. Алматы, 2003.
3. **Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсейтова А.Т.** Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. Алматы–Новосибирск, 2006.
4. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.

Поступила в редакцию 22.01.2008г.

УДК 517.956, 517.968.2

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРИБЛИЖЕНИЕМ ЛИНИИ НАГРУЗКИ К ВРЕМЕННОЙ ОСИ В НУЛЕ ИЛИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. I

А. Д. АХМАНОВА, М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М. И. РАМАЗАНОВ

КарГУ им.Е.А.Букетова МОН РК

100028 Караганды ул.Университетская, 28

Институт математики МОН РК

050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

КарГУ им.Е.А.Букетова МОН РК

100028 Караганды ул.Университетская, 28 ramamur@mail.ru

В данной работе продолжается дальнейшее исследование граничных задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом совпадает с порядком дифференциальной части уравнения и точка нагрузки по пространственной переменной движется по закону $\bar{x}(t) = t^\omega$, $-\infty < \omega < 1/2$. В этой части работы граничные задачи сводятся к паре особых интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра 2-го рода, для которых выбраны соответствующие характеристические интегральные уравнения.

Введение. Основные вопросы, возникающие в теории граничных задач для уравнений в частных производных, остаются таковыми же и в краевых задачах для нагруженных уравнений, которые в связи с расширяющимся объемом их приложений являются объектом исследования многих авторов [1–5]. Однако, наличие нагруженного оператора не всегда позволяет применить известную теорию краевых задач к нагруженным дифференциальным уравнениям.

В данной работе продолжается исследование граничных задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом совпадает с порядком дифференциальной части уравнения и точка нагрузки по пространственной переменной ($\bar{x}(t) = t^\omega$) движется с переменной скоростью. Очевидно, что линия нагрузки $\bar{x}(t) = t^\omega$, $t > 0$, приближается к временной оси в нуле, если $0 < \omega < 1/2$; и на бесконечности, если $-\infty < \omega < 0$.

Keywords: *Loaded heat equation, eigenvalue problem, boundary value problem*

2000 Mathematics Subject Classification: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

© А. Д. Ахманова, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, 2008.

В этом случае, как было отмечено в работах [6–12], появляются некоторые новые свойства спектрально-нагруженного дифференциального оператора, например, первая краевая задача для полуограниченной области становится нетеровой, причем индекс задачи зависит от значений коэффициента при нагруженном слагаемом, этим и объясняется введение термина *спектрально-нагруженный*. Различные случаи, когда нагрузка уравнения определяется следом искомого решения граничной задачи на линии $\bar{x}(t) = t^\omega$ и не является слабым возмущением его дифференциальной части, были исследованы в работах [6, 10–14]. В указанных работах были изучены случаи: $\omega = 0$ [10]; $\omega = 1/2$ [11]; $\omega = 1$ [12, 13]; $1/2 < \omega < \infty$ [14].

Из результатов исследований, проведенных в данных работах, следует, что если $1/2 < \omega < \infty$, то *эталонным* является случай $\omega = 1$, то есть картина спектра и вопросы разрешимости граничной задачи в случае $\omega > 1/2$ соответствующим образом вполне определяются картиной спектра и условиями разрешимости *эталонного* случая $\omega = 1$.

Здесь мы изучаем вариант движения точки нагрузки по закону $\bar{x}(t) = t^\omega$, причем $-\infty < \omega < 1/2$, и показываем, что для него *эталонным* является случай с $\omega = 0$. Таким образом, если точка нагрузки движется по степенному закону ($\bar{x}(t) = t^\omega$), то необходимо различать три варианта, три области изменения параметра ω :

1. $1/2 < \omega < \infty$ - при этом варианте *случай* $\omega = 1$ *является эталонным* [14];
2. $\omega = 1/2$ - этот случай необходимо рассматривать отдельно [11];
3. $-\infty < \omega < 1/2$ - в этом варианте, как показано в данной работе, *эталонным является случай* $\omega = 0$.

При исследовании случая $-\infty < \omega < 1/2$ в работе использованы методы функционально-го анализа, теории обобщенных функций, комплексного анализа, операционного исчисления, дифференциальных и интегральных уравнений [18–26].

В первой части работы граничные задачи сводятся к паре особых интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра 2-го рода, для которых выбраны соответствующие характеристические интегральные уравнения. Во второй части, используя ранее полученные результаты по исследованию характеристических интегральных уравнений [27], дается решение исходных интегральных уравнений методом регуляризации Карлемана-Векуа.

1. Постановки задач. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), t \in \mathbb{R}_+\}$ следующие сопряженные граничные задачи для спектрально - нагруженного уравнения теплопроводности:

$$\mathbb{L}_\lambda u = f \iff \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x, t)|_{x=t^\omega} = f, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathbb{L}_\lambda^* v = g \iff \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \bar{\lambda} \cdot \delta''(x - t^\omega) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi = g, \\ v(x, \infty) = 0, \quad v(0, t) = v(\infty, t) = v_x(\infty, t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

и соответствующие обобщённые спектральные задачи:

$$\mathbb{L}_0 u = -\lambda u_{xx}(x, t)|_{x=t^\omega} \iff \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x, t)|_{x=t^\omega}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathbb{L}_0^* v = -\bar{\lambda} \cdot \delta''(x - t^\omega) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi \iff$$

$$\iff \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\bar{\lambda} \cdot \delta''(x - t^\omega) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi, \\ v(x, \infty) = 0, \quad v(0, t) = v(\infty, t) = v_x(\infty, t) = 0; \end{cases} \quad (4)$$

где, в отличие от ранее изученных случаев, полагаем, что $-\infty < \omega < 1/2$. Коэффициент при нагруженном слагаемом: $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\delta(x - t^\omega)$ – дельта-функция, сосредоточенная на открытой линии $x = t^\omega$ области Q . Также предполагаем, что

$e^{t\omega-3/2} f \in L_1(\mathbb{R}_+^t; L_\infty(\mathbb{R}_+^x))$, $e^{-t} t^{-\omega}(x + \sqrt{t}) g \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t; L_1(\mathbb{R}_+^x))$ – заданные функции,

$$t^{2\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \Big|_{x=t^\omega} \in L_1(\mathbb{R}_+),$$

$$e^{t\omega-3/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \Big|_{x=t^\omega} \in L_1(\mathbb{R}_+),$$

$$\int_t^\infty \int_0^\infty \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}} \right) g(\xi, \tau) d\xi d\tau \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad (5)$$

$$\operatorname{erf} a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \exp(-z^2) dz,$$

функция Грина $G(x, \xi, t)$ определяется формулой

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\}.$$

Функциональные классы \mathcal{U} и \mathcal{V} для решений граничных задач (1) и (2) соответственно, а также области определения операторов \mathbb{L}_λ и \mathbb{L}_λ^* , $\mathcal{D}(\mathbb{L}_\lambda)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{L}_\lambda^*)$ определим следующим образом:

$$\mathcal{U} = \left\{ u | e^{t\omega}(x + \sqrt{t})^{-1} u, e^{t\omega-3/2}(u_t - u_{xx}) \in L_1(\mathbb{R}_+^t; L_\infty(\mathbb{R}_+^x)), e^{t\omega-3/2} u_{xx}(x, t) \Big|_{x=t^\omega} \in L_1(\mathbb{R}_+) \right\}, \quad (6)$$

$$\mathcal{V} = \left\{ v | e^{-t} t^{3/2-\omega} v, e^{-t} t^{-\omega}(x + \sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t; L_1(\mathbb{R}_+^x)), e^{-t} t^{3/2-\omega} \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi \in L_\infty(\mathbb{R}_+) \right\}, \quad (7)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}_\lambda) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{L}_0) = \{u | u \in \mathcal{U}, u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}_\lambda^*) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{L}_0^*) = \{v | v \in \mathcal{V}, v(x, \infty) = 0, v(0, t) = 0, v(\infty, t) = 0, v_x(\infty, t) = 0\}. \quad (9)$$

Граничная задача (2) является сопряженной к задаче (1). Действительно, согласно (1) – (9) имеем

$$\langle \mathbb{L}u, v \rangle = \langle u, \mathbb{L}^*v \rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{L}), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{L}^*). \tag{10}$$

Задача 1. Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5) – (9).

Задача 2. Требуется исследовать обобщенные спектральные задачи (3) и (4), то есть определить пары $\{\lambda, u_\lambda(x, t)\}$ и $\{\lambda, v_\lambda(x, t)\}$ при условиях (6) – (9).

2. Интегральные уравнения краевых задач. Считая нагруженное слагаемое в граничной задаче (1) временно известным, обратим ее дифференциальную часть. Будем иметь:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) u_{\eta\eta}(\eta, \tau)|_{\eta=\tau\omega} d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{11}$$

так как справедливо равенство $\int_0^\infty G(x, \xi, t) d\xi = \operatorname{erf} (x/(2\sqrt{t}))$.

Таким образом, из соотношения (11) следует, что для нахождения решения задачи (1) достаточно определить нагруженное слагаемое $u_{xx}(x, t)|_{x=t\omega}$. Для его определения продифференцируем обе части соотношения (11) по переменной x дважды и в получившемся равенстве положим $x = t\omega$. Тогда, если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) &= e^{t\omega-3/2} \cdot u_{xx}(x, t)|_{x=t\omega}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_2(t, \tau) &= e^{-(\tau-t)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\omega-3/2} \frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp \left(-\frac{t^2\omega}{4(t-\tau)} \right), \\ \tilde{f}_1(t) &= e^{t\omega-3/2} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)_{|x=t\omega}, \end{aligned}$$

из (11) получим интегральное уравнение

$$\tilde{\mathbf{K}}_{2\lambda} \tilde{\mu} \equiv (I - \lambda \tilde{\mathbf{K}}_2) \tilde{\mu} \equiv \tilde{\mu}(t) - \lambda \int_0^t \tilde{\mathcal{K}}_2(t, \tau) \tilde{\mu}(\tau) d\tau = \tilde{f}_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Далее, если введем обозначения

$$\mu(t) = t^{\omega-3/2} \cdot u_{xx}(x, t)|_{x=t\omega}, \tag{12}$$

$$\mathcal{K}_2(t, \tau) = \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\omega-3/2} \frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp \left(-\frac{t^2\omega}{4(t-\tau)} \right), \tag{13}$$

$$f_1(t) = t^{\omega-3/2} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)_{|x=t\omega}, \tag{14}$$

то из представления (11) получим интегральное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda} \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K}_2) \mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t \mathcal{K}_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Нам необходимо решить уравнение (15). Однако для его исследования достаточно решить уравнение (15) в силу следующего замечания [17].

Замечание 1. Пусть решение интегрального уравнения $\varphi(t) + \int_a^t \mathcal{K}(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t)$ имеет вид $\varphi(t) = f(t) + \int_a^t \mathcal{R}(t, \tau)f(\tau)d\tau$. Тогда решение интегрального уравнения $\varphi(t) + \int_a^t \mathcal{K}(t, \tau)\frac{g(t)}{g(\tau)}\varphi(\tau)d\tau = f(t)$ дается формулой $\varphi(t) = f(t) + \int_a^t \mathcal{R}(t, \tau)\frac{g(t)}{g(\tau)}f(\tau)d\tau$.

Замечание 2. Заметим, в (14) что суммируемость функции $e^t f_1(t)$ на \mathbb{R}_+ следует из условия (5) на f .

Таким образом, мы переходим к исследованию уравнения (15) и его сопряженного уравнения (20) (см. ниже).

Отметим, что ядро $\mathcal{K}_2(t, \tau)$ обладает следующими свойствами:

- 1⁰. ядро $\mathcal{K}_2(t, \tau)$, $0 < \tau < t < \infty$, непрерывно;
- 2⁰. ядро $\mathcal{K}_2(t, \tau) \geq 0$, $0 < \tau < t < \infty$;
- 3⁰. ядро $\mathcal{K}_2(t, \tau)$ имеет слабую особенность и справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t \mathcal{K}_2(t, \tau)d\tau = 0. \quad (16)$$

Наличие свойств 1⁰, 2⁰ является очевидным. Покажем справедливость свойства 3⁰. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega-3/2} \frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}\right) d\tau = \\ & = \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{3/2-\omega} \frac{4}{\sqrt{\pi}t^{2\omega}} \cdot \left(\frac{t^\omega}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^3 \exp\left[-\left(\frac{t^\omega}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^2\right] d\tau \leq \\ & \leq \lim_{t \rightarrow +0} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \cdot e^{-3/2} \cdot \frac{1}{t^{3/2+\omega}} \int_0^t \tau^{3/2-\omega} d\tau = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \cdot e^{-3/2} \cdot t^{1-2\omega} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь использованы условия: $0 < \tau < t < \infty$, $3/2 - \omega > 1$ и неравенство

$$z^m \cdot \exp(-z^n) \leq \left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} \cdot e^{-m/n} \quad \forall z > 0.$$

Отметим, что условия 1⁰ – 3⁰ имеют место также и для ядра $\widetilde{\mathcal{K}}_2(t, \tau)$.

Далее, аналогично редуцируем сопряженную краевую задачу (2) к соответствующему интегральному уравнению. Для этого обращая дифференциальную часть в задаче (2), аналогично как и в задаче (1) получим следующее интегральное соотношение:

$$v(x, t) = -\bar{\lambda} \int_t^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, \tau - t) \delta''(\xi - \tau^\omega) \otimes \int_0^\infty v(\eta, \tau) d\eta d\xi d\tau + \int_t^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, \tau - t) g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (18)$$

Теперь интегрируя обе части равенства (18) по переменной x от 0 до ∞ и вводя обозначение

$$\tilde{v}(t) = e^{-t} t^{3/2-\omega} \cdot \int_0^{\infty} v(\eta, t) d\eta,$$

получим интегральное уравнение:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{2\lambda}^* \tilde{\nu} \equiv (I - \bar{\lambda} \tilde{\mathbf{K}}_2^*) \tilde{\nu} \equiv \tilde{\nu}(t) - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \tilde{\mathcal{K}}_2(\tau, t) \tilde{\nu}(\tau) d\tau = \tilde{g}_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (20)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\tilde{\mathcal{K}}_2(\tau, t) = e^{-(t-\tau)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega} \cdot \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right),$$

$$\tilde{g}_1(t) = e^{-t} t^{3/2-\omega} \cdot \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right) g(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Далее, как и в случае граничной задачи (1), вводя обозначение

$$\nu(t) = t^{3/2-\omega} \cdot \int_0^{\infty} v(\eta, t) d\eta, \quad (19)$$

получим интегральное уравнение:

$$\mathbf{K}_{2\lambda}^* \nu \equiv (I - \bar{\lambda} \mathbf{K}_2^*) \nu \equiv \nu(t) - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \mathcal{K}_2(\tau, t) \nu(\tau) d\tau = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (20)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{K}_2(\tau, t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega} \cdot \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \quad (21)$$

$$g_1(t) = t^{3/2-\omega} \cdot \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right) g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (22)$$

Отметим, что здесь также справедлив аналог замечания 1.

Замечание 3. Заметим, что существенная ограниченность функции $e^{-t} g_1(t)$ (22) на \mathbb{R}_+ следует из условия (5) на функцию g .

Необходимо отметить, что ядро сопряженного интегрального уравнения (20) функция $\mathcal{K}_2(\tau, t)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} \mathcal{K}_2(\tau, t) d\tau = 1. \quad (23)$$

Действительно, так как $t < \tau < \infty$, то это следует из соотношений:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \left\{ \left[\frac{\tau^\omega}{4(\tau-t)^{3/2}} - \frac{\omega \cdot \tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega \cdot \tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}} \right\} e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau = \left\| \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\tau-t}} = z; \quad dz = \left(-\frac{\tau^\omega}{4(\tau-t)^{3/2}} + \frac{\omega \cdot \tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}} \right) d\tau \right\| = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\omega \cdot \tau^{\omega-1}}{\sqrt{\tau-t}} \cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau = 1 + \mathcal{I}(t) \\ |\mathcal{I}(t)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{|\omega| \cdot \tau^{\omega-1}}{\sqrt{\tau-t}} \cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau = \left\| \tau = \frac{t}{x}; \quad d\tau = -\frac{t}{x^2} dx \right\| = \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{t^{\omega-1} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot t}{x^{\omega-1} \cdot \sqrt{1-x} \cdot x^2 \cdot t^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{t^{2\omega} \cdot x}{4x^{2\omega} \cdot t(1-x)}} dx = \\ &= \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\omega}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^{\omega+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1-x}} \cdot e^{-\frac{1}{t^{1-2\omega}} \cdot \frac{x^{1-2\omega}}{4(1-x)}} dx \leq \\ &\leq \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\omega}} \cdot \int_0^1 x^{(\frac{1}{2}-\omega)-1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot B(1/2 - \omega, 1/2) \cdot t^{\omega-1/2}, \end{aligned}$$

где $B(\cdot, \cdot)$ – бета-функция Эйлера.

Таким образом, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathcal{I}(t)| = 0$ при $-\infty < \omega < 1/2$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau = 1.$$

Равенство (23) справедливо и для ядра $\widetilde{\mathcal{K}}_2(\tau, t)$. Это означает, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве существенно ограниченных функций и определяемого ядром $\widetilde{\mathcal{K}}_2(\tau, t)$, равна единице. Это существенно отличает уравнение (20) от уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существует и единственно (соответственно и для уравнения (20)).

Очевидно, что уравнение (20) (соответственно уравнение (20)) является сопряженным интегральным уравнением для (15) (соответственно для (15)).

Таким образом, решение сопряженных граничных задач (1) и (2) сведено к исследованию пары сопряженных интегральных уравнений (15) и (20), которые в дальнейшем будем называть *исходными*.

Замечание 4. Вообще говоря, сопряженность граничных задач (1) и (2) понимается в том смысле, что соответствующие им интегральные уравнения (15) и (20) являются сопряженными.

Дальнейшее исследование разрешимости граничных задач (1) и (2) проводится по следующей схеме:

- введение характеристического интегрального уравнения, соответствующего главной части ядра интегрального оператора из (20), и его сопряженного;
- исследование вопросов разрешимости характеристических интегральных уравнений;
- изучение разрешимости интегральных уравнений (20) и (15) методом регуляризации (Карлемана-Векуа) решений характеристических интегральных уравнений;
- исследование разрешимости граничных задач (2) и (1);
- исследование обобщенных спектральных задач (4) и (3).

3. Характеристические интегральные уравнения. Характеристическими интегральными уравнениями для (15) и (20) будут, соответственно, следующие сопряженные уравнения:

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau)\mu(\tau)d\tau = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_\lambda^* \nu \equiv (I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \bar{\lambda} \int_t^\infty \mathcal{K}(\tau, t)\nu(\tau)d\tau = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (25)$$

где

$$\mathcal{K}(\tau, t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \frac{\alpha^{3/2}\tau^{\alpha-1}}{2\sqrt{\pi}(\tau^\alpha - t^\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{4(\tau^\alpha - t^\alpha)}\right), \quad \alpha = 1 - 2\omega, \quad (26)$$

причем, всюду в дальнейшем будем учитывать то, что $\alpha > 0$, так как $-\infty < \omega < 1/2$.

Отметим, что ядро характеристического уравнения $\mathcal{K}(\tau, t)$ обладает теми же свойствами, что и ядро $\mathcal{K}_2(\tau, t)$, и, в частности, что очень важно, для него справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau)d\tau = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \mathcal{K}(\tau, t)d\tau = 1. \quad (27)$$

Проверим справедливость этих равенств ($\alpha > 0$). Имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \frac{(\alpha)^{3/2} \cdot t^{\alpha-1}}{2\sqrt{\pi}(t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4(t^\alpha - \tau^\alpha)}} d\tau \leq \frac{(3/2)^{3/2} e^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha-1} \int_0^t d\tau = 0,$$

так как

$$z^m \cdot \exp(-z^n) \leq \left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} \cdot e^{-m/n} \quad \forall z > 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \frac{(\alpha)^{3/2} \cdot \tau^{\alpha-1}}{2\sqrt{\pi}(\tau^\alpha - t^\alpha)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4(\tau^\alpha - t^\alpha)}} d\tau =$$

$$= \left\| \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau^\alpha - t^\alpha}} = z; \quad dz = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4} \frac{\alpha \cdot \tau^{\alpha-1}}{(\tau^\alpha - t^\alpha)^{3/2}} d\tau \right\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4t^\alpha \cdot z^2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}}} \cdot e^{-z^2} dz = 1.$$

Далее отметим, для того чтобы интегральное уравнение (25) было характеристическим, его ядро должно удовлетворять следующим двум условиям:

1⁰. Оно должно сводиться к "эталонному" уравнению (интегральному уравнению, соответствующему случаю $\omega = 0$);

2⁰. Разность ядер

$$\mathcal{K}_2(\tau, t) - \mathcal{K}(\tau, t) = \widetilde{\mathcal{K}}(\tau, t)$$

должна обладать слабой особенностью (при $t \rightarrow \infty$).

Проверим выполнение условия 1⁰. Для этого в уравнении (25) произведем следующие замены независимых переменных: $t = [\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}}$, $\tau = [\alpha \cdot \tau_1]^{\frac{1}{\alpha}}$, и введем обозначения:

$$\psi(t_1) = t_1^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} \nu \left([\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}} \right), \quad g_2(t_1) = t_1^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} g_1 \left([\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}} \right), \quad k(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{4z} \right), \quad z > 0,$$

тогда уравнение (25) запишется в виде:

$$k_{\lambda}^* \psi \equiv (I - \bar{\lambda} k^*) \psi \equiv \psi(t_1) - \bar{\lambda} \int_{t_1}^{\infty} k(\tau_1 - t_1) \psi(\tau_1) d\tau_1 = g_2(t_1). \quad (28)$$

Действительно, имеем

$$\psi(t_1) - \bar{\lambda} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(\tau_1 - t_1)} \right] \psi(\tau_1) d\tau_1 = g_2(t_1). \quad (29)$$

Далее, соответственно, уравнение (24) принимает вид:

$$\varphi(t_1) - \lambda \int_0^{t_1} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp \left[-\frac{1}{4(t_1 - \tau_1)} \right] \varphi(\tau_1) d\tau_1 = f_2(t_1), \quad (30)$$

где

$$\varphi(t_1) = t_1^{\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2}} \cdot \mu \left([\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}} \right), \quad f_2(t_1) = t_1^{\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2}} \cdot f_1 \left([\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}} \right).$$

Теперь переходим к доказательству справедливости условия 2⁰, которая следует из утверждения следующей теоремы.

Теорема 1. При выполнении условий $\alpha > 0$ и $0 < t < \tau < \infty$ имеет место оценка:

$$\left| \mathcal{K}_2(\tau, t) - \mathcal{K}(\tau, t) \right| \leq C(\alpha) \frac{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\tau^{3/2} \sqrt{\tau-t}} \cdot \exp \left[-C(\alpha) \frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau-t} \right], \quad (31)$$

и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} |\mathcal{K}_2(\tau, t) - \mathcal{K}(\tau, t)| d\tau = 0.$$

Для доказательства этой теоремы, и для того, чтобы более проще показать, то что интегральное уравнение (25) с бесконечным пределом интегрирования является характеристическим для уравнения (20), удобнее свести уравнения (20) и (25) к уравнениям на конечном промежутке $(0, t)$. Для этого в интегральных уравнениях (20) и (25) произведем следующие замены независимых переменных: $t = 1/t_1$, $\tau = 1/\tau_1$. Тогда они запишутся, соответственно, в виде:

$$\nu(t_1) - \bar{\lambda} \int_0^{t_1} \left(\frac{\tau_1}{t_1} \right)^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{t_1^{3/2} \cdot \tau_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{\pi}(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \cdot \exp \left[-\frac{t_1 \cdot \tau_1^{\alpha}}{4(t_1 - \tau_1)} \right] \cdot \nu(\tau_1) d\tau_1 = g_1(t_1). \quad (32)$$

$$\nu(t_1) - \bar{\lambda} \int_0^{t_1} \left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha^{3/2} \cdot t_1^{\frac{3\alpha}{2}} \cdot \tau_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{\pi}(t_1^\alpha - \tau_1^\alpha)^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{\alpha \cdot t_1^\alpha \cdot \tau_1^\alpha}{4(t_1^\alpha - \tau_1^\alpha)}\right] \cdot \nu(\tau_1) d\tau_1 = g_1(\tau_1). \quad (33)$$

Переобозначая переменные t_1 и τ_1 через t и τ соответственно и обозначая ядра уравнений (32) и (33) через $\mathcal{K}'_2(t, \tau)$ и $\mathcal{K}'(t, \tau)$ соответственно, представим их в виде:

$$\mathcal{K}'_2(t, \tau) = P'_2(t, \tau) \exp\{-Q'_2(t, \tau)\}, \quad \mathcal{K}'(t, \tau) = P'(t, \tau) \exp\{-Q'(t, \tau)\}, \quad (34)$$

где

$$P'_2(t, \tau) = \frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \tau^\alpha}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}; \quad Q'_2(t, \tau) = \frac{t \cdot \tau^\alpha}{4(t-\tau)};$$

$$P'(t, \tau) = \frac{\alpha^{3/2} \cdot t^{\alpha-1} \cdot \tau^\alpha}{2\sqrt{\pi}(t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2}}; \quad Q'(t, \tau) = \frac{\alpha \cdot t^\alpha \cdot \tau^\alpha}{4(t^\alpha - \tau^\alpha)}.$$

Отметим, что для ядер $\mathcal{K}'_2(t, \tau)$ и $\mathcal{K}'(t, \tau)$ также выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \mathcal{K}'_2(\tau, t) d\tau = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \mathcal{K}'(t, \tau) d\tau = 1, \quad (35)$$

и справедлива следующая

Теорема 2. При $\alpha > 0$ и $0 < \tau < t < \infty$ выполняется оценка:

$$\mathcal{K}'_0(\tau, t) = \left| \mathcal{K}'(t, \tau) - \mathcal{K}'_2(\tau, t) \right| \leq C(\alpha) \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left[-C(\alpha) \frac{t \cdot \tau^\alpha}{t-\tau}\right], \quad (36)$$

и верно следующее соотношение $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t |\mathcal{K}'(t, \tau) - \mathcal{K}'_2(t, \tau)| d\tau = 0$.

Вначале докажем следующую лемму:

Лемма 1. При выполнении условий теоремы 2 справедливы следующие неравенства:

$$P'_0(t, \tau) = |P'(t, \tau) - P'_2(t, \tau)| \leq C(\alpha) \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}; \quad (37)$$

$$Q'_0(t, \tau) = |Q'_2(t, \tau) - Q'(t, \tau)| \leq C_2(\alpha) \cdot t^\alpha. \quad (38)$$

Доказательство леммы. Покажем справедливость (37). Имеем

$$\begin{aligned} & t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{t-\tau} \cdot |P'(t, \tau) - P'_2(t, \tau)| = \\ &= t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{t-\tau} \cdot \left| \frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \tau^\alpha}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} - \frac{\alpha^{3/2} \cdot t^{\alpha-1} \cdot \tau^\alpha}{2\sqrt{\pi}(t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2}} \right| = \\ &= \frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{t-\tau} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \tau^\alpha \cdot \left| \frac{t^{1-\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2} - \alpha^{3/2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \cdot (t-\tau)^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2} \cdot (t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2}} \right| = \\ &= \frac{\tau^\alpha}{2\sqrt{\pi}} \left| \frac{t^{1-\alpha}(t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2} - \alpha^{3/2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \cdot (t-\tau)^{3/2}}{(t-\tau) \cdot (t^\alpha - \tau^\alpha)^{3/2}} \right| = \end{aligned}$$

$$= \left\| \tau = x \cdot t, \quad 0 < x < 1 \right\| = \frac{x^\alpha}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left| \frac{(1-x^\alpha)^{3/2} - \alpha^{3/2}(1-x)^{3/2}}{(1-x)(1-x^\alpha)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot P'_0(x).$$

Функция $P'_0(x)$ непрерывна для всех значений x , $0 \leq x < 1$, но имеет особенность при $x = 1$. Поэтому вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(1-x^\alpha)^{3/2} - \alpha^{3/2}(1-x)^{3/2}}{(1-x)(1-x^\alpha)^{3/2}} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{1 - \alpha^{3/2} \left(\frac{1-x}{1-x^\alpha} \right)^{3/2}}{1-x} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{1 - x^{\frac{3}{2} - \frac{3\alpha}{2}}}{1-x} \right| = \frac{3|1-\alpha|}{2}.$$

Теперь докажем неравенство (38). Имеем

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} Q'_0(t, \tau) &= t^{-\alpha} \cdot \left| \frac{t \cdot \tau^\alpha}{4(t-\tau)} - \frac{\alpha \cdot t^\alpha \cdot \tau^\alpha}{4(t^\alpha - \tau^\alpha)} \right| = \left\| \tau = t \cdot x, \quad 0 < x < 1 \right\| = \\ &= \frac{x^\alpha}{4} \cdot \left| \frac{1}{1-x} - \frac{\alpha}{1-x^\alpha} \right| = \frac{x^\alpha}{4} \cdot \left| \frac{1-x^\alpha - \alpha + \alpha x}{(1-x)(1-x^\alpha)} \right|. \end{aligned}$$

Функция $Q'_0(t, tx) = Q'_0(x)$ — монотонна, $Q'_0(0) = 0$ и непрерывна для всех значений $x \in (0, 1)$, имеет особенность лишь в точке $x = 1$.

Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^\alpha}{4} \left| \frac{x\alpha - (x^\alpha + \alpha - 1)}{(1-x)(1-x^\alpha)} \right| &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1-0} \left| \frac{\alpha - \alpha \cdot x^{\alpha-1}}{-(1-x^\alpha) - \alpha x^{\alpha-1}(1-x)} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1-0} \left| \frac{(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-2}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1} + (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-2}(1-x) + \alpha \cdot x^{\alpha-1}} \right| = \frac{|1-\alpha|}{8}. \end{aligned}$$

То есть, $C'_2 = |1-\alpha|/8$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Проведем доказательство для тех значений параметра α и $0 < \tau < t < \infty$, при которых $Q'(t, \tau) - Q'_2(t, \tau) \geq 0$. Для значений параметра α и $0 < \tau < t < \infty$, для которых разность $Q'(t, \tau) - Q'_2(t, \tau) < 0$, достаточно будет в доказательстве поменять ролями функции $Q'(t, \tau)$ и $Q'_2(t, \tau)$; $P'(t, \tau)$ и $P'_2(t, \tau)$ соответственно.

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{H}'(t, \tau) - \mathcal{H}'_2(t, \tau) \right| &= \left| P'(t, \tau) \exp\{-Q'(t, \tau)\} - P'_2(t, \tau) \exp\{-Q'_2(t, \tau)\} \right| = \\ &= \left| P'(t, \tau) \exp\{-Q'(t, \tau)\} - P'_2(t, \tau) \exp\{-Q'(t, \tau)\} + \right. \\ &\quad \left. + P'_2(t, \tau) \exp\{-Q'(t, \tau)\} - P'_2(t, \tau) \exp\{-Q'_2(t, \tau)\} \right| \leq \\ &\leq \left| (P'(t, \tau) - P'_2(t, \tau)) \exp\{-Q'(t, \tau)\} + P'_2(t, \tau) \left[\exp\{-Q'(t, \tau)\} - \exp\{-Q'_2(t, \tau)\} \right] \right| \leq \\ &\leq \left| (P'(t, \tau) - P'_2(t, \tau)) \right| \exp\{-Q'(t, \tau)\} + \\ &\quad + \left| P'_2(t, \tau) \right| \exp\{-Q'(t, \tau)\} \left| (1 - \exp(-Q'_2(t, \tau) + Q'(t, \tau))) \right| \leq \\ &\leq \left| (P'(t, \tau) - P'_2(t, \tau)) \right| \exp\{-Q'(t, \tau)\} + P'_2(t, \tau) \left| (Q'_2(t, \tau) - Q'(t, \tau)) \right| \exp\{-Q'(t, \tau)\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 1 и следующее двойное неравенство [15, с. 55]:

$$b_1 \cdot t^{\alpha-1}(t - \tau) \leq t^\alpha - \tau^\alpha \leq b_2 \cdot t^{\alpha-1}(t - \tau), \tag{39}$$

где $b_1 = \min\{1, \alpha\}$, $b_2 = \max\{1, \alpha\}$, вначале получаем

$$\exp\{-Q'(t, \tau)\} = \exp\left\{-\frac{\alpha \cdot t^\alpha \cdot \tau^\alpha}{4(t^\alpha - \tau^\alpha)}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t^\alpha \cdot \tau^\alpha}{4t^{\alpha-1}(t - \tau)}\right\} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{4(t - \tau)}\right\}.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} & \left| (P'(t, \tau) - P_2'(t, \tau)) \right| \exp\{-Q'(t, \tau)\} \leq C_1 \cdot \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{4(t - \tau)}\right\}; \\ & P_2'(t, \tau) \left| Q_2'(t, \tau) - Q'(t, \tau) \right| \cdot \exp\{-Q'(t, \tau)\} \leq \\ & \leq C_2 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \tau^\alpha \cdot t^\alpha}{2\sqrt{\pi}(t - \tau)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{8(t - \tau)}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{8(t - \tau)}\right\} \leq \\ & \leq C_2 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \cdot \tau^\alpha \cdot t^\alpha}{2\sqrt{\pi} \cdot (t - \tau)^{3/2}} \cdot \frac{b_2 \cdot (t - \tau)}{t \cdot \tau^\alpha \cdot \alpha} \cdot \frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{8(t - \tau)} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \tau^\alpha}{8(t - \tau)}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{8(t - \tau)}\right\} \leq \\ & \leq \left\| x \cdot e^{-x} \leq \frac{1}{e} \right\| \leq C_3 \cdot \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left\{\frac{\alpha}{b_2} \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{8(t - \tau)}\right\}; \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\left| \mathcal{K}'(t, \tau) - \mathcal{K}_2'(t, \tau) \right| \leq C \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-C \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{t - \tau}\right\}.$$

Выполнение неравенства (36) означает, что ядро $\mathcal{K}'_0(t, \tau) = \mathcal{K}'_2(t, \tau) - \mathcal{K}'(t, \tau)$ имеет слабую особенность и справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left\{-C \cdot \frac{t \cdot \tau^\alpha}{(t - \tau)}\right\} d\tau \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0,$$

значит уравнение (25) действительно является характеристическим для уравнения (20). Таким образом, теорема 2, а тем самым и теорема 1, доказана.

Заключение. В этой части работы рассматриваемые в работе граничные задачи для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности с точкой нагрузки по пространственной переменной ($\bar{x}(t) = t^\omega$, $-\infty < \omega < 1/2$), движущейся с переменной скоростью, сведены к паре особых интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра 2-го рода, для которых найдены соответствующие характеристические интегральные уравнения.

Цитированная литература

1. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С.86 – 94.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.

3. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.
4. Дженалиев М. Т. // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С.48 – 54.
5. Кожанов А. И. // Математические заметки. 2004. Т.76, вып. 6. С.840 – 853.
6. Рамазанов М. И. // Доклады АМАН (Нальчик). 2004. Т.7, № 1. С.84 – 91.
7. Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. // Доклады АМАН (Нальчик). 2004. Т.7, № 1. С.18 – 23.
8. Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е. // Мат. журн. Алматы, 2006. Т. 6, № 1(19). С.33 – 46.
9. Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е. // Мат. журн. Алматы, 2006. Т. 6, № 2(20). С.37 – 44.
10. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2007. С.114 – 127.
11. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е. Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки // Препринт №6, ИМ ЦФМИ МОН РК. 2006. Алматы, 40с.
12. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 4. С.498 – 508.
13. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С.788 – 794.
14. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47, № 3. С.527 – 547.
15. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
16. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. М., 1975.
17. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.
18. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979.
19. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., 1977.
20. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
21. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М., 1986.
22. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. М., 2001.
23. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.
24. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
25. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.
26. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
27. Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. // Мат. журн. Алматы. 2008. Т. 8, № 2(28). С. 5 – 17.

Поступила в редакцию 16.01.2008г.

УДК 662.92

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ВСКИПАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Е. Б. ЗАКИР, С. Д. МАУСУМБЕКОВА

КазНУ имени аль-Фараби

050012 Алматы ул. Масанчи, 37/49 ked@math.kz

Разработана методика исследования нестационарного волнового истечения насыщенной жидкости из трубопроводов высокого давления при аварийной разгерметизации. Для описания движения парожидкостной смеси использована гомогенная модель односкоростного насыщенного потока. Исходные дифференциальные уравнения модели преобразованы к виду, позволяющему решать их численно при минимальных затратах машинного времени. На основе известных разностных методов построены алгоритмы интегрирования этих уравнений. Методика апробирована на тестовой задаче о поршне.

Актуальность исследований волнового процесса истечения вскипающего теплоносителя обусловлена возрастающими требованиями к обеспечению безопасности современных энергетических установок в аварийных условиях эксплуатации. Установление законов изменения параметров теплоносителя во времени в контурах высокого давления при внезапной разгерметизации необходимо для расчета дополнительных нагрузок и экстремальных температур в конструктивных элементах контуров, для проектирования устройств локализации последствий аварии и т. д. В инженерной практике расчет аварийного истечения высокотемпературного теплоносителя проводится обычно в рамках квазистационарных методик [1-4]. Изучение движения гетерогенных смесей с учетом исходной структуры смеси и физических свойств фаз связано с привлечением новых параметров и решением уравнений более сложных, чем те, с которыми приходится иметь в механике однофазных (гомогенных) сред. При этом детальное описание внутрифазных и межфазных взаимодействий в гетерогенных средах порою чрезвычайно сложно, и для получения обозримых результатов и их понимания здесь особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям. Проблема аварийной разгерметизации систем с жидким теплоносителем при высоком давлении изучена далеко недостаточно. Это относится и к механической стороне явления волнового истечения вскипающей жидкости, сопровождающегося интенсивными фазовыми превращениями и перестройкой структуры парожидкостного потока. Теоретическое исследование целесообразно проводить в направлении анализа физики процесса, построения его математических моделей и разработки методов численного интегрирования, описывающих процесс уравнений. В данной

Keywords: *two-phase flow, pressure, subsonic flow*

2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

© Е. Б. Закир, С. Д. Маусумбекова, 2008.

работе, используется термодинамическое равновесное приближение. Дана постановка задачи, представлена эффективная методика ее численного решения и приведены некоторые результаты исследования.

Постановка задачи.

Основные допущения, используемые в математической формулировке задачи:

- движение среды одномерное, влиянием конструктивных особенностей трубопроводов на процесс истечения можно пренебречь;
- их температуры тождественно равны температуре насыщения при данном давлении;
- потерями на трение, а также эффектами разделения фаз при вскипании и движении смеси можно пренебречь.

В силу двух последних допущений двухфазная парожидкостная смесь моделируется однофазной сплошной средой, состояние которой в общем случае определяется двумя независимыми переменными: давлением p и массовым паросодержанием x . Уравнения состояния этой среды строятся по известным уравнениям состояния фаз с использованием обычных предположений об аддитивности термодинамических функций:

$$i(x, p) = (1 - x)i_1(p) + xi_2(p) = i_1(p) + xl(p); \quad V(p) = (1 - x)V_1(p) + xV_2(p), \quad (1)$$

где i и V – удельные энтальпия и объем смеси; l – удельная теплота парообразования; индексами 1 и 2 отмечены параметры жидкости и пара соответственно. Уравнения сохранения массы и импульса и уравнение притока тепла для одномерного нестационарного движения равновесной парожидкостной смеси в канале постоянного сечения без учета сил трения имеют следующий вид:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\rho dv}{dz} = 0; \quad \frac{\rho dv}{dt} + \frac{dp}{dz} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\rho di}{dt} = \frac{dp}{dt} + Q, \quad (3)$$

где ρ и v – плотность и скорость смеси; Q – интенсивность внешнего притока тепла к единице объема смеси. С учетом уравнения сохранения массы из уравнений (3) получим уравнение для определения давления смеси:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\rho a^2 dv}{dz} + C, \quad (4)$$

где a и C зависят от параметров смеси и вида уравнений состояний. Полученная система уравнений (2), (3), (4) замкнута и имеет явный дифференциальный вид, позволяющий определять параметры нестационарного парожидкостного потока с произвольными уравнениями состояния фаз без применения итерационных процедур.

Пусть имеется цилиндрический сосуд (кусок трубопровода) постоянного поперечного сечения длиной L , заполненный насыщенной жидкостью с давлением p_0 и температурой $T_0 = T_s(p_0)$. В момент времени $t = 0$ происходит внезапная разгерметизация правого торца (разрыв диафрагмы). Жидкость в выходном сечении вскипает, образуя парожидкостная смесь приходит в движение и истекает с давлением p_c , значительно меньшим давления p_0 . Внутри трубы по жидкости пойдет волна разряжения. Задача расчета нестационарного процесса, сопровождающего внезапную разгерметизацию трубопровода, заключается в определении законов изменения давлений, паросодержаний и температур во времени в различных сечениях трубы, массовых расходов фаз через сечения разгерметизации и общего темпа опорожнения сосуда. Математически она представляет собой смешанную задачу для системы дифференциальных

уравнений в частных производных (2), (4) со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} v(z, 0) = 0, \quad p(z, 0) = p_0, \quad T(z, 0) = T_s(p_0); \\ v(0, t) = 0, \quad p(L, t) = p_c. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (2) целесообразно привести к дивергентному виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Для определения давления использовано уравнение, записанное в "квазидивергентном" виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p v}{\partial z} = (p - \rho a^2) \partial v / \partial z + C. \quad (7)$$

Численная реализация. Для численной реализации данной задачи используем неявную схему Бима-Уорминга. Данный метод протестирован на следующей модельной задаче: в трубу с первоначально неподвижным газом с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ и с параметрами p_0, T_0 вдвигается поршень со скоростью $V = 1,56a_0$. В момент времени, когда инициированная ударная волна прошла 50 ячеек разностной сетки, поршень останавливается. Необходимо рассчитать возникающее течение. Пусть ρ, u, p, E – плотность, скорость, давление и полная удельная энергия идеального калорически совершенного газа с показателем адиабаты γ . Используем безразмерные переменные, при этом значения ρ, u, p, E будем относить к значениям ρ_0, a_0, p_0, E_0 в невозмущенной области течения (a_0 – скорость звука, $a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$), соответственно. Уравнения одномерного течения в указанных безразмерных переменных имеют следующий "дивергентный" вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho E u}{\partial x} = 0, \quad p = \gamma(\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{u^2}{2} \right).$$

Уравнение Навье-Стокса в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E(U)}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

В схеме Бима-Уорминга решение получают установлением по времени в соответствии со следующей разностной формулой:

$$\Delta^n U = \frac{\theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta^n U) + \frac{1 - \theta_1 \Delta t}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial t} (U^n) + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta^{n-1} U) + O[(\theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2)(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3], \quad (10)$$

где

$$\Delta^n U = U^{n+1} - U^n.$$

Эта общая разностная формула при соответствующем выборе параметров θ_1 и θ_2 описывает многие обычные разностные схемы. Используем неявную схему Эйлера, при $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0$. Преобразуем (9), применяя (10). Получаем:

$$\Delta^n U = \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (-\Delta^n E) + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (-E^n) + O(\Delta t)^2. \quad (11)$$

Это уравнение нелинейно, для его линеаризации используем разложение в ряд Тейлора.

$$E^{n+1} = E^n + \left(\frac{\partial E(U)}{\partial U} \right)^n (\Delta^n U = U^{n+1} - U^n) + O(\Delta t)^2. \quad (12)$$

Используем следующие предположения:

$$E^{n+1} \approx \left(\frac{\partial E(U)}{\partial U} \right)^n U^{n+1}, \quad (13)$$

$$[A]^n = \left(\frac{\partial E(U)}{\partial U} \right)^n, \quad (14)$$

где $[A]^n$ – матрица Якоби. Приведем (16) к виду системы векторных уравнений:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i,$$

$$[A]^n U_{i-1}^{n+1} - \frac{2\Delta x}{\Delta t} [I] U_i^{n+1} + (-[A]^n) U_{i+1}^{n+1} = -\frac{2\Delta x}{\Delta t} U_i^n, \quad (15)$$

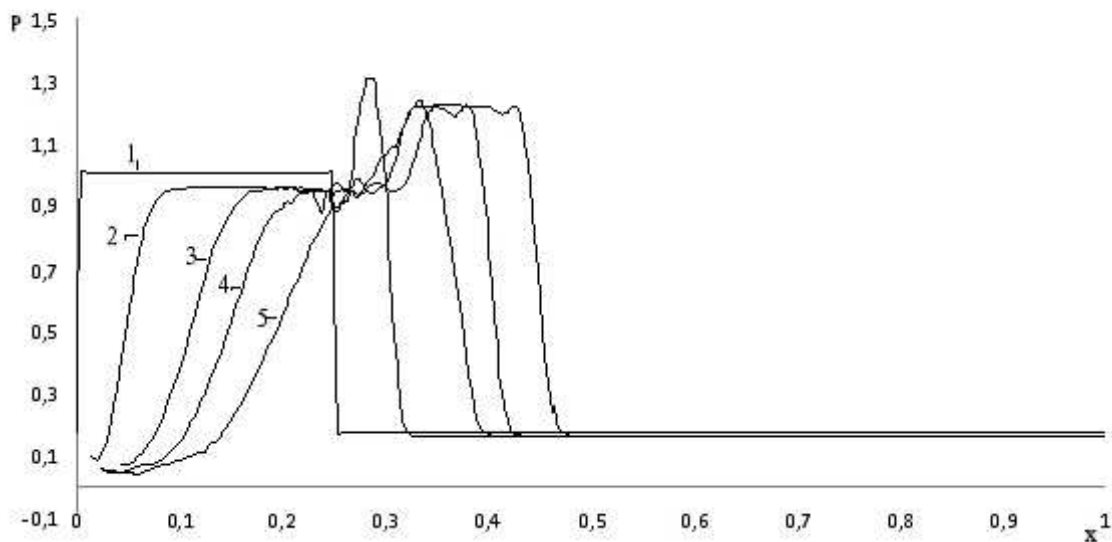


Рис. 1: Профили давлений: 1 - $n=0$, 2 - $n=40$, 3 - $n=80$, 4 - $n=120$, 5 - $n=160$.

Полученные результаты, приведенные на рис. 1 (профили давлений в различные моменты времени), качественно согласуются с результатами работы [6].

Таким образом, систему (6) – (7) запишем в векторной форме, следуя (9):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + [A] \frac{\partial U}{\partial z} + [B] \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

где U – это вектор, состоящий из следующих элементов:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$[A]$ – матрица Якоби:

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 & 2v & 1 \\ -\frac{pv}{\rho} & \frac{p}{\rho} & v \end{pmatrix}, \quad (17)$$

[B] – матрица следующего вида:

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v(\rho a^2 - p)}{\rho} & \frac{v(\rho a^2 - p)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v(\rho a^2 - p)}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Разработанная методика применялась к исследованию нестационарного волнового истечения насыщенной воды из трубопроводов высокого давления. Использовались следующие безразмерные переменные:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a_*}, \quad \bar{t} = \frac{ta_*}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad a_*^2 = \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (19)$$

Профили давления и скорости смеси представлены на рис. 2 и рис. 3. Видно, что смесь постепенно приходит в движение: скорость увеличивается, давление падает.

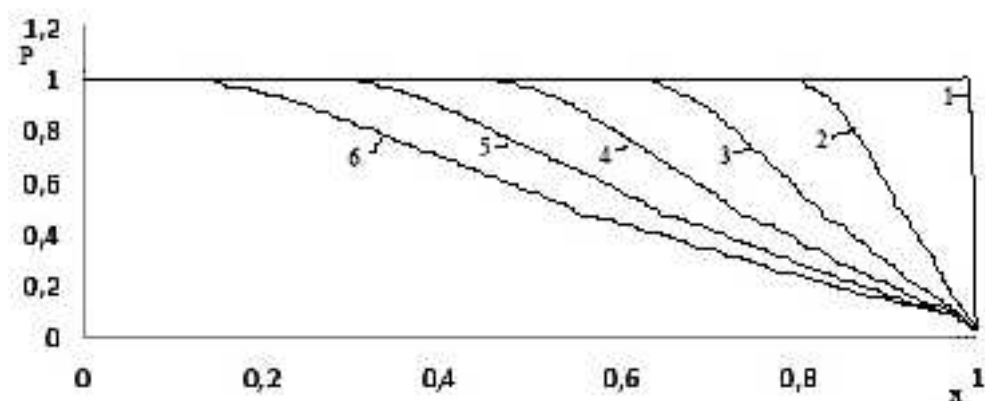


Рис. 2: Профили давления в различные моменты времени: 1 - 0.0 с, 2 - 0.1 с, 3 - 0.2 с, 4 - 0.3 с, 5 - 0.4 с, 6 - 0.5 с.

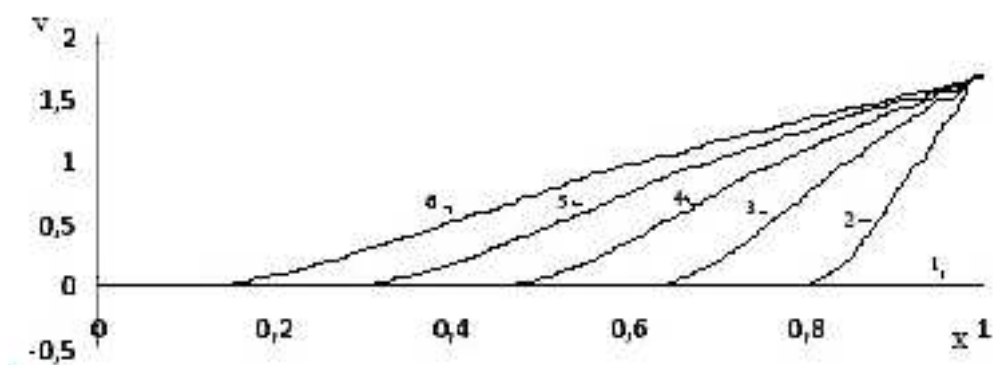


Рис. 3: Профили скорости в различные моменты времени: 1 - 0.0 с, 2 - 0.1 с, 3 - 0.2 с, 4 - 0.3 с, 5 - 0.4 с, 6 - 0.5 с.

Изменение во времени давления в различных сечениях канала даны на рис. 4. Чем ближе находится точка разрыва, тем интенсивней падение давления, что согласуется с результатами работы [7].

Детальный расчет процесса нестационарного истечения вскипающей жидкости позволяет изучать различные стороны явление, важные для практики, вычислять общую массу M , вытекающую через единицу площади сечении обрыва за заданное время. Расчетная зависимость $M(t)$ для трубопровода представлена на рис. 5.

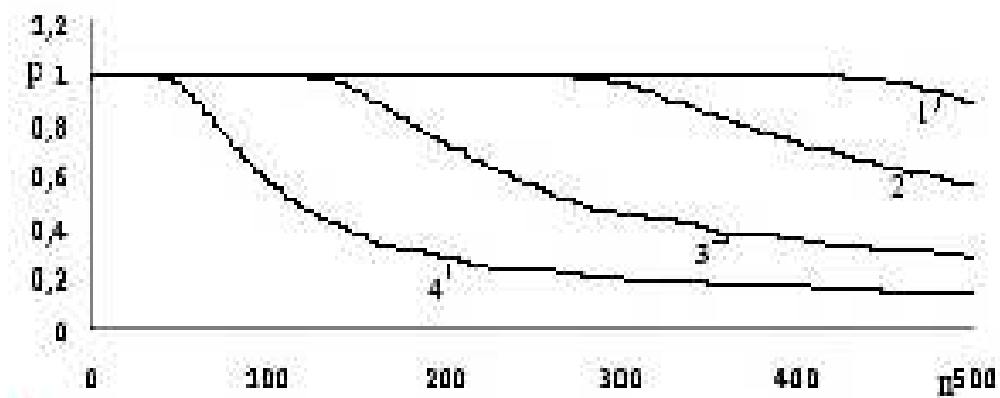


Рис. 4: Изменение давления в различных сечениях канала: 1 - 15 м, 2 - 10 м, 3 - 5 м, 4 - 2 м.

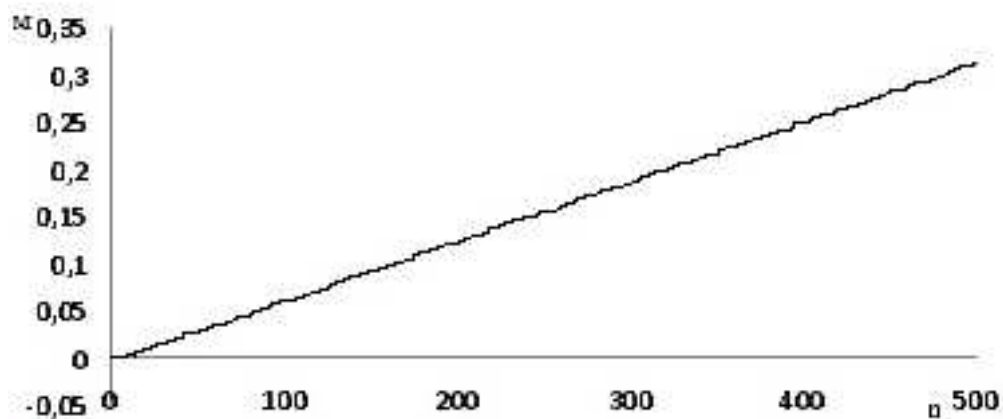


Рис. 5: Масса вытекающей смеси.

Результаты данной работы могут быть использованы при обработке соответствующих экспериментальных данных и создании методик расчета процессов, сопровождающих аварийную разгерметизацию сложных многоэлементных систем высокого давления.

Цитированная литература

1. **Нигматуллин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М. 1978.
2. **Нигматуллин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. I. 1987.
3. **Ивашнев О.Е., Ивашнев М.Н., Смирнов Н.Н.** // Механика жидкости и газа. 2000. №4. С.239 – 246.
4. **Гималтдинов И.К., Нигматуллин Р.И., Шарапов В.Ш.** // Механика жидкости и газа. 2001. №3.
5. **Баязитова А.Р., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш.** // Механика жидкости и газа. 2006. №3. С.52 – 66.
6. **Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И.** // ЖВМ МФ. 1976. Т.16, №4. С.1017 – 1026.
7. **Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И.** // ТВТ. 1978. Т.16, №3. С.556 – 562.

Поступила в редакцию 10.06.2008г.

УДК 512.551.1, 539.12.01

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ОПЕРАТОРАХ АЛГЕБРЫ ВЕЙЛЯ

Р. КАМПОАМОР-ШТУРСБЕРГ

Междисциплинарный институт математики Университет Комплутенсе
E-28040 Мадрид rutwig@pdi.ucm.es

С помощью альтернативной формулы для инвариантных операторов Казимира алгебры $Iso(p, q)$ доказано, что инварианты коприсоединенного представления алгебры Вейля $W(p, q)$ представляются в виде IJ^{-1} , где I, J – инварианты подалгебры $Iso(p, q)$.

1 Введение

Известно, что другой способ классификации представлений алгебр Ли основан на использовании собственных значений операторов Казимира или инвариантных операторов коприсоединенного представления. Хорошо известны такие инвариантные операторы полупростых алгебр Ли, а также некоторых неоднородных алгебр. В статьях [1,2] были исследованы общая форма инвариантов неоднородных алгебр $Iso(p, q)$ и алгебр Вейля $W(p, q)$. В частности, Демичев и другие доказали в [2], что рациональные инварианты алгебры $W(p, q)$ строятся только по операторам Казимира подалгебры $Iso(p, q)$.

В нашей работе, с помощью альтернативной формулы для операторов Казимира псевдоортогональных алгебр Ли, найдена в явном виде максимальная система C_1, \dots, C_m алгебраически независимых инвариантов алгебры $Iso(p, q)$ такая, что все операторы Казимира имеют ту же самую степень однородности по переменным соответствующим трансляциям. В частности, из этого следует, что все инварианты коприсоединенного представления алгебры Вейля представляются в виде $C_i C_1^{-1}$.

Пусть ρ – произвольная алгебра Ли, $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ – ее базис, ρ^* – пространство, дуальное к ρ . Через $C^\infty(\rho^*)$ обозначим пространство аналитических функций на ρ^* . Имеется представление алгебр $\Phi : \rho \rightarrow C^\infty(\rho^*)$, которое на базисе B определяется следующим образом:

$$\hat{X}_i = C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

где $\{C_{ij}^k\}$ – структурный тензор в базисе B , $\{x_1, \dots, x_n\}$ – координаты в ρ^* сопряженные к базису B . Аналитическая функция F на ρ^* называется инвариантом (коприсоединенного представления) алгебры ρ , если $F(x) = F(Ad_\rho^*(x))$ для любых $x \in \rho^*, g \in G$ (G – группа Ли, отвечающая алгебре ρ .)

Keywords: *Invariant operators, Weyl algebra*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10
© Р. Кампоамор-Штурсберг, 2008.

Предложение 1. Функция $F(x_1, \dots, x_n)$ на ϱ^* является инвариантом алгебры Ли тогда и только тогда, когда

$$\widehat{X}_i F(x_1, \dots, x_n) = C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

Заметим, что система (2) не зависит от группы G поэтому инварианты Ad^* связаны с самой алгеброй. Полиномиальные решения уравнений (2) соответствуют классическим операторам Казимира через симметризацию их переменных (см. например [3,4]). Как можно доказать, что число $N(\varrho)$ инвариантных операторов дается формулой:

$$N(\varrho) = \dim \varrho - \text{rank}(C_{ij}^k x_k). \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что число k полиномиальных решений определяется неравенством

$$k \leq N(\varrho). \quad (4)$$

В частности, если ϱ является алгеброй алгебраической группы, то $k = N(\varrho)$.

Определение 1. Аналитическая функция $F(x_1, \dots, x_n)$ на ϱ^* называется *относительным инвариантом алгебры ϱ* тогда и только тогда, когда

$$\widehat{X}_i F = \lambda_i F, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5)$$

где \widehat{X}_i оператор представления (1) и λ_i числовой множитель.

Лемма 1. Пусть $\widehat{X} = \alpha^i C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$ – дифференциальный оператор представления (1) и пусть $F_1, F_2 \in C^\infty(\varrho^*)$ функции такие, что

$$\widehat{X}(F_1) = \lambda_1 F_1, \quad \widehat{X}(F_2) = \lambda_2 F_2. \quad (6)$$

Тогда функция $F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1}$ есть решение уравнения

$$\widehat{X}(F) = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Для каждой переменной x_i имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1}) = (F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1}) \left(\frac{\lambda_2}{F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} - \frac{\lambda_1}{F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{X}(F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1}) &= \alpha^i C_{ij}^k x_k (F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1}) \left(\frac{\lambda_2}{F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} - \frac{\lambda_1}{F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_j} \right) = \\ &= \lambda_2 F_1^{\lambda_2-1} F_2^{-\lambda_1} (\alpha^i C_{ij}^k x_k \frac{\partial F_1}{\partial x_j}) - \lambda_1 F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1-1} (\alpha^i C_{ij}^k x_k \frac{\partial F_2}{\partial x_j}) \\ &= \lambda_2 F_1^{\lambda_2-1} F_2^{-\lambda_1} (\lambda_1 F_1) - \lambda_1 F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1-1} (\lambda_2 F_2) = 0. \end{aligned}$$

Предложение 2. Пусть $\widehat{\varrho}$ – алгебра Ли, и пусть ϱ подалгебра коразмерности 1 такая, что имеет место следующее тождество:

$$N(\widehat{\varrho}) = N(\varrho) - 1. \quad (9)$$

Тогда всякий инвариант алгебры $\widehat{\varrho}$ также является инвариантом подалгебры ϱ . В частности, существует элемент $X \in \varrho$ такой, что

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

для каждого инварианта C алгебры $\widehat{\rho}$.

Доказательство. Из работы [5] следует, что число необходимых внутренних разметок индуцированного представления алгебры $\widehat{\rho}$ связанное с редукцией $\rho \rightarrow \widehat{\rho}$, равняется

$$2n = \dim \widehat{\rho} + 1 - N(\widehat{\rho}) + 1 - \dim \rho - N(\rho) + 2l' = 1 - N(\rho) + l' \geq 0,$$

где $l' = N(\rho) - 1$ — число инвариантов алгебры $\widehat{\rho}$, которые только зависят от генераторов подалгебры ρ . Поэтому существует элемент $X \in \widehat{\rho}$ который не принадлежит подалгебре ρ . Таким образом, для любой инварианты C имеет место равенство

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

2 Инварианты алгебр $Iso(p, q)$ и $W(p, q)$.

В настоящем разделе мы приводим аналог теоремы Гельфанда [6] для неоднородных алгебр $Iso(p, q)$. Базис алгебры Ли $Iso(p, q)$ состоит из $\frac{1}{2}N(N+1)$ генераторов $E_{\mu\nu} = -E_{\nu\mu}, p_\mu$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям:

$$[E_{\mu\nu}, E_{\lambda\sigma}] = g_{\mu\lambda}E_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}E_{\lambda\nu} - g_{\nu\lambda}E_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}E_{\lambda\mu},$$

$$[E_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu,$$

в базисе $\{E_{\mu\nu}, P_\rho\}$, где

$$g = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1).$$

Известно, что $N(Iso(p, q)) = \lfloor \frac{p+q+1}{2} \rfloor$ для каждого $N = p + q \geq 2$ (см. например [1]).

Предложение 3. Максимальную систему независимых инвариантов Казимира алгебры $Iso(p, q)$ образуют коэффициенты многочлена $P(T)$, определенного по формуле:

$$P(T) := |A_{p,q} - TId_N| + T|(A_{p,q})_{(N+1, N+1)} - TId_{N-1}|, \quad (12)$$

где

$$A_{p,q} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_jT \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & 0 & p_NT \\ -p_1g_{11} & \dots & -p_jg_{jj} & \dots & -p_Ng_{NN} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

и $(A_{p,q})_{(N+1, N+1)}$ — минор матрицы $A_{p,q}$ N -го порядка, получающийся из определителя вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Доказательство этого результата можно найти в [7].

Алгебра Вейля $W(p, q)$ является расширением неоднородной псевдоортогональной алгебры $Iso(p, q)$. Эта алгебра $W(p, q)$ выглядит следующим образом:

$$[E_{\mu\nu}, E_{\lambda\sigma}] = g_{\mu\lambda}E_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}E_{\lambda\nu} - g_{\nu\lambda}E_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}E_{\lambda\mu},$$

$$[E_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu,$$

$$[D, P_\rho] = -P_\rho$$

в базисе $\{E_{\mu\nu}, P_\rho, D\}$, где

$$g = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1).$$

Оператор дилатации D коммутирует с вращениями и определяет дифференцирование радикала алгебры $Iso(p, q)$. А.П. Демичев и другие показали в [2], что операторы Казимира C_i алгебры $Iso(p, q)$ являются относительными инвариантами алгебры Вейля:

$$[D, C_i] = \lambda_i C_i, \quad 1 \leq i \leq \left[\frac{p+q+1}{2} \right], \quad (14)$$

где λ_i степень однородности генераторов P_μ . В частности, для каждого инварианта F алгебры $Iso(p, q)$ имеет место тождество

$$\frac{\partial F}{\partial d} = 0,$$

т.е. функция F не зависит от переменной d . Тогда система (2) примет вид из $\frac{1}{2}(N+1)N$ уравнений относительно подалгебры $Iso(p, q)$ и уравнений

$$\widehat{D}(F) := \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0. \quad (15)$$

Из этого факта и леммы 1 следует, что рациональные функции вида $C_i^{\lambda_j} C_j^{-\lambda_i}$ удовлетворяют уравнению (15) и потому являются инвариантами алгебры $W(p, q)$. Число инвариантных операторов алгебры Вейля дается по формуле

$$N(W(p, q)) = \left[\frac{p+q-1}{2} \right]. \quad (16)$$

Предложение 4. Пусть $m = \left[\frac{p+q-1}{2} \right]$, C_1, \dots, C_m инварианты алгебры $Iso(p, q)$ из предложения 1. Тогда степень однородности $\lambda_i = 2$ для каждого $1 \leq i \leq m$.

Доказательство. Нам достаточно доказать следующее равенство:

$$\frac{\partial^3}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k} P(T) = 0$$

для произвольных $1 \leq i, j, k \leq N$. Из формулы (12) имеем

$$P(T) := |A_{p,q} - TId_N| + T|(A_{p,q})_{(N+1, N+1)} - TId_{N-1}|.$$

Так как определитель $|(A_{p,q})_{(N+1, N+1)} - TId_{N-1}|$ не зависит от переменных p_i , то имеет место равенство

$$\frac{\partial P(T)}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} -T & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1 T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_j T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & -T & p_N T \\ -p_1 g_{11} & \dots & -p_j g_{jj} & \dots & -p_N g_{NN} & -T \end{vmatrix}. \quad (17)$$

С помощью подходящих операций над столбцами матрицы $A_{p,q} - TId_N$, этот результат можно записать в форме

$$\frac{\partial P(T)}{\partial p_i} = \begin{vmatrix} -T & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1 T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1j} & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_j T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & 0 & \dots & -T & p_N T \\ -p_1 g_{11} & \dots & -\delta_{ij}g_{jj} & \dots & -p_N g_{NN} & -T \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -T & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & \delta_{ij}T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & -T & 0 \\ -p_1g_{11} & \dots & -p_jg_{jj} & \dots & -p_Ng_{NN} & 0 \end{vmatrix}.$$

Продифференцируем это равенство еще раз по переменной p_k , получаем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p_k} \begin{vmatrix} -T & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1j} & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_jT \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1,N} & \dots & 0 & \dots & -T & p_NT \\ -p_1g_{11} & \dots & -\delta_{ij}g_{jj} & \dots & -p_Ng_{NN} & -T \end{vmatrix} + \\ & + \frac{\partial}{\partial p_k} \begin{vmatrix} -T & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1j} & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & \delta_{ij}T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1,N} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & -T & 0 \\ -p_1g_{11} & \dots & -p_jg_{jj} & \dots & -p_Ng_{NN} & 0 \end{vmatrix} = \\ & = 2 \begin{vmatrix} -T & \dots & 0 & \dots & -g_{ll}e_{1l} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & 0 & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1l}g_{11} & \dots & 0 & \dots & g_{ll}e_{kl} & \dots & -g_{NN}e_{l,N} & \delta_{kl}T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & 0 & \dots & g_{ll}e_{lN} & \dots & -T & 0 \\ -p_1g_{11} & \dots & -\delta_{ij}g_{jj} & \dots & -p_lg_{ll} & \dots & -p_Ng_{NN} & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Разложив этот определитель по j -му и последнему столбцам, получим

$$\frac{\partial^2 P(T)}{\partial p_i \partial p_k} = 2\delta_{ik}T \begin{vmatrix} -T & \dots & \dots & -g_{ll}e_{1l} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & \dots & g_{ll}e_{lN} & \dots & -T \end{vmatrix}.$$

Из этого следует, что функция $\frac{\partial^2 P(T)}{\partial p_i \partial p_k}$ не зависит от переменных p_i . Тогда

$$\frac{\partial^3 P(T)}{\partial p_i \partial p_k \partial p_m} = 0$$

и для каждого оператора Казимира C_i алгебры $Iso(p, q)$ найдем, что степень однородности по переменным P_μ равна 2.

Следствие 1. Пусть $m = \lfloor \frac{p+q+1}{2} \rfloor, C_1, \dots, C_m$ – система независимых инвариантных операторов Казимира алгебры $Iso(p, q)$. Функции

$$F_i = C_i C^{-1} C_1, \quad 2 \leq i \leq m, \quad (18)$$

образуют максимальную систему алгебраически независимых рациональных инвариантов алгебры Вейля $W(p, q)$.

Выпишем основные операторы для алгебр $W(p, q)$ для $p+q = 4$. В этом случае $N(W(p, q)) = 1$. Согласно предложению 3, инварианты алгебр $Iso(p, q)$ выглядят так:

$$C_1 = \sum_{\mu=1}^4 g_{\mu\mu} p_{\mu}^2,$$

$$C_2 = -2 \sum_{\mu < \nu < \rho} g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} g_{\rho\rho} (\epsilon_{\mu\nu\rho} p_{\mu} p_{\nu} e_{\mu\rho} e_{\nu\rho} + \epsilon_{\mu\rho\nu} p_{\mu} p_{\rho} e_{\mu\nu} e_{\nu\rho} + \epsilon_{\nu\rho\mu} p_{\nu} p_{\rho} e_{\nu\rho} e_{\mu\rho}) + \\ + \sum_{\mu < \nu} g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} e_{\mu\nu}^2 \left(\sum_{\rho \neq \mu, \nu} g_{\rho\rho} p_{\rho}^2 \right),$$

где $g = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ или $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Рациональный инвариант алгебры Вейля записывается в виде

$$C = \frac{C_2}{C_1}.$$

В частности, степень однородности рациональной инварианты C по переменным p_{μ} равна нулю.

Цитированная литература

1. А.П. Демичев, Н.Ф. Нелипа // Вестник Моск. ун-та. Физ. астрон. 1980. Т.21. С. 23 – 27.
2. А.П. Демичев, Н.Ф. Нелипа, М. Чайчиан // Вестник Моск. ун-та. Физ. астрон. 1980. Т.21. С. 20 – 24.
3. А. Барут, Р. Рончка // Теория представлений групп и ее приложения. 1968. Т.25. №4. С. 199 – 205.
4. Р. Кампоамор-Штурсберг // ФПМ 2005 Т.11. С. 85 – 94.
5. G. Racah Group Theory and Spectroscopy, N. J. 1951.
6. И. М. Гельфанд // Мат. сборник 1950. Т.6. С. 103 – 112.
7. R. Campoamor-Stursberg // SIGMA 2006. V.2. P. 1 – 28.

Поступила в редакцию 24.01.2008г.

УДК 511

ВИЕТОВО УРАВНЕНИЕ $x^2 + xy + y^2 = z^2$

С. Ш. КОЖЕГЕЛЬДИНОВ

Семипалатинский государственный педагогический институт
sagdulla@ok.kz

Получена общая формула, описывающая все натуральные решения виетова уравнения $x^2 + xy + y^2 = z^2$. Формулируется и доказывается теорема об эквивалентности общих формул всех натуральных решений этого уравнения.

1. Напомним [1,7,8], что виетовым уравнением называется диофантово уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = z^2, \quad (1)$$

где

$$x, y, z \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Решение $\langle x, y, z \rangle$ виетова уравнения (1) с условием (2) называется основным, если $(x, y, z) = 1$, т.е. если x, y, z – взаимно простые числа. Например, решение $\langle 24, 11, 31 \rangle$ виетова уравнения (1) с условием (2) является основным, так как $(24, 11, 31) = 1$.

В [1, с. 246] приведены "Неопределенные задачи из трактата "Zetetica" Виета. Книга IV". Десятая задача этой книги имеет вид уравнения (1). Об этом уравнении речь идет и в [2] под названием "Диофантово уравнение на уроке ленинградской школы".

Хотя известно значительное число натуральных решений виетова уравнения (1), насколько нам известно, не существует общей формулы, описывающей все эти решения. Поэтому вполне естественной является постановка и решение следующей задачи.

2. Постановка задачи. Пусть $\{\langle x, y, z \rangle | (1) \wedge (2)\}$ – множество всех решений виетова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало трех.

Для решения поставленной задачи используются, без специального напоминания каждый раз, идеи, методы и результаты работ [3-8].

3. Имеют место следующие теоремы.

Keywords: *diophant's equations*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

© С. Ш. Кожегельдинов, 2008.

Теорема 1. Все решения виетова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:

$$x = k \frac{a^2 + 2ab}{(3, a)}, \quad y = k \frac{2ab + 3b^2}{(3, a)}, \quad z = k \frac{a^2 + 3ab + 3b^2}{(3, a)}, \quad (3)$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a, b) = 1. \quad (4)$$

Каждое такое решение виетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 1. Если $k = 11$, $a = 3$, $b = 1$, то условие (4) выполнено. Так как $(3, a) = 3$, то формула (3) дает: $x = 55$, $y = 33$, $z = 77$.

Теорема 2. Все решения виетова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:

$$x = k \frac{2cd + 3d^2}{(3, c)}, \quad y = k \frac{c^2 + 2cd}{(3, c)}, \quad z = k \frac{c^2 + 3cd + 3d^2}{(3, c)}, \quad (5)$$

где

$$k, c, d \in \mathbb{N}, \quad (c, d) = 1. \quad (6)$$

Каждое такое решение виетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 2. Если $k = 3$, $c = 2$, $d = 3$, то условие (6) выполнено. Так как $(3, c) = 1$, то формула (5) дает: $x = 117$, $y = 48$, $z = 147$.

Теорема 3. Все решения виетова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k \frac{a^2 - b^2}{(3, a - b)}, \quad y = k \frac{2ab + b^2}{(3, a - b)}, \quad z = k \frac{a^2 + ab + b^2}{(3, a - b)}, \quad (7)$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad a > b, \quad (a, b) = 1. \quad (8)$$

Каждое такое решение виетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 3. Если $k = 4$, $a = 5$, $b = 2$, то условие (8) выполнено. Так как $(3, a - b) = 3$, то формула (7) дает: $x = 28$, $y = 32$, $z = 52$.

Теорема 4. Все решения виетова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:

$$x = k \frac{2cd + d^2}{(3, c - d)}, \quad y = k \frac{c^2 - d^2}{(3, c - d)}, \quad z = k \frac{c^2 + cd + d^2}{(3, c - d)}, \quad (9)$$

где

$$k, c, d \in \mathbb{N}, \quad c > d, \quad (c, d) = 1. \quad (10)$$

Каждое такое решение виетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 4. Если $k = 10$, $c = 3$, $d = 1$, то условие (10) выполнено. Так как $(3, c - d) = 1$, то формула (9) дает: $x = 70$, $y = 80$, $z = 130$.

Теорема 5. Все решения виетова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:

$$x = k \frac{2ab - a^2}{(3, 2b - a)}, \quad y = k \frac{a^2 - b^2}{(3, 2b - a)}, \quad z = k \frac{a^2 - ab + b^2}{(3, 2b - a)}, \quad (11)$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad b < a < 2b, \quad (a, b) = 1. \quad (12)$$

Каждое такое решение вьетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 5. Если $k = 7$, $a = 4$, $b = 3$, то условие (12) выполнено. Так как $(3, 2b - a) = 1$, то формула (11) дает: $x = 56$, $y = 49$, $z = 91$.

Теорема 6. Все решения вьетова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:

$$x = k \frac{c^2 - d^2}{(3, 2d - c)}, \quad y = k \frac{2cd - c^2}{(3, 2d - c)}, \quad z = k \frac{c^2 - cd + d^2}{(3, 2d - c)}, \quad (13)$$

где

$$k, c, d \in \mathbb{N}, \quad d < c < 2d, \quad (c, d) = 1. \quad (14)$$

Каждое такое решение вьетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 6. Если $k = 6$, $c = 5$, $d = 4$, то условие (14) выполнено. Так как $(3, 2d - c) = 3$, то формула (13) дает: $x = 18$, $y = 30$, $z = 42$.

Теорема 7. Если имеют место соответственно условия (4) – (14) (четные номера), то общие формулы (3) – (13) (нечетные номера) всех решений вьетова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны.

Пример 7. Одно и то же решение $\langle 520, 525, 905 \rangle$ вьетова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (3) с условием (4) при $k = 5$, $a = 12$, $b = 7$; из формулы (5) с условием (6) при $k = 5$, $c = 7$, $d = 4$; из формулы (7) с условием (8) при $k = 5$, $a = 19$, $b = 7$; из формулы (9) с условием (10) при $k = 5$, $c = 11$, $d = 4$; из формулы (11) с условием (12) при $k = 5$, $a = 26$, $b = 19$ и из формулы (13) с условием (14) при $k = 5$, $c = 15$, $d = 11$.

4. И теперь становится совершенно очевидным какую роль в формулах, дающих все натуральные решения вьетова уравнения (1), играют арифметические функции, в частности, простейшие арифметические функции $(3, a)$, $(3, a - b)$, $(3, 2b - a)$.

5. **Доказательство теоремы 1.** Из (1) с условием (2) следует, что

$$\frac{x + y}{z - x} = \frac{z + x}{y},$$

где $x, y, z \in \mathbb{N}$, $\max(x, y) < z$, $y < z < z + x$. Положим, что

$$\frac{x + y}{z - x} = \frac{z + x}{y} = \frac{a + b}{b}, \quad (15)$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad (a, b) = 1. \quad (16)$$

Из (15) с условием (16) следует, что

$$x = \frac{a^2 + 2ab}{a^2 + 3ab + 3b^2}z, \quad y = \frac{2ab + 3b^2}{a^2 + 3ab + 3b^2}z, \quad (17)$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad (a, b) = 1. \quad (18)$$

Положим, что

$$z = k \frac{a^2 + 3ab + 3b^2}{(3, a)}, \quad (19)$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a, b) = 1. \quad (20)$$

Из (17) с условием (18) и из (19) с условием (20) получается формула (3) с условием (4), которая является общей формулой всех решений виетова уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значения x, y, z из формулы (3) с условием (4) действительно удовлетворяют виетову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $(x, y, z) = k$, где $k \in \mathbb{N}$. И так как $(a, b) = 1$, то каждое решение $\langle x, y, z \rangle$ виетова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Теорема 1 доказана. Доказательства теорем 2 – 6 аналогичны доказательству теоремы 1.

6. Доказательство теоремы 7. Схема доказательства эквивалентности формул (3) – (13) (нечетные номера) такова: (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow ... \Rightarrow (11) \Rightarrow (13) \Rightarrow (3).

Формула (5) следует из формулы (3) при $k = k$,

$$a = \frac{3d}{(3, c)}, \quad b = \frac{c}{(3, c)},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $(c, d) = 1$. В самом деле, так как $k = k$,

$$(3, a) = \frac{3}{(3, c)}, \quad a^2 + 2ab = \frac{3d(2c + 3d)}{(3, c)^2}, \quad 2ab + 3b^2 = \frac{3c(c + 2d)}{(3, c)^2}, \quad a^2 + 3ab + 3b^2 = \frac{3(c^2 + 3cd + 3d^2)}{(3, c)^2},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $(c, d) = 1$, то из формулы (3) следует формула (5). Формула (7) следует из формулы (5) при $k = k$,

$$c = \frac{3b}{(3, a - b)}, \quad d = \frac{a - b}{(3, a - b)},$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $(a, b) = 1$. Здесь и в дальнейшем очевидные преобразования опускаем. Формула (9) следует из формулы (7) при $k = k$,

$$a = \frac{c + 2d}{(3, c - d)}, \quad b = \frac{c - d}{(3, c - d)},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $c > d$, $(c, d) = 1$. Формула (11) следует из формулы (9) при $k = k$,

$$c = \frac{2a - b}{(3, 2b - a)}, \quad d = \frac{2b - a}{(3, 2b - a)},$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $b < a < 2b$, $(a, b) = 1$. Формула (13) следует из формулы (11) при $k = k$,

$$a = \frac{c + d}{(3, 2d - c)}, \quad b = \frac{2c - d}{(3, 2d - c)},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $d < c < 2d$, $(c, d) = 1$. Наконец, формула (3) следует из формулы (13) при $k = k$,

$$c = \frac{2a + 3b}{(3, a)}, \quad d = \frac{a + 3b}{(3, a)},$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$.

Таким образом, при выполнении соответственно условий (4) – (14) (четные номера) общие формулы (3) – (13) (нечетные номера) эквивалентны. Теорема 7 эквивалентности доказана.

7. Заметим, что число целых параметров, входящих в каждую из общих формул (3) – (13) (нечетные номера) соответственно с условием (4) – (14) (четные номера), не превышает трех.

8. Из теорем 1 – 7 очевидным образом вытекает

Следствие. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x = \frac{a^2 + 2ab}{(3, a)}, \quad y = \frac{2ab + 3b^2}{(3, a)}, \quad z = \frac{a^2 + 3ab + 3b^2}{(3, a)}, \quad (21)$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad (a, b) = 1; \quad (22)$$

$$x = \frac{2cd + 3d^2}{(3, c)}, \quad y = \frac{c^2 + 2cd}{(3, c)}, \quad z = \frac{c^2 + 3cd + 3d^2}{(3, c)}, \quad (23)$$

где

$$c, d \in \mathbb{N}, \quad (c, d) = 1; \quad (24)$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{(3, a - b)}, \quad y = \frac{2ab + b^2}{(3, a - b)}, \quad z = \frac{a^2 + ab + b^2}{(3, a - b)}, \quad (25)$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad a > b, \quad (a, b) = 1; \quad (26)$$

$$x = \frac{2cd + d^2}{(3, c - d)}, \quad y = \frac{c^2 - d^2}{(3, c - d)}, \quad z = \frac{c^2 + cd + d^2}{(3, c - d)}, \quad (27)$$

где

$$c, d \in \mathbb{N}, \quad c > d, \quad (c, d) = 1; \quad (28)$$

$$x = \frac{2ab - a^2}{(3, 2b - a)}, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{(3, 2b - a)}, \quad z = \frac{a^2 - ab + b^2}{(3, 2b - a)}, \quad (29)$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad b < a < 2b, \quad (a, b) = 1; \quad (30)$$

$$x = \frac{c^2 - d^2}{(3, 2d - c)}, \quad y = \frac{2cd - c^2}{(3, 2d - c)}, \quad z = \frac{c^2 - cd + d^2}{(3, 2d - c)}, \quad (31)$$

где

$$c, d \in \mathbb{N}, \quad d < c < 2d, \quad (c, d) = 1, \quad (32)$$

является общей формулой всех основных решений виетова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое основное решение определяется каждым из этих способов однозначно.

Пример 8. Одно и то же основное решение $\langle 104, 105, 181 \rangle$ виетова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (21) с условием (22) при $a = 12$, $b = 7$; из формулы (23) с условием (24) при $c = 7$, $d = 4$; из формулы (25) с условием (26) при $a = 19$, $b = 7$; из формулы (27) с условием (28) при $c = 11$, $d = 4$; из формулы (29) с условием (30) при $a = 26$, $b = 19$ и из формулы (31) с условием (32) при $c = 15$, $d = 11$.

Цитированная литература

1. Башмакова И.Г., Славутин Е.И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М., 1984.
2. Демман И. Рассказы о старой и новой алгебре. Ленинград, 1967.
3. Кожегельдинов С.Ш. // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1992. №3. С.48 – 51.
4. Кожегельдинов С.Ш. //Межвуз. конф., посв. 70-летию проф. Т.И. Аманова. Тез. докл. Семипалатинск. 1993. С.17 – 19.
5. Кожегельдинов С.Ш. // Мат. заметки. 1994. Т. 55, №2. С.72 – 79.
6. Кожегельдинов С.Ш. //II Междунар. конф. "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел". Тез. докл. Воронеж. 1995. С.85.
7. Кожегельдинов С.Ш. Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Т. 3. Алматы, 2006.

8. **Кожегельдинов С.Ш.** Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Т. 4. Семей, 2008.

Поступила в редакцию 25.08.2008 г.

УДК 510.6

REFINED DEFINITIONS FOR FINITARY AND INFINITARY SIMILARITY RELATIONS OF THEORIES

Part 2: Cartesian interpretations and the definition to Finitary list

M. G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics, Almaty

050010 Kazakhstan Almaty, 125 Pushkin Street, mikhail_peretyatkin@predicate-logic.org

In this series of papers, Finitary list *ACL* also called *algebraic Cartesian* list and Infinitary list *MQL* also called *quasi-exact* list are considered. They play an important role in investigations of expressive power of first-order Predicate Logic. The series is attended to give definitions for these base concepts and study their main properties in maximum laconic form.

In this work, special classes of interpretations are defined important for finitely axiomatizable theories, and formal definition for Finitary list is given.

Base concepts used in the work can be found in [1]–[4]. The set of all formulas of signature σ is denoted by $FL(\sigma)$, while $SL(\sigma)$ is the set of all sentences (closed formulas) of signature σ . For $\Sigma \subseteq FL(\sigma)$, entry $[\Sigma]_\sigma$ means a theory in signature σ generated by Σ as the set of axiom. Tarski-Lindenbaum algebra of sentences of theory T is denoted by $\mathcal{L}(T)$.

1. Types of first-order definability in Logic. Let T be a theory in signature σ , and let P^m , σ' be also given such that $\sigma' \subseteq \sigma$, and $P^m \in \sigma \setminus \sigma'$. Predicate P is called *first-order definable* in T relative to σ' , if there is a formula $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ in $FL_m(\sigma')$ such that

$$T \vdash (\forall x_1 \dots x_m) [P(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_m)].$$

Predicate P is called $\exists \cap \forall$ -*definable* in T relative to σ' , if there are formulas $\theta(x_1, \dots, x_m)$ and $\theta'(x_1, \dots, x_m)$ in $FL_m(\sigma')$, such that $\theta(x_1, \dots, x_m)$ is \exists -formula, $\theta'(x_1, \dots, x_m)$ is \forall -formula, and two following conditions are satisfied:

$$\begin{aligned} T \vdash (\forall x_1 \dots x_m) [P(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_m)], \\ T \vdash (\forall x_1 \dots x_m) [P(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \theta'(x_1, \dots, x_m)]. \end{aligned}$$

Particularly, formula $(\forall x_1 \dots x_m) [\theta(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \theta'(x_1, \dots, x_m)]$ must be true in the theory.

A function symbol $f^k \in \sigma \setminus \sigma'$ is definable in T relative to σ' , if its graphic

$$P_f = \{(x_0, x_1, \dots, x_k) \mid x_0 = f(x_1, \dots, x_k)\}$$

Keywords: *first-order logic, theory, model, interpretation, algorithm*

2000 Mathematics Subject Classification: 03B10

© M. G. Peretyat'kin, 2008.

is definable in T relative to σ' . A function symbol $f^k \in \sigma \setminus \sigma'$ is $\exists \cap \forall$ -definable in T relative to σ' , if its graphic is $\exists \cap \forall$ -definable in T relative to σ' .

A constant symbol $c \in \sigma \setminus \sigma'$ is definable in T relative to σ' , if unary predicate distinguishing the constant

$$P_c = \{(c)\}$$

is definable in T relative to σ' . A constant symbol $c \in \sigma \setminus \sigma'$ is $\exists \cap \forall$ -definable in T relative to σ' , if unary predicate distinguishing the constant is $\exists \cap \forall$ -definable in T relative to σ' .

Really, there are two levels of definability in Logic. The first level is called *radical-logical* or briefly *model*. It does not assume any limitations on used formulas. Second more thin level is called *model-algebraic* or briefly *algebraic*. At this level $\exists \cap \forall$ -type of first-order definability is used.

2. Isomorphisms of theories. We define two natural versions of concept of an isomorphism between theories. The theories T and S are called *first-order equivalent* or *isomorphic* (written as $T \approx S$) if S can be obtained from T by a finite number of operations of renaming signature symbols and by adding and eliminating those signature symbols, that can be first-order definable relative to other signature symbols.

The theories T and S are called *first-order $\exists \cap \forall$ -equivalent* or *algebraically isomorphic* (written as $T \approx_a S$) if S can be obtained from T by a finite number of operations of renaming signature symbols and by adding and eliminating those signature symbols that can be first-order $\exists \cap \forall$ -definable relative to other signature symbols.

Lemma 2.1. $T \approx_a S \Rightarrow T \approx S$ for any theories T and S .

PROOF. Immediately.

Lemma 2.2. Let T be a theory in signature σ , and S be a theory in signature τ . By simple renaming signature symbols of theory S , construct theory S' in signature τ' such that $\sigma \cap \tau' = \emptyset$ (then, $S \approx_a S'$). The following assertions hold:

(a) $T \approx S$ if and only if there is a theory H in signature $\sigma \cup \tau'$ such that $T = H \upharpoonright \sigma$, $S' = H \upharpoonright \tau'$, each symbol in τ' is first-order definable in H relative to σ , and each symbol in σ is first-order definable in H relative to τ' .

(b) $T \approx_a S$ if and only if there is a theory H in signature $\sigma \cup \tau'$ such that $T = H \upharpoonright \sigma$, $S' = H \upharpoonright \tau'$, each symbol in τ' is $\exists \cap \forall$ -definable in H relative to σ , and each symbol in σ is $\exists \cap \forall$ -definable in H relative to τ' .

PROOF. Immediately.

In case of an isomorphism, signature symbols of each theory are definable by formulas in other theory. So, these two theories are indiscernible by any properties definable on the basis of the structure of first-order definable relations. Therefore, in model-theoretic investigations the isomorphic theories are considered as two copies of the same theory. But sometimes properties depending on the choice of a signature are considered, for example, the model completeness property. In such a situation, theories are considered up to $\exists \cap \forall$ -definable equivalence, affected to more delicate properties of a theory.

3. Model-theoretic properties. Denote by \mathbb{C} the class of all complete theories of any enumerable signatures. By a *model property* we mean a class p of complete theories of enumerable signatures that is closed under isomorphisms of the form

$$T_0 \approx T_1 \Rightarrow (T_0 \in p \Leftrightarrow T_1 \in p), \text{ for all } T_0, T_1 \in \mathbb{C}.$$

By an *algebraic property* we mean a class p of complete theories of enumerable signatures that is closed under isomorphisms of the form

$$T_0 \approx_a T_1 \Rightarrow (T_0 \in p \Leftrightarrow T_1 \in p), \text{ for all } T_0, T_1 \in \mathbb{C}.$$

We denote by ML the set of all model properties and by AL the set of all algebraic properties. A subset $L \subseteq ML$ is called a *list of model properties*, and a subset $L \subseteq AL$ is called a *list of algebraic*

properties. The inclusion $ML \subseteq AL$ is obvious. This inclusion is proper, that follows from the fact that the property "model completeness" is included in the difference of these sets. It follows from the inclusion $ML \subseteq AL$ that any model list can be regarded as an algebraic list. We say that L is a *list of model-theoretic properties* or simply a *list*, if L is either a list of *model properties* or a list of *algebraic properties*.

4. Semantic similarity of theories over a list. An arbitrary theory T can be characterized by Tarski-Lindenbaum algebra $\mathcal{L}(T)$ presenting structure of its extensions together with description of model-theoretic properties of all complete extensions T' of T .

Turn to formal definition.

Let L be a list of model-theoretic properties. For two theories T and S , entry $T \equiv_L S$ will denote that there is a recursive isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$ between the Tarski-Lindenbaum algebras of these theories such that for any complete extension T' of the theory T and corresponding complete extension S' of the theory S , $S' = \mu(T')$, the theories T' and S' have identical properties in terms of this list L , i.e., we have

$$(\forall p \in L)[T' \text{ has property } p \Leftrightarrow S' \text{ has property } p].$$

If $T \equiv_L S$ holds according to this definition, the theories T and S are called *semantically similar* over the list L .

Notice that, the relation of semantic similarity of theories over a list of model-theoretic properties is in fact rather natural. Ordinarily, a question about existence of a theory with predefined properties suggests some structure of completions or just quantity of complete extensions of the theory satisfying some predefined model-theoretic properties for each of the completions. Such meaning exactly corresponds to the concept of semantic similarity introduced above.

5. Interpretations of theories. Consider two theories T_0 and T_1 of signatures respectively σ_0 and σ_1 . An ordinary concept of *interpretation* of theory T_0 in theory T_1 on the set distinguished by a unary predicate $U(x)$ is used. As the region $U(x)$, a first-order definable relation is admitted as well. The region for T_0 is represented in T_1 by the elements distinguished by formula $U(x)$ with ordinary equality. The interpretation is determined by a mapping of signature symbols of theory T_0 into formulas of theory T_1 with the corresponding number of free variables and with the restriction of these free variables on $U(x)$. Namely, n -ary predicate is mapped into a formula with n free variables, n -ary function into a formula with $(n+1)$ free variables, while a constant into a formula with one free variable. By the induction, the pointed mapping is expanded up to a mapping $I : FL(\sigma_0) \rightarrow FL(\sigma_1)$. Thus, both a formula $\varphi \in FL(\sigma_0)$ and its image $I(\varphi) \in FL(\sigma_1)$ have the same number of free variables.

Let I be an interpretation of theory T_0 of signature σ_0 in the region $U(x)$ of theory T_1 , and let \mathfrak{M} be an arbitrary model of theory T_1 . By virtue of the interpretation I , it is possible to determine on the first-order definable set $U(\mathfrak{M})$ all predicates, functions and constants of signature σ_0 , and as a result, some model $\mathfrak{N} = \langle U(\mathfrak{M}), \sigma_0 \rangle$ will be obtained, which is called *model kernel* for \mathfrak{M} with respect to I , and for it, we use denotation $\mathfrak{N} = \mathbb{K}_I(\mathfrak{M})$, as well as more simple denotation $\mathfrak{N} = \mathbb{K}(\mathfrak{M})$, when the interpretation I is assumed by the context. It is supposed, that each considered interpretation I satisfies at least one of the following two conditions, which, actually, are equivalent with each other:

$$T_0 = Th\{\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in Mod(T_1)\}, \quad (5.1)$$

$$T_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow T_1 \vdash I(\varphi), \text{ for all } \varphi \in SL(\sigma_0). \quad (5.2)$$

One should note, that the following condition

$$Mod(T_0) = \{\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in Mod(T_1)\} \quad (5.3)$$

is more strong than the requirement (5.1). If the condition (5.3) is satisfied, the interpretation I is called *mod-free*. An interpretation I of a theory T_0 of signature σ_0 in a theory T_1 is called *effective*, if the mapping $\varphi \mapsto I(\varphi)$, $\varphi \in FL(\sigma_0)$, is effective, that is, if it is defined by a recursive function on Gödel numbers.

The following important statement is true:

Lemma 5.1. *Let I be an interpretation of a finitely axiomatizable theory T_0 of a finite signature σ_0 in a theory T_1 . Then, I is an effective interpretation.*

PROOF. A finite number of signature symbols of theory T_0 is mapped into formulas of theory T_1 , and by the induction, this mapping is expanded up to the interpretation I . This implies, that I is effective.

Given an interpretation I of theory T_0 in region $U(x)$ of theory T_1 . I is called $\exists \cap \forall$ -presentable or *algebraic* interpretation, if the following conditions are satisfied: (a) relation $U(x)$ is $\exists \cap \forall$ -definable in theory T_1 ; (b) I -images of all signature predicates, functions and constants of theory T_0 are $\exists \cap \forall$ -definable in theory T_1 .

6. Iso-stone interpretations. An interpretation I of a theory T_0 in a theory T_1 is called *Iso-Stone*, if the following conditions hold:

$$\text{interpretation } I \text{ is effective,} \quad (6.1)$$

$$\mathbb{K}(\mathfrak{M}_0) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}_1) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{M}_1, \text{ for all } \mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1 \in \text{Mod}(T_1). \quad (6.2)$$

Give some equivalent reformulations of requirement (6.2).

Lemma 6.1. *Let I be an interpretation of a theory T_0 of signature σ_0 in a theory T_1 . Then, the following assertions are equivalent:*

- (a) $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Leftrightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$, for all $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$,
- (b) $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$, for all $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$,
- (c) $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \cong \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$, for all $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$,
- (d) the set $\{I(\varphi) | \varphi \in SL(\sigma_0)\}$ is a generating set for Tarski-Lindenbaum algebra $\mathcal{L}(T_1)$.

PROOF. The relations (a) \Leftrightarrow (b) and (d) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) are obvious.

(c) \Rightarrow (b) Suppose that (c) is the case. Given countable models \mathfrak{M}_1 and \mathfrak{M}_2 of theory T_1 such that $\mathbb{K}(\mathfrak{M}_1) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}_2)$. It is required to prove that $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$. Build countable elementary extensions $\mathfrak{M}_1 \preceq \mathfrak{M}'_1$ and $\mathfrak{M}_2 \preceq \mathfrak{M}'_2$ whose kernels are homogeneous models. For this, standard construction is applied for homogeneous model as union of elementary ω -chain of models, realizing currently occurred types over finite tuples at each step. Apply this construction to both models $\mathbb{K}(\mathfrak{M}_1)$ and $\mathbb{K}(\mathfrak{M}_2)$, performing the two processes parallelly; moreover, types occurred in one of the processes should be passed in another process. As a result, models \mathfrak{M}'_1 and \mathfrak{M}'_2 will be constructed whose kernels are homogeneous models with identical sets of realized in them types. Thus, we have $\mathfrak{M}'_1 \equiv \mathfrak{M}'_2$, and by (c) we obtain required $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$.

(b) \Rightarrow (d) can be established with the help of Lemma 0.3.2 in [4].

Lemma 6.1 is proved.

Consider the major property of an Iso-Stone interpretation.

Lemma 6.2. *Let I be an Iso-Stone interpretation of a theory T_0 of signature σ_0 in a theory T_1 . Then, the mapping μ from $\mathcal{L}(T_0)$ into $\mathcal{L}(T_1)$, defined by the following rule*

$$\mu([\varphi]_{T_0}) = [I(\varphi)]_{T_1}, \quad \varphi \in SL(\sigma_0), \quad (6.3)$$

is a recursive isomorphism between the pointed Tarski-Lindenbaum algebras.

PROOF. It follows from the condition (6.2) for I , that defined in such way mapping μ is an injective homomorphism from $\mathcal{L}(T_0)$ into $\mathcal{L}(T_1)$, that is, it is an isomorphic embedding. By Lemma 6.1 (a,d), the set $\{I(\varphi) | \varphi \in SL(\sigma_0)\}$ is a generating set for Tarski-Lindenbaum algebra $\mathcal{L}(T_1)$. Thus,

μ is a mapping "onto", and therefore it is an isomorphism. Its recursiveness is supplied with (6.1), which is supposed given by the conditions of lemma.

Conditions (6.1) and (6.2) provide, in some sense, a recursive isomorphism between Stone spaces of corresponding Tarski-Lindenbaum algebras. This explains the fact of choice of the term "iso-stone interpretation".

Thus, one can consider iso-stone interpretation as semantic similarity

Let an iso-stone interpretation of a theory T_0 in a theory T_1 be given, and let $\mu : \mathcal{L}(T_0) \rightarrow \mathcal{L}(T_1)$ be a recursive isomorphism of corresponding Tarski-Lindenbaum algebras, defined by rule (6.3). We say that interpretation I preserves a list of model-theoretic properties L , if the pointed isomorphism μ preserves this list L .

7. Model bijective interpretations. An interpretation I of a theory T_0 in a theory T_1 is called *model bijective*, if for it, the operator of passage to the model kernel $\mathfrak{M} \mapsto \mathbb{K}(\mathfrak{M})$ is a one-to-one correspondence between isomorphism types of models of theories T_1 and T_0 , that is, if the following relations hold:

$$\text{Mod}(T_0) = \{\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)\}, \quad (7.1)$$

$$\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \cong \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Leftrightarrow \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}', \text{ for all } \mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1). \quad (7.2)$$

Notice that, by the definition, every model bijective interpretation is a mod-free interpretation.

An interpretation I of a theory T_0 in a theory T_1 is called *auto-free*, if the following condition is satisfied:

$$\begin{aligned} & \text{For any model } \mathfrak{M} \text{ of theory } T_1, \text{ an arbitrary automorphism of the kernel} \\ & \mu : \mathbb{K}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M}) \text{ can be extended to an automorphism } \mu^* : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M} \text{ of the} \\ & \text{whole model.} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Notice that conditions (7.2) and (7.3) looks as like, but actually they are independent.

The following properties of the interpretations take place:

Lemma 7.1. *Let I be a model bijective interpretation of theory T_0 in region $U(x)$ of theory T_1 , and I is effective. Then, the following assertions hold:*

- (a) I is an iso-stone interpretation,
- (b) $||\mathbb{K}(\mathfrak{M})|| < \omega \Leftrightarrow ||\mathfrak{M}|| < \omega$, for all $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$,
- (c) $||\mathbb{K}(\mathfrak{M})|| = ||\mathfrak{M}||$, for any infinite model $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$.

PROOF. Statement (a) is a consequence of Lemma 6.1 (a,c), providing condition (6.2) for model bijective interpretation, while the condition (6.1) is supposed by our lemma. Parts (b) and (c) are consequence of the property of non-two-cardinality of universe over $U(x)$ in theory T_1 , that must be true by virtue of model bijectiveness of the interpretation I .

Let I be a model bijective interpretation of theory T_0 in theory T_1 . By the definition, the operator $\mathfrak{M} \mapsto \mathbb{K}(\mathfrak{M})$ is one-to-one correspondence between models of theory T_1 and models of theory T_0 . In view of its bijectiveness, there is an inverse to it operator $\mathfrak{N} \mapsto \mathbb{E}_I(\mathfrak{N})$ of transformation of models of theory T_0 in models of theory T_1 , which is called *envelope operator* for the interpretation I . Brief notation $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ is used instead of complete $\mathbb{E}_I(\mathfrak{N})$, when the interpretation I is defined by context.

Thus, we have the following interdependencies of these operators for any model bijective interpretation:

$$\mathbb{K}(\mathbb{E}(\mathfrak{N})) \cong \mathfrak{N}, \text{ for all } \mathfrak{N} \in \text{Mod}(T_0), \quad (7.4)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{K}(\mathfrak{M})) \cong \mathfrak{M}, \text{ for all } \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1). \quad (7.5)$$

Notice that, an envelope operator $\mathfrak{N} \mapsto \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ may be defined for other types of interpretations, which is supposed to yield a prime and minimal model of theory T_1 over $|\mathfrak{N}|$. In such common situation, just condition (7.4) is satisfied, while (7.5) is not the case.

A technical fact.

Lemma 7.2. *Let I be an auto-free interpretation of theory T_0 of signature σ in region $U(x)$ of theory T_1 of signature τ . Let $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ be a formula of signature τ such that*

$$T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow U(x_1) \wedge \dots \wedge U(x_n).$$

Then, there is a formula $\psi(x_1, \dots, x_n)$ of signature σ such that

$$T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow I\psi(x_1, \dots, x_n).$$

PROOF. Condition (7.3) provides application of Craig first-order definability theorem. This gives required statement.

8. Isomorphism of theories as an interpretation. Isomorphisms of theories defined in Section 2 are in fact interpretations of some particular form introduced below.

An interpretation I of a theory T_0 in region $U(x)$ of a theory T_1 is called *total* if $(\forall x)U(x)$ is satisfied in T_1 . An interpretation I of a theory T_0 in theory T_1 is called *first-order definable equivalence* or *isomorphism*, if I is total, and there is an interpretation I' of theory T_1 in theory T_0 such that I and I' are mutually inversive interpretations (here, I' must be also total). The interpretation I is called *first-order $\exists \cap \forall$ -definable equivalence*, or *$\exists \cap \forall$ -isomorphism* if I is total and there is a $\exists \cap \forall$ -presentable interpretation I' of theory T_1 in theory T_0 such that I and I' are mutually inversive interpretations.

Lemma 8.1. *Let an interpretation $I : T_0 \rightarrow T_1$ be given which is isomorphism (i.e., first-order definable equivalence). Then, I is a model bijective auto-free interpretation.*

PROOF. Immediately.

9. Singleton extension. Describe some simple operation over models, which in fact is natural. Let a signature σ be given, and let

$$\varkappa = \langle c_1, c_2, \dots, c_s \rangle \quad (9.1)$$

be some finite sequence of new constant symbols.

Starting from \varkappa and an arbitrary model \mathfrak{M} of signature σ , describe a procedure of construction of a model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$ of the following signature

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{U^1, U_1^1, U_2^1, \dots, U_s^1\}, \quad (9.2)$$

where predicate symbols U and U_i are not included in σ . The universe set of model $\mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$ is the following

$$|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}| \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s, \quad (9.3)$$

and it is supposed, that all sets in the right-hand side of (9.3) are pairwise disjoint, while the cardinality of each set A_k is equal to 1. The symbols of signature σ_1 are defined on the set $|\mathfrak{M}_1|$ as follows.

1. The predicates, functions and constants of signature σ in part $|\mathfrak{M}|$ of (9.3) are defined just in the same way, as they were defined in model \mathfrak{M} . In remaining, they are determined trivially.

2. $\mathfrak{M}_1 \models U(a) \Leftrightarrow a \in |\mathfrak{M}|$.

3. $\mathfrak{M}_1 \models U_k(a) \Leftrightarrow a \in A_k$.

4. Constant c_k is assigned in \mathfrak{M}_1 to the only element from A_k .

Description of model \mathfrak{M}_1 is completed

The model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$ is called *singleton extension* of model \mathfrak{M} by means of n new constants c_1, \dots, c_n , and is often denoted by $\mathfrak{M}\langle c_1, \dots, c_n \rangle$.

Now, expand this operation over models on theories. Let T be a theory of signature σ . Fix signature (9.2) which is used in construction of singleton extension. Define theory T' as follows

$$T' = \text{Th}(K), \quad K = \{\mathfrak{M}\langle c_1, \dots, c_n \rangle \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T)\}.$$

It is called a *singleton extension* of theory T with n elements, and is denoted by $T\langle c_1, \dots, c_n \rangle$. One can check that, up to algebraic isomorphism, this theory has the following form

$$T\langle c_1, \dots, c_n \rangle \approx_a T \oplus \underbrace{T_1 \oplus \dots \oplus T_1}_{n \text{ times}}$$

where T_1 is a theory in signature $\{=\}$ determined by a single axiom $(\exists x)(\forall z)(x = z)$, i.e., T_1 is theory of the only model of cardinality 1.

10. Cartesian extension. Now, describe some more complicated operation over models.

Let a signature σ be given, and let

$$\varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s} \rangle \quad (10.1)$$

be some finite sequence of formulas of signature σ , where φ_k is a formula with m_k free variables x_1, x_2, \dots, x_{m_k} . In entry $\varphi_k(\bar{x})$ we assume, that \bar{x} is a tuple of variables of corresponding length.

Starting from \varkappa and an arbitrary model \mathfrak{M} of signature σ , describe some procedure of construction of a model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$ of the following signature

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{U^1, U_1^1, U_2^1, \dots, U_s^1\} \cup \{K_1^{m_1+1}, \dots, K_s^{m_s+1}\}, \quad (10.2)$$

where symbols U , U_i , and K_i are not included in σ . The universe set of model $\mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$ is the following

$$|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}| \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s, \quad (10.3)$$

and it is supposed, that all sets in the right-hand side of (10.3) are pairwise disjoint, while the cardinality of each set A_k is equal to the cardinality of the family of tuples \bar{x} of length m_k , on which formula $\varphi_k(\bar{x})$ is true in \mathfrak{M} . All symbols of signature σ_1 are defined on the set $|\mathfrak{M}_1|$ as follows.

1. Predicates, functions and constants of signature σ in part $|\mathfrak{M}|$ of (10.3) are defined just in the same way, as they were defined in model \mathfrak{M} . In remaining, they are defined trivially.

2. $\mathfrak{M}_1 \models U(a) \Leftrightarrow a \in |\mathfrak{M}|$.

3. $\mathfrak{M}_1 \models U_k(a) \Leftrightarrow a \in A_k$.

4. $\mathfrak{M}_1 \models K_k(a_1, \dots, a_{m_k}, a) \Rightarrow U(a_1) \wedge \dots \wedge U(a_{m_k}) \wedge U_k(a)$.

5. $\mathfrak{M}_1 \models K_k(a_1, \dots, a_{m_k}, a) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_k(a_1, \dots, a_{m_k})$.

6. In model \mathfrak{M}_1 , predicate K_k represents a one-to-one correspondence between the set of tuples $\varphi_k(\mathfrak{M}) = \{\bar{a} \mid \mathfrak{M} \models \varphi_k(\bar{a})\}$ and the set $A_k = U_k(\mathfrak{M}_1)$.

Description of model \mathfrak{M}_1 is complete.

The model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$ is called *Cartesian extension* of model \mathfrak{M} by means of formulas $\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s}$, and is denoted by $\mathfrak{M}\langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s} \rangle$.

Now, expand this operation over models on theories. Let T be a theory of signature σ . Fix signature (10.2) used for extensions of models, and define theory T' as follows

$$T' = \text{Th}(K), \quad K = \{\mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T)\}.$$

It is called *Cartesian extension* of theory T with s formulas pointed in tuple (10.1), and is denoted by $T\langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s} \rangle$ or briefly by $T\langle \varkappa \rangle$. Notice that, if a formula φ_k is identically false in \mathfrak{M} , then the set on which the predicate $U_k(x)$ is true in \mathfrak{M}_1 is empty.

An important fact:

Lemma 10.1. *Operation of constant extension, both for models and theories, is a particular case of corresponding operation of Cartesian extension.*

PROOF. In described operation the case $m_k = 0$ is admissible. In this case, the formula φ_k is a sentence, and the set distinguished by the predicate $U_k(x)$ in \mathfrak{M}_1 either consists of a single element or is empty depending on whether the sentence φ_k is true or false in \mathfrak{M} . Particularly, if φ is a sentence

identically true in T , models of $T\langle\varphi\rangle$ include exactly one additional element. Thus, we have for a sequence of n identically true sentences $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$T\langle\varphi_1, \dots, \varphi_n\rangle \approx_a T\langle c_1, \dots, c_n\rangle. \quad (10.4)$$

This immediately gives required statement.

11. Cartesian-quotient extension. Now, introduce some more common version of Cartesian extension.

Let a signature σ be given, and let

$$\varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \varphi_2^{m_2}/\varepsilon_2, \dots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s \rangle \quad (11.1)$$

be a sequence of $2s$ formulas, where φ_k is a formula of signature σ with m_k free variables x_1, \dots, x_{m_k} , while ε_k is a formula with $2m_k$ free variables $y_1, \dots, y_{m_k}, z_1, \dots, z_{m_k}$. In entries $\varphi_k(\bar{x})$ and $\varepsilon_k(\bar{y}, \bar{z})$ it is assumed that \bar{x} , \bar{y} , and \bar{z} are sequences of variables of corresponding lengths. Number s is called *length* of the sequence (11.1), and is denoted by $\text{Len}(\varkappa)$. For all $k \in \{1, \dots, s\}$ we set

$$\begin{aligned} \varepsilon'_k(\bar{y}, \bar{z}) &= [\varphi_k(\bar{y}) \& \varphi_k(\bar{z}) \& \varepsilon_k(\bar{y}, \bar{z}) \& \text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)] \\ &\vee [\varphi_k(\bar{y}) \& \varphi_k(\bar{z}) \& \neg \text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)], \end{aligned}$$

where $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$ denotes a sentence of signature σ stating that ε_k is an equivalence relation on the set of m_k -tuples satisfying φ_k .

Starting from \varkappa given in (11.1) and an arbitrary model \mathfrak{M} of signature σ , describe some procedure of construction of a model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ of the following signature

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{X_1^0, \dots, X_s^0\} \cup \{U^1, U_1^1, \dots, U_s^1\} \cup \{K_1^{m_1+1}, \dots, K_s^{m_s+1}\}, \quad (11.2)$$

where symbols X_i , U , U_i , and K_i are not included in σ . The universe of this model is the following

$$|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}| \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s, \quad (11.3)$$

and it is supposed, that all sets in the right-hand side of (11.3) are pairwise disjoint, while the cardinality of each set A_k is equal to the cardinality of quotient-set of the set of m_k -tuples satisfying φ_k modulo equivalence relation presented by formula ε'_k in \mathfrak{M} . All symbols of signature σ_1 are defined on the set \mathfrak{M}_1 as follows.

1. In part $|\mathfrak{M}|$, predicates, functions and constants of signature σ are defined exactly in the same way as they were defined in model \mathfrak{M} . In remaining, they are defined trivially.

2. $\mathfrak{M}_1 \models U(x) \Leftrightarrow x \in |\mathfrak{M}|$.

3. $\mathfrak{M}_1 \models U_k(x) \Leftrightarrow x \in A_k$.

4. $\mathfrak{M}_1 \models K_k(a_1, \dots, a_{m_k}, a) \Rightarrow U(a_1) \wedge \dots \wedge U(a_{m_k}) \wedge U_k(a)$.

5. $\mathfrak{M}_1 \models K_k(a_1, \dots, a_{m_k}, a) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_k(a_1, \dots, a_{m_k})$.

6. In the model \mathfrak{M}_1 , the predicate K_k realizes a one-to-one correspondence between the quotient set $\varphi_k(\mathfrak{M})/\varepsilon'_k$ and the set $A_k = U_k(\mathfrak{M}_1)$.

7. $\mathfrak{M} \models X_k \leftrightarrow \text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$.

Description of the model \mathfrak{M}_1 is complete.

The model $\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ is called *Cartesian-quotient extension* of model \mathfrak{M} by means of tuple of formulas \varkappa .

One can expand this operation over models on theories. Let T be a theory of signature σ . Fix signature (10.2) used for extensions of models, and define theory T' as follows

$$T' = \text{Th}(K), \quad K = \{\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T)\}.$$

It is called *Cartesian-quotient extension* of theory T by means of formulas pointed in tuple (11.1), and is denoted by $T\langle\mathscr{K}\rangle$. Notice that, nulary predicates X_i in signature (11.2) are important in extension operation of theory $T\langle\mathscr{K}\rangle$, while in construction of Cartesian-quotient extension of model $\mathfrak{M}\langle\mathscr{K}\rangle$ they do not matter.

An important fact:

Lemma 11.1. *Operation of Cartesian extension, both for models and theories, is a particular case of corresponding operation of Cartesian-quotient extension.*

PROOF. Operation of Cartesian extension is obtained from operation of Cartesian-quotient extension when, as equivalences ε_i , simple equation $\bar{y} = \bar{z}$ of tuples is taken. As for operation of constant extension, it is particular case of operation of Cartesian extension by Lemma 10.1.

REMARK. Hereafter, just class of Cartesian-quotient extensions is studied. In view of Lemma 10.1 and Lemma 11.1, obtained results will also be valid for subclasses of singleton extensions and Cartesian extensions.

12. Determinancy of the extension operations. Constructions of extension of models and theories have some arbitrariness in choice of signature and universe set. Nevertheless, the following important properties concerning the introduced operations take place:

Lemma 12.1. *For a fixed choice of signature (11.2), Cartesian-quotient extension $\mathfrak{M}\langle\mathscr{K}\rangle$ of a model \mathfrak{M} is defined uniquely, up to an isomorphism over \mathfrak{M} . The same is also true for singleton extension and for Cartesian extension.*

PROOF. Immediately from the description of the construction.

Lemma 12.2. *Let T be a theory of signature σ . Independently of choice of signature (11.2) for operation of extension of a model, Cartesian-quotient extension $T\langle\mathscr{K}\rangle$ of theory T is defined uniquely, up to an algebraic isomorphism. The same is also true for singleton extension and for Cartesian extension.*

PROOF. Immediately from the description of the construction.

Now, prove the following important fact.

Theorem 12.3. *Let T be a theory of a finite signature σ , and a sequence of formulas \mathscr{K} be given as in (11.1). Cartesian-quotient extension $T\langle\mathscr{K}\rangle$ of theory T is finitely axiomatizable if and only if T is finitely axiomatizable.*

PROOF. Construction of theory $S = T\langle\mathscr{K}\rangle$ is described by requirements 1–7 of Section 11, which can easily be presented by a finite set of first-order formulas; moreover, axioms of T are also imported in $T\langle\mathscr{K}\rangle$. Therefore, if T is finitely axiomatizable, theory $T\langle\mathscr{K}\rangle$ is finitely axiomatizable as well.

13. Cartesian-quotient interpretations. Given a theory T of signature σ and a tuple (11.1). Cartesian-quotient extension $T\langle\mathscr{K}\rangle$ of theory T is constructed in some direct manner from T and \mathscr{K} . In this construction, some natural interpretation $I_{T,\mathscr{K}}$ of theory T in theory $T\langle\mathscr{K}\rangle$ is defined, which is called *special Cartesian-quotient interpretation*, and is often denoted by I when T and \mathscr{K} are clear from context. Region of interpretation I for theory T is defined by formula $U(x)$ in theory $T\langle\mathscr{K}\rangle$; moreover, atomic formulas of theory T are mapped in the same formulas of signature σ_1 of theory $T\langle\mathscr{K}\rangle$ with restriction on the region $U(x)$.

Lemma 13.1. *Any special Cartesian-quotient interpretation $I : T \rightarrow T\langle\mathscr{K}\rangle$ is $\exists \cap \forall$ -presentable, model bijective and auto-free.*

PROOF. Immediately from the construction.

Let theories T and S be given. An interpretation $J : T \rightarrow S$ is called *Cartesian-quotient interpretation*, if up to $\exists \cap \forall$ -presentable isomorphism of theories, it coincides with a special Cartesian-quotient interpretation, namely, if there is a finite tuple \mathscr{K} of the form (11.1) and an $\exists \cap \forall$ -presentable isomorphism E of theories, such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{J} & S \\
 I_{T,\varkappa} \searrow & & \nearrow E \\
 & T\langle\varkappa\rangle &
 \end{array}$$

Lemma 13.2. *Any Cartesian-quotient interpretation $J : T \rightarrow S$ is $\exists \cap \forall$ -presentable, model bijective and auto-free.*

PROOF. Immediately from Lemma 13.1.

Note that the definitions given above and statements of Lemma 13.1 and Lemma 13.2 are applicable to more simple types of extensions. As a result, classes of singleton interpretations and Cartesian interpretations are naturally appeared.

14. Decomposition property. Study recurrent applying of operation of extension for theories. First, consider base case when just one additional member is added to a tuple of formulas.

Lemma 14.1. *Let a theory T of signature σ be given, and a tuple of formulas (11.1) be also given. The following assertions are satisfied:*

(a) *For any two formulas $\varphi_{s+1}^{m_{s+1}}$ and ε_{s+1} of signature σ suitable as additional members to the tuple (11.1), there is a couple of formulas φ^m and ε of an appropriate signature, such that the following takes place:*

$$T\langle\varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \dots, \varphi_2^{m_s}/\varepsilon_s, \varphi_{s+1}^{m_{s+1}}/\varepsilon_{s+1}\rangle \approx_a \left(T\langle\varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \dots, \varphi_2^{m_s}/\varepsilon_s\rangle\right)\langle\varphi^m/\varepsilon\rangle$$

(b) *For any two formulas φ_m and ε of a suitable signature applicable for theory pointed below, there is a couple of formulas $\varphi_{s+1}^{m_{s+1}}$ and ε_{s+1} of signature σ , such that the following takes place:*

$$\left(T\langle\varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \dots, \varphi_2^{m_s}/\varepsilon_s\rangle\right)\langle\varphi^m/\varepsilon\rangle \approx_a T\langle\varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \dots, \varphi_2^{m_s}/\varepsilon_s, \varphi_{s+1}^{m_{s+1}}/\varepsilon_{s+1}\rangle$$

PROOF. Part (a) is obvious enough. Part (b) represents some natural principle that first-order definability in models of theory $T\langle\varkappa\rangle$ can be reduced to definability in models of source theory T . Idea of the proof is actually simple, but its realization seems to be technically complicated. Details are omitted.

Now, principal decomposition statement is presented:

Lemma 14.2. *Let a theory T of signature σ be given, and a tuple of formulas \varkappa of the form (11.1) be given, whose length is s . Then, there is a sequences of tuples \varkappa_k , $k = 1, 2, \dots, s$, having lengths $\text{Len}(\varkappa_k) = 1$, such that the following is hold:*

$$T\langle\varkappa\rangle \approx_a T\langle\varkappa_1\rangle\langle\varkappa_2\rangle\dots\langle\varkappa_s\rangle.$$

PROOF. Immediately from Lemma 14.1.

15. Cartesian list. Give definition for algebraic Cartesian list ACL , also called Finitary list.

By \mathbb{C}_0 , denote the class of all complete theories of arbitrary finite signatures, while \mathbb{C} denotes the class of all complete theories of arbitrary enumerable signatures.

Two following versions of the definition are available:

DEF^o. [BASE DEFINITION] List ACL^o consists of those model-theoretic properties $p \subseteq \mathbb{C}_0$, which are preserved by each interpretation $I_{T,\varkappa} : T \rightarrow T\langle\varkappa\rangle$ for an arbitrary finitely axiomatizable theory T of a finite signature σ and an arbitrary finite tuple $\varkappa = \langle\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s}\rangle$ of formulas in signature σ . Model version MCL^o is defined by the rule $MCL^o = ACL^o \cap ML$.

DEF. [EXTENDED DEFINITION] List ACL consists of those model-theoretic properties $p \subseteq \mathbb{C}$, which are preserved by each interpretation $I_{T,\varkappa} : T \rightarrow T\langle\varkappa\rangle$ for an arbitrary recursively axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and an arbitrary finite tuple $\varkappa = \langle\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s}\rangle$ of formulas in signature σ . Model version MCL is defined by the rule $MCL = ACL \cap ML$.

Notice that, by virtue of Lemma 14.2, it is enough to use extensions $T\langle\varkappa\rangle$ with $\text{Len}(\varkappa) = 1$ in the definitions. Give some characterization to the lists ACL° and ACL . On the sets \mathbb{C}_0 and \mathbb{C} define the following equivalence relations:

$$T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow_{dfn} (\exists \text{ finite } \varkappa_1 \varkappa_2)[T_1\langle\varkappa_1\rangle \approx_a T_2\langle\varkappa_2\rangle], \quad T_1, T_2 \in \mathbb{C}_0, \quad (15.1)$$

$$T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow_{dfn} (\exists \text{ finite } \varkappa_1 \varkappa_2)[T_1\langle\varkappa_1\rangle \approx_a T_2\langle\varkappa_2\rangle], \quad T_1, T_2 \in \mathbb{C}. \quad (15.2)$$

The following statement takes place.

Lemma 15.1. *Let a model-theoretic property $p \in AL$ be given. Then, the following relations hold:*

$$p \in ACL^\circ \Leftrightarrow (p \subseteq \mathbb{C}_0) \wedge (\forall T_1 T_2 \in \mathbb{C}_0)[T_1 \sim T_2 \Rightarrow (T_1 \in p \Leftrightarrow T_2 \in p)], \quad (15.3)$$

$$p \in ACL \Leftrightarrow (p \subseteq \mathbb{C}) \wedge (\forall T_1 T_2 \in \mathbb{C})[T_1 \sim T_2 \Rightarrow (T_1 \in p \Leftrightarrow T_2 \in p)]. \quad (15.4)$$

PROOF. First, consider (15.3). If the right-hand condition of relation (15.3) is true, then $p \in ACL^\circ$ by the definition of this list.

Now assume, that the property $p \subseteq \mathbb{C}_0$ is such that, the right-hand condition in (15.3) is false. Then, one can find two theories $T_1, T_2 \in \mathbb{C}_0$ of finite signatures respectively σ_1 and σ_2 , and finite tuples \varkappa_1, \varkappa_2 such that $T_1\langle\varkappa_1\rangle \approx_a T_2\langle\varkappa_2\rangle$, but

$$T_1 \in p \Leftrightarrow T_2 \notin p. \quad (15.5)$$

Consider a theory $T \in \mathbb{C}_0$ such that $T \approx_a T_1\langle\varkappa_1\rangle \approx_a T_2\langle\varkappa_2\rangle$. It follows from (15.5) that

$$[T_1 \in p \Leftrightarrow T \notin p] \vee [T_2 \in p \Leftrightarrow T \notin p]. \quad (15.6)$$

Assume, that first summand in (15.6) is true. In such case, the interpretation $I_{T_1, \varkappa_1} : T_1 \rightarrow T_1\langle\varkappa_1\rangle$ does not preserve property p . Denote by H the theory of signature σ_1 , determined by empty set of axioms, that is, predicate calculus of signature σ_1 . Then, the property p is not preserved by the interpretation $I_{H, \varkappa_1} : H \rightarrow H\langle\varkappa_1\rangle$. Therefore, $p \notin ACL^\circ$ by the definition of this list. Another case, when the second summand in (15.6) is true, is considered with symmetrical reasoning.

Another statement (15.4) can easily be proved by the same scheme.

Now, we obtain principal property:

Theorem 15.2. *Let T and S be theories of finite signatures. Then, the following is satisfied:*
 $T \equiv_{ACL^\circ} S \Leftrightarrow T \equiv_{ACL} S$.

PROOF. Immediately from Lemma 15.1.

Theorem 15.2 together with Lemma 15.1 show that relation \equiv_{MCL° is defined on the class of all theories of finite signatures, while \equiv_{MCL} is just expansion of the relation \equiv_{MCL° on wider class of theories of any enumerable signatures. Although this relation is attended for application in the class of theories of finite signatures, for the sake of convenience, more common relation \equiv_{ACL} is considered as Cartesian similarity relation.

16. Exact interpretations. Define one more class of interpretations.

Given an interpretation I of theory T_0 in region $U(x)$ of theory T_1 . I is called an *exact* interpretation if the following conditions, excepting for (c'), are satisfied:

$$\text{Reference_Block} \quad (16.1)$$

(a) *Interpretation I is effective.*

(b) *Interpretation I is model bijective.*

(c) *Each element a in any model $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$ is first-order definable over the set $U(\mathfrak{M})$.*

(c') *Each element a in any model $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$ is first-order definable over the set $U(\mathfrak{M})$ by means of some \exists -formula.*

(d) For any model \mathfrak{M} of theory T_1 , an arbitrary automorphism of the kernel $\mu: \mathbb{K}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M})$ can be extended to an automorphism $\mu^*: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ of the whole model.

End_Ref

Interpretation I is called \exists -exact or briefly e -exact interpretation, if all parts of the condition (16.1) are satisfied, including also (c').

An obvious fact:

Lemma 16.1. *Each e -exact interpretation is an exact interpretation.*

PROOF. Immediately by the definitions.

The following properties of exact interpretations take place:

Lemma 16.2. *Let I be an exact interpretation of theory T_0 in region $U(x)$ of theory T_1 , then the following assertions are satisfied:*

- (a) I is model bijective interpretation;
- (b) I is iso-stone interpretation;
- (c) $\|\mathfrak{M}\| < \omega \Rightarrow \|\mathbb{K}(\mathfrak{M})\| < \omega$, for all $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$;
- (d) $\|\mathfrak{M}\| \geq \omega \Rightarrow \|\mathbb{K}(\mathfrak{M})\| = \|\mathfrak{M}\|$, for all $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$;

PROOF Conditions (a) and (b) in (16.1) provide that I is an effective model-bijective interpretation. Lemma 7.1 provides that this interpretation is iso-stone and Parts (c) and (d) take place.

17. Exact and Cartesian interpretations. The following result establishes close connection between concepts of a Cartesian-quotient interpretation and an exact interpretation.

Theorem 17.1. *Let I be an interpretation of theory T_0 in region $U(x)$ of theory T_1 . The following assertions hold:*

- (a) Any Cartesian-quotient interpretation is an exact interpretation.
- (b) Let J be an exact interpretation of theory T of signature σ in region $U(x)$ of theory S of signature τ . There exists a sequence of formulas of signature σ

$$\varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \varphi_2^{m_2}/\varepsilon_2, \dots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s \rangle \quad (17.1)$$

and an interpretation E from $T\langle\varkappa\rangle$ to S which is isomorphism of the theories such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{J} & S \\ & \searrow I_{T,\varkappa} & \nearrow E \\ & T\langle\varkappa\rangle & \end{array}$$

PROOF. (a) \rightarrow (b) One can easily check that all requirements in the definition of an exact interpretation are held for any Cartesian interpretation.

(b) \rightarrow (a) Let an interpretation J be given that satisfies demands of Part (b). We also suppose that $U(x)$ is a predicate in σ , and $\sigma \cap \tau = \emptyset$. By the definition of interpretation J , all predicate, function and constant symbols of signature σ are mapped on some formulas $\Psi_t, \Psi'_r, \Psi''_s$ of theory S in signature τ of corresponding arity. Include in S all σ -symbols together with their expression via formulas of signature τ corresponding to interpretation I as follows:

$$\begin{array}{ll} P_t(\bar{x}) \leftrightarrow \Psi_t(\bar{x}), & P_t \in \sigma, \Psi_t(\bar{x}) \in SL(\tau), \\ y = f_r(\bar{x}) \leftrightarrow \Psi'_r(y, \bar{x}), & f_r \in \sigma, \Psi'_r(\bar{x}) \in SL(\tau), \\ x = c_s \leftrightarrow \Psi''_s(x), & c_s \in \sigma, \Psi''_s(x) \in FL(\tau), \end{array} \quad (17.2)$$

obtaining new theory S' in signature $\sigma \cup \tau$, such that S' is an extension of theory S .

Since any element a in any model \mathfrak{M} of theory S is first-order definable over $U(\mathfrak{M})$, by the compactness theorem, there exists a finite set of formulas $\lambda_1(x, \bar{z}_1), \lambda_2(x, \bar{z}_2), \dots, \lambda_m(x, \bar{z}_m) \in SL(\tau)$, $\text{Len}(\bar{z}_i) = k_i$, realizing the first-order definability in such manner that any element a in any model

\mathfrak{M} of theory S is first-order definable over $U(\mathfrak{M})$ by means of one of these formulas. More precisely, the following conditions are satisfied for all $i, j, 1 \leq i, j \leq m$:

$$\begin{aligned} \lambda_i(x, z_1, \dots, z_{k_i}) &\rightarrow \neg U(x) \& U(z_1) \& \dots \& U(z_{k_i}), \\ \lambda_i(x, \bar{z}_i) \& \lambda_i(y, \bar{z}_i) &\rightarrow x = y, \\ (\forall x)[\neg U(x) &\rightarrow (\exists \bar{z}_1)\lambda_1(x, \bar{z}_1) \vee \dots \vee (\exists \bar{z}_m)\lambda_m(x, \bar{z}_m)], \\ (\exists \bar{z}_i)\lambda_i(x, \bar{z}_i) &\rightarrow (\forall \bar{z}_j)\neg \lambda_j(x, \bar{z}_j), \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (17.3)$$

First, a sequence $\lambda'_i, i = 1, \dots, m$, is chosen matching the first three properties. Correcting the initial formulas, we obtain a sequence $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, satisfying all the demands in (17.3).

Extend signature $\sigma \cup \tau$ of theory S' by new predicate symbols

$$L_i^{k_i+1}, R_i^{k_i}, E_i^{2k_i}, U_i^1; 1 \leq i \leq m, \quad (17.4)$$

and extend theory S' by the following new axioms for all i obtaining as a result a theory S^* :

$$\begin{aligned} L_i(x, \bar{z}) &\leftrightarrow \lambda_i(x, \bar{z}), \\ R_i(\bar{z}) &\leftrightarrow (\exists x)\lambda_i(x, \bar{z}), \\ E_i(\bar{z}_1, \bar{z}_2) &\leftrightarrow (\exists x)\lambda_i(x, \bar{z}_1) \& \lambda_i(x, \bar{z}_2), \\ U_i(x) &\leftrightarrow (\exists \bar{z})\lambda_i(x, \bar{z}), \\ R_i(\bar{z}) &\leftrightarrow I\varphi_i(\bar{z}), \quad \varphi_i \in FL(\sigma), \\ E_i(\bar{z}_1, \bar{z}_2) &\leftrightarrow I\varepsilon_i(\bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad \varepsilon_i \in FL(\sigma), \end{aligned} \quad (17.5)$$

where formulas φ_i and ε_i are found with the help of Lemma 7.2, taking into account the fact that interpretation J is auto-free. Notice that requirements (17.5) exactly follow the definition of Cartesian-quotient extension of a model of signature σ defined in region $U(x)$. Particularly, the restriction of theory S^* to signature

$$\pi = \sigma \cup \{L_i^{k_i+1}, R_i^{k_i}, E_i^{2k_i}, U_i^1; 1 \leq i \leq m\} \quad (17.6)$$

is isomorphic to $T\langle \varkappa \rangle$, where $\varkappa = \langle \varphi_1/\varepsilon_1, \dots, \varphi_m/\varepsilon_m \rangle$.

In theory S^* , both σ -symbols and new predicates (17.4) are first-order definable relative to signature τ . Now, prove the converse assertion, that in S^* , all symbols of signature τ are first-order definable relative to symbols (17.6). Consider a model \mathfrak{M}^* of theory S^* . Let \mathfrak{M} be restriction of \mathfrak{M}^* to signature τ , while \mathfrak{M}' be restriction of \mathfrak{M}^* to signature π . Since the interpretation J is exact, any automorphism μ of kernel $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$ in signature σ can be extended to an automorphism μ' of the whole model \mathfrak{M} , and such extension is unique by virtue of Part (c) in definition (16.1); moreover, extra predicates from π are also preserved by μ' because they are first-order definable relative to σ . On the other hand, indicated automorphism μ of $\mathfrak{M}' \upharpoonright U(x)$ in signature σ can be extended in unique way to an automorphism μ'' of the model \mathfrak{M}' in signature π because \mathfrak{M}' represents Cartesian-quotient extension over $\mathfrak{M}' \upharpoonright U(x)$. The uniqueness provides that actually $\mu' = \mu''$ in this situation. This shows that models \mathfrak{M}^* and \mathfrak{M}' admit the same collection of automorphisms. From this, it is possible to show that Craig definability theorem is applicable here. Therefore, predicates of signature τ are first-order definable in S^* with respect to symbols of π . As a result, we have obtained a sequence (17.1) together with the required isomorphism E .

18. Scheme of similarity relations and lists. The family of similarity relations and corresponding lists of model-theoretic properties is presented schematically in Fig. 18.1. Arrows are directed towards stronger relations and indicate relatively wider lists of properties. The right column contains algebraic versions of lists and similarity relations, while the left column represents their model versions. Three lists and similarity relations are mostly important in problematic of expressive possibilities of Predicate Logic. They are marked as "Finitary", "Infinitary", and "Surface".

Two upper relations \approx and \approx_a are relations of isomorphism for theories, where \approx means *model isomorphism* or simply *isomorphism*, while \approx_a means *algebraic isomorphism* or $\exists \cap \forall$ -presentable equivalence between two theories. They are defined in Section 2. Although \approx and \approx_a are not similarity relations, they are included in the scheme for the sake of completeness.

Relations \equiv_l and \equiv_{al} are similarity relations over full list ML of model properties, and respectively over full list AL of algebraic properties, see Section 3 and Section 4. Relation \equiv_l is called *local isomorphism*, while relation \equiv_{al} is called *local algebraic isomorphism*.

The list ASL contains those algebraic properties that are preserved by natural interpretations form T to $T\langle c \rangle$ for any recursively axiomatizable theory T . The list MSL is defined by rule $MSL = ASL \cap ML$. The relations \equiv_{as} and \equiv_s are defined as semantic similarities over the lists ASL and MSL .

The list ACL contains those algebraic properties that are preserved by Cartesian interpretations form T to $T\langle \varphi \rangle$ for any recursively axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and any formula $\varphi \in FL(\sigma)$. The list MCL is defined by rule $MCL = ACL \cap ML$. The relations \equiv_{ac} and \equiv_c are defined as semantic similarities over the lists ACL and MCL .

The list ADL contains those algebraic properties that are preserved by Cartesian-quotient interpretations form T to $T\langle \varphi^m / \varepsilon^{2m} \rangle$ for any recursively axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and any formulas $\varphi, \varepsilon \in FL(\sigma)$ of appropriate arities. The list MDL is defined by rule $MDL = ADL \cap ML$. The relations \equiv_{ad} and \equiv_d are defined as semantic similarities over the lists ADL and MDL .

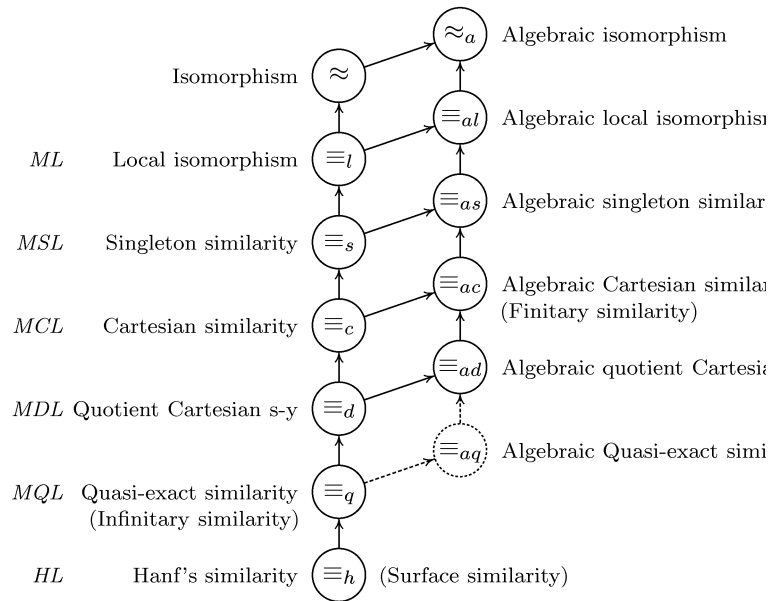


Fig.18.1. Scheme of similarity relations of theories and correspond

The list MQL contains those model properties that are preserved by quasi-exact interpretations (see [4]) between recursively axiomatizable theories, while AQL is algebraic version of this list. The relations \equiv_q and \equiv_{aq} are defined as semantic similarities over the lists MQL and AQL .

The list HL is supposed to be \emptyset . The relation \equiv_h is defined as semantic similarity over the empty list. It is called *Hanf isomorphism* because William Hanf was the first investigator who studied such relations between theories, and just in connection with the problem of expressive power of finitely axiomatizable theories.

Establish inclusions by hierarchy in the scheme of lists.

Theorem 18.1. *Let \equiv_1 and \equiv_2 be relations depicted in the scheme such that the second relation is located higher than the first one in the scheme with respect to arrows, while L_1 and L_2 be corresponding lists. Then, the inclusions $\equiv_1 \supseteq \equiv_2$ and $L_1 \subseteq L_2$ are satisfied.*

PROOF. Most of these inclusions were considered in this paper. As for the case of Infinitary list and corresponding similarity relation, this question is considered later in the series of papers.

References

1. **W. Hodges**, *A shorter model theory*. Cambridge, 1997.
2. **H.J. Rogers**, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. New York, 1967.
3. **M.G. Peretyat'kin** // Algebra and Logic. 1992. V.31, №1. P.47 – 73 (Russian).
4. **M.G. Peretyat'kin**, *Finitely axiomatizable theories*. New York, 1997. Russian equivalent in: *Finitely axiomatizable theories*. Novosibirsk, 1997.

Received at 10.07.2008z.

УДК 517.938

СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

М. И. РАХИМБЕРДИЕВ, А. А. СЕИТОВА

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 function05@mail.ru

Установлен класс линейных дифференциальных систем, на котором верхние особый и центральный показатели непрерывны, а старший показатель полунепрерывная функции.

Изучается зависимость асимптотических свойств линейных дифференциальных систем от возмущения коэффициентов системы при условии, что коэффициенты системы возмущаются различным образом. Развивается теория показателей Ляпунова дифференциальных систем с неограниченной линейной частью. Рассматриваются линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где $A(t)$ – непрерывная матричная функция на $[0, +\infty)$ с условием

$$\sup_t \|A(t)\| < +\infty.$$

Пусть M_n – метрическое пространство линейных систем (1) с метрикой

$$\rho(A, B) = \sup_t \|A(t) - B(t)\|$$

(систему (1), как элемент пространства M_n , обозначаем символом A), $X(t, \tau, A)$ – оператор Коши системы (1). Изучаются свойства устойчивости верхних особого, центрального показателей и старшего показателя Ляпунова систем (1) с неотрицательными матрицами $A(t)$.

Основные общие сведения из теории показателей Ляпунова, используемые здесь, содержатся в книге [1].

1. Особые показатели. Верхним особым показателем системы (1) называется число

$$\Omega_0(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - \tau} \ln \|X(t, \tau, A)\|.$$

Keywords: *indicator, semicontinuous function*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© М. И. Рахимбердиев, А. А. Сеитова, 2008.

Для исследования устойчивости показателя $\Omega_0(A)$, что означает его непрерывность как функции, заданной на метрическом пространстве M_n , в [2] введена асимптотическая характеристика системы (1) – показатель $\eta_0(A)$. В эквивалентной форме он может быть определен следующим образом. Для любых $N > 0$, $i \in \mathbf{N}$, обозначим через s_i^N отрезок $[Ni, N(i+1)]$. Будем говорить, что для данного i система (1) обладает свойством (k, α) – разделенности на s_i^N для $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и $\alpha > 0$, если пространство R^n можно так представить в виде прямой суммы двух подпространств R_0^k и R^{n-k} , что любые ненулевые решения системы (1) $x_1(t)$, $x_2(t)$, с условием $x_1(Ni) \in R^{n-k}$, $x_2(Ni) \in R_0^k$, удовлетворяют для всех $t, \tau \in s_i^N$, $t \geq \tau$, неравенству:

$$\frac{\|x_1(t)\|}{\|x_1(\tau)\|} : \frac{\|x_2(t)\|}{\|x_2(\tau)\|} \geq \alpha e^{\alpha(t-\tau)}.$$

Определим функцию $\varphi_\alpha^N(t, \tau, A)$. Пусть $d_1(X) \geq \dots \geq d_n(X)$ – сингулярные числа матрицы X . Для $t, \tau \in s_i^N$, $t \geq \tau$, полагаем $\varphi_\alpha^N(t, \tau, A) = [\prod_{j=1}^s d_j(X(t, \tau))]^{1/s}$, если для данного i система (1) обладает свойством (k, α) – разделенности при $k = s$, а для меньших k этим свойством не обладает; если же это свойство не выполняется ни при каких k , то считаем, что $s = n$. В том случае, когда t, τ принадлежат разным отрезкам s_i^N , то есть $\tau \in s_i^N$, $t \in s_j^N$, $i < j$, при $j = i+1$ полагаем:

$$\varphi_\alpha^N(t, \tau, A) = \varphi_\alpha^N(t, Nj, A) \varphi_\alpha^N(Nj, \tau, A),$$

иначе:

$$\varphi_\alpha^N(t, \tau, A) = \varphi_\alpha^N(t, Nj, A) \varphi_\alpha^N(Nj, N(j-1), A) \dots \varphi_\alpha^N(N(i+1), \tau, A).$$

Показатель $\eta_0(A)$ определяется равенством:

$$\eta_0(A) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{N-T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{p-r \rightarrow +\infty} \frac{1}{T(p-r)} \sum_{i=r+1}^p \ln \varphi_\alpha^N(iT, (i-1)T, A).$$

Согласно [1] функция $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ полунепрерывна сверху. Наличие точек ее разрывности установлено в [3]. Непосредственно из определения показателей Ω_0, η_0 вытекает неравенство $\Omega_0(A) \geq \eta_0(A)$. Из [4] следует, что функция $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ непрерывна на M_n в точке A тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\Omega_0(A) = \eta_0(A)$. Рассмотрим подмножество K_+ в M_n систем (1) с отделенными от нуля коэффициентами $a_{ij}(t)$ матриц $A(t)$, т.е. $A \in K_+$, если $\inf_{t \geq 0} a_{ij}(t) > 0$ для всех i, j . Из [5] вытекает, что системы из K_+ обладают свойством экспоненциальной разделенности индекса $n-1$ (см. [6]), следовательно, согласно теореме 15.2.1 из [1] они входят во множество точек непрерывности функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$, поэтому $\Omega_0(A) = \eta_0(A)$ на K_+ . Рассмотрим теперь в M_n множество K , являющееся замыканием множества K_+ . Неравенство $A \geq 0$ будет означать, что $A \in K$. Покажем, что на K существуют точки разрыва функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$. Ясно, что достаточно ограничиться случаем $n=2$. Рассмотрим пример системы, который является видоизменением примера В.М. Миллионщикова из [3].

Пусть

$$A(t) = f(t) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } k9^{s!} \leq t < k9^{s!} + 9^{(s-1)!}, \\ s & \text{любое натуральное,} \\ k & \text{любое целое,} \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Тогда система (1) с данной матрицей $A(t)$ – диагональная и $\Omega_0(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \int_{\tau}^t 2f(s)ds$. Эта величина в силу задания $f(t)$ положительна. Непосредственно из определения показателя η_0 следует, что $\Omega_0(A) = 2\eta_0(A)$. Поэтому $\Omega_0(A) > \eta_0(A)$. Это означает, что A на K является точкой разрыва функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$. Рассмотрим теперь поведение функции, которая является ограничением функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ на множество K . В этом случае непрерывность этой функции возможна и при выполнении неравенства $\Omega_0(A) > \eta_0(A)$.

Теорема 1. *Ограничение функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ на множество K есть непрерывная функция.*

Доказательство. Допустим, что ограничение функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ на множество K – разрывная в некоторой точке A функция. Так как функция $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ полунепрерывна сверху на M_n , то, по предположению, не является полунепрерывной снизу, значит, существует $\varepsilon > 0$, для которого при всяком $\delta > 0$ в δ – окрестности A найдется B такое, что

$$\Omega_0(A) > \Omega_0(B) + \varepsilon. \quad (2)$$

Покажем, что функция $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ обладает свойством монотонности, то есть из $A_1 \geq A_2 \geq 0$ следует $\Omega_0(A_1) \geq \Omega_0(A_2)$. Действительно, в силу известного представления матрицы Коши $X(t, \tau, A)$ системы (1) в виде:

$$X(t, \tau, A) = E + \int_{\tau}^t A(t_1)dt_1 + \int_{\tau}^t A(t_1)dt_1 \int_{\tau}^{t_1} A(t_2)dt_2 + \dots,$$

из неравенства $A_1 \geq A_2 \geq 0$ вытекает неравенство $X(t, \tau, A_1) \geq X(t, \tau, A_2) \geq 0$, поэтому $\|X(t, \tau, A_1)\| \geq \|X(t, \tau, A_2)\|$ и, следовательно, $\Omega_0(A_1) \geq \Omega_0(A_2)$.

Обозначим через I матрицу, все элементы которой равны 1. Представим разность $\Omega_0(A) - \Omega_0(B)$ в виде:

$$\begin{aligned} \Omega_0(A) - \Omega_0(B) = & [\Omega_0(A) - \Omega_0(A + sI)] + [\Omega_0(A + sI) - \Omega_0(B + sI)] + [\Omega_0(B + \\ & + sI) - \Omega_0(B)], \end{aligned} \quad (3)$$

где s – некоторое положительное число. Так как $A + sI \geq A$, $B + sI \geq B$, то выражения, стоящие в первой и третьей квадратных скобках, неположительны. Поэтому из (3) вытекает неравенство:

$$\Omega_0(A) - \Omega_0(B) \leq \Omega_0(A + sI) - \Omega_0(B + sI).$$

Ясно, что $\rho(A + sI, B + sI) = \rho(A, B)$ и $A + sI \in K_+$, $B + sI \in K_+$, значит, $A + sI$ – точка непрерывности функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для любого B из δ – окрестности A выполняется неравенство:

$$|\Omega_0(A + sI) - \Omega_0(B + sI)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

С другой стороны, выбирая B согласно предположению о разрывности функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ в точке A , в силу (2), (4) получаем противоречивые неравенства:

$$\varepsilon < \Omega_0(A) - \Omega_0(B) \leq \Omega_0(A + sI) - \Omega_0(B + sI) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому предположение о разрывности ограничения функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ на множество K неверно. Теорема доказана.

2. Центральные показатели. Верхним центральным показателем системы (1) называется число

$$\Omega(A) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^m \ln \|X(kT, (k-1)T, A)\|.$$

Приведем определение показателя $\mu(A)$, эквивалентное введенному в [7]:

$$\mu(A) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \underline{\lim}_{N-T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{Tm} \sum_{k=1}^m \ln \varphi_{\alpha}^N(iT, (i-1)T).$$

Показатель $\mu(A)$ характеризует поведение показателя $\Omega(A)$ в следующем смысле. Согласно [2] функция $\Omega = \Omega(A)$ полунепрерывна сверху. Разрывность ее также, как и функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$ установлена в [3]. Из определения показателей Ω , μ вытекает неравенство $\Omega(A) \geq \mu(A)$. В [8] доказано, что функция $\Omega = \Omega(A)$ непрерывна на M_n в точке A тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\Omega(A) = \mu(A)$. Из экспоненциальной разделенности индекса $n-1$ системы (1) из теоремы 15.2.1 из [1] они входят во множество точек непрерывности функции $\Omega = \Omega(A)$. Рассмотрим поведение функции, которая является ограничением функции $\Omega = \Omega(A)$ на множество K . Эта функция обладает свойством, аналогичным свойству функции $\Omega_0 = \Omega_0(A)$, то есть она непрерывна, хотя $\Omega(A) > \mu(A)$. Аналогично теореме 1 доказывается.

Теорема 2. *Ограничение функции $\Omega = \Omega(A)$ на множество K – непрерывная функция.*

3. Старший показатель. Старший показатель Ляпунова задается следующей формулой:

$$\Lambda(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|X(t, 0, A)\|.$$

$\Lambda = \Lambda(A)$ – разрывная функция и ее свойство, как разрывной функции, отличается от свойств функций $\Omega_0 = \Omega_0(A)$, $\Omega = \Omega(A)$, которые, являясь полунепрерывными, принадлежат первому классу Бэра. Функция $\Lambda = \Lambda(A)$ характеризуется принадлежностью строго второму классу Бэра (см. [9,10]). Установим свойство ее ограничения на K . Покажем, что на K существуют точки разрыва этой функции. Для этого рассмотрим некоторое видоизменение примера 13.5.1 из [1] при $n = 2$. К построенной в [1] матрице системы (1) прибавим матрицу πE . Получим матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi (\sin \pi \sqrt{t}) + \pi \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $A \in K$. Так как увеличение элементов диагонали матрицы системы (1) на π увеличивает показатели Ляпунова и центральные показатели на π , не изменяя их свойства непрерывности, полунепрерывности и разрывности, то все выводы об этих свойствах, которыми обладает система из [1], имеют место и для данной системы. Поэтому имеем $\Lambda(A) = \pi$, $\Omega(A) = \pi + 1$. Рассмотрим возмущенную систему A_{ε} , которая получается из системы A прибавлением к внедиагональным элементам ее матрицы некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $A_{\varepsilon} \in K_+$, поэтому эта система удовлетворяет условию экспоненциальной разделенности индекса 1. Для такой системы выполняется равенство $\Lambda(A_{\varepsilon}) = \Omega(A_{\varepsilon})$. Отсюда, учитывая монотонное неубывание функции $\Omega = \Omega(A)$, приходим к неравенству $\Lambda(A_{\varepsilon}) > 1 + \pi$ при любом $\varepsilon > 0$, что показывает разрывность ограничения функции $\Lambda = \Lambda(A)$ на множество K . Уточним характер ее разрывности.

Теорема 3. *Ограничение функции $\Lambda = \Lambda(A)$ на множество K – полунепрерывная снизу функция.*

Доказательство теоремы основывается на предположении, что ограничение функции $\Lambda = \Lambda(A)$ на множество K не является полунепрерывной снизу в некоторой точке A . Далее, используя монотонность функции $\Lambda = \Lambda(A)$, как и при доказательстве теоремы 1 приходим к противоречивым неравенствам.

Заметим, что утверждения всех теорем справедливы, если вместо множества K рассмотреть множество системы (1) с неотрицательными внедиагональными коэффициентами их матриц.

Цитированная литература

1. **Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1996.
2. **М.И. Рахимбердиев** // Дифференц уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С.659 – 670.
3. **В.М. Миллиончиков** // Дифференц уравнения. 1969. Т. 5, № 4. С.749 – 750.
4. **М.И. Рахимбердиев** // Дифференц уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С.1797 – 1807.
5. **М.И. Рахимбердиев** // Дифференц уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С.70 – 72.
6. **В.М. Миллиончиков** // Мат. сборник. 1984. Т.124(166). С.451 – 485.
7. **О.Г. Илларионова** // Дифференц уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С.949 – 965.
8. **О.Г. Илларионова** // Дифференц уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С.1492 – 1503.
9. **В.М. Миллиончиков** // Дифференц уравнения. 1980. Т.14, № 8. С.1408 – 1416.
10. **М.И. Рахимбердиев** // Мат. Заметки. 1982. Т.31, № 6. С.925 – 931.

Поступила в редакцию 30.05.2008г.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРИВОДЯЩЕЙСЯ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА

С. З. САПАКОВА

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 SapakovaS@mail.ru

В данной работе рассматривается задача определения полианалитической функции, которая приводится к известной задаче Гильберта для аналитических функций. В зависимости от индексов функций, заданных на граничных условиях, получены явные виды решений.

Под устойчивыми граничными условиями для уравнения $2n$ -го порядка понимают такие граничные условия, которые содержат данную функцию и ее производные, порядок которых не превышает $n - 1$. Следовательно, как и решение всякого уравнения эллиптического типа $2n$ -го порядка, полигармоническая функция определяется заданием n независимых условий, порядок производных не превышает $n - 1$. Эти условия могут быть даны в очень разнообразных формах [1]. Здесь мы рассмотрим задачу об определении решения «трианалитического» уравнения в области $D \equiv \{|z| < 1\}$:

$$\frac{\partial^6 F}{\partial z^3 \partial \bar{z}^3} = 0, \quad F = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1)$$

по краевым условиям на границе $L \equiv \{|z| = 1\}$

$$a_1 u + b_1 v = 0, \quad a_2 \frac{\partial u}{\partial n} + b_2 \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad a_3 \Delta u + b_3 \Delta v = 0, \quad (2)$$

где $a_k, b_k, k = 1, 2, 3$ – заданные на границе действительные функции, удовлетворяющие на контуре L условию Гельдера. Задача в такой постановке впервые рассматривалась в работе [2]. Отметим, что метод решения задачи, используемый в данной работе, отличается от метода решения в [2]. В настоящей работе задача (1), (2) сводится к трем краевым задачам Гильберта относительно аналитических функций, аналитические функции, входящие в эти краевые задачи, определяются последовательно и решение задачи (1), (2) дается в замкнутой форме.

Исходя из общего представления полианалитической функции [3]:

$$F = u(x, y) + iv(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \bar{z}^k \varphi_k(z), \quad (3)$$

Keywords: *polyanalytic functions, Hilbert's problem, analytical functions, boundary problem.*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

© С. З. Сапакова, 2008.

после несложных преобразований, получим следующее представление трианалитической функции:

$$F(z) = \varphi_0(z) + (|z|^2 - 1)\varphi_1(z) + (|z|^2 - 1)^2\varphi_2(z), \tag{4}$$

где $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ – произвольные аналитические функции.

Граничные условия (2) преобразуем считая, неограничивая общности, что

$$a_k^2(s) + b_k^2(s) = 1, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{F(z)}{a_1(z) + ib_1(z)} = \frac{u + iv}{a_1 + ib_1} = (a_1 - ib_1)(u + iv) = a_1u + b_1v + i(a_1v - b_1u).$$

Следовательно, первое условие в (2) записывается в виде:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F(t)}{a_1(t) + ib_1(t)}\right\} = 0. \tag{6}$$

Аналогичным образом, второе граничное условие в (2) принимает вид:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{it'F_t - i\bar{t}'F_{\bar{t}}}{a_2(t) + ib_2(t)}\right\} = 0, \tag{7}$$

а третье условие в (2) переходит в следующее:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F_{t\bar{t}}}{a_3(t) + ib_3(t)}\right\} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, подставляя (4) в граничные условия (6) – (8), мы приходим от задачи (1), (2) к следующим трем задачам Гильберта для определения аналитических функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$:

Требуется определить аналитические функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ в области $D \equiv \{|z| < 1\}$, удовлетворяющие следующим граничным условиям на границе $L \equiv \{|t| = 1\}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi_0(t)}{a_1(t) + ib_1(t)}\right\} = 0, \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{it'(\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1(t)) - i\bar{t}'(t\varphi_1)}{a_2(t) + ib_2(t)}\right\} = 0, \\ \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi_1(t) + t\varphi_1'(t) + 2\varphi_2(t)}{a_3(t) + ib_3(t)}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Если ввести обозначения $a_1(t) + ib_1(t) = A_0(t)$, $\frac{itt'(a_2(t)+ib_2(t))}{t^2-t'^2} = A_1(t)$, $\frac{a_3(t)+ib_3(t)}{2} = A_2(t)$, $f_1(t) = \operatorname{Re}\frac{t'\varphi_0'(t)}{ia_2(t)-b_2(t)}$, $f_2(t) = \operatorname{Re}\frac{-\varphi_1(t)-t\varphi_1'(t)}{a_3(t)+ib_3(t)}$, то для определения аналитических функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ получим следующие задачи Гильберта.

Определим аналитические функции $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2$, в области $D \equiv \{|z| < 1\}$ по граничным значениям на контуре $L \equiv \{|t| = 1\}$:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi_0(t)}{A_0(t)}\right\} = 0, \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi_1(t)}{A_1(t)}\right\} = f_1(t), \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi_2(t)}{A_2(t)}\right\} = f_2(t). \tag{10}$$

Эти задачи нужно решить последовательно, так как $f_1(t)$ зависит от $\varphi_0(t)$, $f_2(t)$ зависит от $\varphi_1(t)$. После того как решим первую задачу, найденное $\varphi_0(t)$ подставим в $f_1(t)$, в результате $f_1(t)$ становится известной функцией. Аналогично, после того как решим вторую краевую

задачу, найденную функцию $\varphi_1(t)$ подставим в $f_2(t)$ и мы получаем задачу уже с известной правой частью $f_2(t)$.

Пусть $\varkappa_0 = \text{Ind } A_0(t)$, $\varkappa_1 = \text{Ind } A_1(t)$, $\varkappa_2 = \text{Ind } A_2(t)$ и $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ – регуляризующие множители функции $A_0(t)$, $A_1(t)$ и $A_2(t)$ соответственно. По определению

$$p_k(s)A_k(s) = t^{\varkappa_k} e^{i\gamma_k(t)} = t^{\varkappa_k} e^{i(\omega_k(x,y) + i w_k(x,y))} = t^{\varkappa_k} e^{-w_k(x,y)} e^{i\omega_k(x,y)}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (11)$$

Взяв отсюда модули и аргументы обеих частей, получим:

$$p_k(s) = \frac{|t|^{\varkappa_k} e^{-w_k(s)}}{|A_k(t)|}, \quad (12)$$

$$\omega_k(s) = \arg\{t^{-\varkappa_k} A_k(s)\} = \arctg \frac{\text{Im} A_k(s)}{\text{Re} A_k(s)} - \varkappa_k \arg t. \quad (13)$$

Тогда

$$\gamma_k(s) = S \left[\arctg \frac{\text{Im} A_k(s)}{\text{Re} A_k(s)} - \varkappa_k \arg t \right], \quad (14)$$

где S – оператор Шварца [4].

Для определения аналитической функции $\varphi_0(z)$ в единичном круге, решим однородную задачу Гильберта по граничному значению:

$$\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_0(t)}{A_0(t)} \right\} = 0. \quad (15)$$

Деля обе части равенства (15) на регуляризующий множитель функции $A_0(t)$, приведем его к виду

$$\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_0(t)}{t^{\varkappa_0} e^{i\gamma_0(t)}} \right\} = 0. \quad (16)$$

В зависимости от знака индекса \varkappa_0 рассмотрим отдельные случаи:

1⁰. $\varkappa_0 = \text{Ind } A_0(t) = 0$. Тогда краевое условие (16) будет условием задачи Дирихле.

В силу единственности решения задачи Дирихле будем иметь в единичном круге D

$$\text{Re} \left\{ \frac{\varphi_0(z)}{e^{i\gamma_0(z)}} \right\} = 0, \quad \varphi_0(z) = i\alpha_0 e^{i\gamma_0(z)}, \quad (17)$$

где α_0 – действительная постоянная.

2⁰. $\varkappa_0 > 0$. Тогда краевое условие (16) является условием так называемой задачи A_0 [4]. Следовательно, решение задачи (16) будет

$$\varphi_0(z) = z^{\varkappa_0} e^{i\gamma_0(z)} Q_0(z), \quad (18)$$

где $Q_0(z)$ определяется формулой

$$Q_0(z) = i\alpha_0 + \sum_{k=1}^n (C_k z^k - \bar{C}_k z^{-k}). \quad (19)$$

Здесь α_0 – произвольная действительная постоянная, n – порядок полюса, если допущен полюс для аналитических функции порядка не выше n . Следовательно, задача имеет $2\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

3⁰. $\varkappa_0 < 0$. В этом случае решение задачи (15) в аналитических функциях не существует. Но, если в качестве допустимых функций брать функции, имеющие в единичном круге не менее $-\varkappa_0$ полюсов, то задача имеет решение.

Далее, решим задачу об определении аналитической функции по краевому условию:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_1(t)}{A_1(t)} \right\} = f_1(t), \quad (20)$$

здесь $f_1(t)$ зависит от аналитической функции $\varphi_0(t)$, определяемой по формулам (17), (18).

Аналогично, как это делалось в предыдущей задаче (15), разделим обе части краевого условия на регуляризующий множитель функции $A_1(t)$, тогда для определения аналитической функции $\varphi_1(z)$ в единичном круге имеем:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_1(t)}{t^{\varkappa_1} e^{i\gamma_1(t)}} \right\} = |t|^{-\varkappa_1} e^{w_1(s)} f_1(s). \quad (21)$$

Здесь также в зависимости от знака \varkappa_1 рассматриваем три случая.

4⁰. $\varkappa_1 = 0$. Краевое условие (21) будет условием задачи Дирихле и беря от обеих частей оператор Шварца S [4], получим

$$\varphi_1(z) = e^{i\gamma_1(z)} [S(e^{w_1(s)} f_1(s)) + i\alpha_1]. \quad (22)$$

5⁰. $\varkappa_1 > 0$. Краевое условие (21) будет условием, так называемой задачи A [4], и на основании решения задачи A , получим общее решение задачи (20) в виде:

$$\varphi_1(z) = z^{\varkappa_1} e^{i\gamma_1(z)} \left[S(|t|^{-\varkappa_1} e^{w_1(s)} f_1(s)) + Q_1(z) \right]. \quad (23)$$

6⁰. $\varkappa_1 < 0$. В этом случае поступая аналогично предыдущему случаю, получим

$$\varphi_1(z) = z^{\varkappa_1} e^{i\gamma_1(z)} \left[S(|t|^{-\varkappa_1} e^{w_1(s)} f_1(s)) + iC \right]. \quad (24)$$

Так как в этой формуле имеется множитель z^{\varkappa_1} , то функция $\varphi_1(z)$, определяемая формулой (24), может иметь полюс порядка $-\varkappa_1$. Чтобы получить аналитическое решение необходимо в (24) положить $C = 0$ и потребовать, чтобы функция

$$S(|t|^{-\varkappa_1} e^{w_1(s)} f_1(s))$$

имела нуль порядка $-\varkappa_1$ в начале координат. Разложив функцию в начале координат, легко показать, что результат дает, как можно $-2\varkappa_1 - 1$ условий. Чтобы решение было возможным необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял этим $-2\varkappa_1 - 1$ условиям разрешимости.

Третья задача об определении аналитической функции $\varphi_2(z)$ по граничному условию

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_2(t)}{A_2(t)} \right\} = f_2(t) \quad (25)$$

решается так же как задача (20) по формулам (22), (23), (24), только меняется номер индекса:

7⁰.

$$\varkappa_2 = 0, \quad \text{то} \quad \varphi_2(z) = e^{i\gamma_2(z)} [S(e^{w_2(s)} f_2(s)) + i\alpha_2]. \quad (26)$$

8⁰. $\varkappa_2 > 0$, то

$$\varphi_2(z) = z^{\varkappa_2} e^{i\gamma_2(z)} [S(|t|^{-\varkappa_2} e^{w_2(s)} f_2(s)) + Q_2(z)]. \quad (27)$$

9⁰. $\varkappa_2 < 0$, то

$$\varphi_2(z) = z^{\varkappa_2} e^{i\gamma_2(z)} [S(|t|^{-\varkappa_2} e^{w_2(s)} f_2(s)) + iC]. \quad (28)$$

Таким образом, решение задачи зависит от знака индексов функций, заданных на границе. В частности, если все индексы $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ положительны, то решение задачи (1), (2) имеет вид:

$$F(z) = z^{\varkappa_0} e^{i\gamma_0(z)} Q_0(z) + (|z|^2 - 1) z^{\varkappa_1} e^{i\gamma_1(z)} [S(|t|^{-\varkappa_1} e^{w_1(s)} f_1(s)) + Q_1(z)] + (|z|^2 - 1)^2 z^{\varkappa_2} e^{i\gamma_2(z)} [S(|t|^{-\varkappa_2} e^{w_2(s)} f_2(s)) + Q_2(z)]. \quad (29)$$

В силу того, что для единичного круга оператор Шварца совпадает с интегралом Шварца, эту формулу и формулы (22) – (24), (26) – (28) в случае единичного круга можно представить следующим образом:

1. Если $\varkappa_k = 0, k = 1, 2$, то

$$\varphi_k(z) = e^{i\gamma_k(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + i\alpha_k \right]. \quad (30)$$

2. Если $\varkappa_k > 0, k = 1, 2$, то

$$\varphi_k(z) = z^{\varkappa_k} e^{i\gamma_k(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + Q_k(z) \right]. \quad (31)$$

3. Если $\varkappa_k < 0, k = 1, 2$, то

$$\varphi_k(z) = z^{\varkappa_k} e^{i\gamma_k(z)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma, \quad (32)$$

где $\varphi_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$,

$$\gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} A_k(\sigma)}{\operatorname{Re} A_k(\sigma)} - \varkappa_k \sigma \right] \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma,$$

$$\gamma_k(z) = \omega_k(x, y) + i w_k(x, y), \quad Q_k(z) = i\alpha_k + \sum_{j=1}^{\varkappa_k} (C_j z^j - \bar{C}_j z^{-j}).$$

В случае 3) для разрешимости задачи функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \frac{d\sigma}{1 - ze^{-i\sigma}}, \quad (33)$$

$$k = 1, 2,$$

должны иметь нуль порядка $-\varkappa_k$ в начале координат. Разлагая их в степенной ряд в окрестности начала и приравнявая нулю первые $-\varkappa_k$ коэффициентов, получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) e^{-im\sigma} d\sigma = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, -\varkappa_k - 1, \quad (34)$$

или в действительной форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \cos m\sigma d\sigma &= 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w_k(\sigma)} f_k(\sigma) \sin m\sigma d\sigma &= 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, -\varkappa_k - 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Формулы (35) дают $-2\varkappa_k - 1$ условий разрешимости, которым должны удовлетворять свободные члены для того, чтобы неоднородная задача Гильберта с отрицательным индексом была разрешима.

Цитированная литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., 1948.
2. Рогожин В.С. // Уч. зап. Казанского ун-та. Т.110, № 3. 1950. С. 71 – 94.
3. Мухелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1963.

Поступила в редакцию 07.12.2007 г.

УДК 517.946

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Ж. А. СЕРИКБАЕВ

080000 Тараз ул. Асимова, 28 szhcit@rambler.ru

Рассмотрен класс дифференциальных операторов второго порядка с переменным операторным коэффициентом. Доказана делимость и существование обратного оператора.

Особый интерес с прикладной точки зрения представляет исследование неполуограниченных дифференциальных уравнений с переменным операторным коэффициентом, возникающий при исследовании дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов [1].

Существование, единственность, гладкость решений и спектральные свойства полуограниченных дифференциальных операторов исследованы и для них получены фундаментальные результаты в работах Б.М. Левитана [2], А.Г. Костюченко [3], М. Отелбаева [4] и др.

В случае, когда дифференциальный оператор неполуограниченный, изучен в работах М.Б. Муратбекова [5], К.Н. Оспанова [6], А. Тогочуева [5], А. Биргебаева [7] и др. В этих работах были исследованы дифференциальные уравнения нечетного порядка в неограниченных областях.

Пусть H – абстрактное сепарабельное пространство Гильберта. Обозначим через $H_1 = L_2(-1, 1, H)$ гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty((-1, 1), H)$ – множества финитных бесконечно гладких вектор функций, определенных на $R(-1, 1)$ со значением в H ,

по норме $\|u(y)\|_{H_1} = \left(\int_{-1}^1 \|u(y)\|_H^2 dy \right)^{1/2}$, соответствующей скалярному произведению

$$\langle u(y), v(y) \rangle_{H_1} = \int_{-1}^1 \langle u(y), v(y) \rangle_H dy.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -u''(y) + k(y)A(y)u + ia(y)A^\alpha(y)u + c(y)u, \quad (1)$$

определенный на множестве $C_0^\infty((-1, 1), H)$. Замыкание L в норме H_1 также обозначим через L . Здесь A – положительно определенный самосопряженный оператор, зависящий от переменной y в гильбертовом пространстве H с вполне непрерывным обратным оператором, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$,

Keywords: *differential operators, operator coefficient, boundary divisibility and existence of reverse operator*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

© Ж. А. Серикбаев, 2008.

$k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция в $[-1, 1]$, $k(0) = 0$ и $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$, $c(y) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в $[-1, 1]$;

ii) $\sup_{\bar{y}, y \in [-1, 1]} \|k(y)(A(y) - A(\bar{y}))\|_{H_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq o(1)$, при $\lambda \gg 1$;

iii) $\sup_{\bar{y}, y \in [-1, 1]} \left\| (A^\alpha(y) - A^\alpha(\bar{y}))(A^\alpha(\bar{y}) + \sqrt{\lambda}E)^{-1} \right\|_{H_1} \leq o(1)$, при $\lambda \gg 1$.

Тогда для оператора $L + \lambda E$ при достаточно больших $\lambda > 0$ существует ограниченный обратный оператор $(L + \lambda E)^{-1}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия i)-iii). Тогда для любого $u \in D(L)$ справедлива оценка $\|u'(y)\|_{H_1} + \|ia(y)A^\alpha u\|_{H_1} + \|c(y)u\|_{H_1} \leq c\|Lu\|_{H_1}$.

Вспомогательные леммы и неравенства

Рассмотрим оператор

$$l_t u \equiv -u''(y) + k(y)tu + ia(y)t^\alpha u + c(y)u,$$

определенный на множестве $C_0^\infty(-1, 1)$, где $d < t < \infty$, $d > 0$. Отметим, что оператор l_t допускает замыкание, которые также обозначим через l_t .

Лемма 1. Пусть выполнено условие i). Тогда:

a) $\|l_t u\|_2 \geq t^\alpha \delta_0 \|u\|_2$, $u \in D(l_t)$;

б) $c\|l_t u\|_2 \geq (\|u'\|_2 + \|\sqrt{c(y)}u\|_2)$, $u \in D(l_t)$,

в) оператор l_t максимально диссипативен.

Доказательство. Для любого $u \in C_0^\infty(-1, 1)$ имеем:

$$\begin{aligned} |\langle l_t u, itu \rangle| &= \int_{-1}^1 l_t u \overline{itu} dy = \int_{-1}^1 (-u'' + k(y)tu + ia(y)t^\alpha u + c(y)u) \overline{itu} dy = \\ &= \int_{-1}^1 (-u''(-i)t \bar{u} + k(y)t^2(-i)|u|^2 - i^2 a(y)t^{\alpha+1}|u|^2 + c(y)|u|^2(-i)t) dy = \\ &= \left| -it \int_{-1}^1 \left[|u'|^2 + (k(y)t + c(y))|u|^2 \right] dy + \int_{-1}^1 a(y)t^{\alpha+1}|u|^2 dy \right|. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, используя неравенство Коши-Буняковского, легко получить неравенство:

$$\|l_t u\| t \|u\| \geq t^{\alpha+1} \int_{-1}^1 \delta_0^2 |u|^2 dy \geq t^{\alpha+1} \delta_0 \|u\|_2^2$$

или

$$\|l_t u\|^2 \geq t^{2\alpha} \delta_0^2 \|u\|_2^2.$$

Таким образом, пункт а) леммы 1 доказан.

Далее, для доказательства пункта б) составим квадратичную форму:

$\langle l_t u, u \rangle = \int_{-1}^1 [(-u'' + k(y)tu + ia(y)|t|^\alpha u + c(y)u)] \bar{u} dy$, где $u \in C_0^\infty(-1, 1)$.

Интегрируя последнее равенство, находим:

$$|\langle l_t u, u \rangle| = \left| \int_{-1}^1 [|u'|^2 + (tk(y) + i|t|^\alpha a(y) + c(y))] |u|^2 dy \right|.$$

Следовательно,

$$\|l_t u\| \|u\| \geq \left| \int_{-1}^1 [|u'|^2 + (tk(y) + c(y))] |u|^2 dy \right|.$$

Отсюда, используя неравенство Коши, имеем:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \|l_t u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 \geq \int_{-1}^1 [|u'|^2 + c(y)] |u|^2 dy - \int_{-1}^1 t|k(y)| |u|^2 dy.$$

Из последнего неравенства на основании условия i) будем иметь:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \|l_t u\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [|u'|^2 + c(y)] |u|^2 dy - \int_{-1}^1 t|k(y)| |u|^2 dy.$$

Используя неравенство а), получим:

$$c \|l_t u\|_2 \geq (\|u'\|_2 + \|\sqrt{c(y)}u\|_2).$$

Таким образом, пункт б) данной леммы доказан. Для доказательства пункта в) необходимы следующие леммы.

Лемма 2. Пусть выполнено условие i), тогда существует непрерывный обратный оператор l_t^{-1} , определенный в $L_2(-1, 1)$.

Доказательство. Интегрируя по частям $\langle l_t u, u \rangle$ и используя неравенство Коши, для всякого $u \in D(l_t)$ получим:

$$|\langle l_t u, u \rangle| = \left| \int_{-1}^1 [|u'|^2 + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))] |u|^2 dy \right| \geq \left| \int_{-1}^1 a(y) t^\alpha |u|^2 dy \right|.$$

В силу условия i):

$$\|l_t u\| \|u\| \geq |\langle l_t u, u \rangle| \geq \int_{-1}^1 t^\alpha |a(y)| |u|^2 dy \geq t^\alpha \delta_0 \|u\|_2^2,$$

т.е. $\|l_t u\|_2 \geq c \|u\|_2$.

Теперь покажем, что из плотности множества $l_t D(l_t)$ в $L_2(-1, 1)$, будет следовать, что оператор l_t имеет непрерывный обратный оператор l_t^{-1} . Мы докажем это от противного.

Допустим, что множество $l_t D(l_t)$ не является плотным в $L_2(-1, 1)$. Тогда существует элемент $v \in L_2(-1, 1)$, $v \neq 0$, такой, что $\langle l_t u, v \rangle = 0$, для всех $u \in D(l_t)$. Имеем $\langle l_t u, v \rangle = \langle u, l_t^* v \rangle = 0$.

Это означает, что $l_t^*v \equiv -v'' + k(y)tv + ia(y)t^\alpha v + c(y)v = 0$ в смысле теории распределений. Далее, из ограниченности и непрерывности функций $a(y), k(y), c(y)$ на отрезке $(-1, 1)$ следует, что $(k(y)t + ia(y)t^\alpha + c(y))v \in L_2(0, 1)$, следовательно, $v'' \in L_2(-1, 1)$.

Для завершения доказательства достаточно убедиться в том, что элемент $v \in L_2(-1, 1)$, $v \neq 0$, для которого $l_t^*v = 0$ принадлежит $D(l_t)$, т.е. $v(-1) = v(1) = 0$.

В этом можно убедиться, интегрируя по частям выражение:

$$\begin{aligned} 0 = \langle u, l_t^*v \rangle &= \int_{-1}^1 u[-\bar{v}'' + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))\bar{v}]dy = -\int_{-1}^1 u\bar{v}''dy + \\ &+ \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = \int_{-1}^1 u d\bar{v}' + \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = -u\bar{v}'|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \bar{v}'du + \\ &+ \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = \int_{-1}^1 \bar{v}'du + \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = \\ &= \int_{-1}^1 u'\bar{v}'dy + \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = \int_{-1}^1 u'd\bar{v} + \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = \\ &= u'\bar{v}|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u''\bar{v}dy + \int_{-1}^1 (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u\bar{v}dy = u'\bar{v}|_{-1}^1 + \\ &+ \int_{-1}^1 [-u'' + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u]\bar{v}dy = u'\bar{v}|_{-1}^1 + \langle l_t u, v \rangle, \end{aligned}$$

где $u \in D(l_t)$.

В силу предположения $\langle l_t u, v \rangle = 0$, следует, что $u'\bar{v}|_{-1}^1 = 0$. Из произвольности функции u следует, что $\bar{v}(-1) = \bar{v}(1) = 0$. Таким образом, $v'' \in L_2(-1, 1)$, $v(-1) = v(1) = 0$.

Теперь нам осталось доказать следующее неравенство:

$$\|l_t^*v\|_2 \geq t^\alpha \delta \|v\|_2.$$

Для этого составим скалярное произведение, интегрируем его по частям, и, учитывая граничные условия $v(-1) = v(1) = 0$, $\bar{v}(-1) = \bar{v}(1) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} |\langle l_t^*v, v \rangle| &= \left| \int_{-1}^1 [-v'' + (tk(y) - it^\alpha a(y) + c(y))\bar{v}]\bar{v}dy \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^1 [v'|^2 + (tk(y) - it^\alpha a(y) + c(y))|v|^2]dy \right| \geq \left| \int_{-1}^1 -it^\alpha a(y)|v|^2dy \right|. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем:

$$\|l_t^*v\|_2 \geq c\|v\|_2.$$

Далее, из $l_t^*v = 0$ следует, что $v = 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Лемма 2 доказана полностью.

Лемма 3. Пусть выполнено условие i). Тогда справедливы неравенства:

$$a) \left\| (l_t + \lambda E)^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\lambda^{1/2}};$$

$$б) \left\| \frac{d}{dy} (l_t + \lambda E)^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\lambda^{1/4}}.$$

Доказательство. Для любого $u \in D(l_t)$ имеем:

$$\langle (l_t + \lambda E)u, u \rangle = \int_{-1}^1 [-u'' + k(y)tu + it^\alpha a(y)u + c(y)u + \lambda Eu] \bar{u} dy.$$

Далее, интегрируя по частям, получим:

$$|\langle (l_t + \lambda E)u, u \rangle| = \left| \int_{-1}^1 |u'|^2 dy + \int_{-1}^1 [k(y)t + it^\alpha a(y) + c(y) + \lambda E]|u|^2 dy \right|. \quad (2)$$

В силу того что, $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$, следует:

$$\|(l_t + \lambda E)u\|_2^2 \geq t^{2\alpha} \left[\min_{y \in [-1,1]} |a(y)| \right]^2 \|u\|_2^2. \quad (3)$$

С другой стороны, из неравенства (2), путем использования неравенства Коши, несложно получить:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \|(l_t + \lambda E)u\|_2^2 \geq \int_{-1}^1 [|u'|^2 + (c(y) + \lambda - \frac{\varepsilon}{2})|u|^2] dy - \int_{-1}^1 t|k(y)||u|^2 dy,$$

а учитывая условие i), имеем:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \|(l_t + \lambda E)u\|_2^2 \geq \int_{-1}^1 [|u'|^2 + (c(y) + \lambda)|u|^2] dy - \int_{-1}^1 t|k(y)||u|^2 dy.$$

Объединяя последнее неравенство с неравенством (3), получим:

$$c(\varepsilon) \|(l_t + \lambda E)u\|_2^2 \geq \lambda \|u\|^2 \quad \text{или} \quad \|(l_t + \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{c}{\lambda^{1/2}}.$$

Далее, из неравенства (2) в силу пункта а) леммы находим:

$$\frac{c}{\sqrt{\lambda}} \|(l_t + \lambda E)u\|_2^2 \geq \int_{-1}^1 [|u'|^2 + (c(y) + \lambda)|u|^2] dy - \int_{-1}^1 t|k(y)||u|^2 dy. \quad (4)$$

Умножая обе части неравенства (3) на $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, полученное объединяя с (4), получим:

$$\frac{c(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}} \|(l_t + \lambda E)u\|_2^2 \geq \|u'\|_2^2 \quad \text{или} \quad \left\| \frac{d}{dy} (l_t + \lambda E)^{-1} \right\| \leq \frac{c}{\lambda^{1/4}}.$$

Последнее неравенство доказывает лемму 3.

Рассмотрим оператор

$$(L_j + \lambda E)u = u + k(y)A(y_j)u + ia(y)A^\alpha(y_i)u + c(y)u,$$

определенный на множестве $C_0^\infty((-1, 1), H)$. Оператор $L_j + \lambda E$ допускает замыкание, замыкание также обозначим через $L_j + \lambda E$.

Лемма 4. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда существует ограниченный обратный оператор $(L_j + \lambda E)^{-1}$ оператора $(L_j + \lambda E)$.

Доказательство. Обозначим через $\{e_n\}$ полную ортонормированную систему собственных векторов оператора A . Тогда любой элемент $u(y) \in H_1$ можно представить в виде:

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)e_n,$$

причем $\|u(y)\|_{H_1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n(y)\|_2^2$.

Тогда

$$(L_j + \lambda E)u_m = \sum_{n=1}^m (l_n + \lambda E)u_n e_n,$$

где $u_m = \sum_{n=1}^m u_n e_n$, $u_m \xrightarrow{L_2} u$, при $m \rightarrow \infty$, $l_n u \equiv -u'' + k(y)\lambda_n u + ia(y)\lambda_n^\alpha u + c(y)u$.

Далее, справедливость утверждения следует из лемм 1 и 2.

Лемма 5. Пусть выполнены условия $i)$, $\lambda > 0$. Тогда справедлива оценка:

$$\|(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Доказательство. Из леммы 4 следует, что

$$(L_j + \lambda E)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (l_n + \lambda E)^{-1}f_n e_n.$$

Отсюда $\|(L_j + \lambda E)^{-1}f\|_{H_1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(l_n + \lambda E)^{-1}f_n\|_{H_1}^2$.

Далее, пользуясь леммой 3 получаем, что

$$\|(L_j + \lambda E)^{-1}f\|_{H_1}^2 \leq \sup \|(l_n + \lambda E)^{-1}\|_{H_1}^2 \|f\|_{H_1}^2 \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{H_1}^2.$$

Последнее неравенство доказывает лемму 5.

Доказательство теорем 1-2.

Рассмотрим уравнение

$$-u'' + k(y)A(y)u + ia(y)A^\alpha(y)u + c(y)u + \lambda u = f \quad (5)$$

или

$$-u'' + k(y)A(y_j)u + ia(y)A^\alpha(y_j)u + c(y)u + \lambda u + k(y)(A(y) - A(y_j))u + ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))u = f. \quad (6)$$

Положим $L_j u + \lambda u \equiv -u'' + k(y)A(y_j)u + ia(y)A^\alpha(y_j)u + c(y)u + \lambda u$, $y_j \in [-1; 1]$.

Отсюда следует, что

$$L_j u + \lambda u + k(y)(A(y) - A(y_j))u + ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))u = f. \quad (7)$$

Обозначим $L_j u + \lambda u = v$, $u = (L_j + \lambda E)^{-1}v$.

Тогда уравнение (7) примет вид:

$$v + k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v + ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v = f \in H_1. \quad (8)$$

Предположим, что операторы $k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}$, $ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}$ ограничены из H_1 в H_1 и малы по норме. Тогда из (8) следует, что $u = (L_j + \lambda E)^{-1}v$, $v = Af$, где $A = (E + B)^{-1}$, $B = k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1} + ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}$.

Итак, остается доказать, что операторы $k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}$, $ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}$ ограничены из H_1 в H_1 и малы по норме.

Лемма 6. Пусть выполнены условия *i*)-*iii*). Тогда при $\lambda \gg 1$:

$$\|k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1} \leq o(1).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_{H_1}^2 &= \int_{-1}^1 \|k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_H^2 dy \leq \\ &\leq \int_{-1}^1 \|k(y)(A(y) - A(y_j))\|_{H \rightarrow H}^2 \|(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_H^2 dy \leq \sup_{y \in [-1,1]} \|k(y)(A(y) - A(y_j))\|_{H \rightarrow H}^2 \times \\ &\times \int_{-1}^1 \|(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_H^2 dy = \sup_{y \in [-1,1]} \|k(y)(A(y) - A(y_j))\|_{H \rightarrow H}^2 \|(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_{H_1}^2 \|v\|_{H_1}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|k(y)(A(y) - A(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_{H_1 \rightarrow H_1} \leq \sup_{y \in [-1,1]} \|k(y)(A(y) - A(y_j))\|_{H \rightarrow H} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Последнее неравенство, в силу условия *ii*), доказывает лемму 6.

Лемма 7. Пусть выполнены условия *i*)-*iii*). Тогда при $\lambda \gg 1$:

$$\|ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_{H_1} \leq o(1).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v\|_{H_1}^2 &= \\ &= \left\| ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)^{-1}(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1}v \right\|_{H_1}^2 = \\ &= \int_{-1}^1 \left\| ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H}^2 \cdot \left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1}v \right\|_H^2 dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{y \in [-1,1]} \left\| ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H}^2 \int_{-1}^1 \left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1}v \right\|_{H_1}^2 dy = \\ &= \sup_{y \in [-1,1]} \left\| ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H}^2 \left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1}v \right\|_{H_1}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left\| ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(L_j + \lambda E)^{-1}v \right\|_{H_1 \rightarrow H_1} &\leq \sup_{y \in [-1,1]} \left\| ia(y)(A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad \left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1} \right\|_{H_1 \rightarrow H_1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, мы видим, что нам необходимо оценить следующую норму:

$$\left\| (A^\alpha(j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1} \right\|_{H_1 \rightarrow H_1}. \tag{10}$$

Для оценки этой нормы рассмотрим оператор

$$(L_j + \lambda E)u = -u''(y) + k(y)A(y_j)u + ia(y)A^\alpha(y_j)u + c(y)u,$$

определенный на $C_0^\infty((-1, 1), H)$.

Пусть $l_n(j)$ – ортонормированная система собственных функций оператора $A(y_j)$, тогда справедливы разложения:

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)l_n(j), \quad u_n(y) = (u, l_n(j))_H,$$

$$l_n u_n + \lambda u_n = -u'' + k(y)\lambda_n(j)u_n + ia(y)\lambda_n^\alpha(j)u_n + c(y)u_n + \lambda u_n.$$

Из результатов работы М.Б. Муратбекова [8], следует:

$$\|(l_n + \lambda E)u_n\| \geq \lambda_n^\alpha \delta \|u_n\|,$$

$$c\|(l_n + \lambda E)u_n\| \geq \sqrt{\lambda} \|u_n\|.$$

Объединяя эти два неравенства, имеем:

$$(c + 1)\|(l_n + \lambda E)u_n\| \geq (\lambda_n^\alpha \delta + \sqrt{\lambda}) \|u_n\|.$$

Несложно найти:

$$\|(l_n + \lambda E)^{-1}\| \leq \sup_{u \in D(l_n)} \frac{\|(l_n + \lambda E)^{-1}u\|}{\|u\|} = \sup_{u \in D(l_n)} \frac{\|u\|}{\|(l_n + \lambda E)u\|} \leq \frac{c}{\delta \lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda}}.$$

Пусть $v \in H_1$, тогда справедливо следующее разложение: $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)l_n(j)$.

Отсюда имеем:

$$(L_j + \lambda E)^{-1}v = \sum_{n=1}^{\infty} (l_{n,j} + \lambda E)^{-1}v_n(y)l_n(j).$$

Теперь распишем следующее действие:

$$(A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1}v = (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E) \sum_{n=1}^{\infty} (l_{n,j} + \lambda E)^{-1}v_n(y)l_n(j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n(y) l_n(j) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda} (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n(y) l_n(j) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda}) (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n(y) l_n(j).
\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
&\left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1} v \right\|_{H_1}^2 = \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda}) (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n(y) l_n(j), \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda}) (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n(y) l_n(j) \right\rangle . \\
&\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda})^2 \int_{-1}^1 |(l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n(y)|^2 dy = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda})^2 \left\| (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} v_n \right\|_{H_1}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda})^2 \left\| (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \right\|_{H_1}^2 \|v_n\|_{H_1}^2.
\end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1} v \right\|_{H_1}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda})^2 \frac{c^2}{(\lambda_n^\alpha + \sqrt{\lambda})^2} \|v_n\|_{H_1}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{H_1}^2 = \|v\|_{H_1}^2$$

или

$$\left\| (A^\alpha(y_j) + \sqrt{\lambda}E)(L_j + \lambda E)^{-1} \right\|_{H_1}^2 \leq c. \quad (11)$$

Из неравенств (9), (11) и условия ii) следует доказательство леммы 7.

Доказательство теорем 1 и 2.

Пользуясь леммами 6 и 7, из неравенства (8) получим доказательство теоремы 1. Теорема 2 доказывается аналогично.

Цитированная литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1970.
2. Левитан Б.М. // Матем. сборник 76(118). № 2. 1968. С. 239 – 270.
3. Костюченко А.Г. // Докл. АН СССР. Т.168, № 1. 1966. С. 21 – 24.
4. Отелбаев М. // Украинский матем. журнал Т.28, № 6. С. 763 – 777.
5. Муратбеков М.Б., Тогочуев А.Ж. // Тезисы докл. конф. матем. и мех. Киргизия, 1987.
6. Оспанов К.Н. // Автореф. дисс. ... доктора физ.-мат. наук. Караганда. 2000.
7. Биргебаев А. // Тезисы докл. VIII Респ. межвуз. научн. конф. по матем. и мех. Алма-Ата. 1984.
8. Кальменов Т.Ш., Муратбеков М.Б. Спектральные свойства оператора смешанного типа. 1997.

Поступила в редакцию 11.05.2007 г.

УДК 518.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОДНОГО МЕТОДА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБМОТОК СИЛОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Ал. М. Шинтемиров¹, Г. Б. Шинтемирова², Ас. М. Шинтемиров²

¹ Ливерпульский университет

г. Ливерпуль, Великобритания e-mail: almas-shintemirov@yandex.ru

² Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова
e-mail: GulShin@inbox.ru, askhat2000@yandex.ru

В данной работе предлагается математическая модель дисковой обмотки силового трансформатора для частотного анализа (ЧА) на основе теории бегущих волн и многопроводных цепей с распределенными параметрами (ЦРП). Модель используется для получения частотных характеристик обмотки трансформатора. Идентификация распределенных параметров модели выполняется с помощью метода интеллектуального обучения на основе алгоритма оптимизации поведения стаи с пассивным скоплением (АОПС).

1. Введение. Силовые трансформаторы являются одними из самых дорогостоящих элементов энергетических систем. Их состояние влияет на устойчивость и надежность энергосистемы в целом. Одним из зарекомендовавших себя методов мониторинга состояния обмоток трансформаторов является анализ их амплитудно и фазо-частотных характеристик, которые представляют собой отношение входного и выходного сигналов с терминалов обмотки при наложении синусоидального сигнала переменной частоты в широком диапазоне частот до нескольких МГц. На практике измеряемые частотные характеристики используются для визуального сравнения с эталонными характеристиками в целях выявления потенциальных повреждений обмотки трансформатора.

Один из способов моделирования обмоток трансформаторов основывается на применении теории многопроводных цепей с распределенными параметрами [1–3], которая ранее была использована для анализа электрических машин [4]. Каждый виток обмотки моделируется как

Keywords: *a mathematical model, an intelligent learning technique*

2000 Mathematics Subject Classification: 97B20

© Ал. М. Шинтемиров¹, Г. Б. Шинтемирова², Ас. М. Шинтемиров², 2008.

Работа выполнена при финансовой помощи в виде гранта АО “Фонд науки” по проекту “Исследование и применение технологий искусственного интеллекта для моделирования и диагностирования состояния аппаратов электроэнергетических систем (на примере силовых трансформаторов)”, представленного на конкурсе молодых ученых “Шарықтау”.

отдельная длинная линия (двухпроводная ЦРП), что делает эти модели сложными для использования в случае анализа обмотки с большим числом витков [5–9].

Для аккуратного моделирования частотных характеристик обмоток трансформаторов необходимо точное определение параметров модели. Однако в производственных условиях не всегда возможно произвести дополнительные измерения геометрических размеров или свойств изоляции обмоток трансформаторов для последующего расчета параметров модели.

В последнее время начали использоваться алгоритмы эволюционных вычислений для оптимизационных задач с неполной информацией, в которых традиционные градиентные алгоритмы оптимизации не могли бы быть применены. Было предложено множество стохастических вычислительных методов, такие как алгоритм эволюционного программирования [10], генетические алгоритмы (ГА) [11,12] и другие, разработанные на основе моделирования биологических процессов. Однако, данные алгоритмы могут занимать значительное время для вычислений в случаях, когда необходимо оптимизировать большое число переменных.

Дальнейшие исследования привели к разработке алгоритма оптимизации поведения стаи (англ. *particle swarm optimizer*) (АОПС) на основе наблюдений социального поведения групп животных, таких как сбивающиеся в косяки рыбы или стаи птиц. По сравнению с другими стохастическими методами, АОПС показал сравнительную или лучшую эффективность поиска решений с высокой скоростью сходимости при анализе некоторых тяжелых оптимизационных задач [13,14]. Алгоритм нашел широкое применение для решения различных инженерных задач, в частности для минимизации потерь [15] или оптимального контроля напряжением и реактивной мощностью [16] в энергетической системе.

В данной статье предлагается упрощенная модель обмотки трансформатора, которая используется для идентификации параметров дисковой обмотки с помощью гибридного АОПС с пассивным скоплением. Приводятся результаты моделирования для исследования потенциала предлагаемого оптимизационного подхода.

2. Математическая модель обмотки трансформатора. Значительная часть обмоток высокого напряжения силовых трансформаторов выполняются дисковыми, в которых каждый диск состоит из определенного числа витков, намотанных в радиальном направлении. На практике дисковые обмотки изготавливаются таким образом, чтобы обеспечивать течение тока в одном направлении для всех дисков обмотки. В некоторых трансформаторах усиление изоляции конечных дисков обмоток приводит к уменьшению числа витков в этих дисках. Поэтому, общая длина проводника в конечных дисках обмотки получается меньше чем в дисках средней части обмотки. В данной работе для упрощения принимается равная длина проводников во всех дисках обмотки.

Для математического описания распространения сигнала вдоль каждого диска применяется математическая модель однородной однослойной обмотки [17–19]. Принимая следующие обозначения для удельных электрических параметров на единицу длины проводника и элементов измерительной цепи:

| | | | |
|-----------|--|-------|-------------------------------------|
| C_s | средняя межвитковая емкость; | C | средняя емкость относительно земли; |
| C_d | средняя междисковая емкость; | L | средняя индуктивность; |
| r | среднее сопротивление; | g | средняя межвитковая проводимость; |
| G | средняя проводимость на землю; | G_d | средняя междисковая проводимость; |
| l | длина проводника в каждом диске; | n | общее число дисков; |
| Z_{out} | сопротивление выходного измерительного кабеля, | a | длина витка; |

взаимосвязь между напряжениями и токами в обмотке трансформатора в частотной области

может быть представлена в матричной форме [18]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(s, x) \\ \mathbf{I}(s, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(s, x) \\ \mathbf{I}(s, x) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{Z} = \text{diag}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ и

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{1+a^2 Z_1 Y_{s1}} & \frac{-Q_{12}}{1+a^2 Z_1 Y_{s1}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-Q_{12}}{1+a^2 Z_2 Y_{s2}} & \frac{Y_2}{1+a^2 Z_2 Y_{s2}} & \frac{-Q_{23}}{1+a^2 Z_2 Y_{s2}} & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{-Q_{(n-2)(n-1)}}{1+a^2 Z_{n-1} Y_{s(n-1)}} & \frac{Y_{n-1}}{1+a^2 Z_{n-1} Y_{s(n-1)}} & \frac{-Q_{(n-1)n}}{1+a^2 Z_{n-1} Y_{s(n-1)}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-Q_{(n-1)n}}{1+a^2 Z_n Y_{sn}} & \frac{Y_n}{1+a^2 Z_n Y_{sn}} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Сопротивления и проводимости Z , Y , Y_s каждого диска и междисковые проводимости Q на единицу длины проводника определяются как:

$$Z_i = L_i s + r_i \quad \text{и} \quad Y_{si} = C_{si} s + g_i \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Y_i &= (C_i + C_{d(i-1)i} + C_{di(i+1)}) s + (G_i + G_{d(i-1)i} + G_{di(i+1)}), \\ Q_{(i-1)i} &= C_{d(i-1)i} s + G_{d(i-1)i}; \quad Q_{i(i+1)} = C_{di(i+1)} s + G_{di(i+1)} \\ &\text{для} \quad i = 2, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (4)$$

$$Y_1 = (C_1 + C_{d12}) s + (G_1 + G_{d12}); \quad (5)$$

$$Y_n = (C_n + C_{d(n-1)n}) s + (G_n + G_{d(n-1)n}). \quad (6)$$

В данных выражениях s обозначает оператор преобразования Лапласа и x – пространственная координата. Каждый диск имеет свои собственные параметры, обозначаемые соответствующим номером диска. Таким образом, $U_1(s, 0)$, $I_1(s, 0)$ и $U_n(s, l)$, $I_n(s, l)$ обозначают напряжения и токи в начальной и конечной концах обмотки в частотной области, т.е. в точках $x = 0$ первого и $x = l$ n -го дисков.

Решение матричного уравнения (1) для напряжений и токов в концах обмотки, т.е. при $x = 0$ и $x = l$, получается в ниже приведенной форме [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}(s, l) \\ \mathbf{I}(s, l) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(l) \begin{bmatrix} \mathbf{U}(s, 0) \\ \mathbf{I}(s, 0) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\mathbf{\Phi}$ – матрица параметров цепи порядка $2n \times 2n$, которая может быть вычислена численным методом с использованием функции матричной экспоненты [3].

С целью получения выражения для передаточной функции обмотки при ЧА применяются следующие граничные условия [4,5]:

$$U_{i+1}(s, 0) = U_i(s, l) \quad \text{и} \quad I_{i+1}(s, 0) = I_i(s, l) \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

Как следствие, матричное уравнение (7) преобразовывается в форму [4,6]:

$$\begin{bmatrix} U_1(s, 0) \\ U_2(s, 0) \\ \vdots \\ U_n(s, 0) \\ U_n(s, l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_n(s, l) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $\Omega(l)$ – матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$.

Учитывая сопротивление измерительного кабеля в конце обмотки в виде:

$$U_n(s, l) = Z_{\text{out}} I_n(s, l), \quad (10)$$

передаточная функция обмотки трансформатора при ЧА определяется как отношение напряжений $U_n(s, l)$ и $U_1(s, 0)$ [6]:

$$H(s) = \frac{\Omega_{(n+1,1)} Z_{\text{out}}}{\Omega_{(1,1)} (Z_{\text{out}} - \Omega_{(n+1,n+1)}) + \Omega_{(1,n+1)} \Omega_{(n+1,1)}}. \quad (11)$$

Как правило, при ЧА анализируются логарифмические амплитудно-частотные характеристики в виде $20 \log_{10}(|H(j\omega)|)$ в децибелах (дБ), при этом производится замена оператора Лапласа $s = j\omega$ для расчета характеристик в частотной области.

3. Метод интеллектуального обучения с использованием АОПСПС. АОПС является алгоритмом эволюционных вычислений с использованием популяций [13,14]. Несмотря на широкое применение для решения оптимизационных задач, последние исследования показывают, что, хотя АОПС превосходит другие эволюционные алгоритмы на начальных итерациях, он не становится эффективнее с возрастанием их числа. Поэтому было предложено дополнить его моделью пассивного скопления [20]. Анализ нового гибридного АОПС с пассивным скоплением (АОПСПС) показал, что он является более эффективным, чем стандартный алгоритм при решении многомодельных и многомерных оптимизационных задач.

Стандартный алгоритм оптимизации поведения стаи. Так как АОПС представляет собой алгоритм на основе популяций, он сходен с другими эволюционными алгоритмами, такими как, например, ГА. Таким образом, вычислительная система инициализирует начальную популяцию случайных решений и ищет оптимальное решение путем обновления поколений. Однако, в отличие от ГА, АОПС не имеет эволюционных операторов, таких как спаривание и мутация; производится обновление скорости и памяти частиц, что детально рассматривается ниже.

Принцип работы алгоритма можно объяснить на следующем примере: имеется группа птиц, хаотично ищущих пищу на участке местности, где только имеется один кусок пищи. Все птицы не знают где находится пища, но они могут оценить расстояние до пищи на каждом итерационном шаге. Таким образом, лучшая стратегия поиска пищи – это следовать за птицей, находящейся ближе остальных к ней. В АОПС потенциальные решения, называемые *частицами*, являются “птицами”, передвигающимися в пространстве поиска. Частицы двигаются в пространстве поиска, следуя за текущей оптимальной частицей.

АОПС инициализирует множество (*популяцию*) случайных решений (частиц) и ищет оптимальное решение путем обновления атрибутов частиц на каждом итерационном шаге. На k -ом итерационном шаге, где $k = 1, \dots, K$ и K – общее число итерационных шагов, i -я частица имеет следующие атрибуты:

- текущую позицию в N -мерном пространстве решений:

$$X_i^k = (x_{i,1}^k, \dots, x_{i,n}^k, \dots, x_{i,N}^k); \quad x_{i,n}^k \in [t_n, d_n] \text{ и } 1 \leq n \leq N,$$

где t_n и d_n обозначают нижнюю и верхнюю границы для n -го пространственного измерения соответственно;

- текущую скорость (быстроту поиска) $V_i^k = (v_{1,i}^k, \dots, v_{n,i}^k, \dots, v_{N,i}^k)$, которая ограничивается максимальной скоростью $V_{\text{max}}^k = (v_{\text{max},1}^k, \dots, v_{\text{max},n}^k, \dots, v_{\text{max},N}^k)$.

На каждом итерационном шаге частицы обновляется согласно следующему уравнению:

$$V_i^{k+1} = wV_i^k + c_1r_1(P_i^k - X_i^k) + c_2r_2(P_g^k - X_i^k); \quad (12)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1}, \quad (13)$$

где P_i – лучшая предыдущая позиция i -й частицы (также известная как $pbest$), P_g – лучшая глобальная позиция среди всех частиц в популяции (также известная как $gbest$). Они выражаются следующими уравнениями:

$$P_i = \begin{cases} P_i & : f(X_i) \geq P_i, \\ X_i & : f(X_i) < P_i, \end{cases} \quad (14)$$

$$P_g \in \{P_0, P_1, \dots, P_m\} | f(P_g) = \min(f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_m)), \quad (15)$$

где f – оптимизирующая функция, m – число частиц в популяции, r_1 и r_2 – случайные числа, генерируемые вычислительной системой в интервале $[0, 1]$, и w – весовой коэффициент, который обычно выбирается в диапазоне $[0, 1]$.

Глобальный поиск достигается большим весовым коэффициентом, в то время как меньший коэффициент направлен на локальный детальный поиск текущей области пространства решений [21]. Таким образом, так как весовой коэффициент w обеспечивает баланс между возможностями глобального и локального поиска решений, от него зависят свойства сходимости АОПС и его способность к нахождению лучшего оптимального решения. Постоянные ускорения c_1 и c_2 контролируют движения частицы на каждом итерационном шаге. Вектор максимальных скоростей V_{\max} задается как половина длины пространства поиска:

$$V_{\max} = (D - T)/2, \quad (16)$$

где D и T – векторы верхней и нижней границ пространства решений по каждому пространственному измерению: $D = (d_1, \dots, d_n, \dots, d_N)$ и $T = (t_1, \dots, t_n, \dots, t_N)$.

АОПС с пассивным скоплением (АОПСПС). С целью улучшения эффективности поиска было предложено модернизировать алгоритм путем внедрения модели пассивного скопления. Известно, что индивидуумы в группе могут реагировать без прямого получения управляющих сигналов от окружающей среды, так как они могут воспринимать необходимую информацию от своих соседей, например, информацию об их поведении и скорости [22]. Такой перенос информации используется в упрощенной форме в модели пассивного скопления. Таким образом, гибридный АОПС с пассивным скоплением может быть описан следующим образом [20]:

$$V_i^{k+1} = wV_i^k + c_1r_1(P_i^k - X_i^k) + c_2r_2(P_g^k - X_i^k) + c_3r_3(R_i^k - X_i^k); \quad (17)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1}, \quad (18)$$

где R_i – случайно выбранная из популяции частица, c_3 – коэффициент пассивного скопления и r_3 – случайное число, генерируемое вычислительной системой в интервале $[0, 1]$.

Фитнесс-функция, используемая для АОПСПС оптимизации. В качестве оптимизирующей функции или фитнес-функции для интеллектуального обучения АОПСПС используется ошибка между эталонными частотными характеристиками и характеристиками модели с параметрами, полученными с помощью АОПСПС. Таким образом, минимизация фитнес-функции ведет к идентификации параметров модели, при которых характеристики модели приближаются к эталонным.

Таблица 1: Параметры дисковой обмотки трансформатора (скопировано из [9])

| Параметр | Символ | Значение |
|--|-----------------|--------------------|
| Число дисков | | 18 |
| Число витков в диске | | 10 |
| Ширина проводника, мм | | 6,95 |
| Высота проводника, мм | | 11,2 |
| Средняя длина витка, мм | | 1,4828 |
| Толщина межвитковой изоляции, мм | d | 3 |
| Относительная диэлектрическая проницаемость межвитковой изоляции | ε_r | 3,5 |
| Проводимость проводника, Сименс/м | σ | 3×10^{-7} |
| Межвитковая емкость, пФ/м | C_s | 120 |
| Междисковая емкость, пФ/м | C_d | 10 |
| Емкость относительно земли, пФ/м | C | 15 |

Для каждой частицы суммарную величину фитнеса можно выразить как

$$f = \sum_{j=1}^M \|H_o(\omega_j) - H(\omega_j)\|, \quad (19)$$

где $H_o(\omega_i)$ и $H(\omega_i) \in \mathbb{R}^1$ – эталонные и оптимизируемые частотные характеристики на частоте ω_j , $j = 1, \dots, M$ и M – число точек, используемых для обучения АОПСПС.

4. Моделирование и дискуссия. В качестве примера параметры дисковой обмотки трансформатора, представленные в [9] и таблице 1, используются для получения частотных характеристик модели обмотки. Так как предполагается, что геометрические параметры и свойства проводника и изоляции обмотки трансформатора являются известными, то индуктивности обмотки L , сопротивления r и проводимости G рассчитываются в соответствии с [5,8], используя параметры в таблице 1.

Таким образом, в идентификации нуждаются только 3 параметра: межвитковые, междисковые емкости и емкости относительно земли. Принимая обозначения параметров обмотки, приведенные в таблице 1, каждая частица АОПСПС может быть выражена как вектор емкостей $X_i = (C_s, C_d, C)$. Получается трехмерное пространство решений ($N = 3$), в котором рассматриваются возможные комбинации значений идентифицируемых параметров. Верхние и нижние границы пространства решений задаются в диапазоне $\pm 50\%$ от эталонных значений соответствующих параметров, участвующих в идентификации: $D = (1.5 * 120, 1.5 * 10, 1.5 * 15)$ пФ/м и $T = (0.5 * 120, 0.5 * 10, 0.5 * 15)$ пФ/м.

Для идентификации параметров модели обмотки трансформатора выполняются следующие шаги:

- используя параметры из таблицы 1, с помощью уравнения (11) рассчитываются эталонные частотные характеристики модели для частот в диапазоне от 10 Hz до 3МГц;
- сгенерированные эталонные частотные характеристики сохраняются как датасет для обучения АОПСПС;
- выполняется процесс обучения АОПСПС, на каждом шаге которого обучающий датасет сравнивается с соответствующими значениями моделируемых частотных характеристик для одних и тех же частотных точек. Рассчитываются моделируемые характеристики, используя параметры модели, полученные в процессе обучения АОПСПС.

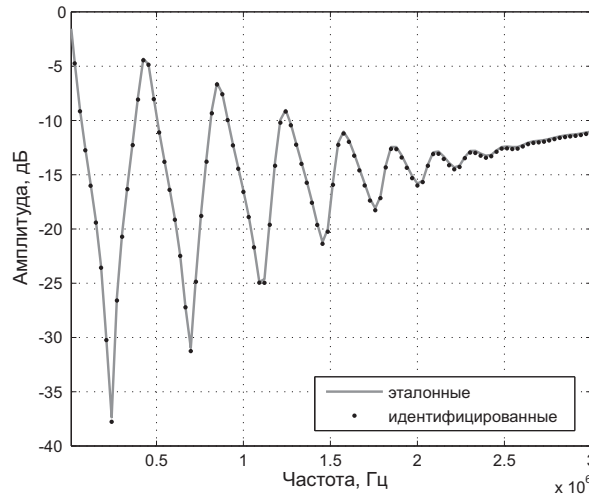


Рис. 1: Сравнение частотных характеристик после обучения АОПСПС.

Используя следующие параметры АОПСПС:

размер популяции $m = 80$ частиц;
 количество итерационных шагов $K = 1000$;
 постоянные ускорения $c_1 = c_2 = 0.5$;
 весовой коэффициент $w = 0.8$,

была проведена идентификация следующих параметров модели: $C_s = 123.2$ пФ/м, $C_d = 9.8$ пФ/м и $C = 14.6$ пФ/м, что являются достаточно близким к соответствующим предустановленным значениям в таблице 1.

На рис. 1 представлены эталонные частотные характеристики модели и характеристики, полученные в результате использования идентифицированных с помощью АОПСПС параметров. Сравнительный анализ характеристик показывает, что идентифицированные параметры позволяют получить достаточно близкие к эталонным частотные характеристики и могут быть приняты в качестве расчетных параметров модели.

5. Выводы. В данной работе представлена упрощенная математическая модель дисковой обмотки трансформатора для частотного анализа. Каждый диск обмотки описывается уравнениями бегущей волны, которые затем объединяются в матричной форме. Это позволяет значительно сократить порядок модели, который определяется только числом дисков в моделируемой обмотке.

Предлагается новый метод определения параметров модели обмотки трансформатора с использованием АОПСПС. Обучение АОПСПС показало удовлетворительную эффективность в процессе идентификации с использованием эталонных частотных характеристик. Незначительные отличия между идентифицированными и предустановленными параметрами не учитываются на практике, поэтому можно предположить, что метод идентификации может далее быть использован для нахождения параметров модели обмоток трансформаторов в целях детектирования потенциальных механических деформаций.

В данной работе рассматривается только пример определения параметров модели, с использованием моделируемых характеристик в качестве эталонных. На практике реальные частотные характеристики должны использоваться для идентификации параметров и сравнения.

Это может привести к расширению числа параметров для идентификации в случае дефектного состояния обмотки, приводящего к неравномерному распределению значений параметров модели. Данные направления будут далее исследоваться в будущих работах авторов.

Цитированная литература

1. **Каганов З.Г.** Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы. М., 1990.
2. **Бессонов Л.А.** Теоретические основы электротехники. М., 1984.
3. **Clayton R.Paul.** Analysis of Multiconductor Transmission Lines. New York, 1994.
4. **Guardado J.L., Cornick J.L.** // IEEE Transactions on Energy Conversion. 1989. V.4, № 1. P.95 – 101.
5. **Hettiwatte S.N., Crosley P.A., Wang Z.D., Darwin A.W., Edwards G.** // IEEE Power Engineering Society Winter Meeting. 2002. V.22. P.1394 – 1399.
6. **Jayasinghe J.A.S.B., Wang Z.D., Jarman P.N., Darwin A. W.** // IEEE International Symposium on Electrical Insulation. Indianapolis. USA. 2004. P.496 – 499.
7. **Shibuya Y., Fujita S., Nosokawa N.** // IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution. 1997. V.144. P.461 – 468.
8. **Zhang X., Liang G., Sun H., Cui X.** // Proceedings of the 16th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility. 2005. Zurich. Switzerland. P.432 – 435.
9. **Sun H., Liang G., Zhang X., Cui X.** // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2006. V.48, № 4. P.621 – 627.
10. **Fogel D.B.** Evolutionary Computation. New York, 1995.
11. **David E. Goldberg** Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley Longman, 1989.
12. **Рутковская Д.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Москва, 2004.
13. **Kennedy J., Eberhart R.C.** // Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks. 1995. V.4. P.1942 – 1948.
14. **Kennedy J., Eberhart R.C.** Swarm Intelligence. Morgan Kaufmann Publishers. 2001.
15. **Yumbla P.E.O., Ramirez J.M., Coello C.A.C.** // IEEE Transactions on Power Systems. 2008. V.23, № 1. P.33 – 40.
16. **Yoshida H., Kawata K., Fukuyama Y., Takayama S., Nakanishi Y.** // IEEE Transactions on Power Systems. 2000. V.15, № 4. P.1232 – 1239.
17. **Shintemirov A., Wu Q.H.** // Proceedings of the International Control Conference (ICC 2006). Glasgow. 2006. P.54.
18. **Shintemirov A., Tang W.H., Wu Q.H.** // Proceedings of the 26th Chinese Control Conference (CCC 2007), Zhangjiajie, Hunan, China, 2007. P.506 – 510.
19. **Riidenberg R.** Electrical Shock Waves in Power Systems: Traveling Waves in Lumped and Distributed Circuit Elements. Massachusetts, 1968.
20. **He S., Wu Q.H., Wen J.Y., Saunders J.R., Paton R.C.** A particle swarm optimizer with passive congregation. BioSystems, V.78. №1. P.135 – 147.
21. **Shi Y., Eberhart R.C.** // Lecture Notes in Computer Science, 1998. V.1447. P.591 – 600.
22. **Parrish J.K., Hamner W.M.** Animal Groups in Three Dimensions. Cambridge, 1997.

Поступила в редакцию 16.04.2008г.

ХРОНИКА

МАРАТ ИСИМГАЛИЕВИЧ РАХИМБЕРДИЕВ



Наука и общественность Казахстана и стран СНГ понесли невосполнимую утрату. На 64-м году жизни скоропостижно скончался доктор физико-математических наук, профессор Марат Исимгалиевич Рахимбердиев, крупный ученый в области качественной теории дифференциальных уравнений и приложений.

М.И. Рахимбердиев родился 30 января 1945 года в городе Зайсан Восточно-Казахстанской области в семье военнослужащего. Из шести братьев он был четвертым. После окончания средней школы в Гурьеве в 1962 году начал свою трудовую деятельность на электростанции, работая в должностях моториста и машиниста котла. В 1964 году поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова на отделение математики.

В МГУ с третьего курса он начал заниматься научной работой, специализируясь на кафедре дифференциальных уравнений. После окончания МГУ в 1969 году был рекомендован в аспирантуру МГУ, где под руководством В.М. Миллионщикова и Н.Х. Розова им была выполнена кандидатская диссертация "Об устойчивости особых показателей и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией". Защита состоялась в марте 1975 года на диссертационном совете мехмата МГУ, на которой официальные оппоненты, доктора физ-мат. наук Д.В. Аносов и Ю.С. Богданов высоко оценили оригинальные результаты молодого ученого и в дальнейшем их связывала теплая дружба и сотрудничество.

В университете он активно занимался и общественной работой. В 1970–72 гг. дважды избирался освобожденным секретарем комсомольской организации мехмата МГУ.

После окончания аспирантуры в 1974 году Рахимбердиев был распределен в Институт математики и механики АН Казахской ССР. В 1991–1995 гг. он — заведующий лабораторией и заместитель директора по науке Института космических исследований НАН РК. В 1996 году вернулся в Институт математики МОН РК, где работал заведующим лабораторией динамических систем до последних дней.

Докторскую диссертацию на тему "Устойчивость и распределение показателей Ляпунова" защитил в 1992 году в Минске на диссертационном совете Института математики АН Беларуси (научный консультант В.М. Миллионщиков, оппоненты: Ю.Л. Далецкий, Н.А. Изобов, Е.Л. Тонков, ведущая организация — Санкт-Петербургский государственный университет).

Марат Исимгалиевич был активно работающим и высокоцитируемым ученым. Он — автор более 120 научных работ. Основные научные результаты им получены в следующих направлениях: экспоненциально дихотомические системы и грубые свойства неоднородных линейных дифференциальных систем, критерий выполнимости условия Перрона; введение и изучение классов линейных систем с различными свойствами грубости асимптотического поведения их решений, исследование центральных показателей как разрывных функций параметров системы, изучение вопроса о бэровской классификации показателей Ляпунова как разрывных функций, описание распределения значений показателей Ляпунова вблизи их точек разрывов как функций системы в различных ситуациях. Им дано описание замыкания множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией в метрическом пространстве систем с равномерной метрикой, описано открытое ядро множества неоднородных систем, имеющих хотя бы одно ограниченное решение; решена задача распределения показателей Ляпунова периодических систем относительно малых в среднем возмущений коэффициентов системы. Для ряда систем решены задачи о локализации спектра показателей на основе их векторного представления. Им установлена строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных дифференциальных систем и уравнений. Изучены экспоненциально разделенные и равномерно неразделенные гомоморфизмы векторных расслоений динамических систем, введено понятие сильно положительного гомоморфизма и установлена его эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом $n - 1$ (n — размерность векторного расслоения), а для $(n - k)$ -ой внешней степени гомоморфизма — эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом k ; получены коэффициентные признаки экспоненциальной разделенности линейных систем произвольного индекса; показано, что замыкание множества систем с экспоненциальной близостью совпадает с множеством равномерно неразделенных систем. Им получены распределения показателей Ляпунова для линейных расширений динамической системы на торе, установлены необходимые и достаточные условия равномерной экспоненциальной разделенности линейного расширения динамической системы на векторном расслоении в терминах послышной сильной положительности семейства автоморфизмов, порождающего динамическую систему; найдены достаточные условия устойчивости старшего показателя семейства автоморфизмов векторного расслоения; установлены типичные свойства однопараметрического семейства линейных дифференциальных уравнений при бифуркациях экспоненциальной устойчивости; найдены условия разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений при их возмущении и др.

Под влиянием У.М. Султангазина существенные результаты получены М.И. Рахимбердиевым в сотрудничестве с ним и с учениками при изучении свойств дискретных уравнений Больцмана в пространственно однородном случае: исследована устойчивость положения равновесия, дано описание инвариантных множеств, установлены условия топологической и дифференцируемой эквивалентности пространственно однородных моделей; изучены бифуркационные свойства многомерных аналогов нелинейных логистических уравнений; разработаны математические модели биологических популяций, которые нашли применение при решении ряда прикладных задач, в частности, при изучении динамики популяции сайгаков и саранчи на территории Казахстана и др.

Много времени он уделял преподавательской деятельности, более 30 лет на условиях совместительства преподавал на механико-математическом факультете КазНУ им. Аль-Фараби, читал общий курс по дифференциальным уравнениям студентам мехмата и оригинальные специальные курсы по качественной теории ДУ и теории динамических систем. Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций, подготовлены две докторские. Жаль, что ему не придется порадоваться на их защитах.

Марат Исимгалиевич постоянно занимался научной экспертизой: член Президиума ВАК РК (1998–2000), член диссертационного совета по защите докторских диссертаций при ИМ МОН РК и его ученый секретарь (1992–2000гг.), с 2001 по 2004 — заместитель председате-

ля, с 2004г. — председатель этого совета. С 1978 г. – референт реферативных журналов "РЖ Математика", "Mathematical Review", постоянный рецензент журналов "Дифференциальные уравнения", "Известия НАН РК. Серия физико-математическая" и др. Он был одним из организаторов и заместителем главного редактора "Математического журнала". Член Американского математического общества (AMS) с 1978 г. Многие кандидатские и докторские диссертации в СНГ по качественной теории дифференциальных уравнений проходили через него как оппонента или эксперта ведущей организации. Эксперт государственной экспертизы РК научно-исследовательских проектов с момента ее образования.

Большое место в жизни М.И.Рахимбердиева занимала научно-организационная работа. В 1996–97 гг. он исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук НАН РК, с 1997 по 2004 г. являлся председателем секции физико-математических наук рабочей группы Высшей научно-технической комиссии при Правительстве РК, с 1997 по 2008 гг. — научный руководитель трех республиканских программ (1997–2005гг.) и одной подпрограммы (2006–2008 гг.) фундаментальных исследований по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. За научно-педагогическую и научно-организаторскую деятельность в 2005 году он был награжден правительственной медалью Республики Казахстан.

А в жизни он был скромным, добрым и отзывчивым, с поразительным чувством юмора и в то же время был тверд и принципиален, когда того требовали обстоятельства. Светлая память о Марате Исимгалиевиче Рахимбердиеве — крупном ученом и педагоге, прекрасном организаторе и руководителе, и просто замечательном человеке — навсегда останется в сердцах его родных, друзей, учеников, коллег и всех, с кем он соприкасался в течение своей яркой и многогранной жизни.

Редакционная коллегия

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 539.3

2000 MSC: 74B10

Alexeyeva L. A., Girnis S. R., Ukrainets V. N. **Simulation of dynamics of small depth tunnels by the action of transport loads**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.5 – 11.

On the model problem on the load, which moves with constant speed along circular thin elastic shell in elastic semyspace, influence of free surface on the stress-strain state of tunnel's shell and surrounding medium is investigated. The analytic solution of the problem has been obtained. Numerous researches have been performed for different values of speed of transport loads, their period and depth of tunnel. As a result of researches it was set that surface exerts unequal influence upon deflected mode of shallow batter tunnel under action of moving loadings with various periods inside. This influence is rather substantial under relatively big periods and under an extension rate of movement is also enhancing. An influence of surface becomes less visible under decrease of loading periods, and it becomes non perceptible even under small periods irrespective of rate of its movement.

References – 3.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74B10

Алексеева Л. А., Гирнис С. Р., Украинец В. Н. **Транспорттың жүктемелер әсер еткенде саяз тоннелдің динамикасы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.5 – 11.

Серпімді жартылай кеңістікте жұқа қабырғалы қабат бойымен бірқалыпты қозғалыс жасайтын жылдамдыққа дейінгі жүктеменің модельдік есебінде беттің саяз тоннельдің кернеулік-деформацияланған жағдайына ықпалы зерттелді. Толық емес айнымалардың бөлшектеу әдісі және интегралдық жүктеу арқылы есептің аналитикалық шешімі құрастырылды. Шешімнің негізінде саяз тоннель үшін жылдамдыққа, ішіндегі жүктеменің периодына байланысты жағдайлар үшін сандық эксперименттер қойылды.

Жер беті ішіндегі жүктеменің периодына байланысты саяз тоннелдің кернеулік-деформацияланған қалпына әртүрлі әсер ететіні байқалды. Периоды салыстырмалы үлкен болған жағдайда ықпалы үлкен, және жылдамдық артқан сайын арта түседі. Жүктеменің периоды азайған сайын жер бетінің әсері азая түседі, және де өте аз периодтар үшін жылдамдыққа байланыссыз байқалмайды.

Библ. – 3.

УДК: 517.9

2000 MSC: 39A10

Alimagambetova A. Z., Oinarov R. **Two-sided estimates for the solutions of a class of the second order non-linear difference equations** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.12 – 21.

Two-sided estimates are obtained for the solutions of the second-order non-linear difference equation:

$$\Delta(a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k) = b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-2}x_{k+1}, k \in Z,$$

with the positive coefficients. Moreover, on the base of these estimates limit behaviors of all solutions are given.

References – 6.

УДК: 517.9

2000 MSC: 39A10

Алимағамбетова А. З., Ойнаров Р. **Екінші ретті сызықты емес айрымдық теңдеулер классының шешімдерінің екі жақтық бағалаулары** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.12 – 21.

Келесі түрдегі оң таңбалы коэффициентті сызықты емес екінші ретті айрымдық теңдеудің

$$\Delta(a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k) = b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-2}x_{k+1}, k \in Z,$$

шешімдеріне екі жақтық бағалаулар алынған және солардың негізінде барлық шешімдердің шектік өзгерісі берілген.

Библ. – 6.

УДК: 517.946

2000 MSC: 45D05

Auzhani E. **Existence and uniqueness of the generalization solution of the initial and boundary value problems for diffusion equation about layer's pressure** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.22 – 25.

In this work we prove the existence and uniqueness of the generalization solution of the initial and boundary value problems for diffusion equation about layer's pressure.

References – 4.

УДК: 517.946

2000 MSC: 45D05

Аужани Е. **Қабат қысымы жөніндегі диффузия теңдеуі үшін алғашқы-шеттік есептің жалпыланған шешуінің бар болуы және жалғыздығы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.22 – 25.

Мақалада қабат қысымы жөніндегі екі өлшемді диффузия теңдеуі үшін алғашқы шеттік есептің жалпыланған жалғыз шешуінің бар екендігі дәлелденген.

Библ. – 4.

УДК: 517.956, 517.968.2

2000 MSC: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

Akhmanova D. M., Dzhenaliyev M. T., Ramazanov M. I. **The boundary value problems for spectrally loaded heat operator with the way of loading curve to time axis at zero or at infinity. I** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.26 – 38.

In this work we continue a investigation of the boundary value problems for spectrally loaded parabolic equations in unbounded regions. The order of the derivative in the loaded summand is equal to that of the differential part of the operator. The space variable loading point moves in a law $\bar{x}(t) = t^\omega$, $-\infty < \omega < 1/2$. In this part of work the boundary value problems reduce to pair of special integral equations of Volterra equations type of second kind. It are finding associating characteristic integral equations.

References – 27.

УДК: 517.956, 517.968.2

2000 MSC: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

А х м а н о в а Д. М., Ж и е н ә л и е в М. Т., Р а м а з а н о в М. Ы. **Жүктелу сызығы уақыт осіне нолде немесе шексіздікте жақындандайтын спектралды жүктелген жылуөткізгіш операторының шекаралық есептері. I**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.26 – 38.

Бұл жұмыста шексіз облыстарда спектралды жүктелген параболалық теңдеулердің шекаралық есептерінің зерттеулері жалғастырылады. Жүктелген мүшемен теңдеудің бас бөлігінің дифференциалдық реттері бірдей. Кеңістік айнаымалысы бойынша жүктелу нүктесінің қозғалу заңдылығы берілген $\bar{x}(t) = t^\omega$, $-\infty < \omega < 1/2$. Мақаланың бұл бөлігінде шекаралық есептер екінші текті Вольтерра типтес айрықша интегралдық теңдеулермен сипатталады. Оларға сәйкес характеристикалық интегралдық теңдеулер табылды.

Библ. – 27.

УДК: 662.92

2000 MSC: 76F40

Z a k i r Y. B., M a u s u m b e k o v a S. D. **Numerical modelling of the expiration of a boiling liquid**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.39 – 45.

The numerical algorithm for calculation of the non-stationary wave expiration of a subcooled liquid from pipelines of a high pressure is offered. For the description of movement liquid-vapor mixes the homogeneous model of the one-speed sated stream is used. The initial differential equations of model are numerical-ly solved by means of Beam - Warming scheme. The method is approved on a test problem about the piston.

References – 7.

УДК: 662.92

2000 MSC: 76F40

З ә к і р Е. Б, М а у с ы м б е к о в а С. Д. **Қайналған сұйық ағынын сандық модельдеу**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.39 – 45.

Жоғарғы қысымды трубалық өткізгіштен ағылған қаныққан ағынның қозғалысын сипаттау үшін сандық алгоритм ұсынылған. Бу- сұйықтық қоспаның қозғалысын сипаттау үшін қаныққан ағынның бір жылдамдықты гомогендік моделі қолданылды. Таңдап алынған теңдеулер жүйесі Бим-Уорминг айқындалмаған сұлбасының көмегімен шешілді. Ұсынылған әдіс поршень есебінде тексерілді.

Библ. – 7.

УДК: 512.551.1, 539.12.01

2000 MSC: 42A10

S a m p o a m o r - S t u r s b e r g R. **The remark on invariant operators of Weyl algebra**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.46 – 51.

With the help of alternative formula for the invariant operators of the algebra $Iso(p, q)$ proved that the invariants of the coadjoint representation of the Weyl algebra $W(p, q)$ can be written in the form IJ^{-1} , where I, J are invariants of the subalgebra $Iso(p, q)$.

References – 7.

УДК: 512.551.1, 539.12.01

2000 MSC: 42A10

К а м п о а м о р - Ш т у р с б е р г Р. Вейл алгебрасының инварианттық операторлары туралы ескерту // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.46 – 51.

$W(p, q)$ Вейл алгебрасының бірегей қосылған корсетілімінің инварианттары IJ^{-1} түрінде жазылуы $Iso(p, q)$ Казимир алгебрасының инварианттық операторларының альтернативты формулалары арқылы дәлелденді. Мұнда I, J – инварианттары $Iso(p, q)$ ішкі алгебрасына қатысты. Библ. – 7.

УДК: 511

2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

К о з х е г е л д и н о в С. Ш. **Viète's equation** $x^2 + xy + y^2 = z^2$ // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P. 52 – 57.

General formula is obtained describing all the natural solutions Viète's equation. The theorem on equivity of general formulies all the natural solutions this equation is formulated and proved.

References – 8.

УДК: 511

2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

К о ж е г е л ь д и н о в С. Ш. $x^2 + xy + y^2 = z^2$ **Виет теңдеуі** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.52 – 57.

Виета теңдеуінің барлық натурал шешімдерін өрнектейтін жалпы формула алынды. Осы теңдеудің барлық натурал шешімдерінің жалпы формулаларының эквиваленттігінің теоремасы тұжырымдалды және дәлелденді.

Библ. – 8.

УДК: 510.6

2000 MSC: 03B10

Перетятский М. Г. **Чистые определения финитарного и инфинитарного отношений подобия теорий. Часть 2: Декартовы интерпретации и определение финитарного списка** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P. 58 – 72.

В серии из нескольких работ рассматривается финитарный список теоретико-модельных свойств ACL , называемый *алгебраическим Декартовым* списком, а также инфинитарный список SQL , называемый *квази-точным* списком. Они играют важную роль в исследовании выразительных возможностей логики предикатов первого порядка. Основная цель серии состоит в том, чтобы дать определения этих базовых понятий и изучить их важнейшие свойства, используя отдельный максимально сжатый текст.

В данной работе определены специальные классы интерпретаций, важные для исследования конечно аксиоматизируемых теорий и дано точное определение для финитарного списка.

References – 4.

УДК: 510.6

2000 MSC: 03B10

Перетятский М. Г. **Тазартылған финитарлы және инфинитарлы қатнастардың ұқсас теориялардың анықтамалары. Тарау 2: Декарттық түсініктемелер және финитарлық тізім анықтамасы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.58 – 72.

Алгебралық Декарт тізімі деп аталатын ACL теориялық-сұлбелік қасиеттерінің финитарлы тізімі мен бірге *квази-дәл* тізімі деп аталатын SQL инфинитарлы тізімі біршама жұмыстар

тізбегінде қарастылырады. Олар бірінші ретті предикаттар логикасында айқын мүмкіндіктерді зерттеуде маңызды роль атқарады. Бұл тізбектің негізгі ролі және максималды сығылған мәтінді қолдана отырып осы негізді түсініктерге анықтама беруде.

Жұмыста ақырлы аксиоматтау теориясының сигнатурасы мен құрылымдарын келтіру үрдістерінің жалпы идеясы келтіріледі сонымен бірге финитарлы және инфинитарлы тізімдер үшін дәл анықтамалары беріледі.

Библ. – 4.

УДК: 517.938

2000 MSC: 42A10

Rahimberdiev M. I., Seitova A. A. **Properties of indicators of the linear differential systems with non-negative matrixes** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P. 73 – 77.

The class of the linear differential systems are established where super special and central indicators are continuous functions and the senior indicator is a semicontinuous function.

References – 10.

УДК: 517.938

2000 MSC: 42A10

Рахимбердиев М. И., Сеитова А. А. **Теріс емес матрицалы сызықтық дифференциалдық жүйелердің көрсеткіштерінің қасиеттері**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б. 73 – 77.

Жоғарғы ерекше және орталық көрсеткіштер үздіксіз, ал ең жоғарғы көрсеткіш жартылай үздіксіз функциялар болатын сызықтық дифференциалдық жүйелер класы табылды.

Библ. – 10.

УДК: 517.9

2000 MSC: 34B40

Saparkova S. Z. **About some boundary problem for polyanalytic functions, which reduced to Hilbert's boundary problem** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.78 – 83.

In this work is considered the problem of determination polyanalytic functions, which is reduced to well-known Hilbert's problem for the analytical functions. Depending on indexes of functions, which given on boundary conditions, are received explicit forms of solutions.

References – 4.

УДК: 517.9

2000 MSC: 34B40

Сапақова С. З. **Белгілі Гильберт есебіне келтірілетін полианалитикалық функцияларды анықтаудың бір шекаралық есебі**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.78 – 83.

Бұл жұмыста белгілі Гильберт есебіне келтірілетін полианалитикалық функцияларды анықтау есебі қарастырылып, шекаралық шарттармен берілген функциялардың индекстеріне тәуелді айқын шешімдері алынған.

Библ. – 4.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35L20

Serikbayev Zh. A. **About properties of decisions of some class of differential operators with operator coefficient** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.84 – 92.

The class of differential operators of the second order with variable operators coefficient is considered. Divisibility and existence of reverse operator is proved.

References – 8.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35L20

Серікбаев Ж. А. **Операторлы коэффициенті дифференциалдық операторлардың шешімінің қасиеттері туралы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.84 – 92.

Айнымалы операторлы коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеулер классы қарастырылып кері оператордың бар болуы және оператордың бөліктенуі дәлелденген.

Библ. – 8.

УДК: 518.9

2000 MSC: 97B20

Shintemirov Al. M., Shintemirova G. B., Shintemirov As. M. **Application of Particle Swarm Optimiser with Passive Congregation for Modelling and Parameter Identification of Transformer Winding** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 3 (29). P.93 – 100.

The paper presents a mathematical model of disc-type transformer winding for frequency response analysis (FRA) based on traveling wave and multiconductor transmission line theories. The model is applied to the FRA simulation of a transformer winding. In order to identify the distributed parameters of the model, an intelligent learning technique, rooted from particle swarm optimiser with passive congregation is utilized.

References – 22.

УДК: 518.9

2000 MSC: 97B20

Шыңтеміров Ал. М., Шыңтемірова Г. Б., Шыңтеміров Ас. М. **Трансформатордың оралмалары модельдеу және параметрлерін теңестіруі үшін үйірдің жүріс-қалпының баяу жиынды күйіндегі оптимизацияның алгоритмі қолдануы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 3 (29). Б.93 – 100.

Берілген жұмыста трансформатордың дискті оралмасы жиілік сараптама (ЖС) үшін жүгіретін толқындар теориясы және реттелген параметрлерімен (КСТ) көпсалалы сым тізбекке негізделген математикалық моделі ұсынылады. Трансформатордың оралмасының жиілік сипаттамасын алу үшін модель қолданылады. Үйірдің жүріс-қалпының баяу жиынды күйіндегі оптимизацияның алгоритмі (ҮЖБЖКОА) негізінде интеллектуалды оқыту арқылы модельдің реттелген параметрлерін теңестіруі орындалады.

Библ. – 22.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 3 (29) 2008

Главный редактор:

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г. Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Жамбыла, 25, к.705

тел.: 8(7272)-91-13-15, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 25.09.2008г.

Тираж 300 экз. Объем 111 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: print_express@bk.ru