ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2009 том 9 № 3 (33)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 3 (33) 2009

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(727)2-72-01-66, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 9, № 3 (33), 2009

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 5 – 13*

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая
050013 Алматы ул. Толе-би, 86 serik@aldash.ricc.kz

В работе получен критерий единственности регулярного решения задачи Дарбу-Проттера для трехмерных гиперболических уравнений, а также доказана теорема единственности решения сопряженной ей задачи.

Задачи Дарбу на плоскости для линейных гиперболических уравнений хорошо изучены [1,2]. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены М.Н. Проттером [3]. Из-за отсутствия эффективных методов исследования изучение задач Дарбу-Проттера для многомерных гиперболических уравнений требует специальных исследований и привлечения новых методов, поэтому в этом направлении мало работ (см. [4]). В данной статье предложен метод исследования многомерных гиперболических задач, в частности, получен критерий единственности регулярного решения задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, а также доказана теорема единственности решения сопряженной ей задачи.

Постановки задач и основные результаты. Рассмотрим в полупространстве $t > 0$ взаимно-сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i\,(t) u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i\,(x,t) u_{x_i} + b\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = 0, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i\,(t) \upsilon_{x_i x_i} - \upsilon_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где $k_i\,(t) \in C\,(t \geq 0)$, $k_i\,(t) > 0$ при $t > 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $i = 1, 2$, $x = (x_1, x_2)$, $d\,(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{2} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными r, θ, t : $x_1 = r\cos\theta = rp_1(\theta)$, $x_2 = r\sin\theta = rp_2(\theta)$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Keywords: *Stability, instability, critical case*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R12

Найдем характеристические поверхности уравнения (1). По определению характеристическими поверхностями или характеристиками уравнения (1) называют поверхности

$$\Phi = \Phi\left(x_1, x_2, t\right) = 0 \tag{2}$$

такие, для которых на этой поверхности

$$F\left(x_1, x_2, t, q_1, q_2, q_0\right) = \sum_{i=1}^{2} k_i\left(t\right) q_i^2 - q_0^2 = 0, \tag{3}$$

где $q_i = \Phi_{x_i}$, $i = 1, 2$, $q_0 = \Phi_t$.

Как известно из теории уравнений в частных производных первого порядка [5] поверхность (2), удовлетворяющая уравнению (3), получается как многообразие, сотканное из бихарактеристик, т.е. решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{Fq_1} = \frac{dx_2}{Fq_2} = \frac{dt}{Fq_0} = \frac{dq_1}{-\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{dq_2}{-\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \frac{dq_0}{-\frac{\partial F}{\partial t}} = ds$$

или

$$\frac{dx_1}{2k_1q_1} = \frac{dx_2}{2k_2q_2} = \frac{dt}{-2q_0} = \frac{dq_1}{0} = \frac{dq_2}{0} = \frac{dq_0}{-\sum\limits_{i=1}^{2} k_i'\left(t\right) \cdot q_i^2} = ds. \tag{4}$$

Согласно (4) будем иметь $q_i = q_{i0} = p_i$, $i = 1, 2$, при этом выполняется условие нормировки $q_{10} + q_{20} = 1$, а также

$$x_i = 2p_i\left[\int\limits_0^t k_i\left(t\right) ds + C\right], \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

где C – произвольная постоянная и

$$\frac{dq_0}{ds} = -\left(\sum_{i=1}^{2} k_i'\left(t\right) p_i^2\right), \quad q_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{ds}\right). \tag{6}$$

Тогда из (6) имеем:

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 2\left(\sum_{i=1}^{2} k_i'\left(t\right) p_i^2\right). \tag{7}$$

Теперь, изменяя дифференцирование

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{8}$$

из (7), (8) получим

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\left(\sum_{i=1}^{2} k_i'\left(t\right) p_i^2\right) = 0. \tag{9}$$

Если $\varphi\left(t\right) = \frac{ds}{dt}$, то (9) есть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi'\left(t\right) + 2\varphi^3\left(t\right)\left(\sum_{i=1}^{2} k_i'\left(t\right) p_i^2\right)^{1/2} = 0,$$

решением которого является функция

$$\varphi\left(t\right)=\pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2}k_i'\left(t\right)p_i^2\right)^{1/2}. \qquad (10)$$

Формулы (5), (10) позволяют найти уравнения семейств характеристических поверхностей

$$x_j=p_j\left[\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{2}k_i\left(\xi\right)p_i^2\right)^{-1/2}k_j\left(\xi\right)d\xi+C\right],\quad j=1,2,\quad t=t, \qquad (11)$$

$$x_j=p_j\left[C-\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{2}k_i\left(\xi\right)p_i^2\right)^{-1/2}k_j\left(\xi\right)d\xi\right],\quad j=1,2,\quad t=t, \qquad (12)$$

для уравнения (1).

С помощью семейств (11), (12) образуем конечную область D_ε евклидова пространства E_3 точек (x_1,x_2,t), ограниченную характеристиками:

$$x_j=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{2}k_i\left(\xi\right)p_i^2\right)^{-1/2}k_j\left(\xi\right)p_jd\xi+\varepsilon\,p_j,\quad j=1,2,\quad t=t,$$

$$x_j=-\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{2}k_i\left(\xi\right)p_i^2\right)^{-1/2}k_j\left(\xi\right)p_jd\xi+p_j,\quad j=1,2,\quad t=t,$$

и плоскостью $t=0$, где $0\le t\le t_0$,

$$t_0:\frac{1-\varepsilon}{2}=\int_0^{t_0}\left(\sum_{i=1}^{2}k_i\left(\xi\right)p_i^2\right)^{1/2}d\xi,\quad \text{а}\quad 0\le\varepsilon<1.$$

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу рассмотрим следующие задачи

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1\left(\overline{D}_\varepsilon\right)\cap C^2\left(D_\varepsilon\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_S=0,\quad u\Big|_{S_\varepsilon}=0, \qquad (13)$$

или

$$u_t\Big|_S=0,\quad u\Big|_{S_\varepsilon}=0. \qquad (14)$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (1^*) из класса $C^1\left(\overline{D}_\varepsilon\right)\cap C^2\left(D_\varepsilon\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_S=0,\quad u\Big|_{S_1}=0 \qquad (15)$$

или

$$u_t\Big|_S=0,\quad u\Big|_{S_1}=0. \qquad (16)$$

Отметим, что задачи 1 и 2 при $\varepsilon=0$ в осесимметрическом случае изучены в [6].

Пусть $\Omega_\varepsilon-$ проекция области D_ε на плоскости (r,t) с границами
$\Gamma_\varepsilon: r=\int\limits_0^t\left(\sum\limits_{i=1}^2 p_i^2 k_i(\xi)\right)^{1/2}d\xi+\varepsilon,\ \Gamma_1: r=1-\int\limits_0^t\left(\sum\limits_{i=1}^2 p_i^2 k_i(\xi)\right)^{1/2}d\xi$ и $\Gamma: t=0,\ \varepsilon\leq r\leq 1$.

Если $k_i(t)\in C([0,t_0])\cap C^2((0,t_0)),\ a_i(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t)\in C^1(\bar D_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon),\ i=1,2$, то имеет место

Теорема 1. *При $\varepsilon=0$ задача 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*

Теорема 2. *Решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0\Leftrightarrow\varepsilon>0$.*

Теорема 3. $\forall\varepsilon\geq 0$ *решение задачи 2 тривиально.*

Отметим, что при выполнении равенства $k_1(t)=k_2(t)$ эти теоремы установлены в [7-10].

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon=0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (13). Ее решение в полярных координатах будем искать в виде ряда:

$$u(r,\theta,t)=u_{10}(r,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{1n}(r,t)\cos n\theta+u_{2n}(r,t)\sin n\theta),\tag{17}$$

где $u_{10}(r,t),\ u_{1n}(r,t),\ u_{2n}(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже. Подставив (17) в (1), в полярных координатах будем иметь:

$$\begin{gathered}Lu\equiv k_1(t)\left(\cos^2\theta\cdot u_{10rr}+\frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right)+k_2(t)\left(\sin^2\theta\cdot u_{10rr}+\frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right)-u_{10tt}+\\+a_1(r,\theta,t)\cdot\cos\theta\cdot u_{10r}+a_2(r,\theta,t)\cdot\sin\theta\cdot u_{10r}+b(r,\theta,t)u_{10t}+c(r,\theta,t)u_{10}+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{k_1(t)\left[\cos^2\theta(\cos n\theta\cdot u_{1nrr}+\sin n\theta\cdot u_{2nrr})+\frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta\cdot u_{1nr}+\sin n\theta\cdot u_{2nr})+\right.\right.\\+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta\cdot u_{1nr}-\cos n\theta\cdot u_{2nr})+\frac{n\sin 2\theta}{r^2}(\cos n\theta\cdot u_{2n}-\sin n\theta\cdot u_{1n})-\\\left.-\frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta\cdot u_{1n}+\sin n\theta\cdot u_{2n})\right]+k_2(t)\left[\sin^2\theta(\cos n\theta\cdot u_{1nrr}+\sin n\theta\cdot u_{2nrr})+\right.\\+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta\cdot u_{2nr}-\sin n\theta\cdot u_{1nr})+\frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta\cdot u_{1nr}+\sin n\theta\cdot u_{2nr})+\\\left.+\frac{n\sin 2\theta}{r^2}(\sin n\theta\cdot u_{1n}-\cos n\theta\cdot u_{2n})-\frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta\cdot u_{1n}+\sin n\theta\cdot u_{2n})\right]-u_{1ntt}\cos n\theta-\\-u_{2ntt}\sin n\theta+a_1\left[\cos\theta(\cos n\theta\cdot u_{1nr}+\sin n\theta\cdot u_{2nr})+\frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta\cdot u_{1n}-\cos n\theta\cdot u_{2n})\right]+\\+a_2\left[\sin\theta(\cos n\theta\cdot u_{1nr}+\sin n\theta\cdot u_{2nr})+\frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta\cdot u_{2n}-\sin n\theta\cdot u_{1n})\right]+\\\left.+b\cdot(\cos n\theta\cdot u_{1nt}+\sin n\theta\cdot u_{2nt})+c\cdot(u_{1n}\cdot\cos n\theta+u_{2n}\cdot\sin n\theta)\right\}=0.\end{gathered}\tag{18}$$

Теперь полученное выражение (18) сначала умножим на $\rho(\theta)\neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд:

$$\begin{gathered}\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)-\rho_{10}u_{10tt}+\frac{k_1-k_2}{2}d_{10}\left(u_{10rr}-\frac{1}{r}u_{10}\right)+\\+a_{10}(r,t)u_{10r}+b_{10}(r,t)u_{10t}+c_{10}(r,t)u_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr}+\right.\right.\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\bigg)-\rho_{jn}u_{jntt}+\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr}-\frac{1}{r}u_{jnr}+\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+ \tag{19}$$

$$+\frac{(k_2-k_1)\,n}{r}e_{jn}\left(u_{jnr}-\frac{u_{jn}}{r}\right)+a_{jn}\,(r,t)\,u_{jnr}+b_{jn}\,(r,t)\,u_{jnt}+c_{jn}\,(r,t)\,u_{jn}\bigg]\bigg\}=0,$$

$$\rho_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\,(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \ \rho_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ \ d_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$d_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ \ e_{1n}=-\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,$$

$$e_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,\ a_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\,(a_1\cdot\cos\theta+a_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$a_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\,(a_1\cdot\cos\theta+a_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,\ b_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho b\cos n\theta d\theta,$$

$$b_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho b\sin n\theta d\theta,\ c_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\left[(a_1\cdot\sin\theta-a_2\cos\theta)\,\frac{n\sin n\theta}{r}+c\cos n\theta\right]d\theta,$$

$$c_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\left[(a_2\cdot\cos\theta-a_2\sin\theta)\,\frac{n\cos n\theta}{r}+c\sin n\theta\right]d\theta,\ \ n=0,1\ldots.$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k\,(t)\,\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)-\rho_{10}u_{10tt}=0,\qquad k\,(t)=\frac{k_1\,(t)+k_1\,(t)}{2}, \tag{20}$$

$$k\,(t)\,\rho_{j1}\left(u_{j1rr}+\frac{1}{r}u_{j1r}-\frac{u_{j1}}{r^2}\right)-\rho_{j1}u_{j1tt}=\frac{(k_2-k_1)\,d_{10}}{2}\left(u_{10rr}-\frac{u_{10r}}{r}\right)- \tag{21}$$

$$-a_{10}u_{10r}-b_{10}u_{10t}-c_{10}u_{10},$$

$$k\,(t)\,\rho_{jn}\left(u_{jnrr}+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)-\rho_{j1}u_{jntt}=-\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\,(u_{jn-1rr}-$$

$$-\frac{1}{r}u_{jn-1r}-\frac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1}\bigg)-\frac{(k_2-k_1)\,(n-1)}{r}e_{jn-1}\left(u_{jn-1r}-\frac{u_{jn-1}}{r}\right)- \tag{22}$$

$$-a_{jn-1}u_{jn-1r}-b_{jn-1t}u_{jn-1t}-c_{jn-1}u_{jn-1},\qquad j=1,2,\ \ n=2,3,\ldots.$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},u_{jn}\}$, $j=1,2$, $n=1,2,...$, – решение системы (20) – (22), то оно является и решением уравнения (19).

Далее, учитывая ортогональность [11] систем тригонометрических функций $\{1,\ \cos n\theta$, $\sin n\theta$, $n=1,2,...\}$ на отрезке $[0,2\pi]$, из краевого условия (13) в силу (17) будем иметь:

$$u_{10}\,(r,t)\Big|_{\Gamma}\equiv 0,\quad u_{10}\,(r,t)\Big|_{\Gamma_0}\equiv 0,$$

$$u_{jn}\,(r,t)\Big|_{\Gamma}\equiv 0,\quad u_{jn}\,(r,t)\Big|_{\Gamma_0}\equiv 0,\quad j=1,2,\quad n=1,2,\ldots. \tag{23}$$

Таким образом, задача (1), (13) сведена к системе задач Дарбу в области Ω_0 для уравнений (20) – (22). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнений системы (20) – (22) можно представить в виде:

$$k\left(t\right)\left(u_{nrr}+\frac{1}{r}u_{nr}-\frac{n^2}{r^2}u_n\right)-u_{ntt}=f_n\left(r,t\right), \tag{24}$$

где $f_n\left(r,t\right)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0\left(r,t\right)\equiv 0$. Произведя в (24) замену переменных $u_n\left(r,t\right)=r^{-\frac{1}{2}}\upsilon_n r,t$ и положив затем $r=r$, $y=\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^t\sqrt{k\left(\xi\right)}d\xi\right)^{2/3}$, получим

$$y\upsilon_{nrr}-\upsilon_{nyy}+\frac{\lambda_n y}{r^2}\upsilon_n-b\left(y\right)\upsilon_{ny}=\bar{f}_n\left(r,y\right), \tag{25}$$

$$\lambda_n=\frac{1-4n^2}{4},\quad b\left(y\right)=\frac{1}{2\cdot k}\left[\frac{dk}{dy}-\frac{k}{y}\right],\quad \bar{f}_n\left(r,y\right)=\frac{r^{1/2}}{y^2}f_n\left(r,t\right).$$

Полагая $\upsilon_n=\omega_n\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b\left(\xi\right)d\xi\right]$, уравнение (25) приводим в виду:

$$y\omega_{nrr}-\omega_{nrr}+\frac{\lambda_n y}{r^2}\omega_n=c\left(y\right)\omega_n+\tilde{f}_n\left(r,y\right), \tag{26}$$

$$c\left(y\right)=-\frac{1}{4}\left(b^2+2b'_y\right)\in C\left(y>0\right),\quad \tilde{f}_n\left(r,y\right)=\bar{f}_n\left(r,y\right)\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^y b\left(\xi\right)d\xi\right].$$

Уравнение (26), в свою очередь, с помощью замены переменных $r=r$, $x_0=\frac{2}{3}y^{3/2}$ переходит в уравнение

$$\omega_{nrr}-\omega_{nx_0x_0}-\frac{1}{3x_0}\omega_{nx_0}+\frac{\lambda_n}{r^2}\omega_n=g_n\left(r,x_0\right), \tag{27}$$

$$g_n\left(r,x_0\right)=\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left\{\tilde{f}_n\left[r,\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]+c\left[\left(\frac{3}{2}x_0\right)^{\frac{2}{3}}\right]\omega_n\left[r,\left(\frac{3}{2}x_0\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}.$$

При этом краевое условие (23) запишется в виде:

$$\omega_n\left(r,0\right)=0,\quad \omega_n\left(r,r\right)=0,\quad n=0,1,... \tag{28}$$

В [10] доказано, что задача (27), (28) имеет бесчисленное множество ненулевых решений.

Таким образом, решив сначала задачу (20), (23) ($n=0$), а затем (21), (23) ($n=1$) и т.д., найдем последовательно все $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, $n=1,2,...$.

Итак, показано, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\rho\left(\theta\right)Lud\theta=0. \tag{29}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\cdot\rho(\theta)\cdot T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 – множество, которое плотно в $L_2\left(\int\limits_0^t\left(\sum\limits_{i=1}^2 p_i^2k_i(\xi)\right)^{1/2}d\xi,\ 1-\int\limits_0^t\left(\sum\limits_{i=1}^2 p_i^2k_i(\xi)\right)^{1/2}\right)$, $\rho\left(\theta\right)\in C^\infty\left(\left(0,2\pi\right)\right)$ – плотно в $L_2\left(\left(0,2\pi\right)\right)$, а $T\left(t\right)\in V_1$ – плотно в $L_2\left(\left(0,t_0\right)\right)$.

Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes (0,2\pi) \otimes V_1$ – плотно в $L_2(D_0)$ [11]. Отсюда и из (29) следует, что

$$\int\limits_{D_0} f(r,\theta,t) Lu dD_0 = 0 \quad \text{и} \quad Lu = 0, \quad \forall (r,\theta,t) \in D_0.$$

Следовательно, задача (1), (13) имеет нетривиальные решения вида:

$$u(r,\theta,t) = r^{-\frac{1}{2}} \upsilon_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-l} r^{-1/2} [\upsilon_{1n}(r,t)\cos n\theta + \upsilon_{2n}(r,t)\sin n\theta], \tag{30}$$

где $\upsilon_{10}(r,t)$, $\upsilon_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, определяются из предыдущих двумерных задач Дарбу.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1), аналогично как [4,7], можно показать, что полученное решение (30) принадлежит классу $C^1\left(\bar{D}_0\right) \cap C^2(D_0)$, если $l > 3$.

Теорема 1 для задачи (1), (13) доказана.

Справедливость этой теоремы для задачи (1), (14), используя результаты [4,7], устанавливается аналогичным образом.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (13). Построим решение $\upsilon(r,\theta,t)$ уравнения (1*), удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_{10}(r), \quad \upsilon|_{S_1} = 0, \tag{31}$$

$\bar{\tau}_{10}(r) \in G$, где G – множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1\left((\varepsilon \le r \le 1) \cap C^2(\varepsilon < r < 1)\right)$.

Очевидно G плотно всюду в $L_2((\varepsilon,1))$. Решение $\upsilon(r,\theta,t)$ будем искать в виде ряда (17). Тогда, как в случае задачи (1), (13) функции $\upsilon_{10}(r,t)$, $\upsilon_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, $n=1,2,...$, будут удовлетворять системе уравнений (20) – (22), где a_i, b, c заменены соответственно на $-a_i, -b$ а c на d, $i=1,2$.

Из краевого условия (31) имеем:

$$\upsilon_{10}\Big|_{\Gamma} = \bar{\tau}_{10}(r), \quad \upsilon_{10}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{32}$$

$$\upsilon_{jn}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \upsilon_{jn}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad j=1,2, \quad n=1,2,\dots. \tag{33}$$

Далее рассмотрим уравнение (27), к которому сводится (20) – (22), при этом условие (32) запишется в виде:

$$\omega_0(r,0) = \tau_{10}(r), \quad \omega_0(r,1-r) = 0, \tag{34}$$

$$\omega_n(r,0) = 0, \quad \omega_n(r,1-r) = 0, \quad n=1,2,..., \tag{35}$$

$\tau_{10}(r) = r^{-1/2}\bar{\tau}_{10}(r)$.

В [10] показано, что задача (27), (34) имеет единственное решение, а решение задачи (27), (35) – тривиальное.

Следовательно, найдем последовательно однозначные решения задач (20), (32), (21), (33) и (22), (33).

Таким образом, решение задачи (1*), (31) в виде (30) построено.

Аналогичным образом строятся решения этой задачи, если $\tau(r,\theta) = \bar{\tau}_{1n}(r)\cos n\theta + \bar{\tau}_{2n}(r)\sin n\theta$, $n=1,2,\dots$.

Теперь покажем, что решение задачи (1), (13) в классе $C^1(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x,t) \equiv 0$.

Для взаимно-сопряженных операторов L, L^* имеет место формула Грина [2,5]:

$$\int\limits_{D_\varepsilon} (\upsilon Lu - uL^*\upsilon) dD_\varepsilon = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial N} + u\upsilon Q\right) ds, \tag{36}$$

где $\frac{\partial}{\partial N} = \sum\limits_{i=1}^{2} k_i\left(t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\cos\left(N', x_i\right) + \frac{\partial}{\partial t}\cdot\cos\left(N', t\right)$ – конормальная производная к ∂D_ε, $Q = \sum\limits_{i=1}^{2} a_i\cos\left(N', x_i\right) + b\cos\left(N', t\right)$, а N' – внешняя нормаль к границе ∂D_ε.

Из (36), принимая во внимание граничные условия (13) и тот факт, что на характеристических поверхностях S_ε и S_1 конормальные производные $\frac{\partial}{\partial N}$ совпадают с производной по касательному направлению [2,5], получаем:

$$\int\limits_{S}\tau\left(r,\theta\right)u_t\left(r,\theta,0\right)ds = 0. \tag{37}$$

Поскольку система функций $\{1, \cos n\theta,\ \sin n\theta,\ n = 1, 2, ...\}$ плотна [11] в $L_2\left(\left(0, 2\pi\right)\right)$, то из (37) заключаем, что $u_t\left(x, 0\right) = 0,\ \forall x \in S$.

Следовательно, будем иметь $u\left(x, 0\right) = 0\ \forall\left(x, t\right) \in D_\varepsilon$, в классе $C^1\left(\bar{D}_\varepsilon\right)\cap C^2\left(D_\varepsilon\right)$ в силу единственности решения задачи Коши $u\left(x, 0\right) = 0,\ \ u_t\left(x, 0\right) = 0$ для уравнения (1) [5].

Пусть теперь решение задачи (1), (13) в классе $C^1\left(\bar{D}_\varepsilon\right)\cap C^2\left(D_\varepsilon\right)$, $u\left(x, t\right)\equiv 0$.

Покажем, что $\varepsilon > 0$.

Предположим противное, т.е. $\varepsilon = 0$. Тогда из теоремы 1 приходим к противоречию.

Таким образом, теорема 2 для задачи (1), (13) доказана.

Ее справедливость установим для задачи (1), (14).

Пусть $\varepsilon > 0$. Сначала построим решение уравнения (1*), удовлетворяющее краевым условиям:

$$\left(bv - v_t\right)\Big|_S = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}_{10}(r), \quad v\Big|_{S_1} = 0, \tag{38}$$

где $\bar{\nu}_{10}(r) \in G$, в виде (17).

В этом случае функции $v_{10}(r,t)$, $v_{jn}(r,t)$, $j = 1, 2$, $n = 1, 2, ...$, удовлетворяют системе уравнений (20) – (22) и краевым условиям:

$$\left(b_{10}v_{10} - v_{10t}\right)\Big|_\Gamma = \bar{\nu}_{10}(r), \quad v_{10}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{39}$$

$$\left(b_{jn}v_{jn} - v_{jnt}\right)|_\Gamma = 0, \quad v_{jn}|_{\Gamma_1} = 0, \quad j = 1, 2,\ \ n = 1, 2, ..., \tag{40}$$

которые в свою очередь сводятся к уравнению (27) с данными:

$$\omega_0\left(r, 0\right) = \tau_{10}\left(r\right), \quad \omega_0\left(r, 1 - r\right) = 0, \tag{34}$$

$$\omega_n\left(r, 0\right) = 0, \quad \omega_n\left(r, 1 - r\right) = 0, \quad n = 1, 2, ..., \tag{35}$$

$$\tau_{10}(r) = 4a\cdot r^{-1/2}\bar{\nu}_{10}\left(r\right),\ a = \lim_{t\to 0}\frac{y^{\frac{3}{2}}k\left(t\right)}{k^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\cdot k\left(t\right)\cdot b_{10} - y^{\frac{3}{2}}\cdot k_t'} \neq 0,\ \ |a| < \infty,$$

которые однозначно разрешимы в $C^1\left(\bar{\Omega}_\varepsilon\right)\cap C^2\left(\Omega_\varepsilon\right)$.

Следовательно, найдем последовательно однозначные решения задач (20), (39), (21), (40) и (22), (40).

Таким образом, решение задачи (1*), (38) в виде (30) построено. Аналогично строятся решения этой задачи, если $\nu(r,\theta) = \bar{\nu}_{1n}(r)\cos n\theta + \bar{\nu}_{2n}(r)\sin n\theta$, $n = 1, 2, ...$.

Далее, как в случае задачи (1), (13), устанавливается теорема 2 для задачи (1), (14).

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varepsilon \geq 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (15). Построим решение $v\left(r,\theta,t\right)$ уравнения (1*), удовлетворяющее краевым условиям $v\Big|_S = \tau\left(r,\theta\right) = \bar{\tau}_{10}\left(r\right)$, $v\Big|_{S_\varepsilon} = 0$ в виде ряда (17).

В этом случае функции $\upsilon_{10}(r,t)$, $\upsilon_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, удовлетворяют системе уравнений (20) – (22) и краевым условиям:

$$\upsilon_{10}\Big|_{\Gamma}=\bar{\tau}_{10}(r), \quad \upsilon_{10}\Big|_{\Gamma_\varepsilon}=0,$$

$$\upsilon_{jn}\Big|_{\Gamma}=0, \quad \upsilon_{jn}\Big|_{\Gamma_\varepsilon}=0, \; j=1,2, \; n=1,2,...,$$

которые в свою очередь сводятся к уравнению (27) с данными:

$$\begin{array}{l} \omega_0(r,0)=\tau_{10}(r), \quad \omega_0(r,r-\varepsilon)=0, \\ \omega_n(r,0)=0, \quad \omega_n(r,r-\varepsilon)=0, \quad n=1,2,\ldots . \end{array} \tag{41}$$

При $\varepsilon=0$, аналогично, как в п.2, доказываем, что задача (27), (41) имеет бесчисленное множество решений, а при $\varepsilon>0$, как п.3 – ее однозначную разрешимость.

Далее, аналогично теореме 2 доказывается теорема 3 для задачи (1), (15). По этой же схеме ее справедливость устанавливается для задачи (1), (16).

Отметим, что уравнения (1) встречаются при математическом моделировании процессов взрыва горных пород [12,13].

Цитированная литература

1. **Бицадзе А.В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.

2. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.

3. **Protter M.N.** //Rational Mech. and Analysis, 1954. V. 3, № 4. P. 435 – 446.

4. **Алдашев С.А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.

5. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4, ч. 2. М., 1981.

6. **Диденко В.П.** Краевые задачи для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1974.

7. **Алдашев С.А.** // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 1 – 5.

8. **Алдашев С.А.** // Мат. журнал. Алматы, 2002. Т. 2, № 4 С. 5 – 8.

9. **Алдашев С.А.** // Укр. матем. журнал. 2003. Т. 55, № 11. С. 1569 – 1575.

10. **Алдашев С.А.** //Укр. матем. журнал. 2004. Т. 56, № 8. С. 1119 – 1127.

11. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

12. **Алдашев С.А., Ким Н.Х.** // Докл. НАН РК. 2001. № 2. С. 5 – 7.

13. **Алдашев С.А., Атабай Б.Ж.** // Тр. межд. конф.: Современные проблемы механики. Ч.2 Общая и прикладная механика. Алматы: КазНУ. 2001. С. 25 – 27.

Поступила в редакцию 18.08.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 14 – 18*

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИКОМФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Л. А. Алексеева, Н. И. Мартынов, И. О. Федоров

Институт Математики МОН РК
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz
Институт механики и машиноведения МОН РК им. У.А. Джолдасбекова
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 nikmar50@mail.ru, fio.1980@mail.ru

Квазикомформным отображением задачи кручения неоднородных анизотропных тел сведены к соответствующим задачам неоднородных изотропных тел.

В работах [1–4] основные двумерные краевые задачи статики неоднородной анизотропной упругой среды приведены к краевым задачам обобщенного аналитического вектора. Такой подход позволяет обобщить методологию Мусхелишвили Н.И. на неоднородные среды, ослабить требования на гладкость упругих параметров, записать общее решение и многое другое. Для решения конкретных задач применим метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Сущность такого подхода состоит в том, что решение основных краевых задач эквивалентно разрешению закона Гука, записанного в терминах функций перемещений и функции напряжений с соответствующими граничными условиями (задача Римана-Гильберта). Предложенная методика в работах [1–4] переносится также на задачи изгиба и кручения призматических тел [5].

В данном исследовании, которое базируется на результатах [1–5], показано, что с помощью определенного квазиконформного отображения (гомеоморфизма) краевые задачи кручения неоднородных анизотропных призматических тел сводятся в преобразованной плоскости к краевым задачам кручения неоднородного изотропного тела, но с измененной правой частью.

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением односвязной области D с границей Γ.

Рассмотрим задачу о чистом кручении неоднородного анизотропного бруса. Она описывается системой уравнений [6–7]:

$$\sigma_{13x} + \sigma_{23y} = 0, \qquad (1)$$

Keywords: *Torsion, a nonhomogenious anisotropic body, analitic function, gomeomorphism*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

$$\begin{cases} a_{45}\sigma_{23} + a_{55}\sigma_{13} = \vartheta(\varphi_x - y), \\ a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{13} = \vartheta(\varphi_y + x), \end{cases} \tag{2}$$

где σ_{13}, σ_{23} – компоненты тензора напряжений, $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $(i, j = 4, 5)$ – упругие параметры (коэффициенты деформации), $\varphi = \varphi(x, y)$ – функция кручения, $\vartheta = const$ – относительный угол закручивания. При этом предполагается, что один конец бруса закреплен, а на другом, свободном, действуют усилия, приводящие к скручивающему моменту M. Кроме того, в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к образующей бруса. Плоскость свободного торца принимается за плоскость Oxy, а ось Oz направлена параллельно образующей.

Введем функцию напряжений:

$$\sigma_{13} = -\vartheta\psi_y, \sigma_{23} = \vartheta\psi_x. \tag{3}$$

Тогда (1) удовлетворяется автоматически, а (2) принимает вид:

$$\begin{cases} -\varphi_y + a_{44}\psi_x - a_{45}\psi_y = x, \\ \varphi_x - a_{45}\psi_x + a_{55}\psi_y = y. \end{cases} \tag{4}$$

Обычно задачу о чистом кручении решают либо в напряжениях, либо в перемещениях. В первом случае исключают функцию кручения φ:

$$(a_{44}\psi_x - a_{45}\psi_y)_x + (a_{55}\psi_y - a_{45}\psi_x)_y = 2, \tag{5}$$

во втором – функцию напряжений ψ:

$$\{A_{45}(\varphi_y + x) + A_{55}(\varphi_x - y)\}_x + \{A_{44}(\varphi_y + x) + A_{45}(\varphi_x - y)\}_y = 0. \tag{6}$$

Здесь $A_{ij}(i, j = 4, 5)$ – модули упругости, связанные с коэффициентами деформации соотношениями:

$$A_{44} = \frac{a_{55}}{\Delta}, A_{45} = -\frac{a_{45}}{\Delta}, A_{55} = \frac{a_{44}}{\Delta}, \Delta = a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0.$$

К уравнениям (5) или (6) добавляют соответствующие граничные условия и необходимые соотношения для определения остальных неизвестных параметров [6,7]. Так для эллиптического уравнения (5) в односвязной области D на границе области Γ ставится условие Дирихле:

$$\Psi|_\Gamma = 0, \tag{5a}$$

а для уравнения (6) – условие с косой производной, которое получается из (4) с учетом (5а). Для изотропного неоднородного тела условие с косой производной сводится к условию Неймана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = r\frac{\partial r}{\partial s}, \tag{6a}$$

где $\overline{r}$ – радиус вектор, n – нормаль, s – длина дуги контура Γ.

Обратимся теперь к соотношениям (4). Они выражают закон Гука, записанный через функции напряжений и кручения. Нетрудно видеть, что (4) представляют собой полные интегралы уравнений (5) и (6). Действительно, если ψ – решение (5), то общее решение (5) есть (4), и наоборот. Поэтому решение краевых задач о кручении эквивалентно решению системы (4) – эллиптических уравнений первого порядка относительно ψ, φ с соответствующими краевыми условиями.

В дальнейшем удобно перейти в плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ и ввести дифференциальные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}),\ \overline{z} = x - iy, \tag{7}$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Тогда закон Гука (4) в комплексных переменных запишется в виде:

$$\begin{cases} i\varphi_{\overline{z}} + q\psi_z + p\psi_{\overline{z}} = \frac{z}{2}, \\ -i\varphi_z + \overline{q}\psi_{\overline{z}} + p\psi_z = \frac{\overline{z}}{2}, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a_{44} + a_{55}),\ q = -\frac{1}{2}((a_{55} - a_{44}) + 2ia_{45}),\ p > |q| \geq 0. \tag{8a}$$

Второе соотношение (8) есть комплексно-сопряженное к первому (закону Гука).

Исключая из (8) перекрестным дифференцированием функцию кручения φ, получим комплексный аналог уравнения (5):

$$(q\psi_z + p\psi_{\overline{z}})_z + (\overline{q}\psi_{\overline{z}} + p\psi_z)_{\overline{z}} = 1. \tag{9}$$

Аналогично получается уравнение для функции кручения φ.

Рассмотрим закон Гука (8). Введем комплексную функцию W:

$$W = \frac{\psi}{\alpha} + i\frac{\varphi}{\beta},\ \overline{W} = \frac{\psi}{\alpha} - i\frac{\varphi}{\beta}. \tag{10}$$

Здесь α, β – действительные, пока неопределенные функции, нигде не обращающиеся в нуль. Из (10) следует:

$$\psi = \frac{\alpha}{2}(W + \overline{W}),\ i\varphi = \frac{\beta}{2}(W - \overline{W}). \tag{11}$$

Подставляя (11) в первое соотношение (8), получим:

$$W_{\overline{z}} + e_0\overline{W}_{\overline{z}} + e_1(W_z + \overline{W}_z) + d_1 W + d_2\overline{W} = f, \tag{12}$$

где

$$\begin{cases} e_0 = \frac{p\alpha - \beta}{p\alpha + \beta},\ e_1 = \frac{q\alpha}{p\alpha + \beta},\ f = \frac{z}{p\alpha + \beta}, \\ d_1 = \frac{\beta_{\overline{z}} + q\alpha_z + p\alpha_{\overline{z}}}{p\alpha + \beta},\ d_2 = \frac{q\alpha_z + p\alpha_{\overline{z}} - \beta_{\overline{z}}}{p\alpha + \beta} \end{cases} \tag{12a}$$

Исключая $\overline{W}_z$ из соотношения (12) и его комплексно - сопряженного, будем иметь:

$$(1 - |e_1|^2)W_{\overline{z}} + (e_0 - |e_1|^2)\overline{W}_{\overline{z}} + e_1(1 - e_0)W_z + W(d_1 - e_1\overline{d}_2) + \overline{W}(d_2 - e_1\overline{d}_1) = (f - e_1\overline{f}). \tag{13}$$

Положим $e_0 = |e_1|^2$, что дает $\beta = \pm\Delta\alpha,\ \Delta = \sqrt{p^2 - |q|^2}$. Примем для определенности $\beta = \Delta\alpha$. Тогда

$$(1 - e_0) = \frac{2\Delta}{p + \Delta},\ e_1 = \frac{q}{p + \Delta} = -\lambda,\ |\lambda| \leq \lambda_0 < 1, \tag{14}$$

и уравнение (13) преобразуется к виду:

$$W_{\overline{z}} - \lambda W_z = -\{(\frac{\alpha_{\overline{z}}}{\alpha} + \frac{\Delta_{\overline{z}}}{2\Delta}) - \lambda(\frac{\alpha_z}{\alpha} + \frac{\Delta_z}{2\Delta})\}W + \frac{(\Delta_{\overline{z}} - \lambda\Delta_z)}{2\Delta}\overline{W} + \frac{(z + \lambda\overline{z})}{2\Delta\alpha}. \tag{15}$$

Выбирая α тем или иным образом, можем регулировать коэффициенты при W и $\overline{W}$ в правой части уравнения (15). Полагая, например, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, получим:

$$W_{\overline{z}} - \lambda W_z = \frac{(\Delta_{\overline{z}} - \lambda\Delta_z)}{2\Delta}\overline{W} + \frac{(z + \lambda\overline{z})}{2\sqrt{\Delta}}. \tag{16}$$

Граничное условие на контуре Γ для функции W в соответствии с (5a) имеет вид:

$$Re(W)|_{\Gamma} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, краевая задача о кручении призматического бруса свелась к задаче Римана-Гильберта (15), (17) для квазианалитического вектора.

В случае постоянных упругих параметров (однородный материал), с учетом (15),(17), получаем представление общего решения типа С.Г. Лехницкого:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} Re\Phi(\eta) + \frac{|\eta|^2(p+\Delta)}{4\Delta^2},\ \varphi = \sqrt{\Delta} Im\Phi(\eta), \tag{18}$$

где $\Phi(\eta)$ – аналитическая функция комплексного аргумента $\eta = \lambda\overline{z}+z$. Решение краевой задачи записывается с помощью интеграла Шварца [8,9], учитывающего комформное отображение произвольной односвязной области на единичный круг.

Для изотропного случая уравнение (16) и закон Гука (8) принимают вид:

$$W_{\overline{z}} = \frac{p_{\overline{z}}}{2p}\overline{W} + \frac{z}{2p}, \tag{19}$$

$$\begin{cases} i\varphi_{\overline{z}} + p\psi_{\overline{z}} = \frac{z}{2}, \\ -i\varphi_z + p\psi_z = \frac{\overline{z}}{2}. \end{cases} \tag{20}$$

Теперь осуществим отображение плоскости z на плоскость $\xi = \xi(z)$ с помощью основного гомеоморфизма [8-11]:

$$\xi_{\overline{z}} - \lambda\xi_z = 0. \tag{21}$$

Тогда уравнение (16) и закон Гука (8) переходят в следующие соотношения:

$$W_{\overline{\xi}} = \frac{\Delta_{\overline{\xi}}}{2\Delta}\overline{W} + \frac{((p+\Delta)z - q\overline{z})}{4\sqrt{\Delta^3}\overline{\xi}_{\overline{z}}}, \tag{16a}$$

$$\begin{cases} i\varphi_{\overline{\xi}} + \Delta\psi_{\overline{\xi}} = \frac{z^2}{2}(\frac{\overline{z}}{z})_{\overline{\xi}}, \\ -i\varphi_\xi + \Delta\psi_\xi = \frac{\overline{z}^2}{2}(\frac{z}{\overline{z}})_\xi. \end{cases} \tag{8a}$$

Якобиан преобразования есть величина

$$J(z) = |\xi_z|^2 - |\xi_{\overline{z}}|^2 \geq \delta > 0,$$

и при этом

$$\xi_z = J(z)\overline{z}_{\overline{\xi}},\ \xi_{\overline{z}} = -J(z)z_{\overline{\xi}}.$$

Исключая из (8a) перекрестным дифференцированием функцию кручения, получим:

$$(\Delta\psi_{\overline{\xi}})_\xi + (\Delta\psi_\xi)_{\overline{\xi}} = \frac{1}{J(z)}. \tag{22}$$

Сопоставление (19) с (16a) и (20) с (8) показывает, что эти соотношения имеют одинаковую структуру. Чтобы перейти от (19),(20) к (16a),(8a) необходимо в (19),(20) p заменить на Δ и соответствующие свободные члены. Соотношения (19),(20) описывают кручение изотропного тела в плоскости комплексной переменной, а соотношения (16a),(8a) описывают кручение анизотропного тела в плоскости комплексной переменной . Таким образом, квазиконформным отображением краевые задачи неоднородного анизотропного тела сводятся к соответствующим задачам неоднородного изотропного тела.

Отметим, что методика решения краевых задач (19),(5а) или (22),(5а) достаточно полно разработана как для гладких, так и для обобщенных решений [8–11].

Предложенный в настоящей работе подход к решению краевых задач кручения призматических тел позволяет находить в замкнутом виде решение частных задач. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении призматического тела с упругими параметрами:

$$p = \frac{(1+|\lambda|^2)}{(1-|\lambda|^2)}\Delta,\ q = \frac{2\lambda\Delta_0}{1-|\lambda|^2},\ \Delta = \Delta_0 = const > 0,$$

где $\lambda = -g_{\overline{z}}(\overline{z})$ и $|\lambda| < \lambda_0 \le 1$. Тогда гомеоморфизм (21) имеет вид:

$$\xi = z - g(\overline{z}),$$

а

$$J(z) = 1 - |\lambda|^2,\ \overline{\xi}_{\overline{z}} = \lambda,\ \Delta_z = \Delta_{\overline{z}} = 0.$$

Уравнения (16a), (22) запишутся так:

$$W_{\overline{\xi}} = f_1(\xi,\overline{\xi}),\ f_1(\xi,\overline{\xi}) = \frac{z-\lambda\overline{z}}{2\sqrt{\Delta}\lambda}(\xi), \tag{16b}$$

$$\psi_{\overline{\xi}\xi} = f_2(\xi,\overline{\xi}),\ f_2(\xi,\overline{\xi}) = \frac{1}{2(1-|\lambda|^2)}(\xi), \tag{22a}$$

а граничные условия как:

$$ReW|_{\Gamma^*} = \psi|_{\Gamma^*} = 0. \tag{23}$$

Здесь Γ^* – образ границы Γ при гомеоморфизме.

Решение этих задач записываются в квадратурах через интеграл Шварца.

Цитированная литература

1. **Н.И.Мартынов** //Межд. науч. конф. "Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности посвященный 70-летию академика У.М.Султангазина. 2006. С. 62 – 65.

2. **Н.И.Мартынов** //Известия НАН РК, серия физико-математическая.2007. №1(251). С. 52 – 59.

3. **Н.И.Мартынов** //Матем. журнал. 2007. №3(25). С. 69 – 77.

4. **Н.И.Мартынов, И.О.Федоров** //Сборник трудов конференции "Актуальные проблемы безопасности информационных технологий". Изд. Сиб. ГА. Красноярск. 2008. С. 40 – 49.

5. **Н.И.Мартынов, И.О.Федоров** //Известия НАН РК, сер. физ-мат. 2007. №3. С. 48 – 53.

6. **С.Г.Лехницкий** Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.

7. **С.Г.Лехницкий** Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., 1971.

8. **И.Н. Векуа** Обобщенные аналитические функции. М., 1988.

9. **И.Н.Векуа** Новые методы решения эллиптических уравнений. М-Л, 1948.

10. **Б.В. Боярский** //Annales Polonici Mathematicy. 1966. V. 17. P. 281 – 320.

11. **В.Н.Монахов** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977.

Поступила в редакцию 02.07.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 19 – 27*

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. Т. Асанова, Р. А. Медетбекова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru
Южно-Казахстанский государственный университет им.М.О.Ауезова
160000 Шымкент пр. Тауке хана, 5

Рассматривается полупериодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений с импульсным воздействием. Методом введения функциональных параметров получены коэффициентные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи.

Рассматривается полупериодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени на прямоугольнике $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(0,x) = u(T,x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$u(t_i - 0, x) - u(t_i + 0, x) = \varphi_i(x), \qquad i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

где $u \in R^n$, $(n \times n)$ – матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n – вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, n – вектор-функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$, n – вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < T$, $||u(t,x)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|$, $||A(t,x)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|$.

Решением задачи (1) – (4) будем называть кусочно-непрерывную на $\bar{\Omega}$ функцию $u(t,x)$, имеющую кусочно-непрерывные на $\bar{\Omega}$ частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}$, удовлетворяющие системе (1) при всех $(t,x) \in \Omega$, кроме линий $t = t_i$, $i = \overline{1,m}$, условию (2),

Keywords: *system of hyperbolic equations, semi-periodical boundary value problem, impulsive effect, method of additional parameter's introduction, unique solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37

периодическому условию (3) и условиям импульсного воздействия в фиксированные моменты времени (4).

В работе [1] исследована периодическая краевая задача для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с импульсным воздействием при помощи численно-аналитического метода.

Для решения задачи (1) – (4) применяется метод введения функциональных параметров [2], разработанный для исследования нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной. Суть метода заключается во введении дополнительных параметров как значений искомого решения по переменной t в определенных линиях области Ω. Краевая задача для систем гиперболических уравнений сводится к эквивалентной многохарактеристической краевой задаче с функциональными параметрами, зависящими от x. Свойства решений и его частных производных переходят в свойства функциональных параметров. С помощью этого метода были получены коэффициентные условия однозначной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений со смешанной производной. На основе эквивалентности корректных разрешимостей краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений был установлен критерий корректной разрешимости рассматриваемой задачи [3–4].

В данной работе дополнительные параметры вводятся как значения искомой функции на характеристиках $t=t_i$, $i=\overline{0,m}$, $t_0=0$, $t_{m+1}=T$.

С помощью прямых $t=t_i$, $i=\overline{1,m}$, область Ω разбивается на подобласти $\Omega_r=[t_{r-1},t_r)\times[0,\omega]$, $r=\overline{1,m+1}$. Через $u_r(t,x)$ обозначим сужение функции $u(t,x)$ на Ω_r, $r=\overline{1,m+1}$. Вводятся параметры $\lambda_r(x)=u_r(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,m+1}$, и задача (1) – (4) путем введения новых неизвестных функций $\widetilde{u}_r(t,x)=u(t,x)-\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m+1}$, сводится к следующей эквивалентной задаче с параметрами

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}_r}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}_r}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}_r}{\partial t}+C(t,x)\widetilde{u}_r+A(t,x)\lambda_r'(x)+C(t,x)\lambda_r(x)+f(t,x), \tag{5}$$

$$(t,x)\in\Omega_r,\qquad r=\overline{1,m+1},$$

$$\widetilde{u}_r(t_{r-1},x)=0,\qquad r=\overline{1,m+1}, \tag{6}$$

$$\widetilde{u}_r(t,0)=\psi(t)-\psi(t_{r-1}),\qquad t\in[t_{r-1},t_r),\qquad r=\overline{1,m+1}, \tag{7}$$

$$\lambda_1(x)=\lambda_{m+1}(x)+\lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_{m+1}(t,x),\quad x\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\lambda_i(x)+\lim_{t\to t_i-0}u_i(t,x)-\lambda_{i+1}(x)=\varphi_i(x),\qquad i=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Решением задачи (5) – (9) является система пар $(\lambda(x),\widetilde{u}([t],x))$ с элементами $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_{m+1}(x))'$, $\widetilde{u}([t],x)=(\widetilde{u}_1(t,x),\widetilde{u}_2(t,x),...,\ \widetilde{u}_{m+1}(t,x))'$, где функции $\widetilde{u}_r(t,x)$ непрерывны на Ω_r, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t\partial x}$ на Ω_r, $r=\overline{1,m+1}$ (на линиях $t=t_{r-1}$ системе (5) удовлетворяют $\frac{\partial\widetilde{u}_{r,\text{пр}}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\widetilde{u}_{r,\text{пр}}(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\widetilde{u}_{r,\text{пр}}(t,x)}{\partial t\partial x}$), конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to t_r-0}\frac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $r=\overline{1,m+1}$, и при $\lambda_r(x)=\lambda_r^*(x)$ удовлетворяют системе гиперболических уравнений (5) и условиям (6) – (9).

Задачи (1) – (4) и (5) – (9) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t,x)$ является решением (1) – (4), то система пар $(\lambda(x),\widetilde{u}([t],x))$, где $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_{m+1}(x))'$, $\widetilde{u}([t],x)=(\widetilde{u}_1(t,x),\widetilde{u}_2(t,x),...,\widetilde{u}_{m+1}(t,x))'$, $u_r(t,x)=u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,m+1}$, $\lim\limits_{t\to T-0}u_{m+1}(t,x)=u(T,x)$, $\lambda_r(x)=u_r(t_{r-1},x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)=u_r(t,x)-u_r(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,m+1}$, будет решением (5) – (9), и наоборот, если $(\lambda_r(x), \widetilde{u}_r(t,x))$, $r = \overline{1, m+1}$, – решение (5) – (9), то функция $u(t,x)$, определяемая равенствами $u(t,x) = \lambda_r(x) + \widetilde{u}_r(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, m+1}$, $u(T,x) = \lambda_{m+1}(x) + \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{u}_{m+1}(t,x)$ будет решением задачи (1)-(4).

В отличие от задачи (1) – (4) здесь появились начальные условия (6) как значения неизвестной функции на характеристиках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, m+1}$.

При фиксированных $\lambda_r(x), \lambda_r'(x)$, $r = \overline{1, m+1}$, функции $\{\widetilde{u}_r(t,x)\}$, $r = \overline{1, m+1}$, являются решениями задачи Гурса на Ω_r с условиями (6), (7).

Введя обозначения $\widetilde{v}_r(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}_r(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, из (6), (7) получим $\widetilde{v}_r(t_{r-1}, x) = 0$, $\widetilde{w}_r(t,0) = \dot{\psi}(t)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений:

$$\widetilde{w}_r(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \Big[A(t,\xi)\widetilde{v}_r(t,\xi) + B(t,\xi)\widetilde{w}_r(t,\xi) + C(t,\xi)\widetilde{u}_r(t,\xi) +$$

$$+ f(t,\xi) + A(t,\xi)\lambda_r'(\xi) + C(t,\xi)\lambda_r(\xi) \Big] d\xi, \tag{10}$$

$$\widetilde{v}_r(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^t \Big[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x) + B(\tau,x)\widetilde{w}_r(\tau,x) + C(\tau,x)\widetilde{u}_r(\tau,x) +$$

$$+ f(\tau,x) + A(\tau,x)\lambda_r'(x) + C(\tau,x)\lambda_r(x) \Big] d\tau, \tag{11}$$

$$\widetilde{u}_r(t,x) = \psi(t) - \psi(t_{r-1}) + \int\limits_{t_{r-1}}^t d\tau \int\limits_0^x \Big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}_r(\tau,\xi) + B(\tau,\xi)\widetilde{w}_r(\tau,\xi) +$$

$$+ C(\tau,\xi)\widetilde{u}_r(\tau,\xi) + f(\tau,\xi) + A(\tau,\xi)\lambda_r'(\xi) + C(\tau,\xi)\lambda_r(\xi) \Big] d\xi. \tag{12}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ подставим соответствующую правую часть (11) и, повторив этот процесс ν $(\nu = 1, 2, ...)$ раз, получим представление функции: $\widetilde{v}_r(t,x)$

$$\widetilde{v}_r(t,x) = G_{\nu r}(t,x,\widetilde{v}_r) + H_{\nu r}(t,x,\widetilde{u}_r,\widetilde{w}_r) + F_{\nu r}(t,x) + D_{\nu r}(t,x)\lambda_r'(x) + E_{\nu r}(t,x)\lambda_r(x), \tag{13}$$

где

$$G_{\nu r}(t,x,\widetilde{v}_r) = \int\limits_{t_{r-1}}^t A(\tau_1,x) ... \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)\widetilde{v}_r(\tau_\nu,x) d\tau_\nu ... d\tau_1,$$

$$H_{\nu r}(t,x,\widetilde{u}_r,\widetilde{w}_r) = \int\limits_{t_{r-1}}^t \Big[B(\tau_1,x)\widetilde{w}_r(\tau_1,x) + C(\tau_1,x)\widetilde{u}_r(\tau_1,x) \Big] d\tau_1 + ... +$$

$$+ \int\limits_{t_{r-1}}^t A(\tau_1,x) ... \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} \Big[B(\tau_\nu,x)\widetilde{w}_r(\tau_\nu,x) + C(\tau_\nu,x)\widetilde{u}_r(\tau_\nu,x) \Big] d\tau_\nu ... d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^t f(\tau_1,x) d\tau_1 + ... + \int\limits_{t_{r-1}}^t A(\tau_1,x) ... \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,x) d\tau_\nu ... d\tau_1,$$

$$D_{\nu r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$E_{\nu r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}C(\tau_1,x)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}C(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,m+1}$.

Продифференцируем соотношения (8), (9) по переменной x :

$$\lambda_1'(x)=\lambda_{m+1}'(x)+\lim_{t\to T-0}\frac{\partial\widetilde{u}_{m+1}(t,x)}{\partial x},\quad x\in[0,\omega], \tag{8$'$}$$

$$\lambda_i'(x)+\lim_{t\to t_i-0}\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}-\lambda_{i+1}'(x)=\varphi_i'(x),\qquad i=\overline{1,m}. \tag{9$'$}$$

Из условий согласования в точках $(t_{r-1},0)$, $r=\overline{1,m+1}$, вытекает:

$$\lambda_r(0)=\psi(t_{r-1}),\qquad r=\overline{1,m+1}. \tag{14}$$

В силу условий (7) и (14) соотношения (8), (9) и (8$'$), (9$'$) будут эквивалентными.

Переходя в правой части (13) к пределу при $t\to t_r-0$, находим $\lim\limits_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, $x\in[0,\omega]$, подставляя их в (8$'$), (9$'$) для неизвестных вектор - функций $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m+1}$, получаем систему $m+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производных:

$$Q_\nu(x)\lambda'(x)=-E_\nu(x)\lambda(x)-F_\nu(x)-H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w})-G_\nu(x,\widetilde{v}), \tag{15}$$

где

$$Q_\nu(x)=\left|\begin{array}{cccccc} I & 0 & 0 & \dots & 0 & -[I+D_{\nu(m+1)}(T,x)]\\ I+D_{\nu1}(t_1,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & I+D_{\nu2}(t_2,x) & -I & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu m}(t_m,x) & -I\end{array}\right|,$$

I – единичная матрица размерности $(n\times n)$,

$$E_\nu(x)=\left|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -E_{\nu(m+1)}(T,x)\\ E_{\nu1}(t_1,x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & E_{\nu2}(t_2,x) & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_{\nu m}(t_m,x) & 0\end{array}\right|,$$

$F_\nu(x)=\big(-F_{\nu(m+1)}(T,x),F_{\nu1}(t_1,x)-\varphi_1(x),\dots,F_{\nu m}(t_m,x)-\varphi_m(x)\big)'$,
$H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w})=\big(-H_{\nu(m+1)}(T,x,\widetilde{u}_{m+1},\widetilde{w}_{m+1}),H_{\nu1}(t_1,x,\widetilde{u}_1,\widetilde{w}_1),\dots,H_{\nu m}(t_m,x,\widetilde{u}_m,\widetilde{w}_m)\big)'$,
$G_\nu(x,\widetilde{v})=\big(-G_{\nu(m+1)}(T,x,\widetilde{v}_{m+1}),G_{\nu1}(t_1,x,\widetilde{v}_1),\dots,(G_{\nu m}(t_m,x,\widetilde{v}_m)\big)'$.

Если известны функции $\lambda_r(x)$, $\lambda_r'(x)$, $r=\overline{1,m+1}$, то решая систему интегральных уравнений (10) – (12) найдем функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$ и из системы функций $(\lambda_r(x)+\widetilde{u}_r(t,x))$ получим решение исходной задачи. Если известны функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$, то решая уравнение (15) при условии (14), найдем $\lambda_r'(x)$, $\lambda_r(x)$ и снова из системы функций $(\lambda_r(x)+\widetilde{u}_r(t,x))$ найдем решение задачи (1) – (4).

Здесь неизвестными являются как функции $\lambda_r(x)$, $\lambda_r'(x)$, так и функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решения функциональных соотношений (10)-(12), (15) с условием (14) находятся как пределы последовательностей $\{\lambda_r^{(k)}(x)\}$, $\{\lambda_r'^{(k)}(x)\}$, $\{\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)\}$, определяемых по следующему алгоритму:

0 - Шаг. Предполагая в правой части (15) $\lambda_r(x)=\psi(t_{r-1})$, $\widetilde{u}_r(t,x)=\psi(t)-\psi(t_{r-1})$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dot{\psi}(t)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=0$, и считая, что матрица $Q_\nu(x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ из уравнения (15) найдем $\{\lambda_r'^{(0)}(x)\}$, $r=\overline{1,m+1}$. Используя условия (14), находим функции $\lambda_r^{(0)}(x)$: $\lambda_r^{(0)}(x)=\psi(t_{r-1})+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(0)}(\xi)d\xi$. Из системы интегральных уравнений (10) – (12), где $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $\lambda_r'(x)=\lambda_r'^{(0)}(x)$, определим функции $\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$.

1 - Шаг. Из системы (15), где в правой части $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)=\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, в силу обратимости $Q_\nu(x)$ при $x\in[0,\omega]$ найдем $\{\lambda_r'^{(1)}(x)\}$, $r=\overline{1,m+1}$. Вновь используя условия (14), находим $\lambda_r^{(1)}(x)$: $\lambda_r^{(1)}(x)=\psi(t_{r-1})+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(1)}(\xi)d\xi$. Из систем интегральных уравнений (10) – (12), где $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, $\lambda_r'(x)=\lambda_r'^{(1)}(x)$, определим функции $\widetilde{u}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$. И т.д.

Метод введения функциональных параметров процесс нахождения неизвестных функций разбивает на два этапа:

1) нахождение введенных функциональных параметров $\lambda_r(x)$ $\lambda_r'(x)$ из соотношения (15) с условием (14).

2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$ из системы интегральных уравнений (10) – (12).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1) – (4).

Теорема 1. *Пусть при некотором* ν, $\nu\in\mathbb{N}$, $(n(m+1)\times n(m+1))$ *– матрица* $Q_\nu(x)$ *обратима при всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства*

a) $||[Q_\nu(x)]^{-1}||\le\gamma_\nu(x)$,

b) $q_\nu(x)=\gamma_\nu(x)\cdot\left[e^{\alpha(x)h}-1-\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right]\le\chi<1$,

где $\gamma_\nu(x)$ *– положительная, непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция,* $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||A(t,x)||$, $h=\max\limits_{i=\overline{1,m+1}}(t_i-t_{i-1})$, $\chi - const$.

Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1) – (4) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 1. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$||E_\nu(x)||\le\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}h,$$

$$||F_\nu(x)||\le\max_{i=\overline{1,m}}||\varphi_i(x)||+\max_{t\in[0,T]}||f(t,x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}h,$$

$$||H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w})||\le\max_{r=\overline{1,m+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||B(t,x)||\cdot||\widetilde{w}_r(t,x)||+||C(t,x)||\cdot||\widetilde{u}_r(t,x)||\Big]\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}h\le$$

$$\le b_0(x)\max_{r=\overline{1,m+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{w}_r(t,x)||+||\widetilde{u}_r(t,x)||\Big], \qquad (16)$$

где $b_0(x)=\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\max\{\max\limits_{t\in[0,T]}||B(t,x)||,\max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\}h.$

Пусть $\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$ – множество непрерывных и ограниченных на Ω_r функций $\widetilde{u}_r:\Omega_r\longrightarrow R^n$.

В силу условия а) при фиксированных $\lambda_r(x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, система функций $\{\lambda'_r(x)\}, r=\overline{1,m+1}$, определяется единственным образом из уравнения (15) и

$$\lambda'(x)=-[Q_\nu(x)]^{-1}\Big\{E_\nu(x)\lambda(x)+F_\nu(x)+H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w})+G_\nu(x,\widetilde{v})\Big\},\quad x\in[0,\omega],\ \lambda\in R^{nN}.$$

Для любого r $(r=\overline{1,m+1})$ при фиксированных $\lambda_r(x)\in C([0,\omega],R^n)$, $\lambda'_r(x)\in C([0,\omega],R^n)$ система интегральных уравнений (10) – (12) имеет единственное решение $\{\widetilde{u}_r(t,x),\widetilde{w}_r(t,x),\widetilde{v}_r(t,x)\}$, где $\widetilde{u}_r$, $\widetilde{w}_r$, $\widetilde{v}_r$ принадлежат $\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$ и справедливы оценки:

$$\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||\widetilde{v}_r(t,x)||\le\Big[e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}-1\Big]||\lambda'_r(x)||+(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||f(t,x)||+$$
$$+(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,x)||\cdot||\lambda_r(x)||+$$
$$+(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}\max\Big\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||B(t,x)||,\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,x)||\Big\}\times$$
$$\times\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{u}_r(t,x)||+||\widetilde{w}_r(t,x)||\Big],\tag{17}$$

$$\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{u}_r(t,x)||+||\widetilde{w}_r(t,x)||\Big]\le\Big\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||\psi(t)-\psi(t_{r-1})||+$$
$$+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||\dot{\psi}(t)||+(1+h)\int\limits_0^x\Big[1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\Big]\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||f(t,\xi)||d\xi+$$
$$+(1+h)\int\limits_0^x\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}||\lambda'_r(\xi)||d\xi+(1+(t_r-t_{r-1}))\int\limits_0^x\Big[1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\Big]\times$$
$$\times\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,\xi)||\cdot||\lambda_r(\xi)||d\xi\Big\}\cdot\exp\Big\{(1+t_r-t_{r-1})\int\limits_0^x(1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})})\times$$
$$\times\max\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||B(t,\xi)||,\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,\xi)||\}d\xi\Big\}.\tag{18}$$

Из интегрального уравнения (11) при помощи неравенства Беллмана-Гронуолла для разностей последовательных приближений $\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(t,x)$ получаем оценку:

$$||\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(t,x)||\le\Big[e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})}-1\Big]||\lambda_r'^{(k)}(x)-\lambda_r'^{(k-1)}(x)||+$$
$$+(t-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})}\Big(\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\max\{||B(t,x)||,||C(t,x)||\}\times$$
$$\times\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}_r^{(k-1)}(t,x)||+||\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}_r^{(k-1)}(t,x)||\Big]+$$

$$+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,x)||\cdot||\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)||\Big),\quad r=\overline{1,m+1}. \tag{19}$$

Для разностей последовательных приближений $\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)$, $\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}_r^{(k-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}_r^{(k-1)}(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, $k=1,2,\ldots$, с учетом неравенств (17) – (19) справедливы оценки:

$$||\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)||\le\int_0^x||\lambda_r'^{(k)}(\xi)-\lambda_r'^{(k-1)}(\xi)||d\xi, \tag{20}$$

$$\max_{r=\overline{1,m+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}_r^{(k-1)}(t,x)||+||\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}_r^{(k-1)}(t,x)||\Big]\le$$

$$\le\int_0^x a_0(\xi,x)\max_{r=\overline{1,m+1}}||\lambda_r'^{(k)}(\xi)-\lambda_r'^{(k-1)}(\xi)||d\xi, \tag{21}$$

где $a_0(\xi,x)=e^{a_1(x)}(1+t_r-t_{r-1})\Big[\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}+a_2(x)\Big]$,

$a_2(x)=\int\limits_0^x\Big[1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\Big]\max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,\xi)||d\xi$,

$a_1(x)=\int\limits_0^x(1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})})\max\Big[\max\limits_{t\in[0,T]}||B(t,\xi)||,\max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,\xi)||\Big]d\xi$,

$$||\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(t,x)||\le\Big[e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})}-1\Big]||\lambda_r'^{(k)}(x)-\lambda_r'^{(k-1)}(x)||+$$

$$+(t-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})}\int_0^x\Big[\max\{\max_{t\in[0,T]}||B(t,x)||,\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\}a_0(\xi,x)+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\Big]\cdot||\lambda_r'^{(k)}(\xi)-\lambda_r'^{(k-1)}(\xi)||d\xi.$$

Тогда для разности $\lambda_r'^{(k+1)}(x)-\lambda_r'^{(k)}(x)$, принимая во внимание (16), имеем оценку:

$$\max_{r=\overline{1,m+1}}||\lambda_r'^{(k+1)}(x)-\lambda_r'^{(k)}(x)||\le||[Q_\nu(x)]^{-1}||\Big[||E_\nu(x)||\cdot\max_{r=\overline{1,m+1}}||\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)||+$$

$$+b_0(x)\max_{r=\overline{1,m+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}_r^{(k-1)}(t,x)||+||\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}_r^{(k-1)}(t,x)||\Big]+$$

$$+\max_{r=\overline{1,m+1}}\Big\{\int_{t_{r-1}}^{t_r}\alpha(x)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(x)\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(x)||\widetilde{v}_r^{(k)}(\tau_\nu,x)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(\tau_\nu,x)||d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1\Big\}\Big].$$

Подставив сюда (18) и вычисляя повторные интегралы, а также учитывая оценки (20), (21), имеем

$$\max_{r=\overline{1,m+1}}||\lambda_r'^{(k+1)}(x)-\lambda_r'^{(k)}(x)||\le\chi\max_{r=\overline{1,m+1}}||\lambda_r'^{(k)}(x)-\lambda_r'^{(k-1)}(x)||+$$

$$+\int_0^x b_1(\xi,x)\max_{r=\overline{1,m+1}}||\lambda_r'^{(k)}(\xi)-\lambda_r'^{(k-1)}(\xi)||d\xi, \tag{22}$$

где $b_1(\xi,x)=\gamma_\nu(x)\cdot\Big\{h\max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}+b_0(x)a_0(\xi,x)+$

$$+h\Big(e^{\alpha(x)h}-\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\Big)\Big[\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||+\max\{\max_{t\in[0,T]}||B(t,x)||,\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\}a_0(\xi,x)\Big]\Big\}$$

Равномерная сходимость последовательностей $\lambda_r'^{(k)}(x)$ к непрерывной на $x\in[0,\omega]$ функции $\lambda_r'^{*}(x)$ при всех $r=\overline{1,m+1}$ доказывается на основе одного следствия теоремы Теплица ($O.T\ddot{o}plitz$) [135, С.325] из теории пределов. Из неравенства (20) вытекает равномерная сходимость последовательности $\lambda_r^{(k)}(x)$ к функции $\lambda_r^*(x)\in C([0,\omega],R^n)$. На основе оценок (21), (19) следует равномерная относительно $(t,x)\in\Omega_r$ сходимость последовательностей $\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, соответственно к функциям $\widetilde{u}_r^*(t,x)$, $\widetilde{w}_r^*(t,x)$, $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ принадлежащих $\tilde{C}(\Omega_r,R^n)$. Очевидно, что функция $u^*(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций $\{\lambda_r^*(x)+\widetilde{u}_r^*(t,x)\}$, принадлежит $C(\bar{\Omega},R^n)$ и является решением задачи (1) – (4).

Докажем единственность решения задачи (1) – (4). Пусть существует два классических решения $u^*(t,x)$ и $u^{**}(t,x)$. Тогда соответствующие им системы пар $(\lambda_r^*(x),\widetilde{u}_r^*(t,x))$, $(\lambda_r^{**}(x),\widetilde{u}_r^{**}(t,x))$, $r=\overline{1,m+1}$, будут решениями многохарактеристической краевой задачи с параметрами (5) – (9). Функции $\lambda_r^*(x)$, $\lambda_r^{**}(x)$, $r=\overline{1,m+1}$, удовлетворяют системам:

$$\lambda'^{*}(x)=-[Q_\nu(x)]^{-1}\Big\{E_\nu(x)\lambda^*(x)+F_\nu(x)+H_\nu(x,\widetilde{u}^*,\widetilde{w}^*)+G_\nu(x,\widetilde{v}^*)\Big\},\qquad(23)$$

$$\lambda'^{**}(x)=-[Q_\nu(x)]^{-1}\Big\{E_\nu(x)\lambda^{**}(x)+F_\nu(x)+H_\nu(x,\widetilde{u}^{**},\widetilde{w}^{**})+G_\nu(x,\widetilde{v}^{**})\Big\}.\qquad(24)$$

Аналогично (17), (18) из системы интегральных уравнений (10) – (12) получим:

$$\sup_{t\in[_{r-1},t_r)}||\widetilde{v}_r^*(t,x)-\widetilde{v}_r^{**}(t,x)||\le\Big[e^{\alpha(x)h}-1\Big]||\lambda_r'^*(x)-\lambda_r'^{**}(x)||+$$

$$+he^{\alpha(x)h}\Big(\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,x)||\cdot||\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)||+\max\Big\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||B(t,x)||,\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,x)||\Big\}\times$$

$$\times\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{u}_r^*(t,x)-\widetilde{u}_r^{**}(t,x)||+||\widetilde{w}_r^*(t,x)-\widetilde{w}_r^{**}(t,x)||\Big]\Big),$$

$$\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[||\widetilde{u}_r^*(t,x)-\widetilde{u}_r^{**}(t,x)||+||\widetilde{w}_r^*(t,x)-\widetilde{w}_r^{**}(t,x)||\Big]\le$$

$$\le\Big\{(1+h)\int_0^x\alpha(\xi)he^{\alpha(\xi)h}||\lambda_r'^*(\xi)-\lambda_r'^{**}(\xi)||d\xi+(1+h)\int_0^x\Big[1+\alpha(\xi)he^{\alpha(\xi)h}\Big]\times$$

$$\times\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,\xi)||\cdot||\lambda_r^*(\xi)-\lambda_r^{**}(\xi)||d\xi\Big\}\cdot\exp\Big\{\int_o^x(1+\alpha(\xi)he^{\alpha(\xi)h})\times$$

$$\times\max\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||B(t,\xi)||,\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||C(t,\xi)||\}d\xi\Big\}.$$

Аналогично (20), (21) получим:

$$||\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)||\le\int_0^x||\lambda_r'^*(\xi)-\lambda_r'^{**}(\xi)||d\xi,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \Big[||\widetilde{u}_r^*(t,x)-\widetilde{u}_r^{**}(t,x)||+||\widetilde{w}_r^*(t,x)-\widetilde{w}_r^{**}(t,x)||\Big] \le$$

$$\le \int\limits_0^x a_0(\xi,x) \max_{r=\overline{1,N}} ||\lambda_r'^*(\xi)-\lambda_r'^{**}(\xi)||d\xi. \qquad (25)$$

Тогда из систем (23), (24) для разностей $\lambda_r'^*(x)-\lambda_r'^{**}(x)$ справедлива оценка:

$$\max_{r=\overline{1,m+1}} ||\lambda_r'^*(x)-\lambda_r'^{**}(x)|| \le \chi \max_{r=\overline{1,N}} ||\lambda_r'^*(x)-\lambda_r'^{**}(x)|| + \int\limits_0^x b_1(\xi,x) \max_{r=\overline{1,m+1}} ||\lambda_r'^*(\xi)-\lambda_r'^{**}(\xi)||d\xi,$$

отсюда

$$\max_{r=\overline{1,m+1}} ||\lambda_r'^*(x)-\lambda_r'^{**}(x)|| \le \frac{1}{1-\chi}\int\limits_0^x \bar{b}_1(\xi) \max_{r=\overline{1,N}} ||\lambda_r'^*(\xi)-\lambda_r'^{**}(\xi)||d\xi, \qquad (26)$$

где $\bar{b}_1(\xi)=\max\limits_{x\in[0,\omega]} b_1(\xi,x)$. Из (28) с помощью неравенства Гронуолла-Беллмана имеем: $\max\limits_{r=\overline{1,m+1}} ||\lambda_r'^*(x)-\lambda_r'^{**}(x)||=0$ и в силу соотношений

$$\lambda_r^*(x)=\psi(t_{r-1})+\int\limits_0^x \lambda_r'^*(\xi)d\xi, \qquad \lambda_r^{**}(x)=\psi(t_{r-1})+\int\limits_0^x \lambda_r'^{**}(\xi)d\xi$$

получим $\lambda_r^*(x)=\lambda_r^{**}(x)$, $r=\overline{1,m+1}$. Тогда из неравенства (25) вытекает, что $\widetilde{u}_r^*(t,x)=\widetilde{u}_r^{**}(t,x)$ при всех $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,m+1}$, и $\widetilde{u}^*(t,x)=\widetilde{u}^{**}(t,x)$. Теорема 1 доказана.

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является существование числа $\nu\in\mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$. Так как $(n(m+1)\times n(m+1))$ – матрица $Q_\nu(x)$ имеет специальную блочно - ленточную структуру, то справедлива

Лемма. $(n(m+1)\times n(m+1))$ *– матрица* $Q_\nu(x)$ *при* $x\in[0,\omega]$ *обратима тогда и только тогда, когда обратима* $(n\times n)$ *– матрица* $M_\nu(x)=-\prod\limits_{s=m+1}^{1}[I+D_{\nu i}(t_i,x)]$.

Цитированная литература

1. **Tkach A.B.** //Nonlinear Oscillations. 2001. Vol.8, No 2. C. 278 – 288.
2. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** //Дифференц. уравнения. 2003. Т.39, № 10. С. 1343 – 1354.
3. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** //Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295 – 297.
4. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** //Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337 – 346.
5. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М, 1969. Т. II.

Поступила в редакцию 10.07.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 28 – 33*

УДК 517.962

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

К. Б. Бопаев, Е. В. Ескендирова

Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова
040009 Талдыкорган ул. Жансугурова, 187а helen_yeskendirova@mail.kz

В предлагаемой работе с помощью суммарно-разностных неравенств исследуется задача устойчивости нелинейных разностно-динамических систем по первому приближению.

Разностные и суммарно-разностные неравенства, как инструмент исследования, применяются в качественной теории динамических систем, то есть с помощью известных параметров, входящих в разностно-динамическую систему, разрабатываются дискретные неравенства, с помощью которых получают информацию об устойчивости и ограниченности решения.

В предлагаемой работе получен результат об устойчивости по первому приближению решения разностно-динамической системы по различным предположениям относительно нелинейности, которые ранее не рассматривались.

1. Рассмотрим нелинейную РДС

$$x_{n+1} = Ax_n + f(n, x_n), \quad n > 0, \quad x_n \in R^n, \tag{1.1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$ матрица; $f(n, x_n)$ – непрерывная функция в области

$$\|x_n\| < \rho, \quad n \in N, \quad \rho = const > 0 \quad (\rho = +\infty)\,. \tag{1.2}$$

Предположим, что шар $S\left(\rho^0\right) = \left\{x \in R^n, \|x_n\| \le \rho^0\right\} \subset D$ и существует функция $r\left(n\right)$ такая, что

$$\|f(n, x_n)\| \le r\left(n\right) \cdot \|x_n\|\,, \quad \forall \left(n, x_n\right) \in N \times S\left(\rho^0\right). \tag{1.3}$$

Отметим, что в качестве функции $r\left(n\right)$ в неравенстве (1.3) можно выбрать $max\frac{\|f(n,x_n)\|}{\|x_n\|}$ при $x_n \in S\left(\rho^0\right)$.

Теорема 1.1 *Пусть матрица A в системе (1.1) такая, что выполняется оценка:*

$$\left\|A^{n-n_0}\right\| \le M \exp\left[-\alpha\left(n - n_0\right)\right], \quad \alpha > 0, \quad M > 0. \tag{1.4}$$

Keywords: *difference and netly difference inequalities, difference-dynamical systems, stability of non-linear difference-dynamical systems.*

2000 Mathematics Subject Classification: 45J5

Если вектор-функция $f(n, x_n)$, удовлетворяющая условию (1.3), существует и если для функции $r(n)$, удовлетворяющей (1.3), существует постоянная d_0, что выполняется оценка

$$r(n) \le d_0, \tag{1.5}$$

где $0 < d_0 < \alpha M^{-1}$, то нулевое решение (1.1) асимптотически устойчиво по первому приближению.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y(n) = \exp\left[M(n - n_0)\left(\frac{n}{n - n_0}\sum_{k=n_0}^{n} r(k) - \frac{\alpha}{M}\right)\right], \quad \forall n \in N_{n_0}. \tag{1.6}$$

При выполнении оценки (1.5) функция $y(n) \to 0$ при $n \to \infty$, вследствие чего $sup y(n) < +\infty$ при $n \in N$.

Пусть задано $\varepsilon \in (0, a)$, $\quad H = const > 0$ или $H = +\infty$. По заданному ε построим число $\delta = \frac{\varepsilon_1}{ML}$, где $L = sup y(n)$ при $n \in N_{n_0}$, $\quad \varepsilon_1 = min\left(\varepsilon, \rho^0\right)$.

При данном ε_1 для функции

$$\psi(n, x_n) = \begin{cases} f(n, x_n) \text{ при } \|x_n\| \le \varepsilon_1, \\ f\left(n, \varepsilon_1 \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \text{ при } \|x_n\| > \varepsilon_1. \end{cases}$$

Это следует из того, что

$$\left\|\varepsilon_1 \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| = \varepsilon_1 \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = \varepsilon_1 \quad , \forall x_n \in R^m,$$

а при $\|x_n\| \le \varepsilon_1 \le \rho^0$ выполняется неравенство (1.3).

Далее, рассмотрим решение $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$, $x_{n_0} \in S_\delta \subset S\left(\rho^0\right)$, РДС

$$x_{n+1} = Ax_n + \psi(n, x_n). \tag{1.7}$$

Из того, что

$$x_n = A^{(n-n_0)} x_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} A^{(n-n_0)} \psi(j, x_j) \tag{1.8}$$

и

$$\|\psi(n, x_n)\| \le r(n) \cdot \|x_n\|$$

получаем

$$\|x_n\| \le M \exp\left[-\alpha(n - n_0)\right] \|x_{n_0}\| + M \sum_{j=n_0}^{n-1} \exp\left[-\alpha(n - j)\right] \cdot r(j) \cdot \|x_j\|. \tag{1.9}$$

Учитывая, что $\|x_{n_0}\| < \varepsilon_1 (ML)^{-1}$ и умножая обе стороны неравенства (1.9) на выражение $\exp(\alpha n)$, получаем

$$\|x_n\| \exp(\alpha n) \le M \exp(\alpha n) \cdot \exp\left[-\alpha(n - n_0)\right] \varepsilon_1 (ML)^{-1} +$$

$$+ M \exp(\alpha n) \sum_{j=n_0}^{n-1} \exp\left[-\alpha(n - j)\right] \cdot r(j) \cdot \|x_j\|,$$

$$u_n \le \varepsilon_1 L^{-1}\exp(\alpha n_0) + M\sum_{j=n_0}^{n-1} r(j)\,u(j), \tag{1.10}$$

где $u_n = \|x_n\|\exp(\alpha n)$.

Применяя к неравенству (1.10) теорему 3 из [1], находим:

$$u_n \le \varepsilon_1 L^{-1}\exp(\alpha n_0)\cdot\exp\left[M\cdot\sum_{j=n_0}^{n-1} r(j)\right]$$

или

$$u_n \le \varepsilon_1 L^{-1}\exp\left[M\cdot\sum_{j=n_0}^{n-1} r(j) + \alpha n_0\right],$$

переходя к оценке $\|x_n\|$, получаем:

$$\|x_n\|\exp(\alpha n) \le \varepsilon_1 L^{-1}\exp\left[M\cdot\sum_{j=n_0}^{n-1} r(j) + \alpha n_0\right],$$

$$\|x_n\| \le \exp(-\alpha n)\cdot\varepsilon_1 L^{-1}\exp\left[M\cdot\sum_{j=n_0}^{n-1} r(j) + \alpha n_0\right],$$

$$\|x_n\| \le \varepsilon_1 L^{-1}\exp\left[M\cdot\sum_{j=n_0}^{n-1} r(j) - \alpha(n-n_0)\right].$$

Окончательно имеем:

$$x_n \le \varepsilon_1 L^{-1}\exp\left[M(n-n_0)\left(\frac{1}{n-n_0}\sum_{j=n_0}^{n} r(j) - \alpha M^{-1}\right)\right] =$$

$$= \varepsilon_1 L^{-1} y_n \le \varepsilon_1 L^{-1}\sup y_n = \varepsilon_1.$$

Этим показано, что при $x_{n_0}\in S_\delta$ имеем $x_n \in S_\delta \quad \forall n\in N_{n_0}$ для решения системы (1.7). Но при $x_n\in S_\delta$ выполняется тождество:

$$\psi(n,x_n) = f(n,x_n).$$

Поэтому x_n является также решением системы (1.1).

Отсюда следует, что при $\|x_{n_0}\| < \delta$ для всех $n_0\in N$ справедлива оценка:

$$\|x_n\| < \varepsilon_1 \le \varepsilon,$$

т.е. состояние $x=0$ устойчиво по Ляпунову [2].

Следствие 1.1 *Если* $\|\lambda_i(A)\| < 1, \quad i=\overline{1,m}$, *вектор - функция* $f(n,x_n)$ *удовлетворяет оценке (1.3) и* $r(n)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *то состояние равновесия* $x_n = 0$ *РДС (1.1) асимптотически устойчиво.*

Следствие 1.2 *Если* $\|\lambda_i(A)\| < \upsilon < 1, \quad i=\overline{1,m}$, *и вектор - функция* $f(n,x_n)$ *непрерывна в* $S(\rho) \quad t\ge 0$, *а также* $\frac{\|f(n,x_n)\|}{\|x_n\|}\to 0$ *при* $\|x_n\|\to 0$, *то состояние равновесия* $x_n=0$ *РДС (1.1) асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.2 *Пусть решение РДС*

$$x_{n+1} = Ax_n + f(n, x_n) + q\,(n, x_n)$$

существует на N, где A – постоянная матрица, f и g – непрерывны и ограничены на $N \cup \{0\}$ при $\|x_n\| < \infty$.

Предположим, что

а) матрица A имеет все корни с $\|\lambda_i\,(A)\| < \delta < 1, \quad i = \overline{1, m}$;

б) равномерно по x_n при достаточно малом значении $\|x_n\|$ выполняется соотношение $\|q\,(n, x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$;

в) для любого $\varepsilon > 0$ положительные числа $\delta = \delta\,(\varepsilon)$ и $l = l\,(\varepsilon) \in N$ такие, что $\|f(n, x_n)\| \le \varepsilon\,\|x_n\|$ при $\|x_n\| \le \delta, \quad n \ge l.$

Тогда существует $n_0 > 0$ такое, что при достаточно малом $\|x_{n_0}\|$ решения $x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

2. Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = A\,(n)\,x_n + f(n, x_n) \quad , \quad n > 0, \quad x_n \in R^n, \tag{2.1}$$

в которой вектор-функция $f(n, x_n)$ удовлетворяет предположениям, что в РДС (1.1): $A\,(n)$ – постоянная $(m \times m)$ матрица с непрерывными при $m \ge 1$ элементами.

Если линейная РДС

$$y_{n+1} = A\,(n)\,y_n \tag{2.2}$$

приводима в смысле [3], то (2.1) приводится к следующей:

$$y_{n+1} = By_n + Q^{-1}\,(n+1)\,f(n, Q(n)y_n), \tag{2.3}$$

где

$$B = Q^{-1}\,(n+1)\,A\,(n)\,Q\,(n)$$

– постоянная $(m \times m)$ матрица, причем

$$\sup_{n \ge 1} \|Q\,(n)\| = M < +\infty; \quad \sup_{n \ge 1} \left\|Q^{-1}\,(n)\right\| = m < +\infty.$$

Теорема 2.1 *Пусть РДС (2.2) устойчива в N_{n_0} и неотрицательная функция $r\,(n)$ в неравенстве (1.3) удовлетворяет условию:*

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} r\,(j) < +\infty, \quad \forall n_0 \in N. \tag{2.4}$$

Тогда существует постоянная $k > 0$ такая, что для каждого решения x_n РДС (2.1) справедлива оценка:

$$\|x_n\| \le k \cdot \|Y_n\| \cdot \|x_{n_0}\|\,, \quad \forall n \in N_{n_0}, \forall n_0 \in N, \tag{2.5}$$

где Y_n – фундаментальная матрица множества решения РДС (2.2).

Доказательство. На основе формулы в [4]

$$x_n = X_n x_{n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1} X_n X_j^{-1} f\,(j, x_j)$$

получим

$$z_n \le \|x_{n_0}\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} M^2 r\,(j) z_j, \tag{2.6}$$

где $z_n = \|x_n\| \cdot \left\|Y_n^{-1}\right\|^{-1}$, отсюда по теореме из [1] находим:

$$\|x_n\| \le k \cdot \|Y_n\| \cdot \|x_{n_0}\|, \quad \forall n \in N_{n_0}, \quad \forall n_0 \in N.$$

Теорема 2.2 *Пусть решение $y_n = 0$ РДС (2.2) равномерно устойчиво N_{n_0}, неотрицательная функция $r\,(n)$ из неравенства (1.3) удовлетворяет условию (2.4). При этом все решения $x\,(n; n_0, x_{n_0})$ РДС удовлетворяют условию (2.4) и они определены на N и можно указать такую постоянную k, что выполняется неравенство:*

$$\|x_n\| \le k \cdot \|x_{n_0}\|, \quad \forall n \in N_{n_0}, \forall n_0 \in N.$$

Кроме того, если $y_{n_0} = x_{n_0}$ $\forall n_0 \in N$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Доказательство. Из условия равномерной устойчивости РДС (2.2) [3] существует постоянная M, независящая от $n_0 \in N$, такая, что

$$\|Y_n\| \le M, \quad \|K\,(n, n_0)\| = \left\|Y_n \cdot Y_{n_0}^{-1}\right\| \le M \quad \forall n \in N_{n_0}, \forall n_0 \in N. \tag{2.7}$$

На основе представления

$$x_n = Y_n x_{n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1} Y_n Y_j^{-1} f\,(j, x_j), \tag{2.8}$$

с учетом (2.7) получим оценку:

$$\|x_n\| \le M \cdot \|x_{n_0}\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} M r\,(j) \|x_j\|, \quad \forall n_0 \in N. \tag{2.9}$$

Отсюда по [1] имеем:

$$\|x_n\| \le M \cdot \|x_{n_0}\| \exp\left(\sum_{j=n_0}^{n-1} M r\,(j)\right), \quad \forall n_0 \in N.$$

Второе утверждение теоремы следует из того, что вследствие соотношения $y_n = K\,(n, n_0)\, y_{n_0} \to 0$ при $n \to \infty$ для заданного $\varepsilon > 0$ существует $l > n_0$ такое, что

$$\|y_n\| \le M \cdot \|y_{n_0}\| \le \varepsilon$$

при

$$n \ge n_0 + l.$$

Следовательно,

$$\|x_n\| \le \varepsilon \cdot \exp\left(\sum_{j=n_0}^{n-1} M r\,(j)\right) \le K_1 \cdot \varepsilon,$$

где $K_1 = const$.

Цитированная литература

1. **Бопаев К.Б.** //University Annual Applied Mathematics. 1982. V. 18, № 3. P. 91 – 100.

2. **Бромберг П.В.** Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., 1967.

3. **Ескендирова Е.В.** //Сборник статей Международной научной конференции молодых ученых "Наука и образование-2008". Астана, 2008. С. 121 – 123.

4. **Халанай А., Векслер Д.** Качественная теория импульсных систем. М., 1971.

Поступила в редакцию 18.08.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 34 – 44*

УДК 517.95

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ж.К. Джобулаева

Институт Математики МОН РК
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125

При решении нелинейных задач со свободной границей с двумя малыми параметрами при старших членах в условиях сопряжения для системы параболических уравнений возникает модельная задача с малыми параметрами $\kappa > 0$, $æ > 0$. Для нее доказаны существование, единственность, коэрцитивные оценки решения в пространстве Гельдера с постоянными, не зависящими от малых параметров κ и $æ$.

В работе изучается задача, которая возникает при решении нелинейной задачи со свободной границей с двумя малыми параметрами $æ > 0$, $\kappa > 0$ для системы параболических уравнений. Задача описывает процесс фазовых переходов (плавление, кристализацию) вещества, в котором содержится примесь с концентрацией c_1 и c_2 в жидкой и твердой фазы; u_1, u_2 – температура жидкой и твердой фазы, ψ – свободная граница.

Это задача позволит получить разрешимость нелинейной задачи со свободной границей для системы параболических уравнений, а также задач, в которых свободная граница задана неявно.

Двухфазная задача Стефана с одним малым параметром для уравнения параболического типа рассматривалась в работе Бижановой Г.И. [1].

Пусть $D_1 = \{x \mid x < 0\}$, $D_2 = \{x \mid x > 0\}$, $D_{jT} = D_j \times (0,T)$, $j = 1,2$, $\sigma_T = (0,T)$.

Требуется определить функции $u_j(x,t)$, $c_j(x,t)$, $j = 1,2$, и $\psi(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\partial_t u_j - a_j \partial_x^2 u_j - \alpha_j \psi' = f_j(x,t) \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j = 1,2, \tag{1}$$

$$\partial_t c_j - a_{j+2} \partial_x^2 c_j - \beta_j \psi' = g_j(x,t) \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j = 1,2, \tag{2}$$

Keywords: *parabolic equation, Stefan problem, small parameter, uniform estimates, Holder space*
2000 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

начальным условиям

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \quad u_j\big|_{t=0} = 0, \quad c_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_j,\ j = 1, 2, \tag{3}$$

и условиям сопряжения на границе $x = 0, \quad t \in (0, T)$

$$(u_1 - u_2)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \tag{4}$$

$$(c_1 - \gamma_1 u_1)\big|_{x=0} = \varphi_2(t), \quad (c_2 - \gamma_2 u_2)\big|_{x=0} = \varphi_3(t), \tag{5}$$

$$(\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2 \partial_x u_2)\big|_{x=0} + \kappa \psi' = q_1(t), \tag{6}$$

$$(k_1 \partial_x c_1 - k_2 \partial_x c_2)\big|_{x=0} - \text{æ} \psi' = q_2(t), \tag{7}$$

где все коэффициенты постоянные, $a_j,\ a_{j+2},\ \lambda_j,\ k_j,\ \gamma_j > 0,\ j = 1, 2,\ \kappa,\ \text{æ}$ – положительные; $\partial_t = \partial/\partial_t,\ \partial_x = \partial/\partial_x,\ \partial_x^2 = \partial^2/\partial_{x^2},\ \psi^{'} = \partial\psi/\partial t$.

Эта задача будет изучена в пространствах Гельдера $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT}),\ \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$ функций $v(x,t),\ \psi(t)$ с нормами $|v|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)},\ |\psi|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}$, удовлетворяющих условиям [2]

$$\partial_t^k v\big|_{t=0} = 0, \quad d^k\psi/dt^k\big|_{t=0} = 0,\ k = 0, 1.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < \kappa \le \kappa_0,\ 0 < \text{æ} \le \text{æ}_0$ *и выполняются условия (27).*

Для любых функций $f_j \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{\alpha,\ \alpha/2}(\overline{D}_{jT}),\ g_j \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{\alpha,\ \alpha/2}(\overline{D}_{jT}),\ q_j \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T),\ j = 1, 2,\ \varphi_k \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T),\ k = 1, 2, 3,$ *задача (1) - (7) имеет единственное решение* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT})$, $c_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT}), \quad \psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T), \quad (\kappa + \text{æ})\psi' \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, *и для решения справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} (|u_j|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)} + |c_j|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)}) + |\psi|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)} + |(\kappa + \text{æ})\psi'|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \le$$

$$\le C_1 \Bigg(\sum_{j=1}^{2} (|f_j|_{D_{jT}}^{(\alpha)} + |g_j|_{D_{jT}}^{(\alpha)} + |q_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}) + \sum_{k=1}^{3} |\varphi_k|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)} \Bigg), \tag{8}$$

где постоянная C_1 *не зависит от* κ *и* æ.

Сведем (1) – (7) к задаче с однородными уравнениями и граничными условиями (4), (5). Для этого построим вспомогательные функции $V_j,\ Z_j,\ j = 1, 2,$ как решения следующих первых краевых задач для параболических уравнений:

$$\partial_t V_1 - a_1 \partial_x^2 V_1 = f_1(x,t) \quad \text{в} \quad D_{1T}, \quad V_1\big|_{t=0} = 0, \quad V_1\big|_{x=0} = \varphi_1(t); \tag{9}$$

$$\partial_t V_2 - a_2 \partial_x^2 V_2 = f_2(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T}, \quad V_2\big|_{t=0} = 0, \quad V_2\big|_{x=0} = 0; \tag{10}$$

$$\partial_t Z_1 - a_3 \partial_x^2 Z_1 = g_1(x,t) \quad \text{в} \quad D_{1T}, \tag{11}$$

$$Z_1\big|_{t=0} = 0, \quad Z_1\big|_{x=0} = \varphi_2(t) + \gamma_1 \varphi_1(t); \tag{12}$$

$$\partial_t Z_2 - a_4 \partial_x^2 Z_2 = g_2(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T}, \quad Z_2\big|_{t=0} = 0, \quad Z_2\big|_{x=0} = \varphi_3(t). \tag{13}$$

Каждая из задач имеет единственное решение

$$V_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(D_{jT}), \quad Z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(D_{jT}), \quad j = 1, 2, \tag{14}$$

удовлетворяющее следующим оценкам [2]:

$$|V_1|^{(2+\alpha)}_{D_{1T}} \le C_2\big(|f_1|^{(\alpha)}_{D_{1T}} + |\varphi_1|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\big), \quad |V_2|^{(2+\alpha)}_{D_{2T}} \le C_3|f_2|^{(\alpha)}_{D_2T}, \tag{15}$$

$$|Z_1|^{(2+\alpha)}_{D_{1T}} \le C_4\big(|g_1|^{(\alpha)}_{D_{1T}} + \sum_{k=1}^{2}|\varphi_k|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\big), \quad |Z_2|^{(2+\alpha)}_{D_{2T}} \le C_5\big(|g_2|^{(\alpha)}_{D_{2T}} + |\varphi_3|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\big). \tag{16}$$

Затем в задаче (1) – (7) произведем замену

$$u_j(x,t) = v_j(x,t) + V_j(x,t) + \alpha_j\psi(t), \quad c_j(x,t) = z_j(x,t) + Z_j(x,t) + \beta_j\psi(t), \quad j=1,2, \tag{17}$$

где $v_j(x,t), z_j(x,t),\ j=1,2,$ – новые неизвестные функции. Учитывая, что построенные функции удовлетворяют уравнениям и условиям (9) – (13), получим задачу для нахождения функций $v_j,\ z_j,\ j=1,2,$ и $\psi:$

$$\partial_t v_j - a_j\partial_x^2 v_j = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j=1,2, \tag{18}$$

$$\partial_t z_j - a_{j+2}\partial_x^2 z_j = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j=1,2, \tag{19}$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \quad v_j\big|_{t=0} = 0, \quad z_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j=1,2, \tag{20}$$

и условиям на границе $x=0, \quad t\in(0,T):$

$$v_1\big|_{x=0} + \alpha_1\psi = v_2\big|_{x=0} + \alpha_2\psi, \tag{21}$$

$$(z_1-\gamma_1 v_1)\big|_{x=0} + \mu_1\psi = 0, \quad (z_2-\gamma_2 v_2)\big|_{x=0} + \mu_2\psi = 0, \tag{22}$$

$$(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2)\big|_{x=0} + \kappa\psi' = \Phi_1(t), \tag{23}$$

$$(k_1\partial_x z_1 - k_2\partial_x z_2)\big|_{x=0} - \text{æ}\psi' = \Phi_2(t), \tag{24}$$

где $\Phi_1(t) = q_1(t) - (\lambda_1\partial_x V_1 - \lambda_2\partial_x V_2)\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $\Phi_2(t) = q_2(t) - (k_1\partial_x Z_1 - k_2\partial_x Z_2)\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $\mu_j = \beta_j - \gamma_j\alpha_j, \quad j=1,2$, и справедливы оценки

$$|\Phi_1|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T} \le C_6\Big(\sum_{j=1}^{2}|f_j|^{(\alpha)}_{D_{jT}} + |q_1|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T} + |\varphi_1|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\Big), \tag{25}$$

$$|\Phi_2|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T} \le C_7\Big(\sum_{j=1}^{2}|g_j|^{(\alpha)}_{D_{jT}} + \sum_{k=1}^{3}|\varphi_k|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |q_2|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T}\Big). \tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть* $0<\kappa\le\kappa_0,\ 0<\text{æ}\le\text{æ}_0;$

$$\mu_j = \beta_j - \gamma_j\alpha_j > 0, \quad \mu_{j+2} = \beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0, \quad j=1,2. \tag{27}$$

Решение задачи (18) – (24) имеет вид:

$$\psi(t) = -\frac{1}{k_0}\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)d\tau, \tag{28}$$

$$v_j(x,t) = \frac{1}{k_0}\int_0^t(\text{æ}\Phi_1(\tau)+\kappa\Phi_2(\tau))K_j(x,t-\tau)d\tau + \frac{1}{k_0}\int_0^t F_j(\tau)G_j(x,t-\tau)d\tau,\ j=1,2, \tag{29}$$

$$z_j(x,t) = \frac{\gamma_j}{k_0}\int_0^t(\text{æ}\Phi_1(\tau)+\kappa\Phi_2(\tau))K_{j+2}(x,t-\tau)d\tau + \frac{\gamma_j}{k_0}\int_0^t F_{j+2}(\tau)G_{j+2}(x,t-\tau)d\tau,\ j=1,2, \tag{30}$$

где

$$k_0 = \kappa(k_1\gamma_1/\sqrt{a_3} + k_2\gamma_2/\sqrt{a_4}) + \text{æ}(\lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}), \tag{31}$$

$$\mu = k_2\lambda_2\mu_2/\sqrt{a_2}\sqrt{a_4} + k_1\lambda_1\mu_1/\sqrt{a_3}\sqrt{a_1} + k_2\lambda_1\mu_3/\sqrt{a_4}\sqrt{a_1} + k_1\lambda_2\mu_4/\sqrt{a_3}\sqrt{a_2}, \tag{32}$$

$$F(t) = \Phi_2(t)(\lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}) - \Phi_1(t)(k_1\gamma_1/\sqrt{a_3} + k_2\gamma_2/\sqrt{a_4}),$$

$$F_j(t) = \Phi_1(t)\big(k_1\mu_{3j-2}/\sqrt{a_3} + k_2\mu_{4-j}/\sqrt{a_4}\big) + \Phi_2(t)\lambda_{3-j}(-1)^{j-1}(\alpha_1-\alpha_2)/\sqrt{a_{3-j}},\ j=1,2, \tag{33}$$

$$F_{j+2}(t)=\Phi_1(t)k_{3-j}\big(\gamma_j\beta_{3-j}-\gamma_{3-j}\beta_j\big)/\sqrt{a_{5-j}}+\Phi_2(t)\big(\lambda_1\mu_{2j-1}/\sqrt{a_1}+\lambda_2\mu_{2(3-j)}/\sqrt{a_2}\big),\ j=1,2, \tag{34}$$

$$G(t) = -2\int_0^t \partial_x\Gamma(\mu\sigma/k_0, t-\sigma)d\sigma, \tag{35}$$

$$K_i(x,t) = -2a_i\int_0^\infty \partial_x\Gamma_i(\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0 + |x|, t-\sigma)e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma, \quad i=1-4, \tag{36}$$

$$G_i(x,t) = -2a_i\int_0^t \partial_x\Gamma_i(\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0 + |x|, t-\sigma)d\sigma, \quad i=1-4, \tag{37}$$

$$\Gamma_i(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a_i\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a_i t}}. \quad i=1-4. \tag{38}$$

Замечание. *Как видно из формулы (31), малые параметры κ и æ содержатся в k_0, в знаменателях решения (28) – (30) и в экспонентах функций Грина (35) – (37).*

Доказательство теоремы 2. Применим к задаче (18) – (24) преобразование Лапласа по переменной t [3]

$$\widetilde{F}(p) \equiv L[F] = \int_0^t F(t)e^{-pt}dt.$$

Тогда решение уравнений (18), (19) можем представить в виде:

$$\widetilde{v}_1(x,p) = A_1e^{r_1x}, \quad x<0, \quad \widetilde{v}_2(x,p) = A_2e^{-r_2x}, \quad x>0, \tag{39}$$

$$\widetilde{z}_1(x,p) = B_1e^{r_3x}, \quad x<0, \quad \widetilde{z}_2(x,p) = B_2e^{-r_4x}, \quad x>0, \tag{40}$$

где $r_i = \sqrt{p/a_i}$, $i=1-4$. Здесь $A_j = A_j(p)$, $B_{j+2} = B_{j+2}(p)$, $j=1,2$, – неизвестные функции, подлежащие определению.

Запишем условия (21) – (24) в области изображений Лапласа

$$(\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2)\big|_{x=0} + (\alpha_1-\alpha_2)\widetilde{\psi} = 0, \quad (\widetilde{z}_1-\gamma_1\widetilde{v}_1)\big|_{x=0} + \mu_1\widetilde{\psi} = 0, \quad (\widetilde{z}_2-\gamma_2\widetilde{v}_2)\big|_{x=0} + \mu_2\widetilde{\psi} = 0,$$

$$(\lambda_1\partial_x\widetilde{v}_1 - \lambda_2\partial_x\widetilde{v}_2)\big|_{x=0} + \kappa\widetilde{\psi} = \widetilde{\Phi}_1(p), \quad (k_1\partial_x\widetilde{z}_1 - k_2\partial_x\widetilde{z}_2)\big|_{x=0} - \text{æ}\widetilde{\psi} = \widetilde{\Phi}_2(p).$$

Подставляя в эти условия выражения (39), (40), найдем функции A_j, B_j, $\widetilde{\psi}$ и после некоторых преобразований решение задачи (18) – (24) в области изображений Лапласа запишется

$$\widetilde{\psi}(p) = -\frac{\widetilde{F}(p)}{k_0(p+\mu\sqrt{p}/k_0)}, \tag{41}$$

$$\widetilde{v}_j(x,p) = \left(\frac{\widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\sqrt{p}+\mu/k_0)} + \frac{\widetilde{F}_j(p)}{k_0(p+\mu\sqrt{p}/k_0)}\right)e^{-r_j|x|} := \widetilde{v}_{j1}(x,p) + \widetilde{v}_{j2}(x,p), \quad j=1,2, \tag{42}$$

$$\widetilde{z}_j(x,p) = \gamma_j\left(\frac{\widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\sqrt{p}+\mu/k_0)} + \frac{\widetilde{F}_{j+2}(p)}{k_0(p+\mu\sqrt{p}/k_0)}\right)e^{-r_{j+2}|x|}, \quad j=1,2, \tag{43}$$

где $F_k(t) = L^{-1}[\widetilde{F}_k(p)]$, $k=1-4$, определяются по формулам (33), (34).

Найдем обратное преобразование Лапласа функций (41) – (43). Рассмотрим $\widetilde{\psi}(p)$. Так как $Re(p+\mu\sqrt{p}/k_0)>0$ в силу условий $\mu>0,\ k_0>0,$ то $\widetilde{\psi}(p)$ можем представить в виде:

$$\widetilde{\psi}(p)=-\frac{1}{k_0}\widetilde{F}(p)\widetilde{G}(p),\quad \widetilde{G}(p)=\int_0^\infty e^{-(p+\mu\sqrt{p}/k_0)\sigma}d\sigma, \tag{44}$$

и обратное преобразование Лапласа функции (44) $L^{-1}[\widetilde{\psi}(p)]=\psi(t)$ запишется

$$\psi(t)=-\frac{1}{k_0}\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)d\tau. \tag{45}$$

Найдем функцию Грина $G(t)=L^{-1}[\widetilde{G}(p)]$, используя формулу свертки,

$$G(t)=L^{-1}\left[\int_0^\infty e^{-p\sigma}e^{-\sqrt{p}\mu\sigma/k_0}d\sigma\right]=\int_0^\infty d\sigma\int_0^t L^{-1}[e^{-p\sigma}](\tau)L^{-1}[e^{-\sqrt{p}\mu\sigma/k_0}](t-\tau)d\tau. \tag{46}$$

Применив формулы обратных преобразований Лапласа [3]

$$L^{-1}[e^{-\sqrt{p}\mu\sigma/k_0}]=\frac{1}{k_0}\frac{\mu\sigma}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{(\mu\sigma/k_0)^2}{4(t-\tau)}}=-2\partial_x\Gamma_i(x+\mu\sigma/k_0,t-\tau)\big|_{x=0}, \tag{47}$$

$$L^{-1}[e^{-p\sigma}]=\eta(\tau-\sigma)\delta(\tau-\sigma), \tag{48}$$

где $\Gamma_i(x,t)$ определяется в (38), $\delta(t-\sigma)$ – дельта - функция Дирака, $\eta(t-\sigma)$ – функция Хевисайда, найдем

$$G(t)=-2\int_0^t d\tau\int_0^\infty \eta(\tau-\sigma)\delta(\tau-\sigma)\partial_x\Gamma(\mu\sigma/k_0,t-\tau)d\sigma=-2\int_0^t d\tau\int_0^\tau \delta(\tau-\sigma)\partial_x\Gamma(\mu\sigma/k_0,t-\tau)d\sigma.$$

И поменяв порядок интегрирования, получим:

$$G(t)=-2\int_0^t d\sigma\int_\sigma^t \delta(\tau-\sigma)\partial_x\Gamma(x+\mu\sigma/k_0,t-\tau)\big|_{x=0}d\tau=-2\int_0^t \partial_x\Gamma(x+\mu\sigma/k_0,t-\sigma)\big|_{x=0}d\sigma.$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{v}_j(x,p),\ j=1,2,$ определяемую формулой (42). Найдем обратные преобразования $L^{-1}[\widetilde{v}_{j1}(x,p)]=v_{j1}(x,t),\ L^{-1}[\widetilde{v}_{j2}(x,p)]=v_{j2}(x,t)$. Так как $Re(\sqrt{p}+\mu/k_0)>0$ в силу условий $\mu>0,\ k_0>0$, $\widetilde{v}_{j1}(x,p)$ можем представить в виде:

$$\widetilde{v}_{j1}(x,p)=\frac{1}{k_0}\widetilde{\Phi}(p)\widetilde{K}_j(x,p),\ \widetilde{K}_j(x,p)=\int_0^\infty e^{-\sqrt{p}(\sigma+|x|/\sqrt{a_j})}e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma,\ j=1,2. \tag{49}$$

Пользуясь (47) и формулой свертки, найдем $L^{-1}[\widetilde{K}_j(x,p)]=K_j(x,t)$

$$K_j(x,t)=\int_0^\infty \frac{\sigma+|x|/\sqrt{a_j}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{(\sigma+|x|/\sqrt{a_j})^2}{4(t-\tau)}-\mu\sigma/k_0}d\sigma=$$

$$=-2a_j\int_0^\infty \partial_x\Gamma_j(\sqrt{a_j}\mu\sigma/k_0+|x|,t-\sigma)e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma,\ j=1,2, \tag{50}$$

и

$$v_{j1}(x,t)=\frac{1}{k_0}\int_0^t \Phi(\tau)K_j(x,t-\tau)d\tau,\ j=1,2. \tag{51}$$

Аналогично предыдущему вторую функцию $\widetilde{v}_{j2}(x,p)$ в (42) представим в виде:

$$\widetilde{v}_{j2}(x,p)=\frac{1}{k_0}\widetilde{F}_j(p)\widetilde{G}_j(x,p),\ \widetilde{G}_j(x,p)=\int_0^\infty e^{-p\sigma}e^{-\sqrt{p}(\mu\sigma/k_0+|x|/\sqrt{a_j})}d\sigma,\ j=1,2. \tag{52}$$

Привлекая соотношение (47), (48) и формулу свертки найдем обратное преобразование Лапласа функций Грина $G_j(x,t) = L^{-1}[\widetilde{G}_j(x,p)]$ и $v_{j2}(x,t) = L^{-1}[\widetilde{v}_{j2}(x,p)], j = 1,2,$

$$G_j(x,t) = \int_0^\infty L^{-1}\left[e^{-p\sigma}e^{-\sqrt{p}(\mu\sigma/k_0+|x|/\sqrt{a_j})}\right]d\sigma = -2a_j\int_0^t \partial_x\Gamma_j\big(\sqrt{a_j}\mu\sigma/k_0+|x|, t-\sigma\big)d\sigma. \quad (53)$$

$$v_{j2}(x,t) = \frac{1}{k_0}\int_0^t F_j(\tau)G_j(x,t-\tau)d\tau,\ j=1,2. \quad (54)$$

Заметим, что функции $K_j(x,t)$ и $G_j(x,t)$, определяемые формулами (50), (53), различны по своим свойствам (см. лемму 1). Из формул (42), (51) и (54) получим обратное преобразование функций $\widetilde{v}_j(x,p)$ (42) в виде:

$$v_j(x,t) = v_{j1}(x,t) + v_{j2}(x,t) \equiv \frac{1}{k_0}\int_0^t(æ\Phi_1(\tau)+\kappa\Phi_2(\tau))K_j(x,t-\tau)d\tau$$

$$-\frac{2a_j}{k_0}\int_0^t F_j(\tau)d\tau\int_0^{t-\tau}\partial_x\Gamma_j(\sqrt{a_j}\mu\sigma/k_0+|x|, t-\tau-\sigma)d\sigma,\ j=1,2. \quad (55)$$

Аналогично найдем обратное преобразование Лапласа функций $\widetilde{z}_j(x,p)$, определяемых формулой (43),

$$z_j(x,t) = \frac{\gamma_j}{k_0}\int_0^t(æ\Phi_1(\tau)+\kappa\Phi_2(\tau))K_{j+2}(x,t-\tau)d\tau + \frac{\gamma_j}{k_0}\int_0^t F_{j+2}(\tau)G_{j+2}(x,t-\tau)d\tau,\ j=1,2,$$

$$K_{j+2}(x,t) = -2a_{j+2}\int_0^\infty \partial_x\Gamma_{j+2}(\sqrt{a_{j+2}}\mu\sigma/k_0+|x|, t-\sigma)e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma,\ j=1,2,$$

$$G_{j+2}(x,t) = -2a_{j+2}\int_0^t \partial_x\Gamma_{j+2}(\sqrt{a_{j+2}}\mu\sigma/k_0+|x|, t-\sigma)d\sigma,\ j=1,2.$$

□

Лемма. *Пусть* $0<\kappa\le\kappa_0$, $0<æ\leæ_0$ *и выполняются условия (27). Для функций* $K_i(x,t)$, $G_i(x,t)$, $i=1-4$, *определяемых формулами (36), (37), справедливы оценки при* $t\in(0,T)$

$$|\ \partial_t^k\partial_x^m K_i(x,t)\ | \le C_8\frac{k_0}{t^{\frac{1+2k+m}{2}}}e^{-\frac{x^2}{16a_it}}, \quad (56)$$

$$|\ \partial_t^k\partial_x^m G_i(x,t)\ | \le C_9\frac{1}{b_1t^{\frac{1+2k+m}{2}}}e^{-\frac{b_2^2x^2}{t}} + C_{10}\frac{1}{(b_1^2t^2+b_2^2x^2)^{\frac{2k+m}{2}}}e^{-\frac{b_1^2t^2+b_2^2x^2}{t}},\ i=\overline{1,4}, \quad (57)$$

$$b_1 = \mu/(\sqrt{8}k_0),\ b_2 = 1/\sqrt{8a_i}, \quad (58)$$

где постоянные $C_8 - C_{10}$ *не зависят от* κ *и* $æ$.

Малые параметры κ и $æ$ содержится в k_0 (см. (31)).

Доказательство. Оценим производные функций $K_i(x,t)$, $G_i(x,t)$

$$\partial_t^k\partial_x^m K_i(x,t) = -2a_i\int_0^\infty \partial_t^k\partial_x^{m+1}\Gamma_i(\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0+|x|, t-\sigma)e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma, \quad (59)$$

$$\partial_t^k\partial_x^m G_i(x,t) = -2a_i\int_0^t \partial_t^k\partial_x^{m+1}\Gamma_i(\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0+|x|, t-\sigma)d\sigma,\ i=\overline{1,4}. \quad (60)$$

Применяя в (59) оценку фундаментального решения уравнения теплопроводности

$$|\partial_t^k\partial_x^{m+1}\Gamma_i(x,t)| \le C_{11}\frac{1}{t^{\frac{1+2k+m}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8a_it}},\ i=1-4, \quad (61)$$

и произведя замену переменной интегрирования $\frac{\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0+8\sqrt{a_i}t}{4\sqrt{a_i t}}=v$, будем иметь оценку (56)

$$|\partial_t^k\partial_x^m K_i(x,t)|\le C_{12}\int_0^\infty \frac{1}{t^{\frac{2+2k+m}{2}}}e^{-\frac{(\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0+|x|)^2}{8a_i t}}e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma$$

$$\le C_{12}\frac{1}{t^{\frac{2+2k+m}{2}}}e^{-\frac{x^2}{16a_i t}}\int_0^\infty e^{-\frac{a_i\mu^2\sigma^2}{16a_i k_0^2 t}}e^{-\mu\sigma/k_0}d\sigma\le C_{13}\frac{k_0}{t^{\frac{1+2k+m}{2}}}e^{-\frac{x^2}{16a_i t}}e^{4T}\int_{2\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2}dv.$$

Оценим производные функции $G_i(x,t)$ (60), также используя неравенство (61),

$$|\partial_t^k\partial_x^m G_i|\le C_{14}\int_0^t\frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{2+2k+m}{2}}}e^{-\frac{(\sqrt{a_i}\mu\sigma/k_0+|x|)^2}{8a_i(t-\sigma)}}d\sigma\le C_{15}\int_0^t\frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{2+2k+m}{2}}}e^{-\frac{a_i(\mu/k_0)^2\sigma^2+x^2}{8a_i(t-\sigma)}}d\sigma. \quad (62)$$

Последний интеграл в (62) подчиняется оценке при $b>2$:

$$J_b:=\int_0^t\frac{1}{(t-\sigma)^{b/2}}e^{-\frac{b_1^2\sigma^2+b_2^2x^2}{t-\sigma}}d\sigma\le C_9\frac{1}{b_1 t^{\frac{b-1}{2}}}e^{-\frac{b_2^2x^2}{t}}+C_{10}\frac{1}{(b_1^2t^2+b_2^2x^2)^{\frac{b-2}{2}}}e^{-\frac{b_1^2t^2+b_2^2x^2}{t}}. \quad (63)$$

Действительно, разобьем его на два по областям $(0,\ t/2)$ и $(t/2,\ t)$, в первом интеграле применим неравенства $1/(t-\sigma)\ge 1/t$ в экспоненте и $1/(t-\sigma)\le 2/t$, и произведем замену $b_1\sigma/\sqrt{t}=v$, а во втором - замену $A^2/(t-\sigma)=2\xi^2,\ A^2=b_1^2t^2+b_2^2x^2$, тогда

$$J_b=C_{16}\int_0^{t/2}(2/t)^{b/2}e^{-\frac{b_1^2\sigma^2+b_2^2x^2}{t}}d\sigma+C_{17}\frac{1}{A^{b-2}}\int_{A/\sqrt{t}}^\infty\xi^{b-3}e^{-2\xi^2}d\xi$$

$$\le C_{18}\frac{1}{b_1t^{(b-1)/2}}e^{-\frac{b_2^2x^2}{t}}\int_0^{b_1\sqrt{t}/\sqrt{2}}e^{-v^2}dv+C_{19}\frac{1}{A^{b-2}}e^{-A^2/t}\int_0^\infty\xi^{b-3}e^{-\xi^2}d\xi,\ b>2,$$

и мы получим оценку (63).

В дальнейшем нам потребуется оценка интеграла J_b при $b=3$

$$\int_0^t\frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}}e^{-\frac{b_1^2\sigma^2+b_2^2x^2}{t-\sigma}}d\sigma\le C_{20}\frac{1}{b_1t}e^{-\frac{b_2^2x^2}{t}},\ t\in[0,T]. \quad (64)$$

Применение в неравенстве (62) оценки (63) с $b=2k+m$ приведет к формуле (57). □

Теорема 3. *Пусть* $0<\kappa\le\kappa_0,\ 0<\text{æ}\le\text{æ}_0$. *Для любых функций* $\Phi_j(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $j=1,2,\ \alpha\in(0,\ 1)$, *задача (18)-(24) имеет единственное решение* $v_j(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT})$, $z_j(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT})$, $j=1,2$, $\psi(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $(\kappa+\text{æ})\psi'\in\overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ *и для него справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^2(|v_j|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)}+|z_j|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)})+|\psi|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}+|(\kappa+\text{æ})\psi'|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\le C_{21}\sum_{j=1}^2|\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \quad (65)$$

где постоянная C_{21} *не зависит от* κ *и* æ.

Доказательство. Оценим норму функций $v_j(x,t):=v_{j1}(x,t)+v_{j2}(x,t)$, определяемых формулами (55),

$$|v_j|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)}=|v_j|_{D_{jT}}+|\partial_xv_j|_{D_{jT}}+|\partial_x^2v_j|_{D_{jT}}+|\partial_tv_j|_{D_{jT}}+[\partial_x^2v_j]_{x,D_{jT}}^{(\alpha)}$$

$$+[\partial_x^2v_j]_{t,D_{jT}}^{(\alpha/2)}+[\partial_xv_j]_{t,D_{jT}}^{(\frac{1+\alpha}{2})}+[\partial_tv_j]_{x,D_{jT}}^{(\alpha)}+[\partial_tv_j]_{t,D_{jT}}^{(\alpha/2)},\ j=1,2. \quad (66)$$

где $|v|_{D_{jT}} = \sup_{(x,t)\in D_{jT}} |v(x,t)|$,

$$[v]^{(\alpha)}_{x,D_{jT}} = \sup_{(x,t),(z,t)\in D_{jT}} \frac{|v(x,t)-v(z,t)|}{|x-z|^\alpha}, \quad [v]^{(\alpha)}_{t,D_{jT}} = \sup_{(x,t),(x,t_1)\in D_{jT}} \frac{|v(x,t)-v(x,t_1)|}{|t-t_1|^\alpha}.$$

Так как ядро $K_j(x,t)$ в первом интеграле в формуле (55) удовлетворяет параболической оценке (56), то согласно общей теории [2] функция $v_{j1}(x,t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{D}_{jT})$ и подчиняется оценке

$$\sum_{j=1}^{2} |v_{j1}|^{(2+\alpha)}_{D_{jT}} \le C_{22} \sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T}, \tag{67}$$

где C_{22} не зависит от κ и æ. Оценим функцию $v_{j2}(x,t)$ в (55) при $j=1$, для определенности. Поменяв порядок интегрирования и произведя замену $\tau+\sigma=\tau_1$ в интеграле по τ, получим

$$v_{12}(x,t) = -\frac{2a_1}{k_0}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} F_1(\tau_1-\sigma)\partial_x\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t-\tau_1)d\sigma,\ x<0, \tag{68}$$

$$\partial_t v_{12}(x,t) = -\frac{2a_1}{k_0}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F_1(\tau_1-\sigma)-F_1(t-\sigma)]\partial_t\partial_x\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t-\tau_1)d\sigma$$
$$-\frac{2a_1}{k_0}\int_0^t F_1(t-\sigma)\partial_x\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t-\sigma)d\sigma, \tag{69}$$

$$\partial_x v_{12}(x,t) = -\frac{2a_1}{k_0}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F_1(\tau_1-\sigma)-F_1(t-\sigma)]\partial_x^2\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t-\tau_1)d\sigma$$
$$-\frac{2}{k_0}\int_0^t F_1(t-\sigma)\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t-\sigma)d\sigma. \tag{70}$$

Здесь функция $F_1(t)$ имеет вид (33). Будем пользоваться следующими обозначениями и неравенствами:

$$M_1 = [F_1]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\sigma_T}, \quad |F_1(t)-F_1(t_1)| \le M_1|t-t_1|^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad |F_1| \le M_1 t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \tag{71}$$

$$M_1 \le |F_1|^{(1+\alpha)/2} \le C_{23}\sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|^{(1+\alpha)/2}_{\sigma_T}, \tag{72}$$

где постоянная C_{23} не зависит от κ и æ.

Применяя оценки (61) и (71), найдем

$$|v_{12}(x,t)| \le \frac{C_{24}M_1}{k_0}\int_0^t \frac{\tau_1^{(1+\alpha)/2}}{t-\tau_1}d\tau_1 \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-\tau_1}}d\sigma \le \frac{C_{25}M_1}{k_0 b_1}t^{1+\alpha/2}, \tag{73}$$

$$|\partial_t v_{12}| \le \frac{C_{26}M_1}{k_0 b_1}t^{\alpha/2}, \quad |\partial_x^2 v_{12}| \le \frac{C_{27}M_1}{k_0 b_1}t^{\alpha/2}, \quad |\partial_x v_{12}| \le \frac{C_{28}M_1}{k_0 b_1}t^{\frac{1+\alpha}{2}}. \tag{74}$$

Оценим константы Гельдера производных $\partial_t v_{12}$ и $\partial_x v_{12}$. Для этого сформируем разности, положив, для определенности, $t_1<t$, $z<x$,

$$\Delta_1 := \partial_t v_{12}(x,t) - \partial_{t_1} v_{12}(x,t_1) =$$

$$-\frac{2a_1}{k_0}\Bigg(\int_{t_1}^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F_1(\tau_1-\sigma)-F_1(t-\sigma)]\partial_t\partial_x\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t-\tau_1)d\sigma$$

$$+\int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F_1(\tau_1-\sigma)-F_1(t_1-\sigma)]d\sigma \int_{t_1}^{t} \partial_{t_2}^2 \partial_x \Gamma_1(\,\cdot\,, t_2-\tau_1)dt_2$$

$$+\int_{t_1}^{t} F_1(t-\sigma)\partial_x\Gamma_1(\,\cdot\,, t-\sigma)d\sigma + \int_0^{t_1} [F_1(t-\sigma)-F_1(t_1-\sigma)]\partial_x\Gamma_1(\,\cdot\,, t-t_1)d\sigma$$

$$+\int_0^{t_1} F_1(t_1-\sigma)d\sigma \int_{t_1}^{t} \partial_{t_2}\partial_x\Gamma_1(\,\cdot\,, t_2-\sigma)dt_2\Big), \tag{75}$$

$$\Delta_2 := \partial_x v_{12}(x,t) - \partial_x v_{12}(x,t_1) =$$

$$-\frac{2}{k_0}\Big(a_1\int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F_1(\tau_1-\sigma)-F_1(t_1-\sigma)]d\sigma \int_{t_1}^{t} \partial_{t_2}\partial_x^2\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0 - x, t_2-\tau_1)dt_2$$

$$+\int_0^{t_1} [F_1(t-\sigma)-F_1(t_1-\sigma)]\Gamma_1(\,\cdot\,, t-t_1)d\sigma + \int_0^{t_1} F_1(t_1-\sigma)d\sigma \int_{t_1}^{t} \partial_{t_2}\Gamma_1(\,\cdot\,, t_2-\sigma)dt_2$$

$$+a_1\int_{t_1}^{t} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F(\tau_1-\sigma)-F_1(t-\sigma)]\partial_x^2\Gamma_1(\,\cdot\,, t-\tau_1)d\sigma + \int_{t_1}^{t} F_1(t-\sigma)\Gamma_1(\,\cdot\,, t-\sigma)d\sigma\Big), \tag{76}$$

$$\Delta_3 := \partial_t v_{12}(x,t) - \partial_t v_{12}(z,t) =$$

$$-\frac{2a_1}{k_0}\Big(\int_0^{t} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [F_1(\tau_1-\sigma)-F_1(t-\sigma)]d\sigma \int_z^x \partial_t\partial_\zeta^2\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0-\zeta, t-\tau_1)d\zeta$$

$$+\int_0^{t} F_1(t-\sigma)d\sigma \int_z^x \partial_\zeta^2\Gamma_1(\sqrt{a_1}\mu\sigma/k_0-\zeta, t-\sigma)d\zeta\Big). \tag{77}$$

Рассмотрим Δ_1. Применяя неравенства (61) для Γ_1, (71) для F_1, и обозначения (58) для b_1 и b_2, будем иметь

$$|\Delta_1| \le \frac{C_{29}M_1}{k_0}\Big(\int_{t_1}^{t} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \frac{(t-\tau_1)^{(1+\alpha)/2}}{(t-\tau_1)^2} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-\tau_1}}d\sigma$$

$$+\int_{t_1}^{t} dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau_1)^{(1+\alpha)/2}}{(t_2-\tau_1)^3} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t_2-\tau_1}}d\sigma + \int_{t_1}^{t} \frac{(t-\sigma)^{1+\alpha/2}}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-\sigma}}d\sigma$$

$$+(t-t_1)^{(\alpha-1)/2}\int_0^{t_1} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-t_1}}d\sigma + \int_{t_1}^{t} dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\sigma)^{(1+\alpha)/2}}{(t_2-\sigma)^2} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t_2-\sigma}}d\sigma\Big).$$

В первом, втором и четвертом интеграле проинтегрируем по σ и используем неравенства $t_1-\tau_1 \le t_2-\tau_1$ во втором, $(t-\sigma)^{1+\alpha/2} \le t(t-t_1)^{\alpha/2}$ в третьем и $\sqrt{t_1-\sigma} \le \sqrt{t_2-\sigma}$, $(t_1-\sigma)^{\alpha/2} \le t_2^{\alpha/2}$ в последнем интеграле, тогда получим

$$|\Delta_1| \le \frac{C_{30}M_1}{k_0}\Big((t-t_1)^{\alpha/2}\Big[\frac{1}{b_1} + t\int_0^{t} \frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-\sigma}}d\sigma\Big] + \int_{t_1}^{t} t_2^{\alpha/2}dt_2 \int_0^{t_2} \frac{1}{(t_2-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t_2-\sigma}}d\sigma\Big).$$

Применяя в интегралах по σ неравенство (64) , будем иметь

$$|\partial_t v_{12}(x,t) - \partial_{t_1} v_{12}(x,t_1)| := |\Delta_1| \le \frac{C_{31}M_1}{k_0 b_1}(t-t_1)^{\alpha/2}, \quad [\partial_t v_{12}]_{t,D_{1T}}^{(\alpha/2)} \le \frac{C_{31}M_1}{k_0 b_1}. \tag{78}$$

Оценим разность Δ_2 , используя также формулы (61) и (71)

$$|\Delta_2| \le \frac{C_{32}M_1}{k_0}\Big(\int_{t_1}^{t} dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau_1)^{(1+\alpha)/2}}{(t_2-\tau_1)^{5/2}} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t_2-\tau_1}}d\sigma + \int_0^{t_1} \frac{(t-t_1)^{(1+\alpha)/2}}{\sqrt{t-t_1}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-t_1}}d\sigma$$

$$+\int_{t_1}^{t} dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\sigma)^{(1+\alpha)/2}}{(t_2-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t_2-\sigma}} d\sigma + \int_{t_1}^{t} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} (t-\tau_1)^{\alpha/2-1} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-\tau_1}} d\sigma$$

$$+\int_{t_1}^{t} \frac{(t-\sigma)^{(1+\alpha)/2}(t-\sigma)}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2}{t-\sigma}} d\sigma \Bigg). \qquad (79)$$

Проинтегрируем по σ в первом, во втором, в четвертом интегралах, используем неравенства $t_1-\tau_1 \le t_2-\tau_1$ в первом, $t_1-\sigma \le t_1 \le t_2$ в третьем, $t-\sigma \le t-t_1$, $t-\sigma \le t$ в пятом интеграле и применяя формулу (64) по σ в третьем и последнем интегралах, мы получим

$$|\partial_x v_{12}(x,t) - \partial_x v_{12}(x,t_1)| := |\Delta_2| \le \frac{C_{33}M_1}{k_0 b_1}(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad [\partial_x v_{12}]_{t,D_{1T}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \le \frac{C_{33}M_1}{k_0 b_1}. \qquad (80)$$

Оценим разность (77), как и Δ_1, Δ_2, учитывая что $x > z$,

$$|\Delta_3| \le \frac{C_{34}M_1}{k_0}\Bigg(\int_z^x d\zeta \int_0^t (t-\tau_1)^{\alpha/2-2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2+b_2^2\zeta^2}{t-\tau_1}} d\sigma + \int_z^x d\zeta \int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{1-\alpha/2}} e^{-\frac{b_1^2\sigma^2+b_2^2\zeta^2}{t-\tau_1}} d\sigma\Bigg). \quad (81)$$

Проинтегрируем первый интеграл по σ и затем по τ_1, произведя замену $b_2^2\zeta^2/(t-\tau_1) = \tau_4^2$, во втором интеграле воспользуемся неравенством $|\xi|^\alpha e^{-\xi^2} \le C_\alpha e^{-\xi^2/2}$, $\alpha \ge 0$, тогда

$$|\Delta_3| \le \frac{C_{35}M_1}{k_0}\Bigg(\frac{1}{b_1}\int_z^x \zeta^{\alpha-1} d\zeta \int_0^\infty \tau_4^{-\alpha} e^{-\tau_4^2} d\tau_4 + \int_z^x \frac{d\zeta}{\zeta^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{t-\sigma}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{2b_1^2\sigma^2+b_2^2\zeta^2}{2(t-\sigma)}} d\sigma\Bigg),$$

в интеграле по σ применив неравенство $t-\sigma \le t$ и оценку (64), мы получим

$$|\partial_t v_{12}(x,t) - \partial_x v_{12}(z,t)| := |\Delta_3| \le \frac{C_{36}M_1}{k_0 b_1}|x-z|^\alpha, \quad [\partial_t v_{12}]_{x,D_{1T}}^{(\alpha)} \le \frac{C_{36}M_1}{k_0 b_1}. \qquad (82)$$

Заметим, что постоянные C_{31}, C_{33} и C_{36} не зависят от κ и æ.

Из уравнения (18) будут следовать оценки констант Гельдера производной $\partial_x^2 v_{12}$.

Собирая оценки (67) для функции v_{11}, (73), (74), (78), (80), (82) для v_{12}, и учитывая (71), (58) и (72), мы придем к неравенству (65) для $v_1 \equiv v_{11} + v_{12}$ с константой, не зависящий от κ и æ. Оценки функций $v_2(x,t)$, $z_j(x,t)$, $j = 1,2$, устанавливаются точно так же, как для функции $v_1(x,t)$.

Из условия (22) на основании оценки (65) для функций v_j, z_j, $j=1,2$, и условия $\mu_j > 0$, $j=1,2$, получим $\psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$ и

$$|\psi|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)} \le C_{37}\sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Вычитая из условия (23) условие (24), будем иметь $(\kappa + \text{æ})\psi' \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и

$$|(\kappa+\text{æ})\psi'|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \le C_{38}\sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},$$

где C_{37} и C_{38} не зависят от κ и æ. Теорема 3 доказана. □

Из формул (17) в силу соотношений (14) – (16), Теоремы 3 и оценок (25), (26) для функций Φ_1, Φ_2 следует Теорема 1.

Цитированная литература

1. **Bizhanova G.I.** //Banach Center publications. 2008. V. 81. P. 43 – 61.

2. **Ладыженская О.А., Солонников В.А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва, 1967.

3. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. М., 1969.

Поступила в редакцию 09.07.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 45 – 49*

УДК 517.956

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Т.Д. Джураев, Б.И. Жамалов

Институт Математики им. В.И. Романовского АН РУз
700125 Ташкент ул. Ф. Ходжаева, 29, Академгородок mathinst@uzsci.net

Установлена разрешимость нелокальных задач для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка.

В работе [1] были рассмотрены вопросы о полной классификации и приведении к каноническому виду уравнений четвертого порядка, линейных относительно старших производных:

$$Au_{xxxx} + Bu_{xxxy} + Cu_{xxyy} + Du_{xyyy} + Eu_{yyyy} = F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{yyy}), \quad (1)$$

где A, B, C, D и E являются функциями переменных x и y . В частности, в [1] было доказано, что если характеристическое уравнение

$$A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + E = 0, \quad \lambda = dy/dx,$$

уравнений (1) имеет либо (а) два различных двукратных действительных корней, либо (б) один двукратный и два различных действительных корней, то уравнения (1) могут быть приведены соответственно к виду:
(а) $u_{\xi\xi\eta\eta} = \Phi$, (б) $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) = \Phi$, где $\Phi = \Phi(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{yyy})$.

Данная работа посвящена исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа

$$0 = \begin{cases} \left(a_1\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial y} + c_1\right)(u_{xx} - u_y), & \Omega_1, \\ \left(a_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\right)(u_{xx} - u_{yy}), & \Omega_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $a_i, b_i, c_i \in R$, $a_i \neq 0$, $\Omega = \Omega_1 \bigcup J \bigcup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$ – прямоугольник с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $A_0(0, 1)$, $B_0(1, 1)$, $\Omega_1 = \{(x, y) : -y < x < < y + 1, \ -\frac{1}{2} < y < 0\}$ – характеристический треугольник с вершинами $A, B, C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, а $J = \{(x, y) : 0 < x < 1, \ \ y = 0\}$ – интервал с концами A, B.

Keywords: *system parabolic-hyperbolic equation, nonlocal boundary value problem, solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 35G15, 35G30, 35M10

Уравнение (2) можно записать в виде (а) в области Ω_1 и в виде (б) в области Ω_2. Отметим, что в работе [2] изучены краевые задачи для уравнения смешанного типа

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)Lu=0,$$

а работа [3] посвящена исследованию краевых задач для уравнения

$$\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0,$$

где

$$L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1-sgny}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-sgny}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача B_1. Найти решение уравнения (2) в области Ω при $y\neq 0$, которое непрерывно в области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет краевым условиям:

$$u_x(0,y)=m_1u(0,y)+n_1u(l,y)+\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{3}$$

$$u_x(l,y)=m_2u(0,y)+n_2u(1,y)+\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u\Big|_{AC}=\psi_1(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC}+\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BC}=\psi_2(y),\quad -\frac{1}{2}\le y\le 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{AC}+\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{BC}=\psi_3(y),\quad -\frac{1}{2}\le y\le 0, \tag{7}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x), \tag{8}$$

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x), \tag{9}$$

$$u_{yy}(x,-0)=u_{yy}(x,+0)=\mu(x). \tag{10}$$

Здесь n – внутренняя нормаль, ψ_1,ψ_2,ψ_3 – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования, $\tau(x),\nu(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции, n_i,m_i $(i=1,2)$ – постоянные. Пусть

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases} \tag{11}$$

Тогда, уравнение (2) в областях Ω_1 и Ω_2 можно переписать в виде системы:

$$u_{1xx}-u_{1y}=\upsilon_1(x,y),\quad u_{2xx}-u_{2yy}=\upsilon_2(x,y), \tag{12}$$

где $\upsilon_i(x,y)$ – достаточно гладкие функции, которые являются решениями уравнений:

$$a_1\upsilon_{1yy}+b_1\upsilon_{1y}+c_1\upsilon_1=0, \tag{13}$$

$$a_2\upsilon_{2xx}+b_2\upsilon_{2x}+c_2\upsilon_2=0. \tag{14}$$

Общие решения уравнений (13) и (14) имеют вид:
а) при $b_i^2-4a_ic_i>0$

$$\upsilon_1(x,y)=\omega_{11}(x)e^{k_{11}y}+\omega_{12}(x)e^{k_{12}y}, \tag{15}$$

$$\upsilon_2(x,y) = \omega_{21}(y)e^{k_{21}x} + \omega_{22}(y)e^{k_{22}x}, \tag{16}$$

где

$$k_{ij} = \frac{-b_i + (-1)^j\sqrt{b_i^2 - 4a_ic_i}}{2a_i}, \ \ i = 1,2, \ \ j = 1,2.$$

б) при $b_i^2 - 4a_ic_i = 0$

$$\upsilon_1(x,y) = [\omega_{11}(x) + y\omega_{12}(x)]e^{ky}, \tag{17}$$

$$\upsilon_2(x,y) = [\omega_{21}(y) + x\omega_{22}(y)]e^{kx}, \tag{18}$$

где $k_i = -\frac{b_i}{2a_i}, \ \ i = 1,2.$

в) при $b_i^2 - 4a_ic_i < 0$

$$\upsilon_1(x,y) = [\omega_{11}(x)\cos\beta_1 y + \omega_{12}(x)\sin\beta_1 y]e^{\alpha_1 y}, \tag{19}$$

$$\upsilon_2(x,y) = [\omega_{21}(y)\cos\beta_2 x + \omega_{22}(y)\sin\beta_2 x]e^{\alpha_2 x}. \tag{20}$$

Здесь $\omega_{ij}(x), \ \omega_{ij}(y) \ \ (i = 1,2, \ \ j = 1,2)$ — произвольные непрерывные функции, подлежащие определению.

В зависимости от коэффициентов $a_i, b_i, c_i \ \ (i = 1,2)$ для системы (12) рассматриваются следующие случаи:

$$a)\ D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \ \ b)\ D_1 > 0, \quad D_2 = 0, \ \ c)\ D_1 > 0, \quad D_2 < 0,$$

$$d)\ D_1 = 0, \quad D_2 > 0, \ \ e)\ D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \ \ f)\ D_1 = 0, \quad D_2 < 0,$$

$$g)\ D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \ \ h)\ D_1 < 0, \quad D_2 = 0, \ \ i)\ D_1 < 0, \quad D_2 < 0,$$

где $D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1$ и $D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2$. Здесь достаточно рассмотреть случаи a), e) и i), остальные могут быть приведены к ним.

Случай а). Учитывая (15) и (16), система уравнений (12) перепишется в следующем виде:

$$u_{xx} - u_y = \omega_{11}(x)e^{k_{11}y} + \omega_{12}(x)e^{k_{12}y}, \tag{21}$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} = \omega_{21}(y)e^{k_{21}x} + \omega_{22}(y)e^{k_{22}x}. \tag{22}$$

Общее решение уравнения (22) имеет вид:

$$u_2(x,y) = F(x+y) + \Phi(x-y) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{x+y} d\xi \int\limits_1^{x-y} \left[\omega_{21}\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)e^{k_{21}\frac{\xi+\eta}{2}} + \omega_{22}\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)e^{k_{22}\frac{\xi+\eta}{2}}\right]d\eta, \tag{23}$$

где F и Φ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Подставляя (23) в (5) – (7) соответственно, находим

$$\Phi(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - F(0), \quad 0 \le x \le 1, \tag{24}$$

$$\omega_{21}(y) = \frac{\sqrt{2}\psi_2''(y) + 2\psi_3'(y) + \sqrt{2}k_{22}\psi_2'(y)}{(k_{21} - k_{22})e^{-k_{21}y} + (k_{21} + k_{22})e^{k_{21}(y+1)}}, \quad -\frac{1}{2} \le y \le 0. \tag{25}$$

$$\omega_{22}(y) = \frac{\sqrt{2}\psi_2''(y) + 2\psi_3'(y) + \sqrt{2}k_{21}\psi_2'(y)}{(k_{22} - k_{21})e^{-k_{22}y} + (k_{21} + k_{22})e^{k_{22}(y+1)}}, \quad -\frac{1}{2} \le y \le 0. \tag{26}$$

Учитывая (24) – (26), из (23) получим:

$$u_2(x,y) = F(x+y) - f(0) + P(x,y), \tag{27}$$

где

$$P(x,y)=\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{4}\int\limits_0^{x+y}d\xi\int\limits_1^{x-y}\left[\omega_{21}\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)e^{k_{21}\frac{\xi+\eta}{2}}+\omega_{22}\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)e^{k_{22}\frac{\xi+\eta}{2}}\right]d\eta.$$

Из (27) при $y\to -0$ с учётом (8) и (9) находим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\tau'(x)-P_x(x,0)+P_y(x,0), \tag{28}$$

а из уравнения (22) переходя к пределу при $y\to -0$ соответственно, имеем:

$$\mu(x)=\tau''(x)-\omega_{21}(0)e^{k_{21}x}-\omega_{22}(0)e^{k_{22}x}. \tag{29}$$

Учитывая равенство $\omega_{11}(x)=-\omega_{12}(x)$, из уравнения (21) получим:

$$\tau''(x)-\nu(x)=0, \tag{30}$$

$$\nu''(x)-\mu(x)=\omega_{11}(x)(k_{11}-k_{12}). \tag{31}$$

Исключая $\nu(x)$ из (28) и (30), приходим к уравнению относительно $\tau(x)$:

$$\tau''(x)-\tau'(x)=P_y(x,0)-P_x(x,0). \tag{32}$$

Решая уравнение (32) при условиях

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau(1)=\varphi_2(0), \tag{33}$$

получим

$$\tau(x)=\int\limits_0^x(1-e^{x-t})(P_x(t,0)-P_y(t,0))dt+r_1e^x+r_2, \tag{34}$$

где

$$r_2=\varphi_1(0)-r_1,\ \ r_1=(e-1)^{-1}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)-\int\limits_0^1(1-e^{1-t})(P_x(t,0)-P_y(t,0))dt\right].$$

Что же касается функций $\nu(x)$, $\mu(x)$ и $\omega_{11}(x)$, то их можно выразить через найденную нами функцию $\tau(x)$. Теперь, вводя обозначения

$$u_x(0,y)=f_1(y),\quad u_x(1,y)=f_2(y), \tag{35}$$

получаем следующую задачу:

$$u_{xx}-u_y=\omega_{11}(x)\left[e^{k_{11}y}-e^{k_{12}y}\right], \tag{36}$$

с условиями (8) и (35), решение которой представимо в виде:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int\limits_0^y f_1(\eta)G(x,y;0,\eta)d\eta+\int\limits_0^y f_2(\eta)G(x,y;1,\eta)d\eta, \tag{37}$$

здесь $f_1(y)$, $f_2(y)$ — пока неизвестные функции,

$$u_0(x,y)=\int_0^1 \tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi+\int_0^y\int_0^1\left[\omega_{11}(\xi)\left[e^{k_{11}\eta}-e^{k_{12}\eta}\right]\right]G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{e^{\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}}+e^{\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}}\right\}$$

– функция Грина задачи (36), (8) и (35) (см [2]). Выполнение для функции (37) условий (3), (4) задачи B_1 дает систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\begin{cases} f_1(y)-\int\limits_0^y f_1(\eta)K_{11}(y,\eta)d\eta-\int\limits_0^y f_2(\eta)K_{12}(y,\eta)d\eta=g_1(x), \\ f_2(y)-\int\limits_0^y f_2(\eta)K_{21}(y,\eta)d\eta-\int\limits_0^y f_1(\eta)K_{22}(y,\eta)d\eta=g_2(x), \end{cases} \tag{38}$$

здесь

$$K_{11}(y,\eta)=m_1G(0,y;0,\eta)+n_1G(1,y;0,\eta),\ \ K_{12}(y,\eta)=m_1G(0,y;1,\eta)+n_1G(1,y;1,\eta),$$

$$K_{21}(y,\eta)=m_2G(0,y;1,\eta)+n_2G(1,y;1,\eta),\ \ K_{22}(y,\eta)=m_2G(0,y;0,\eta)+n_2G(1,y;0,\eta),$$

$$g_1(x)=\varphi_1(y)+m_1u_0(0,y)+n_1u_0(1,y),\ \ g_2(x)=\varphi_2(y)+m_2u_0(0,y)+n_2u_0(1,y).$$

Таким образом, система (38) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Здесь ядра интегральных уравнений имеют слабые особенности, а правые части непрерывны, поэтому данная система допускает единственное решение. Следовательно, решение задачи B_1 в области Ω_1 единственно.

Итак, функция $u_1(x,y)$ в области Ω_1 выражается формулой (37), а функция $u_2(x,y)$ определяется как решение задачи Коши по формуле Даламбера.

Остальные случаи исследуются аналогично. Аналогичным образом исследуются

Задача B_2. От задачи B_1 отличается тем, что вместо условий (3) и (4) берутся соответственно при $m_i^2+n_i^2\neq 0$ условия:

$$m_1u(0,y)+n_1u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1,$$

$$m_2u_x(0,y)+n_2u_x(1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1.$$

Задача B_3. От задачи B_1 отличается тем, что вместо условий (3) и (4) берутся соответственно при $m_i^2+n_i^2\neq 0$ условия:

$$m_1u(0,y)+n_1u_x(0,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1,$$

$$m_2u(1,y)+n_2u_x(1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1.$$

Цитированная литература

1. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент, 2000.

2. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.** Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.

3. **Жамалов Б.И.** //УзМЖ. 2006. № 4. С. 11 – 25.

4. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М., 1977.

Поступила в редакцию 10.08.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 50 – 55*

УДК 511

ОБЩЕЕ НАГЕЛЛОВО УРАВНЕНИЕ $\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5$

С.Ш. Кожегельдинов

Семипалатинский государственный педагогический институт
sagdulla@ok.kz

Получены три формулы и доказана их эквивалентность. Каждая из них описывает все натуральные решения уравнения $\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5$.

1. Общим нагелловым уравнением называется диофантово уравнение

$$\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5, \tag{1}$$

где

$$x, y, z \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, \gamma - \text{данные натуральные числа.} \tag{2}$$

Нагеллово уравнение [1-3]:

$$x^2 + y^3 = z^5, \tag{3}$$

где

$$x, y, z \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

является частным случаем общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) и получается из него при $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Решение $\langle x; y; z\rangle$ общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) (а следовательно, и нагеллова уравнения (3) с условием (4)) называется основным, если $(x^2, y^3, z^5)_{\deg 30} = 1$, т.е. если x^2, y^3, z^5 взаимно простые числа степени 30.

Решение $\langle 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 23^{12}; 2^3 \cdot 3^8 \cdot 23^8; 2 \cdot 3^5 \cdot 23^5\rangle$ общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) при $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ является основным, так как имеет место равенство
$((2^3 \cdot 3^{13} \cdot 23^{12})^2, (2^3 \cdot 3^8 \cdot 23^8)^3, (2 \cdot 3^5 \cdot 23^5)^5)_{\deg 30} = 1$, т.е.
$(2^3 \cdot 3^{13} \cdot 23^{12})^2, (2^3 \cdot 3^8 \cdot 23^8)^3, (2 \cdot 3^5 \cdot 23^5)^5$ – взаимно простые числа степени 30.

2. В конце работы [1] приведена формула

$$x = u(u^2 + v^3)^{-3}, \quad y = v(u^2 + v^3)^{-2}, \quad z = (u^2 + v^3)^{-1}.$$

Keywords: *diofant's equations*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

Последнюю формулу, с учетом работы [2] и коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma,$ можно написать так:

$$x = \gamma^3 u(\alpha u^2 + \beta v^3)^{12}, \quad y = \gamma^2 v(\alpha u^2 + \beta v^3)^8, \quad z = \gamma(\alpha u^2 + \beta v^3)^5.$$

Более того, в виде:

$$x = k^{15}\frac{\gamma^3 u(\alpha u^2 + \beta v^3)^{12}}{\Delta^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{\gamma^2 v(\alpha u^2 + \beta v^3)^8}{\Delta^{10}}, \quad z = k^6\frac{\gamma(\alpha u^2 + \beta v^3)^5}{\Delta^6}, \tag{5^0}$$

где

$$k, u, v \in \mathbb{N}, \quad (u^2, v^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta = (\gamma^5(\alpha u^2 + \beta v^3)^{24}(\gamma(u^2, v^3), \alpha u^2 + \beta v^3))_{\deg 30}. \tag{6^0}$$

В дальнейшем мы убедимся в том, что формула (5^0) с условием (6^0) является общей формулой всех решений общего нагеллова уравнения (1) с условием (2).

Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (5^0) называется формулой.

Наличие общей формулы вида (5^0) с условием (6^0) обуславливает актуальность настоящей работы. Поэтому вполне естественной является постановка и решение следующей задачи.

3. Постановка задачи. Пусть $\{\langle x; y; z\rangle | (1) \wedge (2)\}$ – множество всех решений общего нагеллова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало трех.

Для решения поставленной задачи используются идеи, методы и результаты работ [2-7].

4. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Все решения общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы*

$$x = k^{15}\frac{\gamma^3 a(\alpha a^2 + \beta b^3)^{12}}{\Delta_1^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{\gamma^2 b(\alpha a^2 + \beta b^3)^8}{\Delta_1^{10}}, \quad z = k^6\frac{\gamma(\alpha a^2 + \beta b^3)^5}{\Delta_1^6}, \tag{5}$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta_1 = (\gamma^5(\alpha a^2 + \beta b^3)^{24}(\gamma(a^2, b^3), \alpha a^2 + \beta b^3))_{\deg 30}. \tag{6}$$

Каждое такое решение общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 1. *Если* $k = 3, \quad a = 1, \quad b = 1,$ *то условие (6) выполнено. Так как* $\Delta_1 = 4,$ *то формула (5) дает:* $x = 2^9 \cdot 3^{15}, \quad y = 2^6 \cdot 3^{10}, \quad z = 2^4 \cdot 3^6.$

Заметим, что как в примере 1, так и во всех других примерах в общем нагелловом уравнении (1) с условием (2) считаем, что $\alpha = 5, \ \ \beta = 3, \ \ \gamma = 2.$

Теорема 2. *Все решения общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы*

$$x = k^{15}\frac{\beta^5 d(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{10}}{\Delta_2^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{\beta^3(\gamma c^5 - \alpha d^2)^7}{\Delta_2^{10}}, \quad z = k^6\frac{\beta^2 c(\gamma c^5 - \alpha d^2)^4}{\Delta_2^6}, \tag{7}$$

где

$$k, c, d \in \mathbb{N}, \ \gamma c^5 > \alpha d^2, \ (c^5, d^2)_{\deg 10} = 1, \ \Delta_2 = (\beta^9(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{20}(\beta(c^5, d^2), \gamma c^5 - \alpha d^2))_{\deg 30}. \tag{8}$$

Каждое такое решение общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 2. *Если* $k = 2, \quad c = 2, \quad d = 3,$ *то условие (8) выполнено. Так как* $\Delta_2 = 1,$ *то формула (7) дает:* $x = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 19^{10}, \quad y = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 19^7, \quad z = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 19^4.$ Напомним, что $\alpha = 5,$ $\beta = 3, \ \ \gamma = 2.$

Теорема 3. *Все решения общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы*

$$x = k^{15}\frac{\alpha^7(\gamma e^5-\beta f^3)^8}{\Delta_3^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{\alpha^5 f(\gamma e^5-\beta f^3)^5}{\Delta_3^{10}}, \quad z = k^6\frac{\alpha^3 e(\gamma e^5-\beta f^3)^3}{\Delta_3^6}, \tag{9}$$

где

$$k,e,f\in\mathbb{N},\ \gamma e^5>\beta f^3,\ (e^5,f^3)_{\deg 15}=1,\ \Delta_3=(\alpha^{14}(\gamma e^5-\beta f^3)^{15}(\alpha(e^5,f^3),\gamma e^5-\beta f^3))_{\deg 30}. \tag{10}$$

Каждое такое решение общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 3. *Если* $k=7,\quad e=2,\quad f=3,$ *то условие (10) выполнено. Так как* $\Delta_3=10,$ *то формула (9) дает:* $x=2^9\cdot 7^{15},\quad y=2^6\cdot 7^{10},\quad z=2^4\cdot 7^6.$ Напомним, что $\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=2.$

Теорема 4. *Если имеют место соответственно условия (6) – (10) (четные номера), то общие формулы (5) – (9) (нечетные номера) всех решений общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны.*

Пример 4. *Одно и то же решение* $\langle 2^{18}\cdot 3^{13}\cdot 23^{12}; 2^{13}\cdot 3^8\cdot 23^8; 2^7\cdot 3^5\cdot 23^5\rangle$ *общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (5) с условием (6) при* $k=2,\quad a=3,\ b=2;$ *из формулы (7) с условием (8) при* $k=2,\quad c=2\cdot 3\cdot 23,\quad d=2^3\cdot 3^3\cdot 23^2$ *и из формулы (9) с условием (10) при* $k=2,\quad e=2^4\cdot 3^2\cdot 23^2,\quad f=2^8\cdot 3^3\cdot 23^3.$ Напомним, что $\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=2.$

5. В формулах, дающих все натуральные решения общего нагеллова уравнения (1), важную роль играют арифметические функции, в частности, арифметические функции более сложной природы Δ_1,Δ_2 и $\Delta_3.$

6. Из теорем 1-4 очевидным образом вытекает

Теорема 5. *Каждая из следующих эквивалентных формул:*

$$x = k^{15}\frac{a(a^2+b^3)^{12}}{\Delta_1^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{b(a^2+b^3)^8}{\Delta_1^{10}}, \quad z = k^6\frac{(a^2+b^3)^5}{\Delta_1^6}, \tag{11}$$

где

$$k,a,b\in\mathbb{N}, \quad (a^2,b^3)_{\deg 6}=1, \quad \Delta_1=((a^2+b^3)^{24}(a^2,b^3))_{\deg 30}; \tag{12}$$

$$x = k^{15}\frac{d(c^5-d^2)^{10}}{\Delta_2^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{(c^5-d^2)^7}{\Delta_2^{10}}, \quad z = k^6\frac{c(c^5-d^2)^4}{\Delta_2^6}, \tag{13}$$

где

$$k,c,d\in\mathbb{N},\ c^5>d^2,\ (c^5,d^2)_{\deg 10}=1,\ \Delta_2=((c^5-d^2)^{20}(c^5,d^2))_{\deg 30}; \tag{14}$$

$$x = k^{15}\frac{(e^5-f^3)^8}{\Delta_3^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{f(e^5-f^3)^5}{\Delta_3^{10}}, \quad z = k^6\frac{e(e^5-f^3)^3}{\Delta_3^6}, \tag{15}$$

где

$$k,e,f\in\mathbb{N},\ e^5>f^3,\ (e^5,f^3)_{\deg 15}=1,\ \Delta_3=((e^5-f^3)^{15}(e^5,f^3))_{\deg 30}, \tag{16}$$

является общей формулой всех решений нагеллова уравнения (3) с условием (4). При этом каждое такое решение нагеллова уравнения (3) с условием (4) определяется каждым из этих способов однозначно.

Пример 5. *Одно и то же решение* $\langle 2^{15}\cdot 3\cdot 17^{12}; 2^{11}\cdot 17^8; 2^6\cdot 17^5\rangle$ *нагеллова уравнения (3) с условием (4) получается: из формулы (11) с условием (12) при* $k=2,\quad a=3,\quad b=2;$ *из формулы (13) с условием (14) при* $k=2,\quad c=17,\quad d=3\cdot 17^2$ *и из формулы (15) с условием (16) при* $k=2,\quad e=17^2,\quad f=2\cdot 17^3.$

7. Доказательство теоремы 1.
Воспользуемся методом работы [2] и в (1) с условием (2) положим, что

$$x = k^{15}\frac{\gamma^3 a t^{12}}{\Delta_1^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{\gamma^2 b t^8}{\Delta_1^{10}}, \quad z = k^6\frac{\gamma t^5}{\Delta_1^6}, \tag{17}$$

где

$$t \in \mathbb{N}, \quad k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta_1 = (\gamma^5(\alpha a^2 + \beta b^3)^{24}(\gamma(a^2, b^3), \alpha a^2 + \beta b^3))_{\deg 30}. \tag{18}$$

Из (1) с условием (2) в силу (17) с условием (18) имеем, что

$$\alpha\Big(k^{15}\frac{\gamma^3 a t^{12}}{\Delta_1^{15}}\Big)^2 + \beta\Big(k^{10}\frac{\gamma^2 b t^8}{\Delta_1^{10}}\Big)^3 = \gamma\Big(k^6\frac{\gamma t^5}{\Delta_1^6}\Big)^5$$

или

$$\alpha k^{30}\frac{\gamma^6 a^2 t^{24}}{\Delta_1^{30}} + \beta k^{30}\frac{\gamma^6 b^3 t^{24}}{\Delta_1^{30}} = \gamma k^{30}\frac{\gamma^5 t^{25}}{\Delta_1^{30}},$$

откуда

$$t = \alpha a^2 + \beta b^3, \tag{19}$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \alpha, \beta - \text{данные натуральные числа.} \tag{20}$$

Из (17) с условием (18) в силу (19) с условием (20) получаем формулу (5) с условием (6), которая является общей формулой всех решений общего нагеллова уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значения x, y, z из формулы (5) с условием (6) действительно удовлетворяют общему нагеллову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $(x^2, y^3, z^5)_{\deg 30} = k$, где $k \in \mathbb{N}$. И так как $(a^2, b^3)_{\deg 6} = 1$, то каждое решение $\langle x, y, z\rangle$ общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Теорема 1 доказана.
Доказательства теорем 2 и 3 аналогичны доказательству теоремы 1.

8. Доказательство теоремы 4. Схема доказательства эквивалентности формул (5) – (9) (нечетные номера) такова: (5) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$ (5).
Пусть в (5) $k = k$,

$$a = \frac{\beta^2 d(\gamma c^5 - \alpha d^2)}{\Delta_4^3}, \quad b = \frac{\beta(\gamma c^5 - \alpha d^2)}{\Delta_4^2},$$

где

$$k, c, d \in \mathbb{N}, \quad \gamma c^5 > \alpha d^2, \quad (c^5, d^2)_{\deg 10} = 1, \quad \Delta_4 = (\beta^3(\gamma c^5 - \alpha d^2)^2(\beta d^2, \gamma c^5 - \alpha d^2))_{\deg 6},$$

α, β, γ – данные натуральные числа. Тогда из формулы (5) получается формула (7). Действительно, так как $k = k$,

$$\Delta_1 = \frac{\beta^3\gamma c^4(\gamma c^5 - \alpha d^2)\Delta_2}{\Delta_4^5}, \quad \gamma^3 a(\alpha a^2 + \beta b^3)^{12} = \frac{\beta^{50}\gamma^{15}c^{60}d(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{25}}{\Delta_4^{75}},$$

$$\gamma^2 b(\alpha a^2 + \beta b^3)^8 = \frac{\beta^{33}\gamma^{10}c^{40}(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{17}}{\Delta_4^{50}}, \quad \gamma(\alpha a^2 + \beta b^3)^5 = \frac{\beta^{20}\gamma^6 c^{25}(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{10}}{\Delta_4^{30}},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $\gamma c^5 > \alpha d^2$, $(c^5, d^2)_{\deg 10} = 1$, $\Delta_2 = (\beta^9(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{20}(\beta(c^5, d^2), \gamma c^5 - \alpha d^2))_{\deg 30}$, $\Delta_4 = (\beta^3(\gamma c^5 - \alpha d^2)^2(\beta d^2, \gamma c^5 - \alpha d^2))_{\deg 6}$, α, β, γ – данные натуральные числа, то из формулы (5) следует формула (7). Теперь пусть в (7) $k = k$,

$$c = \frac{\alpha e(\gamma e^5 - \beta f^3)}{\Delta_5^2}, \quad d = \frac{\alpha^2(\gamma e^5 - \beta f^3)^3}{\Delta_5^5},$$

где $k, e, f \in \mathbb{N}$, $\quad \gamma e^5 > \beta f^3$, $(e^5, f^3)_{\deg 15} = 1$, $\Delta_5 = (\alpha^4(\gamma e^5 - \beta f^3)^5(\alpha e^5, \gamma e^5 - \beta f^3))_{\deg 10}$, α, β, γ – данные натуральные числа. Тогда из формулы (7) получается формула (9). Действительно, так как $k = k$,

$$\Delta_2 = \frac{\alpha^3 \beta f^2 (\gamma e^5 - \beta f^3)^3 \Delta_3}{\Delta_5^7}, \quad \beta^5 d(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{10} = \frac{\alpha^{52}\beta^{15} f^{30}(\gamma e^5 - \beta f^3)^{53}}{\Delta_5^{105}},$$

$$\beta^3(\gamma c^5 - \alpha d^2)^7 = \frac{\alpha^{35}\beta^{10} f^{21}(\gamma e^5 - \beta f^3)^{35}}{\Delta_5^{70}}, \quad \beta^2 c(\gamma c^5 - \alpha d^2)^4 = \frac{\alpha^{21}\beta^6 e f^{12}(\gamma e^5 - \beta f^3)^{21}}{\Delta_5^{42}},$$

где $k, e, f \in \mathbb{N}$, $\quad \gamma e^5 > \beta f^3$, $(e^5, f^3)_{\deg 15} = 1$, $\Delta_3 = (\alpha^{14}(\gamma e^5 - \beta f^3)^{15}(\alpha(e^5, f^3), \gamma e^5 - \beta f^3))_{\deg 30}$, $\Delta_5 = (\alpha^4(\gamma e^5 - \beta f^3)^5(\alpha e^5, \gamma e^5 - \beta f^3))_{\deg 10}$, α, β, γ – данные натуральные числа, то из формулы (7) следует формула (9). Наконец, пусть в (9) $k = k$,

$$e = \frac{\gamma(\alpha a^2 + \beta b^3)^2}{\Delta_6^3}, \quad f = \frac{\gamma^2 b(\alpha a^2 + \beta b^3)^3}{\Delta_6^5},$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta_6 = (\gamma^5(\alpha a^2 + \beta b^3)^9(\gamma b^3, \alpha a^2 + \beta b^3))_{\deg 15},$$

α, β, γ – данные натуральные числа. Тогда из формулы (9) получается формула (5). Действительно, так как $k = k$,

$$\Delta_3 = \frac{\alpha\gamma^3 a(\alpha a^2 + \beta b^3)^4 \Delta_1}{\Delta_6^8}, \quad \alpha^7(\gamma e^5 - \beta f^3)^8 = \frac{\alpha^{15}\gamma^{48} a^{16}(\alpha a^2 + \beta b^3)^{72}}{\Delta_6^{120}},$$

$$\alpha^5 f(\gamma e^5 - \beta f^3)^5 = \frac{\alpha^{10}\gamma^{32} a^{10} b(\alpha a^2 + \beta b^3)^{48}}{\Delta_6^{80}}, \quad \alpha^3 e(\gamma e^5 - \beta f^3)^3 = \frac{\alpha^6\gamma^{19} a^6(\alpha a^2 + \beta b^3)^{29}}{\Delta_6^{48}},$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $\quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1$, $\Delta_1 = (\gamma^5(\alpha a^2 + \beta b^3)^{24}(\gamma(a^2, b^3), \alpha a^2 + \beta b^3))_{\deg 30}$, $\Delta_6 = (\gamma^5(\alpha a^2 + \beta b^3)^9(\gamma b^3, \alpha a^2 + \beta b^3))_{\deg 15}$, α, β, γ – данные натуральные числа, то из формулы (9) получается формула (5).

Таким образом, при выполнении условий (6) – (10) (четные номера) общие формулы (5) – (9) (нечетные номера) всех решений общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны. Теорема 4 эквивалентности доказана.

9. Заметим, что число целых параметров, входящих в каждую из общих формул (5) – (9) (нечетные номера) соответственно с условием (6) – (10) (четные номера), не превышает трех. Напомним, что α, β, γ – данные натуральные числа.

10. Из теорем 1 – 4 очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Каждая из следующих эквивалентных формул:*

$$x = \frac{\gamma^3 a(\alpha a^2 + \beta b^3)^{12}}{\Delta_1^{15}}, \quad y = \frac{\gamma^2 b(\alpha a^2 + \beta b^3)^8}{\Delta_1^{10}}, \quad z = \frac{\gamma(\alpha a^2 + \beta b^3)^5}{\Delta_1^6}, \tag{21}$$

где

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta_1 = (\gamma^5(\alpha a^2 + \beta b^3)^{24}(\gamma(a^2, b^3), \alpha a^2 + \beta b^3))_{\deg 30}, \tag{22}$$

$$x = \frac{\beta^5 d(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{10}}{\Delta_2^{15}}, \quad y = \frac{\beta^3(\gamma c^5 - \alpha d^2)^7}{\Delta_2^{10}}, \quad z = \frac{\beta^2 c(\gamma c^5 - \alpha d^2)^4}{\Delta_2^6}, \tag{23}$$

где

$$c, d \in \mathbb{N}, \quad \gamma c^5 > \alpha d^2, \quad (c^5, d^2)_{\deg 10} = 1, \quad \Delta_2 = (\beta^9(\gamma c^5 - \alpha d^2)^{20}(\beta(c^5, d^2), \gamma c^5 - \alpha d^2))_{\deg 30}, \tag{24}$$

$$x=\frac{\alpha^3(\gamma e^5-\beta f^3)^8}{\Delta_3^{15}},\quad y=\frac{\alpha^5 f(\gamma e^5-\beta f^3)^5}{\Delta_3^{10}},\quad z=\frac{\alpha^3 e(\gamma e^5-\beta f^3)^3}{\Delta_3^{6}},\tag{25}$$

где

$$e,f\in\mathbb{N},\ \gamma e^5>\beta f^3,\quad (e^5,f^3)_{\deg 15}=1,\ \Delta_3=(\alpha^{14}(\gamma e^5-\beta f^3)^{15}(\alpha(e^5,f^3),\gamma e^5-\beta f^3))_{\deg 30},\tag{26}$$

является общей формулой всех основных решений общего нагеллова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое основное решение общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется каждым из этих способов однозначно.

Пример 6. Одно и то же основное решение $\langle 2^3\cdot 3^{13}\cdot 23^{12}; 2^3\cdot 3^8\cdot 23^8; 2\cdot 3^5\cdot 23^5\rangle$ общего нагеллова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (21) с условием (22) при $a=3$, $b=2$; из формулы (23) с условием (24) при $c=2\cdot 3\cdot 23$, $d=2^3\cdot 3^3\cdot 23^2$ и из формулы (25) с условием (26) при $e=2^4\cdot 3^2\cdot 23^2$, $f=2^8\cdot 3^3\cdot 23^3$. Напомним, что α,β,γ – данные натуральные числа.

Цитированная литература

1. **Nagell T.** //Acta Arithmetica, IX. 1964. T. 3. P.227 – 235.

2. **Кожегельдинов С.Ш.** //Мат. журнал. Алматы. 2008. Т. 8, № 4(30). С. 73 – 77.

3. **Кожегельдинов С.Ш.** Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Новосибирск, 2002.

4. **Кожегельдинов С.Ш.** //Сб. тез. докл. III Междунар. конф. "Современные проблемы теории чисел и ее приложения". Тула, 1996. С. 77.

5. **Кожегельдинов С.Ш.** Двухтысячелетний барьер взят. Алматы, 2001.

6. **Кожегельдинов С.Ш.** //Тез. докл. III Междунар. 11-ой межвуз. конф. по математике и механике. Астана, 2006. С. 110.

7. **Кожегельдинов С.Ш.** Элемены теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. Семипалатинск, 2003.

Поступила в редакцию 22.04.2009 г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 56 – 61*

УДК 517.926

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

А. Н. Кулик, В. Л. Кулик

Национальный технический университет "КПИ"
03164 Киев ул. Подлесная, 6
Силезьский технический университет
Польша Гливица

Доказано, что каждую линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которой количество уравнений не меньше двух, всегда с помощью замены переменных Ляпунова можно преобразовать к системе с тождественно вырожденной переменной матрицей.

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где обозначено $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x \in R^n$, $A(t)$ – $n \times n$ -мерная матрица, элементами которой являются непрерывные и ограниченные на всей оси $R = (-\infty, \infty)$ действительные функции. Предположим, что система (1) является регулярной на R , то есть неоднородная система $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ при каждой фиксированной вектор-функции $f(t)$, непрерывной и ограниченной на R имеет единственное ограниченное на решение. Известно [1], что регулярность системы (1) эквивалентна ее экспоненциальной дихотомичности на всей оси R . В случае, когда матрица $A(t) \equiv A$ постоянная, система (1) будет регулярной тогда и только тогда, когда действительные части всех собственных значений матрицы A будут отличными от нуля(см.[2]). Следовательно, если определитель постоянной матрицы A равняется нулю, то система уравнений $\dot{x} = A(t)x$ не будет регулярной. Возникает вопрос: существуют ли регулярные на R системы (1) с переменной матрицей $A(t)$ такой, что

$$det A(t) \equiv 0 \tag{2}$$

при всех $t \in R$? Оказывается, что такие системы существуют, даже с периодическими коэффициентами. Количество уравнений в таких системах должно быть не меньше двух. Рассмотрим пример системы, состоящей из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [4\cos 10t + 3\sin 10t]x_1 + [-3\cos 10t + 4\sin 10t - 5]x_2, \\ \dot{x}_2 = [-3\cos 10t + 4\sin 10t + 5]x_1 + [-4\cos 10t - 3\sin 10t]x_2. \end{cases} \tag{3}$$

Keywords: *system of hyperbolic equations, non-local problem, integral displacement, method of additional parameter's introduction*

2000 Mathematics Subject Classification: 34A25

Система (3) экспоненциально дихотомична на R, т.е. регулярна на R. Это можно проверить двумя способами:
1)вычисляя производную невырожденной квадратичной формы

$$V = x_1^2 \cos 10t + 2x_1x_2 \sin 10t - x_2^2 \cos 10t$$

в силу системы (3), убеждаемся в ее знакоопределенности $\dot{V} = 8(x_1^2 + x_2^2)$;
2) производя в системе (3) замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \cos 5t & \sin 5t \\ \sin 5t & -\cos 5t \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

приходим к системе с постоянной матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

которая является регулярной (экспоненциально дихотомичной на R).
Если теперь вычислить определитель матрицы $A(t)$, соответствующий системе (3), то легко убедиться, что он не зависит от t: $detA(t) = 5^2 - 4^2 - 3^2 = 0$. Следовательно, для соответствующей матрицы $A(t)$ выполняется тождество (2) и при этом система (3) является регулярной. В связи с приведенным выше примером возник вопрос: для каждой ли системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{y} = By, \qquad y \in R^n \tag{4}$$

существует замена переменных Ляпунова

$$y = L(t)x, \tag{5}$$

приводящая систему (4) к системе (1), в которой матрица $A(t)$ удовлетворяет тождеству (2)? Решению этого вопроса и посвящается предлагаемая статья.

Напомним [2], что квадратную матрицу $L(t)$ принято называть матрицей Ляпунова, если она невырожденная, непрерывно дифференцируемая, а также следующие матрицы $L(t)$, $L^{-1}(t)$, $\dot{L}(t)$ являются ограниченными на R.

Лемма 1. *Каждая фундаментальная матрица решений системы уравнений*

$$\dot{z} = Cz, \qquad z \in R^k \tag{6}$$

с постоянной $k \times k$ *-мерной матрицей* C *(* $k \geq 2$ *) вида*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & : & 0 \\ -c_2 & 0 & : & : \\ : & : & : & c_1 \\ 0 & : & -c_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 = const > 0, \tag{7}$$

является матрицей Ляпунова.

Доказательство. После замены переменных

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} y_2, \quad z_3 = \left(\frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}}\right)^2 y_3, \quad ..., \quad z_k = \left(\frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}}\right)^{k-1} y_k \tag{8}$$

система (6) приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ : \\ \dot{y}_k \end{pmatrix} = \sqrt{c_1c_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & : & 0 \\ -1 & 0 & : & : \\ : & : & : & 1 \\ 0 & : & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_k \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Поскольку в системе (9) матрица коэффициентов является кососимметричной, то любая ее фундаментальная матрица решений $Y(t)$ обладает свойством $||Y(t)|| = ||Y(0)||$, а также $||Y^{-1}(t)|| = ||Y^{-1}(0)||$. Отсюда следует, что каждая фундаментальная матрица решений системы (9) $Y(t)$ обладает свойствами матрицы Ляпунова. Следовательно, на основании замены переменных (8), каждая фундаментальная матрица решений системы (6) также будет матрицей Ляпунова.

Лемма 2. *Среди собственных чисел $k\times k$-мерной ($k\geq 2$), симметричной, ненулевой матрицы вида*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & ... & s_{1k} \\ s_{12} & 0 & s_{23} & ... & s_{2k} \\ s_{13} & s_{23} & 0 & ... & s_{3k} \\ . & . & . & . & . \\ s_{1k} & s_{2k} & s_{3k} & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

всегда имеются положительные и отрицательные действительные числа.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму, отвечающую матрице (10)

$$V = \langle Sy, y\rangle = 2(s_{12}y_1y_2 + s_{13}y_1y_3 + ... + s_{1k}y_1y_k + ...). \tag{11}$$

Поскольку хотя бы один из коэффициентов s_{ij} отличен от нуля, то квадратичная форма (11) принимает положительные и отрицательные значения. С другой стороны, квадратичную форму (11) с помощью ортогональной замены переменных $y = Oz$ приведем к каноничному виду

$$V = \langle SOz, Oz\rangle = \lambda_1 z_1^2 + ... + \lambda_k z_k^2, \tag{12}$$

где λ_j – собственные числа матрицы (10). Отсюда следует, что если бы, например, все значения $\lambda_j \geq 0$, то квадратичная форма (12), а с ней и (11) принимали бы только неотрицательные значения при всех $y\in R^k$, что невозможно. Зафиксируем три независимых действительных параметра p_0, p_1, $p_2\in R$ и рассмотрим $k\times k$-мерную ($k\geq 2$) матрицу вида

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & 0 & ... & 0 \\ p_2 & p_0 & p_1 & ... & 0 \\ 0 & p_2 & p_0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & p_0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Лемма 3. *Для каждого ненулевого значения параметра $p_0\in R$ и каждого $p_1>0$ всегда существует такое значение параметра $p_2>0$, при котором $detP=0$.*

Доказательство. Матрица (13) записывается в следующем виде:

$$\sqrt{p_1p_2}diag\Big\{1, \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}, \Big(\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}\Big)^2, ..., \Big(\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}\Big)^{k-1}\Big\}\cdot S(x)\cdot diag\Big\{1, \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}, \Big(\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\Big)^2, ..., \Big(\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\Big)^{k-1}\Big\},$$

где обозначено

$$S(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & x & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \qquad x = p_0(p_1p_2)^{-0.5}.$$

На основании вышеприведенной леммы 2 уравнение $detS(x) = 0$ имеет положительные и отрицательные корни. Выбирая ненулевой корень этого уравнения $x = x_0$ одного знака с p_0, находим $p_2 = p_0^2(x^2p_1)^{-1}$, что и убеждает нас в справедливости леммы 3.

Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ некоторая фиксированная ненулевая двумерная матрица с действительными элементами b_{ij}. Непосредственная проверка убеждает в справедливости такого утверждения.

Лемма 4. *Существует двумерная матрица Ляпунова $L(t)$, периодическая по t, для которой выполняется тождество $det(BL(t) - \dot{L}(t)) \equiv 0$. При этом конструкция матрицы $L(t)$ предлагается следующая:*
1) если $b_{12}^2 + b_{21}^2 \neq 0$, то $L(t) = \begin{pmatrix} p\cos p_0t & p\sin p_0t \\ \sin p_0t & -\cos p_0t \end{pmatrix}$, где ненулевой параметр p выбран таким образом, чтобы квадратное уравнение $x^2 + \left(\frac{b_{12}}{p} - b_{21}p\right)x + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$ имело действительные корни x_1, x_2, а параметр p_0 выбран равным одному из ненулевых этих корней $p_0 = x_1 \neq 0$;
2) если $b_{12} = b_{21} = 0$ и $b_{11} \neq b_{22}$, то $L(t) = \begin{pmatrix} p\cos p_0t & p\sin p_0t \\ (\sin p_0t - p\cos p_0t) & (-\cos p_0t - p\sin p_0t) \end{pmatrix}$, где ненулевой параметр p выбран таким образом, чтобы квадратное уравнение $x^2 + p(b_{22} - b_{11})x + b_{11}b_{22} = 0$ имело действительные корни x_1, x_2, и полагается $p_0 = x_1 \neq 0$;
3) если $b_{12} = b_{21} = 0$ и $b_{11} = b_{22} = b$, то в качестве матрицы $L(t)$ выбираем следующую:

$$L(t) = \begin{pmatrix} \sin bt - \sqrt{2} & \cos bt \\ \cos bt & -\sin bt - \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Замечание 1. *В случае 3) приведенной выше леммы 4 в упрощенном варианте $b = 1$ возникает уравнение*

$$\dot{L} - L = H(t), \tag{15}$$

в котором нужно найти непрерывные и ограниченные на R матрицы $H(t)$ такие, чтобы $detH(t) \equiv 0$, и при этом ограниченные на R решения уравнения (15)

$$L(t) = -\int_t^{+\infty} e^{t-\tau}H(\tau)d\tau \tag{16}$$

были невырожденными, т.е. $detL(t) \neq 0$, точнее говоря, чтобы матрица (16) была матрицей Ляпунова.

Среди периодических матриц $H(t)$, которые удовлетворяют приведенным выше условиям, можно рассматривать следующие:

$$H(t) = \begin{pmatrix} (p\cos pt - \sin pt + \sqrt{p^2+1}) & (-\cos pt - p\sin pt) \\ (-\cos pt - p\sin pt) & (-p\cos pt + \sin pt + \sqrt{p^2+1}) \end{pmatrix},$$

где $p = const \neq 0$. При этом из равенства (16) получаем:

$$L(t) = \begin{pmatrix} (\sin pt - \sqrt{p^2+1}) & \cos pt \\ \cos pt & (-\sin pt - \sqrt{p^2+1}) \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. *Возможен случай, когда определитель матрицы (16) тождественно равен нулю, а определитель матрицы $H(t)$ отличен от нуля.*

Теорема. *Для каждой постоянной $n \times n$-мерной матрицы B, $n \geq 2$, существует матрица Ляпунова $L(t)$, удовлетворяющая тождеству:*

$$det(BL(t) - \dot{L}(t)) \equiv 0, \qquad \forall t \in R. \tag{17}$$

Доказательство. В системе уравнений (4) с постоянной матрицей B произведем такую замену переменных $y = T\bar{y}$, чтобы матрица $T^{-1}BT$ имела вид Жордана:

$$T^{-1}BT = diag\{J_1, J_2, ..., J_l\}, \tag{18}$$

где J_i – клетки Жордана. Предположим, например, что первая из клеток J_1 есть $k \times k$-мерной ($k \geq 2$) вида:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & : & : \\ 0 & 0 & \lambda & :0 & \\ : & : & : & : & 1 \\ 0 & : & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

где λ – действительный корень характеристического уравнения $det(B - \lambda I_n) = 0$.

Рассмотрим разность матриц:

$$J_1 - C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & : & : \\ 0 & 0 & \lambda & :0 & \\ : & : & : & : & 1 \\ 0 & : & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c_1 & : & 0 \\ -c_2 & 0 & : & : \\ : & : & : & c_1 \\ 0 & : & -c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1-c_1 & 0 & : & 0 \\ c_2 & \lambda & 1-c_1 & : & : \\ 0 & c_2 & \lambda & :0 & \\ : & : & : & : & 1-c_1 \\ 0 & : & 0 & c_2 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{19}$$

На основании леммы 3, при $\lambda \neq 0$ для каждого значения $c_1 \in (0,1)$, всегда найдется такое $c_2 > 0$, при котором определитель матрицы (19) равняется нулю. При этих же значениях $c_1 \in (0,1)$, $c_2 > 0$, рассмотрим систему (6) с постоянной матрицей (7). Ее фундаментальную матрицу обозначим $Z(t)$. Очевидно, имеет место тождество $\dot{Z}(t)Z^{-1}(t) \equiv C$. Поэтому после замены переменных $y = T \cdot diag\{Z(t), I_{n-k}\}x$ система (4) приобретает вид (1) с матрицей $A(t)$, удовлетворяющей тождеству (2), что эквивалентно выполнению (17) с матрицей Ляпунова $L(t) = T \cdot diag\{Z(t), I_{n-k}\}$.

Теперь рассмотрим случай, когда, например, в (18) действительная клетка J_2 размера $k \times k$ ($k \geq 2$) имеет вид:

$$J_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & : & 0 \\ -b & a & b & : & : \\ 0 & -b & a & :0 & \\ : & : & : & : & b \\ 0 & : & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \qquad a \in R, \qquad b > 0.$$

На основании леммы 3 матрицу (7) можно выбрать так, чтобы определитель разности матриц

$$J_2 - C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & : & 0 \\ -b & a & b & : & : \\ 0 & -b & a & :0 & \\ : & : & : & : & b \\ 0 & : & 0 & -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c_1 & : & 0 \\ -c_2 & 0 & : & : \\ : & : & : & c_1 \\ 0 & : & -c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - {}_1 & 0 & : & 0 \\ {}_2 - b & a & b - {}_1 & : & : \\ 0 & {}_2 - b & a & :0 & \\ : & : & : & : & b - {}_1 \\ 0 & : & 0 & {}_2 - b & a \end{pmatrix}$$

был равен нулю. При этом выбираем $c_1 \in (0, b)$, $c_2 > b$. Если $a = 0$, то полагаем $c_1 = c_2 = b$. Далее поступаем аналогично, как в предыдущем случае. Наконец, если в равенстве (18) удается выделить отдельную двумерную матрицу, то используем вышеприведенную лемму 4.

Следствие. *Для каждой линейной однородной системы дифференциальных уравнений* $\dot{y} = B(t)y, \;\; y \in R^n$, $n \geq 2$, *с непрерывной периодической матрицей коэффициентов* $B(t)$ *существует замена переменных Ляпунова (5), преобразующая эту систему к системе (1) с матрицей* $A(t)$, *удовлетворяющей тождеству (2).*

Цитированная литература

1. **Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. Киев, 1990.

2. **Розенвассер Е.Н.** Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М., 1977.

Поступила в редакцию 01.07.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 62 – 70*

УДК 532.526

TVD СХЕМА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

А. П. Макашева

Институт математики Министерства образования и науки
050100 Алматы ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

Разработан численный метод с TVD - аппроксимацией для трехмерных параболизованных уравнений Навье-Стокса. Приведены результаты сравнения расчетов с результатами других авторов, а также с результатами, полученными неявной схемой Бима-Уорминга. Исследовано влияние турбулентной вязкости на струйное течение.

В последние годы для нахождения численными методами решений при наличии ударных волн и контактных разрывов дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа разработан ряд эффективных разностных схем. К ним принадлежит, в частности, схема монотонного типа TVD (Total Variation Diminishing – уменьшение полной вариации). Свойства монотонности разностных схем играют важную роль. Поэтому в последние годы принципам построения разностных схем со свойствами монотонности придается большое значение. Сохранение монотонности решения связано с невозможностью появления ложных максимумов и минимумов, то есть увеличивающихся со временем "нефизических" осцилляций. Порядок точности таких схем повышается до второго и выше на гладких решениях и они хорошо приближают решения вблизи ударных волн и контактных поверхностей разрыва.

Впервые в работе Таннехиля [1] построена TVD схема применительно к двумерным параболизованным уравнениям Навье-Стокса, где TVD схема построена для сверхзвуковых областей, в дозвуковых зонах задача решается с первым порядком точности. В настоящей работе разработан вычислительный алгоритм для расчета пространственных сверхзвуковых струйных течений с использованием TVD аппроксимации для параболизованных уравнений Навье-Стокса, позволяющий эффективно проводить расчеты течений со сверхзвуковыми и дозвуковыми областями.

Постановка задачи. Рассматривается истечение системы сверхзвуковых турбулентных струй из круглого сопла в спутный сверхзвуковой поток. Воспользуемся системой декартовых координат, ось x которой направлена вниз по течению, оси y и z перпендикулярны потоку. Струи расположены симметрично как вдоль горизонтали, так и вертикали. К такого рода спутным течениям применимы параболизованные уравнения Навье-Стокса, в диффузионных членах которых исключены вторые производные по продольной координате x. В случае

Keywords: *Mach number, TVD scheme, jet flows, supersonic jets, pressure.*
2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

трехмерных стационарных течений в консервативной форме эти уравнения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial\left(\vec{F}-\vec{F}_v\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\vec{G}-\vec{G}_v\right)}{\partial z}=0, \tag{1}$$

где

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+p)\,u\end{pmatrix},\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E_t+p)\,v\end{pmatrix},\quad \vec{G}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E_t+p)\,w\end{pmatrix},$$

$$F_v=\frac{1}{Re}\left(0,\ \mu_t\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{4}{3}\mu_t\frac{\partial v}{\partial y},\ \mu_t\frac{\partial w}{\partial y},\ u\mu_t\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{4}{3}v\mu_t\frac{\partial v}{\partial y}+w\mu_t\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{k}{(\gamma-1)\,M_a^2\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial y}\right)^T,$$

$$G_v=\frac{1}{Re}\left(0,\ \mu_t\frac{\partial u}{\partial z},\ \mu_t\frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{4}{3}\mu_t\frac{\partial w}{\partial z},\ u\mu_t\frac{\partial u}{\partial z}+v\mu_t\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{4}{3}w\mu_t\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{k}{(\gamma-1)\,M_a^2\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial z}\right)^T,$$

$$p=(\gamma-1)\left[E_t-\frac{1}{2}\left(\rho u^2+\rho v^2+\rho w^2\right)\right],\quad c_v=\frac{1}{\gamma\,(\gamma-1)\,M_a^2},$$

$$T=\left(\frac{1}{\rho\,c_v}\right)\left[E_t-\frac{1}{2}\left(\rho u^2+\rho v^2+\rho w^2\right)\right].$$

Система (1) записана в безразмерной форме в общепринятых обозначениях. В качестве определяющих параметров приняты параметры на срезе сопла (u_0 , ρ_0 , T_0), а характерным размером – радиус среза сопла r. Давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_0\,u_0^2$.

Здесь $\gamma=c_p/c_v$ – отношение удельных теплоемкостей, c_p , c_v– теплоемкость при постоянном давлении и объеме, μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, M_a – число Маха струи, Pr –число Прандтля, Re - число Рейнольдса.

Предполагается, что газ - совершенный с показателем адиабаты $\gamma=1.4$.

Начальные и граничные условия имеют следующий вид:
- при $x=0$
в струе $u=1$, $T=1$, $\rho=1$, $v=w=0$,
в потоке $T=1$, $u=\frac{M_a}{M_\infty}\sqrt{T}$, $p=\frac{1}{\gamma n M_a^2}$, $v=w=0$;
- при $x>0$
$y=0,\quad y=L:\quad v=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}=0,$
$z=0,\quad z=L:\quad w=0,\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial z}=0.$

Для замыкания системы уравнений (1) коэффициент турбулентной вязкости μ_t определяется с помощью известной алгебраической модели [2].

Метод решения. Для исключения распространения возмущений вверх по потоку через дозвуковые области поля течения аналогично [3], в настоящей работе вектор потока $\vec{E}$ расщепляется на две составляющие:

$$\vec{E}=\vec{E}^*+\vec{E}^p,\vec{E}^*=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+\omega p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+p)\,u\end{pmatrix},\quad \vec{E}^p=\begin{pmatrix}0\\ (1-\omega)\,p\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Согласно (2) в уравнении движения по продольной координате x в качестве множителя перед градиентом давления появляется параметр ω. Из результатов анализа собственных значений следует, что в дозвуковых областях система (2) является системой гиперболо-параболического типа, если $\omega \leq f(M_x) = \sigma\gamma M_x^2$, а в сверхзвуковой области – если $\omega = 1$ ($M_x = u/c$ - местное число Маха).

Основные идеи построения TVD схемы для параболизованных уравнений Навье-Стокса будут показаны на примере одномерного невязкого случая (для упрощения записи рассматривается только направление y, так как потоки в направлении z строятся аналогично):

$$\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0,$$

которое также представимо в виде

$$\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial x} + C\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

здесь $C = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{E}^*} = R\Lambda R^{-1}$ – матрица Якоби, R, R^{-1} – матрицы, составленные из правых и левых собственных векторов C, Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы C.

Систему (3) слева умножаем на матрицу R^{-1} . В случае линейных систем уравнений можно потребовать уменьшения полной вариации характеристических переменных $\vec{W} = R^{-1}\vec{E}^*$. Будем считать матрицы R, R^{-1} и Λ постоянными, тогда систему уравнений (3) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + \Lambda\frac{\partial \vec{W}}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Конечно-разностная аппроксимация (4) имеет следующий вид:

$$\vec{W}_i^{n+1} = \vec{W}_i^n - \frac{\Delta x}{\Delta y}\Lambda\left(\vec{W}_{i+1/2} - \vec{W}_{i-1/2}\right). \tag{5}$$

Здесь поперечные потоки могут рассматриваться как на n-ом слое, так и на $n+1$ слое; целые индексы относятся к граням ячеек, а полуцелые индексы - к центрам ячеек.

При рассмотрении задачи Римана о распаде произвольного разрыва для получения аппроксимации высокого порядка точности характеристические переменные $\vec{W}$ расщепляются следующим образом:

$$\Lambda\vec{W}_{i\pm1/2} = \Lambda^+\vec{W}_{i\pm1/2}^L + \Lambda^-\vec{W}_{i\pm1/2}^R,$$

где $\vec{W}^L, \vec{W}^R$ – значения $\vec{W}$, соответственно, слева и справа от границы с номером $i \pm 1/2$.

Подставляя эти расщепления в систему (5) и используя кусочно-параболическое распределение в виде [4]:

$$\vec{W}(y) = \vec{W}_i^n + (y - y_i)\left(\frac{\partial\vec{W}}{\partial y}\right)_i^n + \varphi\,(y - y_i)^2\left(\frac{\partial^2\vec{W}}{\partial y^2}\right)_i^n \tag{6}$$

($\varphi < 1$- коэффициент схемы), получаем схему первого порядка плюс корректирующие члены с введением нелинейной функции ограничения ψ_i [5]:

$$\vec{W}_i^{n+1} = \vec{W}_i^n - \frac{\Delta x}{\Delta y}\Lambda^+\left[\vec{W}_i^n - \vec{W}_{i-1}^n + \frac{1+\varphi}{4}\psi_i^+\left(\vec{W}_{i+1}^n - \vec{W}_i^n\right) + \frac{1-\varphi}{4}\psi_i^-\left(\vec{W}_i^n - \vec{W}_{i-1}^n\right) - \right.$$

$$-\frac{1+\varphi}{4}\psi_{i-1}^{+}\left(\vec{W}_i^n-\vec{W}_{i-1}^n\right)-\frac{1-\varphi}{4}\psi_{i-1}^{-}\left(\vec{W}_{i-1}^n-\vec{W}_{i-2}^n\right)\Bigg]-\frac{\Delta x}{\Delta y}\Lambda^{-}\Big[\vec{W}_{i+1}^n-\vec{W}_i^n-$$

$$-\frac{1-\varphi}{4}\psi_{i+1}^{+}\left(\vec{W}_{i+2}^n-\vec{W}_{i+1}^n\right)-\frac{1+\varphi}{4}\psi_{i+1}^{-}\left(\vec{W}_{i+1}^n-\vec{W}_i^n\right)+\frac{1-\varphi}{4}\psi_i^{+}\left(\vec{W}_{i+1}^n-\vec{W}_i^n\right)+$$

$$+\frac{1+\varphi}{4}\psi_i^{-}\left(\vec{W}_i^n-\vec{W}_{i-1}^n\right)\Bigg], \tag{7}$$

где $\psi_i^+=\psi\left(\vec{r}_i^{\,+}\right)$, $\quad \vec{r}_i^{\,+}=\frac{\vec{W}_i-\vec{W}_{i-1}}{\vec{W}_{i+1}-\vec{W}_i}$; $\quad \vec{r}_i^{\,-}=\frac{\vec{W}_{i+1}-\vec{W}_i}{\vec{W}_i-\vec{W}_{i-1}}$.

Произвольную трехточечную разностную схему можно записать в виде:

$$\vec{W}_i^{n+1}=\vec{W}_i^n+c_{i,1}^n\left(\vec{W}_{i+1}^n-\vec{W}_i^n\right)-c_{i,-1}^n\left(\vec{W}_i^n-\vec{W}_{i-1}^n\right) \tag{8}$$

где $c_{i,1}=-\frac{\Delta x}{\Delta y}\Lambda^-\,[1+\frac{\gamma(\vec{r}_i^{\,-})}{\vec{r}_i^{\,-}}-\gamma\left(\vec{r}_{i+1}^{\,-}\right)]$,

$$c_{i,-1}=\frac{\Delta x}{\Delta y}\Lambda^+\,[1+\frac{\gamma\left(\vec{r}_i^{\,+}\right)}{\vec{r}_i^{\,+}}-\gamma\left(\vec{r}_{i-1}^{\,+}\right)],$$

в котором $\gamma\left(\vec{r}_i^{\,\pm}\right)=\frac{1+\varphi}{4}\psi\left(\vec{r}_i^{\,\pm}\right)+\frac{1-\varphi}{4}\psi\left(\frac{1}{\vec{r}_i^{\,\pm}}\right)\vec{r}_i^{\,\pm}$, $\psi_i^{\pm}=\psi\left(\vec{r}_i^{\,\pm}\right)$, $\vec{r}_i^{\,+}=\frac{\vec{W}_i-\vec{W}_{i-1}}{\vec{W}_{i+1}-\vec{W}_i}$, $\vec{r}_i^{\,-}=\frac{\vec{W}_{i+1}-\vec{W}_i}{\vec{W}_i-\vec{W}_{i-1}}$.

Пусть коэффициенты удовлетворяют следующим неравенствам:

$$1+\frac{\gamma\left(\vec{r}_i^{\,+}\right)}{\vec{r}_i^{\,+}}-\gamma\left(\vec{r}_{i-1}^{\,+}\right)\geq 0, 1+\frac{\gamma\left(\vec{r}_{i+1}^{\,-}\right)}{\vec{r}_{i+1}^{\,-}}-\gamma\left(\vec{r}_{i+2}^{\,-}\right)\geq 0,$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}\left\{\Lambda^+\,[1+\frac{\gamma\left(\vec{r}_i^{\,+}\right)}{\vec{r}_i^{\,+}}-\gamma\left(\vec{r}_{i-1}^{\,+}\right)]-\Lambda^-\,[1+\frac{\gamma\left(\vec{r}_i^{\,-}\right)}{\vec{r}_i^{\,-}}-\gamma\left(\vec{r}_{i+1}^{\,-}\right)]\right\}\leq 1. \tag{9}$$

Тогда схема (7) является TVD схемой, то есть сохраняет в определенном смысле монотонность, так как она совпадает с достаточными условиями монотонности схемы (7). В условиях (9) третье неравенство, подобное условию Куранта-Фридрихса-Леви, приводит к ограничению на шаг интегрирования по x , а из первого и второго неравенств получаем ограничитель потоков в виде:

$$\psi\left(\vec{r}_{i-1}^{\,+}\right)=minmod\left(1,\,b\vec{r}_{i-1}^{\,+}\right), 1\leq b\leq\frac{3-\varphi}{1-\varphi}\quad -$$

параметр схемы.

После осуществления перехода от переменных $\vec{W}$ – инвариантов Римана к переменным $\vec{E}^*$ схема (7) будет иметь вид:

$$\vec{E}_i^{*n+1}=\vec{E}_i^{*n}-\frac{\Delta x}{\Delta y}\Bigg[\vec{H}_{i+1/2}^n+\frac{1+\varphi}{4}R\,\Lambda^+\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}_{i+1}^{*n}-\vec{E}_i^{*n}\right),b\,R^{-1}\,\left(\vec{E}_i^{*n}-\vec{E}_{i-1}^{*n}\right)\right)+$$

$$+\frac{1-\varphi}{4}R\,\Lambda^+\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}_i^{*n}-\vec{E}_{i-1}^{*n}\right),b\,R^{-1}\,\left(\vec{E}_{i+1}^{*n}-\vec{E}_i^{*n}\right)\right)-$$

$$-\frac{1-\varphi}{4}R\,\Lambda^-\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}_{i+2}^{*n}-\vec{E}_{i+1}^{*n}\right),b\,R^{-1}\,\left(\vec{E}_{i+1}^{*n}-\vec{E}_i^{*n}\right)\right)-$$

$$-\frac{1+\varphi}{4}R\Lambda^-\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}_{i+1}^{*n}-\vec{E}_i^{*n}\right),bR^{-1}\,\left(\vec{E}_{i+2}^{*n}-\vec{E}_{i+1}^{*n}\right)\right)-$$

$$-\vec{H}_{i-1/2}^n-\frac{1+\varphi}{4}R\,\Lambda^+\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}_i^{*n}-\vec{E}_{i-1}^{*n}\right),b\,R^{-1}\,\left(\vec{E}_{i-1}^{*n}-\vec{E}_{i-2}^{*n}\right)\right)+$$

$$-\frac{1-\varphi}{4} R\,\Lambda^{+}\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}^{*n}_{i-1}-\vec{E}^{*n}_{i-2}\right), b\,R^{-1}\left(\vec{E}^{*n}_{i}-\vec{E}^{*n}_{i-1}\right)\right)+$$
$$+\frac{1-\varphi}{4} R\,\Lambda^{-}\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}^{*n}_{i+1}-\vec{E}^{*n}_{i}\right), b\,R^{-1}\left(\vec{E}^{*n}_{i}-\vec{E}^{*n}_{i-1}\right)\right)+$$
$$\left.+\frac{1+\varphi}{4} R\Lambda^{-}\mathrm{minmod}\left(R^{-1}\left(\vec{E}^{*n}_{i}-\vec{E}^{*n}_{i-1}\right), bR^{-1}\left(\vec{E}^{*n}_{i+1}-\vec{E}^{*n}_{i}\right)\right)\right], \qquad (10)$$

где $\vec{H}^{n}_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left(\vec{F}_{i+1}+\vec{F}_{i}\right)-\frac{1}{2}sgn\left(R\Lambda R^{-1}\right)\left(\vec{F}_{i+1}-\vec{F}_{i}\right)$.

Применительно к исходной системе уравнений (1) схема (10) запишется:

$$\vec{E}^{*n+1}_{i,j}=\vec{E}^{*n}_{i,j}-\Delta x\frac{\vec{F}_{i+1,j}-\vec{F}_{i-1,j}}{2\Delta y}+\frac{\Delta x}{2\Delta y}\left(sgnC\right)_{i+1/2,j}\left(\vec{F}_{i+1,j}-\vec{F}_{i,j}\right)-$$
$$-\frac{\Delta x}{2\Delta y}\left(sgnC\right)_{i-1/2,j}\left(\vec{F}_{i,j}-\vec{F}_{i-1,j}\right)$$
$$-\Delta x\frac{\vec{G}_{i,j+1}-\vec{G}_{i,j-1}}{2\Delta z}+\frac{\Delta x}{2\Delta z}\left(sgnD\right)_{i,j+1/2}\left(\vec{G}_{i,j+1}-\vec{G}_{i,j}\right)-$$
$$-\frac{\Delta x}{2\Delta z}\left(sgnD\right)_{i,j-1/2}\left(\vec{G}_{i,j}-\vec{G}_{i,j-1}\right)-\Delta x\frac{\tilde{\vec{F}}_{i+1/2,j}-\tilde{\vec{F}}_{i-1/2,j}}{\Delta y}-$$
$$-\Delta x\frac{\tilde{\vec{G}}_{i,j+1/2}-\tilde{\vec{G}}_{i,j-1/2}}{\Delta z}+\Delta x\frac{\vec{F}_{vi+1/2,j}-\vec{F}_{vi-1/2,j}}{\Delta y}+\Delta x\frac{\vec{G}_{vi,j+1/2}-\vec{G}_{vi,j-1/2}}{\Delta z}-\left(\vec{E}^{p,n}_{i,j}-\vec{E}^{p,n-1}_{i,j}\right), \qquad (11)$$

где

$$\tilde{\vec{F}}_{i+1/2,j}=\tfrac{1+\varphi}{4}R_{i+1/2,j}\Lambda^{+}_{i+1/2,j}minmod\left(R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i+1,j}-\vec{E}^{n}_{i,j}\right), b\,R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i,j}-\vec{E}^{n}_{i-1,j}\right)\right)+$$
$$+\tfrac{1-\varphi}{4}R_{i+1/2,j}\Lambda^{+}_{i+1/2,j}minmod\left(R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i,j}-\vec{E}^{n}_{i-1,j}\right), b\,R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i+1,j}-\vec{E}^{n}_{i,j}\right)\right)-$$
$$-\tfrac{1-\varphi}{4}R_{i+1/2,j}\Lambda^{-}_{i+1/2,j}minmod\left(R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i+2,j}-\vec{E}^{n}_{i+1,j}\right), b\,R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i+1,j}-\vec{E}^{n}_{i,j}\right)\right)-$$
$$-\tfrac{1+\varphi}{4}R_{i+1/2,j}\Lambda^{-}_{i+1/2,j}minmod\left(R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i+1,j}-\vec{E}^{n}_{i,j}\right), b\,R^{-1}_{i+1/2,j}\left(\vec{E}^{n}_{i+2,j}-\vec{E}^{n}_{i+1,j}\right)\right).$$

Аналогично определяются $\tilde{\vec{F}}_{i,j-1/2}$, $\tilde{\vec{G}}_{i,j-1/2}$ и $\tilde{\vec{G}}_{i,j+1/2}$.

Конечно-разностное уравнение (11) аппроксимирует пространственные производные с первым ($\psi^{\pm}=0$) или с повышенным ($\psi^{\pm}\neq 0$) порядком аппроксимации. Порядок аппроксимации (П.А.) схемы: П.А.$=-\left(\frac{\varphi-1/3}{4}\right)(\Delta)^2\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{E}^*}\frac{\partial^3\vec{E}^*}{\partial y^3}+\frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{E}^*}\frac{\partial^3\vec{E}^*}{\partial z^3}\right)$.

Параметр φ определяет порядок точности схемы. Третьему порядку соответствует значение $\varphi=1/3$, второму $\varphi=-1,0,1$. При $\varphi=-1$ аппроксимация сводится к полностью односторонним, при $\varphi=0$ – к центральным, а при $\varphi=1/3,1$ – к смещенным против потока разностям.

Результаты расчетов и их анализ.

Численные исследования рассматривались в следующем диапазоне характерных параметров: $\gamma=1.4$, $1<M_a\leq 5$, $2\leq M_\infty\leq 10$, $1\leq n\leq 10$, $T_0=T_\infty=1$. Использовалась сетка в поперечных направлениях с 100x100 узлами, шаг по маршевой координате варьировался в пределах $\Delta x=0.006\div 0.15$.

Ниже приведены результаты расчетов истечения системы круглых сверхзвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток.

На рисунке 1 ($M_a=3$, $M_\infty=5$, $n=10$, $T_0=T_\infty=1$) представлены профили продольной составляющей скорости (рисунок 1а) и давления (рисунок 1б), рассчитанных по TVD схеме (сплошная линия), методом характеристик [5] (пунктирная линия) и по схеме Уорминга-Катлера-Ломакса (штрихпунктирная линия). Как видно из графиков, разработанная TVD схема, как и метод характеристик, хорошо отслеживает волны возмущения, однако, TVD схема несколько размазывает скачок уплотнения вследствие понижения порядка аппроксимации до первого в окрестности локальных экстремумов. Расчеты показывают, что течение практически не зависит от турбулентной вязкости, что подтверждается картиной распределения изобар рассчитанных с учетом вязкости (рисунок 2а) и без (рисунок 2б), а также слоем смешения с наличием вязкости (рисунок 2в) и без него (рисунок 2г).

В качестве следующего тестового примера рассматривалось истечение сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток с числами $M_a = 2.2$, $M_\infty = 2.0$, $n = 1$. На рисунке 3 приведены кружочками – результаты данных [6], полученных по методу С.К. Годунова, звездочками – расчеты Бай-Ши-й, сплошные линии – результаты авторов. Получено удовлетворительное согласование между собой.

Поступила в редакцию 01.09.2009г.

Цитированная литература

1. **Lawrence Scott L. and Tannehill J.C.** //AIAA Journal. 1989. V. 27, № 9. P. 1 – 17.
2. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкости. М., 1991. Т. 2.
3. **Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М., 1990. Т. 1, 2.
4. **Иванов М.Я., Крупа В.Г., Нигматуллин Р.З.** //Журнал вычислительной и математической физики. 1989. Т. 29, № 6. С. 888 – 901.
5. **Бондарев Е.Н., Горина А.Н.** //Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 114 – 118.
6. **Бай Ши-И.** Теория струй. М., 1960.

Поступила в редакцию 15.07.2009г.

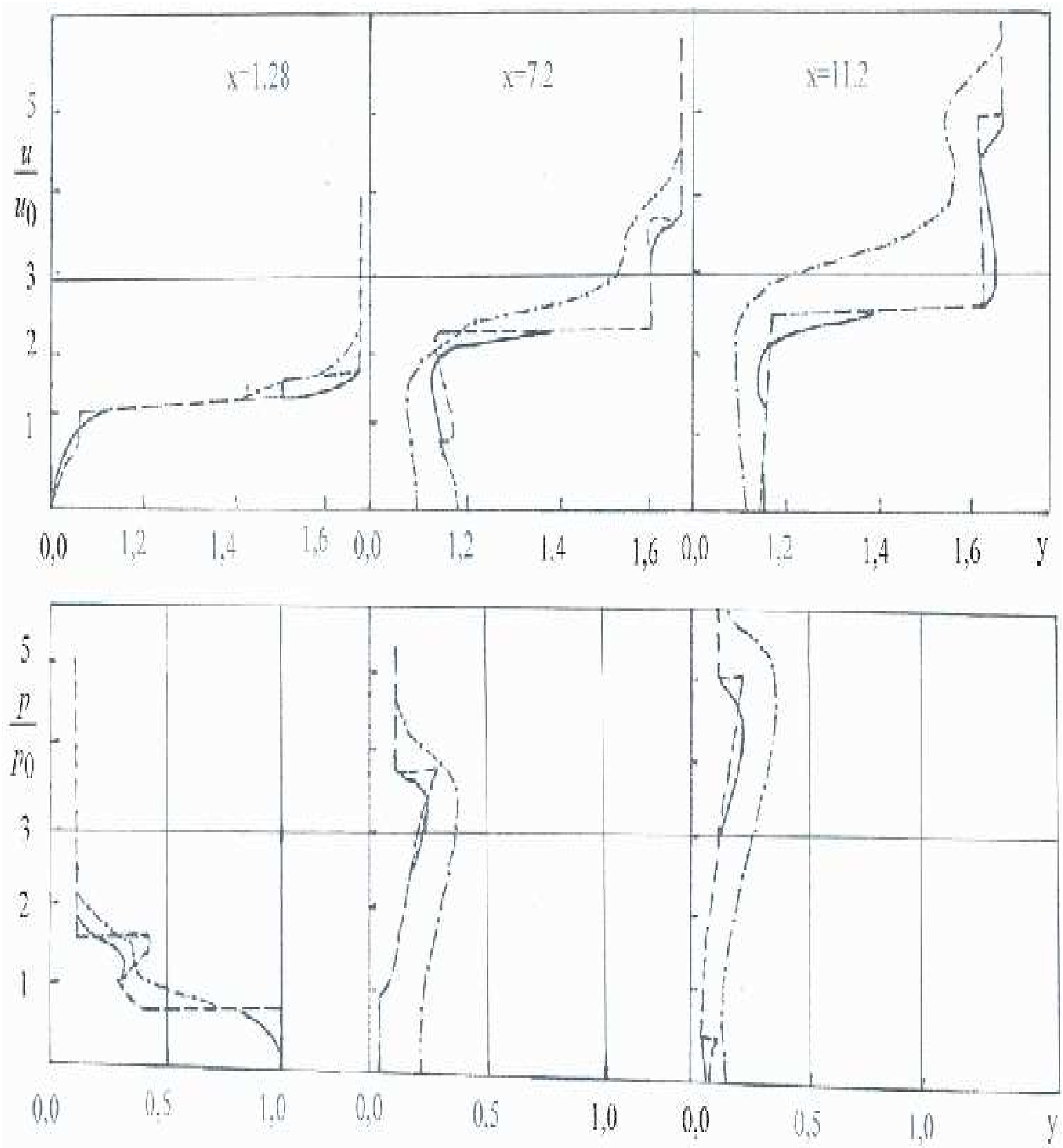

Рис. 1: Расчетные профили продольной составляющей скорости и статического давления сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток при $M_a = 3, \quad M_\infty = 5, \ n = 10, \quad T_0 = T_\infty = 1$

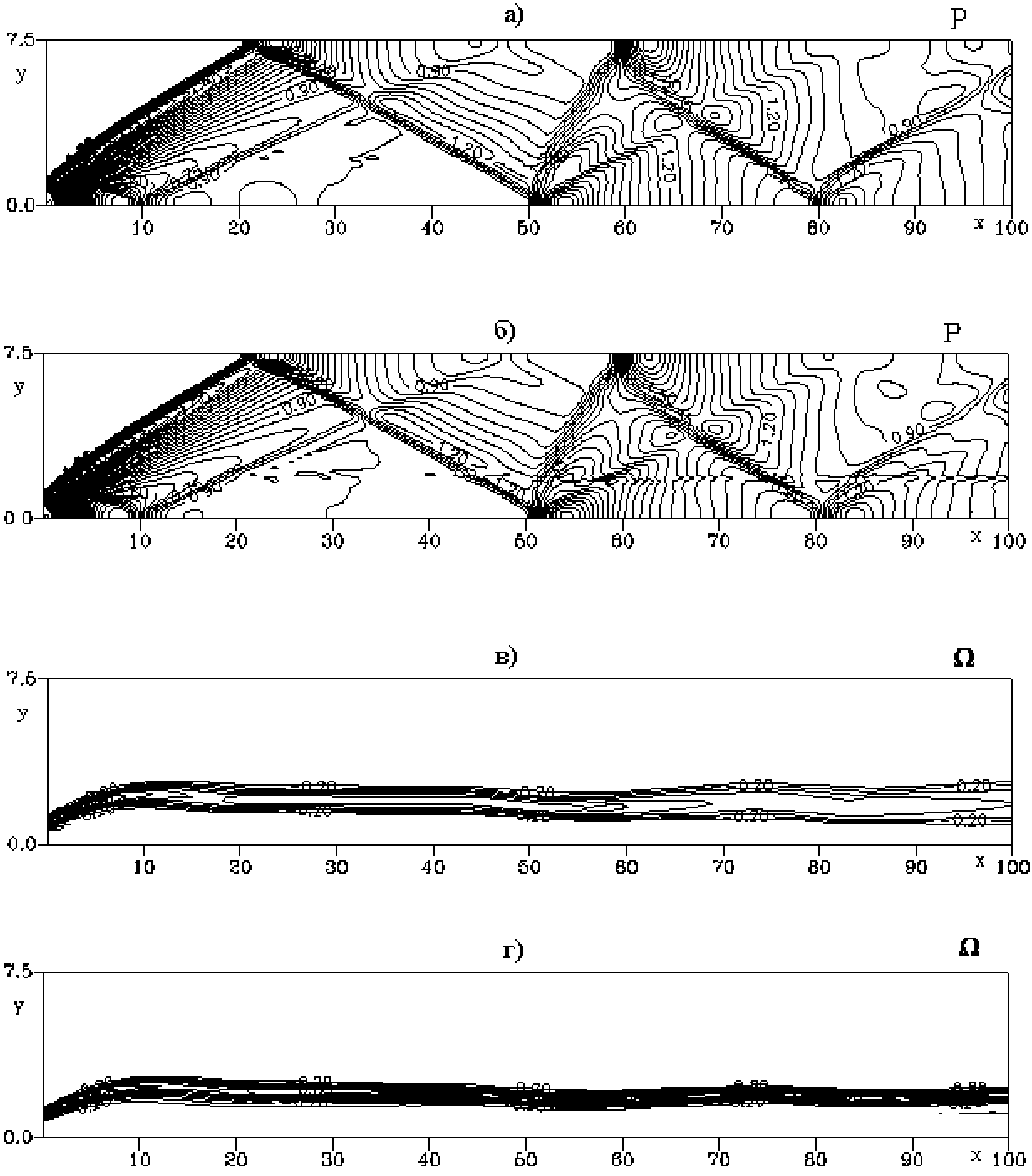

Рис. 2: Сравнение режимных параметров при $M_a = 3,\ M_\infty = 5,\ n = 10,\ T_0 =\ T_\infty = 1$: а), б) изобары; в), г) изолинии завихренности а), в) с вязкостью; б), г) без вязкости

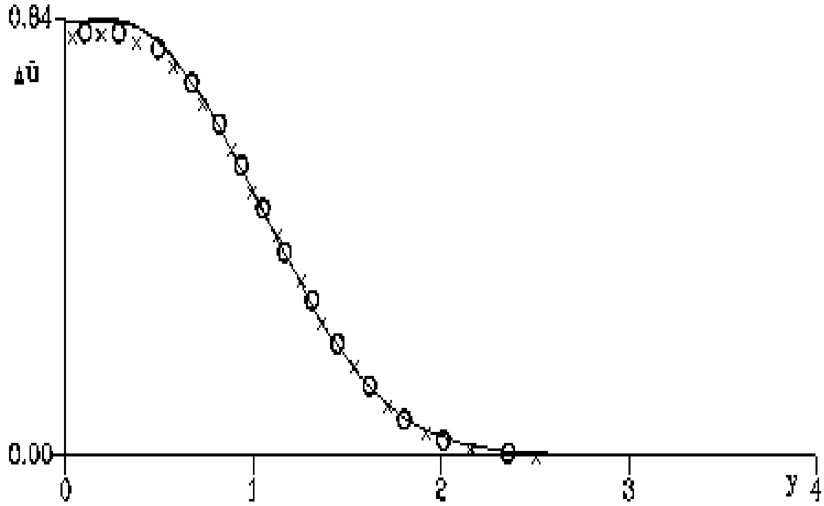

Рис. 3: Продольная составляющая скорость в сечении x=25 при $M_a = 2.2$, $M_\infty = 2$, $n = 1$, $T_0 = T_\infty = 1$

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 71 – 77*

УДК 517.946

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

М.Б. Муратбеков, М.М. Муратбеков

Таразский государственный педагогический институт,
484041 Тараз проспект Жамбыла, 16 mmuratbekov@hotbox.ru
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
010008 Астана ул. Мунайтпасова, 5 mmuratbekov@kazsu.kz

Изучаются спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа заданных в неограниченной области. Приводятся условия, обеспечивающие двусторонние оценки распределения s-чисел (сингулярных чисел) обратного оператора.

В области $\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$ рассмотрим дифференциальный оператор гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(y)\, u_x + c(y)\, u,$$

первоначально определенный на множестве $C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям $u(-\pi, y) = u(\pi, y)$, $u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y)$ и финитных по переменной y. Заметим, что оператор L допускает замыкание, которое обозначим через L. Среди работ, близких по тематике, отметим работы $[1-11]$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ удовлетворяют условию:

$$i) \quad |a(y)| \geqslant \delta_0 > 0, \;\; c(y) \geqslant \delta > 0 - \text{непрерывные функции в } R = (-\infty, \infty).$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* $i)$. *Тогда оператор* $L+\mu E$ *при достаточно больших* $\mu > 0$ *непрерывно обратим.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* $i)$. *Тогда резольвента оператора* L *компактна тогда и только тогда, когда для любого* $\omega > 0$

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_{y}^{y+\omega} c(t)\, dt = \infty.$$

Keywords: *wave operator, singular numbers, bilateral estimates*
2000 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35P15

Ненулевые s-числа оператора $(L+\mu)^{-1}$ будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности. Введем следующую функцию $N(\lambda)=\sum\limits_{s_k>\lambda} 1$ количества s_k больших $\lambda>0$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда справедливо оценка:*

$$c^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}mes\left(y\in R: Q_n^*(y)\leqslant c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\leqslant N(\lambda)\leqslant c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-1}mes\left(y\in R: K_n^*(y)\leqslant c\lambda^{-1}\right),$$

где

$$Q_n^*(y)=\inf_{d>0}\left\{\frac{1}{d}: d^{-3}\geqslant\int\limits_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}}\left|n^2+ina(x)+c(x)+\mu\right|^2dx\right\},$$

$$K_n^*(y)=\inf_{d>0}\left\{\frac{1}{d}:\frac{1}{d}\geqslant\int\limits_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}}\left(|na(x)|+c(x)+\mu\right)dx\right\}.$$

Ранее функция такого вида была введена М. Отелбаевым [6, 7] при исследовании спектра оператора Шредингера.

Отметим, что результаты данной работы частично анонсированы в [11].

2. Вспомогательные леммы и неравенства.

Рассмотрим оператор

$$(l_{n,j}+\mu E)\,u=-u''(y)+\left(n^2+ina(y)+c(y)+\mu\right)u(y),\quad (n=0,\pm1,\pm2,...),$$

определенный на множестве функций u, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$u\in C_0^2\left(\overline{\Delta}_j\right),\qquad u\left(\Delta_j^-\right)=u\left(\Delta_j^+\right)=0.$$

Здесь Δ_j^+ и Δ_j^- правые и левые концы интервалов Δ_j, где, $\Delta_j=(j-1,j+1)$, $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда при $\mu\geqslant0$ к замкнутому оператору $l_{n,j}+\mu E$ существует непрерывный обратный $(l_{n,j}+\mu E)^{-1}$, определенный в $L_2(\Delta_j)$.*

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда справедливы неравенства:*

$$\left\|(l_{n,j}+\mu E)^{-1}\right\|_{2\to2}\leqslant\frac{c}{\mu^{\frac{1}{2}}},\tag{1}$$

где $c>0$ – постоянное число, независящее от $n,j,\mu>0$;

$$\left\|\frac{d}{dy}(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\leqslant\frac{c}{\mu^{\frac{1}{4}}},\tag{2}$$

где $c>0$ – постоянное число, не зависящее от $n,j,\mu>0$;

$$c\|(l_{n,j}+\mu)u\|_2\geqslant\left(\|u'\|_2+\left\|\sqrt{c(y)}u\right\|_2+\left\|\sqrt{na(y)}u\right\|_2\right),\ \textit{где}\quad u\in D(l_{n,j}),\ n=\pm1,\pm2,...,\tag{3}$$

$c > 0$ - *постоянное число, независящее от* $u(y), n, j, \mu > 0$.

Рассмотрим оператор

$$(l_n + \mu E) u = -u'' + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \mu\right) u, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

первоначально определенный на $C_0^\infty(R)$.

Известно, что оператор $l_n + \mu E$ допускает замыкание, которое обозначим через $l_n + \mu E$.

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие* i) *. Тогда справедлива оценка:*

$$\|(l_n + \mu E) u\|_2 \geqslant |n|\delta_0 \|u\|_2, \ u \in D(l_n), \ n = \pm 1, \pm 2, ...,$$

а при $n = 0$: $\|(l_0 + \mu E) u\|_2 \geqslant \delta \|u\|_2, \ u \in D(l_0)$.

Доказательство. Для всех $u \in C_0^\infty(R)$, интегрируя по частям, имеем

$$|< (l_n + \mu E) u, -inu >| = \left| -in \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left|u'\right|^2 + \left(-n^2 + c(y) + \mu\right) |u|^2 \right] dy + \int\limits_{-\infty}^{\infty} n^2 a(y) |u|^2 dy \right|.$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем, что

$$\|(l_n + \mu E) u\|_2^2 \geqslant n^2 \delta_0^2 \|u\|_2^2, \ u \in C_0^\infty(R).$$

В силу непрерывности нормы последняя оценка справедлива для всех $u \in D(l_n)$. Лемма 2.3 доказана.

Возьмем набор $\{\varphi_j\}$ неотрицательных функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что

$$\sum_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1, \quad \sup \varphi_{_j}(y) \subseteq \Delta_j, \quad \bigcup_j \Delta_j = R.$$

Через K обозначим оператор, определенный равенством

$$Kf = \sum_{\{j\}} \varphi_j (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f, \quad f(y) \in L_2(R). \tag{4}$$

Лемма 2.4. *Пусть выполнено условие* i) *. Тогда для любой функции* $f \in C_0^\infty(R)$ *справедливо следующее равенство*

$$(l_n + \mu E) Kf = f + B_\mu f, \tag{5}$$

где $B_\mu f = \sum\limits_{\{j\}} \varphi_j^? (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f + 2 \sum\limits_{\{j\}} \varphi_j' \frac{d}{dy} (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f$ *(суммы без указания пределов берутся по всем целым* j) *.*

Доказательство. Так как $f \in C_0^\infty(R)$, то сумма (4) конечна, поэтому следующие вычисления законны:

$$(l_n + \mu E) Kf = \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\tfrac{d^2}{dy^2} + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \mu\right) (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f \right) + \sum_{\{j\}} \varphi_j'' (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \times$$
$$\varphi_j f + 2 \sum_{\{j\}} \varphi_j' \tfrac{d}{dy} (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f = f + \sum_{\{j\}} \varphi_j'' (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f + 2 \sum_{\{j\}} \varphi_j' \tfrac{d}{dy} (l_{n,j} + \mu E)^{-1} \varphi_j f.$$

Здесь учитывалось, что $\sum\limits_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1$ и действие оператора $(l_n + \mu E)$ на отрезке Δ_j совпадает с действием оператора $l_{n,j} + \mu E$.

Лемма 2.5. *Пусть выполнено условие* i) *. Тогда найдется* $\mu > 0$ *такое, что* $\|B_\mu\|_{2 \to 2} < 1$.

Доказательство. Пользуясь леммой 2.2 и свойствами функции φ_j, имеем:

$$\|B_\mu f\|_2^2 \leqslant c\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\right)\|f\|_2^2.$$

Последнее неравенство при достаточно больших положительных μ доказывает лемму.

Лемма 2.6. *Пусть выполнено условие* $i)$ *. Тогда оператор* $(l_n+\mu E)$ *при достаточно больших* $\mu>0$ *непрерывно обратим и справедливо равенство:*

$$(l_n+\mu E)^1 = K\left(E+B_\mu\right)^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Оператор $(E-B_\mu)$ ограничен со своим обратным. Поэтому множество $M=\{\varphi=(E+B_\mu)\,f : f\in C_0^\infty(R)\}$ плотно в $L_2(R)$. Из равенства (5) при $\varphi=(E+B_\mu)\,f$, $f\in C_0^\infty(R)$, получаем, что $K\left(E+B_\mu\right)^{-1}\varphi\in D(l_n)$ и $(l_n+\mu E)\,K\left(E+B_\lambda\right)^{-1}\varphi=\varphi.$ Отсюда имеем, что $y=K\left(E+B_\lambda\right)^{-1}f$ является решением уравнения $(l_n+\mu E)\,y=f.$ Единственность следует из леммы 2.3. Лемма 2.6. доказана.

Лемма 2.7. *Пусть выполнено условие* $i)$ *. Тогда справедливы следующие неравенства:*

а) $\left\|\sqrt{c(y)}\,(l_n+\mu E)^{-1}\right\|_{2\to2}<\infty;$

б) $\left\|\sqrt{|n|a(y)}\,(l_n+\mu E)^{-1}\right\|_{2\to2}<\infty;$

в) $\left\|\frac{d}{dy}\,(l_n+\mu E)^{-1}\right\|_{2\to2}<\infty.$

Доказательство. Согласно лемме 2.6 имеем:

$$\left\|\sqrt{c(y)}\,(l_n+\mu E)^{-1}f\right\|_2^2=\left\|\sqrt{c(y)}K\left(E-B_\lambda\right)^{-1}f\right\|_2^2\leqslant c\sup_{\{j\}}\left\|\sqrt{c(y)}\varphi_j\left(l_{n,j}+\mu E\right)^{-1}\right\|_{2\to2}^2\|f\|_2^2,$$

$c>0$ – постоянное число, не зависящее от j и n.

Отсюда и из неравенства (3) получаем, что

$$\left\|\sqrt{c(y)}\,(l_n+\mu E)^{-1}\right\|_{2\to2}\leqslant c\sup_{\{j\}}\left\|\sqrt{c(y)}\varphi_j\left(l_{n,j}+\mu E\right)^{-1}\right\|_{2\to2}<\infty. \tag{7}$$

Пункт а) леммы 2.7 доказан. Поступая таким же образом, как при доказательстве неравенства (7), получаем доказательства пунктов б) и в). Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. *Пусть выполнено условие* $i)$ *. Тогда оператор* l_n *вполне непрерывен если и только если для любого* $\omega>0$

$$\lim_{|y|\to\infty}\int\limits_y^{y+\omega}c(t)\,dt=\infty.$$

Доказательство. Из леммы 2.7 следует, что

$$R\left(l_n^{-1}\right)\subset L_2^1\left(R,c(y)\right),$$

где $L_2^1\left(R,c(y)\right)$ – пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(R)$ относительно нормы

$$\left\|u:L_2^1\left(R,c(y)\right)\right\|=\left(\int\limits_R^\infty\left[\left|u'\right|^2+c(y)\left|u\right|^2\right]dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь для завершения доказательства остается повторить выкладки и рассуждения, которые использованы в работах [6,7].

Введем следующие множества:

$$M = \left\{ u \in L_2(R): \ \|(l_n + \mu)u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leqslant 1 \right\},$$

$$\tilde{M}_c = \left\{ u \in L_2(R): \ \|u'\|_2^2 + \left\| \sqrt{|n||a(y)|}u \right\|_2^2 + \left\| \sqrt{c(y) + \mu}\, u \right\|_2^2 \leqslant c \right\},$$

$$\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}} = \left\{ u \in L_2(R): \ \|-u''\|_2^2 + \left\| n^2 u \right\|_2^2 + \|ina(y)\, u\|_2^2 + \|(c(y) + \mu)\, u\|_2^2 \leqslant c^{-1} \right\}.$$

Лемма 2.9. *Пусть выполнено условие* $i)$. *Тогда справедливы включения* $\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_c$, *где* $c > 0$ *– постоянная, не зависящая от* u *и* n.

Лемма 2.10. *Пусть выполнено условие* $i)$. *Тогда справедливо оценка* $c^{-1}\tilde{\tilde{d}}_k \leqslant s_{k+1} \leqslant c\tilde{d}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* $c > 0$ *– некоторая постоянная,* s_{k+1} *–* s*-числа оператора* l_n^{-1}, d_k, $\tilde{d}_k$, $\tilde{\tilde{d}}_k$ *– поперечники по Колмогорову соответствующих множеств* $M, \tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}$.

Эти леммы доказываются точно также, как леммы 4 и 5 работы [10].

Лемма 2.11. *Пусть выполнено условие* $i)$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\tilde{\tilde{N}}(c\lambda) \leqslant N(\lambda) \leqslant \tilde{N}\left(c^{-1}\lambda\right),$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{s_{k+1} > \lambda} 1$ *– количество* s_{k+1} *больших* $\lambda > 0$, $\tilde{N}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{d}_k > \lambda} 1$ *– количество* $\tilde{d}_k$ *больших* $\lambda > 0$, $\tilde{\tilde{N}}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{\tilde{d}}_k > \lambda} 1$ *– количество* $\tilde{\tilde{d}}_k$ *больших* $\lambda > 0$.

Доказательство. Согласно лемме 2.10 имеем $N(\lambda) = \sum\limits_{s_{k+1}} 1 \leqslant \sum\limits_{c\tilde{d}_k > \lambda} 1 = \sum\limits_{\tilde{d}_k > c^{-1}\lambda} 1 = \tilde{N}\left(c^{-1}\lambda\right)$.

Аналогично $\tilde{\tilde{N}}(c\lambda) = \sum\limits_{\tilde{\tilde{d}}_k > c\lambda} 1 = \sum\limits_{c^{-1}\tilde{\tilde{d}}_k > \lambda} 1 \leqslant \sum\limits_{s_{k+1} > \lambda} 1 = N(\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 2.12. *Пусть выполнено условие* $i)$. *Тогда справедлива оценка:*

$$c^{-1}\lambda^{\frac{1}{2}} mes\left(y \in R: Q_n^*(y) \leqslant c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant N(\lambda) \leqslant c\lambda^{-1} mes\left(y \in R: K_n^*(y) \leqslant c\lambda^{-1}\right),$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{s_k > \lambda} 1$ *– количество* s_k *больших* $\lambda > 0$, s_k *– сингулярные числа оператора* $(l_n + \mu E)^{-1}$.

Доказательство. Через L_2^2, $a(y)$, $c(y)$ и $\tilde{L}_2^1$, $a(y)$, $c(y)$ обозначим пространство полученные пополнением $C_0^\infty(R)$ относительно норм:

$$\left| u, L^2_{2,a(y),c(y)} \right| = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left|u''\right|^2 + \left|n^2 + ina(y) + c(y) + \mu\right|^2 |u|^2 \right] dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left| u, \tilde{L}^1_{2,a(y),c(y)} \right| = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left|u'\right|^2 + \left(|n||a(y)| + c(y) + \mu\right) |u|^2 \right] dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь доказательство леммы 2.12 следует из лемм 2.10 и 2.11 и из результатов работ [6,7].

3. Доказательства теорем 1 – 3.

Нетрудно установить, что для любого $u \in D(L)$ справедлива оценка:

$$\|(L+\mu E)\,u\|_2 \geqslant \|u\|_2, \tag{8}$$

где $c>0$ – постоянное число, не зависящее от $u(x,y)$.

Действительно, для $u \in C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$ имеем:

$$|(L+\mu E)\,u,u| \geqslant \int\limits_{\Omega}\left(\left|u'_y\right|^2+(c(y)+\mu)\,|u|^2\right)dxdy-\int\limits_{\Omega}|u_x|^2dxdy.$$

Отсюда на основании условия $i)$ и неравенства Коши с $\varepsilon>0$ имеем:

$$\|(L+\mu E)\,u,u\|_2^2 \geqslant c_1(\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left(|u_y|^2+|u|^2\right)dxdy-\int\limits_{\Omega}|u_x|^2dxdy. \tag{9}$$

Далее, непосредственным вычислением убедимся, что

$$|<(L+\mu E)\,u,u_x>| \geqslant \left|\int\limits_{\Omega} a(y)\,|u_x|^2dxdy\right|.$$

Отсюда и учитывая условие $i)$ получаем, что

$$\|(L+\mu E)\,u\|_2^2 \geqslant c\|u_x\|_2^2. \tag{10}$$

Теперь, объединяя (9) и (10), имеем:

$$c^2\|(L+\mu E)\,u\|_2^2 \geqslant \|u\|_2^2.$$

В силу непрерывности нормы последняя оценка справедлива для всех $u \in D(L)$. Неравенство (8) доказано.

Из леммы 2.6 получаем, что

$$u_k(x,y)=\sum_{n=-k}^{k}(l_n+\mu E)^{-1}f_n e^{inx} \tag{11}$$

является решением задачи

$$(L+\mu E)\,u_k(x,y)=f_k(x,y), \tag{12}$$

$$u_k(-\pi,y)=u_k(\pi,y),\;\; u_{kx}(-\pi,y)=u_{kx}(\pi,y), \tag{13}$$

где $f_k \xrightarrow{L_2} f$, $f_k(x,y)=\sum\limits_{n=-k}^{k} f_n(n)\,e^{inx}$, $(l_n+\mu E)^{-1}$ – обратный оператор к оператору $(l_n+\mu E)$.

В силу неравенства (8) имеем:

$$\|f_k(x,y)\|_2 \geqslant \|u_k(x,y)\|_2, \tag{14}$$

где $c>0$ – постоянное число, не зависящее от k.

Так, как $f_k \xrightarrow{L_2} f$, то из (14) находим, что

$$\|u_k-u_m\|_2 \leqslant c\|f_k-f_m\|_2 \to 0 \text{ при } \;\; k,m\to\infty.$$

Отсюда, в силу полноты пространства L_2 следует, что существует единственная функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$u_k \to u \text{ при } k \to \infty. \tag{15}$$

Отсюда и из (12) следует, что

$$u = (L + \mu E)^{-1} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (l_n + \mu E)^{-1} f_n(n) e^{inx}. \tag{16}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пользуясь леммой 2.3, нетрудно видеть, что

$$\lim_{|n| \to \infty} \left\| (l_{\mathrm{n}} + \mu E)^{-1} \right\|_{2 \to 2} = 0.$$

Ввиду этого из (16) следует, что оператор $(L + \mu E)^{-1}$ компактен тогда и только тогда, когда $(l_n + \mu E)^{-1}$ вполне непрерывен. Теперь доказываемая теорема следует из леммы 2.8.

Доказательство теоремы 3. Из (16) следует, что если s – сингулярная точка оператора $(L + \mu E)^{-1}$, то s является сингулярным числом одного из операторов $(l_n + \mu E)^{-1}$ и, наоборот, если s – сингулярное число одного из операторов $(l_n + \mu E)^{-1}$, то s является сингулярной точкой оператора $(L + \mu E)^{-1}$. Отсюда и из леммы 2.12 следует доказательство теоремы 3.

Цитированная литература

1. **Моисеев Е.И.** //ДАН СССР. 1978. Т. 242. С. 48 – 51.
2. **Моисеев Е.И.** Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. **Кальменов Т.Ш.** //Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1418 – 1425.
4. **Костюченко А.Г., Саргсян И.С.** Распределение собственных значений. М., 1979.
5. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Введение в спектральную теорию. М., 1970.
6. **Отелбаев М.** //Тр. матем. ин-та им. Стеклова. 1979. Т. 150. С. 265 – 305.
7. **Отелбаев М.** //ДАН СССР. 1977. Т. 236. С. 1270 – 1273.
8. **Молчанов А.М.** // Тр.мос. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 169 – 200.
9. **Бойматов К.Х.** // Тр.семин. им И.Г.Петровского. МГУ. 1981. №7. С. 50 – 100.
10. **Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М.** //Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №1. С. 135 – 137.
11. **Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А.** // Тез. межд. конф. “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ” посвящ. столетию С.М.Никольского. Москва, 23-29 мая 2005. С. 157.

Поступила в редакцию 29.06.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 78 – 82*

УДК 517.946

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В СЛУЧАЕ НЕ БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКОГО КОНТУРА

А. В. Роговой

Южно-Казахстанский гуманитарный институт им. М.Сапарбаева
486001 Шымкент ул. Мадели кожа, б/н rog2005@list.ru

В работе рассмотрена однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Доказано существование разрывного решения этой задачи, а само это решение построено в явном виде.

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ характеристиками $AC:\ x + y = 0$ и $BC:\ x - y = 1$, а при $y > 0$ – кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{(x, y):\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2,\ y > 0\right\},$$

рассмотрим однородную задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$sgn\ y\ u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия "склеивания" решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \tag{3}$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \tag{4}$$

В работе [1] для класса контуров, соответствующего значениям параметра δ:

$$\delta = \frac{1}{2} ctg\left(\frac{4p - 1}{4n} \cdot \pi\right), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad p = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

Keywords: *mixed type equations, Tricomi problem, non continuous solutions, complex functions theory*
2000 Mathematics Subject Classification: 35M10

было получено решение задачи (1) – (4)

$$u(x,y)=\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{\cos\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)+\sin\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)}{((1-x)^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}= \\ \quad =\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\frac{(1-x)^k+k(1-x)^{k-1}y-C_k^2(1-x)^{k-2}y^2-\dots}{((1-x)^2+y^2)^k}, & y>0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^n=\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n, & y<0, \end{cases} \tag{6}$$

и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *В случае тех контуров σ_δ, для которых параметр δ может быть представлен в виде (5), существует ненулевое разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1) – (4)), которое представляется по формуле (6).*

Данный результат можно обобщить на случай произвольного контура σ_δ. Предварительно введем величины γ_δ и α, определяемые следующими соотношениями

$$ctg\gamma_\delta=2\delta,$$

$$\alpha=\frac{3\pi}{4\gamma_\delta}.$$

Найдем ненулевое решение задачи (1) – (4). Обозначим

$$u(x,0)=\tau(x),$$

$$u_y(x,0)=\nu(x).$$

В гиперболической части области Ω^- рассмотрим задачу Коши-Гурса (Дарбу)

$$u_{xx}-u_{yy}=0,$$

$$u|_{AC}=0,$$

$$u_y|_{AB}=\nu(x).$$

В характеристических переменных

$$\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x-y\end{cases}$$

задача Дарбу запишется следующим образом

$$u_{\xi\eta}=0,$$

$$u|_{\xi=0}=0,$$

$$(u_\xi-u_\eta))|_{AB}=\nu(\xi).$$

Общее решение уравнения запишется в виде:

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta).$$

Учитывая первое краевое условие, получим

$$u|_{\xi=0}=\varphi(0)+\psi(\eta)=0\quad =>\quad \psi(\eta)=-\varphi(0)\quad =>\quad u=\varphi(\xi)-\varphi(0).$$

Учитывая второе краевое условие, имеем:

$$\varphi_\xi = \nu(\xi).$$

Таким образом, получим

$$u = \int\limits_0^\xi \nu(t)dt = \int\limits_0^{x+y} u_y(t,0)dt. \tag{7}$$

На линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$ имеем:

$$u(x,0) = \int\limits_0^x u_y(t,0)dt. \tag{8}$$

Таким образом, соотношение (8) представляет собой условие, эквивалентное условию $u|_{AC} = 0$ в гиперболической части области.

В эллиптической части Ω^+ рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

удовлетворяющее, в силу постановки задачи Трикоми и полученному соотношению (8), краевым условиям

$$u|_{\sigma_\delta} = 0,$$

$$u(x,0) = \int\limits_0^x u_y(t,0)dt.$$

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases} 1 - x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{9}$$

откуда

$$\begin{cases} x = 1 - r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} r = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \\ \varphi = arctg\frac{y}{1-x}. \end{cases}$$

В результате контур σ_δ запишется как $r = \cos\varphi - 2\delta\sin\varphi$, а задача преобразуется к виду:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \tag{10}$$

$$u(r,0) = -\int\limits_0^\eta \frac{u_\varphi(t,0)}{t}dt, \tag{11}$$

$$u|_{r=\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi} = 0. \tag{12}$$

Будем искать решение уравнения (10) в виде:

$$u(r,\varphi) = r^k\Phi(\varphi).$$

Из уравнения (10) для определения функции $\Phi(\varphi)$ получим:

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0,$$

откуда

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi.$$

Подставив решение

$$u(r, \varphi) = r^k \left(c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi\right)$$

в условие (11), получим

$$c_1 = -c_2 = c,$$

следовательно,

$$u(r, \varphi) = cr^k \left(\cos k\varphi - \sin k\varphi\right)$$

Таким образом, всякая функция вида

$$u_k(r, \varphi) = c_k r^k \left(\cos k\varphi - \sin k\varphi\right),$$

где k – любое вещественное число, c_k – константа, будет решением уравнения (10), удовлетворяющим краевому условию (11). В силу однородности и линейности уравнения (10) и условия (11), то же относится и к любой линейной комбинации функций данного вида.

Рассмотрим следующую функцию

$$u_\alpha(r, \varphi) = \frac{\cos \alpha\varphi + \sin \alpha\varphi}{r^\alpha} - \alpha \frac{\cos(\alpha-1)\varphi + \sin(\alpha-1)\varphi}{r^{\alpha-1}} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \frac{\cos(\alpha-2)\varphi + \sin(\alpha-2)\varphi}{r^{\alpha-2}} - \ldots, \qquad (13)$$

причем при

$$r < 1 \;\Leftrightarrow\; (1-x)^2 + y^2 < 1,$$

в том числе и в окрестности интересующей нас точки B(1,0) (кроме самой этой точки) данный ряд будет сходиться.

В силу сказанного выше, функция (13) удовлетворяет уравнению (10) и краевому условию (11) (вместо k рассматривается $-\alpha$). Покажем, что она удовлетворяет и краевому условию (12). Имеем, учитывая формулу [2, с. 183]

$$z^\alpha = |z|^\alpha \left(\cos(\alpha \cdot Arg\ z) + i \sin(\alpha \cdot Arg\ z)\right),$$

применяя методику работы [1], а также используя определение чисел γ_δ и α:

$$u_\alpha(r, \varphi)|_{\sigma_\delta} = \frac{\cos \alpha\varphi + \sin \alpha\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta \sin\varphi)^\alpha} - \alpha \frac{\cos(\alpha-1)\varphi + \sin(\alpha-1)\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi)^{\alpha-1}} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \frac{\cos(\alpha-2)\varphi + \sin(\alpha-2)\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi)^{\alpha-2}} - \ldots =$$

$$= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi}\right)^\alpha \cdot \left(Re(2\delta + i)^\alpha + Im(2\delta + i)^\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi}\right)^\alpha \cdot \frac{\cos\alpha\gamma_\delta + \sin\alpha\gamma_\delta}{(\sin\gamma_\delta)^\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi}\right)^\alpha \cdot \frac{\cos\frac{3\pi}{4\gamma_\delta}\gamma_\delta + \sin\frac{3\pi}{4\gamma_\delta}\gamma_\delta}{(\sin\gamma_\delta)^\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi}\right)^\alpha \cdot \frac{\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}}{(\sin\gamma_\delta)^\alpha} = 0$$

Таким образом, функция (13) будет решением задачи в эллиптической части области.

Из представления (13), учитывая соотношения (9), по формуле (8) восстановим значение функции $u(x,y)$ в гиперболической части области

$$y<0: \quad u(x,y)=\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha}=\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^{\alpha}. \tag{14}$$

В итоге, обобщая проведенные выше рассуждения, получим, что функция

$$u(x,y)=\begin{cases} \frac{\cos\alpha\varphi+\sin\alpha\varphi}{r^{\alpha}}-\alpha\frac{\cos(\alpha-1)\varphi+\sin(\alpha-1)\varphi}{r^{\alpha-1}}+ \\ \qquad +\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\frac{\cos(\alpha-2)\varphi+\sin(\alpha-2)\varphi}{r^{\alpha-2}}-\ldots, & y>0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha}=\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^{\alpha}, & y<0, \end{cases} \tag{15}$$

является решением однородной задачи Трикоми (задачи (1)-(4)). Но, как легко видеть, функция (15) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, которое представляется по формуле (15).* Отметим,что контур, рассмотренный в работе [1] (теорема 1) является частным случаем доказанной теоремы 2 для тех случаев, когда значение

$$\alpha=\frac{3\pi}{4\gamma_{\delta}}$$

является натуральным $\alpha=n$.

Цитированная литература

1. **Роговой А.В.** // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика, 2007. №2(53). С. 33 – 38.

2. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. Т. 1. Начала теории М., 1967.

Поступила в редакцию 10.07.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 83 – 93*

УДК 517.962

ПОКОМПОНЕНТНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (РДС)

С. С. Сламжанова

Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова
040009 Талдыкорган ул. Жансугурова, 187a Beksultan.82@mail.ru

В предлагаемой работе исследуется задача покомпонентной асимптотической эквивалентности двух РДС в определенной области. Доказан ряд теорем покомпонентно асимптотической эквивалентности двух РДС по Брауеру, по Ляпунову и по Левинсону.

Классификация разностно-динамических систем на основе асимптотических свойств решений всегда занимает центральное место в задаче устойчивости [1,2,3]. В общем случае эта задача (как в дифференциальных системах [4,5]) укладывается в следующую схему. Рассматривается некоторая совокупность РДС, где решения определены и некоторая группа преобразований, которая индуцирует отношение эквивалентности. Цели классификаций – получение всей совокупности инвариантов группы преобразований и распределение всех РДС по классам эквивалентности. Если в качестве совокупности РДС будем брать линейные однородные РДС, тогда важнейшей группой допустимых преобразований является группа преобразований Ляпунова [1,2]. Если к ней добавить задачу о вычислении инвариантов и их устойчивости, то эта совокупность совместно с методами решения составляет суть первого метода Ляпунова [1].

Из теорий нормальных форм РДС известно [3], что существуют различные группы, которые порождают не только Ляпуновские классификации. В предлагаемой работе делается попытка разбить некоторые совокупности РДС на классы эквивалентности по компонентным свойствам, в которых поведение решений в бесконечности, в некотором смысле однородно. Можно отметить, что из полученных результатов следует аналог аналог эквивалентности Брауера, Ляпунова и Левинсона.

Рассмотрим РДС:

$$x_{n+1} = F_1 \left(n, x_n\right), \tag{1}$$

$$y_{n+1} = F_2 \left(n, y_n\right). \tag{2}$$

Определение 1. *Будем говорить, что РДС (1) и (2) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) относительно* $\mu_i \in C\left(N_{n_0}\right)$, $N_{n_0} =$

Keywords: *difference-dynamical systems, asymptotic equivalence, differential equations.*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

$\{n_0, n_0+1, \ldots\}$, $i = i_1, i_2, \ldots i_q$, при $n \to \infty$ на многообразии Q, если при $\forall n_0 \in N_{n_0}$ для каждого решения $x\,(n;\, n_0,\, x_{n_0})\,,\, x_{n_0} \in Q$, существует решение $y\,(n;\, n_0,\, y_{n_0})\,,\, y_{n_0} \in Q$, такое, что

$$x_i\,(n;\, n_1,\, x_{n_1}) = y_i\,(n;\, n_1,\, Px_{n_1}) + o\,(\mu_i\,(n))\,(O\,(\mu_i\,(n))) \tag{3}$$

при $n \to \infty$, $i = i_1, i_2, \ldots i_q$, и наоборот: для каждого решения $y\,(n;\, n_1,\, y_{n_1})\,,\, y_{n_1} \in Q$, существует решение $(n;\, n_1,\, x_{n_1})\,,\, x_{n_1} \in Q$, такое, что справедливо равенство (3).

Теорема 1. *Если существует отображение $P:\ Q \to Q$ такое, что для любых $x_{n_i}, y_{n_i} \in Q$*

$$x_i\,(n;\, n_1,\, x_{n_1}) = y_i\,(n;\, n_1,\, Px_{n_1}) + o\,(\mu_i\,(n)) \text{ при } \ n \to \infty\,,\, i = i_1, i_2, \ldots i_q \text{ или} \tag{4}$$

$$y_i\,(n;\, n_1,\, y_{n_1}) = x_i\,(n;\, n_1,\, Py_{n_1}) + o\,(\mu_i\,(n)) \text{ при } \ n \to \infty\,,\, i = i_1, i_2, \ldots i_q,$$

то РДС (1) и (2) покомпонентно асимптотически эквивалентно (слабо асимптотически эквивалентно) относительно функции $\mu_i\,(n)$, $i = i_1, i_2, \ldots i_q$ при $n \to \infty$, на многообразии Q.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [10].

Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда будем говорить, что РДС (1) и (2) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) относительно функций $\mu_i\,(n)$, $i = i_1, i_2, \ldots i_q$, при $n \to \infty$ на многообразии Q по:

1. Ляпунову, если P – линейное отображение,
2. Немыцкому, если P – гомеоморфизм,
3. Левинсону, если P – биекция.

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = A\,(n)\,x_n + f\,(n, x_n)\,, \tag{5}$$

$$y_{n+1} = A\,(n)\,y_n, \tag{6}$$

где $A\,(n):\ N_{n_0} \to R^l$ – непрерывные отображения, $f \in C\,(N_{n_0})$.

$$\|f\,(n, x_n)\| \leq \lambda\left(n,\, |x_{i_1,n}|,\, \ldots,\, |x_{i_q,n}|\right) \leq \psi\,(n)\,\left\|x_{i_q,n}\right\|, \tag{7}$$

здесь $x_{i_1n}, \ldots, x_{i_qn}$ – компоненты вектора x, $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_q$, $x_q = colon\left(x_{i_1n},\, \ldots\,,\, x_{i_qn}\right)$, $x_{i_qn} \in R^q$.

$\|\ \|$ – евклидова норма,

$$\lambda:\ N_{n_0} \times R_+^q \to N \cup \{0\}\; R_+^q = \left\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_q) : \varphi_i \geq 0,\, i = \overline{1,q}\right\},\, \lambda\,(n, \varphi_1, \ldots, \varphi_q) \leq \lambda\,(n, \overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_q})$$

$$\text{при} \quad \varphi_i \leq \overline{\varphi_i} \quad \left(i = \overline{1,q}\right) \quad \text{и} \quad \forall n \in N_{n_0}, \quad \psi : D_1 \to N,\ D_1 = N_{n_0},\ \psi \in C\,(N_{n_0})\,.$$

$Y\,(n)$ – фундаментальная матрица РДС (6).

$$Y\,(n_0) = E \quad \text{и} \quad Y\,(n) = (Y_{i\,j}\,(n)) \quad Y^{-1} = \left(Y^{j\,i}\,(n)\right).$$

Рассмотрим множества

$$L = \{1, 2, \ldots, l\},\ \ B \subseteq L,\ \ L_0 \subseteq M \subseteq L,\ \ M = L \backslash B, \quad L_0 \neq \emptyset. \tag{8}$$

Пусть функции $\mu_i : N_{n_0} \to Z_+ = L \cup \{0\}$, $\quad m_i:\ N_{n_0} \to Z_+$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu_i\,(n) \geq \max_{j \in L_0} |y_{ij}\,(n)|, \quad n \in N_{n_0}, \quad i = i_1, \ldots, i_q, \tag{9}$$

$$m_i(n) \geq \max\left\{\max_{j\in M}(y_{ij}(n)), \mu_i(n)\right\},\ \ n \in N_{n_0},\ \ i = i_1, \ldots, i_q, \tag{10}$$

и Q – гладкое многообразие, принадлежащее пространству R^l.

Укажем достаточные условия покомпонентной слабой асимптотической эквивалентности РДС (5) и (6) относительно $\mu_i(n)$ при $n \to \infty$ на многообразии Q.

Многообразие Q**.** Будем считать, что Q – гладкое многообразие пространства R^l, обладающее следующим свойством: если $x_n \in Q$, то $x_j = 0$ при $j \notin M$, где $x_n = colon\,(x_1, x_2, \ldots, x_l)$.

Основные условия. Все решения РДС (6) (n, n_0, γ), $\gamma \in Q$, существуют при любом $n_0 \geq N_{n_0}$ и $n \geq N_{n_0}$. Для любой точки $\gamma_n = colon\left(\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}, \ldots, \gamma_{n_q}\right)$, $\gamma_n \in Q$, и любого положительного C, $C > \sum\limits_{k\in M}|\gamma_k|$, рассмотрим множество $\left(0,\ C - \sum\limits_{k\in M}|\gamma_k|\right)$. Тогда, если $\delta \in \left(0,\ C - \sum\limits_{k\in M}|\gamma_k|\right)$,то при достаточно большом n_0 выполняются неравенства:

$$\sum_{k\in M\cap L_0}\sum_{s=n_1}^{+\infty}\left|y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)) \leq \frac{\delta}{3l}, \tag{11}$$

$$\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{k\in M\setminus L_0} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)) \leq \frac{\delta}{3l}\mu_i(n), \tag{12}$$

$$\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{k\in B} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)) \leq \frac{\delta}{3l}\mu_i(n), \tag{13}$$

$$n_0 \leq n \leq +\infty, \quad j \in L, \quad m(s) = \left(m_{l_1}(s), \ldots, m_{i_q}(s)\right).$$

Отображение P**.** Будем считать, что $i_1 = 1,\ \ i_2 = 2, \ldots, i_q = q$. Пусть

$$\Omega = \left\{\varphi : \varphi \in C\left(N_{n_0}, R^l\right),\ |\varphi_i(n)| \leq C_1 m_i(n),\ i = \overline{1,q}\ |\varphi_i(n)| \leq C_2 P_i(n),\ i = \overline{q+1,l},\ n \geq n_0\right\}, \tag{14}$$

где C – фиксированное положительное число, C_1 и C_2 – произвольные положительные числа:

$$P_i(n) = C\sum_{j\in M}|y_{ij}(n)| + \sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)) + \sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)),$$

$$i = \overline{q+1,l}$$

Допустим, что

$$\|\varphi\|_\Omega = \max\begin{cases}\max\limits_i \sup\limits_{n\geq n_0}\frac{|\varphi_i(n)|}{m_i(n)}, & i = \overline{1,q},\\ \max\limits_i \sup\limits_{n\geq n_0}\frac{|\varphi_i(n)|}{P_i(n)}, & i = \overline{q+1,l}.\end{cases} \tag{15}$$

Определив естественным образом операции линейного пространства на множестве Ω, получим банахово пространство.

Пусть $C_1 = C$, $C_2 = 1$. Тогда получим подмножество $S \subset \Omega$. Подберем число δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \delta < C - \sum_{k\in M}|\gamma_k|,$$

где γ_k – действительные числа, являющиеся координатами точки $\gamma \in Q$ и $\sum\limits_{k\in M} |\gamma_k| < C$. На S определим оператор L следующим образом:

$$(L\varphi(n))_i = \sum_{k\in M} y_{ik}(n)\gamma_k + \sum_{s=n_1}^{n} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(l)\, f_j(s,\varphi(s)) - \sum_{s=n}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\, f_j(s,\varphi(s)) \tag{16}$$

Лемма 1. *Оператор L, определенный выражением (16), есть $L : S \to S$.*

Доказательство. При достаточно большом n_0 справедлива неравенства (11), (12), (13). Тогда из (13) получим:

$$\left|\sum_{s=n_1}^{n} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\, f_j(s,\varphi(s))\right| \le \sum_{j\in L} \sum_{s=n_1}^{n} \left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right| \lambda(s, Cm(s)) < \frac{\delta}{3}\mu_i(n). \tag{17}$$

Из (11) и (12) получим:

$$\begin{gathered}\left|\sum_{s=n}^{n} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M\cap L_0}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\, f_j(s,\varphi(s))\right| \le \sum_{j\in L} y_{ik}(n) \sum_{s=n}^{+\infty} \left|y^{jk}(s)\right| \lambda(s, Cm(s)) \le \\ \le \mu_i(n) \sum_{s=n}^{n} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M\setminus L_0}} |y_{ik}(s)| \lambda(s, Cm(s)) \le \tfrac{\delta}{3}\mu_i(n),\end{gathered} \tag{18}$$

$$\left|\sum_{s=n}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M\setminus L_0}} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\, f_j(s,\varphi(s))\right| \le \sum_{j\in L} \sum_{s=n}^{+\infty} \left|\sum_{k\in M\setminus L_0} y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right| \lambda(s, Cm(s)) \le \frac{\delta}{3}\mu_i(n). \tag{19}$$

Тогда $|(L\varphi(n))_i| \le \left(\sum\limits_{j\in M} |\gamma_j|\right) m_i(n) + \delta\mu_i(n) \le \left(\sum\limits_{j\in M} |\gamma_j| + \delta\right) m_i(n) \le Cm_i(n)$.

Неравенство

$$|(L\varphi(n))_i| \le P_i(n), \quad i = \overline{q+1, n},$$

очевидно. Лемма доказана.

Лемма 2. *L непрерывен на S.*

Доказательство. Пусть $\varphi_p \in S$ и при $p \to +\infty$, $\varphi_p \to \varphi$. Тогда $\varphi_p(n) \to \varphi(n)$ равномерно на каждом конечном сегменте на множестве N_{n_0}. Рассмотрим сегмент $[n_0, N_1]$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $n \in [n_0, N_1]$, $n_1 \ge N_1$, имеем:

$$\begin{aligned}|(L\varphi_l(n))_i - (L\varphi(n))_i| \le {} & \sum_{s=n_0}^{n} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} \left|y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right| |f_j(s,\varphi_s(s)) - f_j(s,\varphi(s))| + \\ & + \sum_{s=n}^{n_1} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} \left|y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right| |f_j(s,\varphi_s(s)) - f_j(s,\varphi(s))| + \\ & + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} \left|y_{ik}(n)\, y^{jk}(s)\right| |f_j(s,\varphi_s(s)) - f_j(s,\varphi(s))|.\end{aligned}$$

Пусть $s_0 > 0$ и n_1 настолько большие числа, что при $s > s_0$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned}
&\left|f_j\left(s,\varphi_p\left(s\right)\right)-f_j\left(s,\varphi\left(s\right)\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{3lk\left(N_1-n_0\right)}, \quad n_0 \le s \le N_1,\\
&\left|f_j\left(s,\varphi_s\left(s\right)\right)-f_j\left(s,\varphi\left(s\right)\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{3lk_1\left(n_1-n\right)}, \quad n \le s \le n_1,\\
&\sum_{s=n_1}^{+\infty}\left|y^{ik}\left(s\right)\right|\lambda\left(s,Cm\left(s\right)\right) \le \frac{\varepsilon}{6k_2 l}, \quad j\in L,\quad k\in M,
\end{aligned}$$

где

$$k=\sup_{\substack{n_0\le n_1\le n\le N_1\\ i,j\in L\\ k\in M}}\left|y_{ik}\left(n\right)y^{jk}\left(n_1\right)\right|, \quad k_1=\sup_{\substack{n\le n_2\le n_3\le n_1\\ i,j\in L\\ k\in M}}\left|y_{ik}\left(n_2\right)y^{jk}\left(n_3\right)\right|, \quad k_2=\sup_{\substack{n_0\le n\le N_1\\ i\in L\\ k\in M}}\left|y_{ik}\left(n\right)\right|.$$

Тогда при $s \ge s_0$, $n \in [n_0, N_1]$ имеем

$$\left|\left(L\varphi_s(n)\right)_i-\left(L\varphi(n)\right)_i\right| \le \varepsilon, \quad i=\overline{1,n}.$$

Следовательно, оператор L непрерывен на S.

Лемма 3. *LS равностепенно непрерывно в каждой точке $n \in N_{n_0}$.*

Доказательство. Так как

$$y'_{ij}\left(n\right)=\sum_{m\in L}a_{im}\left(n\right)y_{mj}\left(n\right), \qquad \sum_{k\in L}y_{ik}\left(n\right)y^{jk}\left(n\right)=\delta_{ij},$$

где $A\left(n\right)=\left(a_{im}\left(n\right)\right)$, то

$$\begin{aligned}
\left|\left(L\varphi(n)\right)'_i\right| \le \sum_{m\in L}\left|a_{im}\left(n\right)\right|\Big[\sum_{j\in M}\left|y_{mj}\left(n\right)\right|\left|\gamma_j\right| + \sum_{j\in L}\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{j\in B}y_{mk}\left(n\right)y^{jk}\left(s\right)\right|\lambda\left(s,Cm\left(s\right)\right)+\\
+\sum_{j\in L}\sum_{s=n_1}^{+\infty}\left|\sum_{k\in L}y_{mk}\left(n\right)y^{jk}\left(s\right)\right|\lambda\left(s,Cm\left(s\right)\right)\Big]+\lambda\left(n,Cm\left(n\right)\right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\left|\left(L\varphi(n)\right)'_i\right|$ является ограниченной функцией на любом конечном сегменте, принадлежащем множеству N_{n_0}. Следовательно, LS – равностепенно непрерывно в каждой точке множества N_{n_0}.

Из леммы 1–3 вытекает, что для оператора L в S выполнены все условия принципа Шаудера, следовательно, он имеет неподвижную точку. Тогда существует решение РДС (5) $x\left(n\right)$, которая является неподвижной точкой оператора. Так как

$$\begin{aligned}
\left|x_i\left(n\right)-\sum_{j\in M}y_{ij}\left(n\right)\gamma_i\right| \le \sum_{j\in L}\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{k\in B}y_{ik}\left(n\right)y^{jk}\left(s\right)\right|\lambda\left(s,Cm\left(s\right)\right)+\\
+\sum_{j\in L}\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{k\in M\setminus L_0}y_{ik}\left(n\right)y^{jk}\left(s\right)\right|\lambda\left(s,Cm\left(s\right)\right)+\mu_i\left(n\right)\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M\cap L_0}}\sum_{s=n}^{+\infty}\left|y^{jk}\left(s\right)\right|\lambda\left(s,Cm\left(s\right)\right) \qquad i=\overline{1,q},
\end{aligned}$$

то $\left|x_i\left(n\right)-\sum\limits_{j\in M}y_{ij}\left(n\right)\gamma_i\right|=O\left(\mu_i\left(n\right)\right)$ при $n\to+\infty$, $\ i=\overline{1,q}$.

Следовательно,

$$x_i\left(n;n_1;x_{n_1}\right)=y_i\left(n;n_1;y_{n_1}\right)+O\left(\mu_i\left(n\right)\right)\text{при}\quad n\to+\infty,\quad i=\overline{1,q}, \tag{20}$$

и $Px_1 = y_1$, где отображение P определяется формулой

$$y_k(n_1) = x_k(n_1) + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{ik}(s) f_j(s, x(s)), \tag{21}$$

то есть, если $x_0 = colon(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, $x_{0k} = x_k(n_0)$, $k \in M$, то $y_k(n_0)$ выполняется по формуле (21).

Теорема 2. *Пусть соответствие, установленное формулой (21), отображает гладкое многообразие Q на Q. Тогда РДС (5) и (6) покомпонентно слабо асимптотически эквивалентны по: а) Ляпунову, если P – линейное отображение; б) Немыцкому, если P – гомеоморфизм; в) Левинсону, если P – биекция; г) Брауеру, если P – сюръекция.*

Доказательство. Компоненты оператора L можно записать как

$$(L(x_i(n))) = \sum_{k\in M} y_{ik}(n) \left(\overline{\gamma_k} + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{j\in L} y^{jk}(s) f_j(s, x(s)) \right) + \sum_{s=n_1}^{n} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n) y^{jk}(s) f_j(s, x(s)) -$$
$$- \sum_{s=n}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n) y^{jk}(s) f_j(s, x(s)),$$

где $\overline{\gamma_k} = \gamma_k - \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(s) f_j(s, x(s))$.

Обозначим $\overline{\gamma_k} = x_k(n_1)$, $\gamma_k = y_k(n_1)$. Тогда имеем

$$y_k(n_1) = x_k(n_1) + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{jk}(s) f_j(s, x(s)), \tag{22}$$

то есть получим формулу (18).

Так как $Lx = x$, отображение P, определенное формулой (22), устанавливает один из видов асимптотической эквивалентности, о которых говорится в условиях теоремы. Теорема доказана.

Асимптотическая эквивалентность по Брауеру.

Предположим, $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j = 0,\ j \notin M\}$ и выполняется дополнительное условие

$$\sum_{s=n_1}^{+\infty} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{jk}(s) \right| \psi(s) \|m(s)\| < R < +\infty, \tag{23}$$

где $\|m(s)\| = \sup_i m_i(s)\,, \qquad i = i_1, \ldots, i_q$.

Теорема 3. *Пусть выполняются основные условия и условие (23). Тогда РДС (5) и (6) покомпонентно слабо асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций $\mu_i(n)$, $i_1, \ldots, i_q$, при $n \to \infty$ на Q.*

Доказательство. Так как

$$|x_i(n)| \le m_i(n) \sum_{j\in M} |\bar{\gamma}_j| + \sum_{s=n_1}^{n} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n) y^{jk}(s) \right| |f_j(s, x(s))| + \sum_{s=n_1}^{n} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n) y^{jk}(s) \right| |f_j(s, x(s))|,$$

то на основании условий (10) и (13) получим:

$$|x_i(n)| \le C_1 m_i(n) + C_2 m_i(n) + C_3 m_i(n) \sum_{s=n_1}^{n} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y^{jk}(s) \right| \psi(s) \|x_q(s)\|,$$

где $|x_q(s)| \le \sup\limits_i |x_i(s)|, \quad i = i_1, \ldots, i_q$.

Будем рассматривать вектор $x(n)$ в виде $x_i(n) = u_i(n)\, m_i(n)$ для $i = i_1, \ldots, i_q$. Отсюда

$$|u_i(n)| \le C_1 + C_2 + C_3 \sum_{s=n_1}^{n} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{jk}(s) \right| \psi(s) \|u(s)\| \cdot \|m(s)\|$$

и

$$||u(n)|| \le C_1 + C_2 + C_3 \sum_{s=n_1}^{n} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{jk}(s) \right| \psi(s) \|u(s)\| \cdot \|m(s)\|. \qquad (24)$$

Здесь $\|u(n)\| = \sup\limits_i |u_i(n)|, \quad i = i_1, \ldots, i_q$.

Тогда применяя теорему Гронуолла–Беллмана к неравенству (24), получим:

$$||u(n)|| \le (C_1 + C_2) \exp\left(C_3 \sum_{s=n_1}^{n} \left| \sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{jk}(s) \right| \psi(s) \|m(s)\| \right) \le C, \quad C = (C_1 + C_2) \exp(C_3 l).$$

Следовательно, $|x_i(n)| \le C m_i(n), \quad i = i_1, \ldots, i_q$.

Рассмотрим произвольное решение (n, n_0, γ_n) РДС (6), где γ_n принадлежит многообразию Q. В этом случае существует решение $x(n, n_1, x_{n_1}),\ x_{n_1} \in Q$, РДС (5) такое, что $x(n; n_1; x_{n_1}) = y(n; n_1; y_{n_1}) + O(\mu_i(n))$ при $n \to +\infty,\ i = i_1, \ldots, i_q$.

Если будем рассматривать произвольное решение $x(n, n_1, x_{n_1}),\ x_{n_1} \in Q$, то $|x_i(n)| \le C m_i(n)$ и поэтому формула (21) имеет смысл, то есть

$$y_i(n; n_1; y_{n_1}) = x_i(n; n_1; x_{n_1}) + O(\mu_i(n)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,\ i = i_1, \ldots, i_q.$$

Отсюда следует, что P является сюръекцией. На основании теоремы 2 РДС (5) и (6) покомпонентно слабо асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функции $\mu_i(n)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, при $n \to +\infty$ на многообразии Q.

Пример. Рассмотрим РДС

$$\begin{aligned} x_{1\,n+1} &= x_{1\,n} + x_{2\,n} + (n+1)^{-20} \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ x_{2\,n+1} &= x_{2\,n} + (n+1)^{-20} \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \\ x_{3\,n+1} &= x_{3\,n} + x_{1\,n} + (n+1)^{-20} \varphi_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \qquad (25)$$

где

$$\varphi_i \in C\left(R^1 \times R^1 \times R^1\right),\ \varphi_i : R^1 \times R^1 \times R^1 \to R^1,\ i = 1,\, 2,\, 3, \quad \varphi_j(x_1, x_2, x_3) \le \varphi_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$j = 2,\, 3 \quad \varphi_j(x_1, x_2, x_3) \ge 0.\ \varphi_1(x_1, x_2, x_3) \le \varphi_1(|x_1|, |x_2|) \le \|x_q\|, \ \ \|x_q\| = \max\begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\|f\,(n,x)\| = \max\left(\begin{vmatrix}(n+1)^{-20}\,\varphi_1\,(x_1,x_2,x_3)\\(n+1)^{-20}\,\varphi_2\,(x_1,x_2,x_3)\\(n+1)^{-20}\,\varphi_3\,(x_1,x_2,x_3)\end{vmatrix}\right) \le (n+1)^{-20}\,|\varphi_1\,(x_1,x_2,x_3)| \le$$
$$\le (n+1)^{-20}\,\varphi_1\,(|x_1|,|x_2|) = \lambda\,(n,|x_1|,|x_2|) \le (n+1)^{-20}\,\|x_q\| = \psi\,(n)\,\|x_q\|.$$

В этом случае $L=\{1,\,2,\,3\}$, $M=\{1,\;2\}$, $B=\{3\}$, $L_0=\{1\}$, $i_1=1$, $i_2=2$, $q=2$, $n=3$.

Соответствующая (25) линейная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_{1\,n+1} &= y_{1\,n} + y_{2\,n},\\ y_{2\,n+1} &= y_{2\,n},\\ y_{3\,n+1} &= y_{3\,n} + y_{1\,n}. \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда

$$Y\,(n) = \begin{pmatrix}1 & n-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ n-1 & \frac{n(n-1)}{2} & 1\end{pmatrix}, \qquad Y^{-1}\,(s) = \begin{pmatrix}1 & 1-s & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1-s & \frac{s^2}{2}-\frac{3s}{2}+1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mu_i\,(n) \ge \max_{j\in L_0}|y_{ij}\,(n)| = \begin{cases}1, & i=1,\\ 0, & i=2\end{cases}. \tag{27}$$

Берем $\mu_1(n)=\mu_2\,(n)=1$. Далее,

$$m_i\,(n) \ge \max\left\{\max_{j\in L_0}|y_{ij}\,(n)|, \mu_i\,(n)\right\} = \begin{cases}|n-1|\,, & i=1\\ 1, & i=2\end{cases} \tag{28}$$

Будем считать, что $0 \le n \le +\infty$, поэтому берем $m_1\,(n) = n-1$, $m_2\,(n)=1$. Кроме того, $\lambda\left(s,|x_1|,|x_2| = (s+1)^{-20}\,\varphi_1\,(|x_1|,|x_2|)\right)$. Тогда основные условия запишутся как

$$\sum_{k\in M\cap L_0}\sum_{s=0}^{+\infty}\left|y^{jk}\,(s)\right|\lambda\,(s,Cm\,(s)) = \sum_{s=0}^{+\infty}(2-s)\,(s+1)^{-20}\varphi\,(Cs,s) \le \frac{\delta}{9}, \tag{29}$$

$$\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{k\in M\setminus L_0}y_{ik}\,(n)\,y^{jk}\,(s)\right|\lambda\,(s,Cm\,(s)) = \sum_{s=n}^{+\infty}\left|\frac{n}{2}\left(s^2-5s+4\right)\right|(s+1)^{-20}\varphi_1\,(Cs,s) \le \frac{\delta}{9}, \tag{30}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\left|\sum_{k\in B}y_{ik}\,(n)\,y^{jk}\,(s)\right|\lambda\,(s,Cm\,(s)) = \sum_{s=0}^{n}0\,(s+1)^{-20}\,\varphi_1\,(Cs,C) \le \frac{\delta}{9}, \tag{31}$$

$0 \le n_0 \le n < +\infty$, $j\in L$, $i=1,2$, $m\,(s)=(s,1)$, $\delta \in \left(0, C-\sum\limits_{k\in M}|\gamma_k|\right)$. Условие (23) в данном случае имеет вид:

$$\sum_{s=n_1}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\k\in M}}y^{jk}\,(s)\right|\psi\,(s)\|m\,(s)\| = C\sum_{s=n_1}^{+\infty}\left|\frac{s^2}{2}-\frac{7s}{2}+5\right|(s+1)^{-20}\max\,(s,1) < R < +\infty. \tag{32}$$

При выполнении этих условий РДС (25) и (26) покомпонентно слабо асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функции $\mu_1\,(n)=\mu_2\,(n)=1$ при $n\to\infty$ на многообразии Q. Следовательно, получим

$$x_{1\,n}\,(n,o,x_0) = C_{1\,0} + (n-1)C_{2\,0} + o\,(1) \quad \text{при} \quad n\to+\infty, \tag{33}$$

$$x_{2\,n}\,(n, o, x_0) = C_{2\,0} + o\,(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$x_0 \in Q = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0,\ j \notin M;\ x_1, x_2, x_3 \in R^1\right\}.$$

Соответствие устанавливаются формулой (22), которая здесь имеет вид:

$$y_{1n}\,(0) = x_1\,(0) + \sum_{s=0}^{+\infty} (s+1)^{-20}\,\varphi_1\,(x_1\,(s)\,, x_2\,(s)\,, x_3\,(s)) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{+\infty} (1-s)(s+1)^{-20} \varphi_3\,(x_1\,(s)\,, x_2\,(s)\,, x_3\,(s))$$

$$y_{2n}\,(0) = x_2\,(0) + \sum_{s=0}^{+\infty} (1-s)\,(s+1)^{-20} \varphi_1\,(x_1\,(s)\,, x_2\,(s)\,, x_3\,(s)) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{+\infty} (s+1)^{-20}\,\varphi_2\,(x_1\,(s)\,, x_2\,(s)\,, x_3\,(s)) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{3s}{2} + 1\right)(s+1)^{-20}\,\varphi_3\,(x_1\,(s)\,, x_2\,(s)\,, x_3\,(s)).$$

Пусть $\varphi_1\,(x_1, x_2, x_3) = \min\,(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ и $\varphi_1\,(x_1, x_2) = \min\,(|x_1|, |x_2|)$. Тогда условия (11), (13), (23) принимают следующий вид:

$$C \sum_{s=0}^{+\infty} (2-s)\,(s+1)^{-20} \min\,(s, 1) \le \frac{\delta}{9},$$
$$C \sum_{s=n}^{+\infty} \left|\frac{n}{2}\left(s^2 - 5s + 4\right)\right| (s+1)^{-20} \min\,(s, 1) \le \frac{\delta}{9},$$
$$C \sum_{s=0}^{n} 0\,(s+1)^{-20} \min\,(s, 1) \le \frac{\delta}{9},$$
$$C \sum_{s=0}^{+\infty} \left|\frac{s^2}{2} - \frac{7s}{2} + 5\right| (s+1)^{-20} \min\,(s, 1) \max(s, 1) < R < +\infty,$$

и

$$x_{1n}\,(n, 0, x_0) = C_{10} + (n-1)C_{20} + o\,(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$x_{2n}\,(n, 0, x_0) = C_{20} + o\,(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$x_0 \in Q = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0,\ j \notin M;\ x_1, x_2, x_3 \in R^1\right\}.$$

Асимптотическая эквивалентность по Ляпунову.

Теорема 4. *Пусть выполняются основные условия и условие (23). Тогда для того, чтобы РДС (5) и (6) были покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Ляпунову относительно функций* $\mu_i\,(n)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, *при* $n \to +\infty$ *на многообразии* Q, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f\,(n, x) = f\,(n)\,x.$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть РДС (5) и (6) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Ляпунову относительно функций $\mu_i(n)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, при $n \to +\infty$ на многообразии Q. Тогда существует линейное отображение $P_1 : Q \to Q$ такое, что

$$x(n;\, n_1,\, x_{n_1}) = y_i(n;\, n_1,\, Px_{n_1}) + o(\mu_i(n))\,(O(\mu_i(n))) \quad \text{при} \quad n \to \infty\ i = i_1,\, i_2,\, \ldots i_q, \quad x_{n_1} \in Q.$$

Кроме того, справедлива формула (21)

$$y_k(n_1) = x_k(n_1) + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in L \\ k \in M}} y^{jk}(s)\, f_j(s, x(s)).$$

Отсюда получим

$$P_1 x_k(n_1) = x_k(n_1) + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in L \\ k \in M}} y^{jk}(s)\, f_j(s, x(s)).$$

Так как отображение P_1 по условию линейное, то $f(n,x) = f(n)\,x$.

Достаточность. Пусть $f(n,x) = f(n)\,x$. Тогда отображение P_1 является линейным и РДС (5) и (6) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Ляпунову относительно функций $\mu_i(n)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, при $n \to +\infty$ на многообразии Q. Теорема доказана.

Асимптотическая эквивалентность по Левинсону.

Теорема 5. *Пусть выполняются основные условия и условие (23). Тогда, если оператор (16) на шаре S имеет единственную неподвижную точку, то РДС (5) и (6) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Левинсону относительно функций $\mu_i(n)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, при $n \to +\infty$ на многообразии Q.*

Доказательство. В этом случае справедлива формула (16) и каждому решению РДС (6) ставится в соответствие единственное решение РДС (5). Так как выполняется условие (16), взяв произвольное решение $x(n, n_1, x_{n_1})$, $x_{n_1} \in Q$ РДС (5), мы на основании теоремы 3 получим

$$|x_i(n;\, n_1,\, x_{n_1})| \le C|m_i(n)|, \quad i = i_1, \ldots, i_q.$$

Из этого следует, что формула (16) имеет смысл для произвольного решения РДС (5). Вычислив соответствующее $y_k(n_1)$, $k = i_1, \ldots, i_q$, мы поступим следующим образом. Рассмотрим решение $y(n, n_1, y_{n_1})$, $y_{n_1} \in Q$, $y_{1k} = y_k(n_1)$ РДС (5). На основании условий теоремы 3 ему соответствует единственное решение РДС (5). Следовательно, оно совпадает с решением $x(n, n_1, x_{n_1})$, $x_{n_1} \in Q$. Отсюда вытекает, что отображение P, определяемое формулой (16), является биекцией, а РДС (5) и (6) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Левинсону относительно функций $\mu_i(n)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, при $n \to +\infty$ на многообразии Q.

Цитированная литература

1. **Халанай А., Векслер Д.** Качественная теория импульсных систем. М., 1971.
2. **Бромберг П.В.** Устойчивости и автоколебания импульсных систем регулирования. М., 1953.
3. **Бопаев К.Б.** //Математический журнал. Алматы. 2003. Т. 3, № 1(7). С. 12 – 21.

4. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.

5. **Brauer F.** //Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 758 – 765.

6. **Levinson N.** //Dake Math. J. 1948. V. 15. P. 111 – 126.

7. **Воскресенский Е.В.** П // Czech. Math. J. 1985. V. 35 (100). № 3. P. 455 – 466.

8. **Воскресенский Е.В., Артемьева Е.Н., Белоглазов В.А., Мурюмин С.М.** // Изд. Саранского университета, 1988.

9. **Бопаев К.Б., Бопаева С.К.** // Вестник ЖГУ. № 1–2/04. С. 48 – 52.

10. **Сламжанова С.С.** // Тезисы международной научной конференции среди студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2006». Астана, 2006. С. 23 – 24.

Поступила в редакцию 08.07.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 94 – 98*

УДК 517.977.1/5

ЗАДАЧА КОЭФФИЦИЕНТНОГО "ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО" УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

К. С. Шарипов

Казахский УПС
050063 Алматы мкр. Жетысу-1, 32-а

Установлены теоремы о разрешимости и оптимальности в задаче коэффициентного "параметрического" управления для нагруженного параболического уравнения.

1. Постановка задачи. Пусть процесс управления описывается следующей краевой задачей:

$$D_t^1 y = \sum_{i,j=1}^{n} D_{x_i}^1 (a_{ij} D_{x_j}^1 y) + \sum_{I=1}^{p} v_i(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) y(\xi,t) d\xi + f \text{ на } Q, \tag{1}$$

$$y(x,t) = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \text{ на } \Omega, \tag{3}$$

где $e_i \in L^\infty(0,T; L^4(\Omega \times \Gamma_i))$, $v_i(t) \in V(0,T)$, $i = 1,2,...,p$, $V(0,T)$ – выпуклое замкнутое подмножество $L^2(0,T)$, $\Gamma_i - (n+1)$ – мерные многообразия из $\overline{\Omega}$, $n \leq 3$, при $n = 1$, Γ_i – фиксированные точки $\overline{\Omega}$, Γ_i, $i = 1,2,...p$, вместе с Γ из C^2, $a_{ij} \in L^\infty(0,T; C^1(\overline{\Omega}))$, $i,j = = 1,...,n$, для почти всех $\{x,t\} \in Q:$

$$\alpha_2 \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2,$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2 = \text{const} > 0, \forall \zeta \in R^n,\ f \in L^2(Q),\ y_0 \in H_0^1(\Omega).$$

Критерий качества представлен функционалом:

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} |y(x,T) - z_3|^2 dx + \alpha \int\limits_{0}^{T} |v(t)|^2 dt, \tag{4}$$

Keywords: *Loaded parabolic equation, boundary value problem, optimal control*
2000 Mathematics Subject Classification: 49J20, 49K20

где $z_3 \in L^2(\Omega)-$ заданный элемент, $\alpha = \text{const} > 0$, $|v(t)|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} |v_i(t)|^2$.

Задача оптимального управления состоит в следующем: найти пару $\{y(x,t), v(t)\}$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) и минимизирующую функционал (5).

2. О существовании оптимального решения. Справедлива

Теорема 1. *Задача оптимального управления (1) – (5) имеет решение.*

Доказательство. В силу коэрцитивности функционала (5) имеем, что если $\{v^s\}_{s=1}^{\infty}$ – минимизирующая последовательность управлений для задачи (1) – (5), что

$$\|v^s\|_{L^2(0,T)} \leq C; \tag{5}$$

и из априорной оценки для краевой задачи (1) – (3) имеем:

$$\|y^s\|_{H^{2,1}(Q)} \leq C, \tag{6}$$

где y^s – решение задачи (1) – (3) при управлении v^s. Из (6), (7) следует, что

$$v^s \to \overline{v} \text{ слабо в } (L^2(0,T))^p, \tag{7}$$

$$y^s \to \overline{y} \text{ слабо в } H^{2,1}(Q), \tag{8}$$

$$y^s(\xi,t) \to \overline{y}(\xi,t) \text{ слабо в } H^{3/2,\ 3/4}(\Gamma_i \times (0,T)). \tag{9}$$

Из (10) получаем:

$$y^s(\xi,t) \to \overline{y}(\xi,t) \text{ сильно в } L^2(\Gamma_i \times (0,T)). \tag{10}$$

И с учетом (8), (11) будем иметь в $D'(Q)$:

$$v_i^s(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) y^s(\xi,t) d\xi \to \overline{v}_i(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) \overline{y}(\xi,t) d\xi. \tag{11}$$

Действительно,

$$v_i^s(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) y^s(\xi,t) d\xi = v_i^s(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) [y^s(\xi,t) - \overline{y}(\xi,t)] d\xi +$$

$$+ v_i^s(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) \overline{y}(\xi,t) d\xi \to \overline{v}_i(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) \overline{y}(\xi,t) d\xi,$$

так как

$$v_i^s(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) [y^s(\xi,t) - \overline{y}(\xi,t)] d\xi \leq C \|y^s - \overline{y}\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_i))}$$

при $n \to \infty$ в силу (11).

Итак, согласно (10) – (12) пара $\{\overline{y}(x,t), \overline{v}(t)\}$ удовлетворяет соотношениям (1) – (3) и является решением задачи (1) – (5), так как функционал (5) является слабо полунепрерывным снизу. Теорема 1 доказана.

3. Достаточные условия оптимальности. Абсолютный минимум. Введем следующие обозначения:

$$R[t,y,v] = \int\limits_{\Omega} [D_t^1 y - \sum_{i,j=1}^{n} D_{x_i}^1 (a_{ij} D_{x_j}^1 y) - \sum_{i=1}^{p} v_i(t) \int\limits_{\Gamma_i} e_i(x,\xi,t) y(\xi,t) d\xi] \psi(x,t) dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega} f\psi(x,t)dx - \sum_{i=1}^{p}|v_i(t)|^2 + \varphi_t[t,y], \tag{12}$$

где $\varphi[t,y] : [0,T]\times L^2(\Omega)\to R^1$ – непрерывно дифференцируемый функционал, причем:

$$\mathrm{grad}_y\varphi[t,y]_{|y(x,t)} = \psi(x,t)\in L_2(Q), \tag{13}$$

$$L^1(0,T)\ni\mu(t) = \sup_{y,v} R[t,y,v] \text{ при } (1)-(4), \tag{14}$$

$$G[T,y(x,T)] = \int\limits_{\Omega}|y(x,T)-z_3|^2dx + \varphi[T,y(x,T)], \tag{15}$$

$$-\infty > m = \inf_{y(x,T)} G[T,y(x,T)] \text{ при } (1)-(5). \tag{16}$$

Справедлива [1, 2]:

Теорема 2. *Пусть существует функционал* $\varphi[t,y]$, *удовлетворяющий условиям (13) – (17). Тогда для оптимальности пары* $\{\overline{y}(x,t),\overline{v}(t)\}$ *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$R[t,y,v] = \mu(t) \text{ для п.в. } t\in(0,T), \tag{17}$$

$$G[T,\overline{y}(x,T)] = m. \tag{18}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что при любых допустимых $\{y(x,t),v(t)\}$ имеем:

$$-\int\limits_0^T R[t,y(x,t),v(t)]dt + G[T,y(x,T) - \varphi[0,y_0(x)] = J(v), \tag{19}$$

следовательно,

$$J(v)\geq m - \int\limits_0^T \mu(t)dt - \varphi[0,y_0(x)].$$

Равенство в (20) достигается на оптимальной паре $\{\overline{y}(x,t),\overline{v}(t)\}$. Достаточность доказана. Осталось показать необходимость.

Пусть пара $\{\overline{y}(x,t),\overline{v}(t)\}$ оптимальна, но хотя бы одно из условий (8), (9) нарушается, т.е. существует такое $\varepsilon>0$, что

$$R[t,\overline{y},\overline{v}] = \mu(t)-\varepsilon, \text{ либо } G[T,y(x,T)] = m+\varepsilon.$$

Тогда имеем:

$$J(\overline{v}) = m - \int\limits_0^T \mu(t)dt + M(\varphi) - \varphi[0,y_0(x)], \tag{20}$$

где

$$M(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } G[T,\overline{y}(x,T)] = m+\varepsilon,\\ \varepsilon T, & \text{если } R[t,\overline{y},\overline{v}] = \mu(t)-\varepsilon.\end{cases}$$

Соотношение (21) противоречит оптимальности пары $\{\overline{y}(x,t),\overline{v}(t)\}$. Теорема доказана.

4. Пример. Рассмотрим задачу: найти минимум функционала

$$J[v] = \int\limits_0^1 |y(x,2) - z(x)|^2 dx + 0.5 \int\limits_0^2 |v(t)|^2 dt, \tag{21}$$

(где $z \in L^2(0,1)$ – задана) на множестве пар $\{y(x,t), v(t)\}$, удовлетворяющих условиям:
1) $y \in H^{2,1}(Q)$, $Q = \{(x,t) : x \in (0,1),\, t \in (0,2)\}$;
2) $v \in L^2(0,2)$;
3) $\{y, v\}$:

$$D_t^1 y = D_x^2 y + v(t) y(0,t) \text{ на } Q, \tag{22}$$

$$y(x,0) = y_0 \in H_0^1(0,1) - \text{ задана}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0,\ y(1,t) = 0 \text{ на } (0,2). \tag{24}$$

Для реализации алгоритма использовалось следующее представление функционала $\varphi^s[t,y]$:

$$\varphi^s[t,y] = \int\limits_0^1 \psi_s(x,t) y^{s-1}(x,t) dx d,\ s = 1,2,..., \tag{25}$$

где $\psi_s(x,t)$ – решение краевой задачи:

$$(-D_t^1 - D_x^2)\psi_s = \delta(x) \otimes \left| \int\limits_0^1 \psi_s(\xi,t) d\xi \right|^2 y^{s-1}(0,t) \text{ на } Q, \tag{26}$$

$$D_x^1 \psi_s(0,t) = 0,\ \psi_s(1,t) = 0 \text{ на } (0,2). \tag{27}$$

$$\psi_s(x,2) = -2[y^{s-1}(x,2) - z(x)] \text{ на } (0,1). \tag{28}$$

При численном решении задачи (22) – (29) функции $y_0(x)$ и $z(x)$ задавались как:

$$y_0(x) = 1 - x^2,\ z(x) = 0.5(1 - x^2).$$

Решение задач (23) – (25), (27) – (29) производилось с помощью их представления:

$$y(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) X_i(x),\ \psi(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(t) X_i(x), \tag{29}$$

где $\{X_i(x),\ \lambda_i\}$ – ортонормированная система собственных функций и собственных чисел задачи:

$$X_i''(x) + \lambda_i^2 X_i(x) = 0,\ \ X_i'(0) = X_i(1) = 0,\ i = 0,1,2,..., \tag{30}$$

которые определяются соотношениями:

$$\lambda_i = \frac{\pi(2i+1)}{2},\ X_i(x) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi(2i+1)}{2},\ i = 0,1,2,...,$$

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i X_i(x),\ \gamma_i = \frac{(-1)^i 2\sqrt{2}}{\pi(2i+1)},\ i = 0,1,2,...,$$

$$y_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_0 i X_i(x),\ y_{0i} = \frac{(-1)^i 2\sqrt{2}}{\pi/2 + i\pi)^3},\ i = 0,1,2,...,$$

$$z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i X_i(x), \;\; z_i = \frac{(-1)^i \sqrt{2}}{\pi/2 + i\pi)^3}, \;\; i = 0, 1, 2, ...$$

Используя эти соотношения, получаем задачу оптимального управления для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для приближенного решения мы ограничивались "усеченными" обыкновенными системами уравнений. Для численной реализации алгоритма была составлена программа на алгоритмическом языке FORTRAN-IV и проведены численные расчеты на ЭВМ. Приближенное оптимальное решение находилось за 2–3 итерации алгоритма в зависимости от начального приближения $v^1(t)$. При этом значение минимизируемого функционала уменьшилось с ≈ 0.359 до 0.090.

Цитированная литература

1. **Krotov V.F.** Global methods in optimal control theory. M.Dekker, 1996.

2. **Дженалиев М.Т., Шарипов К.С.** //Математический журнал. Алматы. 2007. Т. 7, № 3 (25). С. 35 – 40.

Поступила в редакцию 18.08.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 99 – 105*

УДК 517.956

ВЗАИМНО-СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Т. Т. Шерияздан

Актюбинский государственный институт имени К.Жубанова
030000 Актюбинск ул. Братьев Жубановых, 263 talgat_sher@mail.ru

В этой работе исследованы взаимно-сопряженные задачи Дарбу с отходом от характеристики для многомерного волнового уравнения.

В [1,2] для уравнения колебания струны изучались задачи Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений. Для уравнения Геллерстедта эта задача исследована [3,4].

п.1. Постановка задач и результаты. Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ конусами $\Gamma_0 : r = t, 0 \le r \le r_0$, $0 < r_0 = const < \frac{1}{2}$, $\Gamma_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = t$, $r_0 \le r \le r_1$, $\Gamma_1 : r = 1 - t, r_1 \le r \le 1$, где $r = |x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 < \beta = const < 1$, $r_1 = \frac{(1-r_0+r_0\cdot\beta)}{(1+\beta)}$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Box u \equiv \Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \ge 2$.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующие

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_S = \tau(x), \ u|_{S_0} = \sigma_0(x), u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x) \tag{2}$$

Keywords: *multivariate, wave equation, characteristics, spherical function, ensemble*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R12

или

$$u_t|_S = \nu(x),\ u|_{S_0} = \sigma_0(x), u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x). \tag{3}$$

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = \tau(x),\ v|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x), v|_{S_1} = \sigma_1(x) \tag{4}$$

или

$$v_t|_S = \nu(x),\ v|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x), v|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{5}$$

Как отмечено в [4], сформулированные задачи возникают при исследовании трансзвуковых проблем.

Эти задачи в классе $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ являются взаимно-сопряженными.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i < \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$ – пространство Соболева.

Имеет место [5]

Лемма. *Пусть* $f(r, \theta) \in W^l_2(S)$. *Если* $l \geq m-1$, *то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Через $\bar\tau^k_n(r)$, $\bar\nu^k_n(r)$, $\bar\sigma^k_{0n}(r)$, $\bar\sigma^k_{\beta n}(r)$ обозначим коэффициенты ряда (6) разложения функций $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$, $\sigma_0(r, \theta)$, $\sigma_\beta(r, \theta)$ соответственно.

Введем множество функций

$B^l(S) = \Big\{ f(r, \theta) :\ f \in W^l_2(S),$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{k_n} \Big(\| f^k_n(r) \|^2_{C^2((0,1))} + \| f^k_n(r) \|^2_{C([0,1])} \Big) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l > m-1 \Big\}.$

Пусть $\tau(r, \theta) = r\tau^*(r, \theta), \nu(r, \theta) = rv^*(r, \theta)$, $\sigma_0(r, \theta) = r\sigma^*_0(r, \theta)$, $\tau^*(r, \theta)$, $\nu^*(r, \theta) \in B^l(S)$, $\sigma^*_0(r, \theta) \in B^l(\widetilde{S}_0)$, $\sigma_\beta(r, \theta) \in B^l(S_\beta)$.

Тогда справедливы

Теорема 1. *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Теорема 2. *В классе* $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ *задача 2 имеет единственное решение.*

п.2. Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение 1 имеет вид [5]:

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0, \tag{7}$$

где $\delta \equiv -\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right)$, $g_1 = 1$, $g_j = (sin\theta_1\ ...\ sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (8) в (7), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [5], получим:

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=0,\ \lambda_n=n\cdot(n+m-2),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,.... \tag{9}$$

При этом краевые условия (2),(3), с учетом леммы, запишутся соответственно в виде:

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k(r,0)=\bar{\tau}_n^k(r),0\le r\le 1,\bar{u}_n^k(r,r)=\bar{\sigma}_{0n}^k(r),0\le r\le r_0,\\ \bar{u}_n^k(r,\beta\cdot(r-r_0)+r_0)=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r),r_0\le r\le r_1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\nu}_n^k(r),0\le r\le 1,\bar{u}_n^k(r,r)=\bar{\sigma}_{0n}^k(r),0\le r\le r_0,\\ \bar{u}_n^k(r,\beta\cdot(r-r_0)+r_0)=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r),r_0\le r\le r_1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,....\end{gathered} \tag{11}$$

Произведя замену переменной по формуле $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $\xi=\frac{(r+t)}{2},\eta=\frac{r-t}{2}$, из (9) будем иметь:

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{[(m-1)\cdot(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}\cdot u_n^k=0, \tag{12}$$

причем условие (10) для функций $u_n^k(\xi,\eta)$ примет вид:

$$\begin{gathered}u_n^k(\xi,\xi)=\tau_n^k(\xi),0\le\xi\le\tfrac{1}{2},u_n^k(\xi,0)=\sigma_{0n}^k(\xi),0\le\xi\le\xi_0=r_0,\\ u_n^k(\xi,\alpha(\xi-\xi_0))=\sigma_{\beta n}^k(\xi),\xi_0\le\xi\le\tfrac{1}{2},0<\alpha=\tfrac{1-\beta}{1+\beta}<1,\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\overline{\tau}_n^k(2\xi),\sigma_{0n}^k(\xi)=\xi^{\frac{m-1}{2}}\cdot\overline{\sigma}_{0n}^k(\xi),\\ \sigma_{\beta n}^k(\xi)=((1+\alpha)\cdot\xi-\alpha\xi_0)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\overline{\sigma}_{\beta n}^k((1+\alpha)\cdot\xi-\alpha\xi_0),k=\overline{1,k_n},n=0,1,....\end{gathered}$$

Используя общее решение уравнения (12) ([1]), в [6,7] показано, что решение задачи Коши для уравнения (10) имеет вид:

$$\begin{gathered}u_n^k(\xi,\eta)=\tfrac{1}{2}\tau_n^k(\eta)\cdot R(\eta,\eta;\xi,\xi)+\tfrac{1}{2}\tau_n^k(\xi)\cdot R(\xi,\xi;\xi,\eta)+\\ +\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\tfrac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\mid_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1,\end{gathered} \tag{14}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (12) [8], а $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$, $\nu_n^k(\xi_1)=\frac{\partial u_n^k}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)|_{\xi_1=\eta_1}$, $N^\perp$ – нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскостей $\eta\le\xi$.

Из (14) при $\eta = 0$ и $\eta = \alpha(\xi - \xi_0)$ используя краевое условие (13), получим соответственно интегральные уравнения первого рода:

$$g_{1n}^k(\xi) = \int_0^\xi \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, 0 \le \xi \le \xi_0,$$

$$g_{2n}^k(\xi) = \int_{\alpha(\xi-\xi_0)}^\xi \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi+\alpha(\xi-\xi_0))}\right) d\xi_1, \xi_0 \le \xi \le \frac{1}{2},$$

$$g_{1n}^k(\xi) = \sqrt{2}\sigma_{0n}^k(\xi) - \frac{\tau_n^k(\xi)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^\xi \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1,$$

$$g_{2n}^k(\xi) = \sqrt{2}\sigma_{\beta n}^k(\xi) - \frac{\tau_n^k(\alpha(\xi-\xi_0))}{\sqrt{2}} - \frac{\tau_n^k(\xi)}{\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\alpha(\xi-\xi_0)}^\xi \tau_n^k(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) P_\mu\left(\frac{\xi_1 - \eta_1 + 2(\xi_1\eta_1 + \alpha\xi(\xi-\xi_1))}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\alpha\xi-\alpha\xi_0)}\right)|_{\xi_1=\eta_1} d\xi_1,$$

которые дифференцированием сводятся к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{dg_{1n}^k}{d\xi} = \nu_n^k(\xi) - \int_0^\xi \frac{\nu_n^k(\xi_1)}{\xi_1} \cdot G_{1n}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, \tag{15}$$

$$G_{1n}(\xi, \xi_1) = \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^2 \cdot P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)$$

и функционально-интегральному уравнению вида:

$$\nu_n^k(\xi) - \alpha\nu_n^k(\alpha\xi - \alpha\xi_0) = f_n^k(\xi), \tag{16}$$

$$f_n^k(\xi) = \int_{\alpha(\xi-\xi_0)}^\xi \nu_n^k(\xi_1) \frac{2\alpha^2\xi\xi_0 + (1+\alpha)\xi_1^2 - \alpha(1+\alpha)(\xi^2+\xi_0)}{\xi_1(\xi+\alpha\xi-\alpha\xi_0)^2} \cdot P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2 - \alpha\xi_0}{\xi_1(\xi+\alpha\xi-\alpha\xi_0)}\right) d\xi_1 + h_n^k(\xi),$$

$$h_n^k(\xi) = \frac{dg_{2n}^k}{d\xi}.$$

В [6] показано, что уравнение (15) имеет бесконечное множество решений. Далее, в [9] установлено, что функциональное уравнение (16) обратимо следующим образом:

$$\nu_n^k(\xi) = \frac{f_n^k(\xi) + \alpha f_n^k(\alpha(\xi-\xi_0))}{1-\alpha^2} = \mu_n^k(\xi) + \int_{\alpha^2(\xi-\xi_0)-\alpha\xi_0}^\xi \nu_n^k(\xi_1) G_{2n}(\xi,\xi_1) d\xi_1, \tag{17}$$

где

$$\mu_n^k(\xi) = \frac{h_n^k(\xi) + \alpha h_n^k(\alpha(\xi-\xi_0))}{1-\alpha^2}, \mu_n^k(\xi) \in C([\xi_0, \frac{1}{2}]),$$

$$G_{2n}(\xi,\xi_1)=\begin{cases}\frac{\left[2\alpha^3(\xi-\xi_0)\xi_0+\xi_1^2(1+\alpha)-\alpha(1+\alpha)(\alpha^2(\xi-\xi_0)^2+\xi_0)\right]}{\alpha(1-\alpha^2)[(1+\alpha)(\xi-\xi_0)-\xi_0]^2\xi_1}\cdot P'_\mu\left[\frac{\alpha^3(\xi-\xi_0)^2-\alpha\xi_0+\xi_1^2}{\xi_1(\alpha(1+\alpha)(\xi-\xi_0)-\alpha\xi_0)}\right],\\ \alpha^2(\xi-\xi_0)-\alpha\xi_0\le\xi_1\le\alpha(\xi-\xi_0),\\ \frac{2\alpha^2\xi\xi_0+\xi_1^2(1+\alpha)-\alpha(1+\alpha)(\xi^2+\xi_0)}{(1-\alpha^2)[(1+\alpha)\xi-\alpha\xi_0]^2\xi_1}\cdot P'_\mu\left[\frac{\alpha\xi^2-\alpha\xi_0+\xi_1^2}{\xi_1((1+\alpha)\xi-\alpha\xi_0)}\right],\\ \alpha(\xi-\xi_0)\le\xi_1\le\xi.\end{cases} \tag{18}$$

Так как $|P'_\mu(z)|\le C=const$ [10], то ядро $G_{2n}(\xi,\xi_1)$ (18) допускает оценку:

$$|G_{2n}(\xi,\xi_1)|\le K. \tag{19}$$

Решение интегрального уравнения (17) будем искать в виде ряда:

$$\nu(\xi)=\sum_{l=0}^{\infty}\nu_l(\xi), \tag{20}$$

$$\nu_0(\xi)=\mu_n^k(\xi),\nu_l(\xi)=\int\limits_{\alpha^2(\xi-\xi_0)-\alpha\xi_0}^{\xi}G_{2n}(\xi,\xi_1)\nu_{l-1}(\xi_1)d\xi_1, l=1,2,....$$

Из (19) получим следующие оценки:

$$|\nu_0(\xi)|=\max_{\left[\xi_0,\frac{1}{2}\right]}|\mu_n^k(\xi)|=m,|\nu_1(\xi)|\le mK\xi,$$

$$|\nu_2(\xi)|\le mK^2\frac{\xi^2}{2},|\nu_l(\xi)|\le m\frac{(K\xi)^l}{l!}\le m\frac{K^l}{l!}.$$

Тогда для ряда (20) будем иметь:

$$|\nu(\xi)|\le\sum_{l=0}^{\infty}|\nu_l(\xi)|\le m\sum_{l=0}^{\infty}\frac{K^l}{l!}=m\cdot\exp K.$$

Таким образом, интегральное уравнение (17), (а также (16)) имеет единственное решение.

Следовательно, задача (1), (2) имеет бесчисленное множество решений вида:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{21}$$

где функции $u_n^k(r,t),k=\overline{1,k_n},n=0,1,...,$ находятся из формулы (14), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяются из уравнений (15) и (17).

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение также будем искать в виде (8). В этом случае краевое условие (11) имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_n^k}{\partial N}|_{\xi=\eta}=\nu_n^k(\xi),0\le\xi\le\tfrac{1}{2},u_n^k(\xi,0)=\sigma_{0n}^k(\xi),0\le\xi\le\xi_0,\\ u_n^k(\xi,\alpha(\xi-\xi_0))=\sigma_{\beta n}^k(\xi),\xi_0\le\xi\le\tfrac{1}{2},\nu_n^k(\xi)=\sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\overline{\nu}_n^k(2\xi),\\ k=\overline{1,k_n},n=0,1,....\end{gathered} \tag{22}$$

Далее из (14) при $\eta = 0$ и $\eta = \alpha(\xi - \xi_0)$, с учетом (20) получим соответственно интегральное уравнение:

$$\tau_n^k(\xi) = \psi_{1n}^k(\xi) - \int\limits_0^\xi \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, 0 \le \xi \le \xi_0, \tag{23}$$

и функционально-интегральное уравнение:

$$\tau_n^k(\xi) + \tau_n^k(\alpha(\xi - \xi_0)) = \psi_{2n}^k(\xi) - \int\limits_{\alpha(\xi-\xi_0)}^\xi \tau_n^k(\xi_1) G_{2n}(\xi, \xi_1) d\xi_1, \xi_0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{24}$$

$$\psi_{1n}^k(\xi) = 2\sigma_{0n}^k(\xi) - \sqrt{2}\int\limits_0^\xi \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1,$$

$$\psi_{2n}^k(\xi) = 2\sigma_{\beta n}^k(\xi) - \sqrt{2}\int\limits_{\alpha(\xi-\xi_1)}^\xi \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi + \alpha(\xi - \xi_0))}\right] d\xi_1,$$

$$G_{2n}(\xi, \xi_1) = \frac{(\alpha(\xi-\xi_0) - \xi)}{\xi_1(\xi + \alpha(\xi-\xi_0))} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi(\xi-\xi_0)}{\xi_1(\xi + \alpha(\xi-\xi_0))}\right], |G_{2n}(\xi, \xi_1)| \le \frac{C}{\xi + \alpha(\xi - \xi_0)}.$$

В [6] доказано, что уравнение (23) имеет бесчисленное множество решений.

Далее, так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (24), вполне непрерывен, то как показано в [9] функциональное уравнение (24) однозначно разрешимо.

Таким образом, задача (1),(3) также имеет бесчисленное множество решений вида (21), где функции $u_n^k(r,t), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ...,$ находятся из формулы (14), в которой $\tau_n^k(\xi)$ определяются из уравнений (23) и (24).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,t), \nu(r,t), \sigma_0(r,t), \sigma_\beta(r,t)$, аналогично [6, 7] можно показать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ (21) принадлежит искомому классу.

Теорема 1 доказана.

п.3. Единственность решения задачи 2. Сначала рассмотрим задачу (1),(4). Для этого построим $u(r,\theta,t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_S = \tau(r,\theta) = \overline{\tau}_n^k(r) \cdot Y_{n,m}^k(\theta), u|_{S_0 \cup S_\beta} = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ..., \tag{25}$$

$\overline{\tau}_n^k \in V$, где V – множество функций $\tau(r)$ из класса $C^2(0 < r < 1) \cap C^1(0 \le r \le 1)$. Очевидно, что множество V плотно в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $u_n^k(\xi,\eta)$ получим уравнение (12) с краевыми условиями:

$$\begin{gathered} u_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi), 0 \le \xi \le \tfrac{1}{2}, u_n^k(\xi, 0) = 0, 0 \le \xi \le \xi_0, \\ u_n^k(\xi, \alpha(\xi - \xi_0)) = 0, \xi_0 \le \xi \le \tfrac{1}{2}, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ... \end{gathered} \tag{26}$$

Как показано в п.2, задача (12), (26) имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, решение (1), (25) в виде (21) построено, где $u_n^k(r,t), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ...,$ определяются из (14), а $\nu_n^k(\xi)$ находятся из уравнений (15) и (17).

Из тождества Римана

$$v\Box u - u\Box v = \sum_{i=k}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{D_\beta}(v\Box u - u\Box v)dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta}\left(v\frac{\partial u}{\partial N'} - u\frac{\partial v}{\partial N'}\right)ds, \qquad (27)$$

где $\frac{\partial}{\partial N'} = \sum\limits_{i=1}^{m} cos(N^\perp, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} - cos(N^\perp, t)\frac{\partial}{\partial t}$ – конормаль к границе ∂D_β, а $N^\perp$ – внутренняя нормаль к ∂D_β.

Из (27) принимая во внимание граничные условия (4) и тот факт, что на характеристических конусах S_0, S_1 конормальная производная $\frac{\partial u}{\partial N'}$ совпадает с производной по касательному направлению [11], получим $\int\limits_S \tau(r,\theta)v_t(r,\theta,0)ds = 0$. Отсюда, поскольку линейная оболочка системы функций $\{\overline{\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)}\}$ плотна [12] в $L_2(S)$, заключаем, что $v_t(r,\theta,0) \ \ \forall(r,\theta) \in S$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $\Box v = 0,\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, будем иметь $v(x,t) \equiv 0,\ \forall(x,t) \in D_\beta$.

Единственность решения задачи (1),(4) показано. Аналогичным образом доказывается единственность решения задачи (1), (5).

Заметим, что из теоремы 1 следует, что однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Цитированная литература

1. **Бицадзе А.В.** Уравнения смешанного типа. М., 1959.

2. **Бицадзе А.В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.

3. **Protter M.N.** //Duke Math. J. 1954. V. 21, № 1. P. 1 – 7.

4. **Франкль Ф.И.** Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.

5. **Михлин С.Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.

6. **Алдашев С.А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.

7. **Алдашев С.А.** Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал, 2007.

8. **Copson E.T.** //J.Rath. Mech. And Anal. 1958. V. 1. P. 324 – 348.

9. **Литвинчук Г.С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.

10. **Бейтмен Г., Эрдейн А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1976.

11. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. М., 1981.

12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Поступила в редакцию 10.08.2009г.

Математический журнал. *Алматы. 2009. Том 9. № 3 (33) . С. 106 – 107*

ХРОНИКА

АЛЕКСАНДР АЛИПКАНОВИЧ ЖЕНСЫКБАЕВ

Наука и математическое сообщество понесли невосполнимую утрату. 4 сентября 2009 года на 63 году скоропостижно скончался крупный ученый-математик, академик Национальной Академии наук Республики Казахстан доктор физико-математических наук, профессор Александр Алипканович Женсыкбаев.

Женсыкбаев А.А. родился 21 августа 1947 г., в г. Бургас (Болгария) в семье военнослужащего. В связи с частыми переездами во время учебы он сменил семь школ в Азербайджане, России, Украине. Среднюю школу окончил с золотой медалью и в 1965г. стал студентом Днепропетровского государственного университета. В 1970г. там же поступил в аспирантуру и, досрочно завершив работу над диссертацией, успешно защитил ее в 1973 году по специальности 01.01.01 – теория функций и функциональный анализ. В диссертации были получены точные оценки приближения классов непрерывных и дифференцируемых функций интерполяционными сплайнами минимального дефекта.

Докторскую диссертацию на тему "Экстремальные свойства моносплайнов и наилучшие квадратурные формулы" защитил в 1980г. в Математическом институте им. В.А.Стеклова АН СССР по специальности 01.01.01. – математический анализ. В ней была решена широко известная задача о наилучшей квадратурной формуле для соболевских классов функций. Методы ее решения оказались применимыми для решения многих других задач в теории интерполяции, теории поперечников, теории квадратур и получили дальнейшее развитие в работах многих математиков.

С 1982г. – профессор, в 1995г. избран членом-корреспондентом НАН РК, а в 1999г. – действительным членом Международной Академии Наук Высшей Школы. С 2003 г. – академик НАН РК.

С 1973г. Женсыкбаев А.А. работал ассистентом кафедры математического анализа Днепропетровского государственного университета, а с 1974г. – старшим преподавателем и затем доцентом кафедры математического анализа Казахского государственного университета им. С.М.Кирова. С 1981г. по 2000г. заведовал кафедрой математического анализа Каз ГУ им. аль-Фараби.

С 1994г. по 1997г. Женсыкбаев А.А. работает заместителем начальника по науке Алматинского Высшего технического училища, где организовывает адъюнктуру по подготовке специалистов высшей квалификации. С 1998г. по 2000г. А.А. Женсыкбаев являлся председателем

ВАК РК. Начиная с 80-х годов Александр Алипканович работал по совместительству в Институте математики, в 2000г. он стал директором этого Института, и занимал этот пост по 2006 г.

А.А. Женсыкбаев – признанный в мире специалист в области теории функций и функционального анализа. Он внес крупный вклад в теорию приближения функций и восстановления операторов. С его именем связано развитие теории сплайнов в Казахстане. После завершения исследований, составивших предмет докторской диссертации, Женсыкбаев А.А. решает известные задачи о нулях моносплайнов произвольной кратности и о наилучших гауссовых квадратурных формулах для слабых чебышевских систем. В дальнейшем его интересы переключаются в область теории функций многих переменных, где он получил ряд новых весомых результатов. В частности, им были разработаны новые оптимальные методы восстановления операторов на классах функций многих переменных, новые многомерные интерполяционные аппараты.

Главные результаты А.А. Женсыкбаева: найдены точные оценки приближения ряда классов гладких периодических функций интерполяционными сплайнами, решена известная задача Колмогорова-Никольского о наилучшей квадратурной формуле на классах Соболева, введен новый аппарат аппроксимации функций многих переменных - информационно-ядерные сплайны, с помощью которого получены оптимальные методы восстановления широкого класса (не обязательно линейных) операторов на классах элементов типа свертки.

Им опубликовано около 90 научных публикаций, в том числе три монографии, изданные в Казахстане и России, и два учебных пособия. Под его руководством защищено десять кандидатских диссертаций. Научные труды Женсыкбаева А.А. опубликованы в ведущих международных журналах, таких как "Доклады АН СССР", "Доклады РАН", "Успехи математических наук", "Известия АН СССР", "Analysis Mathematica", "Journal of Approximation", "East J. on Approximation" и др. Он выступал с научными докладами на математических конгрессах (Москва, Варшава, Цюрих) и многих международных конференциях (Казахстан, Россия, США, Франция, Испания, Югославия, Польша, Венгрия, Болгария, Индия и др.).

Много времени он уделял преподавательской деятельности. Александр Алипханович в разные годы по приглашению читал лекции в университетах и научных центрах США, Франции, Испании, Польши, Пакистана. Большое место в жизни А.А. Женсыкбаева занимала научно-организационная работа. Александр Алипханович был одним из организаторов и главным редактором «Математического журнала», издаваемого Институтом математики. Был экспертом ИНТАС, являлся редактором международного журнала «East Journal on approximation», издаваемого в Болгарии, членом Американского математического общества.

За научные достижения А.А. Женсыкбаев в 1978 г. удостоен премии Ленинского Комсомола в области науки и техники (СССР), в 1984 г. награжден орденом »Знак Почета», в 1999 г. стал лауреатом международной премии им. Хорезми (Иран). В 2001г. награжден юбилейной медалью, посвященной 10-летию независимости Республики Казахстан. В 2000г. избран почетным членом американской ассоциации научных советников. В 2004г. избран членом президиума НАН РК.

Александр Алипканович был прекрасным лектором, умел увлечь студентов, щедро делился своими идеями с учениками и сотрудниками. Его всегда отличали высокая принципиальность и активная жизненная позиция.

Светлая память об Александре Алипкановиче Женсыкбаеве – крупном ученом и педагоге, прекрасном организаторе и руководителе – навсегда сохранится в сердцах его родных, друзей, учеников и коллег.

Редакционная коллегия

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.956 2000 MSC: 35R12

Aldashev S.A. **Criterion of uniqueness of the solution of the Darboux problem for the degenerating third-dimensional hyperbolic equations**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 5 – 13.

In work the criterion of uniqueness of the regular solution of Darboux-Protters problem for the third-dimensional hyperbolic equations is obtained and also the uniqueness theorem of a solution of a problem, conjugate to it is proved.
References – 13.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35R12

Алдашев С.А. **Бітетін үш өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған Дарбу есебінің даралығының белгісі** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 5 – 13.

Жұмыста үш өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған Дарбу-Проттер есебінің жүйелі шешімінің даралығының белгісі, сонымен бірге алынған есепке түйіндес есептің шешімінің даралығы дәлелдеген.
Әдебиеттер тізімі – 13.

УДК: 539.3 2000 MSC: 42A10

Alekseeva L.A., Martynov N.I., Fedorov I.O. **Application of quasicomform displaying at the heterogeneous anisotropic body's torsion problems**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 14 – 18.

By the quasicomform displaying the heterogeneous anisotropic body's torsion problems have reduced to appropriate problems of the heterogeneous isotropic bodies.
References – 11.

УДК: 539.3 2000 MSC: 42A10

Алексеева Л.А., Мартынов Н.И., Федоров И.О. **Бір текті емес анизотропты денелердің бұралу есептерінде квазикомформды бейнелеуды пайдалану** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 14 – 18.

Бір текті емес анизотропты денелердің бұралу есептері квазикомформды бейнелеу арқылы бір текті емес изотропты денелердің сәйкес есептеріне келтірілді.
Әдебиеттер тізімі – 11.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35R12, 35L20, 34B37

Asanova A.T., Medetbekova R.A. **About solvability of semi-periodical boundary value problem for systems of hyperbolic equations with impulsive effect** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 19 – 27.

A semi-periodical boundary value problem for systems of hyperbolic equations with impulsive effect is considered. The coefficients conditions of unique solvability considering problem use method of introduction functional parameters are established.
References – 5.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35R12, 35L20, 34B37

Асанова А.Т., Медетбекова Р.А. **Импульстiк әсерi бар гиперболалық теңдеулер жүйелерi үшiн жартылай периодты шеттiк есептiң шешiлiмдiлiгi туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 19 – 27.

Импульстiк әсерi бар гиперболалық тектес теңдеулер жүйелерi үшiн жартылай периодты шеттiк есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептiң бiрмәндi шешiлiмдiлiгiнiң коэффициенттiк шарттары функционалдық параметрлер енгiзу әдiсi арқылы алынған.
Әдебиеттер тiзiмi – 5.

УДК: 517.962 2000 MSC: 45J5

Bopaev K.B., Yeskendirova Y.V. **Stability Of Nonlinear difference-dynamical systems In First Approach**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 28 – 33.

The problem of a stability of non-linear difference-dynamical systems on the first approach is investigated by means of netly-difference inequalities.
References – 6.

УДК: 517.962 2000 MSC: 45J5

Бопаев Қ.Б., Ескендiрова Е.В. **Сызықты емес АДЖ-ң бiрiншi жуықшасы бойынша орнықтылыгы**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 28 – 33.

Ұсынылып отырған жұмыста қосындылы-айырымдық теңсiздiктер көмегiмен сызықты емес АДЖ-ң бiрiншi жуықшасы бойынша орнықтылық туралы есебi қарастырылады.
Әдебиеттер тiзiмi – 6.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

Dzhobulaeva Zh.K. **Free boundary a model problem with two small parameters for the system of the parabolic equations**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 34 – 44.

Solving nonlinear problems with a free boundary with two small parameters at the principle terms on the conjuction conditions for the system of the parabolic equations they oftain a model problem with small parameters $\kappa > 0, æ > 0$. The existence, uniqueness, coercive estimates of the solution in the Holder space with the constants independent on the small parameters κ, æ have been proved for it.
References – 3.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

Джобулаева Ж.К. **Параболалық теңдеулер жүйесі үшін екі кіші параметрі бар еркін шекаралы моделді есеп**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 34 – 44.

Параболалық теңдеулер жүйесі үшін ең үлкен мүшелерінің түйіндес шартында екі параметрі бар еркін шекаралы сызықтық емес есепті шығару кезінде кіші параметрлері $\kappa > 0$, $æ > 0$ моделді есеп туады. Шешімнің бар және жалғыз болуы, κ және æ кіші параметрлерден тәуелсіз Гельдер кеңістігінде тұрақтылары бар коэрцитивтік бағалаулары дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі – 3.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35G15, 35G30, 35M10

Juraev T.D., Jamalov B.I. **Boundary Value Problems for the mixed parabolic-hyperbolic equation of the fourth order** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 45 – 49.

It is stated a solvability of the nonlocal boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation of fourth order.

References – 4.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35G15, 35G30, 35M10

Жүраев Т.Д., Жамалов Б.И. **Төртінші ретті аралас парабола-гиперболалық теңдеудің шекаралық есептері**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 45 – 49.

Төртінші ретті аралас парабола-гиперболалық теңдеу үшін локалсыз шекаралық есептердің шешілетіндігі көрсетілген.

Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 511 2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

Kozhegeldinov S.Sh. **Common Nagell's equation** $\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5$ // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 50 – 55.

Three formulae are obtained and it is proved the equivalence. Each of them discribes all natural solutions of equation $\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5$.

References – 7.

УДК: 511 2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

Қожегельдинов С.Ш. $\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5$ **Жалпы Нагелл теңдеуі**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 50 – 55.

Үш формула алынған және олардың эквиваленттігі дәлелденген. Олардың әрқайсысы $\alpha x^2 + \beta y^3 = \gamma z^5$ теңдеуінің барлық натурал шешімдерін суреттейді.

Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 517.926 2000 MSC: 34A25

Kulik A.N., Kulik V.L. **Linear systems of differential equations with degenerated matrix** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 56 – 61.

It is proved that always by means of change Lyapunov's variable every linear homogeneous system of differential equations with permanent coefficients, in which number of equations not less two, may be transform to system with identity degenerate variable matrix.

References – 2.

УДК: 517.926 2000 MSC: 34A25

Кулик А.Н., Кулик В.Л. **Азынған матрицасы бар дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйелері** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 56 – 61.

Теңдеулер саны екіден кем емес әрбір сызықты біртекті жүйені Ляпунов айнымалыларын алмастыру көмегімен әрқашан пара-пар азынған айнымалы матрицасы бар жүйеге түрлендіруге болатындығы дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

Makasheva A.P. **TVD scheme for modeling jet flows of viscous compressed gas** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 62 – 70.

For the solution of three-dimensional parabolized Navier-Stokes equations the difference scheme with TVD-approximation has been constructed. The approbation of numerical model on examples of the outflow of system of plane supersonic jets of ideal gas in cocurrent flow and propagation of system of three-dimensional supersonic jets in cocurrent supersonic flow has been carried out. The good agreement with known results of calculations has been received.

References – 6.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

Мақашева А.П. **Тұтқыр сығылмалы ағыншаларды TVD схемасы бойынша модельдеу**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 62 – 70.

Үш өлшемді параболалық Навье-Стокс теңдеулерін шешу үшін TVD аппроксимациясы негізінде айырымдық схемасы құрылды. Дыбыс жылдамдығынан жоғары жазық (екі өлшемді) ағыншалардынң дыбыс жылдамдығынан жоғары серіктес ағынға ағып шығуы мен үш өлшемді дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыншалар жүйесінінң дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыста таралуы мысалдарымен сандық моделді тексеру жүргізілді. Белгілі сандық нәтижелермен жақсы сәйкестік алынды.

Әдебиеттер тізімі – 6.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10, 35P15

Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. **The bilateral estimates of singular numbers of the wave operator with lowest term** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 71 – 77.

The spectral properties of the one class of differential operators of hyperbolic type dating in unbounded domain are studied. The conditions guaranteeing bilateral estimates of the distribution s-numbers (singular numbers) of inverse operator it is reduced.

References – 11.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10, 35P15

Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М. **Кіші мүшесі бар толқындық оператордың сингулярлы сандарының екіжақты бағалары**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 71 – 77.

Шектеусіз облыста берілген гиперболалық тектес дифференциалдық операторлардың бір класының спектралдық қасиеттері зерттеледі. Кері оператордың s-сандарының (сингулярлы сандардың) үлестіруінің екі жақты бағаларын қамтамасыз ететін шарттар келтірілген.

Әдебиеттер тізімі – 11.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10

Rogovoy A.V. **Existence of non continuous solution of Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation in the case of non infinity smooth area**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 78 – 82.

In the work homogeneous Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation has been considered. Existence of non continuous solution of this problem has been proved and this solution has been build.

References – 2.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10

Роговой А.В. **Шексіз туындылы емес контур жағдайында Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін Трикоми есебінің үзілісті шешілетінділігі**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 78 – 82.

Бұл жұмыста Лаврентьев-Бицадзе теңдеуіндегі біртекті Трикоми есебі қарастырылады. Үзілісті шешім көрілген есепте дәлелденген, ал шешімі тура құрастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 517.962 2000 MSC: 34B40

Slamzhanova S.S. **On the components of the asymptotic equivalence difference-dynamical systems** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 83 – 93.

In this work the classic ideas on the components of the asymptotic equivalence on two difference-dynamical systems is investigated. The number of theorems of asymptotic equivalence are proved by Brauer, Lyapunov and Levinson.

References – 10.

УДК: 517.962 2000 MSC: 34B40

Слəмжанова С.С. **Айырымдық динамикалық жүйелердің компоненттері бойынша асимптотикалық эквиваленттілігі** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 83 – 93.

Бұл жұмыста екі айырымдық динамикалық жүйенің компоненттері бойынша асимптотикалық эквивалентті болу есебі қарастырылған. Олардың Брауэр, Ляпунов және Левинсон бойынша асимптотикалық эквиваленттігі жайындағы теоремалар дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 10.

УДК: 517.977.1/5 2000 MSC: 49J20, 49K20

Sharipov K.S. **The coefficiently "parametrical" control problem for the loaded parabolic equation** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 94 – 98.

It is stated the theorems on a solvability and optimality of the coefficiently "parametrical" control problem for the loaded parabolic equation.

References – 2.

УДК: 517.977.1/5 2000 MSC: 49J20, 49K20

Шәріпов /К.С. **Жүктелген параболалық теңдеуі үшін коэффициенттік "параметрлік" басқару есебі**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 94 – 98.

Жүктелген параболалық теңдеуі үшін коэффициенттік "параметрлік" басқару есебінің шешілімділігі және тиімділігі туралы теоремалар дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35R12

Sherijazdan T.T. **Reciprocally conjugate Darboux problems with withdrawal from characteristic for multivariable wave equation** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 3 (33). P. 99 – 105.

Reciprocally conjugate Darboux problems with withdrawal from characteristic for multivariable wave equation are investigated.

References – 12.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35R12

Шеріяздан Т.Т. **Көпөлшемді толқынды теңдеу үшін сипаттамадан ауытқулы өзара түйіндес Дарбу есептері**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 3 (33). Б. 99 – 105.

Көпөлшемді толқынды теңдеу үшін сипаттамадан ауытқулы өзара түйіндес Дарбу есептері зерттелген.

Әдебиеттер тізімі – 12.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту. Необходимо указать организацию, от которой направлена статья, адрес и e-mail (при наличии).

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами.

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 3 (33) 2009

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304
тел.: 8(727)2-72-01-66, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 30.09.2009г.
Тираж 300 экз. Объем 115 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы,
ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81
Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50
e-mail: print_express@bk.ru