ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2002 том 2 № 4 (6)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 2 № 4 (6) 2002

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 2, № 4 (6), 2002

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 5 — 10*

УДК 532.517.4

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ НА ПУЛЬСАЦИОНУЮ СТРУКТУРУ ТУРБУЛЕНТНОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ

У. С. Абдибеков

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, uali@math.kz

Аннотация

Для замыкания уравнения Рейнольдса для сдвиговых турбулентных течений предлагается полуэмпирическая модель, построенная на основе уравнений для одноточечных моментов второго порядка полей скорости, температуры и концентраций. Полученные аналитические выражения пульсационных характеристик турбулентного потока зависят от характеристик основного течения и учитывают двойное влияние архимедовых, сил вызванных полем температуры и концентраций.

В рассматриваемой проблеме основной задачей является получение в явном виде выражения турбулентных характеристик через средние характеристики турбулентного потока. Для исследования привлекаются уравнения, описывающие изменения напряжений Рейнольдса [1, 2]

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{\frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\nu\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i u_j} + \overline{\frac{P}{\rho}\left(\delta_{jk}u_i + \delta_{ik}u_j\right)}\right] + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + F_{ui} = 0. \qquad (1)$$

Для описания сложных турбулентных течений, где присутствуют температура и концентрация, используются дополнительные уравнения для моментов второго порядка полей температуры и концентраций [3, 4]

$$\frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial x_k} + \overline{u_k t}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial t}{\partial x_i}} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\nu\frac{\partial \overline{u_i t}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i t} + \overline{\frac{P}{\rho}t}\right] + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} + F_{ti} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \overline{t^2}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{t^2}}{\partial x_k} + 2\overline{u_k t}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-a\frac{\partial \overline{t^2}}{\partial x_k} + \overline{u_k t^2}\right] + 2a\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = 0, \qquad (3)$$

Keywords: *sheared turbulence flow, Reynolds stresses, secondary moments*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

$$\frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_k} + \overline{u_k q}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial Q}{\partial x_k} - \overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x_i}} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\nu\frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i q} + \overline{\frac{P}{\rho} q}\right] + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} + F_{qi} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_k} + 2\overline{u_k q}\frac{\partial Q}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-a\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_k} + \overline{u_k q^2}\right] + 2d\overline{\frac{\partial q}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \overline{tq}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{tq}}{\partial x_k} + \overline{u_k q}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \overline{u_k t}\frac{\partial Q}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\nu\frac{\partial \overline{tq}}{\partial x_k} + \overline{u_k tq}\right] + (a+d)\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = 0, \tag{6}$$

где τ — время, P — давление, U_i, u_i — компоненты средней и пульсационной скоростей соответственно, по осям x_i, T, t — средняя и пульсационная температура, Q, q — средняя и пульсационная характеристики концентраций. В течениях общего вида имеется в силу симметрии шесть компонент тензора напряжений Рейнольдса $u_i u_j$ и три компоненты корреляций вида $u_i t$ и $u_i q$, два уравнения для t^2 и q^2 и уравнение для корреляции вида tq. Следовательно, требуется решить пятнадцать уравнений в частных производных. Очевидно, что уравнения кроме средней скорости и моментов второго порядка содержат ряд новых неизвестных. Для определения некоторых членов системы уравнения используются приближенные полуэмпирические соотношения. Выражения для обмена энергией между различными компонентами пульсаций представляются в виде [5, 6]

$$\overline{\frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} = -k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right), \quad \overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = -k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i t}, \quad \overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = -k_q\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i q}. \tag{7}$$

Для диссипации, пульсационной энергии и их аналогов используются следующие выражения

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l} + \nu c_\nu\frac{u_i^2}{l^2}, \quad 2\nu\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = c_t\frac{t^2\sqrt{E}}{l^2} + ac_{\nu t}\frac{\overline{t^2}}{l^2},$$

$$2\nu\overline{\frac{\partial q}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = c_q\frac{q^2\sqrt{E}}{l^2} + dc_{\nu q}\frac{\overline{q^2}}{l^2}, \tag{8}$$

а для вторых моментов выражения принимают вид

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \nu c_\nu\frac{u_i u_j}{l^2}, \quad 2a\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = ac_{\nu t}\frac{\overline{u_i t}}{l^2}, \quad 2d\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = dc_{\nu q}\frac{\overline{u_i q}}{l^2}. \tag{9}$$

Рассматривая сдвиговые турбулентные течения, предполагается приближение Буссинеска т.е. изменения плотности малы, плотность учитывается только в массовых силах и имеет вид

$$F_{ui} = -\beta g\left(\delta_{3i}\overline{tu_j} + \delta_{3j}\overline{tu_i}\right) + \alpha g\left(\delta_{3i}\overline{qu_j} + \delta_{3j}\overline{qu_i}\right),$$

$$F_{ti} = g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{t^2} + \alpha\overline{tq}\right), \quad F_{qi} = g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{tq} + \alpha\overline{q^2}\right).$$

Записывая уравнения (1)—(6) для чисто сдвигового развитого турбулентного течения, замкнутые на основе полуэмпирических гипотез (7)—(9) и пренебрегая в них турбулентной диффузией, получим следующую систему уравнений

$$\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right) + \frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l} -$$

$$-\beta g\left(\delta_{3i}\overline{tu_j} + \delta_{3j}\overline{tu_i}\right) + \alpha g\left(\delta_{3i}\overline{qu_j} + \delta_{3j}\overline{qu_i}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\overline{u_k t}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial T}{\partial x_k} + k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i t} + g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{t^2} + \alpha\overline{tq}\right) = 0, \quad \overline{u_k t}\frac{\partial T}{\partial x_k} + c_t\frac{t^2\sqrt{E}}{l^2} = 0, \tag{11}$$

$$\overline{u_k q}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\overline{u_k u_i}\frac{\partial Q}{\partial x_k}-k_q\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i q}+g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{tq}+\alpha\overline{q^2}\right)=0,\quad \overline{u_k q}\frac{\partial Q}{\partial x_k}+c_q\frac{q^2\sqrt{E}}{l^2}=0, \tag{12}$$

$$\overline{u_k q}\frac{\partial T}{\partial x_k}+\overline{u_k t}\frac{\partial Q}{\partial x_k}+c_{tq}\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{tq}=0. \tag{13}$$

Полагая в уравнении относительно пульсационных характеристик, параметры средних течений известными, получим, что решение системы состоит из двух сомножителей, один из которых соответствует течению в однородной среде, а второй учитывает влияние архимедовых сил, вызванных полем температуры и концентрации.

$$\overline{u_1^2}=\left(\overline{u_1^2}\right)_0\Omega_{u_1^2},\quad \overline{u_2^2}=\left(\overline{u_2^2}\right)_0\Omega_{u_2^2},\quad \overline{u_3^2}=\left(\overline{u_3^2}\right)_0\Omega_{u_3^2},$$

$$\overline{u_1u_3}=\left(\overline{u_1u_3}\right)_0\Omega_{u_1u_3},\quad \overline{u_2u_3}=\left(\overline{u_2u_3}\right)_0\Omega_{u_2u_3},\quad \overline{u_1u_2}=\left(\overline{u_1u_2}\right)_0\Omega_{u_1u_2},$$

$$\overline{u_1t}=\left(\overline{u_1t}\right)_0\Omega_{u_1t},\quad \overline{u_2t}=\left(\overline{u_2t}\right)_0\Omega_{u_2t},\quad \overline{u_3t}=\left(\overline{u_3t}\right)_0\Omega_{u_3t},\overline{t^2}=\left(\overline{t^2},\quad\right)_0\Omega_{t^2}$$

,

$$\overline{u_1q}=\left(\overline{u_1q}\right)_0\Omega_{u_1q},\quad \overline{u_2q}=\left(\overline{u_2q}\right)_0\Omega_{u_2q},\quad \overline{u_3q}=\left(\overline{u_3q}\right)_0\Omega_{u_3q},\quad \overline{q^2}=\left(\overline{q^2}\right)_0\Omega_{q^2},$$

$$E=E_0\Phi,\quad \overline{qt}=\left(\overline{qt}\right)_0\Omega_{qt},$$

выражения для однородной среды

$$\left(\overline{u_1^2}\right)_0=\frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left[\left(\frac{k}{c}+2\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{k}{c}-1\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right],$$

$$\left(\overline{u_2^2}\right)_0=\frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left[\left(\frac{k}{c}+2\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{k}{c}-1\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2\right],$$

$$\left(\overline{u_3^2}\right)_0=\frac{2}{3}\left(1-\frac{c}{k}\right)\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right],$$

$$\left(-\overline{u_1u_3}\right)_0=l^2\sqrt{\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]}\frac{\partial U_1}{\partial x_3},\quad \left(-\overline{u_2u_3}\right)_0=l^2\sqrt{\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]}\frac{\partial U_2}{\partial x_3},$$

$$\left(\overline{u_1u_2}\right)_0=2\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\partial U_2}{\partial x_3},\quad \left(\overline{u_1t}\right)_0=\frac{c}{k_t}\frac{1}{c^{2/3}}\left(1+\frac{k}{k_t}\right)l^2\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\partial T}{\partial x_3},$$

$$\left(\overline{u_2t}\right)_0=\frac{c}{k_t}\frac{1}{c^{2/3}}\left(1+\frac{k}{k_t}\right)l^2\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\frac{\partial T}{\partial x_3},\quad \left(-\overline{u_3t}\right)_0=\frac{k}{k_t}l^2\sqrt{\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]}\frac{\partial T}{\partial x_3},$$

$$\left(\overline{t^2}\right)_0=\frac{k}{k_t}\frac{c}{c_t}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2,\quad \left(\overline{u_1q}\right)_0=\frac{c}{k_q}\frac{1}{c^{2/3}}\left(1+\frac{k}{k_q}\right)l^2\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\partial Q}{\partial x_3},$$

$$\left(\overline{u_2q}\right)_0=\frac{c}{k_q}\frac{1}{c^{2/3}}\left(1+\frac{k}{k_q}\right)l^2\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\frac{\partial Q}{\partial x_3},\quad \left(-\overline{u_3q}\right)_0=\frac{k}{k_q}l^2\sqrt{\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]}\frac{\partial Q}{\partial x_3},$$

$$\left(\overline{q^2}\right)_0=\frac{k}{k_q}\frac{c}{c_q}\frac{l^2}{c^{2/3}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)^2,\quad \left(\overline{tq}\right)_0=\frac{c}{c_s}\frac{(k_t+k_q)}{c^{2/3}}l^2\frac{\partial T}{\partial x_3}\frac{\partial Q}{\partial x_3},\quad E_0=\frac{l^2}{c^{2/3}}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right].$$

Функции, учитывающие влияние стратификации на турбулентный поток, имеют следующий вид (отметим, что некоторые функции совпадают в силу симметрии исходных уравнений):

$$\Im\left(\Phi\right)=\Phi^{2}+\Phi\left[Rt\left(\frac{k}{c_{t}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}+2\right)-Rq\left(\frac{k}{c_{q}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}+2\right)\right]+Rt^{2}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}\frac{k}{c_{s}}\left(2+\frac{k}{c_{t}}\right)+$$

$$+Rq^{2}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\frac{k}{c_{s}}\left(2+\frac{k}{c_{q}}\right)-Rt\cdot Rq\left[\frac{k}{c_{t}}\frac{k}{c_{q}}+2\frac{k}{c_{s}}\left(\frac{c_{t}}{c_{q}}+\frac{c_{q}}{c_{t}}\right)\right],$$

$$\Omega_{u_{3}^{2}}=\frac{\Phi}{\Im\left(\Phi\right)}\left\{\left[\Phi^{2}+\Phi\big(Rt\left(\frac{k}{c_{t}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}\right)-Rq\left(\frac{k}{c_{q}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{k}{c_{s}}\left(Rt^{2}\frac{k}{c_{t}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}+Rq^{2}\frac{k}{c_{q}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\right)-Rt\cdot Rq\cdot\frac{k}{c_{t}}\frac{k}{c_{q}}\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{1}^{2}}=\left\{\frac{\Phi}{\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\Im\left(\Phi\right)}\left[\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\Phi^{2}+\Phi\cdot Rt\left[\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\left(\frac{k}{c_{t}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}\right)+4\right]-\right.\right.$$

$$-\Phi\cdot Rq\left[\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\left(\frac{k}{c_{q}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\right)+4\right]+$$

$$+Rt^{2}\frac{k}{c_{s}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}\left(\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\frac{k}{c_{t}}+4\right)+Rq^{2}\frac{k}{c_{s}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\frac{k}{c_{q}}+4\right)-$$

$$\left.\left.-Rt\cdot Rq\cdot\left(4\frac{k}{c_{s}}\left(\frac{c_{t}}{c_{q}}+\frac{c_{q}}{c_{t}}\right)+\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\frac{k}{c_{t}}\frac{k}{c_{q}}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{2}^{2}}=\Omega_{u_{1}^{2}},$$

$$\Omega_{u_{1}u_{3}}=\left\{\frac{\Phi^{3/2}}{\left(\Phi+Rt-Rq\right)\Im\left(\Phi\right)}\left[\Phi^{2}+\Phi\left[Rt\left(\frac{k}{c_{t}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)-Rq\left(\frac{k}{c_{q}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}-\frac{1}{Sc}\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+Rt^{2}\frac{k}{c_{s}}\frac{1}{Sc}\left(\frac{k_{t}}{c_{t}}-1\right)+Rq^{2}\frac{k}{c_{s}}\left(\frac{k_{q}}{c_{q}}-1\right)\frac{1}{\mathrm{Pr}}-Rt\cdot Rq\cdot\left(\frac{k}{c_{s}}\left(\frac{c_{t}}{c_{q}}\frac{1}{\mathrm{Pr}}+\frac{c_{q}}{c_{t}}\frac{1}{Sc}\right)-\frac{k}{c_{t}}\frac{k}{c_{q}}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{2}u_{3}}=\Omega_{u_{1}u_{3}},\Omega_{u_{1}u_{2}}=\frac{\Omega_{u_{1}u_{3}}}{\sqrt{\Phi}},$$

$$\Omega_{u_{3}t}=\frac{1}{\Im\left(\Phi\right)}\left\{\Phi^{3/2}\left[\Phi+\frac{k}{c_{s}}\left(Rt\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}-Rq\frac{c_{t}}{c_{q}}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{1}t}=\left\{\frac{\Phi}{\left(\Phi+Rt-Rq\right)\left(1+\mathrm{Pr}\right)\Im\left(\Phi\right)}\left[\Phi^{2}\left(1+\mathrm{Pr}\right)+\Phi\cdot Rt\left(\frac{k_{t}}{c_{t}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}\left(1+\mathrm{Pr}\right)\right)-\right.\right.$$

$$-\Phi\cdot Rq\left(\frac{k_{t}}{c_{q}}+\frac{k_{q}}{c_{s}}+1-\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}+\frac{k}{c_{s}}\frac{c_{t}}{c_{q}}\right)+Rt^{2}\frac{k}{c_{s}}\frac{k_{t}}{c_{t}}\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}+Rq^{2}\frac{k}{c_{s}}\left(\frac{k_{q}}{c_{q}}+\frac{c_{t}}{c_{q}}-1\right)-$$

$$\left.\left.-Rt\cdot Rq\cdot\left(\frac{k}{c_{s}}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}-\frac{c_{q}}{c_{t}}\frac{1}{Sc}\right)+\frac{k_{t}}{c_{t}}\frac{k}{c_{q}}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{1}t}=\Omega_{u_{2}t},$$

$$\Omega_{t^{2}}=\frac{1}{\Im\left(\Phi\right)}\left\{\Phi\left[\Phi+\frac{k}{c_{s}}\left(Rt\frac{\mathrm{Pr}}{Sc}-Rq\frac{c_{t}}{c_{q}}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{3}q}=\frac{1}{\Im\left(\Phi\right)}\left\{\Phi^{3/2}\left[\Phi+\frac{k}{c_{s}}\left(Rt\frac{c_{q}}{c_{t}}-Rq\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{u_{1}q}=\left\{\frac{\Phi}{\left(\Phi+Rt-Rq\right)\left(1+Sc\right)\Im\left(\Phi\right)}\left[\Phi^{2}\left(1+Sc\right)-\Phi\cdot Rq\left(\frac{k_{q}}{c_{q}}+\frac{k}{c_{s}}\frac{Sc}{\mathrm{Pr}}\left(1+Sc\right)\right)-\right.\right.$$

$$-\Phi\cdot Rt\left(\frac{k_q}{c_t}+\frac{k_t}{c_s}+1-\frac{Sc}{\Pr}+\frac{k}{c_s}\frac{c_q}{c_t}\right)+Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{k_q}{c_q}\frac{Sc}{\Pr}+Rt^2\frac{k}{c_s}\left(\frac{k_t}{c_t}+\frac{c_q}{c_t}-1\right)-$$

$$-Rt\cdot Rq\cdot\left(\frac{k}{c_s}\left(\frac{Sc}{\Pr}-\frac{c_t}{c_q}\frac{1}{\Pr}\right)+\frac{k_q}{c_q}\frac{k}{c_t}\right)\Bigg]\Bigg\},$$

$$\Omega_{u_1q}=\Omega_{u_2q},$$

$$\Omega_{q^2}=\frac{1}{\Im\left(\Phi\right)}\left\{\Phi\left[\Phi+\frac{k}{c_s}\left(Rt\frac{c_q}{c_t}-Rq\frac{Sc}{\Pr}\right)\right]\right\},$$

$$\Omega_{tq}=\frac{\Phi}{(\Pr+Sc)\cdot\Im\left(\Phi\right)}\left[\Phi\cdot(\Pr+Sc)+Rt\cdot\frac{k}{c_s}\Pr\left(\frac{c_q}{c_t}+1\right)-Rq\cdot\frac{k}{c_s}Sc\left(\frac{c_t}{c_q}+1\right)\right],$$

$$\Phi=\frac{1}{3}\left[1-Rt\left(\lambda_1+\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\right)+Rq\left(\lambda_2+\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\right)\right]+\left(\sqrt{\Psi}-\Theta\right)^{1/3}-\left(\sqrt{\Psi}+\Theta\right)^{1/3},$$

$$\Theta=\left(\frac{\varphi}{3}\right)^3-\frac{\varphi\psi}{6}+\frac{\phi}{2},\quad \Psi=\Theta^2+\left(\frac{\psi}{3}-\frac{\varphi^2}{9}\right)^3,$$

$$\lambda_1=\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)+\frac{k}{c_t}+3,\lambda_2=\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)+\frac{k}{c_q}+3,\lambda_3=\frac{k}{c_s}\frac{2}{3}\left(2+\frac{k}{c}\right)\left(\frac{c_t}{c_q}+\frac{c_q}{c_t}\right)+\frac{k}{c_t}\frac{k}{c_q},$$

$$\varphi=Rt\left(\lambda_1+\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\right)-Rq\left(\lambda_2+\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\right)-1,$$

$$\psi=Rt^2\left[\lambda_1\left(\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}+1\right)-1\right]+Rq^2\left[\lambda_2\left(\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}+1\right)-1\right]-$$

$$-Rt\cdot Rq\cdot\left[\frac{k}{c_s}\left(\frac{Sc}{\Pr}+\frac{\Pr}{Sc}\right)-2+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right]+$$

$$+Rt\left(\frac{1}{\Pr}-\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}-\frac{k}{c_t}\right)-Rq\left(\frac{1}{Sc}-\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}-\frac{k}{c_q}\right),$$

$$\phi=(Rt-Rq)\left\{\left[Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\left(\lambda_1-1\right)+Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\left(\lambda_2-1\right)\right]-Rt\cdot Rq\cdot\lambda_3\right\}+$$

$$+Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{1}{Sc}\left(1-\frac{k_t}{c_t}\right)+Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{1}{\Pr}\left(1-\frac{k_q}{c_q}\right)+Rt\cdot Rq\cdot\frac{k}{c_s}\left(\frac{k}{c_s}-\frac{c_t}{c_q}\frac{1}{\Pr}-\frac{c_q}{c_t}\frac{1}{Sc}\right),$$

где Rt и Rq — числа Ричардсона зависящие от температуры и концентрации, соответственно:

$$Rt=\frac{2}{3}\frac{\beta g\frac{\partial T}{\partial x_3}}{\left(\frac{k}{c}-1\right)\Pr\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]},\quad Rq=\frac{2}{3}\frac{\alpha g\frac{\partial Q}{\partial x_3}}{\left(\frac{k}{c}-1\right)Sc\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]},$$

Pr, Sc — турбулентные числа Прандтля и Шмидта, соответственно, которые зависят от физических свойств жидкости. Все константы c_q, c_s, c_t, k_t, k_q определяются через k и c, которые, в свою очередь, имеют вид:

$$k=\sqrt{\frac{c}{k}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)\right]^{3/4},\quad c=\left(\frac{c}{k}\right)^{3/2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)\right]^{3/4},$$

где $\frac{k}{c}$ не зависит от типов течения и определяется из теории изотропной турбулентности, как коэффициент анизотропии, равный 7. Таким образом, полученные выражения позволяют замкнуть уравнения Рейнольдса для сложных течений, где в потоке одновременно присутствуют температура и концентрация, и рассчитать турбулентные пульсационные характеристики потока.

Цитированная литература

1. **Монин А. С.,Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч.1. М., 1965.
2. **Хинце И. О.** Турбулентность.М. 1963.
3. **Абдибеков У. С., Джаугаштин К. Е.** // Изв. РАН. МЖГ. 1992. №3. С.29-34.
4. **Иевлев В. М.** Численное моделирование турбулентных течений. М. 1990.
5. **Левин В. Б.** // Теплофизика высоких температур. 1964. Т.2, №4. С.588-598.
6. **Джаугаштин К. Е.** // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. №4. С.71-79.

Поступила в редакцию 15.09.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 11 — 18*

УДК 517.51

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С МУЛЬТИВЕСОВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

З. Т. Абдикалыкова

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
473033, Астана, ул. Мунайтпасова 5, Казахстан

1. Введение. Пусть R — множество действительных чисел, n — натуральное число, $\alpha_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Для функции $f : (0,1) \to R$ определим дифференциальную операцию

$$D^i_{\overline{\alpha}} f(t) = t^{\alpha_i} \frac{d}{dt} t^{\alpha_{i-1}} \frac{d}{dt} ... t^{\alpha_1} \frac{d}{dt} (t^{\alpha_0} f(t)), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$D^0_{\overline{\alpha}} f(t) = t^{\alpha_0} f(t),$$

где каждая производная понимается в обобщенном смысле [1, с.140].

Операцию $D^i_{\overline{\alpha}} f(t)$ назовем α — *мультивесовой производной функции* f *порядка* $i = 0, 1, \ldots, n$. Для функции $f : (0,1) \to R$ положим

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\int\limits_0^1 |t^\mu f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ \|f\|_{p,0} = \|f\|_p \,,$$

где $p, \mu \in R$, $1 < p < \infty$.

Обозначим через $W^n_{p,\overline{\alpha}} = W^n_{p,\overline{\alpha}}(0,1)$ пространство функций $f : (0,1) \to R$, имеющих на интервале $(0,1)$ α – мультивесовые производные порядка n и для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^n_{p,\overline{\alpha}}} = \|D^n_{\overline{\alpha}} f\|_p + \sum_{i=0}^{n-1} \left| D^i_{\overline{\alpha}} f(1) \right|. \tag{1}$$

Наряду с пространством $W^n_{p,\overline{\alpha}}$ рассмотрим пространство $W^m_{q,\overline{\beta}}$, где $1 < q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\overline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)$, $\beta_i \in R$, $i = 0, 1, ..., m$.

В работе [2] был исследован вопрос вложения $W^n_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^m_{q,\overline{\beta}}$ при $1 < q \leqslant p < \infty$. Целью данной работы является исследование вложения $W^n_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^m_{q,\overline{\beta}}$ в случае, когда $1 < p \leqslant q < \infty$.

Пусть для $n > 1$

$$\gamma^\alpha_n = 1, \quad \gamma^\alpha_{n-1} = \alpha_n, \quad \gamma^\alpha_i = \alpha_n + \sum_{k=i+1}^{n-1} (\alpha_k - 1), \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

Keywords: *Functional spaces, theorems of embedding*
2000 Mathematics Subject Classification: 46E35

Очевидно, что

$$\alpha_i = \gamma_{i-1}^{\alpha} - \gamma_i^{\alpha} + 1,\ i = 1, 2, ..., n-1. \tag{2}$$

Положим

$$\gamma_{min}^{\alpha} = \min_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \gamma_i^{\alpha}.$$

Далее будем считать, что $\gamma_i^{\alpha} \neq 1 - \frac{1}{p}$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

С помощью набора чисел $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ аналогичным образом определим γ_i^{β}, $i = 0, 1, \dots, m$. Ниже используется неравенство Харди [3] в дифференциальной форме

$$\left(\int_0^1 |t^{\mu}(f(t) - f(1))|^q dt \right)^{1/q} \leqslant K \left(\int_0^1 \left| t^{\lambda} \frac{df(t)}{dt} \right|^p dt \right)^{1/p}, \tag{3}$$

которое справедливо при $1 < p \leqslant q < \infty$, $\mu > -\frac{1}{q}$, $\lambda \leqslant 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \mu$.

2. Теоремы вложения в случае $\gamma_{\min}^{\alpha} > 1 - \frac{1}{p}$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\gamma_{min}^{\alpha} > 1 - \frac{1}{p}$. Тогда для непрерывного вложения $W_{p,\overline{\alpha}}^n \hookrightarrow W_{q,\overline{\beta}}^m$ необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.*

Доказательство. Достаточность. Так как норма пространства $W_{q,\overline{\beta}}^m$ имеет вид

$$\|f\|_{W_{q,\overline{\beta}}^m} = \|D_{\overline{\beta}}^m f\|_q + \sum_{i=0}^{n-1} \left| D_{\overline{\beta}}^i f(1) \right|,$$

то вложение $W_{p,\overline{\alpha}}^n \hookrightarrow W_{q,\overline{\beta}}^m$ эквивалентно выполнению следующих двух неравенств

$$\|D_{\overline{\beta}}^m f\|_q \leqslant c_1 \|f\|_{W_{p,\overline{\alpha}}^n}\ \ \forall f \in W_{p,\overline{\alpha}}^n, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} |D_{\overline{\beta}}^i f(1)| \leqslant c_2 \|f\|_{W_{p,\overline{\alpha}}^n}\ \ \forall f \in W_{p,\overline{\alpha}}^n \tag{5}$$

с независимыми от $f \in W_{p,\overline{\alpha}}^n$ постоянными c_1, $c_2 > 0$.

Докажем справедливость неравенства (4).

В работе [2] было показано, что β – мультивесовая производная $D_{\overline{\beta}}^k f(t)$, $k = 0, 1, ..., m$ выражается через α – мультивесовые производные $D_{\overline{\alpha}}^i f(t)$, $i = 0, 1, ..., k$ следующим образом

$$D_{\overline{\beta}}^k f(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k,i}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) t^{\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma_i^{\alpha} - \gamma_k^{\beta}} D_{\overline{\alpha}}^i f(t),\ k = 0, 1, ..., m. \tag{6}$$

Полагая в (6) $k = m$ и беря в обеих ее частях q – норму, получим

$$\|\mathrm{D}_{\overline{\beta}}^m f\|_q \leqslant c_3 \sum_{i=0}^{m} \left(\int_0^1 \left| t^{\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma_i^{\alpha} - 1} D_{\overline{\alpha}}^i f(t) \right|^q dt \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \left[\sum_{i=0}^{m} \left(\int_0^1 \left| t^{\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma_i^{\alpha} - 1} \left(D_{\overline{\alpha}}^i f(t) - D_{\overline{\alpha}}^i f(1) \right) \right|^q dt \right)^{1/q} + \sum_{i=0}^{m} \left| D_{\overline{\alpha}}^i f(1) \right| \right], \tag{7}$$

где $c_3 = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} |c_{m,i}|$.

Из условия теоремы 1 имеем

$$\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma_i^{\alpha} - 1 \geq (\gamma_i^{\alpha} - 1 + \frac{1}{p}) - \frac{1}{q},\ i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{8}$$

Так как $\gamma^{\alpha}_{min} > 1 - \frac{1}{p}$ и $\gamma^{\alpha}_{i} = \alpha_{i+1} + \gamma_{i+1} - 1$ в силу (2), то из (8) следует

$$\gamma^{\beta}_{0} - \gamma^{\alpha}_{0} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma^{\alpha}_{i} - 1 > -\frac{1}{q},\ i = 0, 1, ..., n-1, \tag{9}$$

$$\gamma_{i+1} - 1 + \alpha_{i+1} \leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \gamma^{\beta}_{0} - \gamma^{\alpha}_{0} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma^{\alpha}_{i} - 1,\ i = 0, 1, ..., n-1. \tag{10}$$

Применяя неравенство Харди (3) в (7), на основании (9) и (10) получим

$$\|D^{m}_{\overline{\beta}} f\|_q \leqslant c_3 \left[\sum_{i=0}^{m} K_i \left(\int_0^1 \left| t^{\gamma_{i+1}-1} t^{\alpha_{i+1}} \frac{d}{dt} D^{i}_{\overline{\alpha}} f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=0}^{m} \left|D^{i}_{\overline{\alpha}} f(1)\right|\right] =$$

$$= c_4 \left[\sum_{i=0}^{m} \left\|D^{i+1}_{\overline{\alpha}} f\right\|_{p,\gamma_{i+1}-1} + \sum_{i=0}^{m} \left|D^{i}_{\overline{\alpha}} f(1)\right|\right], \tag{11}$$

где $c_4 = c_3 \max(1, K_i, i = 0, 1, \ldots, m)$.

Норма (1) пространства $W^{n}_{p,\overline{\alpha}}$ при $\gamma^{\alpha}_{\min} > 1 - \frac{1}{p}$ эквивалентна функционалу [4]

$$\|f\|^{1}_{W^{n}_{p,\overline{\alpha}}} = \|D^{n}_{\overline{\alpha}} f\|_p + \sum_{i=0}^{n-1} \left\|D^{i}_{\overline{\alpha}} f(t)\right\|_{p,\gamma^{\alpha}_{i}-1}. \tag{12}$$

Так как по условию теоремы $n > m \geq 0$, то из (11) и (12) следует, что неравенство (4) справедливо.

Перейдем к доказательству неравенства (5). Из (6) имеем

$$D^{k}_{\overline{\beta}} f(1) = \sum_{i=0}^{k} c_{k,i} D^{i}_{\overline{\alpha}} f(1),\ k = 0, 1, ..., m.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{m} |D^{k}_{\overline{\beta}} f(1)| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k} |c_{k,i}| \left|D^{i}_{\overline{\alpha}} f(1)\right| = \sum_{i=0}^{m} \left|D^{i}_{\overline{\alpha}} f(1)\right| \sum_{k=i}^{m} |c_{k,i}| \leqslant c_5 \sum_{i=0}^{n} \left|D^{i}_{\overline{\alpha}} f(1)\right| \leqslant c_5 \|f\|_{W^{n}_{p,\overline{\alpha}}},$$

где $c_5 = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m} \sum\limits_{k=i}^{m} |c_{k,i}|$. Достаточность доказана.

`Необходимость.` Для доказательства необходимости используем те же рассуждения, что и в работе [2]. Пусть имеет место вложение $W^{n}_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^{m}_{q,\overline{\beta}}$. Рассмотрим функцию $f_0(t) = t^{-\gamma^{\alpha}_{0} - \alpha_0 + \frac{1}{p'} + 1}$, где $\varepsilon > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Имеем

$$D^{i}_{\overline{\alpha}} f_0(t) = \prod_{j=0}^{i-1} \left(-\gamma^{\alpha}_{j} + \frac{1}{p'} + \varepsilon\right) t^{-\gamma^{\alpha}_{i} + \frac{1}{p'} + \varepsilon},\ i = 1, 2, ..., n-1. \tag{13}$$

Если при некотором $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выражение $-\gamma^{\alpha}_{j} + \frac{1}{p'} + \varepsilon$ обратится в нуль, то $f_0 \in W^{n}_{p,\overline{\alpha}}$. Если такого i не существует, то из (13) получим

$$D^{n}_{\overline{\alpha}} f_0(t) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(-\gamma^{\alpha}_{j} + \frac{1}{p'} + \varepsilon\right) t^{-1 + \frac{1}{p'} + \varepsilon}.$$

Так как $(-1 + \frac{1}{p'} + \varepsilon)p + 1 = \varepsilon p > 0$, то выполняется условие

$$\int\limits_0^1 \left(t^{-1 + \frac{1}{p'} + \varepsilon}\right)^p dt < \infty,$$

из которого следует, что $f_0 \in W^n_{p,\overline{\alpha}}$.

Теперь, последовательно вычисляя β – мультивесовые производные функции $f_0(t)$, находим

$$D^m_{\overline{\beta}} f_0\,(t) = \prod_{i=0}^{m-1} \left(\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 - \gamma_i^\beta + \frac{1}{p'} + \varepsilon \right) t^{\gamma_0^\beta - \gamma_i^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 - 1 + \frac{1}{p'} + \varepsilon}.$$

В силу того, что в произведении участвует конечное число множителей, найдется такое $\varepsilon > 0$, при котором $\prod\limits_{i=0}^{m-1} \left(\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 - \gamma_i^\beta + \frac{1}{p'} + \varepsilon \right) \neq 0$.

Следовательно, для того, чтобы $f_0 \in W^m_{q,\overline{\beta}}$, необходимо выполнение условия

$$\int_0^1 \left(t^{\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 - 1 + \frac{1}{p'} + \varepsilon} \right)^q dt < \infty,$$

что равносильно условию $(\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 - 1 + \frac{1}{p'} + \varepsilon) q + 1 > 0$. Откуда благодаря произвольности $\varepsilon > 0$: $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\gamma^\alpha_{min} > 1 - \frac{1}{p}$. *Вложение* $W^n_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^n_{p,\overline{\beta}}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 \geqslant 0$.

Доказательство. Необходимость вытекает из доказательства необходимости теоремы 1 при $p = q$, так как в ходе доказательства нигде не использовано условие $m < n$.

Достаточность. Из (6) при $k = n$ имеем

$$\|D^n_{\overline{\beta}} f\|_p \leqslant c_3 \left[\left(\int_0^1 \left| t^{\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0} D^n_{\overline{\alpha}} f(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_0^1 \left| t^{\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma_i^\alpha - 1} \left(D^i_{\overline{\alpha}} f(t) - D^i_{\overline{\alpha}} f(1) \right) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=0}^{n-1} \left| D^i_{\overline{\alpha}} f(t) \right| \right]. \tag{14}$$

Применяя как и в теореме 1 неравенство Харди (3) ко второму слагаемому правой части (14) и оценку $|t^{\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0}| \leqslant 1$, справедливую в силу $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 \geq 0$ и $0 < t < 1$, к первому слагаемому, получим

$$\|D^n_{\overline{\beta}} f\|_p \leqslant c_4' \left[\|D^n_{\overline{\alpha}} f\|_p + \sum_{i=0}^{n-2} \left\| D^{i+1}_{\overline{\alpha}} f \right\|_{p,\gamma_{i+1}-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left| D^i_{\overline{\alpha}} f(t) \right| \right] \leqslant c_4' \left(\|f\|^{(1)}_{W^n_{p,\overline{\alpha}}} + \sum_{i=0}^{n-1} \left| D^i_{\overline{\alpha}} f(t) \right| \right), \tag{15}$$

где $c_4' = c_3 \max(1 + k_{n-1}, k_i, i = 0, 1, \ldots, n-2)$.

В силу эквивалентности норм (1) и (12) из (15) следует неравенство в виде (4):

$$\|D^n_{\overline{\beta}} f\|_p \leqslant c_1 \|f\|_{W^n_{1,\overline{\alpha}}},$$

которое вместе с неравенством (3) при $m = n$ доказывает вложение $W^n_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^n_{p,\overline{\beta}}$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\gamma^\alpha_{min} > 1 - \frac{1}{p}$, $\gamma^\beta_{min} > 1 - \frac{1}{p}$. *Пространство* $W^n_{p,\overline{\alpha}}$ *совпадает с пространством* $W^n_{p,\overline{\beta}}$ *с точностью эквивалентности норм тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i. \tag{16}$$

Д о к з а т е л ь с т в о. Действительно, на основании теоремы 2 выполнение вложений $W^n_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^n_{p,\overline{\beta}}$ и $W^n_{p,\overline{\beta}} \hookrightarrow W^n_{p,\overline{\alpha}}$ эквивалентно, соответственно, выполнению условий: $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + + \beta_0 - \alpha_0$ и $\gamma_0^\alpha - \gamma_0^\beta + \alpha_0 - \beta_0 \geq 0$. Поэтому оба вложения одновременно выполняются тогда и только тогда, когда $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 = 0$, что равносильно условию (16). Следствие 1 доказано.

Пусть $\beta_n = \mu$, $\beta_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда условие $\gamma^\beta_{min} > 1 - \frac{1}{p}$ эквивалентно условию $\mu > n - \frac{1}{p}$ и пространство $W^n_{p,\overline{\beta}}$ превращается в пространство Л.Д. Кудрявцева [5] $W^n_{p,\mu}$ с нормой $\|f\|_{W^n_{p,\mu}} = \left\|f^{(n)}\right\|_{p,\mu} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left|f^{(i)}(1)\right|$. Из следствия 1 вытекает

С л е д с т в и е 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma^\alpha_{min} > 1 - \frac{1}{p}$, $\mu > n - \frac{1}{p}$. Пространство $W^n_{p,\overline{\alpha}}$ совпадает с пространством $W^n_{p,\mu}$ с точностью эквивалентности норм тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = \mu$.*

3. Вложение в случае $\gamma^\alpha_{\min} < 1 - \frac{1}{p}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\gamma^\alpha_{min} < 1 - \frac{1}{p}$. Если $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 > 1 - - \frac{1}{q} - \gamma^\alpha_{min}$, то имеет место вложение*

$$W^n_{p,\overline{\alpha}} \hookrightarrow W^m_{q,\overline{\beta}}. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства теоремы 1 следует, что для установления вложения (17) достаточно показать справедливость неравенства (4).

В работе [4] показано, что в случае $\gamma^\alpha_{min} < 1 - \frac{1}{p}$ норма (1) пространства $W^n_{p,\overline{\alpha}}$ эквивалентна норме

$$\|f\|^2_{W^n_{p,\overline{\alpha}}} = \|D^n_{\overline{\alpha}} f\|_p + \sum_{i=n_1}^{n-1} \left\|D^i_{\overline{\alpha}} f\right\|_{p,\gamma^\alpha_{i-1}} + \sum_{i=0}^{n_1-1} \left\|D^i_{\overline{\alpha}} f\right\|_{p,\gamma^\alpha_i - 1 + \delta}, \tag{18}$$

где $n_1 = max\{i = i+1,\ 0 \leq i \leq n-1,\ \gamma^\alpha_i < 1 - \frac{1}{p}\}$, $\delta > 1 - \frac{1}{p} - \gamma^\alpha_{min}$.

Доказательство будем проводить отдельно для возможных двух случаев: $m + 1 \leq n_1 - 1$ и $n \geq m + 1 > n_1 - 1$.

В случае $m + 1 \leq n_1 + 1$ для установления неравенства (4), в силу эквивалентности норм (1) и (18), достаточно показать, что

$$\|D^m_{\overline{\beta}} f\|_q \leqslant c_4 \left(\sum_{i=0}^{m+1} \left\|D^i_{\overline{\alpha}} f\right\|_{p,\gamma^\alpha_i - 1 + \delta} + \sum_{i=0}^{m} \left|D^i_{\overline{\alpha}} f(1)\right| \right) \tag{19}$$

для некоторого $\delta > 1 - \frac{1}{p} - \gamma^\alpha_{min}$.

По условию теоремы $\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 > 1 - \frac{1}{q} - \gamma^\alpha_{min}$, откуда

$$\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 1 - \frac{1}{p} - \gamma^\alpha_{min}. \tag{20}$$

Выберем число δ так, чтобы

$$\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \geq \delta > 1 - \frac{1}{p} - \gamma^\alpha_{min}. \tag{21}$$

Из первой части неравенства (21) и (2) имеем

$$\gamma^\alpha_{i+1} - 1 + \alpha_{i+1} + \delta \leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + (\gamma_0^\beta - \gamma_0^\alpha + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma^\alpha_i - 1),\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{22}$$

Применяя неравенство Харди (3) в (7), в силу (20) и (22) получим

$$\|D^{m}_{\overline{\beta}}f\|_q \leqslant c_3\left[\sum_{i=0}^{m}k_i\left(\int_0^1\left|t^{\gamma^{\alpha}_{i+1}-1+\delta+\alpha_{i+1}}\frac{d}{dt}D^{i}_{\overline{\alpha}}f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\sum_{i=0}^{m}\left|D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right|\right]\leq$$

$$\leq c_4\left[\sum_{i=0}^{m}\left(\int_0^1\left|t^{\gamma^{\alpha}_{i+1}-1+\delta}D^{i+1}_{\overline{\alpha}}f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\sum_{i=0}^{m}\left|D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right|\right]\leqslant$$

$$\leq c_4\left[\sum_{i=0}^{m+1}\left\|D^{i}_{\overline{\alpha}}f\right\|_{p,\gamma^{\alpha}_{i}-1+\delta}+\sum_{i=0}^{m}\left|D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right|\right],$$

где $c_4 = c_3\max(1, K, i = 0, 1, \ldots, m)$.

Теперь рассмотрим случай $n \geq m+1 > n_1 - 1$. Неравенство (7) представим в виде

$$\|D^{m}_{\overline{\beta}}f\|_q \leqslant c_3\left[\sum_{i=n_1-1}^{m}\left(\int_0^1\left|t^{\gamma^{\beta}_0-\gamma^{\alpha}_0+\beta_0-\alpha_0+\gamma^{\alpha}_i-1}\left(D^{i}_{\overline{\alpha}}f(t)-D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{n_1-2}\left(\int_0^1\left|t^{\gamma^{\beta}_0-\gamma^{\alpha}_0+\beta_0-\alpha_0+\gamma^{\alpha}_i}\left(D^{i}_{\overline{\alpha}}f(t)-D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\sum_{i=0}^{m}|D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)|\right], \qquad (23)$$

где сумма $\sum\limits_{i=0}^{n_1-2}$ считается равной нулю, если $n_1 < 2$.

Применяя неравенство Харди (3), соответственно, к первой и ко второй сумме правой части (23), на основании (8) и (10), (20) и (22) имеем:

$$\|D^{m}_{\overline{\beta}}f\|_q \leqslant c_3\left[\sum_{i=n_1-1}^{m}K_i\left(\int_0^1\left|t^{\gamma_{i+1}-1}t^{\alpha_{i+1}}\frac{d}{dt}D^{i}_{\overline{\alpha}}f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{n_1-2}K_i\left(\int_0^1\left|t^{\gamma_{i+1}-1+\delta}t^{\alpha_{i+1}}\frac{d}{dt}D^{i}_{\overline{\alpha}}f(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{p}}+\sum_{i=0}^{m}\left|D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right|\right]\leq$$

$$\leq c_4\left[\sum_{i=n_1}^{m+1}\left\|D^{i}_{\overline{\alpha}}f\right\|_{p,\gamma_i-1}+\sum_{i=0}^{n_1-1}\left\|D^{i}_{\overline{\alpha}}f\right\|_{p,\gamma_i-1+\delta}+\sum_{i=0}^{m}\left|D^{i}_{\overline{\alpha}}f(1)\right|\right].$$

Откуда в силу эквивалентности норм (1) и (18) следует справедливость оценки (4). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 дает достаточное условие вложения (17), но, вообще говоря, его нельзя ослабить, а именно, имеет место

Утверждение 1. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\gamma^{\alpha}_{min} < 1 - \frac{1}{p}$, $\gamma^{\alpha}_{min} - \gamma^{\alpha}_0 + \beta_0 - \alpha_0 \neq 0$, $\gamma^{\alpha}_{min} - \gamma^{\alpha}_0 + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma^{\beta}_0 - \gamma^{\beta}_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. *Тогда из вложения (17) следует* $\gamma^{\beta}_0 - \gamma^{\alpha}_0 + \beta_0 - \alpha_0 > 1 - \frac{1}{q} - \gamma^{\alpha}_{min}$.

Доказательство утверждения 1 аналогично доказательству утверждения в работе [2]. Приведем его для полноты изложения.

Рассмотрим функцию $f_0(t) = t^{\gamma^{\alpha}_{min}-\gamma^{\alpha}_0-\alpha_0}$. Используя (2), имеем

$$D^{i}_{\overline{\alpha}}f_0(t) = \prod_{j=0}^{i-1}\left(\gamma^{\alpha}_{\min}-\gamma^{\alpha}_j\right)t^{\gamma^{\alpha}_{\min}-\gamma^{\alpha}_i},\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (24)$$

Пусть $\gamma^{\alpha}_{i_0} = \gamma^{\alpha}_{min}$, $0 \leq i_0 \leq n-1$. Если даже $D^{i}_{\overline{\alpha}}f_0(t) \neq 0 \forall i \leq i_0$, то из (24) следует, что $D^{i_0+1}_{\overline{\alpha}}f_0(t) = D^{n}_{\overline{\alpha}}f_0(t) \equiv 0$. Значит, $f_0 \in W^{n}_{p,\overline{\alpha}}$. В силу (17) функция $f_0 \in W^{m}_{q,\overline{\beta}}$.

Последовательно вычисляя β – мультивесовые производные функции $f_0(t)$, имеем

$$D^m_{\overline{\beta}} f_0(t) = (\gamma^\alpha_{min} - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0) \prod_{i=1}^{m-1} \left(\gamma^\alpha_{\min} - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma^\beta_0 - \gamma^\beta_i\right) t^{\gamma^\alpha_{\min}-1+\beta_0-\alpha_0+\gamma^\beta_0-\gamma^\alpha_0}.$$

Из условий утверждения 1 следует, что $D^m_{\overline{\beta}} f_0(t) \neq 0$ при $0 < t \leq 1$. Следовательно, для того чтобы $f_0 \in W^m_{q,\overline{\beta}}$, должно выполняться условие

$$\int_0^1 \left(t^{\gamma^\alpha_{\min}-1+\beta_0-\alpha_0+\gamma^\beta_0-\gamma^\alpha_0}\right)^q dt < \infty,$$

которое эквивалентно условию $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 > 1 - \frac{1}{q} - \gamma^\alpha_{min}$. Утверждение 1 доказано.

Замечание. Из условия теоремы 3: $\gamma^\alpha_{min} < 1 - \frac{1}{p}$, $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 > 1 - \frac{1}{q} - \gamma^\alpha_{min}$ следует $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, которое в условиях теоремы 1 достаточно для вложения (17). Однако, это условие, вообще говоря, не является достаточным для вложения (17) при $\gamma^\alpha_{min} < 1 - \frac{1}{p}$.

Действительно, так как $1 - \frac{1}{q} - \gamma^\alpha_{min} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то выбирая числа γ^α_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, γ^β_0, β_0 и α_0 так, чтобы выполнялось

$$\gamma^\alpha_{min} < 1 - \frac{1}{p},\ 1 - \frac{1}{q} - \gamma^\alpha_{min} > \gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

и выполнялось условие утверждения 1, из доказательства этого утверждения получим, что функция $f_0(\cdot)$ принадлежит $W^n_{p,\overline{\alpha}}$, но не принадлежит $W^m_{q,\overline{\beta}}$.

4. Дополнение. Исходя из связи между пространствами $W^n_{p,\overline{\alpha}}(0,1)$ и $W^n_{p,\overline{\alpha}}(1,+\infty)$, возникающей при замене переменной $x = \frac{1}{t}$, полученные теоремы вложения можно переписать для случая бесконечного промежутка $(1, +\infty)$. Действительно, с помощью указанной замены каждая функция $f \in W^n_{p,\overline{\alpha}}(1,+\infty)$ переводится в функцию $\widetilde{f}(x) = f(\frac{1}{x})$, лежащую в $W^n_{p,\widetilde{\alpha}}(0,1)$, где $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$; $\widetilde{\alpha}_n = -\alpha_n + 2 - \frac{2}{p}$; $\widetilde{\alpha}_i = -\alpha_i + 2$, $i = n-1, n-2, \ldots, 1$; $\widetilde{\alpha}_0 = -\alpha_0$.

Тогда

$$\gamma^{\widetilde{\alpha}}_i = -\alpha_n + 2 - \frac{2}{p} + \sum_{k=i+1}^{n-1} (-\alpha_i + 2 - 1) = -(\alpha_n + \sum_{k=i+1}^{n-1} (\alpha_i - 1)) + 2 - \frac{2}{p} = -\gamma^\alpha_i + 2 - \frac{2}{p}.$$

Поэтому условие $\gamma^{\widetilde{\alpha}}_{min} > 1 - \frac{1}{p}$ равносильно условию $\gamma^\alpha_{max} < 1 - \frac{1}{p}$.

Аналогичным образом перейдем от пространства $W^m_{p,\overline{\beta}}(0,1)$ к пространству $W^m_{p,\widetilde{\beta}}(1,+\infty)$. Тогда условие $\gamma^{\widetilde{\beta}}_0 - \gamma^{\widetilde{\alpha}}_0 + \widetilde{\beta}_0 - \widetilde{\alpha}_0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ после соответствующей подстановки перейдет в условие $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Проведенные рассуждения позволяют записать следующие результаты:

Теорема 4. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\gamma^\alpha_{max} < 1 - \frac{1}{p}$. *Тогда для непрерывного вложения* $W^n_{p,\overline{\alpha}}(1,+\infty) \hookrightarrow W^m_{q,\overline{\beta}}(1,+\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 \leq$ $\leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

В случае $m = n$ при $p = q$ справедлива

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\gamma^\alpha_{max} < 1 - \frac{1}{p}$. *Вложение* $W^n_{p,\overline{\alpha}}(1,+\infty) \hookrightarrow W^n_{p,\overline{\beta}}(1,+\infty)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 \leq 0$.

В силу того, что условие $\gamma^\beta_0 - \gamma^\alpha_0 + \beta_0 - \alpha_0 = 0$ равносильно $\sum\limits_{i=0}^n \alpha_i = \sum\limits_{i=0}^n \beta_i$ имеем

Следствие 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\gamma^\alpha_{max} < 1 - \frac{1}{p}$, $\gamma^\beta_{max} < 1 - \frac{1}{p}$. *Пространство* $W^n_{p,\overline{\alpha}}(1,+$ $+\infty)$ *совпадает с пространством* $W^n_{p,\overline{\beta}}(1,+\infty)$ *с точностью эквивалентности норм тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{i=0}^n \alpha_i = \sum\limits_{i=0}^n \beta_i$.

Пусть $\beta_n = \mu$, $\beta_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда условие $\gamma_{max}^{\beta} < 1 - \frac{1}{p}$ эквивалентно условию $\mu < 1 - \frac{1}{p}$ и пространство $W_{p,\overline{\beta}}^{n}(1, +\infty)$ превращается в пространство Л.Д. Кудрявцева [5] $W_{p,\mu}^{n}(1, + +\infty)$ с нормой $\|f\|_{W_{p,\mu}^{n}} = \left\|f^{(n)}\right\|_{p,\mu} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left|f^{(i)}(1)\right|$. Из следствия 3 вытекает

Следствие 4. *Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma_{max}^{\alpha} < 1 - \frac{1}{p}$, $\mu < 1 - \frac{1}{p}$. Пространство $W_{p,\overline{\alpha}}^{n}(1, + +\infty)$ совпадает с пространством $W_{p,\mu}^{n}(1, +\infty)$ с точностью эквивалентности норм тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = \mu$.*

После перехода к случаю бесконечного промежутка условие $\gamma_{min}^{\widetilde{\alpha}} < 1 - \frac{1}{p}$ переходит в условие $\gamma_{max}^{\alpha} > 1 - \frac{1}{p}$, а условие $\gamma_0^{\widetilde{\beta}} - \gamma_0^{\widetilde{\alpha}} + \widetilde{\beta}_0 - \widetilde{\alpha}_0 > 1 - \frac{1}{q} - \gamma_{min}^{\widetilde{\alpha}}$ — в условие $\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 < 1 - \frac{1}{q} - \gamma_{max}^{\alpha}$. Поэтому имеем

Теорема 6. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\gamma_{max}^{\alpha} > 1 - \frac{1}{p}$. Если $\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 < 1 - - \frac{1}{q} - \gamma_{max}^{\alpha}$, то имеет место вложение $W_{p,\overline{\alpha}}^{n}(1, +\infty) \hookrightarrow W_{q,\overline{\beta}}^{m}(1, +\infty)$.*

Теорема 6 дает достаточное условие вложения $W_{p,\overline{\alpha}}^{n}(1, +\infty) \hookrightarrow W_{q,\overline{\beta}}^{m}(1, +\infty)$, но, вообще говоря, его нельзя ослабить, а именно, имеет место

Утверждение 2. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq m < n$, $\gamma_{max}^{\alpha} > 1 - \frac{1}{p}$, $\gamma_{max}^{\alpha} - \gamma_0^{\alpha} + + \beta_0 - \alpha_0 \neq 0$, $\gamma_{max}^{\alpha} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 + \gamma_0^{\beta} - \gamma_i^{\beta} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Тогда из вложения $W_{p,\overline{\alpha}}^{n}(1, +\infty) \hookrightarrow W_{q,\overline{\beta}}^{m}(1, +\infty)$ следует $\gamma_0^{\beta} - \gamma_0^{\alpha} + \beta_0 - \alpha_0 < 1 - \frac{1}{q} - \gamma_{max}^{\alpha}$.*

Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

2. **Калыбай А.А.** Вложения разных метрик многовесовых пространств гладких функций. // Труды межд.конф. "Казахстан в третьем тысячелетии". Алматы. 2001. С. 98-101.

3. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства.(Пер. с анг.)М., 1948.

4. **Байдельдинов Б.Л.** // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1998. №3. С. 8-14.

5. **Кудрявцев Л.Д.** Об эквивалентных нормах в весовых пространствах. // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 161-190.

Поступила в редакцию 17.03.2003г.

УДК 517.518.453

ОБ УСЛОВИЯХ БАЗИСНОСТИ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ХААРА

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
г. Караганда, ул.Университетская, 28, akishev@kargu.krg.kz

Введение. В статье рассматриваются условия базисности обобщенной системы Хаара в симметричном пространстве.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на отрезке $[0;1]$ функций называется симметричным, если
1) из $|f(t)| \leq |g(t)|$ почти всюду на $[0,1]$ и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \|g\|_X$;
2) из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(t)|$ и $|g(t)|$ следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см.[1]).

Здесь и в дальнейшем $\|\psi\|_X$ означает норму элемента $\psi \in X$.

Примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L_q, $1 \leq q < +\infty$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича ([1], с.137).

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset [0,1]$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X, где μe — мера Лебега множества $e \subset [0,1]$.

Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на $[0,1]$.

Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ ([1], с.137, 164). Такие функции называются ψ-функциями.

В дальнейшем симметричное пространство X с фундаментальной функцией φ будем обозначать $X(\varphi)$.

Через σ_τ обозначим оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(x) = f(\frac{x}{\tau})$, если $\frac{x}{\tau} \in [0,1]$ и $(\sigma_\tau f)(x) = 0$, если $\frac{x}{\tau} \notin [0,1]$. Известно,что оператор σ_τ непрерывен в любом симметричном пространстве и существуют пределы

$$\underline{\gamma}_X = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \to X}}{\ln \tau}, \overline{\gamma}_X = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \to X}}{\ln \tau},$$

при этом $0 \leq \underline{\gamma}_X \leq \overline{\gamma}_X \leq 1$ ([2], с.1250; [1], с.131).

Keywords: *symmetric space, basis, Haar systems*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Пусть $X-$ симметричное пространство. Ассоциированное к нему пространство X^1 состоит из всех измеримых функций $g(t)$, для которых

$$\|g\|_{X^1} \equiv \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \leq 1}} \int_0^1 f(t)g(t)dt < +\infty.$$

Известно, что сепарабельность симметричного пространства X является необходимым и достаточным условием совпадения ассоциированного к нему пространства X^1 со всем сопряженным пространством X' ([1], с.138).

Отметим также, что если $\varphi(t)$ — фундаментальная функция симметричного пространства X, то функция $\overline{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$ при $t \in (0,1]$ и $\overline{\varphi}(0) = 0$ является фундаментальной функцией сопряженного пространства X' ([1], с.144).

Для функции $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$ положим

$$\alpha_\varphi = \varliminf_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}, \qquad \beta_\varphi = \varlimsup_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Известно,что если $X(\varphi)$ - симметричное пространство, то $1 \leq \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi \leq 2$.

Через $C(\alpha, q, r, \dots)$ обозначим положительные постоянные, зависящие от указанных параметров, вообще говоря, различных в разных формулах.

Запись $A(y) \asymp B(y)$ будет означать, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \leq B(y) \leq C_2 A(y)$ для всех y.

Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_n \geq 2 \quad n = 1, 2, \dots$. Обобщенную систему Хаара $\chi\{p_k\} = \{\chi_n(t)\}$ на отрезке $[0,1]$ определим следующим образом (см.[3], [4]).

Функция $\chi_1(t) \equiv 1$ на $[0,1]$. Если $n \geq 2$, то $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s$, где $m_0 = 1$ и $m_k = = p_1 p_2 ... p_k; k = 1, ...; r = 0, 1, ..., m_k - 1; s = 1, 2, ..., p_{k+1} - 1$. Через А обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на отрезке $[0,1]$. Тогда, если $t \in B$, где $B \equiv [0,1] \setminus A$, то разложение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{m_k}, \quad \alpha_k(t) = 0, 1, ..., p_k - 1$$

единственно.

Теперь определим функцию $\chi_n(t) \equiv \chi_{k,r}^s(t)$ следующим образом:

$$\chi_n(t) = \chi_{k,r}^{(s)}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_k} exp^{\frac{2\pi i s \alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}}} \quad , \quad t \in \left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right) \cap B, \\ 0, \quad t \bar{\in} \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right]. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что множество В всюду плотно на [0,1], функцию $\chi_n(t)$ по непрерывности продолжим на интервал $(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k})$. После этого в точках разрыва функцию $\chi_n(t)$ положим равной полусумме её предельных значений справа и слева, а на концах отрезка [0,1] - её предельным значениям изнутри отрезка.

Таким образом определенная система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 (см.[3]). Здесь $a_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$ по системе $\chi\{p_n\}$.

Если все $p_n = 2, \quad (n = 1, 2, ...)$, то $\chi\{p_n\}$ будет классической системой Хаара.

В 1927 г.Шаудер доказал, что система Хаара является базисом в пространстве Лебега $L_q, \quad 1 \leq q < +\infty$, а безусловная базисность системы Хаара в $L_q, 1 < q < +\infty$ доказана Марцинкевичем ([5], с.101). С. В. Бочкарев [6] обобщил результат Марцинкевича на рефлексивные пространства Орлича. Отметим, что В. Ф. Гапошкиным [7] установлено, что в нерефлексивных пространствах Орлича безусловных базисов нет. Эти вопросы в весовых пространствах Лебега исследованы А. С. Кранцбергом [8], К. С. Казаряном [9].

Далее, условия базисности и безусловной базисности обобщенной системы Хаара $\chi\{p_n\}$ в пространствах Лебега установлены Б. И. Голубовым [3], Е. А. Власовой [10]. В частности, Е. А. Власова [10] доказала, что обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$, определенная неограниченной последовательностью $\{p_n\}$, не является безусловным базисом в пространстве $L_q, 1 < q \neq \neq 2 < +\infty$. Этот результат на пространства Орлича обобщен в [11].

В предлагаемой заметке изучены условия базисности обобщенной системы Хаара в симметричных пространствах.

Для доказательства теорем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *[12]. Если $\alpha_\varphi > 1$ для ψ-функции $\varphi(t)$, то при любом $q \in (0, +\infty)$ выполняется соотношение*

$$\int\limits_x^1 [\varphi^q(t)t]^{-1}dt = \underline{\underline{O}}(\varphi^{-q}(x)), \qquad x \in (0, 1].$$

Лемма 2. *([12], с.10). Пусть даны ψ — функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x), x \in [0, 1]$ и $\beta_{\varphi_1} < \alpha_{\varphi_2}$. Тогда для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

существует ψ-функция $\theta_1(x)$, для которой $\alpha_{\theta_1} > 1$ и $\theta_1(x) \asymp \theta(x), x \in [0, 1]$.

1. О безусловной базисности системы $\chi\{p_n\}$.

Следующее утверждение непосредственно следует из теорем Б. И. Голубова [3] и Бойда [2].

Теорема 1. *Пусть $X(\varphi)$ - сепарабельное симметричное пространство и $0 < \underline{\gamma}_X \leq \overline{\gamma}_X < 1$. Тогда обобщенная системаХаара $\chi\{p_n\}$, определенная произвольной последовательностью $\{p_n\}$ является базисом в пространстве $X(\varphi)$.*

Теорема 2. *Обобщенная система Хаара, определенная ограниченной последовательностью $\{p_n\}$, является безусловным базисом в любом сепарабельном симметричном пространстве $X(\varphi)$, $0 < \underline{\gamma}_X \leq \overline{\gamma}_X < 1$. При этом имеет место соотношение*

$$\|\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\chi_n(\cdot)|^2\}^{1/2}\|_X \asymp \|f\|_X, \ f \in X(\varphi). \tag{1}$$

Доказательство. По условию теоремы $\sup\limits_n p_n < +\infty$. Поэтому в силу теоремы 2.3 [10] обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$ будет безусловным базисом в пространстве Лебега $L_q, 1 < q < \infty$. Тогда оператор T_ε:

$$(T_\varepsilon f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n(f)\chi_n(x)$$

ограничен в пространстве L_q для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ чисел $\varepsilon_n = \pm 1$ (следствие 4 из [5], с.24). Следовательно, по теореме Бойда [2] оператор T_ε ограничено действует в симметричном пространстве $X(\varphi), 0 < \underline{\gamma}_X \leq \overline{\gamma}_X < 1$. Значит, система $\chi\{p_n\}$ будет безусловным базисом в пространстве $X(\varphi)$ ([5], с.24). Теперь докажем соотношение (1). В силу теоремы 11 ([5], с.24) сублинейный оператор

$$P(f, x) = \{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\chi_n(x)|^2\}^{1/2} \tag{2}$$

ограниченно действует в пространстве L_q. Поэтому в силу интерполяционной теоремы Янсона [13] этот оператор ограничен в симметричном пространстве $X(\varphi)$ т.е.

$$\|P(f)\|_X \leq C\|f\|, \ f \in X(\varphi).$$

Противоположное неравенство следует из принципа двойственности. Теорема доказана.

Замечание. *Отметим,что если некоторая полная,минимальная ортонормированная система $\{\psi_n\}$ является безусловным базисом в симметричном пространстве $X(\varphi), 0 < \underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X < 1$, то имеет место соотношение*

$$\|\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\psi_n(\cdot)|^2\}^{1/2}\|_X \asymp \|f\|_X, \ f \in X(\varphi).$$

Это соотношение доказывается по той же схеме, что (1).

Теорема3. *Пусть $X(\varphi)$ - сепарабельное симметричное пространство, $\sqrt{2} < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < 2$ или $1 < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < \sqrt{2}$. Тогда обобщенная система Хаара, определенная неограниченной последовательностью $\{p_n\}$ не будет безусловным базисом в пространстве $X(\varphi)$.*

Доказательство. Так как последовательность $\{p_n\}$ неограничена, то существует подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}$ такая, что $p_{n_k+1} > 2^k$.
Пусть $\sqrt{2} < \alpha_\varphi$, т.е. $L_2 \subset X(\varphi)$. Выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\alpha_\varphi > 2^{\frac{1}{2}+\varepsilon} > \sqrt{2}.$$

Тогда по лемме 2 существует ψ–функция $Q(t)$ такая, что

$$\frac{\varphi(t)}{t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \asymp Q(t). \tag{3}$$

В частности, $Q(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r}^{(s)} \chi_{n,r}^{(s)}(t), \quad t \in [0,1] \tag{4}$$

с коэффициентами

$$a_{n,r}^{(s)} = \begin{cases} \frac{p_{n+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n+1}^{-1})\sqrt{m_n}}, & n = n_k \\ 0, \quad n \ne n_k, \end{cases}$$

где $r = 0, 1, ..., m_n - 1, s = 1, 2, ..., p_{n+1} - 1$.
Покажем, что ряд (4) сходится по норме симметричного пространства$X(\varphi)$. Используя неравенство треугольника будем иметь

$$\|\sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{r=0}^{m_{n_k}-1} \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{n_k,r}^{(s)} \chi_{n_k,r}^{(s)}\|_X \le \sum_{k=k_1}^{k_2} \|\sum_{r=0}^{m_{n_k}-1} \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{n_k,r}^{(s)} \chi_{n_k,r}^{(s)}\|_X. \tag{5}$$

Положим

$$Q_{m_{n_k}}(t) = \sum_{r=0}^{m_{n_k}-1} \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{n_k,r}^{(s)} \chi_{n_k,r}^{(s)}(t).$$

Для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi}), \quad \|g\|_{X'} \le 1$ имеет место равенство

$$|\int_0^1 Q_{m_{n_k}}(t)g(t)dt| = |\sum_{j=0}^{m_{n_k}-1} \int_{\frac{j}{m_{n_k}}}^{\frac{j+1}{m_{n_k}}} Q_{m_{n_k}}(t)g(t)dt| \tag{6}.$$

Если $r \neq j$, то по определению функции $\chi^{(s)}_{n_k,r}(t) = 0$ для любого $t \in [\frac{j}{m_{n_k}}, \frac{j+1}{m_{n_k}}]$. Поэтому при фиксированном j получим

$$\int\limits_{\frac{j}{m_{n_k}}}^{\frac{j+1}{m_{n_k}}} Q_{m_{n_k}}(t)g(t)dt = \sum_{r=0}^{m_{n_k}-1} \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a^{(s)}_{n_k,r} \int\limits_{\frac{j}{m_{n_k}}}^{\frac{j+1}{m_{n_k}}} \chi^{(s)}_{n_k,r}(t)g(t)dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a^{(s)}_{n_k,r} \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}}^{\frac{r+1}{m_{n_k}}} \chi^{(s)}_{n_k,r}(t)g(t)dt = \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a^{(s)}_{n_k,r} \sum_{l=0}^{p_{n_k+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} \chi^{(s)}_{n_k,r}(t)g(t)dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a^{(s)}_{n_k,r} \sum_{l=0}^{p_{n_k+1}-1} \sqrt{m_{n_k}} \exp(2\pi is\frac{l}{p_{n_k+1}}) \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt =$$

$$= \frac{{p_{n_k+1}}^{-\varepsilon}}{\varphi(p^{-1}_{n_k+1})} \sum_{l=0}^{p_{n_k+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} \exp(2\pi is\frac{l}{p_{n_k+1}}). \tag{7}$$

Если $l = 0$, то

$$\sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} \exp(2\pi is\frac{l}{p_{n_k+1}}) = p_{n_k+1} - 1.$$

Если $l \neq 0$, то

$$\sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} \exp(2\pi is\frac{l}{p_{n_k+1}}) = -1.$$

Поэтому

$$\sum_{l=0}^{p_{n_k+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} \exp(2\pi is\frac{l}{p_{n_k+1}}) =$$

$$= (p_{n_k+1} - 1) \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt - \sum_{l=1}^{p_{n_k+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt. \tag{8}$$

Следовательно, из равенств (7) и (8) получим

$$\int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}}^{\frac{r+1}{m_{n_k}}} Q_{m_{n_k}}(t)g(t)dt = \frac{p^{-\varepsilon}_{n_k+1}}{\varphi(p^{-1}_{n_k+1})}[(p_{n_k+1} - 1) \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt - \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r+1}{m_{n_k}}} g(t)dt]. \tag{9}$$

Подставляя Формулу (9) в (6), будем иметь

$$|\int\limits_0^1 Q_{m_{n_k}}(t)g(t)dt| = |\sum_{r=0}^{m_{n_k}-1} \frac{p^{-\varepsilon}_{n_k+1}}{\varphi(p^{-1}_{n_k+1})}[(p_{n_k+1} - 1) \int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt -$$

$$-\int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r+1}{m_{n_k}}} g(t)dt]| \le \frac{p_{n_k+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}(p_{n_k+1}-1)\left|\sum_{r=0}^{m_{n_k}-1}\int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}}^{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}} g(t)dt\right|+$$

$$+\frac{p_{n_k+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}\left|\sum_{r=0}^{m_{n_k}-1}\int\limits_{\frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}}^{\frac{r+1}{m_{n_k}}} g(t)dt\right|. \tag{10}$$

Положим $E_k = \bigcup\limits_{r=0}^{m_{n_k}-1}[\frac{r}{m_{n_k}}, \frac{r}{m_{n_k}}+\frac{1}{m_{n_k+1}}]$, тогда $\mu E_k = \frac{1}{p_{n_k+1}}$. С учетом определения фундаментальной функции из (10) получим

$$|\int\limits_0^1 Q_{m_{n_k}}(t)g(t)dt| \le \frac{p_{n_k+1}^{-\epsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}[(p_{n_k+1})|\int\limits_{E_k} g(t)dt| + |\int\limits_{[0,1]\setminus E_k} g(t)dt|] \le$$

$$\le \frac{p_{n_k+1}^{-\epsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}[(p_{n_k+1}-1)\frac{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}{p_{n_k+1}} + \frac{p_{n_k+1}-1}{p_{n_k+1}}\varphi(\frac{p_{n_k+1}}{p_{n_k+1}-1})] \le$$

$$\le 2(1-\frac{1}{p_{n_k+1}})p_{n_k+1}^{-\epsilon} < 2p_{n_k+1}^{-\epsilon} \le 2^{-k\epsilon+1}.$$

Поэтому $\|Q_{m_{n_k}}\|_X \le 2^{-k\epsilon+1}$ для любого $k=1,2,...$ Следовательно, из (5) следует

$$\|\sum_{k=k_1}^{k_2}\sum_{r=0}^{m_{n_k}-1}\sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{n_k,r}^{(s)}\chi_{n_k,r}^{(s)}\|_X \le 2\sum_{k=k_1}^{k_2} 2^{-k\epsilon} \longrightarrow 0$$

при $k_1, k_2 \longrightarrow +\infty$. Этим мы доказали,что последовательность $\{\sum\limits_{k=1}^{l} Q_{m_{n_k}}(t)\}$ фундаментальна в симметричном пространстве $X(\varphi)$. Поэтому в силу полноты пространства $X(\varphi)$ существует функция $f_0 \in X(\varphi)$ такая, что ряд (4) сходится к ней по норме пространства $X(\varphi)$.

Допустим, что обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$, определенная неограниченной последовательностью $\{p_n\}$ будет безусловным базисом в симметричном пространстве $X(\varphi)$. Тогда оператор P, определенный равенством (2), ограничен в пространстве $X(\varphi)$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\|(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f_0)\chi_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_X \le C\|f_0\|_X < +\infty. \tag{11}$$

Далее, по определению функций $\chi_n(t)$ и чисел $a_n(f_0)$ получим

$$\|f_0\|_X \ge \|(\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{r=0}^{m_{n_k}-1}\sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1}|a_{n_k,r}^{(s)}(f_0)\chi_{n_k,r}^{(s)}|^2)^{1/2}\|_X =$$

$$= \|(\sum_{k=1}^{\nu}(p_{n_k+1}-1)[\frac{p_{n_k+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}]^2)^{1/2}\|_X = \|\chi_{[0,1]}\|_X\{\sum_{k=1}^{\nu}(p_{n_k+1}-1)[\frac{p_{n_k+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}]^2\}^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\|f_0\|_X \ge \|\chi_{[0,1]}\|_X\{\sum_{k=1}^{\nu}(p_{n_k+1}-1)[\frac{p_{n_k+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}]^2\}^{1/2}. \tag{12}$$

Из (3) следует, что $\frac{t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\varphi(t)} \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow 0$ и из (12) получим

$$\|f_0\|_X \geq \|\chi_{[0,1]}\|_X \{\sum_{k=1}^{\nu}(p_{n_k+1}-1)[\frac{p_{n_k+1}^{-\varepsilon}}{\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}]^2\}^{1/2} \geq$$

$$\frac{2}{3}\|\chi_{[0,1]}\|_X \{\sum_{k=1}^{\nu}[\frac{(\frac{1}{p_{n_k+1}})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\frac{1}{p_{n_k+1}}\varphi(p_{n_k+1}^{-1})}]^2\}^{1/2} \longrightarrow +\infty, \nu \longrightarrow +\infty,$$

т.е. $\|f_0\|_X = +\infty$. А это противоречит (11). Следовательно, система $\chi\{p_n\}$ не может быть безусловным базисом в пространстве $X(\varphi)$ при условии $\sqrt{2} < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < 2$.

Рассмотрим случай $1 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < \sqrt{2}$. Тогда $\sqrt{2} < \alpha_{\overline{\varphi}} \leq \beta_{\overline{\varphi}} < 2$. Если допустить, что система $\chi\{p_n\}$ есть безусловный базис в симметричном пространстве $X(\varphi)$, то, как известно, сопряженная система $\overline{\chi}\{p_n\}$ должна быть безусловным базисом в пространстве $X^{'}(\overline{\varphi})$. Но это противоречит доказанному. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М.** Интерполяция линейных операторов. М., 1978.
2. **Boyd D. W.** // Canad. J. Math. 1969. V. 21, № 5. P. 1245 – 1254.
3. **Голубов. Б. И.** // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9, № 2. С. 297 – 314.
4. **Виленкин Н. Я.** // Изв. АН СССР, серия матем. 1947. Т. 11. С. 363 – 400.
5. **Кашин Б. С., Саакян А. А.** Ортогональные ряды. М., 1984.
6. **Бочкарев С. В.** // Мат.замет. 1967. Т. 1, № 4. С. 391 – 398.
7. **Гапошкин В. Ф.** // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9, № 2. С. 280 – 287.
8. **Кранцберг А. С.** // Тр. МИЭМ. 1972. Вып. 24. С. 14 – 21.
9. **Казарян К. С.** // Докл. АН Арм. ССР. 1977. № 5. С. 271 – 275.
10. **Vlasova E. A.** // Analysis Math. 1987. V. 13. P. 339 – 360.
11. **Махашев С. Т.** // Поиск. 2000. № 3. С. 16 – 21.
12. **Лапин С. В.** // Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1980 г., №1036-80, 31 с.
13. **Janson S.** // Studia Math. 1982. V. 75. P. 51 – 53.

Поступила в редакцию 1.06.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 26 – 29*

УДК 517.956

О КРИТЕРИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ-ПРОТТЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

КазАТК имени М. Тынышпаева
480068, Алматы, пр. аль-Фараби, 71

В работе для одного класса многомерных гиперболических уравнений получены критерий единственности решения задачи Дарбу – Проттера.

Пусть D_ε - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1 \ldots, x_m, t)$ ограниченная поверхностями $|x| = t+\varepsilon,\ |x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ длина вектора $(x_1, \ldots, x_m)$, $0 \le t \le (1-\varepsilon)/2,\ 0 \le \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим $S_\varepsilon,\ S_1$ и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим многомерное гиперболическое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m, m \ge 2$.

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1) ([1]).

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D_\varepsilon}) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S) \cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$u\Big|_S = 0, \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

или

$$u_t\Big|_S = 0, \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = 0, \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$ сохранив обозначения, использованные в [2].

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le$ $\le k_n, (m-2)!n!\ k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Keywords: *statically rough boundary, "scalene"approaching*
2000 Mathematics Subject Classification: 74J20

Введем класс функций

$$L_p = \{u : u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{v}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta),\ 0 \le p < (7-m)/2\}.$$

Пусть $a_i(x,t) = b(x,t) = c(x,t) \equiv 0,\ i = 1,\ldots,m$. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если $\varepsilon = 0$, то решение задачи 1 тривиальное, тогда и только тогда, если $u \in L_p$.*

Теорема 2. *Решение задачи 1 тождественно равно нулю $\Leftrightarrow \varepsilon > 0$.*

Если $a_i(x,t),\ b(x,t),\ \ c(x,t) \in W_2^l(D_\varepsilon),\ i = 1,\ldots,m,\ l \ge m+1$, то справедлива

Теорема 3. *В классе $C^1(\overline{D_\varepsilon}) \cap C^2(D_\varepsilon)$ решение задачи 1 $u(x,t) \equiv 0$ тогда и только тогда, если $\varepsilon > 0$.*

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид [3]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{gj \cdot \sin^{m-j-1}\theta j} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta j}\left(\sin^{m-i-1}\theta j \cdot \frac{\partial}{\partial \theta j}\right),$$

$$g_1 = 1,\ \ g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D_\varepsilon}) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S) \cap C^2(D_\varepsilon)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{v}_n^k(r,t) \cdot Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\overline{v}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$([3]) получим

$$\overline{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{v}_{nr}^k - \overline{v}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{v}_n^k = 0, \lambda_n = n(n+m-2). \tag{6}$$

В (6) произведя замену переменной $\overline{v}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r,t)$ и положив затем $\xi = (r+t)/2$, $\eta = (r-t)/2$ будем иметь

$$v_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2} v_n^k = 0. \tag{7}$$

Тогда краевые условие (2) для функции $v_n^k(\xi,\eta)$ перепишутся в виде

$$v_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi) \equiv 0,\ \ v_n^k(\xi,0) = 0,\ \ 0 \le \xi \le 1/2. \tag{8}$$

Используя общее решение уравнения (7) ([4]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (7) имеет вид

$$v_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta) R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi) R(\xi,\xi,\xi,\eta) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1, \tag{9}$$

где
$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$$
— функция Римана уравнения (7)([5]), а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu=n+(m-3)/2$,
$$\nu_n^k(\xi_1)=\frac{\partial v_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\cdot\frac{\partial v_n^k}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N'}\cdot\frac{\partial v_n^k}{\partial\xi_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1},$$
N' — нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Из (9) при $\eta=0$ используя краевые условие (8) получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода
$$0=\int\limits_0^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)\cdot P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1,\quad 0\le\xi\le 1/2 \tag{10}$$

В [2] доказано, что уравнение (10) в классе $C([0,1/2])$ при $\mu{\ge}2$ имеет нетривиальное решения вида
$$\nu_n^k(\xi)=\xi^\beta,\quad \beta=\mu-2(s+1)\ge 0,\quad s=0,1,\dots$$
Решение уравнение (10) тождественно равно нулю тогда и только тогда, если $-\frac{1}{2}\le\mu<2$, т.е. $0\le n<(7-m)/2$.

Таким образом, если $u\in L_p$, то решение задачи (1),(2) $u(r,\theta,t)\equiv 0$.

Если $u\notin L_p$, то задачи (1), (2) имеют нетривиальные решение вида
$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-l}\cdot v_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{11}$$
где $v_n^k(r,t)$ определяются из (9), где $\nu_n^k(\xi)=\xi^\beta$, $\beta=\mu-2s\ge(m+1)/2$, $s=0,1,\dots$

Аналогично, как в [6] можно доказать, что полученное решение (11) принадлежит искомому классу, если $l>3m/2$.

Далее используя результаты [2, с.14] можно показать, что задача (1), (3) также имеет ненулевое решения вида (11), где $v_n^k(r,t)$ находятся из (9), при этом $\tau_n^k(\xi)=\xi^\beta$, $\beta=\mu-2s>(m+3)/2$, $s=0,1\dots$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $\varepsilon>0$, то в [2, с.30] показано, что решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0$.

Пусть теперь решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0$. Покажем, что $\varepsilon>0$. Предположим противное, т.е. $\varepsilon=0$

Если $\varepsilon=0$, то из теоремы 1 вытекает, что задача 1 имеют нетривиальные решения вида (11). Приходим к противоречию.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда в [2., с. 53] показано, что решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0$

Если $\varepsilon=0$,то в этом случае в [6] построены примеры нетривиальных решений задачи 1.

Цитированная литература

1. **Protter M. N.** New voundary value problems for the wave equation and of mixed type. // J.Rath. Mech. and Anal., 1954, vol.3, N4, p. 435 - 446.

2. **Алдашев С. А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. // Алматы: Гылым, 1994 - 170 с.

3. **Михлин С. Г.** Многомерное сингулярные интегралы и интегральные уравнения. // М.: Физматгиз, 1962 - 254 с.

4. **Бицадзе А. В.** Уравнение смешанного типа. // М.: Изд - во АН СССР, 1959 - 164 с.

5. **Copson E. T.** On the Riemann-Green function. // J. Rath. Mech. and Anal. 1958. 1. p. 324 - 348.

6. **Алдашев С. А.** О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. // Дифференциальные уравнения. 1998, 34, N1, с. 1 - 5.

Поступила в редакцию 28.01.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 30 — 33*

УДК 681.5

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ КОНФИГУРАЦИЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. II

Е. Т. Аяганов, С. В. Носкова

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина 125, Ayaganov@mail.ru

Исследуются динамического свойства притяжения в среднеквадратическом стохастической, нестационарной системы управления с изменяющейся конфигурацией объектом с запаздыванием на основе стохастического аналога прямого метода Ляпунова с использованием функции Ляпунова и подхода Разумихина.

1. Введение

Во введении первой части настоящей статьи ([1], §1) приведен обзор по проблеме исследования динамического свойства диссипативности и притяжения в среднеквадратическом нелинейной системы управления стохастическим объектом с запаздыванием. Показано, что наиболее перспективным классом объектов с запаздыванием являются системы автоматического управления с изменяющейся конфигурацией, разработанных на базе принципа бинарности, подходе Разумихина и концепции метода сравнения с векторной функцией Ляпунова.

Вторая часть настоящей статьи посвящена исследованию динамического свойства притяжения в среднеквадратическом для системы автоматического управления с изменяющейся конфигурацией нестационарным стохастическим объектом с запаздыванием на основе стохастического аналога прямого метода Ляпунова [2], принципа бинарности [3], подхода Разумихина [4].

2. Основной результат

Постановка задачи приведена в первой части настоящей статьи ([1], §2).

Пусть существует положительно-определенная функция

$$V = V(t,x), \quad V(t,0) = 0, \tag{1}$$

Keywords: *stochastic object with delay, stochastic analogue of direct Lyapunov's method, property of dissipativity in mean-square, control systems with varying configuration*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

и существуют непрерывные, монотонно возрастающие функции $W_1(\| x \|)$, $W_2(\| x \|)$ [5], такие, что выполнены условия

$$V(t,x) \le W_1(\| x \|), \quad V(t,x) \ge W_2(\| x \|), \tag{2}$$

причем $W_2(\| r \|) \to \infty$ при $\| r \| \to \infty$.

Выберем скалярную функцию Ляпунова

$$V(t,x) = x^T(t)H(t)x(t), \quad H(t) = H^T(t) > 0, \tag{3}$$

где $H(t)$ — функциональная, положительно-определенная, симметрическая матрица размерности $(n \times n)$.

Аналогом производной функции Ляпунова $V(t,x)$ для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является скалярно-оптимизационная функция [4]

$$R(t,x) = \sup\{LV(t,x_{th}) \mid x_{th} \in \mu_V(x,t)\}, \tag{4}$$

где $LV(t,x_{th})$ — стохастический производящий оператор, $\mu_V(x,t) = \{x_{th} \mid V(\upsilon, x(\upsilon)) \le V(t,x)$, $t-h \le \upsilon \le t, x(t) = x\}$ — множество интегральных линий, вдоль которых функция $V(t,x)$ убывает.

Как следует из вышеприведенных постановок задач управления ([1], §2), после попадания траекторий движения в допустимую ограниченную область $\vartheta(x)$ необходимо обеспечить свойство притяжения в среднеквадратическом траекторий движения к ограниченному множеству конусного типа $G_{2\delta}$.

Задача управления для подсистемы притяжения с запаздыванием формулируется следующим образом: необходимо выбрать настраиваемые параметры в алгоритме управления подсистемы притяжения таким образом, чтобы в области $G_{1\delta}$ обеспечивались в среднеквадратическом желаемые динамичекие свойства движения, а множество $G_{2\delta}$ обладало свойством притяжения в среднеквадратическом для решений подсистемы притяжения с запаздыванием.

Дадим определение понятия притяжения в среднеквадратическом множества $G_{2\delta}$.

Определение 2. *Множество $G_{2\delta}$ называется притягивающим в среднеквадратическом для стохастической нестационарной подсистемы притяжения с запаздыванием, если при любых t_o и для всех возмущенных движений, удовлетворяющих условию $\| \varphi(\upsilon) \| < \nu(t_0)$, где $\nu \in [t_0 - h, t_0]$, $\nu(t_0)$ — некоторое число, существует такой момент времени $t_1 = t_1(\varphi(\upsilon), t_0)$, для которого все $M\left[| x(t, \varphi(\upsilon)) |^2\right] \in G_{2\delta}$ при любом $t \ge t_1$.*

Пусть в математической модели (1)–(3), (5), (12)–(14) ([1], §2) векторное управление $U_2(t) = (U_{21}(t), \ldots, U_{2m}(t))^T$ представляет собой нелинейную функцию (14) ([1], §2), удовлетворяющую секторному ограничению вида

$$0 \le \frac{U_{2i}(x(t), \sigma'(x(t)))}{\sigma'(x(t))} \le q_{0i} \quad \text{для} \quad \sigma'(x(t)) \ne 0,\ q_{0i} = \text{const} > 0,\ i = \overline{1,m}\ . \tag{5}$$

Для исследования динамического свойства притяжения в среднеквадратическом рассматриваемой подсистемы управления сделаем аналогичные предыдущему случаю предположения относительно выбираемой функции Ляпунова.

При выбранной функции Ляпунова (18) ([1], §3) выражение для стохастического производящего оператора $LV(t,x_{th})$, взятого в силу выражения (1), (8) ([1], §2), представляется следующим образом

$$LV(t,x_{th}) = [A(t)\,x(t) + A_h(t)\,x(t-h) + B(t)\,U_2(t)]V_x + \frac{1}{2} tr D(x,t)D^T(x,t)V_{xx}\ . \tag{6}$$

При выбранной функции Ляпунова множество $G_{2\delta}$ будет обладать свойством притяжения в среднеквадратическом на решениях стохастической, нестационарной подсистемы притяжения при выполнении условий

$$V(x,t) > 0, \quad R(t,x) < 0 \quad \forall M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon))\mid^2\right] \notin G_{2\delta}. \tag{7}$$

Условия, обеспечивающие свойство притяжения в среднеквадратическом стохастической нестационарной подсистемы притяжения к ограниченному множеству конусного типа, формулируются в следующей теореме.

Теорема 2. *При выбранной функции Ляпунова (3), стохастическая нестационарная подсистема притяжения с запаздыванием (1)—(3), (5), (12)—(14) ([1], §2) обладает свойством притяжения в среднеквадратическом и область $G_{2\delta}$ будет притягивающей для $M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon))\mid^2\right]$, если выполняются следующие условия*

$$u > 0\ , \quad \rho > p^T u^{-1} p\ , \tag{8}$$

где $u = -(F^T(t)H(t)+H(t)F(t)+H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)+E+\lambda_m H(t)+dH(t)/dt)$, $F(t)=\dfrac{1}{2}\tilde{\lambda}_m E+ + A(t)$, $p=-H(t)B(t)-\dfrac{1}{2}\tilde{c}^T r(t)$, $\rho = Q^{-1}r(t)$, $\tilde{\lambda}_m$ — максимальное значение характеристических чисел соответствующих пучков квадратичных форм, формируемых в процессе доказательства теоремы.

Доказательство. Слагаемое $trD(x,t)D^T(x,t)V_{xx}$ в выражении (6) оценивается, как и в первой части статьи ([1], §3).

Тогда с учетом (29) ([1], §3), выражение для скалярно-оптимизационной функции примет вид

$$\begin{aligned} R(t,x) = \sup\{\, & x^T(t)(A^T(t)H(t)+H(t)A(t)+\lambda_m H(t)\ + dH(t)/dt)x(t)+ \\ & +2x^T(t)H(t)\,A_h(t)\,x(t-h)\ +\ 2x^T(t)H(t)\,B(t)U_2(t) \mid x_{th}\in\mu_V(x,t)\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Слагаемое $2x^T(t)H(t)\,A_h(t)x(t-h)$ оценивается аналогично, как и при доказательстве теоремы о диссипативности в среднеквадратическом ([1], §3).

Тогда с учетом (31) ([1], §3) получим

$$\begin{aligned} R(t,x) = {} & x^T(t)(A^T(t)H(t)+H(t)A(t)+\lambda_m H(t)+E+ \\ & +H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)+dH(t)/dt)x(t)+2x^T(t)H(t)B(t)U_2(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Представим выражение для множества конусного типа в виде

$$G_{2\delta} = \{M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon))\mid^2\right] : \sigma^+(t)\sigma^-(t) = x^T(t)\tilde{c}^T\tilde{c}x(t) \le 0\}. \tag{11}$$

Учитывая, что выражение (10) должно быть отрицательно (или неположительно) при выполнении (5), воспользуемся S-процедурой. Тогда выражение для S-функции будет иметь следующей вид

$$S(x,t) = -R(t,x) + r(t)U_2(t)[\sigma'(t) - Q_0^{-1}U_2(t)] - r(t)x^T(t)\tilde{c}^T\tilde{c}x(t), \tag{12}$$

где $r(t) > 0$,. Тогда условие (7) будет выполнено, если справедливо условие (34) ([1], §3).

Проделав необходимые преобразования выражения (12) с учетом вышеприведенных выражений, получим

$$\begin{aligned} S(x,t) = {} & -x^T(t)(A^T(t)H(t)+H(t)A(t)+H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)+dH(t)/dt+E+ \\ & +\lambda_m H(t)+G)x(t) - 2x^T(t)(H(t)B(t)+\tfrac{1}{2}r(t)\tilde{c}^T)U_2(t) - r(t)U_2^T(t)Q_0^{-1}U_2(t), \end{aligned} \tag{13}$$

где $G = r(t)\tilde{c}^T\tilde{c}$ — матрица размерности $(n\times n)$.

Получим оценки составляющей $x^T(t)Gx(t)$ в выражении (13) в следующем виде

$$x^T(t)Gx(t) \le \tilde{\lambda}_m^j x^T(t)H(t)x(t), \ \ j=1,2. \tag{14}$$

Для оценки значения $\tilde{\lambda}_m^j$ с учетом свойства положительной определенности матрицы $H(t) = H^T(t) > 0$ составляются пучки квадратичных форм

$$x^T(t)Gx(t) - \tilde{\lambda}^j x^T(t)H(t)x(t), \ \ j=1,2. \tag{15}$$

Характеристические уравнения пучков (15) запишутся в виде

$$\det(G^1 - \tilde{\lambda}^1 H(t)) = 0, \quad \det(G^2 - \tilde{\lambda}^2 H(t)) = 0, \tag{16}$$

где $G^1 = \tilde{c}^{1T}\tilde{c}^1$, $G^2 = \tilde{c}^{2T}\tilde{c}^2$, $\tilde{c}^{1T} = c^T + \delta\beta^T$, $\tilde{c}^{2T} = c^T - \delta\beta^T$.

Проранжируем полученные характеристические числа уравнений (16) следующим образом:

$$\tilde{\lambda}_1^1 \le \tilde{\lambda}_2^1 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_m^1, \quad \tilde{\lambda}_1^2 \le \tilde{\lambda}_2^2 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_m^2. \tag{17}$$

В этом случае справедливо неравенство

$$\tilde{\lambda}_1^1 \le \frac{x^T(t)G^1x(t)}{x^T(t)H(t)x(t)} \le \tilde{\lambda}_m^1, \ \ \tilde{\lambda}_1^2 \le \frac{x^T(t)G^2x(t)}{x^T(t)H(t)x(t)} \le \tilde{\lambda}_m^2, \tag{18}$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \min\{\tilde{\lambda}_1^1, \tilde{\lambda}_1^2\}, \quad \tilde{\lambda}_m = \max\{\tilde{\lambda}_m^1, \tilde{\lambda}_m^2\}, \tag{19}$$

где $\tilde{\lambda}_1^i$, $\tilde{\lambda}_m^i$, $i=1,2$ — соответственно, минимальные и максимальные значения характеристических чисел пучков квадратичных форм (18).

Таким образом, выражение для S-функции можно представить в следующем виде:

$$S(x,t) = x^T(t)ux(t) + 2x^T(t)pU_2(t) + U_2^T(t)\rho U_2(t), \tag{20}$$

где $u = -(F^T(t)H(t) + H(t)F(t) + H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t) + E + \lambda_m H(t) + dH(t)/dt)$, $F = \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_m E + A(t), p = -H(t)B(t) - \frac{1}{2}\tilde{c}^T r(t)$, $\rho = Q_0^{-1}r(t)$.

Представим выражение (20) в векторно-матричной форме

$$(x^T(t) \quad U_2(t)) \begin{bmatrix} u & p \\ p^T & \rho \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} > 0. \tag{21}$$

Для выполнения неравенства (21) достаточно, чтобы

$$\begin{bmatrix} u & p \\ p^T & \rho \end{bmatrix} > 0, \tag{22}$$

т.е. получим выражение (8), что и требовалось доказать.

Цитированная литература

1. **Аяганов Е. Т., Носкова С. В.** //Математический журнал. Алматы. 2002. Т.2, №2. С. 32 – 40.
2. **Хасьминский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969.
3. **Емельянов С. В.** Бинарные динамические системы автоматического управления. Препринт МНИИ ПУ, сер. Бинарные динамические системы, вып.1. М.: МНИИ ПУ, 1984.
4. **Разумихин Б. С.** Устойчивость эредитарных систем. М., 1988.
5. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

Поступила в редакцию 28.06.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 34 — 42*

УДК 517.5

О ГАУССОВЫХ ФОРМУЛАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ET-СИСТЕМАХ

В.В. Жук

Институт математики МО и Н РК
480100, Алматы, ул.Пушкина, 125, vladimir_zhuk@mail.ru

Гауссовым формулам восстановления для различных систем функций посвящено достаточно большое количество работ (см., напр., [1]—[3]). Обзор теории гауссовых квадратур можно найти, например, в [4]. В работе [2] найдены оценки порядка точности гауссовых квадратур для положительного линейного непрерывного функционала на ET-системах, а также доказаны существование и единственность квадратуры, реализующей данную оценку. Оценки порядка точности для WT-систем получены в [1]. В [3] рассматривались обобщенные гауссовы квадратурные формулы,а также приведено доказательство существования и единственности обобщенной квадратуры, на которой достигается верхняя оценка порядка точности для ET-систем.

В настоящей статье дается верхняя оценка порядка точности на ET-системах гауссовых квадратур для линейных непрерывных функционалов, не обладающих свойством положительности, а также рассматривается вопрос достижения этих оценок.

1. Постановка задачи

Пусть $L(f)$ — линейный непрерывный функционал, заданный на некотором пространстве X определенных на $[0,1]$ функций, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ $(m_k > 0, k = 1:n)$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ $(\nu_i \geq 0, i = 1:l)$ — фиксированные четные целые числа, и

$$|m| = \sum_{k=1}^{n} m_k, \tag{1}$$

$$|\nu| = \sum_{i=1}^{l} \nu_k. \tag{2}$$

Рассмотрим квадратуры вида

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj} f^{(j)}(x_k) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{\nu_i-1} b_{ij} f^{(j)}(\zeta_i), \tag{3}$$

Keywords: *quadrature, exactness, positive linear continuous functional, $ET(ECT)$-system*
2000 Mathematics Subject Classification: 65K32

где $a_{kj}, b_{ij} \in \mathbf{R}$ — коэффициенты квадратуры, $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ — узлы квадратуры, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_l < 1$ — фиксированные точки.

Определение 1. *Квадратура Q называется точной для функционала L на множестве $M \subset X$, если для всех $f \in M$ справедливо равенство $Q(f) = L(f)$.*

Определение 2. *Функционал L называется положительным на множестве M, если $L(f) > 0$ для всех $f \in M$, у которых $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0,1)$, и $meas(t : f(t) = 0) < 1$.*

Для заданных положительных четных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ введем в рассмотрение функцию $w_\zeta \in C^{|\mu|-l}[0,1] \quad (|\mu| = \sum_{k=1}^{l} \mu_i)$, обладающую следующими свойствами

$$\begin{gathered} sgn(w_\zeta(t)) = sgn \prod_{i=1}^{l} (t - \zeta_i), \quad \forall t \in [0,1], \\ w_\zeta^{(j)}(\zeta_i) = 0, j = 0 : \mu_i - 2, \quad w_\zeta^{(\mu_i - 1)}(\zeta_i) \neq 0, \quad i = 1 : l. \end{gathered} \tag{4}$$

По заданному определенному на $C[0,1]$ положительному линейному непрерывному функционалу L^* построим функционал вида

$$L_\zeta(f) = L^*(w_\zeta f), \tag{5}$$

который, очевидно, является линейным, непрерывным и обладает тем свойством, что если для функции f справедливы соотношения

$$sgn \prod_{k=1}^{l} (t - \zeta_k) f(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0,1) \quad \text{и} \quad meas(t : f(t) = 0) < 1, \tag{6}$$

то

$$L_\zeta(f) > 0. \tag{7}$$

Нами рассматриваются вопросы оценки наивысшего порядка точности квадратур вида (3) на ET-системах для функционала L_ζ и возможности достижения этих оценок.

2. Предварительные результаты

Пусть $U_m = \{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)\}$ — некоторая система функций, заданных на отрезке $[0,1]$. Запись $U_m \subset M$ означает, что $u_i \in M \quad (i = 1 : m)$.

Для фиксированной функции φ, определенной на $[0,1]$, положим

$$\varphi U_m = \{\varphi(t)u_1(t), \varphi(t)u_2(t), \ldots, \varphi(t)u_m(t)\}.$$

Определение 3. *Будем говорить, что система V_r является φ-продолжением системы U_m, если $\varphi U_m \subset span\, V_r$.*

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть ET-система $V_{r+|\mu|-l}$ является w_ζ-продолжением ET-системы U_r, где $w_\zeta \in C^{r+|\mu|-l-1}[0,1]$ — функция, удовлетворяющая соотношениями (4). Тогда для произвольной $v \in span\, V_{r+|\mu|-l}$, удовлетворяющей соотношениям*

$$v^{(j)}(\zeta_i) = 0, \ j = 0 : \mu_i - 2, \ i = 1 : l, \tag{8}$$

существует единственная функция $u \in span\, U_r$ такая, что

$$v(t) = w_\zeta(t)u(t), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $v \in span\, V_{r+|\mu|-l}$ удовлетворяет условию теоремы. Выберем r различных точек x_i $(i = 1 : r)$ из $(0,1)\backslash\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\}$. Так как $w_\zeta(x_i) \neq 0$ и U_r является ET-системой, то существует единственный элемент $u \in span\, U_r$, удовлетворяющий следующим равенствам

$$u(x_i) = \frac{v(x_i)}{w_\zeta(x_i)}, \quad i = 1 : r. \tag{10}$$

Функция

$$v_0(t) = w_\zeta(t)u(t), \quad \forall t \in [0,1],$$

принадлежит $span\, w_\zeta U_r$, и, следовательно, $v_0 \in span\, V_{r+|\mu|-l}$.

Так как $V_{r+|\mu|-l}$ является ET-системой, и

$$v_0(x_i) = v(x_i),\ i = 1 : r,$$

$$v_0^{(j)}(\zeta_i) = v^{(j)}(\zeta_i) = 0,\ j = 0 : \mu_i - 2,\ i = 1 : l,$$

то

$$v(t) = v_0(t) = w_\zeta(t)u(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

Таким образом, построенная функция u является искомой.

Докажем, что она единственна.

Предположим, что существует по крайней мере еще один элемент $\widetilde{u} \in spanU_r$ такой, что

$$v(t) = w_\zeta(t)\widetilde{u}(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

Тогда

$$\widetilde{u}(x_i) = \frac{v(x_i)}{w_\zeta(x_i)}, \quad i = 1 : r.$$

Поскольку U_r является ET-системой, то из последнего равенства и (10) следует, что $\widetilde{u} \equiv u$. Теорема 1 доказана.

Пусть $U_{|m|}$ — ET-система размерности $|m|$. В $span\, U_{|m|}$ выделим функции u_{kj} $(j = 0 : m_k - -1, k = 1 : n)$, единственным образом определяемые из следующих интерполяционных условий

$$u_{kj}^{(i)}(x_p) = \delta_{ij}\delta_{kp}, k, p = 1 : n, j = 0 : m_k - 1, i = 0 : m_p - 1. \tag{11}$$

Ясно,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} u^{(j)}(x_k)u_{kj}(t),\ \forall u \in span\, U_{|m|}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы квадратурная формула*

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 2} a_{kj} f^{(j)}(x_k), \tag{13}$$

была точна на ET-системе $U_{|m|}$ для линейного функционала L, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{kj} = L(u_{kj}), \quad k = 1 : n, j = 0 : m_k - 2, \tag{14}$$

$$L(u_{k,m_k-1}) = 0, \quad k = 1 : n. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Заметим, что из (3), (11) имеем

$$Q(u_{kj}) = a_{kj}, \quad Q(u_{k,m_k-1}) = 0, \quad k = 1:n, j = 0:m_k-2. \tag{16}$$

Если квадратура Q точна для линейного функционала L на $U_{|m|}$, то с учетом (16) получаем соотношения (14), (15).

Обратно, пусть имеют место равенства (14) и (15).

Тогда из соотношений (12), (14), (15) и линейности функционала L для всех $u \in span\, U_{|m|}$ имеем

$$L(u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-1} u^{(j)}(x_k) L(u_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj} u^{(j)}(x_k) = Q(u).$$

Отсюда следует, что квадратура Q точна для функционала L на $U_{|m|}$. Теорема 2 доказана.

Имеет место, также, следующее утверждение (см., напр., [2]).

Т е о р е м а 3. *Пусть для положительного линейного непрерывного функционала L квадратура Q вида (13) точна на ET-системе U_N, тогда $N \le |m|$.*

При этом, существует единственная квадратурная формула Q вида (13), точная для L на ET-системе $U_{|m|}$.

В [4, гл. 3] доказана

Т е о р е м а 4. *Пусть для функционала L_ζ квадратура Q вида (3) точна на ET-системе U_N, тогда $N \le |m| + |\nu| + l$.*

3. Основные результаты

Из теоремы 3 следует, что для заданного положительного линейного непрерывного функционала L^* и фиксированного набора целых чисел

$$K = \{k_1, k_2, \dots k_l\} \; (1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_l \le n + l) \tag{17}$$

существует единственная точная на $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ квадратурная формула

$$Q_K(f) = \sum_{k=1}^{n+l} \sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* f^{(j)}(x_k^*), \tag{18}$$

где

$$0 < x_1^* < x_2^* < \dots < x_{n+l}^* < 1,$$

$$m_k^* = \begin{cases} \mu_i + \nu_i, \text{ если } k = k_i, \\ m_{k-card([1,k]\bigcap K)}, \text{ если } k \notin K, \end{cases} \qquad k = 1 : n + l,$$

$card(S)$ — количество элементов множества S.

В следующем утверждении приведен критерий достижения полученной в теореме 4 оценки.

Т е о р е м а 5. *Пусть ET-система $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ является w_ζ-продолжением ET-системы $U_{|m|+|\nu|+l}$, где $w_\zeta \in C^{|m|+|\nu|+|\mu|-1}[0,1]$ — функция, обладающая свойством (4). Тогда квадратура Q вида (3), точная для L_ζ на $U_{|m|+|\nu|+l}$, существует в том и только в том случае, когда найдется набор $K = \{k_1, k_2, \dots k_l\}$, удовлетворяющий условию (17), такой, что $\zeta_i = x_{k_i}^*$ ($i = 1 : l$), где x_j^* — j-й узел квадратуры Q_K вида (18), точной на $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ для положительного линейного непрерывного функционала L^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть квадратура Q вида (3) с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точна для L_ζ на $U_{|m|+|\nu|+l}$. Тогда для всех $u \in span\, U_{|m|+|\nu|+l}$ таких, что $u^{(j)}(x_k) = 0\,(j = 0 : m_k - 2, k = 1 : n)$ и $u^{(j)}(\zeta_i) = 0\,(j = 0 : \nu_i - 1, i = 1 : l)$, справедливы соотношения

$$L^*(w_\zeta u) = L_\zeta(u) = Q(u) = 0. \tag{19}$$

Заметим, что $\zeta_i \neq x_k\,(i = 1 : l,\ k = 1 : n),\ x_1 > 0,\ x_n < 1$. Действительно, если

$$\{0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l, 1\} \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \phi,$$

то для функции $u \in span\, U_{|m|+|\nu|+l}$, удовлетворяющей условиям

$$u(t_0) = -1,\ u^j(\zeta_i) = 0,\ j = 0 : \nu_i - 1, i = 1 : l,$$

$$u^{(j)}(x_k) = 0,\ j = 0 : \rho_k,\ k = 1 : n,$$

$$u^{(m_k-1)}(x_k) = 0,\ \text{если}\ x_k \notin \{0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l, 1\},$$

$$u^{(j)}(1) = 0,\ j = 0 : \rho,\ \text{если}\ \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\} \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \phi,$$

$$u^{(m_n-1)}(1) = 0,\ \text{если}\ x_1 = 0, x_n = 1, \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\} \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \phi,$$

где $t_0 \in (0, \zeta_1) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — некоторая фиксированная точка,

$$\rho_k = m_k - 1 + \sum_{i=1}^{l} (v_i - 1)\, card(\{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\} \bigcap \{x_k\},\ k = 1 : n,$$

$$\rho = card(\{0, 1\} \bigcap \{x_1, x_n\}) + (m_n - 1) card(\{1\} \bigcap \{x_n\}) + 2 card(\{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\} \bigcap \{x_1, \ldots, x_n\}) - 2,$$

справедливы соотношения (6) и, следовательно, $L^*(w_\zeta u) > 0$, что противоречит (19).

Пусть $x_0 = 0,\ x_{n+l} = 1$ и $\zeta_i \in (x_{k_i^*-1}, x_{k_i^*})$ $(1 \leq k_i^* \leq n + l,\ i = 1 : l)$. Положим $k_i = k_i^* + i - - 1\ (i = 1 : l)$ и

$$x_k^* = \begin{cases} \zeta_i,\ \text{если}\, k = k_i, \\ x_{k - card([1,k] \bigcap K)},\ \text{если}\, k \notin K, \end{cases} \qquad k = 1 : n + l, \tag{20}$$

$$m_k^* = \begin{cases} \mu_i + \nu_i,\ \text{если}\, k = k_i, \\ m_{k - card([1,k] \bigcap K)},\ \text{если}\, k \notin K, \end{cases} \qquad k = 1 : n + l, \tag{21}$$

где $K = \{k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_l\}$.

В $span\, V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ определим функции v_{kj}, удовлетворяющие следующим условиям

$$v_{kj}^{(i)}(x_p^*) = \delta_{ij}\delta_{kp},\ k, p = 1 : n + l, j = 0 : m_k^* - 1, i = 0 : m_p^* - 1. \tag{22}$$

Так как

$$v_{k, m_k^*-1}^{(j)}(\zeta_i) = 0,\ j = 0 : \mu_i - 2, i = 1 : l, k = 1 : n + l, \tag{23}$$

то по теореме 1 найдутся такие функции $u_k \in span\, U_{|m|+|\nu|+l}, k = 1 : n + l$, что $\forall t \in [0, 1]$

$$v_{k, m_k^*-1}(t) = w_\zeta(t) u_k(t),\ k = 1 : n + l. \tag{24}$$

При этом

$$u_k^{(j)}(x_p^*) = 0,\ k = 1 : n + l, p = 1 : n + l, j = 0 : \widetilde{m}_k - 2, \tag{25}$$

где

$$\widetilde{m}_k = \begin{cases} \nu_i + 1,\ \text{если}\, k = k_i, \\ m_k^*,\ \text{если}\, k \notin K. \end{cases}$$

Действительно, предположим противное. Пусть в некоторой точке x_r^*

$$u_{k'}^{(j)}(x_r^*) = 0,\ j = 0 : \nu - 1,\ u_{k'}^{(\nu)}(x_r^*) \neq 0\ (0 \leq \nu \leq \widetilde{m}_{k'} - 2).$$

Тогда в силу последних соотношений и (4) получаем

$$v_{k',m_{k'}^*-1}^{(\nu+\mu_i-1)}(x_r^*) = \sum_{j=0}^{\nu+\mu_i-1} C_{\nu+\mu_i-1}^j w_\zeta^{(j)}(x_r^*) u_{k'}^{(\nu-j)}(x_r^*) = w_\zeta^{(\mu_i-1)}(x_r^*) u_{k'}^{(\nu)}(x_r^*) \neq 0, \text{ если } r = k_i,$$

$$v_{k',m_{k'}^*-1}^{(\nu)}(x_r^*) = \sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j w_\zeta^{(j)}(x_r^*) u_{k'}^{(\nu-j)}(x_r^*) = w_\zeta(x_r^*) u_{k'}^{(\nu)}(x_r^*) \neq 0, \text{ если } r \notin K,$$

что противоречит (22).

Учитывая (20), (21), (25), имеем

$$u_k^{(j)}(x_p) = 0,\ p = 1 : n, j = 0 : m_p - 2, k = 1 : n + l,$$

$$u_k^{(j)}(\zeta_i) = 0\ j = 0 : \nu_i - 1, i = 1 : l, k = 1 : n + l.$$

Поэтому из (19) следует, что

$$L^*(v_{k,m_k^*-1}) = L^*(w_\zeta u_k) = 0,\ k = 1 : n + l. \tag{26}$$

Таким образом, по теореме 2 в силу (26) заключаем, что если в квадратуре Q_K вида (18) взять в качестве узлов точки $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+l}^*$ и коэффициенты

$$a_{kj}^* = L^*(v_{kj}), \quad k = 1 : n + l, j = 0 : m_k^* - 2,$$

то эта квадратурная формула будет точна для L^* на $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$.

Обратно. Пусть квадратура Q_K вида (18) точна для L^* на $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ и $K = \{k_1,\, k_2,\, \ldots\, k_l\}$ — фиксированный набор целых чисел, удовлетворяющий условию (17) такой, что

$$\zeta_i = x_{k_i}^*,\ i = 1 : l. \tag{27}$$

Положим

$$v(t) = w_\zeta(t) u(t), \tag{28}$$

где $u \in span\, U_{|m|+|\nu|+l}$.

Так как $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ является w_ζ-продолжением $U_{|m|+|\nu|+l}$, то $v \in span\, V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$, при этом с учетом (4), (27) и (28) получаем

$$v^{(j)}(x_{k_i}^*) = 0,\ j = 0 : m_{k_i}^* - \nu_i - 2,\ i = 1 : l.$$

Отсюда, в силу того, что квадратура Q_K точна для функционала L^* на $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$, для всех $u \in span\, U_{|m|+|\nu|+l}$ имеем

$$L_\zeta(u) = L^*(w_\zeta u) = L^*(v) = \sum_{k=1}^{n+l} \sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) =$$

$$= \sum_{k \notin K} \sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) + \sum_{k \in K} \sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) = \tag{29}$$

$$= \sum_{k \notin K} \sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) + \sum_{k \in K} \sum_{j=m_{k_i}^*-\nu_i-1}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj} u^{(j)}(x_k) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{\nu_i-1} b_{ij} u^{(j)}(\zeta_i) = Q(u),$$

где

$$x_k = x^*_{r(k)}, a_{kj} = \sum_{p=j}^{m_{r(k)}-2} a^*_{r(k),p}\, C_j^p w_\zeta^{(j-p)}(x^*_{r(k)}),\; j = 0 : m_k - 2, k = 1 : n,$$

$$1 \le r(1) < r(2) < \ldots < r(n) \le n + l,\; \bigcup_{k=1}^{n} \{r(k)\} = \{1, 2, \ldots, n + l\} \setminus K,$$

$$b_{ij} = \sum_{p=j}^{\nu_i-1} a^*_{k_i, p+\mu_i-1}\, C_j^{p+\mu_i-1} w_\zeta^{(j+\mu_i-1-p)}(\zeta_i),\; j = 0 : \nu_i - 1, i = 1 : l.$$

Таким образом, квадратура Q является точной для L_ζ на $U_{|m|+|\nu|+l}$. Теорема 5 доказана.

Справедлива

Теорема 6. . *Пусть ET-система $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ является w_ζ-продолжением ET-системы $U_{|m|+|\nu|+l}$, где $w_\zeta \in C^{|m|+|\nu|+|\mu|-1}[0, 1]$ — функция, удовлетворяющая соотношениям (4), и $\mu_1 + \nu_1 = \mu_2 + \nu_2 = \ldots = \mu_l + \nu_l = m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$.*

Если существует квадратурная формула вида (3), точная для L_ζ на $U_{|m|+|\nu|+l}$, то она единственна.

Доказательство . Прежде всего отметим, что поскольку $\mu_1 + \nu_1 = \mu_2 + \nu_2 = \ldots = \mu_l + \nu_l = m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, то квадратура Q_K вида (18), точная на $V_{|m|+|\nu|+|\mu|}$ для L^* , имеет один и тот же вид для любого набора целых чисел K, удовлетворяющего условию (17). Обозначим ее через Q^*, и пусть $0 < x_1^* < x_2^* < \ldots < x_l^* < 1$ — узлы этой квадратуры.

Предположим, что существуют по крайней мере две точные для L_ζ на $U_{|m|+|\nu|+l}$ квадратурные формулы $\widetilde{Q}$ и $\widehat{Q}$ вида (3) с узлами $\widetilde{x}_i\,(i = 1 : n)$ и $\widehat{x}_i\,(i = 1 : n)$, соответственно. Тогда по теореме 5 найдутся два таких набора целых чисел $\widetilde{K} = \{\widetilde{k}_1, \widetilde{k}_2, \ldots \widetilde{k}_l\}$ $(1 \le \widetilde{k}_1 < \widetilde{k}_2 < \ldots < \widetilde{k}_l \le n + l)$ и $\widehat{K} = \{\widehat{k}_1, \widehat{k}_2, \ldots \widehat{k}_l\}$ $(1 \le \widehat{k}_1 < \widehat{k}_2 < \ldots < \widehat{k}_l \le n + l)$, что

$$\zeta_i = x^*_{\widetilde{k}_i} = x^*_{\widehat{k}_i}\; (i = 1 : l).$$

Более того, как следует из доказательства предыдущей теоремы,

$$\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\} \bigcap \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n\} = \phi,\; \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\} \bigcap \{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n\} = \phi,$$

$$\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\} \bigcup \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n\} = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\} \bigcup \{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n\} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+l}^*\}.$$

Поэтому

$$\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n\} = \{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n\},$$

то есть

$$\widetilde{x}_i = \widehat{x}_i, \quad i = 1 : n. \tag{30}$$

Тогда коэффициенты квадратур $\widetilde{Q}$ и $\widehat{Q}$ могут быть вычислены по формулам

$$\widetilde{a}_{kj} = \widehat{a}_{kj} = L(u_{kj}), \quad k = 1 : n, j = 0 : m - 2, \tag{31}$$

где $u_{kj} \in U_{|m|+|\nu|+l}$ — функция, удовлетворяющая, например, условиям

$$u_{kj}^{(r)}(0) = 0,\; r = 0 : l - 1,\; u_{kj}^{(i)}(\widetilde{x}_p) = \delta_{ij}\delta_{kp}, k, p = 1 : n, j = 0 : m - 1, i = 0 : m - 1.$$

Следовательно, учитывая (30), (31), мы заключаем, что квадратурные формулы $\widetilde{Q}$ и $\widehat{Q}$ совпадают. Таким образом, мы пришли к противоречию. Теорема 6 доказана.

4. Примеры

Приведенные ниже примеры иллюстрируют результаты, полученные в статье.

Пусть $l = 1$, $\zeta \in (0,1)$ и

$$L^*(f) = \int_0^1 f(t)dt,$$

$$L_\zeta(f) = \int_0^1 (t-\zeta)f(t)dt, \quad \zeta \in (0,1).$$

Рассмотрим квадратуру вида

$$Q(f) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2), \tag{32}$$

которая является частным случаем квадратуры (3), когда $n = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

Через $d(L)$ обозначим максимальное значение r, для которого найдется квадратура вида (32), точная для линейного непрерывного функционала L на множестве π_r полиномов, степень которых не превышает r.

Поскольку π_r является ECT-пространством порядка $r+1$, то по теореме 4

$$d(L_\zeta) \le |m| + l - 1 = m_1 + m_2 = 4.$$

Далее рассмотрены случаи, когда данная оценка достигается и не достигается.

1) Если $\zeta = \frac{1}{2}$ - узел квадратуры вида (18), точной для L^* на π_5, то согласно теореме 5 $d(L_\zeta) = 4$. При этом, если квадратура Q вида (32) точна для L_ζ на π_4, то

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{15}}{10},\ x_2 = \frac{5+\sqrt{15}}{10},$$

$$a_1 = -\frac{\sqrt{15}}{36},\ a_2 = \frac{\sqrt{15}}{36}.$$

2) Если $\zeta = \frac{1}{4}$, то $d(L_\zeta) = 3$, причем узлы и коэффициенты квадратуры Q вида (32), точной для L_ζ на π_3, равны

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{51}}{10},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{51}}{10},$$

$$a_1 = \frac{1}{8} - \frac{11\sqrt{51}}{612},\ a_2 = \frac{1}{8} + \frac{11\sqrt{51}}{612}.$$

3) Если $\zeta = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ - узел квадратуры вида (32) точной на π_3 для L^*, то $d(L_\zeta) = 2$, при этом квадратура вида (32), у которой x_1 — произвольное число из промежутка $[0, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ и

$$x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6},\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6},$$

точна для L_ζ на π_2.

4) Если $\zeta = \frac{7}{10}$, то $d(L_\zeta) = 2$. Пологая в (32)

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{3}{10},\ a_1 = -\frac{13}{60},\ a_2 = -\frac{5}{12},$$

получим квадратуру, точную для L_ζ на π_2.

Цитированная литература

1. **Barrar R. B., Loeb H. L.** // SIAM J. Numer. Anal. 1980. V.17, №6. P. 847—882.

2. **Barrow D.** //Math. Comp. 1978. V.32. P. 431—439.

3. **Bojanov B. D., Braess D., Dyn N.** // Math. Comp. 1981. V.36. P. 335—353.

4. **Женсыкбаев А.А.** Сплайны в задачах восстановления. Алматы, 2001.

5. **Жук В.В.** // Математический журнал. 2001. №2. С. 52-58

6. **Жук В.В.** // Вычисл. технологии. Т.7 (совм. выпуск, часть 2). Вестник КазНУ. 2002. №4(32). С. 335-343

7. **Жук В.В.** // Известия МОН РК, НАН РК, Серия физико-математическая. 2002. №5. С. 89-95

8. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., 1976.

Поступила в редакцию 15.03.2003

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 43 – 48*

УДК 681.5

ИССЛЕДОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Р. С. Ивлев

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100 Алматы, ул.Пушкина, 125, ivlevruslan@newmail.ru

Методом функционалов Ляпунова-Красовского получены достаточные условия абсолютной устойчивости линейной интервально-заданной дифференциально-разностной системы с нелинейностью секторного типа.

1. Введение

Предметом исследования настоящей работы является развитие прямого метода Ляпунова исследования абсолютной устойчивости на класс интервально-заданных дифференциально-разностных систем А.И.Лурье с нелинейностью секторного типа. Для случая, когда параметры модели известны точно, исследование абсолютной устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом осуществлено в работах [1, 2]. Для линейной интервально-заданной системы с запаздыванием в работе [3] получены простые в вычислительном плане достаточные условия асимптотической устойчивости с использованием понятия функционалов Ляпунова-Красовского. В данной работе демонстрируется возможность развития полученных в [3] результатов на класс интервально-заданных дифференциально-разностных систем А.И.Лурье с нелинейностью секторного типа.

2. Обозначения и постановка задачи

Условимся в обозначениях. Для обозначения интервальных величин всюду в работе будет использоваться полужирный шрифт, для обозначения неинтервальных — обычный шрифт. Символом нижнего и верхнего подчеркивания будут обозначаться, соответственно, нижняя и верхняя границы интервала. Операции взятия нижней и верхней границ интервалов применительно к матрицам и векторам будут пониматься в поэлементном смысле.

Пусть возмущенное движение исследуемой системы задано в пространстве состояний в виде дифференциально-разностного включения запаздывающего типа, имеющего следующий векторно-матричный вид:

$$\dot{x}(t) \in \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_\tau x(t-\tau) + \mathbf{b}\varphi(\sigma), \qquad x(\xi) = \phi_{t_0\tau}(\xi),\ \xi \in [t_0-\tau; t_0], \tag{1}$$

Keywords: *absolute stability, interval analysis, differential inclusions, direct method of Lyapunov*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D20, 34K20

где $t \in [t_0 - \tau; \infty)$ — независимая переменная (время); $t_0 \in \mathbb{R}$ — начальный момент времени; $\tau \in \mathbb{R}^+$ — запаздывание; $x(t) = (x_i(t))$ — вектор состояний, компонентами которого являются непрерывные на $[t_0 - \tau; \infty)$ функции $x_i(t)$, т.е. $x_i(t) \in C[t_0 - \tau; \infty)$, $1 \le i \le n$; $\mathbf{A}, \mathbf{A}_\tau \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ — постоянные интервальные матрицы, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$; $\mathbf{A}_\tau = (\mathbf{a}_{\tau_{ij}})$, $\mathbf{a}_{\tau_{ij}} = [\underline{\mathbf{a}}_{\tau_{ij}}, \overline{\mathbf{a}}_{\tau_{ij}}]$, $1 \le i, j \le n$; $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов [4], $\mathbb{IR} = \{z \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{z}} \le z \le \overline{\mathbf{z}},\ \underline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}\}$; $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальный вектор размерности $n \times 1$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$, $\mathbf{b}_i = [\underline{\mathbf{b}}_i; \overline{\mathbf{b}}_i]$, $1 \le i \le n$; $\phi_{t_0\tau}(\xi)$ — начальная вектор-функция, компоненты которой принадлежат пространству непрерывных на $[t_0 - \tau; t_0]$ функций; $\varphi(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая ограничениям секторного типа (график функции $\varphi(\sigma)$ расположен в секторе между прямыми $\varphi = 0$ и $\varphi = \mu\sigma$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mu > 0$). Величина $\sigma \in \mathbb{R}$ определяется согласно выражению

$$\sigma = r^T x(t), \tag{2}$$

где $r \in \mathbb{R}^n$ — вектор размерности $n \times 1$.

В формальном виде ограничения секторного типа могут быть записаны в виде

$$0 \le \varphi(\sigma)/\sigma \le \mu, \tag{3}$$

где $\sigma \ne 0$, и при $\sigma = 0$ необходимо $\varphi(0) = 0$. Последнее условие влечет существование тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы дифференциальных включений (1) — (3). Двойное неравенство (3) можно переписать в виде одного неравенства, которое с учетом выражения для σ представимо следующим образом

$$\varphi(\mu\sigma - \varphi) = \mu\varphi r^T x - \varphi^2 = F(x, \varphi) \ge 0. \tag{4}$$

В данной работе автор придерживается нотации, аналогичной [3, 5], в частности, для описания динамической системы в условиях параметрической неопределенности в выражении (1) согласно наметившейся в современных научных работах тенденции используется знак включения в силу многозначности правой части.

Будем предполагать, что пара интервальных матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ стабилизируема, т.е. для любых $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ стабилизируема пара (A, b).

Определение 1. Под решением (1) — (3) будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую при некоторых значениях $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и $b \in \mathbf{b}$ следующей нелинейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + b\varphi(\sigma) \\ \sigma = r^T x(t), \end{cases} \qquad x(\xi) = \phi_{t_0\tau}(\xi),\ \xi \in [t_0 - \tau; t_0]. \tag{5}$$

Определение 2. Будем говорить, что система нелинейных дифференциальных включений (1) — (3) обладает некоторым свойством $\mathcal{P}$, если этим свойством обладает любая система (5) для $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и $b \in \mathbf{b}$.

Задача: требуется определить условия наличия свойства абсолютной устойчивости по Ляпунову положения равновесия $x(t) \equiv 0$ динамической системы (1) — (3) с запаздывающим аргументом и нелинейностью секторного типа (3) в смысле определения 2.

3. Основной результат

Для решения сформулированной задачи в работе используется прямой метод Ляпунова, получивший плодотворное развитие на класс дифференциальных уравнений с запаздыванием в работах Н.Н.Красовского [6]. Успех его идей заключается в использовании функционалов в качестве аналогов функций Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, что позволило получить некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости для указанного класса дифференциальных уравнений. В данной работе по аналогии с [3] получение условий абсолютной устойчивости нелинейной интервально-заданной системы (1) — (3) базируется на применении второй теоремы Н.Н.Красовского об асимптотической устойчивости [6], которую для краткости здесь приводить не будем. Отметим только, что для удовлетворения условиям этой теоремы в данной работе предлагается использовать функционал [1], определенный на отрезках интегральных линий трубок движения нелинейной системы (1) — (3)

$$V\left(x(t+s),\varphi\right)=x^T(t)Hx(t)+\int\limits_{-\tau}^{0}x^T(t+\nu)Dx(t+\nu)d\nu+\theta\int\limits_{0}^{\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma, \tag{6}$$

где $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $H=H^T$ — симметрическая положительно-определенная матрица, $D=\operatorname{diag}\{d_i>0,\ 1\leq i\leq n\}$ — диагональная матрица, $\theta\in\mathbb{R}^+$ — неотрицательное число, $s=-\tau,0$.

Придерживаясь полной аналогии с подходом, предложенным в [3], вычислим первую производную по времени для (6) в силу уравнений (5) для произвольных, но фиксированных $A\in\mathbf{A}$, $A_\tau\in\mathbf{A}_\tau$ и $b\in\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(x(t+s),\varphi)=\dot V(x(t+s),\varphi)=\dot x^T(t)Hx(t)+x^T(t)H\dot x(t)+\\
&\quad+\theta\varphi(\sigma)\dot\sigma+x^T(t)Dx(t)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau)=\\
&\quad=(Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)+b\varphi(\sigma))^THx(t)+x^T(t)H(Ax(t)+Ax(t-\tau)+b\varphi(\sigma))+\\
&\quad+\theta\varphi(\sigma)r^T(Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)+b\varphi(\sigma))+x^T(t)Dx(t)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau)=\\
&\quad=x^T(t)A^THx(t)+x^T(t)HAx(t)+\varphi(\sigma)b^THx(t)+x^T(t)Hb\varphi(\sigma)+\theta\varphi(\sigma)r^TAx(t)+\\
&\quad+x^T(t-\tau)A_\tau^THx(t)+x^T(t)HA_\tau x(t-\tau)+\\
&\quad+\theta\varphi(\sigma)r^TA_\tau x(t-\tau)+x^T(t)Dx(t)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau)+\theta\varphi(\sigma)r^Tb\varphi(\sigma)=\\
&\quad=x^T(t)(A^TH+HA+D)x(t)+x^T(t-\tau)A_\tau^THx(t)+x^T(t)HA_\tau x(t-\tau)+\\
&\quad+\varphi^T(\sigma)\left(b^TH+\frac{\theta}{2}r^TA\right)x(t)+x^T(t)\left(Hb+\frac{\theta}{2}A^Tr\right)\varphi(\sigma)+\\
&\quad+\frac{\theta}{2}\varphi^T(\sigma)r^TA_\tau x(t-\tau)+\frac{\theta}{2}x^T(t-\tau)A_\tau^Tr\varphi(\sigma)+\theta\varphi(\sigma)r^Tb\varphi(\sigma),\ \ s=-\tau,0.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что полученная первая производная по времени является квадратичной формой переменных $x(t)$, $x(t-\tau)$ и $\varphi(\sigma)$. Для определения условий, при которых первая производная функционала, являющаяся квадратичной формой переменных x и φ, будет отрицательной на траекториях движения системы в области неотрицательной определенности другой квадратичной формы тех же переменных, применим как и в [5] S-процедуру. Сущность этой процедуры согласно [7] заключается для рассматриваемого случая в эквивалентности следующих двух утверждений:

1. первая производная $\dot V\left(x(t+s),\varphi\right)$ функционала отрицательна в области пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, выделяемой неравенством (4);

2. существует неотрицательное число $\eta\geq 0$ такое, что форма

$$S\left(x(t+s),\varphi\right)=\dot V\left(x(t+s),\varphi\right)+\eta F\left(x(t),\varphi\right) \tag{7}$$

отрицательно определена при $x\neq 0$ и $\varphi\neq 0$, т.е. $\exists\eta\geq 0:\ S\left(x(t+s),\varphi\right)<0$ при $x\neq 0$ и $\varphi\neq 0$.

Выполнение второго утверждения влечет, очевидно, выполнение первого, проверка выполнимости второго же заметно проще.

В соответствии с описанным приемом применим S-процедуру к нахождению условий абсолютной устойчивости исследуемой системы. Для этого в предположении существования неотрицательного числа η составим форму (7), где первая производная функционала вычисляется при произвольных значениях $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и $b \in \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}
S\left(x(t+s),\varphi\right) &= \dot V\left(x(t+s),\varphi\right) + \eta F\left(x(t),\varphi\right) = \\
&= x^T(t)(A^TH + HA + D)x(t) + x^T(t-\tau)A_\tau^T Hx(t) + x^T(t)HA_\tau x(t-\tau) + \\
&+\varphi^T(\sigma)\left(b^TH + \frac{\theta}{2}r^TA\right)x(t) + x^T(t)\left(Hb + \frac{\theta}{2}A^Tr\right)\varphi(\sigma) + \\
&\frac{\theta}{2}\varphi^T(\sigma)r^TA_\tau x(t-\tau) + \frac{\theta}{2}x^T(t-\tau)A_\tau^T r\varphi(\sigma) + \theta\varphi(\sigma)r^Tb\varphi(\sigma) + \eta\varphi(\sigma)\left(\mu\sigma - \varphi(\sigma)\right) = \\
&= x^T(t)(A^TH + HA + D)x(t) + x^T(t-\tau)A_\tau^T Hx(t) + x^T(t)HA_\tau x(t-\tau) + \\
&+\varphi^T(\sigma)\left(b^TH + \frac{\theta}{2}r^TA + \frac{\eta\mu}{2}r^T\right)x(t) + x^T(t)\left(Hb + \frac{\theta}{2}A^Tr + \frac{\eta\mu}{2}r\right)\varphi(\sigma) + \\
&\frac{\theta}{2}\varphi^T(\sigma)r^TA_\tau x(t-\tau) + \frac{\theta}{2}x^T(t-\tau)A_\tau^T r\varphi(\sigma) + (\theta+\eta)\varphi(\sigma)r^Tb\varphi(\sigma).
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение вектор $y(t+s,\varphi) = (y_i(t+s,\varphi))$, $1 \le i \le 2n+1$

$$y(t+s,\varphi) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \varphi(\sigma) \end{pmatrix}$$

и матрицу $M \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ следующего вида

$$M = \begin{pmatrix} A^TH + HA + D & HA_\tau & Hb + \frac{\theta}{2}A^Tr + \frac{\eta\mu}{2}r \\ A_\tau^T H & -D & \frac{\theta}{2}A_\tau^T r \\ b^TH + \frac{\theta}{2}r^TA + \frac{\eta\mu}{2}r & \frac{\theta}{2}r^TA_\tau & (\theta+\eta)r^Tb \end{pmatrix}.$$

Тогда выражение для S-формы можно переписать в более компактном виде

$$S\left(x(t+s),\varphi\right) = y^T(t+s,\varphi)My(t+s,\varphi).$$

В дальнейшем потребуются следующие базовые определения из интервального анализа.

Определение 3. Интервальную квадратную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{q}_{ij} = [\underline{\mathbf{q}}_{ij};\overline{\mathbf{q}}_{ij}]$, $1 \le i,j \le n$ будем называть положительно-определенной и записывать $\mathbf{Q} \triangleright 0$, если положительно определена любая матрица $Q \in \mathbf{Q}$, т.е. $\forall Q \in \mathbf{Q}$ квадратичная форма $x^TQx > 0$ $\forall x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 4. [8] Множество матриц вида

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = [\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}};\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}] = \left\{Q \in \mathbf{R}^{n\times n} | Q = Q^T, \underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} \le Q \le \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\right\},$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, будем называть симметрической интервальной матрицей и записывать $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})^T$.

Определение 5. Множество квадратных матриц вида

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) = \\
&\quad = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} | (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})(A^TH + HA = -Q)\}
\end{aligned} \tag{8}$$

называется допустимым множеством решений интервального матричного уравнения Ляпунова [3]

$$\mathbf{A}^TH + H\mathbf{A} = -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}. \tag{9}$$

Условия абсолютной устойчивости исследуемой нелинейной интервально-заданной системы дает следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть для заданной интервальной матрицы* $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *и некоторой интервальной симметрической положительно-определенной матрицы* $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ *допустимое множество решений (8) интервального матричного уравнения Ляпунова (9) непусто, т.е.* $\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) \neq 0$, *некоторая симметрическая матрица принадлежит данному множеству* $H^* = (H^*)^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ *и существуют такие неотрицательные числа* $\eta \geq 0$, $\theta \geq 0$ *и* $d_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, *что при заданных интервальной матрице* $\mathbf{A}_\tau \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *и интервальном векторе* $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ *следующая интервальная матрица*

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T H^* + H^*\mathbf{A} + D & H^*\mathbf{A}_\tau & H^*\mathbf{b} + \frac{\theta}{2}\mathbf{A}^T r + \frac{\eta\mu}{2} r \\ \mathbf{A}_\tau^T H^* & -D & \frac{\theta}{2}\mathbf{A}_\tau^T r \\ \mathbf{b}^T H^* + \frac{\theta}{2} r^T \mathbf{A} + \frac{\eta\mu}{2} r^T & \frac{\theta}{2} r^T \mathbf{A}_\tau & (\theta + \eta) r^T \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена. Тогда положение равновесия $x(t) \equiv 0$ *интервально-заданной дифференциально-разностной системы (1) — (3) абсолютно устойчиво в выбранном классе нелинейностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия теоремы выполнены. Положительная определенность симметрической матрицы $H^* \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ влечет асимптотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$. Действительно, из построения множества (8) следует, что для любой матрицы $A \in \mathbf{A}$ существует такая симметрическая матрица $Q^* \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$, что

$$A^T H^* + H^* A = -Q^*.$$

Другими словами, матрица $A^T H^* + H^* A$ является симметрической отрицательно-определенной, что означает в силу хорошо известных результатов асимптотическую устойчивость матрицы A. В свою очередь, это влечет асимптотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$ в силу произвольности выбора $A \in \mathbf{A}$ [3]. Из условия отрицательной определенности интервальной матрицы $\mathbf{M}^*$ следует, что матрица

$$M^* = \begin{pmatrix} A^T H^* + H^* A + D & H^* A_\tau & H^* b + \frac{\theta}{2} A^T r + \frac{\eta\mu}{2} r \\ A_\tau^T H^* & -D & \frac{\theta}{2} A_\tau^T r \\ b^T H^* + \frac{\theta}{2} r^T A + \frac{\eta\mu}{2} r & \frac{\theta}{2} r^T A_\tau & (\theta + \eta) r^T b \end{pmatrix}$$

является отрицательно определенной для произвольных матриц $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и $b \in \mathbf{b}$, поскольку $A^T H^* + H^* A \in -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}, \quad \forall A \in \mathbf{A}$ по условию теоремы. Тогда форма (7) и, следовательно, первая производная по времени функционала в части пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, выделяемой выражением (4), будут отрицательными на траекториях движения системы (5) при произвольных значениях $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и $b \in \mathbf{b}$. Это влечет абсолютную устойчивость исследуемой системы в смысле определения 2. Теорема доказана.

Для успешного применения данной теоремы к исследованию абсолютной устойчивости интервально-заданной дифференциально-разностной системы (1) — (3) требуется осуществить распознавание непустоты допустимого множества решений (8) интервального матричного уравнения Ляпунова (9). Эта задача интервального анализа получила исчерпывающее решение в работах С.П. Шарого [9, 10]. В работе [3] получены некоторые алгебраические соотношения, позволяющие определить принадлежность решения "среднего"матричного уравнения Ляпунова допустимому множеству решений (8). Проверка отрицательной определенности интервальной матрицы $\mathbf{M}^*$ возможна, например, посредством применения алгоритмов, приведенных в [11], либо посредством применения естественного интервального расширения [4] критерия Сильвестра.

4. Заключение

Полученный в работе на основе прямого метода Ляпунова алгебраический критерий позволяет исследовать свойство абсолютной устойчивости нелинейной системы дифференциальных включений с параметрической неопределенностью интервального типа и запаздыванием по вектору состояний и не требует больших вычислительных затрат.

Цитированная литература

1. **Громова П.С., Пелевина А.Ф.** //Дифференц. уравнения. 1977. Т.13, №8. С.1375-1383.
2. **Животовский Л.А.** Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. 1969. №7. С.82-91.
3. **Ивлев Р.С., Соколова С.П.** //Математический журнал. 2002. Т.2, №2. С.71-79.
4. **Шокин Ю.И.** Интервальный анализ. Новосибирск, сиб.отд-ние, 1981.
5. **Байкенова Ж.А., Ивлев Р.С.** //Математический журнал. 2001. Т.1, №2. С.25-31
6. **Красовскй Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
7. **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.
8. **Jansson C.** //Computing 46. Hamburg-Harburg. 1990.
9. **Shary S.P.** //Reliable Computing. 1996. V.2, №1. P.3-33.
10. **Shary S.P.** //Mathematics and Computers in Simulations. 1995. V.39. P. 53-85.
11. **Rohn J.** //IEEE Transactions on Automatic Control. 1996. V. XX, №V.

Поступила в редакцию 20.08.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 49 – 53*

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ УРАВНЕНИИ

А. Игликов, Б.С. Кошкарова

Казахский государственный университет им. Е.А. Букетова
г. Караганда, ул.Университетская, 28, imp@nursat.kz

Многие задачи математической физики и механики сводятся к решению различного рода интегральных уравнений. В большинстве случаев уравнения эти являются нелинейными и их решение требует привлечения методов функционального анализа и рассмотрения их в более широких пространствах.

В круге $K = \{w : |w| < 1\}$, $w = u + iv$, рассмотрим следующее нелинейное уравнение гидродинамического происхождения:

$$\varsigma = S\rho \tag{1}$$

где

$$S\rho(w) = \frac{U\rho}{D\rho + \sqrt{|D\rho|^2 + |U\rho|^2}}\overline{U\rho} + T_1\rho - 2\overline{T_1\rho} - \overline{\Phi_0'(w)},$$

$\Phi_0'(w)$ есть производная от аналитической в K функции

$$\Phi_0(w) = a_1 \ln(1-w) - a_3 \ln(1+w) - a_2 t_0 \ln(1-\bar{t}_0 w) - a_2 \bar{t}_0 \ln(1 - t_0 w). \tag{2}$$

Здесь a_1, a_2, a_3 – действительные положительные постоянные, причем $a_1 + a_3 = 2a_2$, $t_0 = e^{i\gamma}$, $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$. Операторы D, U и T_1 определяются по формулам:

$$\begin{aligned} D\rho \ &= \ -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - \overline{w})} d\xi d\eta + \frac{2}{\pi(w-\overline{w})}\int\limits_w^{\bar{w}}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{1-\bar{t}\zeta} d\xi d\eta d\bar{t} - \\ &- \ \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)(1-\overline{\zeta}w - \overline{\zeta}\overline{w})}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w})} d\xi d\eta + \frac{\overline{\Phi_0(\overline{w})} - \Phi_0(w)}{w - \overline{w}}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$U\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\xi d\eta - \frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)^2} d\xi d\eta = \Pi\rho - \Pi_1\rho, \tag{4}$$

Keywords: *non-linear equation, operator, weighted Hölder space*
2000 Mathematics Subject Classification: 35F20, 35F30, 35L60

$$T_1\rho=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar\zeta w}d\xi d\eta. \tag{5}$$

Разрешимость уравнения $S\rho=\rho$ исследуем в весовом классе Гельдера $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0<\mu<1$, см.([1]), где норма определяется формулой

$$\|\rho\|=\sup_{\substack{w,w_1\in K\\ w\neq w_1}} r^{\mu+1}_{w\cup w_1}\frac{|\rho(w_1)-\rho(w)|}{|w_1-w|^\mu}+\sup_{w\in K}|\rho(w)|r_w, \tag{6}$$

$$r_{w\cup w_1}=\min\{|w-t_*|,|w_1-t_*|\},\ r_w=\min|w-t_*|,\ t_*=\{-1,1,t_0,\bar t_0\}. \tag{7}$$

В работе [2] установлено, что если $\rho\in C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0<\mu<1$, то

$$|\Pi\rho|\le J_0\|\rho\|\le\frac{M_1}{r_w}\|\rho\|,\quad |\Pi_1\rho|\le J_3\|\rho\|\le\frac{M_3}{r_w}\|\rho\|. \tag{8}$$

Здесь M_1 и M_3 – константы, зависящие только от μ.

Тогда для оператора U из (4) имеем

$$|U\rho|\le|\Pi\rho|+|\Pi_1\rho|\le\frac{M_1+M_3}{r_w}\|\rho\|. \tag{9}$$

Поскольку T_1 можно представить в виде

$$T_1\rho=\frac{1}{\overline{w}}\int\limits_0^w\left(-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_K\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)^2}d\xi d\eta\right)dw=\frac{1}{\overline{w}}\int\limits_0^w\Pi_1\rho\,dw,$$

то на основании (8) находим

$$|T_1\rho|\le\frac{1}{|\overline{w}|}\max\left|\int\limits_0^w|\Pi_1\rho|dw\right|\le\frac{M_3}{r_w}\|\rho\|. \tag{10}$$

Перейдем теперь к оценке оператора D, записав его следующим образом:

$$\begin{aligned}
D\rho \ =\ & -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K\frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}d\xi d\eta-\frac{\rho(w)}{\pi}\iint\limits_K\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}-\\
& -\ \frac{1}{\pi}\iint\limits_K\frac{(\rho(\zeta)-\rho(w))(1-\overline{\zeta}w-\overline{\zeta}\overline{w})}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w})}d\xi d\eta-\\
& -\ \frac{\rho(w)}{\pi}\iint\limits_K\frac{1-\overline{\zeta}w-\overline{\zeta}\overline{w}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w})}d\xi d\eta+\frac{2\rho(w)}{w-\overline{w}}\int\limits_w^{\overline{w}}\frac{1}{\pi}\iint\limits_K\frac{d\xi d\eta}{1-\bar t\zeta}d\bar t+\\
& +\ \frac{2}{\pi(w-\overline{w})}\int\limits_w^{\overline{w}}\left(\iint\limits_K\frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{1-\bar t\zeta}d\xi d\eta\right)d\bar t+\frac{\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)}{w-\overline{w}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В случае, когда Γ есть окружность $|\zeta|=1$ и точка w лежит внутри нее, (см.[3])

$$\Phi_\Gamma(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\bar\zeta}{\zeta-w}d\zeta=0.$$

отсюда, воспользовавшись формулой Грина, получим

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}=1.$$

Учитывая, что (см.[4])

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K}\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{\zeta}w}=1,\quad w\in K,$$

имеем

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K}\frac{1-\overline{\zeta}w-\overline{\zeta}\overline{w}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w})}d\xi d\eta=1.$$

В (11) первый и третий интегралы по области K представим в виде сумм интегралов по областям K^+ и K^-, где K^+ и K^- – верхняя и нижняя половинки круга K, соответственно. Поскольку $\forall\zeta\in K^+\quad |\zeta-\overline{w}|\geq|\zeta-w|$ и $\forall\zeta\in K^-\quad |\zeta-\overline{w}|\leq|\zeta-w|$, с учетом полученных равенств, находим

$$|D\rho|\leq(2J_0+6J_3+2M_3)\frac{\|\rho\|}{r_w}+\frac{|\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)|}{|w-\overline{w}|}. \tag{12}$$

Оценим последнее слагаемое. Из (2), имеем

$$\begin{aligned}\frac{|\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)|}{|w-\overline{w}|} &= \frac{\left|\int\limits_{\overline{w}}^{w}\left(\frac{a_1}{1-w}+\frac{a_3}{1+\overline{w}}+\frac{a_2\overline{t}_0}{w-\overline{t}_0}+\frac{a_2t_0}{w-t_0}\right)dw\right|}{|w-\overline{w}|}\leq\\ &\leq \max\left(\frac{a_1}{|1-w|}+\frac{a_3}{|1+\overline{w}|}+\frac{a_2|\overline{t}_0|}{|w-\overline{t}_0|}+\frac{a_2|t_0|}{|w-t_0|}\right)\leq\\ &\leq \frac{a_1+a_3+2a_2}{r_w}=\frac{4a_2}{r_w},\end{aligned} \tag{13}$$

т.к. согласно (7) следует, что $|1-w|\geq r_w$, $|1+w|\geq r_w$, $|w-t_0|\geq r_w$ и $|w-\overline{t}_0|\geq r_w$.

Таким образом, в силу оценки (8) и (12), для оператора D выполняется неравенство

$$|D\rho|\leq\frac{(2M_1+8M_3)\|\rho\|+4a_2}{r_w}. \tag{14}$$

Оценим $\Phi_0'(w)$. Из (2) имеем

$$|\Phi_0'(w)|\leq\frac{a_1}{|1-w|}+\frac{a_3}{|1+\overline{w}|}+\frac{a_2|\overline{t}_0|}{|w-\overline{t}_0|}+\frac{a_2|t_0|}{|w-t_0|}.$$

Отсюда с учетом (13) имеем

$$|\Phi_0'(w)|\leq\frac{4a_2}{r_w}. \tag{15}$$

Таким образом, из (1) на основании (9), (10), (14) и (15) получаем

$$|S\rho|\leq\frac{\frac{|U\rho|}{|D\rho|}}{1+\sqrt{1+\left|\frac{U\rho}{D\rho}\right|^2}}|U\rho|+3|T_1\rho|+|\Phi_0'(w)|\leq$$

$$\leq\left(4a_2+(q(M_1,M_3)\cdot(M_1+M_3)+3M_3)\|\rho\|\right)\frac{1}{r_w},$$

где $q(M_1,M_3)<1$.

Для фиксированных $M_1,\ M_3 > 0$ можно найти такое $\epsilon = \epsilon(M_1, M_3) > 0$, что

$$(q(M_1, M_3) \cdot (M_1 + M_3) + 3M_3)\, \|\rho\| = \alpha < 1, \quad \text{если } \ \|\rho\| < \epsilon(M_1, M_3).$$

Тогда, подчинив a_2 неравенству

$$a_2 \leq \frac{1 - 2\alpha}{4}, \tag{16}$$

получим

$$\|S\rho\| \leq 1 - \alpha. \tag{17}$$

Следовательно, $S: \quad C^{0,\mu}_{-1,0}(K) \ \to \ C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, если a_2 удовлетворяет условию (16).

Пусть $\rho_1,\ \rho_2 \in C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$. Обозначим $B(\rho) = \frac{U\rho}{D\rho}$. Имеем

$$|S\rho_1 - S\rho_2| \leq |U\rho_1 - U\rho_2||A\rho_1| + \frac{|U\rho_1 - U\rho_2||A\rho_2|}{|1 + \sqrt{1 + B^2_{\rho_1}}|} +$$

$$+ \frac{|U\rho_1 - U\rho_2||A\rho_2|(|B\rho_1| + |B\rho_2|)}{|1 + \sqrt{1 + B^2_{\rho_1}}||B\rho_1\sqrt{1 + B^2_{\rho_2}} + B\rho_2\sqrt{1 + B^2_{\rho_1}}|} + |D\rho_1 - D\rho_2)||A\rho_2| \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{|B\rho_2|}{|1 + \sqrt{1 + B^2_{\rho_1}}|} + \frac{|B\rho_1| + |B\rho_2|}{|1 + \sqrt{1 + B^2_{\rho_1}}||B\rho_1\sqrt{1 + B^2_{\rho_2}} + B\rho_2\sqrt{1 + B^2_{\rho_1}}|} \right) +$$

$$+ |T_1\rho_1 - T_1\rho_2|.$$

Поскольку операторы U, D и T_1 однородны относительно ρ и $\frac{1}{1 + \sqrt{1 + B\rho^2}}$— ограниченная функция, то, используя оценки (9), (10), (14), находим

$$|S\rho_1 - S\rho_2| \leq \frac{q_1(M_1, M_3)}{r_w} \|\rho_1 - \rho_2\|, \tag{18}$$

где

$$q_1(M_1, M_3) = 5q(M_1, M_3) + M_3.$$

При $\|\rho_1 - \rho_2\| < \epsilon(M_1, M_3)$ получим, что

$$\|S\rho_1 - S\rho_2\| < \alpha < 1.$$

Пусть θ—нулевой оператор. Тогда

$$S\theta = -\overline{\Phi'_0(w)}. \tag{19}$$

Используя оценку (15) и условие (16), для $S\theta$ получим неравенство

$$\|S\theta\| \leq 1 - 2\alpha.$$

При этих условиях согласно обобщенному принципу сжатых отображений (см. [5]) уравнение $\rho - S\rho = 0$ имеет единственное решение $\rho \in C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, принадлежащее единичному шару.

Итак, нами доказана следующая теорема

Т е о р е м а . *При достаточно малом a_2, удовлетворяющем неравенству* (16), *СИУ имеет единственное решение, которое может быть найдено как предел последовательности*

$$\rho_{n+1} = S\rho_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем в качестве $\rho_0(w)$ можно выбрать любой элемент из шара $\|\rho\| < 1$.

Цитированная литература

1. **Волков Е.А.** // Труды МИАН СССР. 1972. Т.117. С.75-99.

2. **Кошкарова Б.С.**//Вестник КарГУ. 2002. №1(25), вып.1. С.60-69.

3. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции. М., 1988.

4. **Игликов А.** Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. Алматы, 1995.

5. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М., 1965.

Поступила в редакцию 28.06.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 54 – 61*

УДК 510.67

БИНАРНОСТЬ $\aleph_0$-КАТЕГОРИЧНЫХ ПОЧТИ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ РАНГА ВЫПУКЛОСТИ 1

Б.Ш. Кулпешов

Институт проблем информатики и управления МОН РК
Алматы, ул.Пушкина, 125, kbsh@ipic.kz

Пусть L — счетный язык первого порядка. Повсюду в этой статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется в этих структурах как линейный порядок. Для произвольных подмножеств A, B структуры M мы пишем $A < B$, если $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Если $A \subset M$ и $x \in M$, то мы пишем $A < x$, если $A < \{x\}$. Для любого подмножества A структуры M $A^+ := = \{b \in M \mid A < b\}$ и $A^- := \{b \in M \mid b < A\}$. Для произвольного полного 1-типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M.

Открытый интервал I в структуре M есть параметрически определимое подмножество структуры M вида $I = \{c \in M : M \models a < c < b\}$ для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$, где $a < b$. Аналогично мы можем определить *замкнутые, полуоткрытые, полузамкнутые* и т.п. интервалы в M, так, что например, произвольная точка структуры M является сама (тривиальным) замкнутым интервалом. Подмножество A структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Данная статья касается понятия *слабой 0-минимальности*, впервые введенного М. Дикманном в [2]. *Слабо 0-минимальная структура* есть линейно упорядоченная структура $M = = \langle M, =, <, ...\rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Напомним, что такая структура M называется *0-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов в M. Таким образом, слабая 0-минимальность является обобщением 0-минимальности. Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [3]. В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов. Очевидно, что 0-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1. $\aleph_0$-категоричные слабо 0-минимальные теории были исследованы в [4] с использованием понятий ультраметрики и C-отношения. Здесь мы исследуем $\aleph_0$-категоричные слабо 0-минимальные теории ранга выпуклости 1 с помощью понятий слабой и почти ортогональности 1-типов, введенных Б.С. Байжановым в [5], [6]. Слабо 0-минимальная теория называется

Keywords: *Model Theory; Weakly 0-minimal, $\aleph_0$-categorical; Orthogonality of types*
2000 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C35, 03C64

почти 0-минимальной, если понятия слабой и почти ортогональности совпадают. Мы представляем описание $\aleph_0$-категоричных почти 0-минимальных теорий ранга выпуклости 1 (Теорема 2), из которого следует их бинарность. Заметим, что существуют $\aleph_0$-категоричные слабо 0-минимальные теории ранга выпуклости 1, которые не являются почти 0-минимальными (Примеры 1 и 2).

Самоопределимые множества рассматривались в [7] для исследования вопросов существования и единственности простых моделей над подмножествами C-минимальных структур. Здесь мы представляем критерий того, чтобы каждое самоопределимое подмножество $\aleph_0$-категоричной слабо 0-минимальной структуры ранга выпуклости 1 являлось хорошим (Теорема 3), из которого следует, что при выполнении последнего условия данная структура является простой над любым самоопределимым подмножеством.

А. Пиллэй и Ч. Стейнхорн доказали плотность изолированных типов произвольной 0-минимальной теории [1], из чего следует существование конструктивной над произвольным множеством модели. В общем случае даже для $\aleph_0$- категоричной слабо 0-минимальной теории ранга выпуклости 1 это не выполняется (Пример 1). Здесь мы доказываем плотность изолированных типов для произвольной $\aleph_0$-категоричной почти 0-минимальной теории ранга выпуклости 1 (Предложение 1).

В следующих определениях M — слабо 0-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, $M - |A|^+$ — насыщена, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические.

Определение 1. [6] Будем говорить, что тип p является *неодиночным*, если существуют A-определимая формула $H(x,y)$ и $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \in p(M)$ такие, что $H(M,\alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < H(M,\alpha) < \gamma_2$.

Теорема 1. [8] *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) T имеет ранг выпуклости 1.

(2) Для любой модели $M \models T$ для любого $A \subseteq M$ каждый неалгебраический тип $p \in S_1(A)$ является одиночным.

(3) Для любой модели $M \models T$ для любого $A \subseteq M$ для любого неалгебраического типа $p \in$ $\in S_1(A)$ $p(M)$ неразличимо над A.

Определение 2. Будем говорить, что тип p не является *слабо ортогональным* типу $q (p \not\perp^w q)$, если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Лемма 1. ([6], Следствие 34(iii)) *$\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Определение 3. [5] Будем говорить, что тип p не является *почти ортогональным* типу $q (p \not\perp^w q)$, если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $H(M,\alpha) \neq \emptyset$ и $\beta_1 < H(M,\alpha) < \beta_2$.

Факт 1. *$p \not\perp^a q \Rightarrow p \not\perp^w q$.*

Определение 4. [5] Будем говорить, что слабо 0-минимальная теория T является *почти 0-минимальной*, если для любой модели $M \models T$, для любого $A \subseteq M$ и для любых неалгебраических типов $p, q \in S_1(A)$ $\quad p \perp^a q \Leftrightarrow p \perp^w q$.

Факт 2. *Любая 0-минимальная теория является почти 0-минимальной.*

Пример 1. Пусть $M = \langle M, <, =, U_1^1, U_2^1, R^2 \rangle$, где $\langle M, < \rangle$ имеет порядковый тип Q. Универсум M есть непересекающееся объединение U_1 и U_2 с условием $a < b$ всякий раз, когда $a \in U_1, b \in U_2$ и каждый предикат U_i не имеет концевых точек в M. Чтобы определить R, отождествим U_i с Q для каждого $i \leq 2$. Для любых $a \in U_1$ и $b \in U_2$ имеем $R(a,b) \Leftrightarrow b < a + \sqrt{2}$.

Очевидно, что $Th(M)$ допускает элиминацию кванторов. Можно доказать, что $Th(M)$ — слабо 0-минимальная теория. Пусть $p = \{U_1\}$, $q = \{U_2\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset), p \perp^a q$, но $p \not\perp^w q$, т.е. $Th(M)$ не является почти 0-минимальной.

Лемма 2. *Пусть M — линейно упорядоченная структура, $Th(M)$ — $\aleph_0$-категорична, $A \subseteq M, M- \mid A \mid^+$ — насыщена, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда существует не более одной A-определимой биекции $p(M)$ на $q(M)$.*

Доказательство. Допустим противное. Предположим, что существует по крайней мере две различные A-определимые биекции f и g, отображающие $p(M)$ на $q(M)$. На самом деле f является $\bar{a}_1$-определимой, а g является $\bar{a}_2$-определимой для некоторых $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A$. Тогда для некоторого $\alpha \in p(M)$ мы имеем, что $dcl(\{\alpha, \bar{a}_1, \bar{a}_2\})$ является бесконечным, что противоречит $\aleph_0$-категоричности $Th(M)$.

Лемма 3. ([3], Следствие 5.5) Пусть T — слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1. *Тогда T имеет Принцип Замены для алгебраического замыкания.*

Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\emptyset$- определимо, $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, отбрасывающая последнюю координату, $Z := \pi(Y)$ и для $\bar{a} \in Z$ $Y_{\bar{a}} = \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на M^n следующим образом: $M^n \setminus Z$ является одним $\sim$-классом, и для $\bar{a}$, $\bar{b} \in \in Z \bar{a} \sim \bar{b}$ тогда и только тогда, когда $supY_{\bar{a}} = supY_{\bar{b}}$. Пусть $\bar{Z} := Z/\sim$ и для каждого $\bar{x}$ пусть $[\bar{x}]$ обозначает $\sim$ - класс кортежа $\bar{x}$. Существует естественный $\emptyset$-определимый линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$, определенный следующим образом: если $\bar{a} \not\in Z$, то $[\bar{a}] < x$ для всех $x \in M$; если $\bar{a} \in Z$ и $x \in M$, то $[\bar{a}] < x$ тогда и только тогда, когда $w < x$ для любого $w \in Y_{\bar{a}}$. Ясно, что если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, поэтому мы получаем линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$. Мы называем такое множество $\bar{Z}$ *сортом* в $\bar{M}$ (в данном случае $\emptyset$ - определимым сортом), где через $\bar{M}$ обозначается объединение всех сортов. Аналогично мы можем получить сорт $\bar{M}$, рассматривая инфинимумы вместо супремумов.

Факт 3. *Пусть T — слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M, p \in \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая функция в определимый сорт, область определения которой содержит $p(M)$, является монотонной или константой на $p(M)$.*

Лемма 4. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Предположим, что существует $b \in p_1(M)$ такой, что $dcl(A, b) \cap p_2(M) \neq \emptyset$. Тогда существует единственная A-определимая биекция $f : p_1(M) \to p_2(M)$ такая, что f является монотонной.*

Доказательство. По условию леммы существует $c \in p_2(M)$ такой, что $c \in dcl(A, b)$. По Лемме 3 $b \in dcl(A, c)$. Тогда существует A-определимая формула $\phi(x, y)$ такая, что

$$M \models \phi(c, b) \wedge \exists! x \phi(x, b) \wedge \exists! y \phi(c, y).$$

Обозначим через f A-определимую функцию ($f(b) = c$), следующим образом:

$$f(y) = x \Leftrightarrow \phi(x, y).$$

Ясно, что $f : p_1(M) \to p_2(M)$ является биекцией. По факту 3 f должна быть монотонной или константой на $p_1(M)$. Если бы f была константой, то область значений функции f была бы точкой $p_2(M)$, определимой над A. Следовательно, f должна быть монотонной. Из Леммы 2 следует единственность такой биекции.

Лемма 5. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $M- \mid A \mid^+$* — насыщена, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические. *Предположим, что существует $b \in p_1(M)$ такой, что $dcl(A, b) \cap p_2(M) = \emptyset$. Тогда не существует A-определимой формулы $\Theta(x, y)$ такой, что $\Theta(M, b)$ выпукло и для некоторых $c_1, c_2 \in p_2(M)$ выполнены неравенства: $c_1 < \Theta(M, b) < c_2$.*

Доказательство. Допустим противное. Предположим, что существует A-определимая формула $\Theta(x, y)$ такая, что $\Theta(M, b)$ выпукло и существуют $c_1, c_2 \in p_2(M)$, $c_1 < \Theta(M, b) < c_2$. Так как $dcl(A, b) \cap p_2(M) = \emptyset$, то $\Theta(M, b)$ бесконечно. Рассмотрим произвольный элемент $c \in \in \Theta(M, b)$ и $g \in Aut_A(M)$ такой, что $g(c_1) = c_2$. Имеем:

$$\Theta(M, g^{-1}(b)) < g^{-1}(c_2) = c_1 < \Theta(M, b) < c_2 = g(c_1) < \Theta(M, g(b)).$$

Так как $c \in \Theta(M,b)$, то $\Theta(M,g^{-1}(b)) < c < \Theta(M,g(b))$, т.е. $g^{-1}(b), g(b) \not\in \Theta(c,M)$. Предположим, что $g(b) < b$. Тогда $b < g^{-1}(b)$ и, следовательно, $g(b) < \Theta(c,M) < g^{-1}(b)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$H(c,x) := \exists y[\Theta(c,y) \wedge \Theta(x,y)].$$

Ясно, что $H(M,c) \subseteq p_2(M)$. Покажем, что существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in p_2(M)$ такие, что $\gamma_1 < H(M,c) < \gamma_2$. Пусть $D(x) := \exists y\ \Theta(y,x)$, $B := D(M)$. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на M следующим образом: для любых $a_1, a_2 \in B$, $a_1 \sim a_2$ тогда и только тогда, когда $sup\ \Theta(M,a_1) = = sup\ \Theta(M,a_2)$. Пусть $\bar{B} := B/\sim$.
Определим функцию $f : M \to \bar{B}$ следующим образом: $f(x) := sup\ \Theta(M,x)$. По факту 3 f должна быть монотонной или константой на $p_1(M)$. Так как существуют $c_1, c_2 \in p_2(M)$ такие, что $c_1 < f(b) < c_2$, то f не может быть константой. Если f является строго монотонно возрастающей, то $f(g^{-1}(b)) > f(d)$ для любого $d \in \Theta(c,M)$. Если f является строго монотонно убывающей, то $f(g(b)) > f(d)$ для любого $d \in \Theta(c,M)$. Таким образом, существует элемент $\gamma_2 \in p_2(M)$ такой, что $H(M,c) < \gamma_2$. Аналогично рассматривая $\mu(x) := inf\ \Theta(M,x)$, можно показать, что существует $\gamma_1 \in p_2(M)$, такой, что $\gamma_1 < H(M,c)$. Получаем противоречие одиночности типа p_2.

Следствие 1. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M, M-\mid A\mid^+$—насыщена, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) $p_1 \not\perp^a p_2$.
(2) Существует элемент $\alpha \in p(M)$ такой, что $dcl(\{\alpha\}) \cap p_2(M) \neq \emptyset$
(3)Существует единственная A-определимая монотонная биекция $f : p_1(M) \to p_2(M)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как $p_1 \not\perp^a p_2$, то существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p_1(M)$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in p_2(M)$ с условиями $H(M,\alpha)\setminus\{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < H(M,\alpha) < \gamma_2$. Если для любого $\alpha \in p_1(M)$ $dcl(A \cup \{\alpha\}) \cap p_2(M) = \emptyset$, то мы имеем противоречие с Леммой 5.
(2) $\Rightarrow$ (3), в силу Леммы 4.
(3) $\Rightarrow$ (1), очевидно.

Определение 5. Пусть $A, B_1, ..., B_s \subseteq M$, где M — линейно упорядоченная структура.

1. Будем говорить, что $\{B_1, ..., B_s\}$ является *слабо ортогональным над* A, если каждый s-кортеж $\langle a_1, ..., a_s\rangle \in B_1 \times ... \times B_s$ удовлетворяет одному и тому же типу над A.

2. Будем говорить, что $\{B_1, ..., B_s\}$ является *ортогональным над* A, если для любой последовательности $(n_1, ..., n_s) \in \omega^s$ каждый правильно упорядоченный $(n_1 + ... + n_s)$-кортеж

$$\langle a_1^1, a_2^1, ..., a_1^{n_1}; ...; a_s^1, a_s^2, ..., a^{n_s}\rangle \in (B_1)^{n_1} \times ... \times (B_s)^{n_s}$$

удовлетворяет одному и тому же типу над A.

Лемма 6. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $M-\mid A\mid^+$ —насыщена, $p_1, p_2, ..., p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические. Предположим, что $\{p_1(M), ..., p_s(M)\}$ слабо ортогонально над A. Тогда оно является ортогональным над A.*
Доказательство Леммы 6 аналогично доказательству Леммы 6.6 [1].

Следствие 2. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$. Тогда для любых неалгебраических типов $p, q \in S_1(A)$ имеем*

$$p \perp^w q \Leftrightarrow \{p(M), q(M)\} \text{ ортогонально над } A.$$

Ананд Пиллэй и Чарльз Стейнхорн доказали следующую лемму:

Лемма 7. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная 0-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M, A$ конечно, $p_1, p_2, ..., p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1(M), ..., p_s(M)\}$ является ортогональным над A.*

Заметим, что даже в случае $\aleph_0$ - категоричной слабо 0-минимальной теории ранга выпуклости 1 в общем случае это не имеет места.

П р и м е р 2. Пусть $M = \langle M, <, =, U_1^1, U_2^1, U_3^1, R^3\rangle$, где $\langle M, <\rangle$ имеет порядковый тип Q. Универсум M есть непересекающееся объединение U_1, U_2 и U_3 с условием $a < b < c$ всякий раз, когда $a \in U_1, b \in U_2, c \in U_3$ и каждый предикат U_i не имеет концевых точек в M. Чтобы определить R, отождествим U_i с Q для каждого $i \leq 3$. Для любых $a \in U_1, b \in U_2$ и $c \in U_3$ мы имеем $R(a, b, c) \Leftrightarrow c < a + b + \sqrt{2}$.

Очевидно, что $Th(M)$ допускает элиминацию кванторов. Можно доказать, что $Th(M)$ — $\aleph_0$-категоричная 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, которая не является почти 0-минимальной. Введем следующие обозначения: $p_1 := \{U_1\}$, $p_2 := \{U_2\}$ и $p_3 := \{U_3\}$. Очевидно, что $p_1, p_2, p_3 \in S_1(\emptyset)$ и p_1, p_2, p_3 — неалгебраические, попарно слабо ортогональные, однако $\{p_1(M), p_2(M), p_3(M)\}$ не является ортогональным над $\emptyset$.

Л е м м а 8. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда для любых $a_1 \in p_1(M)$ и $a_2 \in p_2(M)$ $dcl(A \cup \{a_1, a_2\}) \cap p_3(M) = \emptyset$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное: предположим, что существуют $a_1 \in p_1(M)$, $a_2 \in p_2(M)$ и $b \in p_3(M)$, такие, что $b \in dcl(A \cup \{a_1, a_2\})$. Так как p_1, p_2 и p_3 являются попарно слабо ортогональными, то $b \not\in dcl(A \cup \{a_1\})$ и $b \not\in dcl(A \cup \{a_2\})$. По Лемме 3 $a_1 \in dcl(A \cup \{a_2, b\})$ и $a_2 \in dcl(A \cup \{a_1, b\})$. Тогда существует A-определимая формула $\phi(x_1, x_2, x_3)$ такая, что

$$M \models \phi(a_1, a_2, b) \wedge \exists! x_1 \phi(x_1, a_2, b) \wedge \exists! x_2 \phi(a_1, x_2, b) \wedge \exists! x_3 \phi(a_1, a_2, x_3)$$

Определим функцию f в M следующим образом: $f(x_1, x_2) = x_3 \Leftrightarrow \phi(x_1, x_2, x_3)$. Дальнейшее доказательство такое же, как в Лемме 6.9 из [1] (с.591, начиная со строки 12), если мы рассматриваем $p_i(M)$ вместо компоненты I_i.

Л е м м а 9. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная почти 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2, ..., p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1(M), ..., p_s(M)\}$ является ортогональным над A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно Лемме 6 покажем, что множество $\{p_1(M), ..., p_s(M)$ является слабо ортогональным над A. Доказательство проводим индукцией по $s \geq 2$. При $s = 2$ — это есть Следствие 2. Полагаем, что Лемма справедлива для множеств из s компонент. Пусть множество состоит из $s + 1$ компоненты, $\{p_1(M), ..., p_{s+1}(M)\}$. Допустим противное. Предположим, что $\{p_1(M), ..., p_{s+1}(M)\}$ не является слабо ортогональным. Тогда существуют $r \leq s + 1$ и $a_1 \in p_1(M), ..., a_{r-1} \in p_{r-1}(M)$, $a_{r+1}(M) \in p_{r+1}(M), ..., a_{s+1} \in p_{s+1}(M)$ p_r $/\in$ $\in S_1(A \cup \{a_1, ..., a_{r-1}, a_{r+1}, ..., s_{s+1}\})$. Не умаляя общности, предположим, что $r = 1$, т.е. $p_1 \not\in$ $\in S_1(A \cup \{a_2, ..., a_{s+1}\})$. По индукционному предположению $p_1, p_2 \in S_1(A \cup \{a_3, ..., a_{s+1}\})$. Тогда $p_1 \not\perp^w p_2$ как типы над $A \cup \{a_3, ..., a_{s+1}\}$. В силу почти о-минимальности $p_1 \not\perp^a p_2$ и, следовательно, в силу Следствия 1 существует $b_2 \in p_2(M)$ такой, что $dcl(A \cup \{b_2, a_3, ... a_{s+1}\} \cap p_1(M) \neq \emptyset$. По индукционному предположению $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A \cup \{a_4, ..., a_{s+1}\})$ и p_1, p_2, p_3 являются попарно слабо ортогональными как типы над $A \cup \{a_4, ..., a_{s+1}\}$. Это противоречит Лемме 8.

Т е о р е м а 2. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная почти 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$ Тогда существуют*

(i) конечное множество $C = \{c_0, ..., c_n\} \subseteq M(M \cup \{-\infty, +\infty\}$ если M не имеет первого или последнего элементов, состоящее из всех $\emptyset$ - определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty, +\infty$), такое, что $M \models \neg(\exists x)\ c_{j-1} < x < c_j$, либо $I_j = \{x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\}$ — плотный линейный порядок без концевых точек и существуют $k_j \in \in \omega$ и $p_1^j, ..., p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$ такие, что $I_j = \cup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;

(ii) *отношение эквивалентности $E \subseteq (\{s : 1 \leq s \leq k\})^2$, где $\{p_s | s \leq k \leq \omega\}$ — произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\emptyset$ такое, что для каждой пары $(i, j) \in E$ существует единственная $\emptyset$-определимая монотонная биекция $f_{i,j} : U_i \to U_j$ такая, что $f_{i,i} = id_{U_i}$* и *$f_{j,k} \circ f_{j,i} = f_{i,k}$ для любых (i, j), $(j, k) \in E$ такая, что T допускает элиминацию кванторов относительно сигнатуры $\{=, <\} \cup \{\underline{c}_i : i \leq n\} \cup \{\underline{U}_s : s \leq k\} \cup \{\underline{f}_{i,j} : (i, j) \in E\}$ где*

$\underline{c}_i$ интерпретируется в M элементом c_i, $\underline{U}_s$ — множеством $p_s(M)$, $\underline{f}_{i,j}$ — функцией $f_{i,j}$ для $(i,j)\in E$.
Кроме того, любому упорядочению с различными элементами, как в (i) и любым подходящим отношением эквивалентности E, как в (ii) соответствует $\aleph_0$-категоричная почти 0-минимальная теория ранга выпуклости 1 как выше.

Доказательство. (i) Пусть $C=\{c\in M : c$ является $\emptyset$-определимым в $M\}$. В силу $\aleph_0$-категоричности T C должно быть конечным. Пусть $C(\cup\{-\infty,+\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов) перечислено как $\{c_0,...,c_n\}$. Далее предположим, что $I_j=\{x\in \in M : M\models c_{j-1}<x<c_j\}\neq\emptyset$. Тогда I_j должно быть плотным без концевых точек. Если I_j является полным над $\emptyset$, тогда существует $p^j\in S_1(\emptyset)$ такой, что $I_j=p^j(M)$, т.е. $k_j=1$. Если I_j не является полным над $\emptyset$, тогда в силу $\aleph_0$-категоричности существуют $k_j\in\omega$ и $p^j_1,...,p^j_{k_j}\in S_1(\emptyset)$ такие, что $I_j=\cup_{s=1}^{k_j}p^j_s(M)$.
(ii) Пусть $\{p_s|s\leq k\leq\omega\}$ — перечисление 1-типов над $\emptyset$ и пусть $E=\{(i,j): p_i\not\perp^w p_j, 1\leq i,j\leq k\}$. Согласно Лемме 1 E является отношением эквивалентности, а Лемма 4 дает единственность и композиционные утверждения о биекциях в (ii). Остается только проверить, что T допускает утверждаемую элиминацию кванторов. Мы докажем, что полный тип любого m-кортежа $(a_1,...,a_m)$ элементов из M определяется формулой Ψ, состоящей из конъюнкции всех предложений и отрицательных предложений формул вида $x=y$, $x<y$, $\underline{c}_i<x$, $x<\underline{c}_i$, $\underline{U}_s(x)$, $y=\underline{f}_{i,j}(x)$, $y<\underline{f}_{i,j}(x)$ и $\underline{f}_{i,j}(x)<y$, которые имеют место на координатах кортежа $(a_1,...,a_m)$. Дальнейшее доказательство такое же, как в Теореме 6.1 из [1] (с.592) с использованием Теоремы 1 и Леммы 9 вместо Лемм 6.5 и 6.9 из [1], соответственно.

Как видно из последней теоремы, почти 0-минимальные теории ранга выпуклости 1 не отличаются существенно от 0-минимальных теорий в $\aleph_0$-категоричном контексте, т.е. являются "почти"0-минимальными.

Следствие 3. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная почти 0-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда T бинарна.*

Определение 6. [7] Пусть $A\subseteq M$, где M — произвольная структура. Множество A — называется *самоопределимым,* если оно является определимым в M при помощи параметров, являющихся элементами множества A.

Определение 7. [7] Пусть M — $\aleph_0$-категоричная структура, $A\subseteq M$ — самоопределимо. Множество A называется *хорошим,* если для любого $n<\omega$ каждый n-тип над A, реализуемый в M, является изолированным.

Ниже мы представляем критерий того, чтобы любое самоопределимое подмножество $\aleph_0$-категоричной слабо 0-минимальной структуры ранга выпуклости 1 являлось хорошим.

Теорема 3. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная слабо 0-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда следующие условия эквивалентны: (1) T — почти 0-минимальна.*
(2) Для любой модели M теории T каждое самоопределимое подмножество $A\subseteq M$ является хорошим.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как A самоопределимо, то существуют конечное $A_1\subseteq A$ и A_1-определимая формула $\phi(x)$ такие, что $A=\phi(M)$. В силу $\aleph_0$-категоричности T $M= =dcl(A_1)\cup\bigcup_{i=1}^k p_i(M)$, где $p_i\in S_1(A_1)$ является неалгебраическим для каждого $i\leq k$. Не умаляя общности, можем считать, что $dcl(A_1)\subseteq A$. Пусть для определенности $p_i(M)\subseteq A$ для любого $1\leq i\leq s$ и $p_j(M)\cap A=\emptyset$ для любого $s+1\leq j\leq k$. В силу бинарности нам достаточно показать, что любой 2-тип над A, реализуемый в M, является изолированным. Возьмем произвольный кортеж $\langle a_1,a_2\rangle\in(M\setminus A)^2$, причем $a_1<a_2$. Возможны следующие случаи:
(a) $a_1,a_2\in p_j(M)$ для некоторого $s+1\leq j\leq k$ и существует $i\leq s$ что $p_i\not\perp^w p_j$.
(b) $a_1,a_2\in p_j(M)$ для некоторого $s+1\leq j\leq k$ и для любого $i\leq s$ $p_i\perp^w p_j$.
(c) $a_1\in p_j(M)$, $a_2\in p_r(M)$ для некоторых $s+1\leq j$, $r\leq kp_j\perp^w p_r$ и существует $i\leq s$ что $p_i\not\perp^w p_j$.
(d) $a_1\in p_j(M)$, $a_2\in p_r(M)$ для некоторых $s+1\leq j$, $r\leq k$, $p_j\perp^w p_r$ и для любого $i\leq s$ $p_i\perp^w p_j$ и $p_i\perp^w p_r$.

(e) $a_1 \in p_j(M)$, $a_2 \in p_r(M)$ для некоторых $s+1 \le j$, $r \le k$, $p_j \not\perp^w p_r$ и существует $i \le s$ что $p_i \not\perp^w p_j$.
(f) $a_1 \in p_j(M)$, $a_2 \in p_r(M)$ для некоторых $s+1 \le j$, $r \le k$, $p_j \not\perp^w p_r$ и для любого $i \le s$ $p_i \perp^w p_j$.

(a) Так как $p_i \not\perp^w p_j$, то существует определимая монотонная биекция $f : p_i(M) \to p_j(M)$. Тогда существуют $b_1, b_2 \in p_i(M)$ такие, что $f(b_1) = a_1$, $f(b_2) = a_2$. Очевидно, что формула $f(b_1) = x_1 \wedge f(b_2) = x$ изолирует тип кортежа $\langle a_1, a_2 \rangle$ над A.

(b) Пусть формула $U_j(x)$ изолирует тип p_i. Тогда формула $U_j(x) \wedge U_j(x_2) \wedge x_1 < x_2$ изолирует тип кортежа $\langle a_1, a_2 \rangle$ над A.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что T не почти 0-минимальна. Тогда существуют конечное множество $A \subseteq M$, неалгебраические типы $p_1, p_2 \in S_1(A)$ такие, что $p_1 \not\perp^w p_2$, но $p_1 \perp^a p_2$. Пусть $A_1 := = dcl(A) \cup p_1(M)$. Очевидно, что A_1 самоопределимо. Возьмем произвольный $b \in p_2(M)$. Тогда тип $tp(b/A_1)$ — неизолированный.

Следствие 4. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная 0-минимальная теория. Тогда для любой модели M теории T каждое самоопределимое подмножество $A \subseteq M$ является хорошим.*

Заметим, что в формулировке Теоремы 3 условие "Теория имеет ранг выпуклости 1"является существенным. Действительно, рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Пусть $M = \langle M, <, =, U_1^1, U_2^1, E^2, R^2 \rangle$, где $\langle M, < \rangle$, имеет порядковый тип Q. Универсум M есть непересекающееся объединение U_1 и U_2, такое, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in U_1, b \in U_2$, и каждый предикат U_i не имеет концевых точек в M. E является отношением эквивалентности, разбивающем $U_1(M)$ на бесконечные выпуклые классы так, что индуцированный на E-классах порядок является плотным порядком без концевых точек. Чтобы определить R, отождествим U_i с Q для каждого $i \le 2$, и для любых $a \in U_1$ и $b \in U_2$ $R(a, b) \Leftrightarrow b < a + \sqrt{2}$.

Нетрудно доказать, что теория $Th(M)$ допускает элиминацию кванторов и является $\aleph_0$-категоричной почти 0-минимальной теорией ранга выпуклости 2. Действительно, пусть $A := = U_1(M)$. Очевидно, что A самоопределимо. Возьмем произвольный $b \in U_2(M)$. Тогда тип $tp(b/A)$ не является изолированным.

Предложение 1. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная почти 0-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$. Тогда изолированные типы теории $Th(M, a)_{a \in A}$ образуют плотное множество.*

Доказательство. Если A конечно, то предложение очевидно в силу $\aleph_0$-категоричности T. Предположим, что A бесконечно. Рассмотрим произвольную формулу $\phi(x, \bar{a}), \bar{a} \in A$. Предположим, что $\phi(M, \bar{a})$ не содержит элементов из $dcl(A)$ (иначе определение любого из этих элементов даст нам полную над A формулу). В силу слабой 0-минимальности $\phi(M, \bar{a})$ есть объединение конечного числа $\bar{a}$-определимых выпуклых открытых множеств. Пусть $\phi_1(x, \bar{a})$ определяет крайнее левое $\bar{a}$-определимое выпуклое открытое множество, содержащееся в $\phi(M, \bar{a})$. В силу $\aleph_0$-категоричности T существует лишь конечное число $\emptyset$-определимых выпуклых открытых множеств $\{U_i : i \le k\}$. Очевидно, что существует $i \le k$, что $\phi_1(M, \bar{a}) \cap U_i \ne \emptyset$. Тогда формула $\phi_1(x, \bar{a}) \cap U_i(x)$ определяет полную над A формулу. Если это не так, тогда существует формула $\psi(x, \bar{b}), \bar{b} \in A$ такая, что

$$M \models \exists x[\phi_1(x, \bar{a}) \wedge U_i(x) \wedge \psi(x, \bar{b})] \wedge \exists x[\phi_1(x, \bar{a}) \wedge U_i(x) \wedge \neg\psi(x, \bar{b})].$$

В силу Теоремы 2 теория T допускает элиминацию кванторов относительно сигнатуры

$$\{=, <\} \cup \{c_i : i \le n\} \cup \{U_s : s \le k\} \cup \{f_{i,j} : (i, j) \in E\},$$

так что существует граничная точка формулы $\psi(x, \bar{b})$, которая принадлежит $\phi_1(M, \bar{a})$ и которая очевидно, содержится в $dcl(A)$, что противоречит допущенному предположению.

Следствие 5. *Пусть T — $\aleph_0$-категоричная почти 0-минимальная теория ранга выпуклости 1. Тогда для любой модели M теории T и для любого подмножества $A \subseteq M$ существует модель N теории T, которая является конструктивной над A.*

Цитированная литература

1. **A., Pillay Ch., Steinhorn** // Transactions of The American Mathematical Society. 1986. 295. P. 565-592.

2. **Dickmann M. A.** Elimination of quantifiers for ordered valuation rings. // Proceedings of the 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris. Berlin, 1985.

3. **Kulpeshov B. Sh.** // The Journal of Symbolic Logic. 1998. 63. P. 1511-1528.

4. **Herwig B., Macpherson H. D., Martin G., Nurtazin A., Truss J. K.** // Annals of Pure and Applied Logic. 2000. 101. P. 65-93.

5. **Baizhanov B. S.** Orthogonality of one-types in weakly 0-minimal theories. // Algebra and Model Theory II, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors. Novosibirsk State Technical Uneversity, 1999. P.3-28.

6. **Baizhanov B. S.** // The Journal of Symbolic Logic. 2001. 66. P. 1382-1414

7. **Macpherson H. D., Steinhorn Ch.** // Annals of Pure and Applied Logic. 1996. 79. P. 165-209.

8. **Kulpeshov B. Sh.** // Поиск, серия естественно-технических наук. 2002. № 3. С. 151-158.

Поступила в редакцию 21.08.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 62 – 67*

УДК 517.43

О ГИЛЬБЕРТОВОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТ ОДНОГО КЛАССА НЕПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. Б. Муратбеков, Л. Р. Сейтбекова

Таразский Государственный Университет имени М.Х.Дулати
г. Тараз, ул. Сулейманова, 7, madiktz@nursat.kz

В данной работе изучаются вопросы о принадлежности классам δp и гильбертовость резольвент одного класса неполуограниченных дифференциальных операторов. Для неполуограниченного дифференциального оператора получены условия гильбертовости резольвент и их принадлежности классу δ_p.

1. Введение. Формулировка основных результатов.

Дифференциальные операторы с операторными коэффициентами являлись предметом изучения многих математиков: Б.М. Левитана, А.Г. Костюченко, М.Г. Гасымова, М.О. Отелбаева, Г.А. Суворченковой, В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, П.А. Мишневского, М.Б. Муратбекова, А.Ж. Тогочуева, А. Биргебаева, А.А. Абудова и др. [1 – 14]. Авторами указанных работ исследовались свойства функции Грина и самосопряженность соответствующих операторов, характер спектра, качественные свойства решений.

Однако для резольвент некоторых классов дифференциальных операторов такие вопросы, как принадлежность классам δ_p, ядерность, гильбертовость, до сих пор остаются мало исследованными. К ним, в частности, относятся операторы смешанного типа, которые разделением переменных сводятся к изучению дифференциальных операторов с операторными коэффициентами. Здесь основные трудности связанны с изменением типа и неполуограниченностью оператора.

В настоящей работе изучаются вопросы о принадлежности классам δ_p и гильбертовость резольвенты следующего оператора:

$$Lu = -u'' + k(y)Au + ia(y)A^{\alpha}u + c(y)u,$$

определенного в пространстве $H_1 = H_1(R, H)$, где $k(y)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная функция в $R = (-\infty, \infty)$, $k(0) = 0$, $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$, A — положительно-определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с вполне непрерывным обратным,

Keywords: *hilbertness, resolventa, non-semi-bounded differential operator*
2000 Mathematics Subject Classification: 35B65, 35P05, 47B38

H_1 — гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(R,H)$ — множества финитных бесконечно гладких вектор-функций, определенных на R, со значениями в H по норме

$$||u(y)||_{H_1} = (\int\limits_{-\infty}^{\infty} ||u(y)||_H^2 dy)^{1/2},$$

соответствующей скалярному произведению

$$< u(y), v(y) >_{H_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} < u(y), v(y) >_H dy.$$

Напомним, что через δ_p обозначают множество всех вполне непрерывных операторов таких, что

$$||A||_{\delta_p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty\,,$$

где $s_n(A)$ — собственные числа оператора $(A^*A)^{1/2}$.

Очевидно, что для вполне непрерывных операторов всегда $s_n \longrightarrow 0$. Показатель p характеризует степень уклонения оператора A от конечномерного. Чем меньше p, тем быстрее числа s_n стремятся к нулю и тем лучше оператор аппроксимируется конечномерным.

В данной работе, в частности, указан класс операторов, резольвенты которых являются операторами Гильберта-Шмидта.

Предположим далее, что коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ оператора L удовлетворяют условиям:

$i)\, |a(y)| \geq \delta_0 > 0$ и $c(y) \geq \delta > 0$ — непрерывные функции в каждой точке R;

$ii)\, \sup\limits_{|x-t|\leq 1} \frac{a(t)}{a(x)} \leq c_0 < \infty; \quad \sup\limits_{|x-t|\leq 1} \frac{c(t)}{c(x)} \leq c_1 < \infty;$

$iii)\, 0 < \delta_1 \leq \frac{a^2(y)}{c(y)}$ при $y \in R$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $i) - iii)$. Тогда резольвента оператора L принадлежит классу δ_p, если $p > 1$ и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q^{-(p+1)/2}(j,y)dy < \infty\,, \tag{$*$}$$

где $Q(t,y) = |it^\alpha + c(y)|^2$, $\delta_0 \leq t < \infty$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $i) - iii)$ и для всех $0 \leq l < 1$*

$$\sum n^l \lambda_n < \infty\,, \tag{$**$}$$

где λ_n — собственные числа оператора A. Тогда резольвента оператора L является оператором Гильберта-Шмидта, если $a^{-1}(y) \in L_1(R)$.

2. Вспомогательные утверждения и оценки.

Рассмотрим оператор, определенный равенством

$$l_t u = -u'' + (tk(y) + it^\alpha a(y) + c(y))u \quad \text{в} \quad L_2(R), \quad \delta_0 < t < \infty.$$

Известно[15], что при выполнении условий $i) - iii)$ существует резольвента оператора l_t и справедлива оценка

$$||u'||_2^2 + ||it^\alpha a(y)u||_2^2 + ||c(y)u||_2^2 \leq c(||l_t u||^2 + ||u||_2^2) \tag{1}$$

для всех $u \in D(l_t)$, где $c > 0$ не зависит от u и t.

Пусть A — вполне непрерывный оператор. Известно, что собственные числа оператора $(A^*A)^{1/2}$ называются S-числами оператора A. Ненулевые S-числа будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности так, что

$$s_j(A) = \lambda_j((A^*A)^{1/2}),\ j = 1, 2, ...$$

Введем следующую функцию $N(\lambda) = \sum\limits_{s_j > \lambda} 1$ — количество s_j больших $\lambda > 0$. Положим $M = \{u \in L_2(R) : ||l_t u||_2^2 + ||u||_2^2 \leq 1\}$. Обозначим через d_k, k-поперечник по Колмогорову множества M в $L_2(R)$.

По определению

$$d_k = \inf_{\{y_k\}} \sup_{u \in M} \inf_{v \in y_k} ||u - v||_2 \,,$$

где inf берутся по всем подпространствам Y_k размерности $\leq k$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда верна оценка*

$$d_k \leq c^2 \widetilde{d}_k \,,$$

где $\widetilde{d}_k$ — *k-поперечник множества*

$$\widetilde{M} = \{u \in L_2(R) : ||u'||_2^2 + ||c(y)u||_2^2 + ||t^\alpha a(y)u||_2^2 \leq 1\} \,.$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что для всех $u \in D(l_t)$ справедлива оценка (1) Отсюда для всех $u \in M$

$$||u'||_2^2 + ||t^\alpha a(y)u||_2^2 + ||c(y)u||_2^2 \leq c^2(||l_t u||_2^2 + ||u||_2^2) \leq c^2 \,.$$

Следовательно, $M \subseteq \widetilde{M}_{c^2}$. Теперь, пользуясь свойством поперечников, имеем

$$d_k \leq c^2 \widetilde{d}_k.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда верна оценка*

$$N(\lambda) \leq \widetilde{N}(c^{-2}\lambda) \,,$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{d_k > \lambda} 1$ — *количество поперечников* d_k, *больших* $\lambda > 0$, $\widetilde{N}(\lambda) = \sum\limits_{\widetilde{d}_k > \lambda} 1$ — *количество поперечников* $\widetilde{d}_k$, *больших* $\lambda > 0$.

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$N(\lambda) = \sum_{d_k > \lambda} 1 \leq \sum_{c^2 \widetilde{d}_k > \lambda} 1 = \sum_{\widetilde{d}_k > c^{-2}\lambda} 1 = \widetilde{N}(c^{-2}\lambda).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда верна оценка*

$$N(\lambda) \leq c\lambda^{-1} mes(y \in R : Q^{1/2}(t, y) \leq c\lambda^{-1}) \,,$$

где c — *постоянное число, не зависящее от* $Q(t, y)$.

Доказательство. Доказываемая лемма следует из лемм 1 – 2 и результатов работ [15 — 17].

3. Доказательство теорем 1 — 2.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через s_{ji} — сингулярные числа оператора l_j^{-1}, $j = 1, 2, 3, ...$

Известно [18], что $s_{j+1}(l_t^{-1}) = d_j$, $j = 1, 2, ...$, где d_j, j-поперечник множества M. Отсюда следует неравенство

$$\sum_j \sum_i s_{ji}^p \leq c \sum_j \sum_i d_{ji}^p.$$

Положим $F(\lambda) = N(\frac{1}{\lambda})$, где $N(\cdot)$ — функция распределения поперечников d_{ji}, $i = 0, 1, 2, ...$, больших $\lambda > 0$. Заметим, что $F(\lambda) = 0$, если $\lambda \leq \delta_{j0} = \frac{1}{d_{j0}}$. Так как $F(\lambda_i) = i$ при $\lambda_i = d_{ji}^{-1}$, то

$$\sum_j \sum_{i=0}^{\infty} d_{ji}^p = \sum_j \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} d_{ji}^p = \sum_j \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \lambda_{ji}^{-p} =$$

$$= \sum_j \lim_{N\to\infty} \int_0^{\lambda_N} \lambda_j^{-p} dF(\lambda_j) = \sum_j \int_0^{\infty} \lambda_j^{-p} dF(\lambda_j).$$

Теперь займемся внутренним интегралом.

Пусть $\alpha_i = d_{ji+1}^{-1}$, где $\{d_{ji+1}\}_{i=0}^{\infty}$. Интегрируя по частям имеем:

$$\int_0^{\alpha_i} \lambda_j^{-p} dF(\lambda_j) = \int_{\delta_{j0}}^{\alpha_i} \lambda_j^{-p} dF(\lambda_j) = \lambda_j^{-p} F(\lambda_j)|_{\delta_{j0}}^{\alpha_i} - \int_0^{\alpha_i} \lambda_j^{-p-1} F(\lambda_j) d\lambda_j =$$

$$= d_{ji+1}^{-p} F(\alpha_j) - \delta_{j0}^{-p} F(\delta_{j0}) - \int_0^{\alpha_{ij}} \lambda_j^{-p-1} F(\lambda_j) d\lambda_j\,, \tag{2}$$

где $\delta_{j0} = \frac{1}{d_{j0}}$. Следовательно, $F(\delta_{j0}) = 0$.

Благодаря последнему равенству неравенство (2) принимает следующий вид:

$$\int_0^{\alpha_i} \lambda_j^{-p} dF(\lambda_j) = d_{ji+1}^{-p} F(\alpha_{ji}) - \int_0^{\alpha_i} \lambda_j^{-p-1} F(\lambda_j) d\lambda_j. \tag{3}$$

Пользуясь условием теоремы 1, находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q^{\frac{-p+1}{2}}(j,y)dy \geq \int_{mes(y\in R: Q^{-1/2}(j,y)\geq c\lambda)} Q^{\frac{-p+1}{2}}(j,y)dy \geq$$

$$\geq \int_{mes(y\in R: Q^{-1/2}(j,y)\geq c\lambda)} Q^{\frac{-(p-1)}{2}}(j,y)dy = \int_{mes(y\in R: Q^{-1/2}(j,y)\geq c\lambda)} Q^{-\frac{1}{2}(p-1)}dy \geq$$

$$\geq \lambda^{p-1} mes(y \in R : Q^{-1/2}(j,y) \geq c\lambda).$$

Отсюда

$$mes(y \in R : Q^{\frac{1}{2}}(j,y) \leq c\lambda^{-1}) \leq \frac{A}{\lambda^{p-1}} = A\lambda^{-(p-1)}\,, \tag{4}$$

где

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} Q^{\frac{-p+1}{2}}(j,y)dy.$$

Из последнего неравенства и леммы 3 имеем

$$N(\lambda) \le c\,\frac{A}{\lambda^p} = c\,A\lambda^{-p}.$$

Отсюда находим

$$d_{ji}^p \le c\,\frac{A}{k+1}. \tag{5}$$

Неравенство (5) показывает, что внеинтегральный член равенства (3) ограничен при $i \to \infty$. Теперь остается вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda_j^{-p-1} F(\lambda_j) d\lambda_j$. Учитывая лемму 3, имеем:

$$\int\limits_0^\infty \lambda_j^{-p-1} F(\lambda_j) d\lambda_j \le c \int\limits_0^\infty \lambda_j^{-p-1} \lambda_j mes(y \in R : Q^{\frac{1}{2}}(j,y) \le c\lambda_j^{-1}) d\lambda_j =$$

$$= c_1 \int\limits_0^\infty \lambda_j^{-p} mes(y \in R : Q^{\frac{1}{2}}(j,y) \le c\lambda_j^{-1}) d\lambda_j = c_2 \int\limits_0^\infty \lambda_j^{-p+1} dmes(y \in R : Q^{\frac{1}{2}}(j,y) \le c\lambda_j^{-1})$$

Внеинтегральный член исчезает благодаря оценке (4). Остается проверить, что

$$\int\limits_0^\infty \lambda_j^{-p+1} dmes(y \in R : Q^{\frac{1}{2}}(j,y) \le c\lambda_j^{-1}) = \int\limits_0^\infty Q^{\frac{1}{2}(-p+1)}(j,y) dy. \tag{6}$$

Действительно, поскольку, что для всякой последовательности точек

$$\delta_{j0}^2 \le \xi_0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le ... \le \xi_k \le ...$$

соответствуют суммы Дарбу

$$\sum_{k=1}^\infty M_k mes\Omega_{k,j}\,; \quad \sum_{k=1}^\infty m_k mes\Omega_{k,j}\,,$$

где

$$\Omega_{k,j} = \{x \in R : \xi_{k-1} \le Q^{1/2}(j,y) \le \xi_k\}$$

$$M_{k,j} = \sup_{x \in \Omega_k} Q^{\frac{1}{2}(-p+1)}(j,y), \qquad m_{k,j} = \inf_{x \in \Omega_k} Q^{\frac{1}{2}(-p+1)}(j,y),$$

то верно неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty \xi_k^{-p+1} mes\Omega_{k,j} \le \underline{s} \le \overline{s} \le \sum_{k=1}^\infty \xi_k^{-p+1} mes\Omega_{k,j}. \tag{7}$$

Если существует в (6) правый интеграл, то в силу (7) существует и левый интеграл, и они равны. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$Q^{\frac{1}{2}}(n,j) = \frac{1}{|i\lambda_n^\alpha a(y) + c(y)|} \le \frac{1}{\lambda_n^\alpha}|a(y)|\,, \quad n = 1,2,3,...\,,$$

где $i^2 = -1$.

Отсюда и из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{n=1}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty Q^{-1/2}(n,y) dy \le \sum_{n=1}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda_n^\alpha |a(y)|} dy = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{|a(y)|} dy$$

Теперь, если воспользоваться условием (∗∗), то из последнего неравенства получаем доказательство теоремы 2.

Цитированная литература

1. **Левитан Б. М.** // Математический сборник. 1968. Т.76(118). №2. С. 239-270.

2. **Костюченко А. Г., Левитан Б. М.** //Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т.1, вып.1. С.86-96.

3. **Гасымов М. Г.** // ДАН СССР, 1969. Т.186. №4. С.753-756.

4. **Отелбаев М. О.** // Украинский математический журнал. 1976. Т.28, №6. С.763-771.

5. **Левитан Б. М., Суворченкова Г. А.** // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т.2, вып.2. С.56-62

6. **Горбачук В. И., Горбачук М. Л.** О некоторых классах граничных задач для приложения. // Т.3, вып.2, 1968, с.56-62. Уравнения Штурма-Лиувилля с операторным потенциалом. Украинский математический журнал. Т.23. №3. 1972. С.291-305.

7. **Мишнаевский П. А.** // ДАН СССР. 1972. Т.203. №4. С.762-765.

8. **Тогочуев А. Ж., Муратбеков М. Б.** Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом // Тезисы докладов конференции математиков и механиков Киргизии, Фрунзе, 1987. С.96.

9. **Биргебаев А.** Гладкость решений нелинейного дифференциального уравнения с матричным потенциалом. // Тезисы докладов III республиканской межвузовской научной конференции по математике и механике. Алма-Ата, 1984. С.11.

10. **Абудов А. А.** Исследование некоторых спектральных свойств операторно- дифференциальных выражений высоких порядков и дифференциальных операторов в частных производных второго порядка. // Канд.дисс. Баку, 1983. 115с.

11. **Брук В. М.** // Дифференц. уравнения. 1984. Т.20. №11. С.1986-1989.

12. **Вайнерман Л. И., Горбачук М. Л.** // Украинский математический журнал. 1970. Т.22. №6. С.806-808.

13. **Гехтман М. М.** // Мат. заметки. 1969. Т.6. №1. С.65-72.

14. **Кочубей А. Н.** // Украинский математический журнал. 1973. Т.25. №6. С.811-815.

15. **Кальменов Т. Ш., Муратбеков М. Б.** Спектральные свойства оператора смешанного типа. Шымкент, ЮКТУ, Гылым, 1997.

16. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. 1965.

17. **Муратбеков М. Б.** // Дифференц. уравнения.1991. Т.27. №16. С.2127-2137.

18. **Сейтбекова Л. Р.** // Известия МОН РК, НАН РК. Сер.физ.-мат. 2001. №1. С.61-66.

19. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. 1965.

Поступила в редакцию 10.07.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 68 — 74*

УДК 517.946

НЕЛОКАЛЬНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Орынбасаров М., Орынбасаров Е. М.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012, Алматы, ул. Масанчи, 39/47

В этой статье будет исследована разрешимость начально-краевых задач для уравнения теплопроводности

$$u_t = a(t)\Delta u + F(x,t), \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа по $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, когда коэффициент $a(t)$ в интервале принимает как положительные и так отрицательные значения.

Для такого типа уравнения обычная задача Коши с начальным условием при $t = 0$ некорректна. Исследование показывает, что для регулярной разрешимости начальной задачи и краевых задач для уравнения (1) необходимо задавать нелокальное начальное условие.

Для определенности в дальнейшем будем предполагать, что коэффициент

$$a(t) = \begin{cases} a_1(t) > 0, \ 0 \le t \le t_0 \\ \\ a_2(t) < 0, \ t_0 < t \le T \end{cases}$$

в точке $t = t_0$ может иметь разрыв 1-го рода.

1. Нелокальная начальная задача для уравнения (1).

Постановка начальной задачи. Требуется найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области $R_T^n \equiv \{(x,t) : x \in R^n, t \in (0,t_0) \bigcup (t_0,T)\}$, и $u(x,t_0-0) = u(x,t_0+0)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) + hu(x,T) = f(x), \tag{2}$$

где $h = \text{const}$. Заданные ограниченные функции $F(x,t) \in C^{\alpha,0}_{x,t}(R^n_T)$, $f(x) \in C(R^n)$, коэффициент $a(t)$ — однозначно непрерывная или кусочно-непрерывная функция, которая может иметь разрыв 1-го рода и

$$q(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau > 0, \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

Очевидно, что $q(t) \in C^1[0,T]$.

Keywords: *integral transformation, boundary problem, initial problem, heat conduction equation, non-local condition, solvability condition, Grin's function*
2000 Mathematics Subject Classification: 35K20

Нелокальную задачу (1)–(2) будем решать методом интегральных преобразований Фурье. Применяя прямое интегральное преобразование Фурье по x к уравнению (1) и начальному условию (2), получим

$$\widetilde{u}_t = -a(t)|\lambda|^2\widetilde{u} + \widetilde{F}(\lambda, t), \tag{4}$$

$$\widetilde{u}(\lambda, 0) + h\widetilde{u}(\lambda, T) = \widetilde{f}(\lambda), \tag{5}$$

где $\widetilde{u}(\lambda, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} u(x, t) \exp\{i(\lambda, x)\}dx$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$,

$$(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad |\lambda|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2.$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\widetilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) \exp\{-|\lambda|^2 q(t)\} + h \int\limits_0^t \widetilde{F}(\lambda, \tau) \exp\{-|\lambda|^2[|q(t) - q(\tau)|]d\tau. \tag{6}$$

Произвольную функцию $C(\lambda)$ определим из условия (5). Имеем

$$C(\lambda) + hC(\lambda) \exp\{-|\lambda|^2 q(T)\} + h \int\limits_0^T \widetilde{F}(\lambda, \tau) \exp\{-|\lambda|^2[|q(T) - q(\tau)|]d\tau = \widetilde{f}(\lambda).$$

Отсюда

$$C(\lambda) = \frac{\widetilde{f}(\lambda)}{H(\lambda)} - \frac{h}{H)(\lambda)} \int\limits_0^T \widetilde{F}(\lambda, \tau) \exp\{-|\lambda|^2[|q(T) - q(\tau)|]d\tau, \tag{7}$$

где

$$H(\lambda) = 1 + h \exp\{-|\lambda|^2 q(T)\}. \tag{8}$$

Подставляя в равенство (6) значение $C(\lambda)$, решение задачи (4)–(5) можно представить в виде

$$\widetilde{u}(\lambda, t) = \frac{\widetilde{f}(\lambda)}{H(\lambda)} \exp\{-|\lambda|^2 q(t)\} + \int\limits_0^t \widetilde{F}(\lambda, \tau) \exp\{-|\lambda|^2[|q(t) - q(\tau)|]d\tau -$$

$$-\frac{h}{H(\lambda)} \int\limits_0^T \widetilde{F}(\lambda, \tau) \exp\{-|\lambda|^2[q(t) + |q(T) - q(\tau)|]\}d\tau. \tag{9}$$

Прежде чем применять обратное преобразование Фурье к равенству (9), исследуем функцию $H(\lambda)$. Очевидно, что

$$H(\lambda) > 0 \ \text{ при } \ h > -1 \ \text{ и } \ H(\lambda) \geq 1 \ \text{ при } \ h > 0. \tag{10}$$

Исследование показывает, что справедлива

Лемма 1. *При $h = -1$ уравнение $H(\lambda) = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$), а при $h < -1$, корнями уравнения $H(\lambda) = 0$ являются все точки сферы*

$$|\lambda|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = \frac{1}{q(T)} \ln(-h).$$

Следует отметить, что при $h\exp[-|P|^2 q(T)] = -1$, где $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, решение задачи (1)–(2) не единственно, так как однородное уравнение (1) ($F(x,t) = 0$) с нулевым начальным условием (2) ($f(x) = 0$) имеет ненулевое решение вида

$$u_0(x,t) = \exp[-|P|^2 q(t)] \prod_{k=1}^{n} \cos p_k x_k.$$

Предполагая, что выполнено условие (10), и применяя к равенству (9) обратное преобразование Фурье, получим

$$u(x,t) = \int\limits_{R^n} f(\xi) G(x-\xi, q(t)) d\xi - h \int\limits_{R^n} f(\xi) G^*(x-\xi, q(T)+q(t)) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} F(\xi,\tau) G(x-\xi, |q(t)-q(\tau)|) d\xi -$$

$$-h \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{R^n} F(\xi,\tau) G^*(x-\xi, q(t) + |q(T)-q(\tau)|) d\xi, \tag{11}$$

где $G(x-\xi,\ q(t))$ — обычное фундаментальное решение уравнения теплопроводности,

$$G^*(x-\xi, q(t)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \frac{1}{H(\lambda)} \exp\{-|\lambda|^2 q(t) + (\lambda, (x-\xi))\} d\xi.$$

З а м е ч а н и е. Если $q(T) = 0$, то $H(\lambda) = 1 + h$ и при $h \neq -1$

$$G^*(x-\xi, q(t) = \frac{1}{1+h} G(x-\xi, q(t)).$$

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

Л е м м а 2. *Если выполнено условие (10), то при $x \neq \xi$ функция $G^*(x-\xi, q(t)) \in C^{1,\,\infty}_{t,\ x}$ и является решением однородного уравнения теплопроводности (1).*

Л е м м а 3. *Справедливо соотношение*

$$G^*(x-\xi, q(t)) = G(x-\xi, q(t)) - hG^*(x-\xi, q(T)+q(t)). \tag{12}$$

Используя леммы 2 — 3 и свойства объемного теплового потенциала, нетрудно проверить, что функция, определяемая равенством (11), удовлетворяет неоднородному уравнению (1) и нелокальному начальному условию (2).

Подытоживая полученные результаты, сформулируем теорему.

Т е о р е м а 1. *Если заданные функции $F(x,t) \in C^{\alpha,\ 0}_{x,\ t}(R^n_T)$, $f(x) \in C(R^n)$ ограничены и выполнено условие (10), то нелокальная начальная задача (1) — (2) имеет регулярное решение, определяемое формулой (11).*

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Пусть

$$a(t) = \begin{cases} \ \ 1, & 0 < t < t_0, \\ -1, & t_0 < t < T. \end{cases}$$

Тогда функция

$$q(t) = \int\limits_0^t a(\tau) d\tau = \begin{cases} t, & 0 < t < t_0, \\ 2t_0 - t, & t_0 < t < T. \end{cases}$$

Значение $q(T) > 0$, т.е. $q(T) = \int\limits_0^T a(\tau)d\tau = 2t_0 - T > 0$ при $t_0 > \frac{T}{2}$ и $q(T) = 0$ при $t_0 = \frac{1}{2}T$.

Пример 2. Пусть $a(t) = T - 2t$, $0 < t < T$. Тогда $a(t) > 0$ при $t < \frac{T}{2}$ и $a(t) < 0$ при $\frac{T}{2} < t < T$. Функция $g(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau = Tt - t^2 = t(T - t) > 0$ и $q(0) = q(T) = 0$

2. Специальные объемные и поверхностные потенциалы.

При помощи функций $G(x - \xi, q(t))$ и $G^*(x - \xi, q(t))$ построим следующие объемные потенциалы

$$V_0^*(t,x) = \int\limits_\Omega f(\xi)G(x-\xi,q(t))d\xi - h\int\limits_\Omega f(\xi)G^*(x-\xi,q(T)+q(t))d\xi,$$

$$V^*(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega F(\xi,\tau)G(x-\xi)|q(t)-q(\tau)|)d\xi -$$

$$-h\int\limits_0^T d\tau \int\limits_\Omega^0 F(\xi,\tau)G^*(x-\xi,q(\tau)+|q(t)-q(\tau)|)d\xi$$

и поверхностные потенциалы

$$\omega^*(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \sigma(\xi,\tau)a(\tau)G(x-\xi,|q(t)-q(\tau)|)dS_\xi -$$

$$-h\int\limits_0^T d\tau \int\limits_S \sigma(\xi,\tau)\tau)a(\tau)G^*(x-\xi,q(\tau)+|q(t)-q(\tau)|)dS_\xi,$$

$$W^*(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \mu(\xi,\tau)a(\tau)\frac{\partial G}{\partial N_\xi}dS_\xi - h\int\limits_0^T d\tau \int\limits_S \mu(\xi,\tau)a(\tau)\frac{\partial G^*}{\partial N_\xi}dS_\xi,$$

где Ω — произвольная область в R^n с границей S, N_ξ — нормаль к границе в точке $\xi \in S$. Первые слагаемые построенных потенциалов являются обычными тепловыми потенциалами с функцией $q(t)$ вместо t, а второе слагаемое не имеет особенности при $q(T) > 0$. Поэтому эти потенциалы обладают аналогичными свойствами тепловых потенциалов. Используя свойства тепловых потенциалов и выше приведенные леммы 2 — 3, нетрудно доказать следующие утверждения.

Теорема 2. *Если ограниченная функция $f(x) \in C(\Omega)$ и выполнено условие (10), то при $q(t) \geqslant \delta > 0$ функция $V_0^*(t,x) \in C_{t,\ x}^{1,\ \infty}(\Omega_T)$ и справедливы равенства*

$$\frac{\partial V_0^*}{\partial t} = a(t)\Delta V_0, \quad V_0^*(0,x) + hV_0^*(T,x) = f(x).$$

Теорема 3. *Если ограниченная функция $F(t,x) \in C_{x,\ t}^{\alpha,\ 0}$ и выполнено условие (10), то функция $V^*(t,x) \in C_{t,x}^{1,2}(\Omega_T)$ и справедливы равенства*

$$\frac{\partial V_0^*}{\partial t} = a(t)\Delta V^* + F(x,t), \quad V^*(0,x) + hV^*(T,x) = 0.$$

Теорема 4. *Если ограниченная функция $\sigma(x,t) \in C(S_T)$ и выполнено условие (10), а поверхность $S \in C^{1+\alpha}$ (типа Ляпунова), то $\forall x \overline{\in} S$ функция $\omega^*(t,x) \in C^{1,\infty}_{t,x}$ и $\frac{\partial \omega^*}{\partial t} = a(t)\Delta\omega^*$. Кроме того, имеют место соотношения*

$$\lim_{x \to x^0 \in S} \omega^*(t,x) = \omega^*(t,x^0),$$

$$\lim_{x \to x^0 \in S} \frac{\partial \omega^*(t,x)}{\partial N_{x^0}} = \mp \frac{1}{2}\sigma(x^0,t) + \frac{\partial \omega^*(t,x^0)}{\partial N_{x^0}},$$

$$\omega^*(0,x) + h\omega^*(T,x) = 0.$$

Теорема 5. *Если ограниченная функция $\mu(x,t) \in C(S_T)$ и выполнено условие (10), а поверхность $S \in C^{1+\alpha}$, то $\forall x \overline{\in} S$ функция $W^*(t,x) \in C^{1,\infty}_{t,x}$ и $\frac{\partial W^*}{\partial t} = a(t)\Delta W$. Кроме того, имеют место соотношения*

$$\lim_{x \to x^0 \in S} W^*(x,t) = \pm \frac{1}{2}\mu(x^0,t) + W^*(t,x^0),$$

$$W^*(0,x) + hW(T,x) = 0.$$

При помощи построенных потенциалов можно доказать регулярную разрешимость различных краевых задач для уравнения (1) с начальным условием (2).

3. Краевые задачи для уравнения (1).

Используя вышеприведенные потенциалы и применяя метод продолжений нетрудно построить функции Грина основных краевых задач для простейших областей (полупространства, четверть пространства, полоса, полуполоса и т.д.). Решение таких краевых задач можно в явном виде выразить через заданные функции.

Смешанная краевая задача. Требуется найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области $\Omega_T \equiv \{(x,t) : -\infty < x'' < \infty, 0 < x_n, x_{n-1} < \infty; 0 < t < T\}$, удовлетворяющее начальному условию (2) и краевым условиям

$$u_{x_n}(x',0,t) = \varphi(x',t), \tag{13}$$

$$u(x'',0,x_n,t) = \psi(x'',x_n,t), \tag{14}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots x_n) = (x', x_n) = (x'', x_{n-1}, x_n)$. Заданные ограниченные функции $F(x,t) \in C^{\alpha,\,0}_{x,\,t}(\Omega_T)$, $f(x) \in C^{0,\,1}_{x',\,x_n}(\Omega)$, $\varphi(x',t) \in C(\Omega_T \cap (x_n = 0)), \psi(x'', x_{n,t}) \in C^{0,\,1}_{x'',\,x_n}\ \Omega_T \cap (x_{n-1} = 0)$. Кроме того, выполнены условия согласования

$$\varphi(x',0) = f'x_n(x',0),\ \psi(x'',x_n,0) = f(x'',0,x_n),\ \varphi(x'',0,t) = \psi_{x_n}(x'',0,t).$$

Функцию Грина поставленной краевой задачи можно построить методом четного и нечетного продолжения. При этом решение смешанной задачи (1) — (2), (13) — (14) выражается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} f(\xi) Q(x'' - \xi'', x_{n-1} \mp \xi_{n-1}, x_n \mp x_n, q(t)) -$$

$$-h \int\limits_{\Omega} f(\xi) Q^*(x'' - \xi'', x_{n-1} \mp \xi_{n-1}, x_n \mp \xi_n, q(T) + q(t)) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} F(\xi,\tau) Q(x'' - \xi'', x_{n-1} \mp \xi_{n-1}, x_n \mp \xi - n, |q(t) - q(\tau)|) d\xi -$$

$$-h\int\limits_0^T d\tau\int\limits_\Omega F(\xi,\tau)Q^*(x''-\xi'',x_{n-1}\mp\xi_{n-1},x_n\mp\xi_n,q(T)+|q(t)-q(\tau)|)d\xi-$$

$$-2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^{n-2}} d\xi''\int\limits_0^\infty \varphi(\xi',\tau)a(\tau)Q(x'-\xi',x_{n-1}\mp\xi_{n-1},x_n,|q(t)-q(\tau)|)d\xi_{n-1}+$$

$$+2h\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{R^{n-2}} d\xi''\int\limits_0^\infty \varphi(\xi',\tau)a(\tau)Q^*(x''-\xi'',x_{n-1}\mp\xi_{n-1},x_n,q(T)+|q(t)-q(\tau)|)d\xi_{n-1}+$$

$$+2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^{n-2}} d\xi''\int\limits_0^\infty \psi(\xi'',\xi_n,\tau)a(\tau)\frac{\partial Q}{\partial\xi_{n-1}}\Big|_{\xi_{n-1}=0}d\xi_n-$$

$$-2h\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{R^{n-1}} d\xi''\int\limits_0^\infty \psi(\xi'',\xi_n,\tau)a(\tau)\frac{\partial Q^*}{\partial\xi_{n-1}}\Big|_{\xi_{n-1}=0}d\xi_n, \qquad (15)$$

где

$$Q(x''-\xi'',x_{n-1}\pm\xi_{n-1},x_n\mp\xi_n,q(t))=G(x-\xi,q(t))+G(x'-\xi',x_n+\xi_n,q(t))-$$
$$-G(x''-\xi'',x_{n-1}+\xi_{n-1},x_n+\xi_n,x_n-\xi_n,q(t))-$$
$$-G(x''-\xi'',x_{n-1}+\xi_{n-1},x_n+\xi_n,q(t)),$$
$$Q^*(x''-\xi'',x_{n-1}\pm\xi_{n-1},q(T)+q(t))=G^*(x-\xi,q(T)+q(t))+$$
$$+G^*(x'-\xi',x_n+\xi_n,q(T)+q(t))-G^*(x''-\xi'',x_{n-1}+\xi_{n-1},x_n-\xi_n,q(T)+q(t))-$$
$$-G^*(x''-\xi'',x_{n-1}+\xi_{n-1},x_n+\xi_n,q(T)+q(t)).$$

Периодическая краевая задача. Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области $\Omega_T\equiv\{(x,t):0<x_k<2\pi,0<t<T\}$, удовлетворяющее начальному условию (2) и условию периодичности:

$$u(0,t)=u(2\pi,t). \qquad (16)$$

Решение $u(x,t)$ поставленной задачи ищем в виде ряда

$$u(x,t)=\sum u_k(t)e^{ikx} \qquad (17)$$

с неизвестными коэффициентами $u_k(t)$, где $k=(k_1,k_2,\dots k_n)$, $kx=k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_nx_n$ и суммирование ведется по всем целым значениям k_s, $-\infty<k_s<\infty$. Разлагая заданные функции $F(x,t),f(x)$ по ортогональной системе$\{e^{ikx}\}$, имеем

$$F(x,t)=\sum F_k(t)e^{ikx},\quad f(x)=\sum f_ke^{ikx}. \qquad (18)$$

Подставляя в неоднородное уравнение (1) и нелокальное условие (2) ряды (17) — (18) и сравнивая коэффициенты при e^{ikx} относительно неизвестных $u_k(t)$, получим следующую задачу

$$u_k'(t)+a(t)|k|^2u_k=F_k(t), \qquad (19)$$

$$u_k(0)+hu_k(T)=f_k. \qquad (20)$$

Общее решение уравнения (19) можно представить в виде

$$u_k(t)=C_k\exp r^{-|k|^2q(t)}+h\int\limits_0^t F_k(\tau)\exp\{|k|^2|q(t)-q(\tau)|\}d\tau. \qquad (21)$$

Произвольные постоянные C_k определим из условия (20).

Имеем

$$C_k + hc_k e^{-|k|^2 q(T)} + h\int\limits_0^T f_k(\tau)\exp\{-|k|^2 q(T) - q(\tau)|\}d\tau = f_k$$

или

$$C_k = \frac{f_k}{H(|k|)} - \frac{h}{H(|k|)}\int\limits_0^T F_k(\tau)\exp\{-|k|^2|q(T) - q(\tau)|\}d\tau.$$

Далее, подставляя в (21) вместо C_k найденное значение, окончательно получим

$$u_k(t) = \frac{f_k}{H(|k|)}\exp\{-|k|^2 q(t)\} + \int\limits_0^t F_k(\tau)\exp\{-|k|^2 q(t) - q(\tau)|\}d\tau -$$

$$-\frac{h}{H(|k|)}\int\limits_0^T F_k(\tau) exp\{-|k|^2[q(T) - q(\tau))]\}d\tau, \quad (22)$$

где $H(|k|) = 1 + h\exp\{-|k|^2 q(T)\}$.

Из интегрального представления (22) очевидным образом следует, что при $H(|k|) > 0$ задача (19)–(20) имеет единственное решение. Тогда периодическое решение $u(x,t)$, представимое рядом (17), также единственно. Кроме того, функциональный ряд (17) бесконечно дифференцируем по x и один раз по t. Таким образом, доказана

Теорема 6. *Если заданные функции $F(x,t), f(x)$ разлагаются по x в сходящиеся ряды (18) и $H(|k|) > 0$, то периодическая задача (1), (2), (16) имеет единственное регулярное решение $u(x,t)$, определяемое рядом (17), где неизвестные коэффициенты $u_k(t)$ выражаются формулой (22).*

Цитированная литература

1. **Дезин А. А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.

2. **Терсенов С.А.** Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1985.

3. **Орынбасаров М. О.** // Доклады МН-АН РК. 1996. №3. С. 3 – 8.

Поступила в редакцию 5.06.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 75 — 81*

УДК 517.956.6

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М.И. Рамазанов

Институт математики МО и Н РК
Алматы, ул.Пушкина, 125, dzhenali@math.kz

1. Постановка задачи. Пусть $Q_1 = \{x,t|\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{x,t|\ 0 < x < 2\pi,\ -T < t < 0\}$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. В области Q рассматривается следующая граничная задача:

$$
\begin{aligned}
(-1)^j D_t^2 u^j(x,t) &- D_x^2 u^j(x,t) + M^j[u^j] = f^j(x,t),\ (x,t)\in Q_j; && (1)\\
D_x^p u^j(0,t) &= D_x^p u^j(2\pi,t); && (2)\\
D_t^p u^1(x,T) &= \mu_p D_t^p u^2(x,-T); && (3)
\end{aligned}
$$

где $D_t = \partial/\partial t,\ D_x = \partial/\partial x,\ \ M^1[u^1] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u^1(x,t_k),\ \ M^2[u^2] = \sum\limits_{k=m+1}^{M} \alpha_k u^2(x,t_k);\ p = 0,1;\ j = 1,2$. Далее, положим, что

$$
\left\{
\begin{array}{c}
T < +\infty,\ f^j \in L_2(Q_j),\ j = 1,2;\ \mu_p \in \mathbb{C}, p = 0,1;\\
\alpha_k \in \mathbb{C},\ t_k \in (-T,0),\ k = m+1,...,M;\ t_k \in (0,T),\ k = 1,...,m;
\end{array}
\right. \qquad (4)
$$

— заданные функции и числа.

Уравнение (1) является уравнением смешанного (гиперболо-эллиптического) типа, а из-за наличия слагаемого $M^j[u^j]$ его называют нагруженным. Подобные уравнения рассматривались в [3]. Граничные задачи для уравнений смешанного типа, которые имеют вид (1), изучались в работах [1, 2]. Задача (1)—(3) отличается от рассмотренных ранее тем, что, во-первых, область в гиперболической части является не характеристической, во-вторых, в уравнении имеются нагруженные слагаемые. Эти уравнения являются моделью замкнутых управляемых систем, когда управляющее устройство формирует воздействия на объект управления в фиксированные моменты времени пропорционально следу функции-состояния. В отличие от изученных ранее задач здесь не удается непосредственно обратить оператор гиперболической и эллиптической частей и свести исходную задачу к исследованию разрешимости сингулярных интегральных уравнений. Рассматриваемая граничная задача (1)—(3) является модельной, позволяющей

Keywords: *mixed type equation, loaded equation, strongly solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 35M10

применить и развить методы, предлагаемые в работе [4] для уравнений с операторными (П-операторными) коэффициентами для уравнения смешанного типа и с наличием нагруженных слагаемых [3]. Однако, как следует из результатов работы, они могут быть применены и для уравнений с коэффициентами, не являющимися П-операторами.

Основной целью данной работы является: изучить вопросы L_2-сильной разрешимости граничной задачи (1)—(3) при условиях (4).

2. Основной результат. Сформулируем основной результат данной работы. Для этого введем следующие обозначения:

$$\mathscr{S} = \{s|\ s = 0, \pm 1, \pm 2, ...\};$$

$$\delta_s^1 = 1 + \sum_1^m \alpha_k \frac{1 - \operatorname{ch} s(t_k - T)}{s^2}, \quad \delta_s^2 = 1 + \sum_{m+1}^M \alpha_k \frac{1 - \cos s(t_k + T)}{s^2}, \quad s \in \mathscr{S}; \tag{5}$$

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin sT + \mu_1 \operatorname{sh} sT}{s} & \cos sT - \mu_0 \operatorname{ch} sT & \dfrac{\cos sT - 1}{s^2} & \dfrac{1 - \operatorname{ch} sT}{s^2} \\ \cos sT - \mu_1 \operatorname{ch} sT & s(-\sin sT + \mu_0 \operatorname{sh} sT) & -\dfrac{\sin sT}{s} & \dfrac{\operatorname{sh} sT}{s} \\ \sum\limits_{m+1}^M \alpha_k \dfrac{\sin s(t_k + T)}{s} & \sum\limits_{m+1}^M \alpha_k \cos s(t_k + T) & -\delta_s^2 & 0 \\ \mu_1 \sum\limits_1^m \alpha_k \dfrac{\operatorname{sh} s(t_k - T)}{s} & \mu_0 \sum\limits_1^m \alpha_k \operatorname{ch} s(t_k - T) & 0 & -\delta_s^1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathscr{S}.$$

Теорема 1. *Для любых f^j, μ_p, α_k, t_k, T, удовлетворяющих требованиям (4), граничная задача (1)—(3) имеет единственное L_2-сильное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$|\Delta_s| \neq 0 \quad \forall s \in \mathscr{S}. \tag{6}$$

Здесь и далее в работе для детерминанта матрицы B будет использовано обозначение $|B|$. Условие (6) в терминах данных (4) дает полное описание корректных граничных задач вида (1)—(3). Получим из этой теоремы ряд следствий.

Следствие 1. *Пусть при условиях теоремы 1 в уравнении (1) отсутствуют нагруженные слагаемые, т.е. $\alpha_k = 0,\ k = 1, ..., M$. Тогда для того, чтобы граничная задача (1)—(3) имела единственное L_2-сильное решение, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\sin sT + \mu_1 \operatorname{sh} sT}{s} & \cos sT - \mu_0 \operatorname{ch} sT \\ \cos sT - \mu_1 \operatorname{ch} sT & s(-\sin sT + \mu_0 \operatorname{sh} sT) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in \mathscr{S}. \tag{7}$$

Замечание 1. *С одной стороны, условия (7) не для всех наборов данных, удовлетворяющих требованиям (4), могут быть выполнены. Например, если $\mu_1 = \mu_2 = 1$, то условия (7) принимают вид: $\operatorname{ch} sT \cdot \cos sT \neq 1 \quad \forall s \in \mathscr{S}$, которые, в частности, нарушаются при $s = 0$. С другой стороны, существуют граничные задачи, для которых условия (7) могут быть выполнены. Например, если $\mu_0 = -\mu_1 = i\ (= \sqrt{-1})$, то условия (7) будут иметь вид: $\operatorname{sh} sT \cdot \sin sT \neq -i \quad \forall s \in \mathscr{S}$, которые являются выполненными.*

Следствие 2. *При условиях теоремы 1 предположим, что $T = 2\pi$, $\mu_0 = \mu_1 = 1$. Тогда для того, чтобы граничная задача (1)—(3) имела единственное L_2-сильное решение, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\delta_s^2 \left[s^2 + \sum_1^m \alpha_k \right] \neq 0 \quad \forall s \in \mathscr{S}. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 2. *Утверждение следствия 2 показывает, что в рассматриваемом случае при отсутствии нагруженных слагаемых граничная задача (1)—(3) при* $f^j \equiv 0,\ j = 1,2$ *имеет решение, равное постоянной, т.е. оператор задачи имеет непустой спектр. Однако введение нагрузки специальным образом (согласно условиям (8)) позволяет превратить эту задачу в корректно поставленную, т.е. однозначно* L_2*-сильно разрешимую при любых правых частях уравнения* $f^j \in L_2(Q_j),\ j = 1,2$*. Причем, следует заметить, что условия (8) не зависят от точек* $\{t_k,\ k = 1, ..., m\}$ *из области эллиптичности уравнения (1).*

3 . Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Доказательство теоремы будем проводить методом разделения переменных, т.е. ищем решение задачи (1)—(3) в следующем виде:

$$u^j(x,t) = \sum_{s\in\mathscr{S}} u_s^j(t)\exp\{is\cdot x\}, \quad j = 1,2. \tag{9}$$

Учитывая соответствующие разложения для правых частей уравнения (1)

$$f^j(x,t) = \sum_{s\in\mathscr{S}} f_s^j(t)\exp\{is\cdot x\}, \quad j = 1,2, \tag{10}$$

сведем граничную задачу (1)—(3) к изучению краевых задач для счетной системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-D_t^2 u_s^1(t) + s^2\cdot u_s^1(t) + M^1[u_s^1] = f_s^1(t),\ t\in(0,T), \tag{11}$$

$$D_t^2 u_s^2(t) + s^2\cdot u_s^2(t) + M^2[u_s^2] = f_s^2(t),\ t\in(-T,0), \tag{12}$$

$$D_t^p u_s^1(T) = \mu_p D_t^p u_s^2(-T),\ p = 0,1, \tag{13}$$

где $M^1[u_s^1] = \sum\limits_1^m \alpha_k u_s^1(t_k),\ M^2[u_s^2] = \sum\limits_{m+1}^M \alpha_k u_s^2(t_k)$.

Введем системы чисел $\{\nu_s,\ s\in\mathscr{S}\}$, $\{\varphi_s,\ s\in\mathscr{S}\}$, пока временно неизвестных, с помощью которых вместо задач (11)—(13) будем рассматривать следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} -D_t^2 u_s^1(t) + s^2\cdot u_s^1(t) + M^1[u_s^1] = f_s^1(t),\ t\in(0,T), \\ u_s^1(T) = \mu_0\nu_s,\ D_t^1 u_s^1(T) = \mu_1\varphi_s, \quad s\in\mathscr{S}; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} D_t^2 u_s^2(t) + s^2\cdot u_s^2(t) + M^2[u_s^2] = f_s^2(t),\ t\in(-T,0), \\ u_s^2(-T) = \nu_s,\ D_t^1 u_s^2(-T) = \varphi_s, \quad s\in\mathscr{S}. \end{cases} \tag{15}$$

Решая задачи (14) и (15), получим следующие представления для их решений:

$$\begin{aligned} u_s^1(t) = \int_t^T f_s^1(\tau)\frac{\operatorname{sh} s(t-\tau)}{s}d\tau + \varphi_s\cdot\mu_1\cdot\frac{\operatorname{sh} s(t-T)}{s} + \\ + \nu_s\cdot\mu_0\cdot\operatorname{ch} s(t-T) - M^1[u_s^1]\cdot\frac{1-\operatorname{ch} s(t-T)}{s^2}, \quad s\in\mathscr{S}; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_s^2(t) = \int_{-T}^t f_s^2(\tau)\frac{\sin s(t-\tau)}{s}d\tau + \varphi_s\cdot\frac{\sin s(t+T)}{s} + \\ + \nu_s\cdot\cos s(t+T) - M^2[u_s^2]\cdot\frac{1-\cos s(t+T)}{s^2}, \quad s\in\mathscr{S}. \end{aligned} \tag{17}$$

В этих представлениях неизвестными являются величины: $\nu_s,\ \varphi_s,\ M^1[u_s^1],\ M^2[u_s^2],\quad s\in\mathscr{S}$. Для нахождения этих неизвестных используем (16) и (17). Во-первых, найдем представления для производных решений задач (14) и (15):

$$\begin{aligned} D_t^1 u_s^1(t) = &\int\limits_t^T f_s^1(\tau)\operatorname{ch} s(t-\tau)d\tau + \varphi_s\cdot\mu_1\cdot\operatorname{ch} s(t-T)+\\ &+\nu_s\cdot\mu_0\cdot s\cdot\operatorname{sh} s(t-T) + M^1[u_s^1]\cdot\frac{\operatorname{sh} s(t-T)}{s},\quad s\in\mathscr{S}; \end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned} D_t^1 u_s^2(t) = &\int\limits_{-T}^t f_s^2(\tau)\cos s(t-\tau)d\tau + \varphi_s\cdot\cos s(t+T)-\\ &-\nu_s\cdot s\cdot\sin s(t+T) - M^2[u_s^2]\cdot\frac{\sin s(t+T)}{s},\quad s\in\mathscr{S}. \end{aligned}\tag{19}$$

Далее, используя на линии $t=0$ в области Q условия сопряжения для решений (16)—(17) и их производных (18)—(19):

$$D_t^p u_s^1(0+) = D_t^p u_s^2(0-),\ p=0,1,$$

получим:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sin sT}{s}+\mu_1\frac{\operatorname{sh} sT}{s}\right)\varphi_s + (\cos sT-\mu_0\operatorname{ch} sT)\,\nu_s - \frac{1-\cos sT}{s^2}M^2[u_s^2] + \frac{1-\operatorname{ch} sT}{s^2}M^1[u_s^1] = F_s^1;\\ &(\cos sT-\mu_1\operatorname{ch} sT)\,\varphi_s + s\,(-\sin sT+\mu_0\operatorname{sh} sT)\,\nu_s - \frac{\sin sT}{s}M^2[u_s^2] + \frac{\operatorname{sh} sT}{s}M^1[u_s^1] = F_s^2; \end{aligned}\tag{20}$$

где

$$F_s^1 = \int\limits_{-T}^0 f_s^2(\tau)\frac{\sin s\tau}{s}d\tau - \int\limits_0^T f_s^1(\tau)\frac{\operatorname{sh} s\tau}{s}d\tau,\quad F_s^2 = -\int\limits_{-T}^0 f_s^2(\tau)\cos s\tau d\tau + \int\limits_0^T f_s^1(\tau)\operatorname{ch} s\tau s d\tau.\tag{21}$$

В представлениях (16)—(17) полагаем $t=t_k$ (причем, $k=1,...,m$ для (16) и $k=m+$ $+1,...,M$ для (17)), затем умножаем полученные выражения на соответствующие α_k и суммируя результаты предыдущего шага по k соответственно от 1 до m для решения (16) и от $m+1$ до M для решения (17). В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} &\mu_1\sum_1^m \alpha_k\frac{\operatorname{sh} s(t_k-T)}{s}\varphi_s + \mu_0\sum_1^m \alpha_k\operatorname{ch} s(t_k-T)\nu_s - \delta_s^1 M^1[u_s^1] = F_s^3;\\ &\sum_{m+1}^M \alpha_k\frac{\sin s(t_k+T)}{s}\varphi_s + \sum_{m+1}^M \alpha_k\cos s(t_k+T)\nu_s - \delta_s^2 M^2[u_s^2] = F_s^4; \end{aligned}\tag{22}$$

где

$$F_s^3 = -\sum_1^m \alpha_k\int\limits_{t_k}^T f_s^1(\tau)\frac{\operatorname{sh} s(t_k-\tau)}{s}d\tau,\quad F_s^4 = -\sum_{m+1}^M \alpha_k\int\limits_{-T}^{t_k} f_s^2(\tau)\frac{\sin s(t_k-\tau)}{s}d\tau,\tag{23}$$

а величины δ_s^1 и δ_s^2 определены в (5).

Заметим, что условия однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (20) и (22) относительно неизвестных $\varphi_s,\ \nu_s,\ M^1[u_s^1],\ M^2[u_s^2]$ совпадают с условиями (6) теоремы 1 .

Теперь из системы уравнений (20) и (22) определим неизвестные величины $\varphi_s,\ \nu_s,\ M^1[u^1_s]$, $M^2[u^2_s]$ по формулам:

$$\varphi_s=\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|},\ \nu_s=\frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|},\ M^1[u^1_s]=\frac{|\Delta_{M^1[u^1_s]}|}{|\Delta_s|},\ M^2[u^2_s]=\frac{|\Delta_{M^2[u^2_s]}|}{|\Delta_s|}\quad\forall s\in\mathscr{S}, \tag{24}$$

где, как обычно, матрицы $\Delta_{\varphi_s},\ \Delta_{\nu_s},\ \Delta_{M^1[u^1_s]},\ \Delta_{M^2[u^2_s]}$ получаются из матрицы Δ_s заменой соответствующих столбцов элементами $F^1_s,\ F^2_s,\ F^3_s,\ F^4_s$.

Далее, подставляя (24) в (16) и (17), получаем окончательное представление решений граничных задач (11)—(13):

$$\begin{gathered}u^1_s(t)=\int\limits_t^T f^1_s(\tau)\frac{\operatorname{sh}s(t-\tau)}{s}d\tau+\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\mu_1\cdot\frac{\operatorname{sh}s(t-T)}{s}+\\+\frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\mu_0\cdot\operatorname{ch}s(t-T)-\frac{|\Delta_{M^1[u^1_s]}|}{|\Delta_s|}\cdot\frac{1-\operatorname{ch}s(t-T)}{s^2},\quad s\in\mathscr{S};\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}u^2_s(t)=\int\limits_{-T}^t f^2_s(\tau)\frac{\sin s(t-\tau)}{s}d\tau+\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\frac{\sin s(t+T)}{s}+\\+\frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}\cdot\cos s(t+T)-\frac{|\Delta_{M^2[u^2_s]}|}{|\Delta_s|}\cdot\frac{1-\cos s(t+T)}{s^2},\quad s\in\mathscr{S}.\end{gathered} \tag{26}$$

Теперь обсудим вопрос об установлении L_2-оценок для решений (25)—(26), равномерных по $s\in\mathscr{S}$, т.е. оценок вида:

$$\|u^1_s(t)\|_{L_2(0,T)}\le C_1\|f^1_s(t)\|_{L_2(0,T)}\quad\forall s\in\mathscr{S}; \tag{27}$$

$$\|u^2_s(t)\|_{L_2(-T,0)}\le C_2\|f^2_s(t)\|_{L_2(-T,0)}\quad\forall s\in\mathscr{S}, \tag{28}$$

где постоянные $C_1,\ C_2$ не зависят от s.

Для этого рассмотрим вначале случай отсутствия нагруженных слагаемых. Из (25), (26) получаем для искомых решений их представления:

$$u^1_s(t)=\int\limits_t^T f^1_s(\tau)\frac{\operatorname{sh}s(t-\tau)}{s}d\tau+\mu_1\frac{|\widetilde{\Delta}_{\varphi_s}|}{|\widetilde{\Delta}_s|}\frac{\operatorname{sh}s(t-T)}{s}+\mu_0\frac{|\widetilde{\Delta}_{\nu_s}|}{|\widetilde{\Delta}_s|}\operatorname{ch}s(t-T)\quad\forall s\in\mathscr{S}; \tag{29}$$

$$u^2_s(t)=\int\limits_{-T}^t f^2_s(\tau)\frac{\sin s(t-\tau)}{s}d\tau+\frac{|\widetilde{\Delta}_{\varphi_s}|}{|\widetilde{\Delta}_s|}\frac{\sin s(t+T)}{s}+\frac{|\widetilde{\Delta}_{\nu_s}|}{|\widetilde{\Delta}_s|}\cos s(t+T)\quad\forall s\in\mathscr{S}, \tag{30}$$

где

$$\begin{gathered}|\widetilde{\Delta}_s|=\begin{vmatrix}\dfrac{\sin sT+\mu_1\operatorname{sh}sT}{s} & \cos sT-\mu_0\operatorname{ch}sT\\ \cos sT-\mu_1\operatorname{ch}sT & s(-\sin sT+\mu_0\operatorname{sh}sT)\end{vmatrix}=\\=-1-\mu_0\mu_1+(\mu_0-\mu_1)\sin sT\operatorname{sh}sT+(\mu_0+\mu_1)\cos sT\operatorname{ch}sT;\end{gathered} \tag{31}$$

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\Delta}_{\varphi_s}| = & \int\limits_{-T}^{0} f_s^2(\tau)\,\{\cos s(\tau+T) - \mu_0[\cos s\tau \operatorname{ch} sT - \sin s\tau \operatorname{sh} sT]\}\,d\tau + \\
& + \int\limits_{0}^{T} f_s^1(\tau)\,\{\mu_0 \operatorname{ch} s(\tau-T) - \operatorname{ch} s\tau \cos sT + \operatorname{sh} s\tau \sin sT\}\,d\tau;
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\Delta}_{\nu_s}| = & \frac{1}{s}\int\limits_{-T}^{0} f_s^2(\tau)\,\{-\sin s(\tau+T) + \mu_1[\sin s\tau \operatorname{ch} sT - \operatorname{sh} sT \cos s\tau]\}\,d\tau + \\
& + \frac{1}{s}\int\limits_{0}^{T} f_s^1(\tau)\,\{\mu_1 \operatorname{sh} s(T-\tau) + \operatorname{sh} s\tau \cos sT + \sin sT \operatorname{ch} s\tau\}\,d\tau.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Подставляя (31)—(33) в (29), получаем:

$$
\begin{aligned}
u_s^1(t) \;=\;& s^{-1}|\widetilde{\Delta}_s|^{-1}\int\limits_{-T}^{0} f_s^2(\tau)\{\mu_1 \operatorname{sh} s(t-T)\cos s(\tau+T) - \mu_0 \sin s(\tau+T)\operatorname{ch} s(t-T) + \\
+\;& \mu_0\mu_1[\cos s\tau \operatorname{ch} s(2T-t) - \operatorname{sh} st \cos s\tau]\}d\tau + s^{-1}|\widetilde{\Delta}_s|^{-1}\int\limits_{0}^{T} f_s^1(\tau)\{\mu_0\mu_1 \operatorname{sh} s(t-\tau) + \\
+\;& \mu_0 \sin sT \operatorname{ch} s(t-T)\operatorname{ch} s\tau - \mu_1 \cos sT \operatorname{sh} s(t-T)\operatorname{ch} s\tau\}d\tau + \\
+\;& s^{-1}|\widetilde{\Delta}_s|^{-1}\int\limits_{t}^{T} f_s^1(\tau)\{-(1+\mu_0\mu_1)\operatorname{sh} s(t-\tau) + \\
+\;& (\mu_0-\mu_1)\sin sT \operatorname{sh} sT \operatorname{sh} s(t-\tau) + (\mu_0+\mu_1)\cos sT \operatorname{ch} sT \operatorname{sh} s(t-\tau)\}d\tau.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Формулы для решений (30) и (34) позволяют получить требуемые L_2-оценки не только для самих функций $u_s^1(t),\ u_s^2(t)$, но и для их производных $D_t^j u_s^1(t),\ D_t^j u_s^2(t),\ j=1,2:$

$$\|u_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_1\left[\|f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} + \|f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)}\right], \tag{35}$$
$$\|u_s^2(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_2\left[\|f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} + \|f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)}\right], \tag{36}$$
$$\|D_t^1 u_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_3\left[\|f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} + \|f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)}\right], \tag{37}$$
$$\|D_t^2 u_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_4\left[\|s\cdot f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} + \|s\cdot f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)}\right], \tag{38}$$
$$\|D_t^1 u_s^2(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_5\left[\|f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} + \|f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)}\right], \tag{39}$$
$$\|D_t^2 u_s^2(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_6\left[\|s\cdot f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} + \|s\cdot f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)}\right]. \tag{40}$$

Обсудим, например, получение оценок (35). Для этого запишем представления (34) в виде:

$$u_s^1(t) = \int\limits_{-T}^{0} G_{2s}(t,\tau) f_s^2(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{T} G_{1s}(t,\tau) f_s^1(\tau)d\tau, \quad s\in\mathscr{S}.$$

Для получения требуемых оценок достаточно показать равномерную по s ограниченность функций $G_{1s},\ G_{2s}$, т.е.

$$\{|G_{1s}(t,\tau)|,\ |G_{2s}(t,\tau)|\} \le K \quad \text{для любых допустимых} \ \{t,\tau\}.$$

Для конечных s из условий теоремы (6) эти неравенства справедливы. Остается рассмотреть случаи: $s = 0,\ s = \pm\infty$. Пусть $s = 0$. Неравенства следуют из того факта, что в каждом слагаемом из $G_{1s}(t,\tau),\ G_{2s}(t,\tau)$ присутствуют выражения вида либо $\left\{\dfrac{\operatorname{sh} s\beta}{s}\right\}$, либо $\left\{\dfrac{\sin s\beta}{s}\right\}$, которые ограничены при $s \to 0$. В случае $s \to \pm\infty$ ограниченность $\{|G_{1s}(t,\tau)|,\quad |G_{2s}(t,\tau)|\}$ следует из-за наличия в них гиперболических функций типа $\{\operatorname{sh},\ \operatorname{ch}\}$ как в числителе, так и в знаменателе одного и того же порядка.

Аналогичное имеет место и для остальных оценок (37)—(40).

Оценки (35) и (36) остаются справедливыми в задаче (11), (12) и (13) и при наличии нагруженных слагаемых. Соответствующие формулы при этом оказываются очень громоздкими, поэтому они здесь не приводятся.

Для завершения доказательства теоремы 1 теперь достаточно применить аналог соответствующей леммы из работы [4, с.118]:

Лемма 1. *Задача (1)—(3) при условиях (4) имеет единственное L_2-сильное решение тогда и только тогда, когда все граничные задачи из (11), (12) и (13) однозначно разрешимы и существуют независящие от s постоянные $C_1,\ C_2$ такие, что справедливы оценки (35) и (36).*

Замечание 3. *Оценки (38) и (40) показывают, что для получения L_2-оценок вторых производных по времени от искомых решений $u^1(x,t),\ u^2(x,t)$ необходимо требовать наличие суммируемости в квадрате от первых производных по x заданных функций $f^1(x,t),\ f^2(x,t)$. Этот факт известен для гиперболических уравнений, однако для эллиптических граничных задач этого дополнительного требования не должно быть. По-видимому, это является эффектом влияния гиперболической части в уравнении смешанного типа (1).*

Цитированная литература

1. **Лаврентьв М. А., Бицадзе А. В.** // ДАН СССР. 1950. Т. 70, № 3. С. 373 — 376.
2. **Кароль И. Л.** // Вестн.ЛГУ. Сер.Матем.,мех.,астр. 1956. Т. 1, № 1. С. 177 — 181.
3. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.
4. **Дезин А. А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.

Поступила в редакцию 19.03.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 82 — 88*

УДК 517.518.8

ОБ ОЦЕНКАХ (D, α)-ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОМЕРНОГО Λ- ЯДРА ДИРИХЛЕ

М.Б. Сихов

Казахский государственный университет им. аль-Фараби
480012, Алматы, ул.Масанчи, 39/47, aknykova@kac.kz

1.Необходимые определения и постановка задачи. Пусть $\pi_s = [-\pi, \pi]^s$— s-мерный куб, $L^p(\pi_x s)$ $(1 \le p < \infty)$ — множество всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_s)$ таких, что

$$\left\|f\right\|_p = (2\pi)^{-s} \left(\int\limits_{\pi_s} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$L_0^p(\pi_s) = \left\{ f \in L^p(\pi_s) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0 \quad (j = 1, ..., s\ ) \right\}.$$

Через Z^s, как обычно, обозначим целочисленную решетку R^s. Пусть Z_0^s и ${Z_+}^s$ — подмножества Z^s, каждая компонента которых неотрицательна и положительна соответственно. Для $n \in Z_+^s$ положим $\left\|n\right\|_1 = n_1 + \ldots + n_s$, $2^{-n} = (2^{-n_1}, \ldots, 2^{-n_s})$.

Пусть $\Lambda(t) = \Lambda(t_1, ..., t_s)$ непрерывная, неубывающая по каждой переменной при любых фиксированных остальных переменных на $[0, 1]^s$ функция такая, что $\Lambda(t) > 0$ или $\Lambda(t) = 0$ при условии $\prod\limits_{j=1}^{s} t_j > 0$ или $\prod\limits_{j=1}^{s} t_j = 0$, соответственно.

Определим следующие множества $(N > 0)$:

$$\Gamma(\Lambda, N) = \left\{ m \in {Z_+}^s : \Lambda(2^{-m}) \ge \tfrac{1}{N} \right\},\ \Gamma^{\perp}(\Lambda, N) = {Z_+}^s \setminus \Gamma(\Lambda, N)\ ,$$
$$\rho(n) = \{ m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s :\ 2^{n_j - 1} \le |m_j| < 2^{n_j} \} \quad (n \in Z_+^s),$$
$$Q(\Lambda, N) = \bigcup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \rho(n),$$
$$Q^{\perp}(\Lambda, N) = \bigcup_{n \in \Gamma^{\perp}(\Lambda, N)} \rho(n), T(G) = \left\{ t(x) : t(x) = \sum_{n \in G} c_n\ e^{\ i\ (n, x)} \right\},$$

где G — конечное множество точек Z^s.

Пусть на Z^s определены функции или, что то же самое, последовательности: действительнозначная $D(n)$ и $\alpha(n) = (\alpha_1(n), ..., \alpha_s(n))$ со значениями из R^s. В случае, когда $\alpha(n) \equiv \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s) \in R^s$, вся последовательность $\{\alpha(n)\}_{n \in Z^s}$ обозначается через $\boldsymbol{\alpha}$.

Keywords: Λ-*nucleus the Dirichlet,* (D, α)-*derivative, norm*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Предположим, что $f \in L(\pi_s)$ и

$$\sigma(f;x) \equiv \sum_{n\in Z^s} \hat{f}(n) e^{i(n,x)}$$

— её ряд Фурье-Лебега, а ряд

$$\sum_{n\in Z^s} D(n) e^{i(\frac{\pi\alpha(n)}{2},1)} \widehat{f}(n) e^{i(n,x)}$$

является рядом Фурье-Лебега некоторой функции. Эту функцию назовём (D,α)-*производной функции* f и обозначим через $f^{(D)}(x,\alpha)$, саму же функцию f — (D,α)-дифференцируемой (более подробно об этом см.[1]).

Для функции $\Lambda(t)$ введем функции

$$M_{Q(\Lambda,N)}(x) = \sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)} \delta_n(x),$$

$$F_{Q(\Lambda,N)}(x) = \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} \delta_n(x), \quad \delta_n(x) = \sum_{m\in\rho(n)} e^{i(m,x)}, \ x\in R^s.$$

Назовем функцию $M_{Q(\Lambda,N)}(x)$ *многомерным Λ-ядром Дирихле.* Гармоники функции $M_{Q(\Lambda,N)}(x)$ лежат внутри, а функции $F_{Q(\Lambda,N)}(x)$ — вне множества $Q(\Lambda,N)$.

Многие вопросы теории гармонического анализа и теории приближений гармонических функций многих переменных тесно связаны с оценками норм в различных метриках ядер, подобных ядру Дирихле (более подробно об этом изложено в [2]).

В настоящей работе устанавливаются оценки норм функций $M^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha)$ и $F^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha)$ в норме пространства L^p при $1 < p < \infty$ и рассмотрены их точность при некоторых ограничениях на функцию $\Lambda(t)$.

При

$$D(n) = \prod_{j=1}^{s} |n_j|^{\beta_j} \quad, \alpha_j(n) = \beta_j \cdot sign\ n_j,$$

$$\Lambda(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j^{\gamma_j}, \quad t\in[0,1]^s \tag{1}$$

(множество, составленное из всех n таких, что $n\in Q(\prod_{j=1}^{s} t_j^{\gamma_j}, 2^m) \equiv Q_m^{\gamma}$ *называют ступенчатым гиперболическим крестом* [3]) точные порядковые оценки норм функций $M^{(\beta)}_{\gamma,\mu} \equiv M^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha)$ и $F^{(\beta)}_{\gamma,\mu}(x) \equiv F^{(D)}_{Q(\Lambda,2^{\mu})}(x,\alpha)$ в смешанной норме пространства $L^p(\pi_s)(1\le p<\infty)$ были установлены Э.М.Галеевым [2].

2. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть для s-кратной числовой последовательности $\{\lambda(k)\} = \{\lambda(k_1,...,k_s)\}$ существует число M, не зависящее от n, такое, что*

$$|\lambda(k)| \le M \ (k\in Z^s), \quad \sum_{k\in\rho(n)} |\Delta_1...\Delta_s \lambda(k)| \le M \quad (n\in Z_0^s),$$

где $\Delta_j\lambda(k_1,...,k_s) = \lambda(k_1,...,k_j+1,...,k_s) - \lambda(k_1,...,k_s)$ (параллелепипед $\rho(n)$, в общем случае s-мерный, вырождается в параллелепипед меньшей размерности, если некоторые из n_j равны нулю). Тогда, если

$$f(x) \sim \sum_{k\in Z^s} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} \in L^p(\pi_s) \quad (1<p<\infty),$$

то

$$\Lambda f \sim \sum_{k\in Z^s} \lambda(k)\hat{f}(k)e^{i(k,x)} \in L^p(\pi_s)$$

и

$$\|\Lambda f\|_p \ll \|f\|_p\,.$$

Эта теорема Марцинкевича о мультипликаторах [4, с.57].

Здесь и в дальнейшем при положительных A и B запись $A \ll B$ будет означать $A \le CB$, где C некоторая положительная величина, разная, вообще говоря, в различных формулах и зависящая лишь от постоянных параметров. A запись $A \asymp B$ означает $A \ll B \ll A$.

Лемма 2. *[3,с.25]. Пусть* $1 \le q < p < \infty$ *и* $f \in L_0^q(\pi_s)$. *Тогда*

$$\|f\|_p^p << \sum_{n\in Z_+^s} \left\|\delta_n(f;x)\right\|_q^p 2^{\|n\|_1\left(\frac{p}{q}-1\right)},$$

в том смысле, что если ряд, стоящий справа, сходится, то $f \in L_0^p(\pi_s)$ *и выполняется указанное неравенство.*

Лемма 3. *. Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда для каждой функции* $f \in L_0^p(\pi_s)$ *справедливо следующее соотношение :*

$$\left\|\left[\sum_{n\in Z_+^s} |\delta_n(f,x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p \asymp \|f\|_p\,,$$

где

$$\delta_n(f;x) = \sum_{m\in\rho(n)} \hat{f}(m)e^{i(m,x)}.$$

Эта лемма является обобщением на многомерный случай теоремы Литтлвуда-Пэли [4, с.55].

Лемма 4. *[2]. Пусть* $\alpha > 0,\ \beta \in R^s,\ \gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}, i = 1, ..., n,\ \gamma = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu > \gamma_{\nu+1} \ge ... \ge$ $\ge \gamma_s\ (1 \le \nu \le s)$. *Тогда*

$$\sum_{(\alpha,n)\le N} 2^{(n,\beta)} \asymp \begin{cases} 2^{\gamma N}N^{\nu-1}, & \gamma > 0; \\ N^\nu, & \gamma = 0; \\ 1, & \gamma < 0. \end{cases}$$

Лемма 5. *[2]. Пусть* $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}, i = 1, ..., n,\ \gamma = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le ... \le$ $\le \gamma_s\ (1 \le \nu \le s)$. *Тогда*

$$\sum_{(\alpha,n)>N} 2^{-(n,\beta)} \asymp 2^{\gamma N}N^{\nu-1}.$$

Сейчас мы рассмотрим функцию $\Lambda(t)$ вида

$$\Lambda(t) = \Lambda(t_1,t_2) = \frac{t_1^r}{\left(log\frac{1}{t_1}\right)^{b_1}}\frac{t_2^r}{\left(log\frac{1}{t_2}\right)^{b_2}}\ (0 < t < 1),$$
$$\Lambda(0,0) = \Lambda(t_1,0) = \Lambda(0,t_2) = 0,\quad 0 < r < k.$$

Здесь и дальше рассматриваются логарифмы по основанию 2. Так как $r < k$, то $\Lambda(t)$ обладает свойствами смешанного модуля гладкости порядка k [5]. Для выбранной $\Lambda(t)$ положим $\Gamma(\Lambda, N) = \Gamma(N)$ и $Q(\Lambda, N) = Q(N)$.

Наряду с множествами $Q(N)$ рассмотрим также множества

$$G(N)=\left\{m\in Z^2:\ |m_j|\in Z_+, j=1,2, \Lambda\left(\frac{1}{|m_1|},\frac{1}{|m_2|}\right)\geq\frac{1}{N}\right\},$$

т.е.

$$G(N)=\Big\{m\in Z^2:\ |m_j|\in Z_+,\ j=1,2,$$
$$|m_1|^r(log|m_1|)_+^{b_1}\cdot|m_2|^r(log|m_2|)_+^{b_2}\leq N\Big\},$$

где $(log\ n)_+=log\ n$ при $n=2,3,...$ и $(log\ n)_+=1$ при $n=1$.

Множества $G(N)$ и $\Lambda(N)$ эквивалентны, а именно, из неравенств

$$\Lambda\left(\frac{1}{|m_1|},\frac{1}{|m_2|}\right)\leq\Lambda\left(2^{1-n_1},2^{1-n_2}\right)\leq 2^{2k}\Lambda\left(2^{-n}\right)\leq 2^{2k}\Lambda\left(\frac{1}{|m_1|},\frac{1}{|m_2|}\right),$$

справедливых для $m=(m_1,m_2)\in\rho(n)$, вытекает, что

$$G(N)\subset Q(2^{2k}N)\subset G(2^{2k}N). \qquad (2)$$

В дальнейшем через $|G(N)|$ обозначим число элементов множества $G(N)$.

Справедлива

Лемма 6. *. Пусть $\alpha\geq 0,\ 0<r<k$ и $b_1,b_2\in R$. Тогда*

$$\sum_{n\in\Gamma(N)}2^{\|n\|_1\alpha}\asymp N^{\frac{\alpha_0}{r}}\Phi(b_1,b_2,r,\alpha_0,N),$$

где

$$\alpha_0=\begin{cases}\alpha, & \alpha>0;\\ 1, & \alpha=0,\end{cases}$$

$$\Phi(b_1,b_2,r,\alpha_0,N)=\begin{cases}(log\ N)^{-\frac{b_1\alpha}{r}-\frac{b_2\alpha_0}{r}+1}, & b_1\alpha_0<r,b_2\alpha_0<r;\\ (log\ N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}}\cdot log\ log\ N, & b_1\alpha_0\leq r,b_2\alpha_0=r;\\ (log\ N)^{-\frac{b_2\alpha_0}{r}}\cdot log\ log\ N, & b_1\alpha_0=r,b_2\alpha_0\leq r;\\ (log\ N)^{-\frac{b_1\alpha_0}{r}}, & b_1\alpha_0\leq r,b_2\alpha_0>r;\\ (log\ N)^{-\frac{b_2\alpha_0}{r}}, & b_1\alpha_0>r,b_2\alpha_0\leq r;\\ N^{-\frac{b\alpha_0}{r}}, & b_1\alpha_0>r,b_2\alpha_0>r,\\ \qquad b=min\{b_1,b_2\}.\end{cases}$$

Доказательство. При $\alpha=0$ лемма доказана Н.Н.Пустовойтовым [5], а при $\alpha>0$ доказательство проводится аналогично.

3. В условиях принятых выше определений и обозначений справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *. Пусть $1<p<\infty$ и для функций $D(n)\neq 0$, $\alpha(n)$ существует число $C>0$ такое, что для всех $k\in\rho(n), n\in Z_+^s$*

$$\left|\frac{D(k)}{D(2^n)}\right|\leq C, \frac{1}{|D(2^n)|}\sum_{k\in\rho(n)}\left|\Delta_1...\Delta_s D(k)e^{i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)}\right|\leq C. \qquad (3)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left\|M_{Q(\Lambda,N)}^{(D)}(x,\alpha)\right\|_p\ll\left(\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)}|D(2^n)|^p\cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4)$$

Доказательство. Заметим,что в силу леммы 1

$$\left\|\delta_n^{(D)}(x,\alpha)\right\|_p=\left\|D(2^n)\sum_{k\in\rho(n)}\frac{D(k)}{D(2^n)}e^{i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)}\cdot e^{i(k,x)}\right\|_p\ll|D(2^n)|\cdot\left\|\delta_n(x)\right\|_p. \tag{5}$$

Учитывая, что [3, с.87]

$$\left\|\delta_n(x)\right\|_p\asymp 2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-1\right)},$$

а также пользуясь леммой 2 и соотношением (5) для некоторого $1<q<p$, получим

$$\left\|M_{Q(\Lambda,N)}^{(D)}(x,\alpha)\right\|_p^p\ll\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)}2^{\|n\|_1\left(\frac{p}{q}-1\right)}\left\|\delta_n^{(D)}(x,\alpha)\right\|_q^p\ll\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)}|D(2^n)|^p\cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}.$$

Оценка (4) и тем самым, теорема доказаны. Аналогично доказывается

Т е о р е м а 2. *. Пусть $1<p<\infty$ и функции $D(n)\neq 0,\ \alpha(n)$ удовлетворяют условию (3). Если*

$$\sum_{n\in Z_+^s}|D(2^n)|^p\cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}<\infty, \tag{6}$$

то функция $F_{Q(\Lambda,N)}^{(D)}(x,\alpha)\in L^p(\pi_s)$ и

$$\left\|F_{Q(\Lambda,N)}^{(D)}(x,\alpha)\right\|_p\ll\left(\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)}|D(2^n)|^p\cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о точности оценок, полученных в теоремах 1 и 2.

Т е о р е м а 3. *. Пусть $1<p<\infty$ и функции $D(n)\neq 0$, $\alpha(n)$ удовлетворяют условиям* (3) *и*

$$\left|\frac{D(2^n)}{D(k)}\right|\le C,\quad k\in\rho(n),\ |D(2^n)|\sum_{k\in\rho(n)}\left|\Delta_1...\Delta_s\frac{1}{D(k)}e^{-i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)}\right|\le C. \tag{7}$$

для некоторого $C>0$ и для всех $n\in Z_+^s$. Тогда

$$\left\|M_{Q(\Lambda,N)}^{(D)}(x,\alpha)\right\|_p\asymp\left(\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)}|D(2^n)|^p\cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Доказательство. Оценка сверху сразу следует из теоремы 1. Оценка снизу. Сначала отметим,что функция одной переменной $\delta_n(t)$ приводится к следующему виду:

$$\delta_n(t)=\sum_{k\in\rho(n)}e^{ikt}=2\sum_{2^{n-1}\le k<2^n}coskt=\frac{2sin^{n-2}t\cdot cos2^{-1}(3\cdot 2^{n-1}-1)t}{sin\frac{t}{2}}.$$

Из оценки $\frac{2t}{\pi}\le sint\le t$ при $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, пользуясь тем, что число слагаемых в $\rho(n)$ равно 2^n, получаем, что (см. [2])

$$\pi^{-1}2^{n+1}cos\frac{3\pi}{8}\le|\delta_n(t)|\le 2^n,\quad t\in T_k,\quad n<k, \tag{9}$$

где

$$T_k=\{t\in R:\ \pi 2^{-k-1}<|t|\le\pi 2^{-k}\}\ (k\ge 0).$$

Теперь перейдем к доказательству оценки снизу в (8). Пользуясь леммой 1 при

$$\lambda_m = \frac{D(2^n)}{D(k)} e^{-i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)}$$

имеем

$$\left\| M^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha) \right\|_p = \left\| \sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)} \sum_{k\in\rho(n)} D(k) e^{i(\frac{\pi\alpha(k)}{2},1)} \cdot e^{i(k,x)} \right\|_p \gg \left\| \sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)} \sum_{k\in\rho(n)} D(2^n) \cdot e^{i(k,x)} \right\|_p .$$

Далее, в силу леммы 3, разбивая отрезок интегрирования на области

$$T_k = \{x \in R^s :\ \pi 2^{-k_j-1} < |x_j| \le \pi 2^{-k_j}\}\ (k \in Z^s_+)$$

и в сумме по n беря только слагаемое с $n = k$, выводим, что

$$\left\| D^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha) \right\|_p \gg \left\| \left[\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)} |D(2^n)\delta_n(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_p \gg \left(\sum_{k\in Z^s_0} \int_{T_{k+1}} \left| D(2^k)\delta_k(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Следовательно, в силу оценки (9), имеем

$$\left\| D^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha) \right\|_p \gg \left(\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)} |D(2^n)|^p \, 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Оценка снизу и тем самым, теорема полностью доказаны.

Аналогично доказывается

Теорема 4. . *Пусть* $1 < p < \infty$ *и функции* $D(n)$, $\alpha(n)$ *удовлетворяют условиям теоремы 3 и условию* (6). *Тогда*

$$\left\| F^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha) \right\|_p \asymp \left(\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} |D(2^n)|^p \cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Ясно, что функции $D(n)$, $\alpha(n)$, определенные как в (1), удовлетворяют условиям (3) и (7). В этом случае обозначим $M^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x) \equiv M^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha)$ и $F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x) \equiv F^{(D)}_{Q(\Lambda,N)}(x,\alpha)$. Тогда из теорем 3 и 4, соответственно, вытекают следующие

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta \in R^s$. Тогда

$$\left\| M^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x) \right\|_p \asymp \left(\sum_{n\in\Gamma(\Lambda,N)} 2^{p\left(n,\beta+1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{10}$$

Следствие 2. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta \in R^s$. Функция $F_{Q(\Lambda,N)} \in L^p(\pi_s)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\in Z^s_+} 2^{p\left(n,\beta+1-\frac{1}{p}\right)} < \infty. \tag{11}$$

И если выполнено условие (11), то

$$\left\| F^{(\beta)}_{Q(\Lambda,N)}(x) \right\|_p \asymp \left(\sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Lambda,N)} 2^{p\left(n,\beta+1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{12}$$

Замечание 1. *Для гиперболических крестов* (см. (1)), *при*

$$\gamma_j > 0,\ r_j = \frac{1}{\gamma_j}\left(\beta_j + 1 - \frac{1}{p}\right)\ (j = 1, ..., s),\ r = r_1 = ... = r_\nu > r_{\nu+1} \geq ... \geq r_s.$$

оценивая сумму в соотношении (10) *с помощью леммы 4, получаем*

$$\left\|M_{\gamma,\mu}^{(\beta)}(x)\right\|_p \asymp \begin{cases} 2^{r\mu} \cdot \mu^{\frac{\nu-1}{p}}, & r > 0; \\ \mu^\nu, & r = 0; \\ 1, & r < 0. \end{cases}$$

Если $r_j < 0$ $(j = 1, ..., s)$, *то из соотношения* (12) *и леммы 5 вытекает следующая оценка*

$$\left\|F_{\gamma,\mu}^{(\beta)}(x)\right\|_p \asymp \left(\sum_{(\gamma,n)>\mu} 2^{p(n,\beta)} \cdot 2^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)\|n\|_1}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp 2^{r\mu}\mu^{\frac{\nu-1}{p}}.$$

Эти оценки ранее получены Э.М. Галеевым [2].

Из следствия 1 и леммы 6 непосредственно вытекает

Следствие 3. Пусть $1 < p < \infty,\ \beta, b_1, b_2 \in R,\ r > 0$ и $\beta + 1 - \frac{1}{p} \geq 0$. Тогда

$$\left\|M_{Q(N)}^{(\beta)}(x)\right\|_p \asymp N^{\frac{\alpha_0}{rp}} (\Phi(b_1, b_2, r, \alpha_0, N))^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\alpha_0 = \begin{cases} p\left(\beta + 1 - \frac{1}{p}\right), & \beta + 1 - \frac{1}{p} > 0; \\ 1, & \beta + 1 - \frac{1}{p} = 0. \end{cases}$$

Цитированная литература

1. **Сихов М.Б.** // Доклады НАН РК. 2000. N 5. С. 14 — 19.
2. **Галеев Э.М.** // Матем. сборник. 1982. Т.117(159), N 1. С. 32 — -43.
3. **Темляков В.Н.** //Труды МИАН СССР. 1986. Т.178. С. 3 — -112.
4. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
5. **Пустовойтов Н.Н.** //Изв. АН России. Сер.матем. 2000. Т.64, N 1. С. 123 — -144.

Поступила в редакцию 15.04.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 4 (6). С. 89 — 95*

ХРОНИКА

ПЕРЕЧЕНЬ

проектов, рекомендованных НАН РК и МОН РК для финансирования в 2003 году в рамках программ фундаментальных исследований на 2003 — 2005 г.г. по проблемам математики, механики и машиноведения, информатики, дистанционного зондирования и космических технологий

Основное научное направление: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

1.1. Изучение свойств функциональных пространств, интегральных и дифференциальных операторов

Головная организация: Институт математики (научный руководитель программы - д.ф.м.н. Женсыкбаев А.А.)

Наименование проекта	**Научные руководители**	**Организация, представившая проект**
Критерии типа хи-квадрат, основанные на классах Неймана-Пирсона	Воинов В.Г., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Локальные и структурные свойства весовых пространств и дифференциальных операторов	Ойнаров Р., д.ф.-м.н., Байдельдинов Б.Л., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Оптимальные методы приближения функций и операторов	Женсыкбаев А.А., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Интерполяционные методы анизотропных пространств и их приложения к задачам теории функциональных пространств, теории рядов Фурье, теории приближений	Нурсултанов Е.Д., д.ф.-м.н.	Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Методы приближений и оценки их погрешностей	Темиргалиев Н., д.ф.-м.н.	Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Весовые пространства дифференцируемых функций и дифференциальные и сингулярные операторы	Кусаинова Л.К., д.ф.-м.н.	Институт прикладной математики МОН РК
Интегральные и дифференциальные операторы в краевых задачах	Блиев Н.К., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК

Функциональные пространства с различными ортогональными базисами	Смаилов Е.С., д.ф.-м.н.	Карагандинский университет им. Е.А. Букетова

1.2. Провести качественный анализ дифференциальных уравнений и разработать методы решения краевых задач математической физики

Головная организация: Институт математики (научный руководитель программы - д.ф.-м.н. Рахимбердиев М.И.)

Краевые задачи для нагруженных, смешанного типа и Больцмана уравнений	Дженалиев М.Т., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Алгоритмическое и нейросетевое моделирование плохо формализуемых распределенных динамических систем	Пак И.Т., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Развитие качественных методов исследования дифференциальных уравнений для решения краевых и обратных задач	Джумабаев Д.С., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Задачи дифракции волн в деформируемых твердых и электромагнитных средах	Алексеева Л.А., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Нелинейные неклассические краевые задачи математической физики	Бижанова Г.И., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Теория Фредгольмовых и вариационных задач для дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического, смешанного, смешанно-составного типов	Кальменов Т.Ш., д.ф.-м.н	Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова
Разработка методов решения краевых задач неоднородных турбулентных течений	Найманова А.Ж., д.ф.-м.н	Институт математики МОН РК
Качественный и численный анализ зависимости динамики систем от параметров	Рахимбердиев М.И., д.ф.-м.н	Институт математики МОН РК
Конструктивные методы решения краевых задач управляемости и оптимального управления с фазовыми и интегральными ограничениями для обыкновенных дифференциальных уравнений	Айсагалиев С.А., д.т.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Теория краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений и уравнений в частных производных	Касымов К.А., д.ф.-м.н	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби

Краевые задачи с фазовыми превращениями для систем параболического и смешанного типа и их приложения к моделированию динамических процессов тепло-, электро- и массопереноса в электрических коммутационных аппаратах	Харин С.Н., д.ф.-м.н Шпади Ю.Р., к.ф.-м.н	Институт математики МОН РК
Конструктивные методы качественного исследования и решения краевых задач для дифференциальных уравнений и задач теории колебаний	Кенжебаев К.К., д.ф.-м.н	Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
Теория и методы решения прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений математической физики	Атанбаев С.А., д.ф.-м.н Абылкаиров У.У., к.ф.-м.н	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби

1.3. Изучение алгоритмических и структурных вопросов математической логики и алгебры

Головная организация: Институт математики (научные руководители программы - д.ф.-м.н. Джумадильдаев А.А., д.ф.-м.н. Добрица В.П.)

Обобщенно вычислимые модели	Хисамиев Н.Г., д.ф.-м.н.	ВКГТУ им. Д. Серикбаева
Вычислимость и определимость в арифметике, модели стабильных теорий первого порядка	Бадаев С.А., д.ф.-м.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Тождества и автоморфизмы алгебраических систем	Джумадильдаев А.А., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК
Алгебры Линденбаума и алгоритмические свойства семантических классов моделей и группы автоморфизмов моделей теорий первого порядка	Перетятькин М.Г., д.ф.-м.н.	Институт математики МОН РК

1.4. Изучить проблемы математического моделирования естественных процессов и вычислительной математики

Головная организация: Институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби (научные руководители программы - д.ф.-м.н. Смагулов Ш.С., д.ф.-м.н. Данаев Н.Т.)

Применение методов функционального анализа в приближенном решении задач теории гидродинамики и упругости	Отелбаев М., д.ф.-м.н.	Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

Математическое моделирование нелинейных явлений переноса в химически реагирующих и газах	Лукьянов А.Т., д.ф.-м.н. Ицкова П.Г., к.ф.-м.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Разработка метода крупных вихрей для задач гидродинамики с применением параллельных вычислительных технологий и их приложения к проблемам] окружающей среды	Жумагулов Б.Т., д.т.н. Абдибеков У.С., к.ф.-м.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Разработка эффективных методов численного решения задач математической физики	Данаев Н.Т., д.ф.-м.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Математические вопросы приближенных методов решения задач гидродинамики, фильтрации и их приложения	Смагулов Ш.С.,д.ф.-м.н. Мухамбетжанов С.Т., к.т.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби

Основное научное направление: ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ

1.5. Разработка методов исследования динамики машин, манипуляционных роботов и систем управления технологическими процессами

Головная организация: Институт механики и машиноведения (научный руководитель программы - Директор института, д.ф.м.н. Байгунчеков Ж.Ж.)

Разработка методов автоматизированного анализа и проектирования механизмов и манипуляционных роботов	Молдабеков М., д.т.н.	Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова
Разработка методов динамического анализа, синтеза и управления движений механизмов машин с учетом нелинейных характеристик, направленных на решения задач динамики отраслевых машин	Уалиев Г.У., д.т.н. Тулешов А.К., д.т.н.	Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова
Разработка аналитических и численных методов синтеза и экспертной системы функционального анализа рычажных механизмов	Ибраев С.М., д.т.н.	Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова
Разработка оптимальных методов исследования динамики, управления и устойчивости движения роторных машин с автобалансирующими устройствами	Рахимов Е.Р., д.т.н. Кадырбекулы А.Б., к.т.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби

Разработка методов анализа и синтеза машин с компьютерным управлением исходя из наличия взаимосвязанных энергетических и информационных потоков	Шоланов К.С., д.т.н.	КазНТУ им. К.И. Сатпаева
Исследовать проблемы механики и управления роботами параллельной и структуры на основе мехатроники развить современные методы исследования и проектирования машин и механизмов	Байгунчеков Ж.Ж., д.т.н.	Казахстанско-Британский технический университет

1.6. Теоретические проблемы механики тектонических процессов земной коры, разработка объектов нефтегазовой и горнорудной отрасли, подземного и транспортного строительства

Головная организация: Институт механики и машиноведения (научные руководители программы - академики Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М.)

Теоретические исследования силовых, моментных напряжений и реологии на напряженно-деформированное состояние массива горных пород с выработкой и дилатационно-пластического разрушения тектонически трещиноватого массива	Тусупов М.Т., д.ф.-м.н.	Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова
Разработка методов механики подземных сооружений и конструкций при особо сложных природных и техногенных воздействиях	Айталиев Ш.М., д.т.н. Дильдабаев Ш.А., к.ф.-м.н.	Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова
Механика процессов горо- и разломообразования в земной коре, дифференциального вращения во внутренних оболочках земли	Ержанов Ж.С., д.т.н. Баймухаметов А.А., к.ф.-м.н.	Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова
Создание методов расчета прочности, устойчивости и несущей способности пород приконтурной зоны подземных сооружений и глубоких нефтегазовых скважин в сложных горно-геологических условиях Центрального и Западного Казахстана	Алимжанов М.Т., д.т.н.	Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева

1.7. Актуальные проблемы механики жидкости, газа и плазмы

Головная организация: Институт механики и математики КазГУ им. аль-Фараби (научный руководитель программы - д.ф.-м.м. Ершин Ш.А.)

Аэрогидродинамические и физико-химические закономерности двухфазных турбулентных струй с дискретно расположенными и перфорированными преградами	Балабеков О.С., д.т.н.	Южно-Казахстанский государственный университет им. Ауэзова
Создание математических и гидродинамических основ технологии добычи урана методом подземного выщелащивания и разработка информационных систем для рационального и эффективного использования урановых месторождений	Калтаев А.Ж., д.ф.-м.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Гидродинамика и теплообмен струйных течений с физико-химическими превращениями в поле объемных сил	Ершин Ш.А., д.т.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби
Исследование турбулентных струйных течений с химическими превращениями	Жапбасбаев У.К., д.т.н.	НИИ механики и математики КазНУ им. аль-Фараби

Основное научное направление: ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ, ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ И КОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

1.8. Разработка теоретических основ создания национальной системы космического мониторинга территории Казахстана

Головная организация: Институт космических исследований (научный руководитель программы - академик Султангазин У.М.)

Разработка теоретических основ методов и технологии обработки космических изображений с целью распознавания природных объектов	Султангазин У.М., д.ф.-м.н.	Институт космических исследований

Исследование динамики территориальных комплексов в условиях повышенных антропогенных нагрузок и чрезвычайных ситуаций в рамках национальной системы космического мониторинга	Закарин Э.А., д.т.н.	Институт космических исследований

1.8. Разработка фундаментальных основ принятия решений, языков спецификаций, биокомпьютерного моделирования, управления сложными объектами для создания безопасных и эффективных информационных систем

Головная организация: Институт проблем информатики и управления (научный руководитель программы - д.ф.-м.н.Айдарханов М.Б.)

Разработать и исследовать модели и методы процессов моделирования и регулирования неравновесных открытых экономических систем	Ашимов А.А., д.т.н.	Институт проблем информатики и управления
Логические языки спецификаций реагирующих информационных систем	Байжанов Б.С., к.ф.-м.н.	Институт проблем информатики и управления
Теоретические основы и информационная технология построения искусственных иммунных систем для интеллектуального управления сложными объектами в условиях неопределенности	Соколова С.П., д.т.н.	Институт проблем информатики и управления
Разработка и исследование моделей методов и алгоритмов нечеткой математики и нейронных сетей для информационных технологий классификации и принятия решений	Айдарханов М.Б., д.ф.-м.н.	Институт проблем информатики и управления
Разработка технологий по информационной безопасности (криптографическая защита информации на основе нетрадиционных подходов)	Бияшев Р.К., д.т.н.	Институт проблем информатики и управления

ХРОНИКА

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ",

посвященная 80-летию члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Толеубая Идрисовича Аманова

ПЕРВОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

Международная конференция "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", посвященная 80-летию Т. И. Аманова будет проходить с **1 по 4 июля 2003 года** в Семипалатинском государственном университете им. Шакарима (Семипалатинск, Казахстан).

Конференцию проводят Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Москва), Семипалатинский государственный университет им. Шакариама (Семипалатинск), Институт Математики МОН РК (Алматы), Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби (Алматы), Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова (Караганда), акимат Восточно-Казахстанской области РК, акимат г. Семипалатинска.

СЕКЦИИ:

- Теория функций;
- Функциональный анализ;
- Прикладные вопросы теории функций и функционального анализа с подсекциями:
  - а) применение ТФ и ФА в вычислительной математике;
  - б) применение ФА в уравнениях частных производных;
  - в) применение ФА в математической и теоретической физике;
- Теория и современная технология обучения основам физико-математических наук.

Программа конференции состоит из пленарных (45 минут) и секционных (15 минут) докладов. Рабочие языки конференции: казахский, русский, английский.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ: Н.Т. Аманов, Н.К. Блиев, С.К. Водопьянов, О.В. Бесов (сопредседатель), В.И. Буренков, А.А. Женсыкбаев (сопредседатель), Л.Д. Кудрявцев, М.О. Отелбаев, Е.С. Смаилов (сопредседатель), К.Ж. Наурызбаев, Ш.С. Смагулов, У.М. Султангазин, Представитель университета Семей.

ЗАКАЗНЫЕ ДОКЛАДЫ: С.М. Никольский (Россия), О.В. Бесов (Россия), Ю.Г. Решетняк (Россия), В.Н. Буренков (Англия), У.М. Султангазин (Казахстан), М.О. Отелбаев (Казахстан), А.А. Женсыкбаев (Казахстан), Н.К. Блиев (Казахстан).

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ: С.М. Никольский — академик РАН (почетный председатель оргкомитета, Россия), У.М. Султангазин — академик НАН РК (сопредседатель, Казахстан), О.В. Бесов — член.корр РАН (Россия), Н.К. Блиев — член.корр. НАН РК (Казахстан), А.А. Женсыкбаев — член.корр. НАН РК (сопредседатель, Казахстан), К.А. Касымов — член.корр. НАН РК (Казахстан), Л.Д. Кудрявцев — член.корр РАН (Россия), М.О. Отелбаев — член.корр НАН РК (Казахстан), Ю.Г. Решетняк — академик РАН (Россия), Б.Л. Байдельдинов (Казахстан), Н.А. Бокаев (Казахстан), В.И. Буренков (Англия), С.К. Водопьянов (Россия),

РЕГИСТРАЦИОННЫЙ ВЗНОС: регистрационный взнос должен быть уплачен наличными во время регистрации. Для участников из Республики Казахстан и стран СНГ взнос составляет 10 долларов США (в тенге по курсу Нацбанка РК), для участников из других стран — 50 американских долларов.

РЕГИСТРАЦИОННАЯ ФОРМА: для участия в конференции необходимо заполнить следующую регистрационную форму не позднее **1 февраля 2003 года** и направить по Email: fmf@semgu.kz
Организационный комитет Международной конференции "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", Семипалатинский государственный университет им. Шакарима, ул. Танирбергенова 1, г. Семипалатинск, 490035, Казахстан.

РЕГИСТРАЦИОННАЯ ФОРМА:
Фамилия:
Имя:
Организация:
Должность:
Название доклада:
Почтовый адрес:
Улица:
Город:
Страна:
Индекс:
Телефон:
e-mail:

РАЗМЕЩЕНИЕ: проживание участников будет организовано в гостиницах (стоимость от 12 долларов США в сутки).

ПУБЛИКАЦИИ: тезисы докладов, направленные до **1 марта 2003 года** по адресу e-mail: fmf@semgu.kz, (объемом 1 страница) в формате LaTEX, будут опубликованы до начала конференции. Образец оформления тезисов:

```
\documentclass[English, Russian, 12pt]{article}
\usepackage{babel, amsmath, amssymb}
\setlength{texwidth}{6.5in} \setlength{texheight}{9.5in}
\pagestule{headings}
\begin{document} \select language{russian} \setcounter{section}{3}\vspase{0.3in}
\begin{center}
\{\Large The title of the report}\\
\sc Autor\\it Organization\\
```

```
Address, e-mail
\end{center}
\end{document}
```

Материалы конференции будут опубликованы.

ВАЖНЫЕ ДАТЫ: регистрация участников до **1 февраля 2003 года**. Предоставление тезисов докладов в электронной форме до **1 марта 2003 года**.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:
Телефон: (3222)458466
Факс: (3222)665764
E-mail: fmf@semgu.kz
Почтовый адрес: Семипалатинский государственный университет им.Шакарима ул. Танирбергенова 1, г.Семипалатинск, 490035, Казахстан

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ,

посвященная 100-летию академика АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Константина Петровича Персидского

ПЕРВОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

Международная конференция по дифференциальным уравнениям, посвященная 100-летию К. П. Персидского будет проходить с **24-26 сентября 2003 года** в Институте математики МОН РК (Алматы, Казахстан).

Конференцию проводят Институт математики МОН РК (Алматы), Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби (Алматы), Актюбинский Университет им. Х. Жубанова (Актобе), Жетысуйский Универститет им. И. Жансугурова (Талдыкорган).

СЕКЦИИ:

- Дифференциальные уравнения;
- Динамические системы;
- Теория устойчивости;
- Математическая физика;
- Смежные вопросы математического анализа;
- Прикладная и вычислительная математика.

Программа конференции состоит из пленарных (45 минут) и секционных (15 минут) докладов. Рабочие языки конференции: русский и английский.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ: В.М. Амербаев (Россия), Н.К. Блиев (Казахстан), М.И. Иманалиев (Кыргызстан), К.К. Кенжебаев (Казахстан), С.Н. Харин (Англия), Е.У. Медеуов (Казахстан), В.М. Миллионщиков (Россия), М.О. Отелбаев (Казахстан), С.К. Персидский (Украина), Р.Х. Розов (Россия), В.В. Румянцев (Россия, сопредседатель), А.М. Самойленко (Украина, сопредседатель), Ш.С. Смагулов (Казахстан), У.М. Султангазин (Казахстан, сопредседатель), А.А. Женсыкбаев (Казахстан), Г.К. Закирьянова (Казахстан, ученый секретарь).

ЗАКАЗНЫЕ ДОКЛАДЫ: М.И. Иманалиев (Кыргызстан), В.М. Миллионщиков (Россия), М.И. Рахимбердиев (Казахстан), Р.Х. Розов (Россия), В.В. Румянцев (Россия), А.М. Самойленко (Украина).

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ: Л.А. Алексеева (Казахстан), Г.Н. Багаутдинов (Казахстан), Б.Л. Байдельдинов (Казахстан), Г.И. Бижанова (Казахстан), Н.К. Блиев (Казахстан), М.Т. Дженалиев (Казахстан), Д.С. Джумабаев (Казахстан), К.А. Касымов (Казахстан), А.А. Кенжебаев (Казахстан), А.А. Хабибулин (Казахстан), Н.И. Лобанова (казахстан), Е.У. Медеуов (Казахстан), И.Т. Пак (Казахстан), М.И. Рахимбердиев (Казахстан), А.С. Сакабеков (Казахстан), Ш.С. Смагулов (Казахстан), Ж.С. Сулейменов (Казахстан), У.М. Султангазин (Казахстан), А.А. Женсыкбаев (Казахстан, председатель), Г.К. Закирьянова (Казахстан, ученый секретарь), А.Ж. Сарсенбай (Казахстан).

РЕГИСТРАЦИОННЫЙ ВЗНОС: регистрационный взнос должен быть уплачен наличными во время регистрации. Для участников из Республики Казахстан и стран СНГ взнос составляет 10 долларов США (в тенге по курсу Нацбанка РК), для участников из других стран — 50 американских долларов.

РЕГИСТРАЦИОННАЯ ФОРМА: для участия в конференции необходимо заполнить следующую регистрационную форму не позднее **1 марта 2003 года** и направить по Email: zakir@math.kz, Закирьянова Гульмира Кожахметовна или по почтовому адресу: Организационный комитет Международной конференции по Дифференциальным уравнениям: Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, г. Алматы, 480100, Казахстан, Закирьянова Гульмира Кожахметовна.

РЕГИСТРАЦИОННАЯ ФОРМА:
Фамилия:
Имя:
Организация:
Должность:
Название доклада:
Почтовый адрес:
Улица:
Город:
Страна:
Индекс:
Телефон:
e-mail:

РАЗМЕЩЕНИЕ: проживание участников будет организовано в гостиницах (стоимость от 20 долларов США в сутки).

ПУБЛИКАЦИИ: тезисы докладов, направленные до **1 апреля 2003 года** по адресу E-mail: zakir@math.kz, Закирьяновой Гульмире Кожахметовне (объемом 1 страница) в формате LaTEX, будут опубликованы до начала конференции. Образец оформления тезисов:

```
\documentclass[English, Russian, 12pt]{article}
\usepackage{babel, amsmath, amssymb}
\setlength{texwidth}{6.5in}
 \setlength{texheight}{9.5in}
  \pagestule{headings}
\begin{document}
 \select language{russian} \setcounter{section}{3}\vspase{0,3in}
\begin{center}
```

```
\{\Large The title of the report}\\
\sc Autor\\ \it Organization\\
Address, e-mail
\end{center}
\end{document}
```

Материалы конференции будут опубликованы.

ВАЖНЫЕ ДАТЫ: регистрация участников до **1 марта 2003 года**. Предоставление тезисов докладов в электронной форме до **1 апреля 2003 года**.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:
Телефон: +7(3272)913764
Факс: +7(3272)913740
E-mail: zakir@math.kz, Закирьянова Гульмира Кожахметовна
Почтовый адрес: Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, г. Алматы, 480100, Казахстан, Закирьянова Гульмира Кожахметовна.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 532.517.4 2000 MSC: 35Q60

Abdibekov U.S. **About temperature and concentration of influence of pulsation structure of turbulence shear flows** // Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.5–10.

To close Reynolds equation of turbulence shear flows a semitheoretical model, composed of equation for secondary single point moments of velocity, temperature and concentration fields is proposed. It is shown analitical expressions obtained for turbulent characteristics depend on the main flow characteristics double temperature and concentration influence.
References — 6.

УДК: 517.51 2000 MSC: 46E35

Abdikalykova Z.T. **Theorems of embedding for function spaces with multiweighted derivatives**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.11–18.

The theorems of embedding for function spaces with multiweighted derivatives depending on behavior of functions in the neighborhood of singular point have been proved.
References — 5.

УДК: 517.518.453 2000 MSC: 42A10

Akishev G. **On conditions of general Haar systems basis**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.19–25.

In this paper unconditional basis of general Haar system in separable symmetric space has been got.
References — 13.

УДК: 517.956 2000 MSC: 74J20

Aldashev S.A. **On the criteria of singularity of Darbu-Protter problem solution for one class of many-dimentional hyperbolic equations**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.26–29.

In this criteria of Darbu-Protter problem solution for one class of many-dimentional hyperbolic equations have been obtained.
References — 6

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

Ayaganov E.T., Noskova S.V. **The analysis of dynamical properties of the system with varying configuration of automatic control of stochastic object with delay**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.30–33.

On the basis of a stochastic analogue of direct Lyapunov's method, using Lyapunov's function and Razumikhin approach the problem of analysis of dynamical properties of attraction in mean - square for the stochastic nonstationary system with varying configuration of control of the object with delay is under considered.

References — 5

УДК: 517.5 2000 MSC: 65D32

Zhuk V.V. **On recovery of functionals on ET-systems**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.34–42.

In this paper we study a problem of recovery of linear by means of quadrature formulae exact on ET-systems of the highest degree. We obtain upper bounds for degree of ET-system on which given quadratures can be exact. We also get conditions when the corresponding bounds are attained. The examples illustrating the received results are given.

References — 8.

УДК: 681.5 2000 MSC: 34D20, 34K20

Ivlev R.S. **Investigating of absolute stability of nonlinear interval-specified time-delay systems**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.43–48.

Sufficient conditions of absolute stability of linear interval-specified differential-difference system with the the sector type nonlinearity has been obtained using the method of Lyapunov-Krasovsky functionals.

References — 11.

УДК: 517.9 2000 MSC: 35F20, 35F30, 35L60

Iglikov A., Koshkarova B.S. **On one non-linear singular equation**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.49–53.

The theorem of existence and uniqueness of the solution of one non-linear equation in the weighted space of Hölder is proved.

References — 5.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C10, 03C35, 03C64

Kulpeshov B.Sh. **Binarity of $\aleph_0$-categorical 0-minimal theories of convexity rank 1**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.54–61.

A. Pillay and Ch. Steinhorn have described all $\aleph_0$-categorical o-minimal theories. Their description implies binarity of these theories. In this paper we generalize these results on $\aleph_0$-categorical almost 0-minimal theories of convexity rank 1 and get some other properties.

References — 8.

УДК: 517.43 2000 MSC: 35B65, 35P05, 47B38

Muratbekov M.B., Seytbekova L.R. **On the hilbertness resolvent of a class non-semibounded differential operators**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.62–67.

The conditions of hilbertness of resolvent and its belonging to class δ_p for non-semi-bounded differential operator are obtained.

References — 19.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35K20

Orinbasarov M., Orinbasarov E.M. **Non-local initial and boundary problems for heat conduct equation with shifting time direction**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.68–74.

Solvability of initial-boundary problems for heat conduction of Non-local initial and boundary problems has got. Special volume and surface potential are constructed. Their properties and applications for the boundary problems have been researched.

References — 3.

УДК: 517.956.6 2000 MSC: 34K06, 34K10, 35M10

Ramazanov M.I. **About nonlocal problem for loaded hyperbolic and elliptic equation in rectangular region**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.75–81.

In the region Q we consider the Boundary Value Problem:

$$(-1)^j D_t^2 u^j(x,t) - D_x^2 u^j(x,t) + M^j[u^j] = f^j(x,t),\ (x,t)\in Q_j;$$
$$D_x^p u^j(0,t) = D_x^p u^j(2\pi,t); D_t^p u^1(x,T) = \mu_p D_t^p u^2(x,-T);$$

where $Q_1 = \{x,t|\ 0<x<2\pi,\ 0<t<T\}$, $Q_2 = \{x,t|\ 0<x<2\pi,\ -T<t<0\}$, $Q = Q_1\cup Q_2$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_x = \partial/\partial x$, $M^1[u^1] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u^1(x,t_k)$, $M^2[u^2] = \sum\limits_{k=m+1}^{M} \alpha_k u^2(x,t_k)$; $p=0,1$; $j=1,2$; with conditions

$$\begin{cases} T<+\infty,\ f^j\in L_2(Q_j),\ j=1,2;\ \mu_p\in\mathbb{C}, p=0,1; \\ \alpha_k\in\mathbb{C},\ t_k\in(-T,0),\ k=m+1,...,M;\ t_k\in(0,T),\ k=1,...,m. \end{cases}$$

The Main Result of Work is the following Theorem (Δ_s is a Matrix of the Problem data).

Theorem. *For all f^j, μ_p, α_k, t_k, T, satisfying the given Conditions for the Boundary Value Problem there is a unique L_2-strongly Solution, if and only if*

$$|\Delta_s| \neq 0 \quad \forall s\in S.$$

References — 4.

УДК: 517.518.8 2000 MSC: 42A10

Sikhov M.B. **About evaluations (D,α)-derivatives Λ-nucleuses the Dirichle**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 4 (6). P.82–88.

For (D,α)-derivatives of nucleuses the Dirichle with harmonicses generated the surfaces of a level of function $\Lambda(t)$ establish evaluations of their norms in L^p $(1<p<\infty)$ and are considered their exactitude for want of some restrictions on function $\Lambda(t)$.

References — 5.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.