ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2006 том 6 № 2 (20)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 2 (20) 2006

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 6, № 2 (20), 2006

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 5 — 13*

К 60-летию НАН РК

УДК 51

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В КАЗАХСТАНЕ. II

[*] Арсланов М.З., [†] Бижанова Г.И., [*] Бияшев Р.Г.,
[†] Дженалиев М.Т., [‡] Добрица В.П., [†] Женсыкбаев А.А., [†] Рахимбердиев М.И.

[†] Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125
[*] Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125
[‡] КазНПУ им.Абая МОН РК 050010 Алматы, пр.Достык, 13

Мы продолжаем публикацию обзорных статей о развитии математики и информатики в Казахстане, посвященных 60-летнему юбилею Национальной академии наук Республики Казахстан. Во второй части представлен обзор по дифференциальным уравнениям и математической физике.

4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Качественная теория дифференциальных уравнений изучает свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений без нахождения самих решений. Эта теория была основана А.Пуанкаре и А.М.Ляпуновым.

В Казахстане начало исследованиям по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений положено К.П.Персидским. К понятию особого показателя линейной дифференциальной системы К.П.Персидский пришел в 30-х годах в связи с изучением асимптотической устойчивости решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с нестационарной линейной частью. В настоящее время признан приоритет П.Боля во введении этого показателя, в литературе последних лет особый показатель стал называться "показателем Боля". Тем не менее заслуга К.П.Персидского состоит в том, что именно из его работ это понятие стало известно и широко использует в теории устойчивости. К.П.Персидскому были знакомы работы О.Перрона, из которых следовало, что устойчивость (даже экспоненциальная) решений линейной дифференциальной системы уравнений не гарантирует устойчивости решений возмущенного уравнения. Осмысливая их, он пришел к пониманию, что существенное влияние на устойчивость возмущенной системы оказывают равномерные характеристики невозмущенной системы.

Keywords: *Mathematics, Informatics*
2000 Mathematics Subject Classification: 00-02

В результате он ввел как особый показатель, так и вполне естественно связанное с ним определение равномерной устойчивости (Математическая энциклопедия. – М: Советская энциклопедия. – 1979. – Т.4. – С.790). Данная им модификация понятия устойчивости оказалась плодотворной особенно в исследованиях прикладных задач, так как в реальных условиях учет вклада возмущающих факторов всегда необходим. Вклад К.П.Персидского в разработку второго метода Ляпунова состоит в том, что он получил необходимое условие существования функции Ляпунова. К.П.Персидский исследовал бесконечные системы дифференциальных уравнений и впервые ввел понятие показателей Ляпунова для таких систем. Он установил, что в отличие от конечномерных систем бесконечномерные могут иметь непрерывный спектр показателей Ляпунова. Им введено понятие квазиустойчивости и квазинеустойчивости решений дифференциальных уравнений в нелинейных пространствах и совместно с его учениками (Г.Н.Багаутдинов, А.А.Хабибуллин, Н.И.Лобанова) получены достаточные условия квазиустойчивости и квазинеустойчивости, основанные на втором методе Ляпунова, аналог теоремы Четаева для квазиустойчивости, разработаны методы исследования решений ДУ с использованием этих понятий, введен принцип сведения. Под влиянием К.П.Персидского в Казахстане качественная теория развивалась С.И.Горшиным, А.И.Ибрашевым, В.Х.Харасахалом, Б.Т.Тулегеновым, Ю.Г.Золотаревым, С.К.Персидским, М.Я.Ятаевым, А.К.Бедельбаевым, Б.Ж.Майгариным и др., что способствовало созданию казахстанской школы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Самостоятельной областью исследования является теория бесконечных систем дифференциальных уравнений. Начало развитию теории таких систем положила работа А.Н.Тихонова в 1934г. Эта теория получила дальнейшее развитие, особенно в работах казахстанских математиков.

Теория бесконечных систем дифференциальных уравнений получила дальнейшее развитие в работах О.А.Жаутыкова. Им установлен ряд теорем существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и краевых условий, получены условия ограниченности и устойчивости решений, предложен метод укорочения, позволяющий с любой степенью точности аппроксимировать счетные системы ДУ их конечномерными аналогами. Для таких систем им впервые был изучен ряд краевых задач. Он распространил на бесконечные системы операционные методы исследования и метод усреднения Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова. О.А.Жаутыков обобщил теорему Пуанкаре о периодических и аналитических по параметру решениях на бесконечномерный случай систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, дал оценки областей изменения параметров и разработал способы построения их решений. Его совместная с К.Г.Валеевым монография (Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука. 1974) отмечена как фундаментальный труд по этой теории в Математической энциклопедии (Т.2. С.338).

Одной из центральных задач качественной теории является задача изучения поведения решений системы, зависящей от параметра, при малых его изменениях. Различают регулярную и сингулярную зависимости. Исследования в этом направлении продолжаются и сейчас, начало которым было положено А.Н.Тихоновым в 50 гг. XX в. Существенные результаты в этом направлении получены Л.А.Люстерником, М.И.Вишиком.

Начало исследованиям в Казахстане сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений положил К.А.Касымов. Им и его учениками установлены многие закономерности поведения решений дифференциальных уравнений, зависимость которых от параметра является сингулярной. При исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением К.А.Касымовым обнаружено явление начального скачка в начальной точке. Идея разработанного им метода распространена на интегро-дифференциальные уравнения М.К.Дауылбаевым, которым установлены качественно новые свойства асимптотического поведения решений.

Один из важных разделов качественной теории дифференциальных уравнений — теория колебаний получила развитие в Казахстане благодаря работам В.Х.Харасахала. Им были установлены основополагающие результаты о существовании квазипериодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. Исследования в этом направлении продолжил Д.У.Умбетжанов. Им получены критерии существования квазипериодических решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, эти результаты были распространены на счетные системы, интегро-дифференциальные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Теория периодических колебаний получила дальнейшее развитие в работах актюбинских математиков: К.К.Кенжебаева, И.Т.Тажимуратова и других.

В теорию нормальных форм большой вклад внес Я.М.Гольцер. Им разработан метод аналитических и непрерывных нормальных форм, применимый в теории бифуркаций и теории катастроф. Метод нормальных форм для разностных систем был разработан К.Б.Бопаевым и на его основе решены задачи устойчивости разностных систем, близких к критическим.

В теории возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений существенные результаты получены Ж.Мырзалиевым. Им установлены условия сохранения инвариантных торов при малых возмущениях системы и изучены свойства гладкости, аналитичности, устойчивости торов.

Т.К.Нурекеновым рассмотрены дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, исследованы вопросы существования решений задачи Коши при общих предположениях на правую часть уравнений и существование решений с определенными свойствами.

В.Г.Бродовским установлены достаточные условия существования аналитических по параметру и периодических решений счетных систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

М.И.Рахимбердиевым проведена классификация систем дифференциальных уравнений по основным признакам влияния возмущений на их поведение, изучен ряд свойств грубости и типичности асимптотического поведения решений. Проведены исследования показателей Ляпунова, центральных и особых показателей как функций системы и устанавливается ряд их свойств (условия непрерывности, бэровская классификация, распределение значений вблизи точек разрыва). Дано описание открытого ядра множества линейных неоднородных систем, имеющих хотя бы одно ограниченное решение. Получено распределение показателей Ляпунова линейных периодических систем, близких в среднем к системе с постоянной матрицей, линейных расширений динамических систем на торе. Устанавливается критерий экспоненциальной разделенности линейных систем ДУ в терминах матрицы коэффициентов. Доказано, что экспоненциальная разделенность семейства автоморфизмов векторного расслоения эквивалентна сильной положительности последовательности сужений автоморфизмов на слои и то же самое для их внешних степеней.

К качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений относятся вопросы существования и единственности решений начальных и краевых задач. Имеются различные необходимые и достаточные условия существования и единственности решения разных краевых задач и методов построения приближенных решений для нелинейных уравнений (И.Т.Кигурадзе, Ф.Хартман, Л.С.Понтрягин, М.А.Красносельский и др.). Исследование таких задач интенсивно проводится и в настоящее время.

Д.С.Джумабаевым разработан эффективный метод параметризации для решения краевых задач. Этот метод им был успешно применен к исследованию краевых задач с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений и получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости, обобщен на краевые задачи для семейств систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решена задача аппроксимации для линейных сингулярных краевых задач и установлена связь разрешимости исходной задачи с аппроксимирующей. Введено понятие предельного решения и показано, что при определенных условиях такое решение является притягивающим (аттрактором) для других решений. Введено определение линеаризатора, обобщающее понятие производной Фреше на неограниченные негладкие операторы, что позволило распространить известный метод Ньютона-Канторовича на операторные уравнения и применить его для решения нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений. Идея метода параметризации распространена А.Т.Асановой на нелокальные краевые задачи для систем гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

М.И.Тлеубергеновым разработана стохастическая теория обратных задач построения дифференциальных уравнений по заданным динамическим свойствам решений. Им получены условия стохастической устойчивости интегрального многообразия. Исследована разрешимость стохастической задачи Гельмгольца.

Особый класс краевых задач составляют задачи с функциональным параметром — управлением, который во второй половине XX века выделился в самостоятельный раздел математики — теорию управления. Фундаментальные результаты А.И.Лурье, В.М.Попова, Р.Каллмана, Л.С.Понтрягина, Р.Беллмана, Р.Айзекса, А.Фридмана, Н.Н.Красовского, А.М.Летова, В.И. Зубова, А.А.Воронова, Ф.Л.Черноусько, А.Г.Бутковского, А.И.Субботина, А.Б.Куржанского, Ю.С.Осипова, В.Ф.Кротова, В.М.Тихомирова, А.Д.Иоффе, В.А.Якубовича, Л.Ч.Янга и многих других исследователей составляют основу современной математической теории управления.

В Казахстане ведутся активные исследования в области задач теории управления. Если эти задачи, с одной стороны, примыкают к теории дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и уравнений в частных производных), то, с другой стороны, они обобщают классические задачи вариационного исчисления и теории автоматического управления. Это — задачи абсолютной устойчивости, устойчивости по части переменных, управляемости, наблюдаемости, оптимального управления, дифференциальных игр, описания областей достижимости, нормирования воздействий, а также двухточечные краевые задачи оптимального управления и др. Они имеют, как правило, своим источником практические задачи. Среди казахстанских ученых здесь можно отметить следующих: А.К.Бедельбаев, Б.Ж.Майгарин, С.А.Айсагалиев, Д.Ж.Сыздыков, В.С.Неронов, С.П.Соколова, С.Я.Серовайский, И.Б.Байсакалов, М.Т.Дженалиев, Т.Н.Бияров, К.С.Сматов, М.Н.Калимолдаев и другие.

Задачам синтеза оптимальных регуляторов посвящены работы А.К.Бедельбаева, Б.Ж.Майгарина, С.А.Айсагалиева, С.П. Соколовой, Т.Н.Биярова, М.Н.Калимолдаева, М.А.Бейсенби и др.

В отличие от классиков теории управления без привлечения аппарата функций Ляпунова С.А.Айсагалиев устанавливает эффективные условия абсолютной устойчивости, управляемости, описывает множество допустимых управляющих воздействий на управляемую систему. Им разработан алгоритм решения задач оптимального управления с фиксированными концами траекторий, который может быть использован также для приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом же направлении проводятся исследования его учеником Ш.А.Айпановым.

Задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных, исследуют С.Я.Серовайский, М.Т.Дженалиев, В.С.Неронов, К.С.Сматов. Ими были установлены необходимые и достаточные условия оптимальности. Д.Ж.Сыздыков является автором метода общего параметра для решения задач идентификации в системах управления. И.Б.Байсакаловым изучены качественные свойства стохастических дифференциальных игр. Учеником Б.Ж.Майгарина С.С.Жуматовым исследуются задачи построения устойчивых систем автоматического управления по заданному программному многообразию.

В данной части обзора не нашли отражение такие разделы математики, имеющие отношение к теории обыкновенных дифференциальных уравнений и выделившиеся в самостоятельные направления, как теория уравнений с отклоняющимся аргументом, теория уравнений с импульсным воздействием, исследования по которым ведутся в Казахстане, как и в мире.

5. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Теория уравнений с частными производными является одним из самых обширных направлений математики. Предмет ее исследований – краевые задачи, в которых требуется определить в некоторой области Ω пространства R^n, $n \geq 2$, решения уравнений, удовлетворяющие на границе Ω определенным краевым условиям.

Теория уравнений с частными производными тесно связана с математической физикой, механикой, математическим моделированием и другими науками, занимающимися изучением природных, общественных явлений и процессов. Краевые задачи для уравнений с частными производными, в сущности, представляют собой математические модели реальных процессов. А основные уравнения теории краевых задач — уравнения параболического, гиперболического и эллиптического типов, описывают тепловые, диффузионные, фильтрационные; волновые и стационарные процессы, соответственно. Развитие теории уравнений с частными производными связано, с одной стороны, с потребностями практической деятельности человека, приводящими к необходимости исследования краевых задач, как математических моделей, и, с другой стороны, развитием алгебры, геометрии, математического анализа и теории функций, которые составляют математический аппарат для решения краевых задач и которые также приводят к новым краевым задачам (например, геометрическая теория поверхностей дает нелинейные эллиптические уравнения).

Бурное развитие теории уравнений с частными производными началось в 50-60 годы XX века как у нас в стране, так и за рубежом. Это было связано с усиленным послевоенным развитием производства, техническим прогрессом и созданием богатого математического аппарата, в том числе теории обобщенных функций.

Невозможно в рамках небольшой статьи провести глубокий анализ основных этапов и направлений развития теории и перечислить всех математиков, имеющих достижения в этой области. Отметим только следующее. Огромный вклад в развитие теории уравнений с частными производными, определивший дальнейшее ее развитие, оказали советские математики, среди них И.Г.Петровский, С.Л.Соболев, А.Н.Тихонов, М.А.Лаврентьев, И.Н.Векуа, А.Н.Понтрягин, затем О.А.Ладыженская, М.И.Вишик, С.Д.Эйдельман, А.В.Бицадзе, В.С.Владимиров, математики следующего поколения — М.С.Бирман, М.И.Иманалиев, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева, В.А.Кондратьев, И.И.Данилюк, С.Н.Кружков, Г.И.Марчук, С.К.Годунов, А.М.Нахушев, И.В. Скрыпник, В.Н.Врагов и многие другие. Следует отметить, что российская и украинская математические школы оказали неоценимую помощь в деле подготовки кадров и развитии математики в Казахстане. Многие наши математики прошли аспирантуру, стажировку, учились в ведущих научных учреждениях и вузах России и Украины.

Среди зарубежных математиков, повлиявших на развитие теории уравнений с частными производными, отметим таких, как Д.Гильберт, Р.Курант, Л.Шварц, Дж.Шаудер, М.Жеврей, К.Миранда, А.Браудер, Ж.Лерэ, Л.Ниренберг, Р.Беллман, Л.Хермандер, Дж.Мозер, Ж.-Л. Лионс, А.Фридман, Де Джорджи и многие другие.

Качественная теория уравнений с частными производными является очень обширной областью математики. Она развивается по многим различным направлениям. Перечислим некоторые важные из них: линейные, квазилинейные, полностью нелинейные параболические, гиперболические, эллиптические уравнения; кинетические уравнения; уравнения смешанного типа; качественная теория уравнений Навье-Стокса, теория обобщенных аналитических функций; некорректные, обратные задачи; оптимальное управление; спектральные вопросы дифференциальных операторов с частными производными; стабилизация и асимптотическое поведение решений краевых задач; аттракторы; функционально-дифференциальные и нагруженные уравнения; нелокальные краевые задачи; сингулярно возмущенные уравнения и задачи с малым параметром; задачи в нерегулярных и перфорированных областях; задачи с усреднением; задачи со свободными (неизвестными) границами; blow-up (несуществование решения в конечной точке области).

Начало развития теории уравнений с частными производными в Казахстане положено Е.И.Кимом. По переезде в г.Алма-Ату в 1964г. он возглавил лабораторию уравнений математической физики в Институте математики АН КазССР и кафедру с тем же названием в Казахском государственном университете им.С.М.Кирова. В лаборатории Института математики, возглавляемой Е.И.Кимом, работали многие математики, среди них М.А.Абдрахманов, С.Н.Харин, Т.Ш.Кальменов, Г.И.Бижанова, М.Т.Дженалиев. Расскажем об их научной работе.

Е.И.Кимом была разработана теория сингулярных интегральных уравнений, которая не вкладывается в общую теорию интегральных уравнений Вольтера 2 рода. Эта теория успешно применяется им и его учениками при исследовании спектральных вопросов интегральных сингулярных операторов, а также существования решений уравнений в весовых пространствах функций, при решении краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений, уравнений и систем параболического типа: различных задач сопряжения, задач для уравнений с разрывными коэффициентами, задач в нерегулярных и вырождающихся областях, задач, в которых порядок производных в граничных условиях выше порядка уравнений, в нелинейных задачах со свободными границами, в прикладных задачах, в частности, в теории электрических контактов, активно разрабатываемой С.Н.Хариным.

С.Н.Харин, исследуя модели электроконтактных процессов методами интегральных уравнений, показал, что для возникающих при этом специальных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода классический метод последовательных приближений не применим. Им разработан приближенный метод решения указанных интегральных уравнений, изучены задачи стефановского типа, моделирующие процессы с фазовыми превращениями. Разработанные С.Н.Хариным методы развиваются его учениками С.П.Городничевым, А.А.Кавокиным, Ш.А.Кулахметовой, Я.А.Красновым, А.Т.Кулахметовой, Ю.Р.Шпади и другими при решении прикладных задач, возникающих в теории электрических контактов, плазмотронов и т.д.

В середине 70-х годов в лаборатории уравнений математической физики Института математики наметилось новое направление – исследование краевых задач в функциональных пространствах Соболева, Гельдера, которое развивали Т.Ш.Кальменов, М.А.Абдрахманов, Г.И.Бижанова, М.Т.Дженалиев и другие. Приведем их результаты.

Первые работы М.А.Абдрахманова посвящены решению краевых задач сопряжения для уравнений параболического и гиперболичского типов методом интегральных уравнений. В 80-е годы М.А.Абдрахманов начинает исследовать начально-краевые задачи для уравнений и систем смешанной параболо-эллиптической структуры, которые не вкладываются в общую теорию параболических и эллиптических уравнений. Он разрабатывает математический аппарат решения таких задач в пространствах Соболева-Слободецкого и Гельдера, получает ряд законченных результатов.

Т.Ш.Кальменов изучает уравнения смешанного типа (задачи Бицадзе-Самарского, Трикоми и др.), в которых широко применяет метод интегральных уравнений, специальные функции. Т.Ш.Кальменов получает важные результаты о разрешимости этих задач, разрабатывает новое научное направление — спектральную теорию уравнений смешанного типа. Им дано описание регулярных краевых задач для двумерных и многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа, получен критерий их самосопряженности, установлена полнота корневых векторов краевых задач типа Бицадзе-Самарского для эллиптических уравнений, найден критерий полноты корневых векторов для произвольного и линейного вполне непрерывного оператора. Исследование задач для гиперболических и смешанных дифференциальных операторов и связанные с ними спектральные вопросы продолжили его ученики, среди них А.Б.Базарбеков, М.А.Садыбеков, М.Б.Муратбеков, К.Н.Оспанов.

Г.И.Бижанова занимается исследованием линейных и нелинейных краевых задач для параболических и эллиптических уравнений, в частности, задач со свободными (неизвестными) границами. Ею изучены нерегулярные двухфазные задачи Стефана для больших и малых времен, получен ряд точных результатов о разрешимости задач с производной по времени в граничном условии и условии сопряжения, нелинейных многомерных задач со свободными границами Стефана, Флорина, Веригина в весовых пространствах Гельдера.

М.Т.Дженалиев проводит исследования в области теории нагруженных дифференциальных уравнений и их приложений к задачам оптимального управления. Он разрабатывает принцип оптимальности В.Ф.Кротова для уравнений с частными производными, учитывающий обобщенную разрешимость уравнений и не требующий их приведения к нормальной форме. Им вводятся новые классы нагруженных дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные, а также неизвестные функции с фиксированой временной переменной, изучаются вопросы их сильной и слабой разрешимости в соболевских классах; устанавливаются вариационные принципы, исследованы спектрально-нагруженные параболические операторы и соответствующие им граничные задачи. Работу в этом же направлении продолжил М.И.Рамазанов. Им получены результаты о разрешимости краевых задачи для спектрально-нагруженных параболических уравнений, содержащих старшую производную по пространственной переменной на некоторых заданных многообразиях области.

В Казахском Национальном университете им.аль-Фараби исследования в области уравнений с частными производными проводят М.О.Орынбасаров, С.И.Темирбулатов, Ш.С.Сахаев, С.Я.Серовайский, С.А.Атанбаев, С.Т.Мухамбетжанов и другие. Приведем их основные результаты.

Теория сингулярных интегральных уравнений, разработанная Е.И.Кимом, получила дальнейшее развитие в работах М.О.Орынбасарова. Им изучены краевые и нелокальные задачи для параболических уравнений в нерегулярных (угловых) областях методом сведения их к сингулярным интегральным уравнениям.

Ш.С.Сахаевым получены законченные результаты по исследованию в функциональных пространствах Соболева и Гельдера краевых и начально-краевых задач для стационарной и нестационарной систем уравнений электродинамики в трехмерных ограниченных областях с гладкими и негладкими границами, некоторых нелинейных задач гидродинамики и магнитной гидродинамики, задач тепловой конвекции.

С.Я.Серовайский рассматривает проблему дифференцируемости зависимости решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных от параметров. Им установлена расширенная и секвенциальная дифференцируемость этой зависимости для конкретных уравнений. Обнаружен эффект снижения степени дифференцируемости указанной зависимости по мере роста показателя нелинейности уравнения и размерности области, в которой задано уравнение. Полученные результаты используются для решения задач оптимального управления системами, описываемыми нелинейными уравнениями в частных производных, и обратных задач математической физики.

С.Т.Мухамбетжанов проводит исследования нелинейных краевых задач. Им установлена корректность нелинейных математических моделей фильтрации, изучены качественные свойства решений задач (разрешимость в классической и обобщенной постановках, асимптотическое поведение решений при неограниченном возрастании времени, структура обобщенных решений), дано обоснование метода фиктивных областей и метода слабой аппроксимации для решения задач теории фильтрации.

В Казахстане в развитие теории многомерных интегро-дифференциальных уравнений переноса, относящихся к кинетическим уравнениям, большой вклад внес У.М.Султангазин. Им совместно с другими математиками была построена теория нестационарных уравнений переноса, получены законченные результаты по качественной теории уравнений Больцмана. У.М.Султангазиным показано, что система метода сферических гармоник (МСГ) является симметрической гиперболической системой по Фридрихсу, а соответствующие граничные условия максимально диссипативными. Доказано существование, единственность и сходимость обобщенного решения МСГ к решению нестационарной задачи для уравнения переноса излучения, построены устойчивые разностные схемы с направленными разностями. В работах У.М.Султангазина было дано математическое обоснование метода расщепления, сводящего многомерные задачи переноса излучения к последовательностям одномерных задач. В энергетическом пространстве для уравнения переноса излучения были построены абсолютно устойчивые схемы. Среди широко распространенных дискретных моделей нелинейного уравнения Больцмана существует дискретная модель Годунова-Султангазина, для которой выполняется закон сохранения массы и справедлива H-теорема Больцмана. За выдающийся вклад в математическую теорию переноса частиц У.М.Султангазину была присуждена Государственная премия СССР (1987г.). Его результаты оказали большое влияние на развитие этого научного направления как в России и Казахстане, так и за рубежом. В республике это направление исследований получило дальнейшее развитие в работах его учеников: А.С.Сакабекова, А.Ш Акыша и других.

А.С.Сакабековым изучены краевые задачи для стационарных систем уравнений метода сферических гармоник в регулярных и нерегулярных областях, установлена корректность задач для моментных уравнений Больцмана и сходимость их решений к решениям соответствующих задач для уравнений Больцмана, исследованы существование и сходимость локального и глобального решений краевых задач для дискретной модели Больцмана.

А.Ш.Акыш занимается исследованием нелинейных задач теории переноса излучения и кинетической теории газов, разработкой и обоснованием вычислительных методов для этих задач. Им была решена проблема теории переноса излучения, поставленная В.С.Владимировым, установлены разрешимость стационарной системы метода сферических гармоник при произвольных входных данных и сходимость приближенного решения в соболевских пространствах функций, доказано существование сильного обобщенного решения системы нестационарных уравнений метода сферических гармоник.

С 60-х годов прошлого века в республике стала развиваться теория обобщенных аналитических функций благодаря исследованиям Н.К.Блиева и его учеников. Н.К.Блиевым построена теория обобщенных аналитических функций в шкале дробных B-пространств Никольского-Бесова, которая содержит расширение теории Векуа. Им найдены расширения класса обобщенных аналитических функций на семейства обобщенных в некотором смысле решений общих эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости с коэффициентами из пространств Бесова с показателем суммируемости $p > 1$, не вложенных в L_p, $p > 2$. Результаты Н.К.Блиева имеют применение в теории краевых задач для уравнений с частными производными. В этом же направлении работает его ученик А.Б.Тунгатаров. Им с помощью методов теории обобщенных аналитических функций получены условия существования непрерывных решений эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами и краевых задач для них, связанных с вопросами геометрической теории поверхностей.

Большой вклад в развитие не только теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но и теории уравнений с частными производными в Казахстане внес Д.У.Умбетжанов. Им была развита теория периодических и почти периодических решений уравнений с частными производными с одинаковой главной частью, гиперболических, параболических, эллиптических, сингулярно возмущенных, нелинейных, интегро-дифференциальных систем и уравнений в классах равномерно непрерывных, а также измеримых и локально суммируемых в p-й степени функций. Им определено и изучено пространство функций многих переменных, имеющих представление в виде свертки с матричным ядром Бесселя-Макдональдса и с плотностями из класса Степанова, в которое вкладывается известное пространство Лиувилля-Соболева (пространство бесселевых потенциалов).

Работу в этом направлении продолжили Ж.А.Сартабанов, А.Т.Асанова и другие его ученики. Ж.А.Сартабановым установлена разрешимость задач для гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений в классах периодических и почти периодических функций. А.Т.Асановой доказаны существование и единственность почти периодических решений краевых задач для некоторых параболических уравнений.

Д.С.Джумабаевым и А.Т.Асановой установлена однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем одномерных гиперболических уравнений с условиями на характеристиках.

Алексеевой Л.А. разработан метод граничных интегральных уравнений для решения краевых задач для гиперболических уравнений.

Одним из первых математиков Казахстана, который начал разрабатывать качественную теорию краевых задач для нелинейных уравнений математической физики, является Ш.С.Смагулов. Им получены глубокие результаты по исследованию корректности краевых задач для уравнений Навье-Стокса, вырождающихся уравнений газовой динамики, уравнений естественной конвекции с учетом диссипации энергии, уравнений магнитной газовой динамики, уравнений динамики атмосферы и океана и др. На основе теоретических исследований им разработаны эффективные численные методы решения этих задач.

Исследования по уравнениям с частными производными второго порядка общего вида проводит Ж.Н.Тасмамбетов. Им дана их классификация, изучены качественные свойства решений.

Задачами для гиперболических уравнений занимается также С.А.Алдашев. Им установлены существование, единственность решений краевых задач в специальных областях.

В направлении некорректных краевых и обратных задач работают С.И.Темирбулатов, А.У. Серикбаев, С.А.Атанбаев, Г.Б.Баканов, К.Т.Искаков и другие. С.И.Темирбулатовым исследованы некорректные краевые задачи для параболических, гиперболических уравнений, получены законченные результаты по разрешимости некорректных задач с производной по времени в граничном условии для параболических уравнений. А.У.Серикбаев изучает вопросы единственности и устойчивости решений обратных задач теории потенциала Вебера. С.А.Атанбаев развивает метод квазиобращения Ж.-Л.Лионса для некорректных задач. Г.Б.Баканов и К.Т.Искаков разрабатывают итерационные методы решения обратных коэффициентных задач математической физики.

Мы рассказали об основных научных направлениях качественной теории уравнений с частными производными, которые развиваются в республике, об основных научных результатах казахстанских математиков в этой области математики.

Поступила в редакцию 10.06.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С.14—22*

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ 2D-3D СИСТЕМЫ НАВЬЕ - СТОКСА

У.У.Абылкаиров

КазНУ им. аль-Фараби
050012 г. Алматы ул. Масанчи, 39/47 UAbylkair@kazsu.kz

В работе получены теоремы существования и единственности сильных решений задачи протекания для линеаризованной 2D - 3D системы Навье - Стокса. Доказаны априорные оценки решения обратной задачи, получены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи, доказана фредгольмова разрешимость искомой обратной задачи протекания для линеаризованной 2D - 3D системы Навье - Стокса.

Рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи, то есть определения тройки функций $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$, удовлетворяющих в $Q \equiv (0,T)\times\Omega$ 2D-3D линеаризованной системе Навье-Стокса

$$\partial_t\vec{v} + \mathrm{grad}p = v\Delta\vec{v} + \vec{f}(x)\cdot\vec{g}(x,t), \;\; \mathrm{div}\vec{v} = 0, \;\; \text{в} \quad Q \tag{1}$$

начальному условию

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}_0(x), \;\; x\in\Omega, \tag{2}$$

нестандартным граничным условиям

$$\vec{v}(t,x) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{0,T} \equiv [0,T]\times\Gamma^0, \tag{3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}| \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} \equiv [0,T]\times\Gamma^1, \tag{4}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} \equiv [0,T]\times\Gamma^1 \tag{5}$$

и дополнительным условиям финального переопределения

$$\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \tag{6}$$

Keywords: *non-standard boundary condition, flow problem, Navier - Stokes system*
2000 Mathematics Subject Classification: 35D05, 35Q30

$$\nabla p(x,T) = \nabla \pi_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \tag{7}$$

описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в области Ω. Здесь $\vec{v}, p$ — скорость, давление жидкости соответственно; $v = const > 0$ — коэффициент кинематической вязкости; $\vec{f}$ — объемная плотность внешних сил; $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω; $\vec{v}_0$, $\varphi(t)$, $\vec{v}_T$, $\nabla\pi_T$ — заданные функции.

Задачи такого типа называют обратными задачами для системы Навье-Стокса и они возникают в математической физике, теории управления гидродинамическими потоками.

Одной из актуальных проблем является разрешимость обратных начально-краевых задач для уравнений математической физики, до настоящего времени не доказаны общие теоремы однозначной разрешимости прямых задач для систем Навье - Стокса, Эйлера. В теории обратных задач математической физики среди основных задач рассматривается задача по восстановлению неизвестных правых частей, используя дополнительные финальные условия. До недавнего времени не было результатов по теории разрешимости обратных задач для системы Навье - Стокса. Первые результаты о корректности многомерной обратной задачи для системы (1) – (7) появились в 1989–1990 гг. в работах [1], [2] и автора [3], [4].

В первой части данной работы получены априорные оценки на решения искомой задачи протекания; доказаны теоремы существования и единственности сильных решений задачи протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье - Стокса. Далее во второй части работы получены априорные оценки решения обратной задачи, достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи, доказана фредгольмова разрешимость искомой обратной задачи протекания для линеаризованной 2D - 3D системы Навье - Стокса.

1. Прямая задача протекания для нестационарной линеаризованной 2D - 3D системы Навье-Стокса.

1.1. Постановка прямой задачи с нестандартными граничными условиями для нестационарной системы Стокса. Пусть Ω — ограниченная область пространства R^d, $d = 2, 3$, с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Предположим, что существуют такие открытые непересекающиеся подмножества Γ^0, Γ^1 границы Γ, что $\Gamma = \overline{\Gamma}^0 \cup \overline{\Gamma}^1$, непроницаемая стенка $\Gamma^0 \in C^2$, участок границы протекания жидкости $\Gamma^1 \in C^2$. Рассмотрим в $Q = \Gamma \times (0,T]$ прямую начально-краевую задачу для определения пару функций

$$\partial_t \vec{v} - \nu\Delta\vec{v} + grad\, p = \vec{f}(x)\cdot g(x,t), \;\; \operatorname{div}\vec{v} = 0, \;\; (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{8}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{9}$$

$$\vec{v}(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times (0,T), \tag{10}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}| \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{11}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T). \tag{12}$$

Классический метод исследования разрешимости этой задачи — стандартное сведение неоднородных условий к однородным в данном случае непригоден.

В настоящей статье непосредственно используем результаты п.п. 1.2, 1.3, 1.5 и п.2 работы автора [5] по подбору функциональных пространств $V^0(\Omega), V^1(\Omega)$ и другие, а также результаты спектрального анализа для стационарной системы Стокса.

1.2. Регулярность. Априорные оценки задачи (8) – (12). Относительно решения задачи (8) – (12) доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть* $\{\vec{F} \in L^2(0,T;V^0(\Omega)),\ \vec{v}_0(x) \in V^0(\Omega)\}$ *соответствует случаю (i),* $\{\vec{F} \in L^2(0,T;V^0(\Omega)),\ \vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)\}$ *соответствует случаям (ii),(iii); тогда существует константа* C *, зависящая только от данных задачи, такая, что справедливы следующие включения и априорные оценки для гладких решений задачи* $(8)-(12)$ *:*

$$(i) \qquad \max_{0\le t\le T} \|\vec{v}(t)\|^2_{V^0(\Omega)} + \|\vec{v}\|^2_{L^2(0,T;V^1(\Omega))} \le \left\|\vec{F}\right\|^2_{L^2(Q)} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^0(\Omega)}, \tag{13}$$

$$(ii) \qquad \vec{v}_t, \Delta_1\vec{v} \in L^2(Q),\ \vec{v}_{xx}, \nabla p \in L^2(\Omega' \times (0,T)),\ \Omega' \Subset \Omega \ \ и\ \ \vec{v} \in C([0,T];V^1(\Omega)),$$

$$\max_{0\le t\le T} \|\vec{v}(t)\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}_t(t)\|^2_{2,Q_t} + \|\Delta_1\vec{v}\|^2_{2,Q_t} \le \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \left\|\vec{F}\right\|^2_{2,Q_t},\ \ t\in[0,T], \tag{14}$$

(iii) *если при условиях* (i) $\Gamma = \partial\Omega \subset C^2$ *, то* $\vec{v}_{xx}$, ∇p *принадлежат* $L^2(\Omega)$ *и для них верны оценки*

$$\|\vec{v}_{xx}\|^2_{2,Q_t} + \|\nabla p\|_{2,Q_t} \le 2C(\Omega)\left(\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \left\|\vec{F}\right\|^2_{2,Q_t}\right),\ \ t\in[0,T]. \tag{15}$$

1.3. Доказательство существования и единственности решения задачи (8)–(12).

В случае $\partial\Omega \in C^2$ утверждение существования и единственности сильного обобщенного решения задачи (8) – (12) можно доказать, по крайней мере, двумя способами.

Первый способ. Эта задача может быть редуцирована к задаче Коши для одного операторного уравнения

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_1 v(t) = f(t), v|_{t=0} = v_0, A_1 = -\Delta_1 = -P\Delta \tag{16}$$

в гильбертовом пространстве $V^0(\Omega)$. Свойства оператора A_1 описаны в [5] (см. п.п. 1.2, 1.3). Для случая областей Ω с негладкими границами область $D(A_1)$ определения A_1 составляет некоторую часть множества $V^1(\Omega)\cap W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, а в случае областей с $\partial\Omega\in C^2$ $D(A_1) = V^1(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$. Во всех случаях A_1 является на $D(A_1)$ самосопряженным, положительно определенным оператором.

Теория полугрупп предоставляет элегантный метод построения решения задачи (16). Следует отметить, однако, что для применения этой техники необходимо, чтобы коэффициенты уравнения (8) не зависели от t, тогда как метод Фаэдо-Галеркина можно применять без этого ограничения. И мы будем придерживаться последнего метода.

Второй способ. Но прежде всего, надо дать определение сильного обобщенного решения (искомой) задачи (8) – (12).

Определение сильного решения задачи $(8)-(12)$ **.**

Двойку $(\vec{v}(x,t), p(x,t))$ *удовлетворяющую условиям:*

(i) $\vec{v} \in L^2(0,\, T;\, V^2(\Omega)),\ \partial_t \vec{v} \in L^2(Q),\ \nabla\, p \in L^2(0, T; G(\Omega))$,
(ii) $\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x)$
(iii) $\partial_t \vec{v} + grad\, p = \nu \Delta \vec{v} + \vec{f},\ \ div \vec{v} = 0$ *почти всюду в* Q ,
называем решением задачи $(8)-(12)$, *где* $V^2(\Omega) \equiv V^1(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$.
Теорема 1.2. *Пусть* $\vec{f}(x,t) \in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$. *Тогда задача протекания* $(8)-(12)$ *имеет единственное сильное решение*

$$\vec{v}(x,t) \in L^2(0,\, T;\, V^2(\Omega)) \cap W^{1,\,2}(0,\, T;\, L^2(\Omega)),\ \nabla p \in L^2(0,\, T; G(\Omega)).$$

Доказательство проводится методом Фаэдо - Галеркина, в качестве базиса в гильбертовом пространстве $V^2(\Omega)$ возьмем собственные функции оператора Δ_1 с **нестандартными граничными условиями**, которые, как это установлено в [5] (см. лемму 1.2), образуют полную ортонормированную систему в $V^0(\Omega)$ и являются ортогональными в пространстве $V^1(\Omega)$, являются базисом в $V^2(\Omega)$.
Замечание 1. *В* [5] *доказана однозначная разрешимость двух задач протекания для полной нелинейной системы Навье - Стокса.*

2. Обратная задача протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье-Стокса.

2.1 Постановка задачи. Вспомогательные утверждения. Пусть $\Omega \subset R^d,\ d = 2,\, 3,$ – ограниченная область с границей $\Gamma = \partial\Omega$, состоящей из связанных компонент $\Gamma^0,\, \Gamma^1$. Рассмотрим в $Q = \Omega \times (0,\, T)$ обратную задачу определения тройки функций $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$, удовлетворяющих линеаризованной 2D-3D системе Навье-Стокса

$$\vec{v}_t - \nu\, \Delta \vec{v} + \mathrm{grad} p = \vec{f}(x) \cdot \vec{g}(x,t),\ \ \mathrm{div} \vec{v} = 0 \ \ \text{в} \quad Q, \tag{17}$$

начальному условию

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}_0(x),\ \ x \in \Omega, \tag{18}$$

нестандартным граничным условиям

$$\vec{v}(t,x) = 0, \quad (x,\, t) \in \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times [0,T], \tag{19}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}|, \quad (x,\, t) \in \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times [0,T], \tag{20}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const, \quad (x,\, t) \in \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times [0,T] \tag{21}$$

и дополнительным условиям финального переопределения

$$\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \tag{22}$$

$$\nabla p(x,T) = \nabla \pi_T \quad \text{на} \quad \Omega_T. \tag{23}$$

Обратная задача восстановление правой части 2D-3D системы Навье-Стокса в области $Q_\infty = \Omega \times [0,\, \infty)$ с однородными граничными условиями Дирихле исследована в [1]-[4], [6].

В этой постановке она ставится впервые, такого рода задачи часто возникают в математической физике при исследовании гидродинамических потоков, как составная часть – в исследовании тепловых, диффузионных процессов, когда область физических характеристик рассматриваемой среды недоступна для непосредственного измерения. Отличительными чертами этой обратной задачи являются соответствующие граничные условия (19) – (21), которые принято называть **нестандартными граничными условиями**. Выбор таких и подобных граничных условий, наиболее адекватно отражающих физическую картину поведения жидкости на границе рассматриваемой области для исследования соответствующих краевых задач для системы (17) сделаны в [7] – [8].

Во второй части работы мы сведем данную обратную задачу (17) – (23) к операторному уравнению второго рода с компактным оператором. При некоторых дополнительных условиях, добавленных к условиям прямой задачи п.п. 1, можно доказать однозначную разрешимость соответствующей обратной задачи.

Для этого выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $\vec{f}(x)$. Для корректного введения оператора T_g при фиксированном $g(x,t)$ и для любого $\vec{f}(x) \in L^2(\Omega)$ мы можем по теореме 1.2 найти единственное решение $\vec{v}(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^2(0,T;V^1)$ и сопоставить произвольному $\vec{f}(x) \in L^2(\Omega)$. При $\vec{F}_t \in L_{2,1}(Q)$ и $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega)$ мы имеем следующие априорные оценки:

$$\max_{0\le t\le T} \left(\|\vec{v}_t\|_{2,\Omega} + \|\Delta\vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\nabla p\|_{2,\Omega} \right) \le c < \infty \tag{24}$$

(см. [9]), поэтому, учитывая вышесказанное, определим линейный оператор T_g следующим образом:

$$T_g : \vec{f} \in L^2(\Omega) \mapsto \vec{v}_t(x,T) \in L^2(\Omega). \tag{25}$$

Другой линейный оператор $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ введем с помощью следующего соотношения:

$$\left(S\vec{f}\right)(x) = \frac{1}{g(x,T)} \cdot \left(T_g\vec{f}\right)(x). \tag{26}$$

Тем самым, если $\vec{f} \cdot g \in L^2(Q)$ и $\vec{F}_t = \vec{f} \cdot g_t \in L_{2,1}(Q)$, дополнительно $g(x,t), g_t \in C(\overline{Q}), |g(x,T)| \ge g_T > 0$ при $x \in \Omega$, можем найти след при $t = T$ соотношения (17)

$$\vec{v}_t(x,T) - \nu\Delta\vec{v}_T = -\nabla\pi_T + \vec{f}(x)g(x,T). \tag{27}$$

Обозначив через

$$\vec{\aleph} = \frac{1}{g(x,T)} \left(\nu\Delta\vec{v}_T - \nabla\pi_T(x)\right), \tag{28}$$

запишем (27) в терминах вновь введенных операторов T_g, S соотношениями (25) – (26) следующим образом:

$$S\vec{f} = \vec{f} + \vec{\aleph}. \tag{29}$$

2.2 Фредгольмова разрешимость обратной задачи (17) – (23). Следующая сформулированная теорема указывает об эквивалентности исходной обратной задачи (17)–(23) операторному уравнению (29) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ *и дополнительно* $g(x,t), g_t \in C(\overline{Q}), |g(x,T)| \ge g_T > 0$ *при* $x \in \Omega$. *Тогда для того, чтобы тройка функций* $\{\vec{v}, \nabla p, \vec{f}\}$

была единственным решением обратной задачи (17) – (23) *, необходимо и достаточно однозначной разрешимости уравнения* (29) *при любой* $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Доказательство необходимости. Пусть обратная задача (17) – (23) однозначно разрешима для любых $\vec{v}_T, \nabla\pi_T, g(x,t)$ из соответствующих классов, тогда с учетом $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ мы получим след при $t = T$ для соотношения (17), т.е. (27). Далее преобразуем (27), используя введенные операторы T_g, S и $\vec{\aleph}$, следующим образом

$$\vec{f}(x) = \vec{v}_t(x,T)/g(x,T) - (\nu\Delta\vec{v}_T - \nabla\pi_T)/g(x,T),$$

т.е. $\vec{f} = S\vec{f} - \vec{\aleph}$, отсюда получим (29) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Докажем достаточность. Пусть уравнение (29) имеет единственное решение при $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$, т.е. мы имеем единственную $\vec{f}(x)$. Следовательно, по $\vec{f}$, которая является сомножителем, при фиксированной функции $g(x,t)$ в правой части $\vec{F}(x,t) = \vec{f}(x)g(x,t)$ прямой задачи находим единственное решение $\vec{v} \in W_2^{2,1}(Q), \nabla p \in L^2(Q)$ задачи (8) – (12). Тем самым мы получили единственную тройку функций $\{\vec{v}, \nabla p, \vec{f}\}$, которая удовлетворяет условиям переопределения.

Покажем, что найденные $\vec{v}$ и ∇p удовлетворяют условиям переопределения (22) – (23). Предположим, что $\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T^1(x)$ и $\nabla p(x,T) = \nabla\pi_T^1$ при $x \in \Omega$. Тогда для разностей функций $\vec{v}^* = \vec{v}_T^1 - \vec{v}_T, \nabla p^* = \nabla\pi_T^1 - \nabla\pi_T$ получим стандартным образом линейную стационарную задачу Стокса

$$-\nu\Delta\vec{v}^* + \nabla p^* = 0, \;\; \mathrm{div} = \vec{v}^* = 0, \tag{30}$$

$$\vec{v}^* = 0, \;\; x \in \Omega. \tag{31}$$

Для этой задачи справедливо равенство

$$\nu\|\nabla\vec{v}^*\|^2_{2,\Omega} = 0.$$

Поэтому по определению нормы, мы имеем $\vec{v}_T^1 = \vec{v}_T, \nabla\pi_T^1 = \nabla\pi_T$. Следовательно, $\vec{v}, \nabla p$ удовлетворяют условиям переопределения (22) – (23). Теорема доказана.

В данной работе утверждение об однозначной разрешимости соответствующих обратных задач можно доказать либо при условии определенной малости входящих в условие задачи данных, либо при дополнительном условии, а именно:

$$g(x,t), \;\; g_t \in C(\overline{Q}), \;\; (x,t) \in Q; \;\; |g(x,T)| \geq g_T > 0, \;\; x \in \Omega. \tag{32}$$

Мы будем придерживаться ограничении относительно коэффициента $g(x,T)$ посредством условия (32) и докажем фредгольмовую разрешимость обратной задачи (17) – (23).

Теорема 2.2. *Пусть выполняются* (32) *,* $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ *. Пусть* $\partial\Omega \in C^2$ *и выполнено*

$$\Big(1/\inf_{\Omega}\, |g(x,T)|\Big) \left(\sup_{\Omega}\, |g(x,0)| \exp(-\frac{\nu T}{d^2}) + \int\limits_0^T \sup_{\Omega}\, |g_t(x,t)| \exp(-\frac{\nu(T-t)}{d^2})\, dt \right) < 1. \tag{33}$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (17) – (23) *и справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|v_{xx}\|^2_{2,Q_t}+\|v_t\|^2_{2,Q_t}+\|\nabla p\|^2_{2,Q_t}\le\\&\le C^2(\Omega)(\textstyle\int_0^T\sup_\Omega|g(x,t)|^2\,dt)^{1/2}\times\dfrac{C}{\inf\limits_\Omega|g(x,T)|}\,(\nu\|\Delta\vec v_T\|_{2,\Omega}+\|\nabla\pi_T\|_{2,\Omega})\,.\end{aligned}\qquad(34)$$

Доказательство. Установим более высокую гладкость сильного решения для задачи (8)–(12) раздела 1. Поэтому предположим, что $\vec v_0\in V^1(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$, $\vec F(x,t)=\vec f(x)\cdot g(x,t)\in W^1_2(0,T;V^0(\Omega))$. Далее, дифференцируя (8) по t, в силу условий (8) – (12) получим

$$\partial_t\vec u-\nu\Delta\vec u+\operatorname{grad}q=\vec f(x)g_t(x,t),\ \ \operatorname{div}\vec u=0,\quad(x,t)\in Q=\Omega\times(0,T),\qquad(35)$$

$$\vec u(x,0)=\vec u_0(x),\ x\in\Omega,\qquad(36)$$

$$\vec u(t,x)=0,\quad(x,\,t)\in\Sigma^{0,T}=\Gamma^0\times[0,T],\qquad(37)$$

$$\vec u\cdot\vec n=|\vec u|,\quad(x,\,t)\in\Sigma^{1,T}=\Gamma^1\times[0,T],\qquad(38)$$

$$q(x,t)=\varphi_t(t)+const\quad\text{на}\quad\Sigma^{1,T}=\Gamma^1\times[0,T],\qquad(39)$$

где $\vec u(x,t):=\vec v_t(x,t)$, а начальное условие вывели из самого уравнения посредством $\vec v_t(x,0)=\vec u_0=P(\nu\Delta\vec v_0+\vec f g(x,0))$.

В силу раздела 1 для решения $\vec u$ задачи (35)–(39) справедлива оценка

$$\|u_t\|^2_{2,\,Q_t}+\|u_{xx}\|^2_{2,\,Q_t}+\|\nabla q\|^2_{2,\,Q_t}\le C(\Omega)<\infty$$

и $\vec u(x,t)\in V_2^{1,0}(Q)$.

Для получения априорной оценки на $\vec v_t(x,T)$ мы умножим уравнение (35) скалярно на в $\vec u$ $L^2(\Omega)$. С учетом $V^1(\Omega)\subset V^0(\Omega)$ и доумножения полученного неравенства на $\exp(-\nu(T-t)/d^2)$ получим

$$\exp(-\nu(T-t)/d^2)\frac{d}{dt}\,\|\vec u(\cdot,t)\|_{V^0(\Omega)}+\frac{\nu}{d^2}\exp(-\nu(T-t)/d^2)\,\|\vec u(\cdot,t)\|_{V^0}\le\left\|\vec F_t(\cdot,t)\right\|_{2,\,\Omega}.\qquad(40)$$

Проинтегрируем (40) по t от 0 до T и, наконец, для любого семейства решений (35) – (40) с возбуждающей силой вида $\vec F_t(x,t)=\vec f(x)\cdot g_t(x,t)$ получим оценку

$$\begin{aligned}&\|\vec u(\cdot,T)\|_{2,\,\Omega}=\|\vec v_t(\cdot,T)\|_{2,\,\Omega}\le\left\|P(\vec f(x)\cdot g(x,0))\right\|_{2,\,\Omega}\exp(-\nu T/d^2)+\\&+\int\limits_0^T\left\|\vec f(x)\cdot g_t(x,T)\right\|_{2,\,\Omega}\exp(-\nu(T-t)/d^2)\,dt.\end{aligned}\qquad(41)$$

Таким образом в силу определения оператора $S(\cdot)$ оценку (41) можно переписать в терминах операторов следующим образом:

$$\left\|S\vec f\right\|_{2,\,\Omega}\le K\left\|\vec f\right\|_{2,\,\Omega}.\qquad(42)$$

Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке для некоторой константы $K < 1$, обеспечивающей строгую сжимаемость оператора, оператор S имеет единственную неподвижную точку при любой $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$. Следовательно, в силу эквивалентности постановки обратной задачи (17) – (23) и операторного уравнения (29) (см. теорему 2.1) искомая обратная задача (17) – (23) однозначно разрешима. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются* (32), $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$. *Тогда оператор* S, *введенный соотношением* (26), *является компактным из* $L^2(\Omega)$ *в* $L^2(\Omega)$.

Доказательство. В силу однозначной разрешимости задачи (8)–(12) и дифференциальных свойств решения $\vec{u} \in V_2^{1,0}(Q) \cap L^2(0,T;V^1(\Omega))$, $\|\vec{u}(\cdot,t)\|_{V^1(\Omega)}$ непрерывна на отрезке $[\varepsilon, T]$, для $\tau^* \in [\varepsilon, T]$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} \|\vec{u}(\cdot,t)\|^2_{V^1(\Omega)}\, dt = (T-\varepsilon)\|\vec{u}(\cdot,\tau^*)\|^2_{V^1(\Omega)}. \tag{43}$$

Для $\vec{F}_t \in L^2(Q)$ аналитической основой априорных оценок достаточной компактности оператора S служат соотношения

$$\int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega} |\vec{u}_t - \nu\Delta_1\vec{u}|^2\, dxdt = \int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega} \left|P\vec{F}_t\right|^2 dxdt. \tag{44}$$

Так как оператор проектирования P из $L^2(\Omega)$ на $V^0(\Omega)$ самосопряжен, учитывая условия (37) – (39), интегрируя (44) по частям, получим

$$\begin{aligned} &\nu\|\vec{u}(\cdot,T)\|^2_{V^1(\Omega)} + \int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega}\left(|\vec{u}_t|^2 + |\nu\Delta_1\vec{u}|^2\right) dxdt = \\ &= \int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega}\left|P\vec{F}_t\right|^2 dxdt + \nu\|\vec{u}(\cdot,\tau^*)\|^2_{V^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{45}$$

С учетом оценок (14) – (15), (43) из (45) получим следующую априорную оценку:

$$\nu\|\vec{u}(\cdot,T)\|^2_{V^1(\Omega)} \le \left\|P\vec{F}_t\right\|^2_{2,Q} + \frac{\nu}{T-\varepsilon}\|\vec{u}\|_{L^2(0,T;V^1(\Omega))}. \tag{46}$$

Для $\vec{u}(x,t) \in L^2(0,T;V^1(\Omega))$ при заданных функцях $\vec{F}_t \in L_{2,1}(Q), \vec{u}_0 = P(\vec{f}(x)g(x,0))$ в силу априорной оценки (13) из (46), учитывая, что $\vec{u}(x,T) = \vec{v}_t(x,T)$, получим

$$\|\nabla\vec{v}_t(\cdot,T)\|^2_{2,\Omega} \le c\|\vec{f}\|^2_{2,\Omega}. \tag{47}$$

Следовательно, в терминах оператора T_g, введенного соотношением (25), можно (47) записать как

$$\|\nabla(T_g\vec{f})\|^2_{2,\Omega} \le c\|\vec{f}\|^2_{2,\Omega}, \tag{48}$$

где константа c не зависит от $\vec{f}$.

Таким образом, применяя теорему вложения Соболева заключаем, что оператор T_g компактный. В силу этого линейный оператор S, как линейная композиция оператора T_g и $g(x,T)$, компактен. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *При сделанных предположениях теорем* $2.2, 2.3$ *обратная задача* $(17)-(23)$ *является фредгольмово разрешимой, т.е. из единственности решения обратной задачи* $(17)-(23)$ *следует существование решения этой задачи.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 теорему достаточно доказать для (29) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$. В силу теоремы 2.3 оператор S является компактным. Поэтому утверждение теоремы для операторного уравнения (29) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$ следует из известных результатов функционального анализа (см. например, [10]).

Докажем единственность решения обратной задачи (17) – (23). Предположим противное. Пусть существуют два различных решения $\{\vec{v}_1, \nabla p_1, \vec{f}_1\}$ и $\{\vec{v}_2, \nabla p_2, \vec{f}_3\}$ обратной задачи (17) – (23). Тогда в силу теоремы 2.2 существуют два различных решения (29) $\{\vec{f}_1\}, \{\vec{f}_2\}$. При этом обязательно

$$\vec{f}_1(x) \neq (\vec{f}_2(x), \tag{49}$$

поскольку иначе в силу единственности решения прямой задачи мы бы имели $\vec{v}_1(x,t) \equiv \vec{v}_2(x,t)$. Однако условие (49) противоречит сжимаемости оператора S, поскольку обе функции $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ являются решениями одного и того же операторного уравнения (29). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Васин И. А.** Тезисы Всесоюзной конференции //"Условно–корректные задачи математической физики."(2–6 октября 1989, Алма - Ата). Красноярск, 1989.

2. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** //Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2000. V. 231.

3. **Абылкаиров У. У.** Тезисы Всесоюзной конференции//"Условно–корректные задачи математической физики."(2–6 октября 1989, Алма - Ата). Красноярск, 1989.

4. **Абылкаиров У. У.** //7th Czechoslovac Conference on Differential Equations and Their Application (EQADIFF7). Praha, 1989. C. 1–2.

5. **Абылкаиров У.У.** //Математический журнал. 2005. V. 6, №2 (16).

6. **Абылкаиров У. У.** //Вычислительные технологии 2002. Т.7; Вестник КазНУ им. аль-Фараби 2002. №4(32); Совм. выпуск по материалам Междун. конф. "Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании." ВТММ-2002 (18-20 сентября).Часть1. Новосибирск-Алматы, 2002. С. 203-215.

7. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Н., 1983.

8. **Pironneau O.** //C.R.Acad.Sci. Paris. Serie I. 1986. V. 303, № 9. P. 403–406.

9. **Ладыженская О. А.** //Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.

10. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М. 1977.

Поступила в редакцию 8.09.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С.23—32*

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ-ПРОТТЕРА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая
Алматы, ул. Толе би, 86 serik@aldash.ricc.kz

В работе получен критерий существования счетных собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, а также доказана вольтерровость сопряженной ей задачи.

§1. Постановка задач и основные результаты.

Двумерные спектральные задачи для гиперболических уравнений интенсивно изучаются [1-3]. Из-за отсутствия эффективных методов исследования изучение спектральных задач Дарбу-Проттера для многомерных гиперболических уравнений требует специальных исследований и привлечение новых методов, поэтому в этом направлении мало работ. В данной статье предложен метод исследования многомерных гиперболических спектральных задач, в частности, получен критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, а также доказана вольтерровость сопряженной ей задачи.

Пусть D_ε – конечная область евклидова пространства $m+1$ точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi + \varepsilon$, $|x| = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$ и плоскостью $t = 0$, $0 \le t \le t_0$; $t_0 : \dfrac{1-\varepsilon}{2} = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 \le \varepsilon \le 1$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = \mu u, \tag{1}$$

Keywords: *hyperbolic equation, eigenfunction, adjoint problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

$$L^*v \equiv g(t)\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - bv_t + dv = \mu v, \qquad (1')$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и $g(0) = 0$, $g(t) \in C^2((0,t_0)) \cap C([0,t_0])$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \geq 2$, μ – действительное число.

Следует отметить, что уравнения (1) встречаются при математическом моделировании процессов взрыва горных пород [4, 5].

Рассмотрим следующие спектральные задачи Дарбу-Проттера для уравнений (1) и (1′).

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_S = 0, \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = 0 \qquad (2)$$

или

$$u_t\Big|_S = 0, \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = 0. \qquad (3)$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (1′) из класса $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v\Big|_S = 0, \quad v\Big|_{S_1} = 0 \qquad (4)$$

или

$$v_t\Big|_S = 0, \quad v\Big|_{S_1} = 0. \qquad (5)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $(x_1,...,x_m,t)$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, сохранив обозначения, использованные в [6, 7].

Пусть Ω_ε – проекция области D_ε на плоскость (r,t) с границами

$$\Gamma_\varepsilon : r = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi + \varepsilon, \quad \Gamma_1 : r = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi \quad \text{и} \quad \Gamma : t = 0, \quad \varepsilon \leq r \leq 1.$$

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W^l_2(D_\varepsilon)$, $l = 0,1,...,$ – пространства Соболева. Через $\widetilde{a}^k_{in}(r,t)$, $\hat{a}^k_{in}(r,t)$, $\widetilde{b}^k_{in}(r,t)$, $\widetilde{c}^k_{in}(r,t)$, $\widetilde{d}^k_{in}(r,t)$, ρ^k_n обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y^k_{n,m}(\theta)$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho,\rho(\theta)$, $i = 1,...,m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m.

Если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W^l_2(D_\varepsilon)$, $i = 1,...,m$, $l \geq m+1$, то справедливы

Теорема 1. *Задача 1 для каждого μ имеет счетное множество собственных функций $\Leftrightarrow \varepsilon = 0$.*

Теорема 2. $\forall\varepsilon > 0$ *при каждом μ задача 2 – вольтеррова.* Отметим, что если $g(t) = t^p$, $p = const > 0$, эти теоремы получены в [8].

§2. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\varepsilon = 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Ее решение в сферических координатах будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \qquad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Тогда аналогично, как в [6,7], для $\bar{u}_n^k$ получим ряд

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1+\sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1-\mu\rho_0^1\bar{u}_0^1+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k g(t)\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k++\left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k+\sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\widetilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right. \tag{7}$$
$$\left.+\left[\widetilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t)+\sum_{i=1}^m\left(\widetilde{a}_{in-1}^k-n\hat{a}_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k-\mu\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\}=0,$$
$$\lambda_n=n(n+m-2).$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=\mu\rho_0^1\bar{u}_0^1, \tag{8}$$

$$g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k g(t)\bar{u}_1^k=$$
$$=\mu\rho_1^k\bar{u}_1^k-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_1}, \tag{9}$$

$$g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k g(t)\bar{u}_n^k=\mu\rho_n^k\bar{u}_n^k-$$
$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in-1}^1\,\bar{u}_{n-1r}^k+\widetilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+[\widetilde{c}_{n-1}^k+\right. \tag{10}$$
$$\left.+\sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in-2}^k-(n-1)\hat{a}_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=2,3,...$$

Нетрудно показать, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,....$, – решение системы (8) - (10), то оно является решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ ([9]), из краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,t)\Big|_{\Gamma}\equiv 0,\quad \bar{u}_n^k(r,t)\Big|_{\Gamma_0}\equiv 0, k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,... \tag{11}$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу в области Ω_0 для уравнений (8) – (10). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8) - (10) можно представить в виде

$$g(t)\bar{u}_{nrr}^k-\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}g(t)\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\bar{u}_n^k=\mu\bar{u}_n^k+f_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv 0$. Произведя в (12) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $y=$

$\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\right)^{\frac{2}{3}}$, получим уравнение

$$yu^k_{nrr} - u^k_{nyy} + \frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}u^k_n - b(y)u^k_{ny} = \mu u^k_n + \bar{f}^k_n(r,y), \tag{13}$$

$$\overline{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4}, \quad b(y) = \frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy} - \frac{g}{y}\right], \quad \bar{f}^k_n(r,y) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\frac{f^k_n(r,t)}{y^2}.$$

Полагая $u^k_n = \omega^k_n \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right]$, уравнение (13) приводим к виду

$$y\omega^k_{nrr} - \omega^k_{nyy} + \frac{\overline{\lambda}_n y}{r^2}\omega^k_n = [\mu + c(y)]\omega^k_n + \widetilde{f}^k_n(r,y), \tag{14}$$

$$c(y) = -\frac{1}{4}(b^2 + 2b'_y) \in C(y>0), \quad \widetilde{f}^k_n(r,y) = \bar{f}^k_n(r,y)\exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)d\xi\right].$$

Уравнение (14), в свою очередь, с помощью замены переменных $r = r$, $x_0 = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ переходит в уравнение

$$\omega^k_{nrr} - \omega^k_{nx_0x_0} - \frac{1}{3x_0}\omega^k_{nx_0} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_n = g^k_n(r,x_0), \tag{15}$$

$$g^k_n(r,x_0) = \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left\{\left[\mu + c\left(\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right]\omega^k_n\left(r,\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) + \widetilde{f}^k_n\left(r,\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right\}.$$

При этом краевое условие (11) запишется в виде

$$\omega^k_n(r,0) = 0, \quad \omega^k_n(r,r) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,..., \quad 0 \le r \le 1. \tag{16}$$

Наряду с уравнением (15) рассмотрим уравнения

$$L_\alpha\omega^k_{\alpha,n} \equiv \omega^k_{\alpha,nrr} - \omega^k_{\alpha,nx_0x_0} - \frac{\alpha}{x_0}\omega^k_{\alpha,nx_0} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_{\alpha,n} = g^k_{\alpha,n}(r,x_0), \tag{17}$$

$$L_0\omega^k_{0,n} \equiv \omega^k_{0,nrr} - \omega^k_{0,nx_0x_0} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\omega^k_{0,n} = g^k_{0,n}(r,x_0), \tag{18}$$

$$g^k_{\alpha,n}(r,x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}\left\{\left[\mu + c\left(\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right)\right]\omega^k_{\alpha,n}\left(r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \widetilde{f}^k_n\left(r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right)\right\},$$

$$g^k_{0,n}(r,x_0) = [\mu + c(x_0)]\omega^k_{0,n}(r,x_0) + \widetilde{f}^k_n(r,x_0), \quad 0 < \alpha = const < 1.$$

Отметим, что уравнение (15) совпадает с (17) при $\alpha = \frac{1}{3}$.

Имеет место следующая функциональная связь, как доказано в [6] (см. также [10]), между решениями задачи Коши для уравнений (17) и (18).

Утверждение 1. *Если $\omega^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$ – решение задачи Коши для уравнения (18), удовлетворяющее условию*

$$\omega^{k,1}_{0,n}(r,0) = \tau^k_n(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \tag{19}$$

то функция

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)=\gamma_\alpha\int\limits_0^1\omega_{0,n}^{k,1}(r,\xi,x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{20}$$

при $\alpha>0$ есть решение уравнения (17) с данными (19).

Утверждение 2. *Если $\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (18), удовлетворяющее условиям*

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{21}$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)&=\gamma_{2-k+2q}\left(\tfrac{1}{x_0}\tfrac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1\omega_{0,n}^{k,1}(r,\xi,x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv\\ &\equiv 2^{q-1}\gamma_{2-k+2q}\Gamma\left(q-\tfrac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\tfrac{\omega_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

является решением уравнения (17) с начальными данными

$$\omega_{0,n}^{k,2}(r,0)=0,\quad \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,2}=v_n^k(r), \tag{23}$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha=2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}),\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{ot}^α – оператор Римана-Лиувилля, а $q\geq 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q\geq m-1$.

При этом функции $g_{\alpha,n}^k(r,x_0)$, $g_{0,n}^k(r,x_0)$ связаны формулами (20) в случае утверждения 1 и (22) – в случае утверждения 2.

Учитывая формулу (22), а также обратимость оператора D_{ot}^α ([11]), задачу Дарбу для уравнения (15) с данными (16) сводим к задаче Дарбу для (17) с краевыми условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,\quad \omega_{0,n}^k(r,r)=0. \tag{24}$$

В [6,7] доказано, что задача (18), (24) приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\omega_{0,n}^k(r,x_0)=\int\limits_{1/2}^{(r+x_0)/2}\int\limits_0^{(r-x_0)/2}[\mu+c(\xi_1-\eta_1)]\omega_{0,n}^k(\xi_1,\eta_1)P_{\mu_1}(z)d\xi_1d\eta_1+p_n^k(r,x_0), \tag{25}$$

$$p_n^k(r,x_0)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r+x_0}{2}\right)^\beta+\left(\frac{r-x_0}{2}\right)^\beta\right]-\frac{x_0}{2r}\int\limits_{(r-x_0)/2}^{(r+x_0)/2}\xi_1^{\beta-1}P'_{\mu_1}\left(\frac{r^2-x_0^2+4\xi_1^2}{4r\xi_1}\right)d\xi_1+$$

$$+\int\limits_{1/2}^{(r+x_0)/2}\int\limits_0^{(r-x_0)/2}\widetilde{f}_n^k(\xi_1+\eta_1,\xi_1-\eta_1)P_{\mu_1}(z)d\xi_1d\eta_1,\ z=\frac{2x_0(\xi_1-\eta_1)+4\xi_1\eta_1+r^2-x_0^2}{2r(\xi_1+\eta_1)},$$

$$\mu_1=n+\frac{m-3}{2},\quad \beta=\mu_1-2s\geq\frac{m+3}{2},\ s=0,1,...,$$

$P_{\mu_1}(z)$ – функция Лежандра, которая является функцией Римана для уравнения $L_0\omega_{0,n}^k = 0$.

Известно, что уравнение вида (25) обратимо ([12], с.130), это означает, что задача (18), (24) имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Следовательно, в силу утверждения 2 задача (15), (16) также имеет бесчисленное множество ненулевых решений вида (22), где $\omega_{0,n}^{k,1}$ определяются из (25).

Таким образом, решив сначала задачу (8), (11) ($n = 0$), а затем (9), (11) ($n = 1$) и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$

Итак, как и в [6] показано, что

$$\int\limits_H \rho(\theta) Lu\, dH = 0. \tag{26}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 – множество, которое плотно в $L_2\left(\int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi,\, 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi\right)$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотно в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотно в $L_2(0,t_0)$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотно в $L_2(D_0)$ ([13]). Отсюда и из (26) следует, что $\int\limits_{D_0} f(r,\theta,t) Lu dD_0 = 0$ и $Lu = 0$ $\forall (r,\theta,t) \in D_0$.

Следовательно, задача (1), (2) имеет нетривиальные решения вида

$$u(r,\theta,t) = r^{(1-m)/2} u_0^1(r,t) Y_{0,m}^1(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{27}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих двумерных задач Дарбу. Аналогично [6,7] можно показать, что полученное решение (27) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_0) \cap C^2(D_0)$, если $l > 3m/2$. Далее, аналогично используя утверждение 1, можно показать, что задача (1), (3) также имеет ненулевые решения вида (27), где $\omega_{0,n}^k(r,x_0)$ определяются из интегрального уравнения (25), в котором функции $p_n^k(r,x_0)$ представимы как

$$\begin{gathered} p_n^k(r,x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{(r-x_0)/2}^{(r+x_0)/2} \xi_1^\beta P_{\mu_1}\left(\frac{r^2 - x_0^2 + 4\xi_1^2}{4r\xi_1}\right) d\xi_1 + \\ + \int\limits_{1/2}^{(r+x_0)/2} \int\limits_0^{(r-x_0)/2} \widetilde{f}_n^k(\xi_1+\eta_1, \xi_1-\eta_1) P_{\mu_1}(z) d\xi_1 d\eta_1, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\beta = \mu_1 - 2(s+1) > \frac{m-1}{2}, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Из (25), (27), (28) нетрудно видеть, что для каждого μ собственные функции задачи 1 образуют счетное множество. Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана.

Теперь переходим ко второй части теоремы. Пусть задача 1 для каждого μ имеет счетное множество собственных функций. Покажем, что $\varepsilon = 0$.

Предположим противное, т.е. $\varepsilon > 0$.

Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Построим $\upsilon(r,\theta,t)$ – решение уравнения ($1'$), удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta), \quad \upsilon|_{S_1} = 0, \tag{29}$$

$\bar{\tau}_0^1(r) \in G$, где G – множество функций $\tau(r)$ из класса C^1 $(\varepsilon \leq r \leq 1) \cap C^2(\varepsilon < r < 1)$. Очевидно G плотно всюду в $L_2((\varepsilon, 1))$. Функцию $\upsilon(r, \theta, t)$ будем искать в виде ряда (6). Тогда, как в случае задачи (1), (2), функции $\bar{u}_n^k(r, t)$ будут удовлетворять системе уравнений (8) - (10), где $\hat{a}_{in}^k$, $\widetilde{a}_{in}^k$, $\widetilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\hat{a}_{in}^k$, $-\widetilde{a}_{in}^k$, $-\widetilde{b}_n^k$ и $\widetilde{c}_n^k$ на $\widetilde{d}_n^k$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$

Из краевого условия (29) имеем

$$\bar{\upsilon}_0^1\Big|_{\Gamma} = \bar{\tau}_0^1(r), \quad \bar{\upsilon}_0^1\Big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{30}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \bar{\upsilon}_n^k\Big|_{\Gamma} = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, ... \tag{31}$$

Далее рассмотрим уравнение (15), к которому сводится (8) - (10), при этом условии (30), (31) запишутся в виде

$$\omega_0^1(r, 0) = \tau_0^1(r), \quad \omega_0^1(r, 1 - r) = 0, \quad \varepsilon \leq r \leq 1, \tag{32}$$

$$\omega_n^k(r, 0) = 0, \quad \omega_n^k(r, 1 - r) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{33}$$

$$\tau_0^1(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_0^1(r).$$

Теперь рассмотрим задачу (15), (32). Ее решение будем искать в виде $\omega_0^1(r, x_0) = \omega_0^{1,1} + \omega_0^{2,1}$, где $\omega_0^{1,1}(r, x_0)$ – решение задачи Коши (15), (19), а $\omega_0^{2,1}(r, x_0)$ – решение задачи Дарбу для (15) с условием

$$\omega_0^{2,1}(r, 0) = 0, \quad \omega_0^{2,1}(r, 1 - r) = -\omega_0^{1,1}(r, 1 - r). \tag{34}$$

Нетрудно заметить, что, используя формулы (20), (22), задачи (15), (19) и (15), (34) можно свести соответственно к задаче Коши (18), (19) и задаче Дарбу для (18) с данными $\omega_{0,0}^{2,1}(r, 0) = 0$, $\omega_{0,0}^{2,1}(r, 1 - r) = \sigma_0^1(r)$, которые однозначно разрешимы ([6]), где $\sigma_0^1(r)$ выражается через $\tau_0^1(r)$.

Аналогично, задачу (15), (33) сводим к задаче Дарбу для (18) с условием $\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0$, $\omega_{0,n}^{k,1}(r, 1 - r) = 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, ...$, которое имеет ненулевые решения ([6]).

Следовательно, учитывая утверждения 1 и 2, найдем последовательно однозначные решения задач (8), (30), (9), (31) и (10), (31).

Таким образом, решение задачи $(1')$, (29) в виде (27) построено.

Аналогичным образом строятся решения этой задачи, если $\tau(r, \theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, ...$

Теперь покажем, что решение задачи (1), (2) в классе $C^1(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x, t) \equiv 0$.

Из определения сопряженных операторов ([14]) имеем

$$\upsilon \cdot Lu - u \cdot L^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = g(t) \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos(N', x_i) - u_t \cos(N', t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos(N', x_i) + b \cos(N', t),$$

а N' – внутренняя нормаль к границе ∂D_ε.

Далее, используя формулу Грина, получим

$$\int\limits_{D_\varepsilon} (\upsilon Lu - uL^*\upsilon) dD_\varepsilon = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \left[(\upsilon \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial N}) M + u\upsilon Q \right] ds, \tag{35}$$

где N — нормаль к ∂D_ε, а $M^2 = q^2 \sum\limits_{i=1}^{m} \cos^2(N', x_i) + \cos^2(N', t),$.

Из (35), принимая во внимание граничные условия (2) и тот факт, что на характеристических коноидах S_ε и S_1 конормальные производные $\dfrac{\partial}{\partial N}$ совпадают с производной по касательному направлению ([14]), будем иметь

$$\int\limits_S \tau(r,\theta) u_t(r,\theta,0) dS = 0. \tag{36}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\left\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ плотна ([13]) в $L_2(S)$, то из (36) заключаем, что $u_t(x,0) = 0 \ \forall x \in S$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ для уравнения (1) ([14]) будем иметь $u(x,0) = 0 \ \forall (x,t) \in D_\varepsilon$ в классе $C^1(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Это приводит к противоречию нашему предположению.

Таким образом, теорема 1 для задачи (1), (2) доказана.

Ее справедливость установим для задачи (1), (3).

Пусть $\varepsilon > 0$. Сначала построим решение уравнения (1′), удовлетворяющее краевым условиям

$$(b\upsilon - \upsilon_t)\Big|_S = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta), \quad \upsilon\Big|_{S_1} = 0, \tag{37}$$

где $\bar{\upsilon}_0^1(r) \in G$ в виде (6).

В этом случае функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений (8) – (10) и краевым условиям

$$(\widetilde{b}_0^1 \bar{\upsilon}_0^1 - \bar{\upsilon}_{0t}^1)\Big|_\Gamma = \bar{\nu}_0^1(r), \quad \bar{\upsilon}_0^1\Big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{38}$$

$$(\widetilde{b}_n^k \bar{\upsilon}_n^k - \bar{\upsilon}_{nt}^k)\Big|_\Gamma = 0, \quad \bar{\upsilon}_n^k\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{39}$$

которые, в свою очередь, сводятся к уравнению (15) с данными

$$\omega_0^1(r,0) = \tau_0^1(r), \quad \omega_0^1(r, 1-r) = 0, \tag{32}$$

$$\omega_n^k(r,0) = 0, \quad \omega_n^k(r, 1-r) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{33}$$

$$\tau_0^1(r) = 4ar^{(m-1)/2} \bar{\nu}_0^1(r), \quad a = \lim_{t \to 0} \frac{y^{3/2} g(t)}{g^{3/2} + y^{3/2} g \widetilde{b}_0^1 - y^{3/2} g_t'} \neq 0, \quad |a| < \infty,$$

которые однозначно разрешимы в $C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon) \cap C^2(\Omega_\varepsilon)$.

Следовательно, с учетом утверждений 1 и 2 найдем последовательно однозначные решения задач (8), (38), (9), (39) и (10), (39).

Таким образом, решение задачи (1′), (37) в виде (27) построено. Аналогично строятся решения этой задачи, если $\nu(r,\theta) = \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, ...$

Далее, как и в случае задачи (1), (2), устанавливается теорема 1 для задачи (1), (3).

§3. Доказательство теоремы 2.

Пусть $\varepsilon \geq 0$. Сначала рассмотрим задачу (1′), (4), докажем ее единственность. Для этого построим $u(r,\theta,t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta), \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = 0, \quad \bar{\tau}_0^1(r) \in G. \tag{40}$$

Решение задачи (1), (40) будем искать в виде ряда (6). Тогда как в §2 придем к уравнению (15) с данными

$$\omega_0^1(r,0)=\bar{\tau}_0^1(r),\quad \omega_0^1(r,r-\varepsilon)=0, \tag{41}$$

$$\omega_n^k(r,0)=0,\quad \omega_n^k(r,r-\varepsilon)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,2,... \tag{42}$$

Задача (15), (41), в свою очередь, сводится к однозначно разрешимой задаче Коши (18), (19) и задаче Дарбу для (18) с условием

$$\omega_{0,0}^{2,1}(r,0)=0,\quad \omega_{0,0}^{2,1}(r,r-\varepsilon)=-\omega_{0,0}^{1,1}(r,r-\varepsilon),\quad \varepsilon\le r\le 1. \tag{43}$$

При $\varepsilon=0$ в [15] доказано, что задача (18), (43) имеет бесчисленное множество решений, а при $\varepsilon>0$ в [16] – ее однозначная разрешимость.

Аналогичный факт имеет место и для задачи (18), (42).

Таким образом, решение задачи (1), (40) в виде (27) построено.

Также строятся решения этой задачи, если $\tau(r,\theta)=\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=1,2,...$

Далее как в случае задачи (1), (2) ($\varepsilon>0$) доказывается что решения задачи (1′), (4) в классе $C^1(\bar{D}_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x,t)\equiv 0$.

Единственность решения задачи (1′), (5) устанавливается аналогично.

Теперь переходим к построению решения задачи 2. Если ее решение искать в виде ряда (6), то приходим к задаче Дарбу для уравнения (15) с данными

$$\omega_n^k(r,0)=0,\quad \omega_n^k(r,1-r)=0,\quad \varepsilon\le r\le 1 \tag{44}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\omega_n^k(r,0)=0,\quad \omega_n^k(r,1-r)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,2,...,$$

которая сводится к краевой задаче для (18) с условиями

$$\omega_{0,n}^k(r,0)=0,\quad \omega_{0,n}^k(r,1-r)=0 \tag{45}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{0,n}^k(r,0)=0,\quad \omega_{0,n}^k(r,1-r)=0.$$

При $\varepsilon=0$ в [15], а при $\varepsilon>0$ в [16] показано, что задача (18), (45) имеет нулевое решение.

Таким образом, доказано, что решение задачи (15), (44) $\omega_n^k(r,t)\equiv 0$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=1,2,...$, означает, что решение задачи 2 в виде (6) равно $u(r,\theta,t)\equiv 0$.

Теорема 2 доказана.

В заключении отметим, что данный результат анонсирован в [17].

Цитированная литература

1. **Кальменов Т.Ш.** //Автореф. дисс. док. физ-мат. наук. Москва, МГУ, 1982.

2. **Моисеев Е.И.** Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М. 1988.

3. **Пономарев С.М.** // Автореф. дисс. физ-мат. наук. Москва, МГУ, 1981.

4. **Алдашев С.А., Ким Н.Х.** //Доклады НАН РК. 2001. №2. С.5–7.

5. **Алдашев С.А., Атабай Б.Ж.** //Труды межд. конф. “Современные проблемы механики”. Ч.2. Общая и прикладная механика. Алматы, 2001.

6. **Алдашев С.А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.

7. **Алдашев С.А.** //Дифференц. уравнения. 1998. Т.34, №1. С.1–5.

8. **Алдашев С.А.** // Дифференц. уравнения. 2005. Т.41, № 6. С.795–801.

9. **Михлин С.Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. 1962.

10. **Терсенов С.А.** Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973.

11. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М. 1995.

12. **Бицадзе А.В.** Уравнения смешанного типа. М. 1959.

13. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М. 1976.

14. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т.4, Ч.2. М. 1981.

15. **Алдашев С.А.** //Укр. матем. журнал. 2003. Т.55. №1. С.100–107.

16. **Алдашев С.А.** Н //Укр. матем. журнал. 2000. Т.52. №5. С.590–595.

17. **Алдашев С.А.** // Труды меж. научной конф. "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". Ташкент, 2004. С.211–213.

Поступила в редакцию 25.04.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 33 — 36*

УДК 517.928

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХУ СТАРШЕГО ОБОБЩЕННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. М. Алдибеков

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 Tamash@kazsu.kz

В работе установлены необходимое и достаточное условия устойчивости сверху старшего обобщенного показателя Ляпунова.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \ x \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывной и неограниченной матрицей $A(t)$ при $t \in [0, +\infty)$. Все относящиеся сюда определения содержатся в [1,2].

Пусть при $t \geq 0$ выполняется условие

$$\|A(t)\| \leq K\varphi(t), \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная положительная при $t \geq 0$ скалярная функция, K – положительная постоянная.

Далее

$$\lambda(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln \|X_A(t,0)\|$$

– старший обобщенный показатель системы (1), где $q(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$, $X_A(t,0)$ – матрица Коши системы (1),

$$\Omega(A) = \inf_{R_q \in B(A,q)} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t R_q(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

– обобщенный верхний центральный показатель системы (1) относительно $q(t)$.

В работе [3] доказано, что при $q(t) = t^\beta, \beta \in N, \beta \neq 1$, имеет место равенство

$$\Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \Sigma_{j=0}^{m-1} \ln \|X_A((j+1)T, jT)\|,$$

Keywords: *ordinary differential equation, Lyapunov exponent, stability*
2000 Mathematics Subject Classification:

где $X_A(t,s)$ – матрица Коши системы (1).

Для любого решения системы (1) при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \le D_\varepsilon \|x(t_0)\| e^{[\Omega(A)+\varepsilon][q(t)-q(t_0)]},$$

где D_ε – положительная константа, $t \ge t_0 \ge 0$.

Отсюда следует, что обобщенный показатель любого ненулевого решения системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\lambda[x,q] \le \Omega(A)$$

и, в частности, для старшего обобщенного показателя имеет место неравенство

$$\lambda(A) \le \Omega(A).$$

Обозначим через $M_n^+(\varphi)$ метрическое пространство, точками которого являются системы (1) n-го порядка, удовлетворяющие условию (2), а расстояние определяется формулой

$$\rho(A,B) = \sup_{t\ge 0} \frac{\|A(t)-B(t)\|}{\varphi(t)}; \quad A, \quad B \in M_n^+(\varphi)$$

(здесь система (1) отождествляется с матрицей $A(t)$).

Старший обобщенный показатель Ляпунова $\lambda(A)$ и обобщенный верхний центральный показатель $\Omega(A)$ системы (1) из пространства $M_n^+(\varphi)$ будем рассматривать как функционалы, определенные на этом пространстве: $\lambda(\cdot) : M_n^+(\varphi) \to R, \Omega(\cdot) : M_n^+(\varphi) \to R$.

Пусть

$$M_n^+ \equiv M_n^+(t^{\beta-1}+1), \quad \beta > 1.$$

Определение 1. *Если функционал $\lambda(\cdot) : M_n^+ \to R$ непрерывен (полунепрерывен сверху, полунепрерывен снизу) в точке $A \in M_n^+$, то старший обобщенный показатель системы (1) называется устойчивым (устойчивым вверх, устойчивым вниз).*

Аналогично определяется устойчивость (устойчивость вверх и устойчивость вниз) для других показателей.

Следующий пример показывает, что обобщенные показатели неустойчивы, т.е. функционалы имеют точки разрыва в пространстве M_n^+.

Пример $(k > 1)$.

$$\frac{dy_1}{dt} = -akt^{k-1}y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (kt^{k-1}\sin\ln t + t^{k-1}\cos\ln t - 2akt^{k-1})y_2.$$

Это модернизация примера Перрона $([4], k=1)$.

Теорема 1. *Старший обобщенный показатель, как функционал $\lambda(\cdot) : M_n^+ \to R$, полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+$, тогда и только тогда когда имеет место равенство*

$$\lambda(A) = \Omega(A).$$

Доказательство Достаточность. Из работы [2] (теорема 2) следует, что функционал $\Omega(\cdot) : M_n^+ \to R$ является полунепрерывным (только сверху) функционалом таким образом, если имеет место равенство $\lambda(A) = \Omega(A)$ в точке $A \in M_n^+$, то старший показатель тоже является полунепрерывным сверху функционалом в точке $A \in M_n^+$.

Необходимость. Пусть функционал $\lambda(\cdot)$ полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+$. Следуя работе [5], для любого $\varepsilon > 0$ зафиксируем T_0 такое, что $e^{\frac{\varepsilon}{2}T_0^\beta}\sin^2\varepsilon \ge 1$.

Выберем T так, чтобы число

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m^\beta T^\beta}\Sigma\ln\|X_A((i+1)T,iT)\|\geq\Omega(A)-\frac{\varepsilon}{4},$$

где $\frac{T}{T_0}=s$ – целое, $4(2a+\varepsilon)\frac{T_0}{T}<\frac{\varepsilon}{4}$, $a=\sup\frac{\|A(t)\|}{\varphi(t)}$.

Пусть $x_i(t)=X_A(t,iT)x_i$ – решения системы (1), где $x_i, i=0,1,2\ldots$ – единичный вектор, для которого выполняется равенство

$$\|X_A((i+1)T,iT)x_i\|=\|X_A((i+1)T,iT)\|.$$

Строим возмущение. Положим $B_\varepsilon(t)=0$ при $0\leq t\leq T$.

Пусть на отрезке $T\leq t\leq 2T$ выполняется неравенство

$$\frac{\|x_1(2T)\|}{\|x_1(T)\|}:\frac{\|x_0(2T)\|}{\|x_0(T)\|}\geq e^{\frac{\varepsilon}{2}T^\beta}.$$

Разделим отрезок $[T,2T]$ на s равных частей длины T_0 и берем первый из отрезков слева, на концах которых выполняется неравенство

$$\frac{\|x_1(T+i_1T_0)\|}{\|x_1(T+(i_1-1)T_0)\|}:\frac{\|x_0(T+i_1T_0)\|}{\|x_0(T+(i_1-1)T_0)\|}\geq e^{\frac{\varepsilon}{2}T_0^\beta},$$

$i_1\in 1,...,s.$ Строим возмущение B_ε при $T\leq t\leq 2T$ следующим образом:

А) $B_\varepsilon=0$ при $t\in(T,T+(i_1-2)T_0)\bigcup(T+i_1T_0,2T_0]$,

Б) $B_\varepsilon(t)=U_\varepsilon^{-1}A(t)U_\varepsilon(t)-U_\varepsilon^{-1}(t)\dot U_\varepsilon(t)-A(t)$ при $t\in[T+(i_1-2)T_0,T+(i_1-1)T_0]$.

Так как $x_0(t)$ – решение системы (1), то $y_0(t)=x_0(t)$ при $t<T+(i_1-2)T_0$, а также $y_0(t)=U_\varepsilon^{-1}x_0(t)$ при $t\in[T+(i_1-2)T_0,T+(i_1-1)T_0]$ есть решение системы

$$\dot y=A(t)y+B_\varepsilon(t)y, \tag{3}$$

где $U_\varepsilon(t)$ – ортогональная матрица, обладающая свойствами: а) $U_\varepsilon(T+(i_1-2)T_0)=E$ б) $\|\dot U_\varepsilon(t)\|\leq\frac{\varepsilon}{T_0^\beta}$. Угол $\angle(x_0(T+(i_1-1)T_0),y_0(T+(i_1-1)T_0))=\varepsilon$ $y_0(T+(i_1-1)T_0)=U_\varepsilon^{-1}(T+(i_1-1)T_0)x_0(T+(i_1-1)T_0)=\alpha_1x_0(T+(i_1-1)T_0)+\alpha_2x_1(T+(i_1-1)T_0),(\alpha_1>0,\alpha_2>0)$. При $t\in[T+(i_1-1)T_0,T+i_1T_0]$ берем $B_\varepsilon(t)$ как в Б) и $U_\varepsilon(t)$ так, чтобы $U_\varepsilon(T+(i_1-1)T_0)=E$ и вектор $U_\varepsilon^{-1}(T+i_1T_0)[\alpha_1x_0(T+i_1T_0)+\alpha_2x_1(T+i_1T_0)]$ был коллинеарен вектору $x_1(T+i_1T_0)$.

Далее на отрезках $[2T,3T],...,$ возмущение $B_\varepsilon(t)$ строится аналогично. Заметим, что $A+B_\varepsilon\in M_n^+$.

В силу построения при любом $i=0,1,2,$ имеет место неравенство

$$\frac{\|y_0((i+1)T)\|}{\|y_0(iT)\|}\geq\frac{\|x_i((i+1)T)\|}{\|x_i(iT)\|}e^{-\frac{3\varepsilon}{4}T^\beta}.$$

Следовательно, $\lambda(A+B_\varepsilon)\geq\lambda(A)-\frac{3\varepsilon}{4}>\Omega(A)-\varepsilon$ где $\lambda(A+B_\varepsilon)$ – обобщенный показатель решения $y_0(t),y_0(0)=x_0(0)$ системы (3). Поэтому имеет место равенство $\lambda(A)=\Omega(A)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $A\in M_n^+$ – точка полунепрерывности сверху старшего обобщенного показателя $\lambda(A)$ и $\lambda(A)<0$, то из устойчивости нулевого решения системы (1) следует устойчивость нулевого решения квазилинейной системы*

$$\dot x=A(t)x+f(t,x), \tag{4}$$

где векторная функция $f(t,x)$ *непрерывна в области* $[0,+\infty)\bigotimes D, D \subset R^n, f(t,0)=0$ *и удовлетворяет условию*

$$\|f(t,x)\| \le K\varphi(t)\|x\|. \tag{5}$$

Доказательство. Класс вектор-функций $f(t,x)$ удовлетворяющих условию (5) с константой K, обозначим через $L(K)$. В работе [2] (теорема 2) установлено, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K > 0$, что при всех $f(t,x) \in L(K), t \ge T_0$, выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \le D_\varepsilon \|x(t_0)\| e^{[\Omega(A)+\varepsilon][q(t)-q(t_0)]},$$

равномерное по всем решениям системы (4), где D_ε – некоторая константа. Отсюда в силу полунепрерывности сверху обобщенного верхнего центрального показателя и из теоремы 1 при условии $\lambda(A) < 0$ следует устойчивость (экспоненциальная) нулевого решения квазилинейной системы (4). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Алдибеков Т.М.** // Математический журнал. 2002. Т.2, №2. С.19–24.

2. **Алдибеков Т.М.** // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2005. №1(239). С.3–9.

3. **Алдибеков Т.М.** // Математический журнал. 2004. Т.4, №3. С.5–11.

4. **Perron O.** // Die Ordnungzahlen deer Differentialgleichungen. Math. Z. 1930. 32. P.703–728.

5. **Миллионщиков В.М.** // Сибирский математический журнал. 1969. Т.10, №1. С.99–104.

6. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М, 1966.

7. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в бенаховом пространстве. М, 1970.

8. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М.-Л., 1937.

Поступила в редакцию 27.05.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 37 – 44*

УДК 517.956, 517.968.2

ОСОБОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА. 2. НЕОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, А. Е. Туймебаева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

Рассматриваются вопросы разрешимости особого интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода и его сопряженного. Показано, что исследуемое уравнение является нетеровым и его индекс равен 1. Полученные результаты использованы при изучении нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения в четверти плоскости.

Работа состоит из двух частей. Первая часть [1] посвящена исследованию однородного интегрального уравнения по описанию характеристического и резольвентного множеств (пп. 1 и 2). Неоднородный случай и применение результатов к нелокальным задачам (пп. 3 и 4) составляет вторую часть работы.

Для всей работы использована сквозная нумерация формул, т.е. нумерация формул первой части продолжается во второй части.

3. Неоднородные уравнения. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\mathbf{K}_\lambda\mu \equiv (I-\lambda\mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = f(t),\ \ t\in\mathbb{R}_+. \qquad (1)$$

Применяя к обеим частям этого уравнения преобразование Меллина, получим

$$\widehat{\mu}(s)\left[1-\lambda\widehat{k}(s)\right] = \widehat{f}(s) \quad (\gamma < \operatorname{Re} s < 0),$$

где $\widehat{k}(s)$ определяется из равенства (7), а $\widehat{f}(s)-$ соответственно преобразование Меллина функции $f(t)$:

$$\widehat{f}(s) = \int\limits_0^\infty f(t)t^{s-1}dt, \quad \operatorname{Re} s > \gamma,$$

Keywords: *special integral equation, Volterra equation, spectrum, nonlocal boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

и параметр γ выбран так, что

$$\widehat{f}(s)=\int\limits_0^\infty |\tilde{f}(t)|t^{\gamma-1}dt<\infty.$$

Таким образом, частное решение уравнения (1) имеет вид

$$\mu_{\text{част.}}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\widehat{f}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)}t^{-s}ds\,,\ \gamma<\operatorname{Re}s<0. \tag{31}$$

Здесь $\gamma<\sigma<0$ выбрано так, чтобы $1-\lambda\widehat{k}(s)\neq 0$ для заданного значения λ, и интеграл берётся вдоль прямой $\operatorname{Re}s=\sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s (расположенной правее всех нулей функции $1-\lambda\widehat{k}(s)=0$, $\operatorname{Re}s<0$) и понимается в смысле главного значения.

Если спектральный параметр λ расположен в правой полуплоскости (т.е. $\operatorname{Re}\lambda>0$), тогда общее решение интегрального уравнения (1) можно получить, прибавив к частному решению (31) общее решение соответствующего однородного уравнения.

Преобразуем частное решение (31). Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{\widehat{f}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)}=\widehat{f}(s)+\frac{\lambda\widehat{k}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)}\cdot\widehat{f}(s).$$

Тогда, если ввести обозначение

$$\widehat{r}(s)=\frac{\lambda\widehat{k}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)}$$

и использовать формулу свертки для преобразования Меллина, получим

$$\mu_{\text{част.}}(t)=f(t)+\int\limits_0^t r(t/\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{32}$$

где $r(\theta)-$ обратное преобразование Меллина (оригинал) образа $\widehat{r}(s)$. Найдём явное выражение для резольвенты $r(\theta)$. По формуле обращения находим

$$r(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\widehat{k}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)}\,\theta^{-s}ds,\ \ \gamma<\operatorname{Re}s<0. \tag{33}$$

Для вычисления интеграла (33) применим теорему Коши о вычетах. При $0<\theta<1$ в контур интегрирования включаем полуокружность, лежащую в левой полуплоскости. В этом случае, если $\operatorname{Re}\lambda>0$, подынтегральная функция имеет единственную особенность, а именно, в точке $-s^*$, являющейся нулем функции $A(s)=1-\lambda\widehat{k}(s)$, или же простым полюсом функции $\widehat{r}(s)$.

Таким образом (при $\operatorname{Re}\lambda>0$),

$$r(\theta)=l(-s^*)\theta^{-s^*},\ \ 0<\theta<1,$$

где $l(-s^*)$ – величина, обратная логарифмической производной функции $\widehat{k}(s)$ в точке $s=-s^*$:

$$l(-s^*)=-\frac{\widehat{k}(-s^*)}{\widehat{k}'(-s^*)}. \tag{34}$$

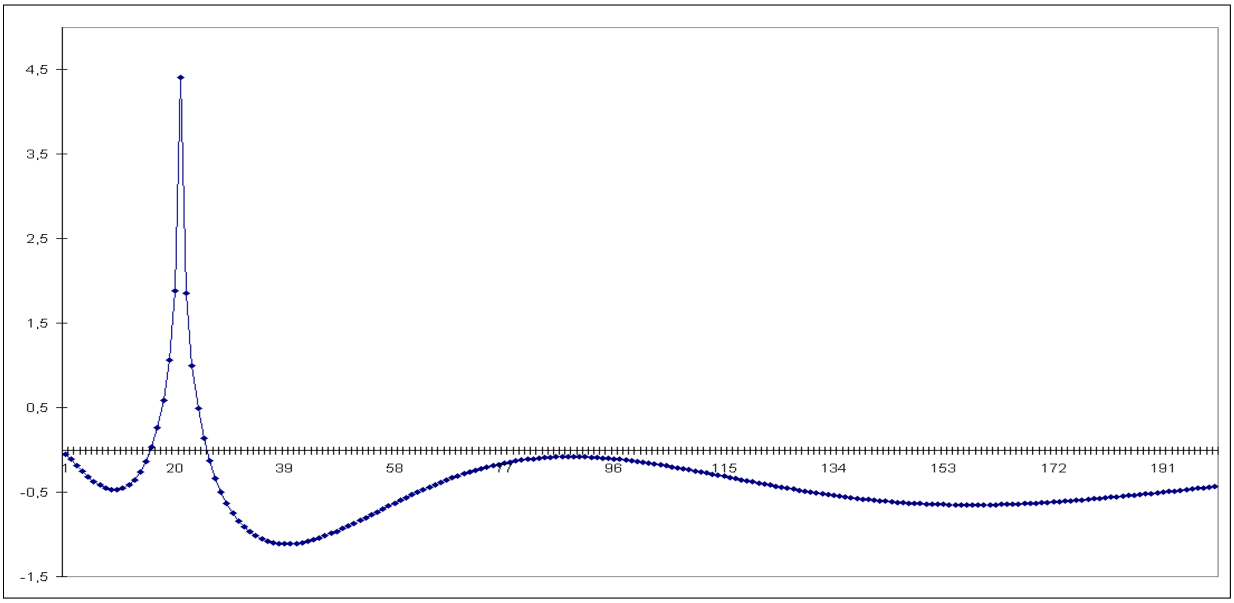

Рис. 6: Случай $s = 20.5$

Значит, из (32) следует, что частное решение неоднородного интегрального уравнения (1) можно записать в следующем виде

$$\mu_{\text{част.}}(t) = f(t) + l(-s^*)\int\limits_0^t \frac{\tau^{-s^*-1}}{t^{-s^*}} f(\tau)d\tau.$$

Для рассмотрения случая $\operatorname{Re}\lambda < 0$ приведем следующее замечание.

Замечание 2. *Сумма ряда*

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}, \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

может принимать как положительное, так и отрицательное значения. Действительно, используя известное преобразование Эйлера [2, с.386] для сходящихся (в том числе, и для знакопеременных) рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-s} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{p!}{-s(-s+1)(-s+2)\dots(-s+p)},$$

получаем требуемое. Например, вычисления, проведенные для конкретных положительных значений s, показывают, что $S(20.5) < 0$, $S(39.5) > 0$, $S(100.5) < 0$ (см. рис.6 – 8, где даны графики частичных сумм $S_n(s) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{L_k}{k-s}$ в зависимости от n).

Далее дополнительно к замечанию 2 необходимо сделать следующее пояснение. Определяя функцию $\widehat{k}(s)$ (7) (см. также формулу (10)) через сумму ряда

$$\hat{k}(s) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} S(s) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s},$$

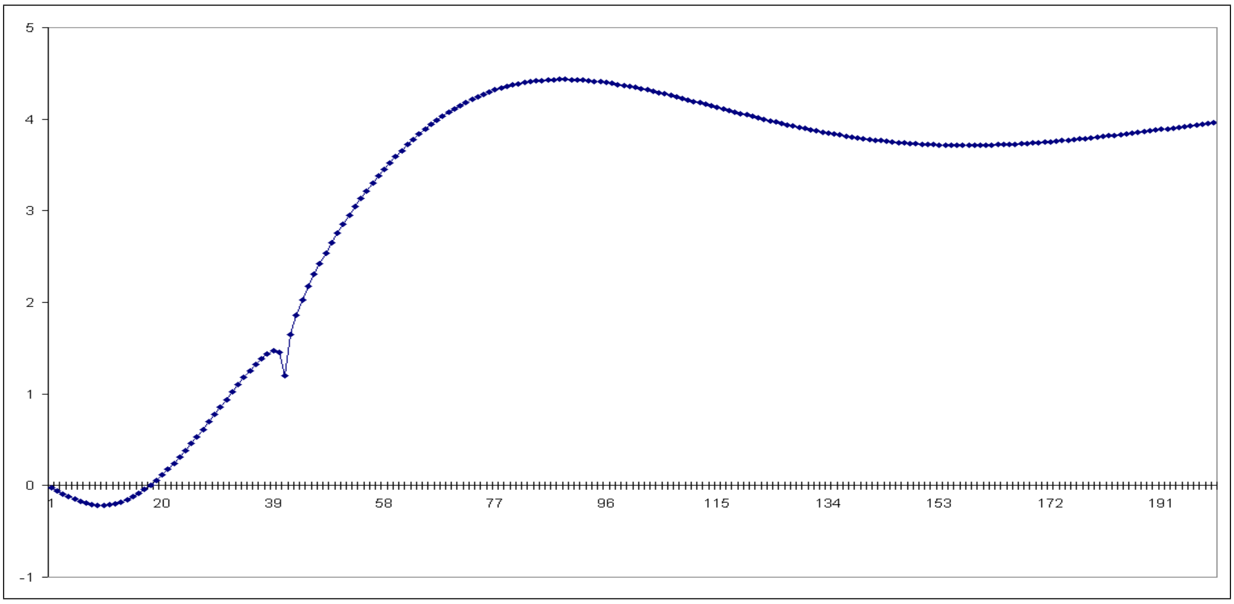

Рис. 7: Случай $s = 39.5$

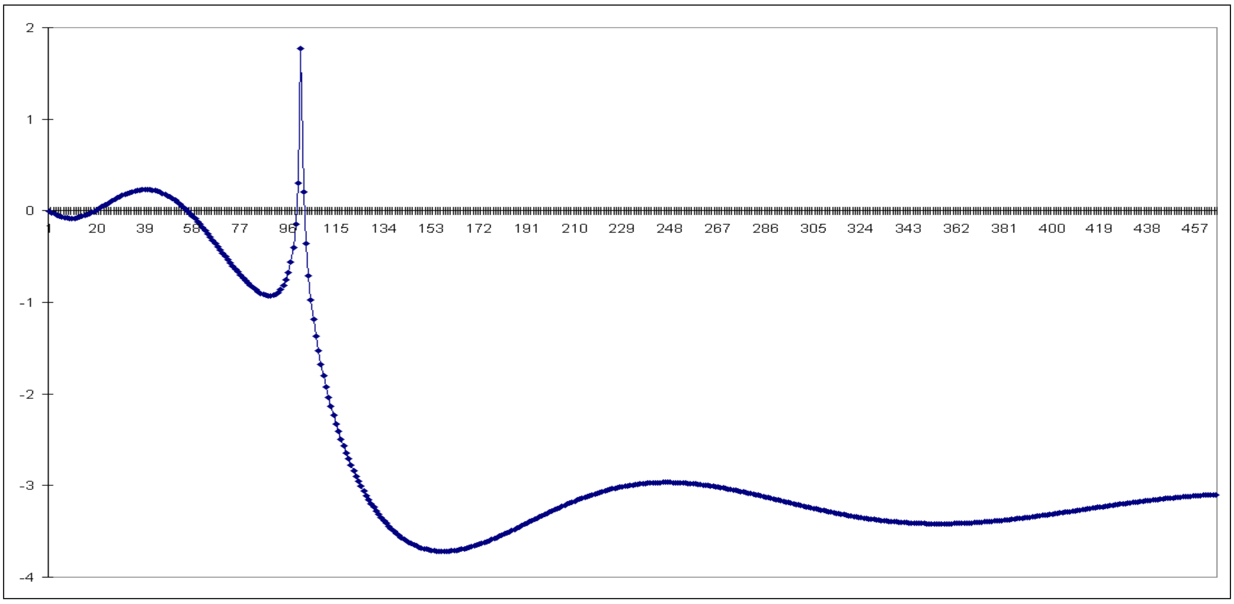

Рис. 8: Случай $s = 100.5$

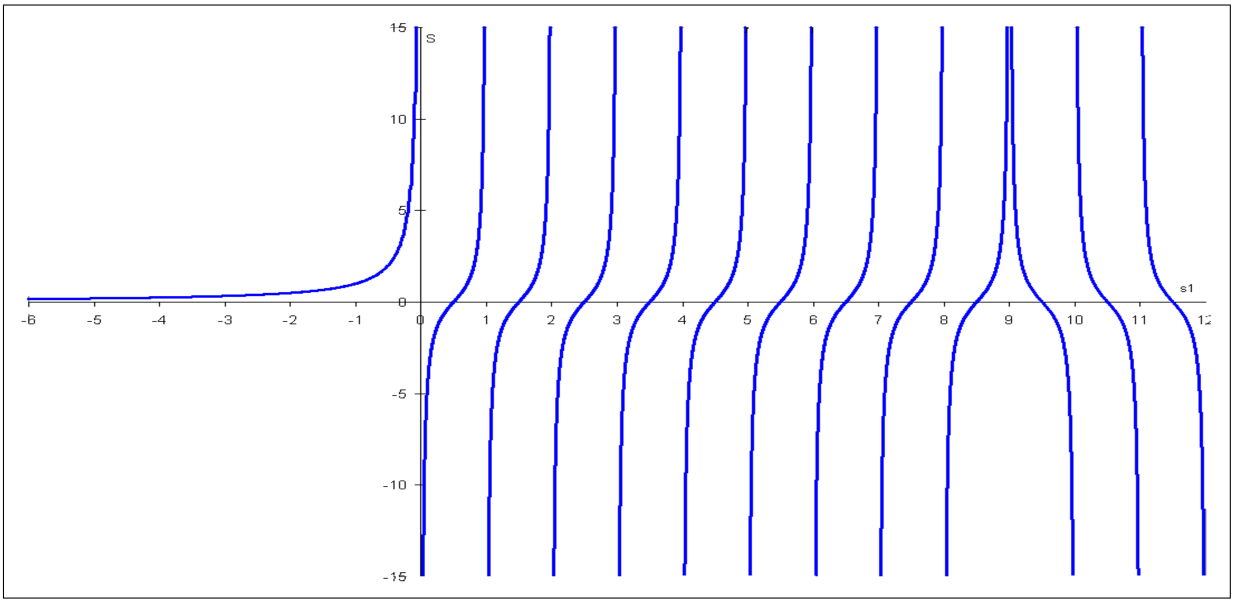

Рис. 9: График суммы $S(s_1)$, когда $s_1 \in (-\infty, +\infty)$

фактически продолжаем ее аналитически на всю комплексную плоскость за исключением счетного числа точек $s = 0, 1, 2, 3, ...,$ в которых она имеет простые полюсы.

Итак, если для заданного значения λ функция $A(s) = 1 - \lambda\widehat{k}(s)$ на отрицательной полуоси при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda = 0$ имеет единственный нуль и при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и $\operatorname{Im}\lambda = 0$ не имеет нулей, то на положительной полуоси для любых значений λ, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, эта функция имеет счетное число нулей (см. рис.9).

Таким образом, в случае $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (для любого фиксированного значения λ) особенности подынтегральной функции суть нули функции $A(s) = 1 - \lambda\widehat{k}(s)$: $s = s_k^0$, $k = 1, 2, ...,$ расположенные в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} s > 0$), так что

$$\mu(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0 - 1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) d\tau. \tag{35}$$

Итак, получен следующий результат: *если $Re\,\lambda > 0$, то общее решение неоднородного интегрального уравнения (1) можно записать в следующем виде*

$$\mu(t) = f(t) + l(-s^*) \int_0^t \frac{\tau^{-s^*-1}}{t^{-s^*}} f(\tau) d\tau + C \cdot t^{-s^*},$$

если же $Re\,\lambda < 0$, то единственное решение неоднородного интегрального уравнения (1) имеет вид (35).

Теперь найдём решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{K}_\lambda^* \nu \equiv (I - \overline{\lambda}\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda} \int_0^{\infty} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \nu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{t} = g(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Применяя к обеим частям этого уравнения преобразование Меллина, получим

$$\widehat{\nu}(s) \left[1 - \overline{\lambda}\widehat{k}^*(s)\right] = \widehat{g}(s), \quad (0 < \operatorname{Re} s < \gamma^*),$$

где $\widehat{k}^*(s)$ определяется из равенства

$$\widehat{k}^*(s) = \int\limits_0^1 \frac{z^{s-1}}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) dz \quad (\operatorname{Re} s > 0),$$

а $\widehat{g}(s)-$ соответственно преобразование Меллина функции $g(t)$:

$$\widehat{g}(s) = \int\limits_0^\infty g(t) t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s < \gamma^*,$$

и параметр γ^* выбран так, что

$$\widehat{g}(s) = \int\limits_0^\infty |g(t)| t^{\gamma^*-1} dt < \infty.$$

Заметим, что функцию $\widehat{k}^*(s)$ можно также представить в виде следующей суммы

$$\widehat{k}^*(s) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n}{n+s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Таким образом, частное решение уравнения (2) имеет вид

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\widehat{g}(s)}{1-\overline{\lambda}\widehat{k}^*(s)} t^{-s} ds\,, \ 0 < \operatorname{Re} s < \gamma^*,$$

здесь $0 < \sigma < \gamma^*$ выбрано так, чтобы $1-\overline{\lambda}\,\widehat{k}^*(s) \neq 0$ для заданного значения λ, и интеграл берётся вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s (расположенной левее всех нулей функции $A^*(s) = 1 - \overline{\lambda}\,\widehat{k}^*(s)$, $\operatorname{Re} s > 0$), и понимается в смысле главного значения. Тот факт, что функция $A^*(s) = 1 - \overline{\lambda}\,\widehat{k}^*(s)$ $\forall \lambda$ с $\operatorname{Re} \lambda < 0$ имеет единственный нуль $s = s^*$ в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} s > 0$), является очевидным.

Рассуждая аналогично случаю уравнения (1), получим: *единственное решение неоднородного интегрального уравнения (2) имеет вид*

$$\nu(t) = g(t) + l(s^*) \int\limits_t^\infty \frac{\tau^{s^*-1}}{t^{s^*}} g(\tau) d\tau, \ \operatorname{Re} s^* > 0, \ \textit{при} \ \operatorname{Re} \lambda < 0 \tag{36}$$

(безусловная разрешимость для каждой функции $g(t)$);

$$\nu(t) = g(t) + \int\limits_0^t \sum_{k=1}^\infty l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} g(\tau) d\tau, \ \operatorname{Re} s_k^0 < 0, \ \textit{при} \ \operatorname{Re} \lambda > 0 \tag{37}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие ортогональности

$$\int\limits_0^\infty g(t) t^{-s^*} dt = 0. \tag{38}$$

4. Нелокальные задачи. Рассмотрим следующие две нелокальные (так называемые внутренне-граничные) задачи:

$$u_{1t}(x,t) - u_{1xx}(x,t) = f_1(x,t), \quad \{x,t\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \;\; u_1(x,0) = 0, \;\; u_1(0,t) = \lambda u_1(x,t)_{|x=\sqrt{t}}, \tag{39}$$

$$u_{2t}(x,t) - u_{2xx}(x,t) = f_2(x,t), \quad \{x,t\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \;\; u_2(x,0) = 0, \;\; u_{2x}(0,t) = \lambda u_{2x}(x,t)_{|x=\sqrt{t}}, \tag{40}$$

где $\lambda \in \mathbb{C} -$ спектральный параметр. Граничные задачи (39) и (40) сводятся соответственно к исследованию интегральных уравнений относительно неизвестных функций $u_1(x,t)_{|x=\sqrt{t}}$ и $u_{2x}(x,t)_{|x=\sqrt{t}}$:

$$u_1(x,t)_{|x=\sqrt{t}} = \lambda \int\limits_0^t \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t}{4(t-\tau)}\right) \cdot u_1(\eta,\tau)_{|\eta=\sqrt{\tau}} d\tau + \\ + \left(\int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G_1(x,\xi,t-\tau) f_1(\xi,\tau) d\xi d\tau \right)\Bigg|_{x=\sqrt{t}},$$

$$u_{2x}(x,t)_{|x=\sqrt{t}} = \lambda \int\limits_0^t \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t}{4(t-\tau)}\right) \cdot u_{2\eta}(\eta,\tau)_{|\eta=\sqrt{\tau}} d\tau + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G_2(x,\xi,t-\tau) f_2(\xi,\tau) d\xi d\tau \right)\Bigg|_{x=\sqrt{t}},$$

которые в точности совпадают с уравнением (1). Здесь

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\},$$

$$G_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\}.$$

Далее соответствующие сопряженные граничные задачи для (39) и (40) имеют вид:

$$\begin{cases} -v_{1t}(x,t) - v_{1xx}(x,t) - \overline{\lambda} \cdot \delta(x-\sqrt{t}) \otimes v_{1x}(0,t) = g_1(x,t), \\ v_1(x,\infty) = 0, \;\; v_1(0,t) = v_1(\infty,t) = 0, \;\; v_{1x}(\infty,t) = 0; \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} -v_{2t}(x,t) - v_{2xx}(x,t) - \overline{\lambda} \cdot \delta'_x(x-\sqrt{t}) \otimes v_2(0,t) = g_2(x,t), \\ v_2(x,\infty) = 0, \;\; v_{2x}(0,t) = v_{2x}(\infty,t) = v_2(\infty,t) = 0, \end{cases} \tag{42}$$

решение которых сводится к изучению соответствующих сопряженных интегральных уравнений

$$v_{1x}(0,t) - \overline{\lambda} \int\limits_t^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau}{4(\tau-t)}\right) \cdot v_{1x}(0,\tau) d\tau = g_{11}(t);$$

$$v_2(0,t) - \overline{\lambda} \int\limits_t^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau}{4(\tau-t)}\right) \cdot v_2(0,\tau) d\tau = g_{21}(t).$$

Эти интегральные уравнения совпадают с сопряженным интегральным уравнением (2).

Поэтому все вышеизложенные результаты работы применимы и для изучения задач (39) и (40) со спектральным параметром в нелокальном граничном условии и сопряженных задач (41) и (42) со спектральным параметром в уравнениях.

Кроме того, следует отметить, что интегральные уравнения Вольтерра с (рассматриваемыми в работе) особенностями возникают при исследовании прикладных задач в областях с подвижными границами (см., например, [3]).

Заключение. В лебеговых пространствах с экспоненциальным весом рассматриваемые в работе интегральное уравнение и внутренне-граничные задачи для уравнения теплопроводности в четверти плоскости являются нётеровыми, имеют конечный положительный индекс, равный 1 . Установлено, что вся правая полуплоскость вместе с мнимой осью составляет спектр, а левая полуплоскость является резольвентным множеством. Дано описание собственных функций.

Цитированная литература

1. **Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Туймебаева А.Е.** // Математический журнал. 2006. Т. 6, №1 (19). С. 33 – 46.

2. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 1969.

3. **Харин С.Н.** Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения. Автореферат дис.... канд.физ.-матем.н. Алма-Ата, 1968.

4. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.

5. **Дженалиев М.Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.

6. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.** // Материалы междунар. Российско - Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа и информатики". (22 – 26 мая 2004, Нальчик–Эльбрус). Нальчик, 2004. С. 62 – 65.

7. **Полянин А.Д., Манжиров А.В.** Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.

8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т.2. М., 1974.

9. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

10. **Краснов М.Л.** Интегральные уравнения. М., 1975.

11. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М., 1979.

12. **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.** Математический анализ. М., 1979.

13. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Туймебаева А.Е.** Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт № 6. Алматы, 2006. 40с.

Поступила в редакцию 03.04.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 45 — 55*

УДК 517.51

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОСТРАНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ АППРОКСИМАЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
Караганда ул.Университетская, 28 aub-toibek@jandex.ru

В работе вводятся шкалы пространств стохастических процессов и интерполяционный метод для этих пространств, доказываются интерполяционные теоремы и теоремы вложения. На основе полученных результатов изучаются пространства типа пространств Бесова с переменными аппроксимационными свойствами.

Определения и обозначения. Будем предполагать заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией, т.е. семейством $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$ σ-алгебр F_n таких, что $F_1 \subseteq ... \subseteq F_n \subseteq ... \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ случайных величин X_n такова, что для любого $n \geq 1$ величина X_n измерима относительно σ–алгебры F_n. Тогда говорят, что набор $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ является стохастическим процессом.

В работе вводятся пространства стохастических процессов в некотором смысле являющиеся аналогами сетевых пространств, исследованных в работах [1], [2]. Эти пространства связаны с такими важными понятиями теории случайных процессов, как сходимость процесса, закон больших чисел, мартингальные свойства процесса.

Говорят ([3]), что стохастический процесс $(X_n, F_n)_{n\geq 1}$ является мартингалом, если при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия: 1) $M|X_n| < \infty$; 2) $M(X_{n+1}|F_n) = X_n$ (P.-п.н). Если вместо свойство 2) требуется, чтобы $M(X_{n+1}|F_n) \geq X_n$ (P.-п.н.), то говорят, что процесс $X = (X_n, F_n)_{n=1}^{\infty}$ является субмартингалом.

Пусть $1 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, \alpha \geq 0$ и рассматриваемые стохастические процессы $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ являются мартингалами.

Обозначим при $0 < q < \infty$

$$N_p^{\alpha q}(F) = \left\{ X = (X_n, F_n)_{n\geq 1} : \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \overline{\Delta X_k})^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

и при $q = \infty$

$$N_p^{\alpha\infty}(F) = \{X = (X_n, F_n)_{n\geq 1} : \sup_k 2^{\alpha k} \overline{\Delta X_k} < \infty\},$$

Keywords: *stochastic process, interpolation, Besov space, Haar's system*
2000 Mathematics Subject Classification: 60G07, 46B45

где

$$\overline{\Delta X_k} = \sup_{A\in\mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_A (X_{2^k} - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right|.$$

Здесь и далее полагаем, что $X_{\frac{1}{2}}(\omega) \equiv 0$.

Пространства $N_p^{\alpha q}(F)$ являются пространствами сходящихся мартингальных процессов, где параметры α, q и p характеризуют скорость и метрику, в которой сходится данный процесс. Если $X \in N_p^{\alpha q}(F)$, то для любого $A \in \mathfrak{F}$ такого, что $P(A) > 0$, обобщенное условное среднее

$$\frac{1}{[P(A)]^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^k}) P(d\omega) \right|$$

стремится к нули так, что сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\alpha k} \frac{1}{(P(A))^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^k}) P(d\omega) \right| \right)^q.$$

Для этих пространств в работе доказывается интерполяционная теорема типа теоремы Марцинкевича, вводится интерполяционный метод, существенно связанный со свойствами моментов остановки. В последнем параграфе данный интерполяционный метод применяется к пространствам типа пространств Бесова с переменными аппроксимационными свойствами.

Случайная величина τ, принимающая значения в множестве $(1, 2, ..., \infty)$, называется марковским моментом относительно фильтрации $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$, если $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Моментом остановки называется марковский момент τ, для которого $\tau(\omega) < \infty$ (п.н)[3].

Пусть $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ – стохастический процесс, τ – марковский момент. Через X^τ обозначим "остановленный" процесс $X^\tau = (X_{n\wedge\tau}, F_n)_{n\geq 1}$, где $X_{n\wedge\tau} = \sum_{m=1}^{n-1} X_m \chi_{\tau=m}(\omega) + X_n \chi_{\tau\geq n}(\omega)$, $\chi_A(\omega)$ – характеристическая функция множества A. В частности, если $\tau(\omega) = k$ (п.н.), то

$$X^k = \{(X_1, F_1), (X_2, F_2), ..., (X_k, F_k), (X_k, F_{k+1}), (X_k, F_{k+2}), ...\}.$$

Известно ([3]), что если процесс $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ является мартингалом (субмартингалом), то процесс $X^\tau = (X_{n\wedge\tau}, F_n)_{n\geq 1}$ также является мартингалом (субмартингалом).

Пусть $T = \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – преобразование стохастических процессов X, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$, в стохастические процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Lambda, \mathfrak{R}, Q)$ с фильтрацией $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\geq 1}$:

$$T(X) = \{T_n(X), \Phi_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Будем говорить, что преобразование T квазилинейно, если найдется $C > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\overline{(T_n(X) - T_n(Y))} \leq C\overline{(T_n(X - Y))}$.

Интерполяционный метод. Для построения теории интерполяции стохастических процессов нам помимо вещественного интерполяционного метода понадобится его некоторая модификация.

Пусть $\mathbf{A} = (A_0(F), A_1(F))$ – пара квазинормированных собственных подпространств линейного хаусдорфова пространства $\mathfrak{N}(F)$ стохастических процессов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$. Очевидно, эта пара является совместимой парой и, следовательно, для нее определяется шкала интерполяционных пространств относительно вещественного метода [4].

Пусть $0<\theta<1$. При $0<q<\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta q}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|^q_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\int\limits_0^\infty(t^{-\theta}K(t,X))^q\frac{dt}{t}<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta,\infty}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K(t,X)<\infty\right\},$$

где

$$K(t,X;A_0,A_1)=\inf_{X=X_0+X_1}(\|X_0\|_{A_0}+t\|X_1\|_{A_1})$$

– функционал Петре.

Пусть $R=\{\tau_k(\omega)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность моментов остановок относительно фильтрации F, $A(F)=(A_0(F),A_1(F))$ – пара квазинормированных собственных подпространств $\mathfrak{N}(F)$. Определим для $X\in\mathfrak{N}(F)$ и $t\in(0,\infty)$ функционал

$$K_R(t,X)=K(t,X;A_0,A_1,R)=\inf_{\tau\in R}(\|X-X^\tau\|_{A_0}+t\|X^\tau\|_{A_1}).$$

Здесь точная нижняя грань берется по всем остановкам из R. При $0<q<\infty$

$$(A_0,A_1)^R_{\theta q}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|^q_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\int\limits_0^\infty(t^{-\theta}K_R(t,X))^q\frac{dt}{t}<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)^R_{\theta,\infty}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K_R(t,X)<\infty\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $(A_0(F),A_1(F)),(B_0(\Phi),B_1(\Phi))$ – две совместимые пары пространств стохастических процессов и $R=\{\tau(\omega)\}$ – некоторое фиксированное семейство марковских моментов относительно фильтрации F.*

Если T - квазилинейное отображение для стохастических процессов $X=(X_n,F_n)_{n\geq1}$ и выполнены условия

$$\|T(X-X^\tau)\|_{B_0}\leq M_0\|X-X^\tau\|_{A_0},$$
$$\|T(X^\tau)\|_{B_1}\leq M_1\|X^\tau\|_{A_1}$$

для всех остановок $\tau\in\ R$, то верно неравенство

$$\|T(X)\|_{\mathbf{B}_{\theta\mathbf{q}}}\leq CM_0^{1-\theta}M_1^\theta\|X\|_{\mathbf{A}^R_{\theta q}}.$$

Здесь константа C из определения квазилинейности оператора T.

Доказательство.

$$\|T(X)\|_{\mathbf{B}_{\theta\mathbf{q}}}=\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{T(X)=Y_0+Y_1}(\|Y_0\|_{B_0}+t\|Y_1\|_{B_1})\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac1q}\leq$$

$$\leq\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{\tau\in R}(\|T(X)-T(X^\tau)\|_{B_0}+t\|T(X^\tau)\|_{B_1}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac1q}\leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\inf_{\tau\in R}(\|T(X-X^\tau)\|_{B_0}+t\|T(X^\tau)\|_{B_1}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq CM_0\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\inf_{\tau\in R}(\|X-X^\tau\|_{A_0}+t\frac{M_1}{M_0}\|X^\tau\|_{A_1}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= CM_0^{1-\theta}M_1^\theta\|X\|_{\mathbf{A}^R_{\theta q}(F)}.$$

Теорема доказана.

Лемма 1. [5] *Пусть* $a>1$, $R=\{k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *– остановки. Тогда при* $0<q<\infty$

$$\|X\|_{(A_0,A_1)^R_{\theta q}} \sim \left(\sum_{n=0}^\infty (a^{\theta n}K_R(a^n,X))^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\|X\|_{(A_0,A_1)^R_{\theta\infty}} \sim \sup_n a^{\theta n}K_R(a^n,X).$$

Пространство $N_p^{\alpha q}(F)$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha>0$, $0<q\leq\infty$, $1<p\leq\infty$. *Если процесс* $X=(X_n,F_n)_{n\geq1}\in N_p^{\alpha q}(F)$, *то существует случайная величина* X_∞ *такая, что* $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty$ *(P - п.н.).*

Доказательство. Пусть $L_{p\infty}(\Omega)$ – пространство Марцинкевича-Лоренца. Воспользовавшись эквивалентной нормировкой (см.[1]) пространства $L_{p\infty}(\Omega)$ и измеримостью функции X_n относительно σ -алгебры F_n , получим

$$\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]} \sim \sup_{A\in\mathfrak{F},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A X_nP(d\omega)\right| =$$

$$= \sup_{A\in F_n,P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A X_nP(d\omega)\right| \leq \sup_{A\in F_{2^\nu},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A X_{2^\nu}P(d\omega)\right|,$$

здесь $\nu:\ 2^{\nu-1}\leq n<2^\nu$. Далее имеем

$$\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]} \leq \sum_{k=0}^{\nu-1}\sup_{A\in F_{2^k},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A (X_{2^{k+1}}-X_{2^k})P(d\omega)\right| \leq \|X\|_{N_p^{01}(F)}.$$

Учитывая, что $N_p^{\alpha q}(F)\hookrightarrow N_p^{01}(F)$, при $\alpha>0$ получим $\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]}\leq c\|X_n\|_{N_p^{\alpha q}(F)}$. Но $M|X_n|\leq c\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]}$, поэтому по теореме Дуба [6] процесс X_n сходится почти наверное.

Приведем эквивалентную нормировку пространства $N_p^{\alpha q}(F)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha>0$, $0<q\leq\infty$, $1<p\leq\infty$. $X=(X_n,F_n)_{n\geq1}$ *– мартингал. Тогда*

$$\|X\|_{N_p^{\alpha q}(F)} \sim \left(\sum_{k=0}^\infty (2^{\alpha k}\widetilde{X_k})^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\widetilde{X_k} = \sup_{A\in\mathfrak{F},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A (X_\infty - X_{2^{k-1}})P(d\omega)\right|.$$

Доказательство. Существование X_∞ следует из леммы 2. Далее имеем

$$\widetilde{X_k} = \sup_{A\in F_{2^k}} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A \sum_{m=k}^{\infty} (X_{2^m} - X_{2^{m-1}}) P(d\omega) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=k}^{\infty} \sup_{A\in F_{2^m}} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2^m} - X_{2^{m-1}}) P(d\omega) \right| = \sum_{m=k}^{\infty} \overline{\Delta X}_m.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \widetilde{X_k})^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \sum_{m=k}^{\infty} \overline{\Delta X}_m)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \sum_{m=k}^{\infty} \overline{\Delta X}_m)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} (2^{m\varepsilon} \overline{\Delta X}_m) 2^{-m\varepsilon} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \overline{\Delta X}_m^q \left(\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m\varepsilon q'} \right)^{\frac{q}{q'}} \right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \overline{\Delta X}_m^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \overline{\Delta X}_m^q \sum_{k=0}^{m} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{N_p^{\alpha q}(F)}.$$

Обратное неравенство верно в силу следующих соотношений, которые следуют из F_k- измеримости функции X_k и свойства субмартингальности процесса X :

$$\overline{\Delta X}_k = \sup_{A\in\mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2^k} - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| =$$

$$= \sup_{A\in F_{2^k}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2^k} - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{A\in F_{2^k}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{A\in\mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| = \widetilde{X_k}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p, q, q_0, q_1 \leq \infty$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $0 < \theta < 1$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $R = \{r\}_{r\in\mathbb{N}}$. *Тогда*

$$(N_p^{\alpha_0 q_0}(F), N_p^{\alpha_1 q_1}(F))_{\theta q}^R = N_p^{\alpha q}(F).$$

Доказательство. Используя лемму 1 и свойство вложения пространств $N_p^{\alpha q}(F)$, имеем

$$\|X\|_{(N_p^{\alpha_0 q_0}, N_p^{\alpha_1 q_1})_{\theta q}^R} \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{\theta n} K(2^n, X))^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\theta n}\inf_r(\|X-X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_0 q_0}}+2^{-n}\|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_1 q_1}}))^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\theta n}\inf_r(\|X-X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_0 1}}+2^{-n}\|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_1 1}}))^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив $r=n\gamma$, получим

$$\|X\|_{(N_p^{\alpha_0 q_0},N_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q}} \le c\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\theta n}(\|X-X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_0 1}}+2^{-n}\|X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_1 1}}))^q\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1)$$

Непосредственно из определения следует, что
$\overline{(\Delta X^{2^r})}_k=\overline{\Delta X}_k$ при $k=0,1,...,r-1$; $\overline{(\Delta X^{2^r})}_k=0$ при $k\ge r$,
$\overline{\Delta(X-X^{2^r})}_k=0$ при $k=0,1,...,r-1$; $\overline{\Delta(X-X^{2^r})}_k=\overline{\Delta X}_k$ при $k\ge r$, поэтому

$$\|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha q}(F)}=\left(\sum_{k=0}^{r-1}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|X-X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha q}(F)}=\left(\sum_{k=r}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Подставив эти равенства при $q=1$ в (1) и применив неравенство Минковского, оценим слагаемые в правой части (1):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{\theta n}\sum_{k=n\gamma}^{\infty}(2^{\alpha_0 k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{\theta nq}\sum_{k=n\gamma}^{\infty}(2^{\alpha_0 k+\varepsilon k}\overline{\Delta X}_k)^q\sum_{k=n\gamma}^{\infty}(2^{-\varepsilon kq'})^{\frac{q}{q'}}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=c\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{\theta nq-\varepsilon n\gamma q}\sum_{k=n\gamma}^{\infty}(2^{\alpha_0 k+\varepsilon k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}=c\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha_0 k+\varepsilon k}\overline{\Delta X}_k)^q\sum_{n=0}^{\frac{k}{\gamma}}2^{\theta nq-\varepsilon n\gamma q}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{\alpha_0 k+\varepsilon kq}\cdot 2^{\frac{\theta kq}{\gamma}-\varepsilon kq}(\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n(1-\theta)}\sum_{k=0}^{n\gamma}(2^{\alpha_1 k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-nq(1-\theta)}\left(\sum_{k=0}^{n\gamma}2^{\alpha_1 k-\varepsilon k}\overline{\Delta X}_k\cdot 2^{\varepsilon k}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-nq(1-\theta)}\sum_{k=0}^{n\gamma}(2^{kq(\alpha_1-\varepsilon)}\overline{\Delta X}_k)(\sum_{k=0}^{n\gamma}2^{\varepsilon kq'})^{\frac{q}{q'}}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=c\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-nq+nq\theta+\varepsilon n\gamma q}\sum_{k=0}^{n\gamma}2^{kq(\alpha_1-\varepsilon)}\overline{\Delta X}_k^q\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$= c\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha_1-\varepsilon)}\overline{\Delta X}_k^q \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq+nq\theta+\varepsilon n\gamma q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha_1-\frac{1-\theta}{\gamma})}\overline{\Delta X}_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

Сделав подстановку $\gamma = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}$ в (2) и (3), получим

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\theta n}(\|X - X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_0 1}})^q\right)^{\frac{1}{q}} \le c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{N_p^{\alpha q}}, \tag{4}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n}\|X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_1 1}})^q\right)^{\frac{1}{q}} \le c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k\alpha}\overline{\Delta X_k})^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{N_p^{\alpha q}}. \tag{5}$$

Применив неравенство Минковского и подставив (4) и (5) в (1), имеем

$$\|X\|_{(N_p^{\alpha_0 q_0}, N_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q}} \le c\|X\|_{N_p^{\alpha q}}.$$

Для доказательства противоположной оценки воспользуемся тем, что для любых r и k выполнено равенство

$$\overline{\Delta X}_k = \overline{\Delta(X - X^{2^r})}_k + \overline{(\Delta X^{2^r})}_k.$$

Имеем

$$\|X\|_{N_p^{\alpha q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\alpha k-\alpha_0 k}(2^{\alpha_0 k}\overline{\Delta(X - X^{2^r})}_k + 2^{\alpha_0 k-\alpha_1 k}\cdot 2^{\alpha_1 k}\overline{(\Delta X^{2^r})}_k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\alpha k-\alpha_0 k}(\sup_k 2^{\alpha_0 k}\overline{\Delta(X - X^{2^r})}_k + 2^{\alpha_0 k-\alpha_1 k}\cdot \sup_k 2^{\alpha_1 k}\overline{(\Delta X^{2^r})}_k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\alpha k-\alpha_0 k}(\|X - X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_0\infty}} + 2^{\alpha_0 k-\alpha_1 k}\|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_1\infty}})\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теперь, сделав подстановку $2^{\alpha_1-\alpha_0} = a$ и используя лемму 1, получим

$$\|X\|_{N_p^{\alpha q}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}(a^{\theta k}\cdot K(a^k, X, N_p^{\alpha_0\infty}, N_p^{\alpha_1\infty}))^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{(N_p^{\alpha_0\infty}, N_p^{\alpha_1\infty})^R_{\theta q}}.$$

Что и доказывает теорему, так как $(N_p^{\alpha_0 q_o}, N_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q} \hookrightarrow (N_p^{\alpha_0\infty}, N_p^{\alpha_1\infty})^R_{\theta q}$.

Приведем пример фильтрации, которую в дальнейшем будем называть фильтрацией Хаара.

Пусть $\Omega = [0,1]$, P – мера Лебега, $n \in \mathbb{N}$, $F_1 = \{\Omega, \varnothing\}, F_2$ – σ-алгебра, порожденная подмножествами $[0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]$, т.е. $F_2 = \{\Omega, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1], \varnothing\}$. При $2^n < k \le 2^{n+1}$ обозначим $a_{n,k} = 2^{-n}(k - 2^n - 1)$ и определим F_k как $\sigma-$ алгебру, порожденную набором

$$\{[0, \frac{1}{2^{n+1}}], (\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{2^n}], ..., (a_{n,k} - \frac{1}{2^{n+1}}, a_{n,k}], (a_{n,k}, a_{n,k} + \frac{1}{2^{n+1}}],$$

$$(a_{n,k}+\frac{1}{2^{n+1}},a_{n,k}+\frac{1}{2^n}],(a_{n,k}+\frac{1}{2^n},a_{n,k}+\frac{1}{2^{n-1}}],(a_{n,k}+\frac{1}{2^{n-1}},a_{n,k}+\frac{3}{2^n}],...,(1-\frac{1}{2^n},1]\}.$$

Заметим, что если $\{H_k(\omega)\}_{k\geq 1}$ – система Хаара, а $F=\{F_k\}_{k\geq 1}$ – фильтрация, определенная в предыдущем примере, $\{c_k\}_{k\geq 1}$ – некоторая числовая последовательность, то процесс $X=(X_n,F_n)_{n\geq 1}$, где $X_n(\omega)=\sum_{k=1}^n c_kH_k(\omega)$, является мартингальным процессом.

Пространства с переменными аппроксимационными свойствами. Существенная часть конструкции введенного выше интерполяционного метода основана на мартингальных свойствах стохастических процессов и использовании понятия момента остановки. Рассмотрим применение введенного интерполяционного метода к пространствам типа пространств Бесова с переменными аппроксимационными свойствами.

Пусть $\Omega=[0,1]$, $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств множества Ω , P – линейная мера Лебега на $\mathfrak{F}$, $F=\{F_n\}_{n\geq 1}$ - фильтрация Хаара, $R=\{\tau_k\}_{k=0}^\infty$ – последовательность моментов остановки такая, что для любого $k\geq 0$ выполнены условия: $\tau_k\leq\tau_{k+1}$ ($P-$ п.н.) и

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k(\omega)=\infty \qquad \text{(P-п.н.)} \tag{6}$$

Для функции $f(x)\in L[0,1]$ обозначим через $c_k(f)$ коэффициенты Фурье по системе $\{H_k(x)\}_{k\geq 1}$ функций Хаара [7]. Для заданного момента остановки $\tau_k(\omega)$ обозначим

$$S(f,\tau_k)(\omega)=\sum_{m=1}^{\tau_k(\omega)}c_m(f)H_m(\omega)$$

и назовем ее частичной суммой Фурье–Хаара функции f, соответствующей марковскому моменту τ_k.

Пусть $1<p<\infty$, $0<q\leq\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Через $B_p^{\alpha q}[R]$ обозначим множество функций $f\in L[0,1]$, для которых при $0<q<\infty$

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]}=\left(\sum_{k=0}^\infty 2^{\alpha kq}\left\|f-S(f,\tau_k)\right\|_{L_p}^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

и

$$\|f\|_{B_p^{\alpha\infty}[R]}=\sup_k 2^{\alpha k}\left\|f-S(f,\tau_k)\right\|_{L_p}<\infty.$$

В идейном плане введенные пространства близки к пространствам с переменной гладкостью. Здесь отметим работы H.-G.Leopold [8], F.Cobos and D.L.Fernandez [9], O.V.Besov [10] – [13].

Лемма 3. *Пусть $1<p<\infty$, $f\in L_p[0,1]$, $S(f,\tau)$ – частичная сумма Фурье–Хаара, соответствующая марковскому моменту τ. Тогда верно неравенство*

$$\left\|S(f,\tau)\right\|_p\leq c\left\|f\right\|_p.$$

Доказательство. Обозначим

$$F_\tau=\{A\in\mathfrak{F}: \quad A\cap\{\tau=n\}\in F_n \quad \text{для любого} \quad n\geq 1\}.$$

Пусть $L_{p\infty}[0,1]$ – пространство Марцинкевича–Лоренца. Воспользовавшись эквивалентной нормировкой (см.[1]) пространства $L_{p\infty}[0,1]$ и мартингальными свойствами частичных сумм Фурье–Хаара, получим

$$\left\|S(f,\tau)\right\|_{L_{p\infty}[0,1]}\sim\sup_{A\in\mathfrak{F},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A S(f,\tau)P(d\omega)\right|=$$

$$= \sup_{A\in F_\tau, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A S(f,\tau)P(d\omega) \right| = \sup_{A\in F_\tau, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A f(\omega)P(d\omega) \right| \le$$

$$\le \sup_{A\in \mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A f(\omega)P(d\omega) \right| = \|f\|_{L_{p\infty}[0,1]} .$$

Теперь, применив интерполяционную теорему (см.[4]), получим утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(f,\tau_k) = \sum_{r=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} c_r(f) H_r(\omega).$$

Тогда

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Доказательство. Покажем, что

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \le c \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

В силу условия (6) и того факта, что система Хаара является базисом в $L_p[0,1]$, имеем

$$\|f - S(f,\tau_k)\|_{L_p} = \left\| \sum_{m=k}^{\infty} \Delta(f,\tau_m) \right\|_{L_p} \le \sum_{m=k}^{\infty} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} ,$$

следовательно,

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Используя неравенство Гельдера, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} (2^{m\varepsilon} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}) 2^{-m\varepsilon} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} \left(\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m\varepsilon q'} \right)^{\frac{q}{q'}} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}^q \sum_{k=0}^{m} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}} \le c \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{\alpha m} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Обратное неравенство следует из леммы 2, в которой вместо f положим $\sum_{\tau_k}^{\infty} c_k(f) H_k(f)$, а вместо τ положим τ_{k+1}. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le q_0, q_1, q \le \infty, 0 < \alpha_0 < \alpha_1, 0 < \theta < 1, \quad \alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$. *Тогда*

$$(B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_p^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R = B_p^{\alpha q}[R].$$

Доказательство. Используя лемму 1 при $1 \le q \le \infty$, имеем

$$\|f\|_{(B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_{pR}^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R} \sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2^{\theta n} K(2^n, f))^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \inf_r \left(\left(\sum_{k=r}^{\infty} 2^{\alpha_0 k q_0} \|\Delta(f,\tau_k)\|^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. +2^{-n} \left(\sum_{k=0}^{r-1} 2^{\alpha_1 k q_1} \|\Delta(f,\tau_k)\|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \inf_r \left(\sum_{k=r}^{\infty} 2^{\alpha_0 k} \|\Delta(f,\tau_k)\| + 2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{r-1} 2^{\alpha_1 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \left(\sum_{k=n\gamma}^{\infty} 2^{\alpha_0 k} \|\Delta(f,\tau_k)\| + 2^{-n}\sum_{k=0}^{n\gamma-1} 2^{\alpha_1 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \sum_{k=n\gamma}^{\infty} 2^{\alpha_0 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n - n} \sum_{k=0}^{n\gamma-1} 2^{\alpha_1 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (7)$$

Далее, оценив каждое слагаемое в правой части (7) по такой же схеме, что и оценки для (1) в доказательстве теоремы 3, получим

$$\|f\|_{(B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_p^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R} \le c\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]}.$$

Покажем обратное вложение. Пусть $f \in (B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_p^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R, \qquad f = f_0 + f_1$ – произвольное представление функции f, где $f_0 \in B_p^{\alpha_0 q_0}[R], \quad f_1 \in B_p^{\alpha_1 q_1}[R]$.

$$2^{\alpha k}\|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p} \le 2^{\alpha k}(\|\Delta(f_0,\tau_k)\|_{L_p} + \|\Delta(f_1,\tau_k)\|_{L_p}) \le$$

$$\le 2^{(\alpha-\alpha_0)k}(\sup_{r\in\mathbb{N}} 2^{\alpha_0 k}\|\Delta(f_0,\tau_k)\|_{L_p} + 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k}\sup_{r\in\mathbb{N}} 2^{\alpha_1 k}\|\Delta(f_1,\tau_k)\|_{L_p}) =$$

$$= 2^{(\alpha-\alpha_0)k}(\|f_0\|_{B_p^{\alpha_0\infty}[R]} + 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k}\|f_1\|_{B_p^{\alpha_1\infty}[R]}).$$

В силу произвольности представления $f = f_0 + f_1$ имеем

$$2^{\alpha k}\|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p} \le 2^{(\alpha-\alpha_0)k} K_R(f, 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k}; B_p^{\alpha_0\infty}[R], B_p^{\alpha_1\infty}[R]).$$

Следовательно, положив $a = 2^{\alpha_0-\alpha_1}$, имеем

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-(\alpha_0-\alpha_1)\theta k} K_R(f, 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k})\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(a^{\theta k} K_R(f, a^k) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \sim \|f\|_{(B_p^{\alpha_0 \infty}, B_p^{\alpha_1 \infty})^R_{\theta q}} \leq c \|f\|_{(B_p^{\alpha_0 q_0}, B_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q}}.$$

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Нурсултанов Е.Д.** // East J. App.1998. № 3.
2. **Нурсултанов Е.Д.** // Матем. сборник. 1998. Т. 189, № 3. С.83–102.
3. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М. 1980.
4. **Берг Й., Лефстрем Й.** Интерполяционные пространства. Введение. М., 1980.
5. **Аубакиров Т.У.** // Вестник Карагандинского университета. Сер. математика. 2005. № 1(37), С.29-35.
6. **Дуб Дж.Л.** Вероятностные процессы. М. 1956.
7. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М. 1989.
8. **Leopold H.-G.** // Forum Math. 3. 1991. № 1. P.1-21.
9. **Cobos F., Fernandez D.L.** // In: Function Space and Applications, Proc. US-Semin., Lund, Lect. Notes Math. 1988. V.1302. P.158-170.
10. **Besov O.V.** // Trudy Mat.Inst.Steklova 1997. V.219. P.80-102(Russian); English trasl.in Proc.Steklov Inst. Math. 1997. V.219. P.73-95.
11. **Besov O.V.** // Trudy Mat.Inst.Steklova 1999. V.227. P.56-74(Russian); English trasl.in Proc.Steklov Inst. Math. 1999. V.227. P.50-69.
12. **Besov O.V.** // Trudy Mat.Inst.Steklova 2003. V.243. P. 87-95.
13. **Besov O.V.** // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic. 2005.

Поступила в редакцию 10.02.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 56 — 59*

УДК 510.67

ОБ ЭЛИМИНАЦИИ КВАНТОРОВ ДЛЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ С ВЫДЕЛЕННОЙ ПЛОТНОЙ ПОДГРУППОЙ

В. В. Вербовский

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125 vvv@ipic.kz

Пусть H — плотная подгруппа в $\mathbb{R}$. Мы докажем что тогда $(\mathbb{R}, <, +, 0, H, H_q, c_{p,q,i})_{q \in \mathbb{Q}^+}$ допускает элиминацию кванторов, где $H_q = \{q \cdot h : h \in H\}$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}^+$. Если для некоторых $p, q \in \mathbb{Q}^+$ имеет место $|H_q : H_p| = n_{p,q} < \infty$, то в этом случае пусть $c_{p,q,i} \in H_q$ для $i < n_{p,q}$ будут представителями всех классов смежности для H_p в H_q.

Как следствие мы получаем, что структура $(\mathbb{R}, <, +, H)$ не имеет свойства независимости.

Пусть A — подмножество упорядоченного множества G. Будем писать $\bar{A}$ для выпуклого замыкания множества A в G, то есть

$$\bar{A} \triangleq \{g \in G : \text{существуют } a, b \in A \text{ такие, что } a \leq g \leq b\}.$$

Вспомним лемму Неймана [1]: если существует покрытие группы конечным числом классов смежности, то существует подпокрытие, состоящее из тех классов смежности, которые соответствуют подгруппам конечного индекса.
Здесь мы докажем аналог леммы Неймана для упорядоченных групп.

Лемма 1. *Пусть G – упорядоченная плотная архимедова группа и пусть некоторый интервал (a, b) покрыт конечным числом классов смежности $h_0 + H_0, \ldots, h_n + H_n$. Тогда вся группа G покрыта этими классами смежности и, более того, она покрыта теми классами смежности, которые соответствуют подгруппам конечного индекса.*

Доказательство. Первое. Мы можем предположить, что не существует собственного подпокрытия покрытия $h_0 + H_0, \ldots, h_n + H_n$ интервала (a, b).

Второе. Заметим, что если подгруппа H группы G содержит непустой интервал (a, b), то $H = G$. Действительно, в этом случае $(a - b, b - a) \subseteq H$, тогда $(n(a - b), n(b - a)) \subseteq H$ для любого n. В силу архимедовости G получаем $G = H$. Таким образом, мы имеем полное

Keywords: *Model Theory, o-minimal, ordered group, quantifier elimination*
2000 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64
The research described in this publication was made possible in part by Award No. KM2-2246 of the U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)

право предположить, что $H_i \neq G$ при любом i. Иначе $h_i + H_i = H_i = G$ покрывает G, и лемма доказана.

Пусть некоторый непустой интервал (a,b) покрыт конечным числом классов смежности $h_0+H_0,\ldots,h_n+H_n$. Естественно предположить, что любые два класса не равны между собой. Заметим, что самое малое один класс смежности $h_i + H_i$ является плотным в G. В противном случае в силу архимедовости G все подгруппы H_i дискретны. Но объединение любого конечного числа дискретно упорядоченных подмножеств опять дискретно упорядочено. Стало быть, классы смежности $h_0+H_0,\ldots,h_n+H_n$ не могут покрыть любое плотно упорядоченное подмножество, в данном случае интервал.

Рассмотрим H_0. С точностью до перестановки индексов можно считать, что подгруппа H_0 плотна. Более того, можно заметить, что она и коплотна в G, то есть дополнение множества H_0 в G плотно, потому что в противном случае H_0 содержит интервал и в силу вышесказанного равна G. Кроме того, имеет смысл предположить, что H_0 не является нетривиальной подгруппой ни одной из групп H_i, здесь $i>0$. В силу коплотности H_0 в G для некоторого элемента $g_0 \in G\setminus(h_0+H_0)$ имеем, что множество $g_0+H_0\cap(a,b)$ покрыто $h_1+H_1,\ldots,h_n+H_n$. Следовательно, $H_0\cap(a,b)$ покрыто классами смежности $h_1-g_0+H_1,\ldots,h_n-g_0+H_n$. Для упрощения системы обозначений положим, что $g_0=0$.

Заметим, что для любых подгрупп H и $K\leq G$ и для любых элементов h и $k\in G$ верно, что
$$h+H\cap k+K = h+H\cap k+(K\cap H).$$
Тогда $H_0\cap(a,b)$ покрыто $h_1+H_1\cap H_0,\ldots,h_n+H_n\cap H_0$, и мы можем повторить наше рассуждение n раз.

Таким образом, мы получаем, что группа $H=\cap_{i\leq n}H_i$ плотна в G. Рассмотрим произвольный элемент $g\in G$. В силу плотности H в G существует $h\in H$ такой, что $g+h\in(a,b)$ и, более того, $g+h\in(a,b)\cap h_i+H_i$. Так как $H\leq H_i$, имеем, что $h\in H_i$ и $g=(g+h)-h\in h_i+H_i$. В результате, $h_0+H_0,\ldots,h_n+H_n$ покрывает G. По лемме Неймана G покрыта теми классами смежности, которые соответствуют подгруппам конечного индекса.

Пусть $H_q=\{q\cdot h : h\in H\}$, где $q\in\mathbb{Q}^+$. Предположим, что для некоторых $p,q\in\mathbb{Q}^+$ имеет место $|H_q:H_p|=n_{p,q}<\infty$. Тогда обозначим через $c_{p,q,i}\in H_q$, где $i<n_{p,q}$, представителей всех классов смежности группы H_p в H_q.

Теорема 1. *Пусть H — плотная подгруппа упорядоченной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$. Тогда $(\mathbb{R},<,H,H_q,+,{}^{-1},0,e_{p,q,i})_{q\in\mathbb{Q}^+}$ допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Мы воспользуемся критерием Тарского. Рассмотрим произвольную конъюнкцию $\phi(x,\bar{y})$ формул вида:

1. $kx=y$,
2. $kx<y$,
3. $kx>y$,
4. $H_p(kx+y)$,
5. $\neg H_p(kx+y)$, где $k\in\mathbb{Q}$.

Во-первых, заметим, что $kx\star y$, если и только если $nkx\star ny$, где $\star\in\{=,<,>\}$, а $H_p(kx+y)$ тогда и только тогда, когда $H_{p\cdot n}(nkx+ny)$. Таким образом, мы можем предположить, что все коэффициенты k равны между собой.

Если ϕ содержит конъюнкт вида $kx=y$, то после замены вхождений kx в формуле ϕ на y, получим, что $\exists x\phi(x,\bar{y})$ эквивалентна бескванторной формуле.

Если часть $kx < y_1 \wedge kx < y_2$ входит в формулу ϕ, мы можем заменить ее на $(kx < y_1 \wedge y_1 \leq y_2) \vee (kx < y_2 \wedge y_2 < y_1)$. Тогда после элементарных преобразований формула ϕ приводится к дизъюнкции конъюнкций. Таким образом, имеем полное право считать, что самое большее один конъюнкт вида (2) входит в ϕ. То же самое можно сказать и про $kx > y$.

Пусть $H_p(kx+y) \wedge H_q(lx+z)$ входит в ϕ. Так как мы можем помножить p и $kx+y$, а также q и $lx+z$ на некоторые натуральные числа, то без ограничения общности допустимо предположение того, что $p = q$. Очевидно, $H_p(kx+y) \wedge H_p(lx+z)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $H_p(kx+y) \wedge H_p((l-k)x+z-y)$. Применяя данную эквивалентность несколько раз, придем к заключению, что формула $H_p(kx+y) \wedge H_p(lx+z)$ истинна тогда и только тогда, когда истинна $H_p(k'x+t_1(y,z)) \wedge H_p(t_2(y,z))$, где t_i суть термы. В результате вышеприведенных умозаключений мы можем ограничиться самое большее одним конъюнктом вида (4), входящим в ϕ.

Пусть ϕ не содержит конъюнкт вида (5). В силу того, что H и, следовательно, H_p плотны в $\mathbb{R}$,

$$\exists x(y_1 < kx < y_2 \wedge H_p(kx+y_3)), \text{ если и только если } y_1 < y_2.$$

Пусть ϕ не содержит конъюнкт вида (4). В данной ситуации мы можем применить лемму. Так как не существует групп конечного индекса в группе вещественных чисел,

$$\exists x(y_1 < kx < y_2 \wedge \bigwedge_j \neg H_{p_j}(kx+y_j)), \text{ если и только если } y_1 < y_2.$$

Остался лишь один случай, рассмотреть который необходимо для завершения доказательства. Это случай, когда ϕ содержит как конъюнкты вида (4), так и конъюнкты вида (5). Рассмотрим

$$\exists x(y_1 < kx < y_2 \wedge H_q(kx+y_0) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg H_{p_j}(kx+y_j)).$$

Пусть $H_{r_j} = H_q \cap H_{p_j}$. Очевидно, что такой индекс r_j существует и что

$$\begin{aligned} H_q(kx+y_0) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg H_{p_j}(kx+y_j) \quad &\Longleftrightarrow \quad H_q(kx+y_0) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg H_{r_j}(kx+y_j) \\ &\Longleftrightarrow \quad H_q(kx+y_0) \wedge \neg(\bigvee_{j\in J} H_{r_j}(kx+y_j)). \end{aligned}$$

Можно предположить, что H_{r_j} имеет бесконечный индекс в H_q. В противном случае можно заменить $H_q(z) \wedge \neg H_{r_j}(z)$ на $H_q(z) \wedge (H_{r_j}(z+c_1) \vee \cdots \vee H_{r_j}(z+c_m))$ для некоторых констант c_i, которые являются представителями всех классов смежности группы H_{r_j} в группе H_q, кроме класса смежности $H_{r_j}(z)$. Эти константы есть в языке в силу условий теоремы. Таким образом, все подгруппы H_{r_j} имеют бесконечный индекс в H_q. В силу леммы 1 любое конечное объединение классов смежности подгрупп бесконечного индекса не может покрыть любой интервал, пересеченный с группой H_q. Таким образом, формула ϕ эквивалентна формуле $y_1 < y_2$.

Следствие 1. $(\mathbb{R}, <, +, -, 0, H)$, *где* H *— делимая подгруппа, допускает элиминацию кванторов, в частности, ее допускает* $(\mathbb{R}, <, +, -, 0, \mathbb{Q})$.

Следствие 2. $(\mathbb{R}, <, +, H)$, *где* H *— плотная подгруппа, не имеет свойства независимости.*

Цитированная литература

1. **B. H. Neumann.** // Math. Z., 63:76–79, 1955.

Поступила в редакцию 10.12.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С.60 — 67*

УДК 519.624

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д. С. Джумабаев, К. Ж. Назарова

Институт Математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Нелинейная двухточечная краевая задача исследуется введением дополнительных параметров как значений решения на серединах интервалов разбиения отрезка, где рассматривается дифференциальное уравнение. В терминах исходных данных установлены условия существования изолированного решения и сходимости к нему метода множественной двусторонней пристрелки.

Рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in R^n, \qquad \|x\| = \max_i |x_i|, \tag{1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0,T] \times R^n \longrightarrow R^n$, $\quad g : R^n \times R^n \longrightarrow R^n$ – непрерывные функций.

Вопросы разрешимости и построения приближенного решения задачи (1), (2) исследованы многими авторами [1–12]. Одним из часто применяемых методов при решений краевых задач является метод стрельбы и его модификации: метод параллельной пристрелки, метод интервальной пристрелки, метод двусторонней пристрелки, метод множественной двусторонней пристрелки и др. Идея основного варианта метода стрельбы заключается в сведении решения исходной краевой задачи к многократному решению вспомогательных задач Коши для заданного дифференциального уравнения. Приняв значение решения в начальной точке интервала за неизвестный параметр и предполагая, что задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x(0) = s, \tag{3}$$

имеет решение $x(t,s)$ на всем интервале $[0,T]$ при любом $s \in R^n$, решение задачи (1), (2) сводится к нахождению решения нелинейной системы уравнений относительно s :

$$\Psi(s) = g[s, x(T,s)] = 0. \tag{4}$$

Keywords: *differential equation, parameterization's method, uniform partition, correct solvability.*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

Функция $x(t,s)$, показывающая зависимость решения задачи Коши (3) от выбора s при $t \in [0,T]$, в явном виде бывает известной лишь в исключительных случаях. Вследствие этого, как правило, функция $\Psi(s)$ не выписывается явно. Для каждого $s \in R^n$ можно указать алгоритм вычисления значения $\Psi(s)$. Однако при этом мы имеем апостериорную информацию о свойствах функций $\Psi(s)$. Поэтому в работах, где применяется метод стрельбы или его модификации, либо не приводятся условия существования решения и сходимости к нему предлагаемого алгоритма, либо они даются в терминах общего решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Известные условия сходимости алгоритмов метода стрельбы в терминах исходных данных очень жесткие и не выполняются для многих краевых задач. В связи с этим возникает необходимость нахождения условий разрешимости задачи (1), (2) и сходимости предлагаемых алгоритмов в терминах исходных данных $f, g, [0,T]$. Причем эти требования на данные задачи должны быть необходимыми и достаточными условиями существования решения. В [14] с этой целью применен метод параметризации и дополнительные параметры введены как значения искомого решения в начальных точках интервалов разбиения $[0,T]$.

В данной работе дополнительные параметры вводятся как значения искомого решения в серединах интервалов разбиения $[0,T]$. Если в [14] введение параметров позволило обосновать метод параллельной пристрелки, то предлагаемый в этой статье вариант метода параметризации позволяет обосновать метод множественной двусторонней пристрелки. Преимущество множественной двусторонней пристрелки перед другими модификациями метода стрельбы заключается в том, что он обладает более широкой областью начальных значений, для которой имеет место сходимость. Этот вариант метода параметризации и условия сходимости его алгоритмов устанавливает новые признаки разрешимости нелинейных двухточечных краевых задач.

Берем шаг $h > 0 : 2Nh = T$ и произведем разбиение $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [2(r-1)h, 2rh)$. Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[2(r-1)h, 2rh)$ обозначим через $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, т.е. $x_r(t)$ – вектор-функция размерности n, определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[2(r-1)h, 2rh)$. Тогда задача (1), (2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \qquad t \in [2(r-1)h, 2rh), \qquad r = \overline{1,N}, \quad x_r \in R^n, \tag{5}$$

$$g[x_1(0), \lim_{t \to T-0} x_N(t)] = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 2sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(2sh), \qquad s = 1, 2, ..., N-1, \tag{7}$$

где (7) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервалов длины $2h > 0$.

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то система его сужений $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_N^*(t))'$ будет решением задачи (5)–(7). И наоборот, если $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), \ldots, \widetilde{x}_N(t))'$ – решение задачи (5)–(7), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_r(t), \qquad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1,N}, \qquad \widetilde{x}(T) = \lim_{t \to 2Nh-0} \widetilde{x}_N(t)$$

будет решением задачи (1), (2). Через λ_r обозначим значение функций $x_r(t)$ в точке $t = [(2r-1)h]$ и, произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1,N}$, получим многоточечную краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad u_r[(2r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{8}$$

$$g[\lambda_1 + u_1(0), \lambda_N + \lim_{t\to 2Nh-0} u_N(t)] = 0, \tag{9}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to 2sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1} + u_{s+1}(2sh), \qquad s = \overline{1, N-1}. \tag{10}$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)'$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), ..., u_N(t))'$ – решение задачи (8)–(10), то система функций $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), ..., \lambda_N + u_N(t))'$ будет решением задачи (5)–(7). И наоборот, если $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), ..., \widetilde{x}_N(t))'$ – решение (5)–(7), то пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{x}_1(h), ..., \widetilde{x}_N((2N-1)h))'$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{x}_1(t)-\widetilde{x}_1(h), \widetilde{x}_2(t)-\widetilde{x}_2(3h), ..., \widetilde{x}_N(t)-\widetilde{x}_N((2N-1)h))'$, будет решением задачи (8)–(10). Задача (8)–(10) отличается тем, что здесь появились начальные условия в точках $t = [(2r-1)h]$, $r = \overline{1, N}$, которые позволяют определить $u_r(t)$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r = \overline{1, N}$, из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{(2r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau))d\tau, \qquad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}. \tag{11}$$

Подставляя вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть равенства (11) и повторив этот процесс ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ раз, получим представление функции $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = \int\limits_{(2r-1)h}^{t} f(\tau_1, \lambda_r + \int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \ldots + \int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_2)d\tau_1,$$

$$t \in [2(r-1)h, 2rh), \qquad r = \overline{1, N}. \tag{12}$$

Используя (12), находим значения $u_r(t)$ при $t \to 2rh - 0$, $r = \overline{1, N}$, и $u_s[2(s-1)h]$, $s = \overline{1, N-1}$,

$$\lim_{t\to 2rh-0} u_r(t) = \int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} f(\tau_1, \lambda_r + \int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \ldots + \int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_2)d\tau_1, \tag{13}$$

$$u_s(2(s-1)h) = \int\limits_{(2s-1)h}^{2(s-1)h} f(\tau_1, \lambda_r + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \ldots + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_2)d\tau_1. \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в граничные условия (9) и условия склеивания (10), умножая обе части (9) на $2h > 0$, получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in R^{nN}$:

$$2hg\Bigg[\lambda_1 + \int\limits_{h}^{0} f(\tau_1, \lambda_1 + \ldots + \int\limits_{h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_1 + u_1(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1,$$

$$\lambda_N + \int\limits_{(2N-1)h}^{2Nh} f(\tau_1, \lambda_N + \ldots + \int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N + u_N(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1\Bigg] = 0,$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(2s-1)h}^{2sh} f(\tau_1, \lambda_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1 -$$

$$-\lambda_{s+1} - \int\limits_{(2s+1)h}^{2sh} f(\tau_1, \lambda_{s+1} + \ldots + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{s+1} + u_{s+1}(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1] = 0, \quad s = \overline{1, N-1},$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,2h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \tag{15}$$

Первые n уравнений системы (15), соответствующие граничным условиям (2), умножены на $2h > 0$ для того, чтобы в (15) влияния всех уравнений были учтены в равной степени, а при отсутствии разбиения ($N = 1$, $2h = T$) на $T > 0$ – не умножаем и система n уравнений

$$Q_{\nu,T}(\lambda, u) = 0$$

имеет вид

$$Q_{\nu,T}(\lambda, u) \equiv g\Bigg[\lambda + \int\limits_{T/2}^{0} f(\tau_1, \lambda + \ldots + \int\limits_{T/2}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda + u(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1,$$

$$\lambda + \int\limits_{T/2}^{T} f(\tau_1, \lambda + \ldots + \int\limits_{T/2}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda + u(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1\Bigg] = 0, \quad \lambda \in R^n.$$

Таким образом, для нахождения систем пар $(\lambda_r, u_r(t)), r = \overline{1, N}$ имеем замкнутую систему уравнений (11), (15), определяемую через функции f, g, шаг разбиения $2h > 0$ и число подстановок ν.

Через $\widetilde{C}([2(r-1)h, 2rh), R^n)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $[2(r-1)h, 2rh)$ функций $u_r : [2(r-1)h, 2rh) \longrightarrow R^n$.

Выберем шаг $2h > 0 : 2Nh = T$, вектор $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN}$ и предположим, что задача Коши (8) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ имеет решение $u_r^{(0)}(t) \in \widetilde{C}[2(r-1)h, 2rh), R^n)$, $r = \overline{1, N}$. Множество таких $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ обозначим $G_0(f, 2h)$, а соответствующую им систему решений задач Коши – через $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t) \ldots u_N^{(0)}(t))'$. Возьмем $\lambda^{(0)} \in G_0(f, 2h)$, ему соответствующую $u^{(0)}[t]$, непрерывные на $[2(r-1)h, 2rh]$ функции $R_r(t) \geq 0$, $r = \overline{1, N}$, число $\rho > 0$ и построим множества

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \big\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)' \in R^{nN} : \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho, \quad r = \overline{1, N}\big\},$$

$$\overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho) = \big\{u[t] = (u_1(t), \ldots, u_N(t))', u_r(t) \in \widetilde{C}([2(r-1)h, 2rh), R^n) :$$

$$\|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\| \leq R_r(t)\rho, t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}\big\},$$

$$G_1(R[t], \rho) = \big\{(t, x) : \quad t \in [0, T], \quad \|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| < [R_r(t) + 1]\rho,$$

$$t \in [2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}, \quad \|x - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t)\| < [R_N(T) + 1]\rho, \ t = T\ \big\},$$

$$G_2(R[t], \rho) = \big\{\ (\vartheta, \omega) : \|\vartheta - \lambda_1^{(0)} - u_1^{(0)}(0)\| \leq [R_1(0) + 1]\rho, \ \ \|\omega - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \to T-0} u_N(t)\| \leq [R_N(T) + 1]\rho\big\}.$$

Через $U_0(f, g, L(t), L_1, L_2, 2h)$ обозначим совокупность $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], R[t], \rho)$, при которых функции $f(t, x), g(\vartheta, \omega)$ соответственно в $G_1(R[t], \rho)$, $G_2(R[t], \rho)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f_x'(t, x), g_\vartheta'(\vartheta, \omega), g_\omega'(\vartheta, \omega)$ и выполняются неравенства

$$\|f_x'(t, x)\| \leq L(t), \quad \|g_\vartheta'(\vartheta, \omega)\| \leq L_1, \quad \|g'\omega(\vartheta, \omega)\| \leq L_2,$$

где непрерывная на $[0,T]$ функция $L(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$e^{\int\limits_t^{(2r-1)h} L(\tau)d\tau} - 1 \le R_r(t),\ t \in [2(r-1)h,(2r-1)h),\ r=\overline{1,N},$$

$$e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1 \le R_r(t),\ t \in [(2r-1)h,2rh),\ r=\overline{1,N},$$

L_1, L_2 – постоянные.

Предполагая существование $\lambda^{(0)} \in G_0(f,2h)$, за нулевое приближение решения задачи (8)-(10) возьмем систему пар $(\lambda_r^{(0)}, u_r^{(0)}(t))$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r=\overline{1,N}$, и последовательные приближения строим по следующему алгоритму.

Шаг 1. а) Первое приближение по параметру $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)})' \in R^{nN}$ определим из уравнения $Q_{\nu,2h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$.

б) На интервалах $[2(r-1)h, 2rh)$, $r=\overline{1,N}$, решая задачу Коши (8) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r=\overline{1,N}$.

Шаг 2. а) Подставляя найденные значения $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,N}$, в уравнение (15), определяем второе приближение по параметру $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_N^{(2)})' \in R^{nN}$ из уравнения $Q_{\nu,2h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$.

б) Решая задачу Коши (8) при $\lambda_r = \lambda_r^{(2)}$, на интервалах $[2(r-1)h, 2rh), r=\overline{1,N}$ находим функции $u_r^{(2)}(t)$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r=\overline{1,N}$.

Продолжая процесс, на k-м шаге алгоритма получим систему пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r=\overline{1,N}$. Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма и существование изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметром (8)–(10) устанавливает

Теорема 1. *Пусть существуют* $2h>0:\ 2Nh=T,\ (N=1,2,...),\ \nu \in N,$ $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], R[t], \rho) \in U_0(f,g,L(t),L_1,L_2,2h)$, *при которых матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ *обратима для любых* $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)},\rho) \times \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *и выполнены следующие неравенства:*

1) $\|[\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}]^{-1}\| \le \gamma_\nu(2h)$,

2)
$$q_\nu(2h) = \gamma_\nu(2h)\max\big(1, 2h\max(L_1,L_2)\big)\max_{r=\overline{1,N}}\left\{ e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt\Big)^i + \right.$$
$$\left. + e^{\int\limits_{2(r-1)h}^{(2r-1)h} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{2(r-1)h}^{(2r-1)h} L(t)dt\Big)^i \right\} < 1, \qquad \Bigg(\ q_\nu(T) = \gamma_\nu(T)\max(L_1,L_2)\times$$
$$\times\left\{ e^{\int\limits_0^{T/2} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_0^{T/2} L(t)dt\Big)^i + e^{\int\limits_{T/2}^{T} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{T/2}^{T} L(t)dt\Big)^i \right\} < 1\Bigg),$$

3) $\dfrac{1}{1-q_\nu(2h)}\gamma_\nu(2h)\|Q_{\nu,2h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\| < \rho.$

Тогда последовательность пар

$$(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]), (\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)},...,\lambda_N^{(k)})', u^{(k)}[t] = (u_1^{(k)}(t), \ldots, u_N^{(k)}(t))')$$

определяемая по алгоритму, для всех $k=1,2,...$, *содержится в* $S(\lambda^{(0)},\rho) \times \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$, *сходится к* $(\lambda^*, u^*[t])$ *– решению задачи (8)–(10) и справедливы оценки* *а)* $\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq [q_\nu(2h)]^k \dfrac{\gamma_\nu(2h)}{1-q_\nu(2h)}\|Q_{\nu,2h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|$,

б) $\|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq (e^{\left|\int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau\right|} - 1)\|\lambda_r^* - \lambda_r^{(k)}\|, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1,N}.$

Причем любое решение задачи (8)-(10) в $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *изолировано.*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [14] с учетом особенности предлагаемого алгоритма. Функции $x^{(k)}(t), k = 0, 1, 2, ...,$ определим равенствами $x^{(k)}(t) = \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t),\ t \in [2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1,N}, x^{(k)}(T) = \lambda_r^{(k)} + \lim\limits_{t\to T-0} u_N^{(k)}(t),$ и через $S(x^{(0)}(t), [R[t]+1]\rho)$ обозначим множество кусочно - непрерывных дифференцируемых функций $x : [0,T] \to R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|x(t) - x^{(0)}(t)\| < [R_r(t) + 1]\rho, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1,N},$$

$$\|x(T) - x^{(0)}(T)\| < [R_r(T) + 1]\rho.$$

Так как задача (1), (2) эквивалентна задаче (8)–(10), то из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций* $(x^{(k)}(t))$, $k = 1, 2, \ldots$, *содержится в* $S(x^{(0)}(t), (R[t] + 1)\rho)$, *сходится к* $x^*(t)$ *– решению задачи (1), (2) в* $S(x^{(0)}(t), [R(t) + 1]\rho)$ *и справедливы неравенства*

$$\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\| \leq$$

$$\leq [q_\nu(2h)]^k \frac{\gamma_\nu(2h)}{1-q_\nu(2h)} \exp^{\left|\int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau\right|} \|Q_{\nu,2h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1,N}. \quad (16)$$

Причем любое решение задачи (1), (2) в $S(x^{(0)}(t), (R[t] + 1)\rho)$ *изолировано.*

Известно, что в нелинейных краевых задачах изолированность решения не только не обеспечивает его непрерывную зависимость от исходных даннvx, но и не сохраняет свойство разрешимости при малых изменениях f, g. Учитывая, что построение приближенных методов предполагает малость изменения решения при малых возмущениях исходных данных, вводится более узкое понятие изолированности.

Следующее определение "изолированного" решения краевых задач с непрерывно дифференцируемыми данными является модификацией определения изолированности из [6].

Определение. *Решение задачи (1), (2) – функция* $x^*(t)$ *называется "изолированным", если существует число* $\rho_0 > 0$, *при котором функции* f, g *соответственно в* $G^*_{3,\rho_0} = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$, $G^*_{4,\rho_0} = \{(v,w) : \|v - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$ *имеют равномерно непрерывные частные производные* $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ *и линейная однородная двухточечная краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \qquad t \in [0,T], \qquad y \in R^n, \quad (17)$$

$$g'_v[x^*(0), x^*(T)]y(0) + g'_w[x^*(0), x^*(T)]y(T) = 0 \quad (18)$$

имеет только тривиальное решение $y(t) = 0$.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования "изолированного" решения.

Теорема 3. *Краевая задача (1), (2) имеет "изолированное" решение тогда и только тогда, когда для любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *существуют* $2h = 2h(\nu) > 0 : 2Nh = T$ $(N = 1, 2, \ldots)$,

$(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], R[t], \rho) \in U_0(f, g, L(t),\, L_1,\, L_2,\, 2h)$, *при которых матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ *обратима для любых* $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *и выполнены неравенства 1), 2), 3) теоремы 1.*

Доказательство. Существование $x^*(t)$ – изолированного решения задачи (1), (2) следует из теоремы 1. Используя теорему 1 из [15], нетрудно установить, что $x^*(t)$ является изолированным в смысле определения решением задачи (1), (2). Покажем,что условия теоремы являются необходимыми условиями существования "изолированного"решения. Действительно, пусть $x^*(t)$ – "изолированное" решение задачи (1), (2) и функции f, g соответственно в G^*_{3,ρ_0}, G^*_{4,ρ_0} имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$. Тогда существуют числа α, L_1, L_2, при которых справедливы неравенства

$$\left\|f'_x(t,x)\right\| \le \alpha, \qquad (t,x) \in G^*_{3,\rho_0},$$

$$\left\|g'_v(v,w)\right\| \le L_1, \qquad \left\|g'_w(v,w)\right\| \le L_2, \qquad (v,w) \in G^*_{4,\rho_0}$$

и однородная двухточечная краевая задача (17), (18) имеет только тривиальное решение, а соответствующая неоднородная краевая задача

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y + p(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in R^n,$$

$$g'_v[x^*(0), x^*(T)]y(0) + g'_w[x^*(0), x^*(T)]y(t) = d$$

имеет единственное решение при любых $p(t)$, d. Применяя теорему 3 из [15], получим, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h = h(\nu) : 2Nh = T$, при котором матрица $Q_\nu(*, 2h) : R^{nN} \to R^{nN}$, составленная по матрицам $A^*(t) = f'_x(t, x^*(t))$, $B^* = g'_v[x^*(0),\, x^*(T)]$, $C^* = g'_w[x^*(0), x^*(T)]$, обратима и выполняются неравенства

а)$||[Q_\nu(*, 2h)]^{-1}|| \le \gamma^*_\nu(2h)$,

б) $q^*_\nu(2h) = \gamma^*_\nu(2h)\max(1, 2h\max(L_1, L_2)) \max\limits_{r=\overline{1,N}} \Big\{ e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt} - \sum\limits_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(2r-1)h}^{2rh} L(t)dt\Big)^i +$

$$+e^{\int\limits_{2(r-1)h}^{(2r-1)h} L(t)dt} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!}\Big|\Big(\int\limits_{(2r-1)h}^{2(r-1)h} L(t)dt\Big)^i\Big|\Big\} < 1.$$

При найденном шаге $2h > 0$ за $(\lambda^{(0)},\, u^{(0)}[t])$ возьмем $\lambda^* = (\lambda^*_1, \lambda^*_2, \ldots, \lambda^*_N)' \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u^*_1(t), u^*_2(t), \ldots, u^*_N(t))'$, где $\lambda^*_r = x^*[(2r-1)h]$, $u^*_r(t) = x^*(t) - x^*[(2r-1)h]$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r = \overline{1,N}$, функции $R_r(t)$ определим равенствами $R_r(t) = e^{\alpha\left|[t-(2r-1)h]\right|} - 1$, $t \in [2(r-1)h, 2rh]$, $r = \overline{1,N}$. Числа $\rho_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ выбираем, удовлетворяющими неравенствам

$$a)\ e^{\alpha h}\rho_1 < \rho_0, \qquad b)\ \varepsilon_1\gamma^*_\nu(2h) < 1, \qquad c)\ q^*_\nu(2h) < 1 - \varepsilon_1\gamma^*_\nu(2h). \tag{19}$$

В силу введенных обозначений функция $x^*(t)$ представима в виде

$$x^*(t) = \begin{cases} \lambda^*_r + u^*_r(t) & \text{при } t \in [2(r-1)h, 2rh),\ r = \overline{1,N}, \\ \lambda^*_N + \lim\limits_{t \to 2Nh-0} u^*_N(t) & \text{при } t = T. \end{cases}$$

Тогда, если $(t,x) \in G^*_1(R[t], \rho_1)$, т.е. $\|x - \lambda^*_r - u^*_r(t)\| < e^{\alpha\left|[t-(2r-1)h]\right|}\rho_1$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r = \overline{1,N}$, $\|x - \lambda^*_N - \lim\limits_{t\to 2Nh-0} u^*_N(t)\| < e^{\alpha h}\rho_1$, с учетом неравенства (19a) и равенств $\|x - \lambda^*_r -$

$u_r^*(t)\| = \|x - x^*(t)\|$, $t \in [2(r-1)h, 2rh)$, $r = \overline{1,N}$, $\|x - \lambda_N^* - \lim\limits_{t\to 2Nh-0} u_N^*(t)\| = \|x - x^*(T)\|$, получим, что $(t,x) \in G_{3,\rho_0}^*$. Если $(v,w) \in G_2^*(R[t],\rho_1)$, то, учитывая равенства $x^*(0) = \lambda_1^* + u_1^*(0)$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim\limits_{t\to 2Nh-0} u_N^*(t)$, получим, что $(v,w) \in G_{4,\rho_0}^*$.

Таким образом, $G_1^*(R[t],\rho_1) \subset G_{3,\rho_0}^*$, $G_2^*(R[t],\rho_1) \subset G_{4,\rho_0}^*$. Тогда из равномерной непрерывности частных производных $f_x'(t,x)$, $g_v'(v,w)$, $g_w'(v,w)$ соответственно в G_{3,ρ_0}^*, G_{4,ρ_0}^* следует равномерная непрерывность матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ в $S(\lambda^*,\rho_1) \times S(u^*[t], e^{\alpha h}\rho_1)$. Поэтому для $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\rho^* = \rho^*(\varepsilon_1) \in (0,\rho_1]$ такое, что

$$\Big\|\frac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\Big\| \le \varepsilon_1,$$

если $(\lambda,u) \in S(\lambda^*,\rho^*) \times S(u^*[t], e^{\alpha h}\rho^*)$.

Так как $\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h) < 1$, то отсюда и из теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов следует, что матрица Якоби обратима при всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*,\rho^*) \times S(u^*[t], e^{\alpha h}\rho^*)$ и

$$\Big\|\Big[\frac{\partial Q_{\nu,2h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\Big]^{-1}\Big\| \le \frac{\gamma_\nu^*(2h)}{1-\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h)},$$

т.е. неравенство 1) теоремы 1 выполняется с $\gamma_\nu(2h) = \dfrac{\gamma_\nu^*(2h)}{1-\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h)}$.

В силу (19) c) неравенство 2) теоремы 1 выполняется с числом $q_\nu(2h) = \dfrac{q_\nu^*(2h)}{1-\varepsilon_1\gamma_\nu^*(2h)} < 1$. Учитывая, что $Q_{\nu,2h}(\lambda^*,u^*) = 0$, установим справедливость неравенства 3) теоремы 1. Теорема 3 доказана.

Цитированная литература

1. **Шаманский В.Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев, 1963. Ч.1.
2. **Беллман Р., Калаба. Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М, 1968.
3. **Keller H. B.** Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell: Walthan,1968.
4. **Roberts S.M.,Shipman J.S.** Two-point boundary-value problems: Shooting methods. N.Y.: Elsevier, 1972.
5. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М., 1973.
6. **Keller H. B., White A. B.** // SIAM J.Numer. Anal.1975.Vol.12. №5. P. 791-802.
7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Холла Дж., Уатта Дж. М., 1979.
8. **Монастырный П. И.** // Ж.вычисл. матем.и матем.физ. 1978. Т. 18, №6. С.1139 - 1145.
9. **Монастырный П.И.** // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, №4. С.732-740.
10. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. М., 1986.
11. **Кигурадзе И.Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. "Современные проблемы математики. Новейшие достижения, Т.30."М., 1987. С. 3-103.
12. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** Численно - аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев,1986.
13. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
14. **Темешева С. М.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, №1. С. 73-83.
15. **Назарова К. Ж.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 4. С. 58 – 67.

Поступила в редакцию 20.03.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С.68 — 75*

УДК 517.956.3

О ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

С. С. Кабдрахова

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина,125 anar@math.kz

Получены достаточные условия существования единственного решения полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения со смешанной производной.

На $\bar{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается краевая задача для нелинейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $f : \overline{\Omega} \times R^3 \to R$ непрерывная функция.

Через $C(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $u : \overline{\Omega} \to R$ с нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |u(x,t)|$.

Функция $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u^2(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega})$, называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}$ и краевым условиям (2), (3).

Через $C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, имеющих непрерывные частные производные по x, t, с нормой

$$\|u\|_1 = \max(\|u\|_0, \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_0, \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_0).$$

Keywords: *semiperiodic boundary value problem, nonlinear hyperbolic equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70, 35B10

Возьмем функцию $u^{(0)}(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(x,t)$, имеющую непрерывную смешанную производную второго порядка, число ρ и построим множества

$$G(u^{(0)},\rho) = \{(x,t,u,v,w) : (x,t) \in \overline{\Omega}, |u - u^{(0)}(x,t)| < \rho,$$

$$|v - u^{(0)}_x(x,t)| < \rho, |w - u^{(0)}_t(x,t)| < \rho\},$$

$$S(u^{(0)},\rho) = \{u(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) : \|u - u^{(0)}\|_1 < \rho\}.$$

Через $V^0(f, L_1(x,t), L_2(x,t), L_3(x,t))$ обозначим множество пар $(u^{(0)}(x,t),\rho)$, при которых в $G(u^{(0)},\rho)$ функция $f(x,t,u,v,w)$ имеет равномерно непрерывные частные производные $f_v(x,t,u,v,w), f_w(x,t,u,v,w), f_u(x,t,u,v,w)$ и выполняются неравенства

$$|f_v(x,t,u,v,w)| \le L_1(x,t), \quad |f_w(x,t,u,v,w)| \le L_2(x,t), \quad |f_u(x,t,u,v,w)| \le L_3(x,t),$$

где $L_i(x,t) \in C(\overline{\Omega}), i = 1,2,3.$

Нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений со смешанными производными изучались многими авторами [1–4].

В [5–6] введено определение линеаризатора, обобщающее производную Фреше на негладкие неограниченные операторы и установлены условия сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений. В настоящей работе рассматриваемая краевая задача записывается в виде функционального уравнения с неограниченным оператором и используется обобщение локального варианта теоремы Адамара [7].

Пусть $X-$ пространство функций из $C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3);

$$Y = C(\overline{\Omega}), \;\; H = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}, \;\; F(u) = -f(x,\ t,\ u(x,t),\ u_x(x,t),\ u_t(x,t)),$$

$$(u^{(0)}(x,t),\ \rho) \in V^0(f,\ L_1(x,t),\ L_2(x,t),\ L_3(x,t)).$$

Тогда краевая задача (1)–(3) эквивалентна операторному уравнению

$$A(u) \equiv Hu + F(u) = 0, \qquad u \in X, \tag{4}$$

где $H : X \to Y-$ линейный неограниченный оператор, а $F(u)$ в $S(u^{(0)},\rho)$ имеет равномерно непрерывную производную Фреше [8, с.637].

Для любой функции $\hat{u} \in S(u^{(0)},\rho)$

$$F'(\hat{u}) = f_u(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t)) + f_v(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t))\frac{\partial}{\partial x} +$$

$$+ f_w(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t))\frac{\partial}{\partial t}.$$

Линейный оператор $H + F'(\hat{u})$ является линеаризатором [9, с.638] оператора A в точке $\hat{u}$ и операторное уравнение

$$[H + F^{'}(\hat{u})]\widetilde{u} = \widetilde{f}, \;\; \widetilde{f} \in Y, \;\; \widetilde{u} \in X$$

эквивалентно линейной краевой задаче

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x \partial t} = \hat{a}(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \hat{b}(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \hat{c}(x,t)\widetilde{u} + \widetilde{f}(x,t), \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{u}(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$\widetilde{u}(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

где

$$\hat{a}(x,t)=f_v(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t)),\ \ \hat{b}(x,t)=f_w(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t)),$$

$$\hat{c}(x,t)=f_u(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t)).$$

Если задача (5) – (7) при любой $\widetilde{f}\in C(\overline{\Omega})$ имеет единственное решение $\widetilde{u}(x,t)\in C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ и для него справедлива оценка

$$\|\widetilde{u}\|_1\le\gamma\|\widetilde{f}\|_0,$$

где $\gamma - const$, независящая от $\widetilde{f}$, то линеаризатор $H+F^{'}(\hat{u})$ обратим и для его обратного справедлива оценка

$$\|[H+F^{'}(\hat{u})]^{-1}\|_{L(Y,X)}\le\gamma,$$

$L(Y,X)$ – пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda:Y\to X$ с индуцированной нормой.

Лемма. *Пусть на* $\overline{\Omega}$ *функции* $\hat{a}(x,t),\hat{b}(x,t),\hat{c}(x,t)$ *непрерывны и* $|\hat{a}(x,t)|\ge\delta>0,\ \delta - const.$ *Тогда линейная краевая задача (5) – (7) имеет единственное классическое решение* $\widetilde{u}(x,t)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|\widetilde{u}\|_1\le\gamma\|\widetilde{f}\|_0, \tag{8}$$

где

$$\gamma=\max\left\{\frac{1}{\delta}[\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}(|\hat{b}(x,t)|+|\hat{c}(x,t)|)K+1],K\right\},$$

$$K=\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\omega}\max(1,\delta+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|)\exp\left(\frac{1}{\delta}\int\limits_{\xi}^{\omega}\max_{t\in[0,T]}[|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|]\max\{1,\delta+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(s,t)|\}ds\right)d\xi.$$

Доказательство. При выполнении условий леммы существование единственного классического решения задачи (5) – (7) доказано в [10].

Чтобы установить оценку (8), введем новые неизвестные функции

$$\widetilde{v}(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial x},\ \ \widetilde{w}(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}(x,t)}{\partial t}$$

и задачу (5)–(7) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial\widetilde{v}(x,t)}{\partial t}=\hat{a}(x,t)\widetilde{v}(x,t)+\hat{b}(x,t)\widetilde{w}(x,t)+\hat{c}(x,t)\widetilde{u}(x,t)+\widetilde{f}(x,t), \tag{9}$$

$$\widetilde{v}(x,0)=\widetilde{v}(x,T),\ \ (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{10}$$

$$\widetilde{u}(x,t)=\int\limits_0^x\widetilde{v}(\xi,t)d\xi,\quad \widetilde{w}(x,t)=\int\limits_0^x\widetilde{v}^{'}_t(\xi,t)d\xi. \tag{11}$$

Используя условия леммы и схему доказательства теоремы 4 из [11, с.392] получим существование единственного решения $\widetilde{v}(x,t)$ задачи (9) – (10) для любых $\widetilde{u}(x,t)\in C(\overline{\Omega}),\widetilde{w}(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ и установим оценку

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{v}(x,t)|\le\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\hat{b}(x,t)|+|\hat{c}(x,t)|}{|\hat{a}(x,t)|}\right)\max(\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(x,t)|,\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(x,t)|)+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(x,t)}{\hat{a}(x,t)}\right|. \tag{12}$$

Отсюда и из (9) имеем

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{v}'_t(x,t)| \le \left\{\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(x,t)|\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\hat{b}(x,t)|+|\hat{c}(x,t)|}{|\hat{a}(x,t)|}\right)+\max_{t\in[0,T]}(|\hat{b}(x,t)|+|\hat{c}(x,t)|)\right\}\times$$

$$\times\max(\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(x,t)|,\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(x,t)|)+\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{f}(x,t)|+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(x,t)|\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(x,t)}{\hat{a}(x,t)}\right|. \qquad (13)$$

Так как функции $\widetilde{u}(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)$ принадлежат пространству $C(\overline{\Omega})$, то из функциональных соотношений (11) следует выполнение неравенств

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(x,t)| \le \int_0^x \max_{t\in[0,T]}|\widetilde{v}(\xi,t)|d\xi,\quad \max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(x,t)| \le \int_0^x \max_{t\in[0,T]}|\widetilde{v}_t(\xi,t)|d\xi.$$

Подставляя в правые части неравенств соответственно оценки (12), (13), имеем

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(x,t)| \le \int_0^x \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|}{|\hat{a}(\xi,t)|}\right)\max(\max_{(\xi,t)\in\overline{\Omega}}|\widetilde{w}(\xi,t)|,\max_{(\xi,t)\in\overline{\Omega}}|\widetilde{u}(\xi,t)|)d\xi+$$

$$+\int_0^x \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|d\xi,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(x,t)| \le \int_0^x \left\{\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|}{|\hat{a}(\xi,t)|}\right)+\max_{t\in[0,T]}(|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|)\right\}\times$$

$$\times\max(\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(\xi,t)|,\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(\xi,t)|)d\xi+\int_0^x\left\{\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{f}(\xi,t)|+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|\right\}d\xi.$$

Отсюда

$$\max(\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(x,t)|,\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(x,t)|) \le \max\left(\int_0^x \max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|}{|\hat{a}(\xi,t)|}\right)\times\right.$$

$$\times\max(\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(\xi,t)|,\max_{t)\in\overline{\Omega}}|\widetilde{u}(\xi,t)|)d\xi+\int_0^x \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|d\xi,$$

$$\int_0^x\left\{\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|}{|\hat{a}(\xi,t)|}\right)+\max_{t\in[0,T]}(|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|)\right\}\times$$

$$\left.\times\max(\max_{(\xi,t)\in\overline{\Omega}}|\widetilde{u}(\xi,t)|,\max_{(\xi,t)\in\overline{\Omega}}|\widetilde{w}(\xi,t)|)d\xi+\int_0^x\left\{\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{f}(\xi,t)|+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|\right\}d\xi\right).$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим

$$\max(\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{w}(x,t)|,\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}(x,t)|) \le \int_0^x \max\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|,\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{f}(x,t)|+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|\times\right.$$

$$\times \max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|\Big\}\exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x}\max\Big\{\max_{t\in[0,T]}\Big(\frac{|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|}{|\hat{a}(s,t)|}\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(s,t)|\max_{t\in[0,T]}\Big(\frac{|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|}{|\hat{a}(s,t)|}\Big)+\max_{t\in[0,T]}(|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|)\Big\}ds\Big)d\xi.$$

Тогда для $\widetilde{v}(x,t)$ имеем следующую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{v}(x,t)|\leq \max_{t\in[0,T]}\Big(\frac{|\hat{b}(\xi,t)|+|\hat{c}(\xi,t)|}{|\hat{a}(\xi,t)|}\Big)\int\limits_{0}^{x}\max\Big\{\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{f}(\xi,t)|+\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(\xi,t)|\times\max_{t\in[0,T]}|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}|\Big\}\exp\Big(\int\limits_{0}^{x}\max\Big\{\max_{t\in[0,T]}\Big(\frac{|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|}{|\hat{a}(s,t)|}\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T]}|\hat{a}(s,t)|\max_{t\in[0,T]}\Big(\frac{|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|}{|\hat{a}(s,t)|}\Big)+\max_{t\in[0,T]}|(|\hat{b}(s,t)|+|\hat{c}(s,t)|)\Big\}ds\Big)d\xi+\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\widetilde{f}(\xi,t)}{\hat{a}(\xi,t)}\right|.$$

Из этих неравенств следует выполнение неравенства (8). Лемма доказана.

Пусть следующая нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dv}{dt}=f(0,t,0,0,v), \tag{14}$$

$$v(0)=v(T) \tag{15}$$

имеет решение $v^{(0)}(t)$.

Достаточные условия существования решений краевой задачи (14),(15) в терминах $f,[0,T]$ получены в [12]. В множестве $G(u^{(0)},\rho)$ в качестве $u^{(0)}(x,t)$ возьмем функцию $v^{(0)}(t)x$.

Теорема. *Пусть функция $f(x,t,u,v,w))$ в множестве $G(u^{(0)},\rho)$ непрерывна по x,t и имеет равномерно непрерывные частные производные по u,v,w. Тогда при выполнении неравенств*

$$a)\quad |f_v(x,t,u,v,w)|\geq\delta>0,\ \delta-const,(x,t,u,v,w)\in G(u^{(0)},\rho),$$

$$b)\quad \overline{\gamma}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|\dot{v}^{(0)}(t)-f(x,t,v^{(0)}(t)x,v^{(0)}(t),\dot{v}^{(0)}(t)x)|<\rho$$

нелинейная краевая задача (1) – (3) в $S(u^{(0)},\rho)$ имеет единственное классическое решение $u^*(x,t)$ и существует число $\alpha\geq 1$, при котором последовательность непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций

$$u_{m+1}(x,t)=u_m(x,t)+\Delta\widetilde{u}_m(x,t),m=0,1,2,..., \tag{16}$$

где $\Delta\widetilde{u}_m(x,t)-$ решение линеаризованной краевой задачи

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x\partial t}=f_v(x,t,u_m(x,t),u_{mx}(x,t),u_{mt}(x,t))\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}+f_w(x,t,u_m(x,t),u_{mx}(x,t),u_{mt}(x,t))\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}+$$

$$+f_u(x,t,u_m(x,t),u_{mx}(x,t),u_{mt}(x,t))\widetilde{u}-\frac{1}{\alpha}\{\frac{\partial^2\widetilde{u}(x,t)}{\partial x\partial t}-f(x,t,u_m(x,t),u_{mx}(x,t),u_{mt}(x,t))\},$$

$$\widetilde{u}(0,t)=0,\quad t\in[0,T],$$

$$\widetilde{u}_x(x_m,0)=\widetilde{u}_x(x_m,T),\quad x\in[0,\omega],$$

принадлежит $S(u^{(0)},\rho)$ *и по норме* $C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ *сходится к* $u^*(x,t)$.

$$\text{Здесь } \overline{\gamma}=\max\{\frac{1}{\delta}[(\overline{L}_2+\overline{L}_3)\overline{K}+1],\overline{K}\},\ \overline{L}_2=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}L_2(x,t),\ \overline{L}_3=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}L_3(x,t), \tag{17}$$

$$\overline{K}=\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\omega \max(1,\delta+\max_{t\in[0,T]}L_1(\xi,t))\cdot$$

$$\cdot\exp\bigg(\frac{1}{\delta}\int\limits_\xi^\omega \max_{t\in[0,T]}[L_2(s,t)+L_3(s,t)]\max\{1,\delta+\max_{t\in[0,T]}L_1(s,t)\}ds)\bigg)d\xi.$$

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнения (4). Из условий теоремы следует существование производной Фреше оператора $F(u)$ в $S(u^{(0)},\rho)$ и её равномерная непрерывность в этом шаре.

Покажем, что линеаризованная краевая задача (5) – (7) для любого $\hat{u}(x,t)\in S(u^{(0)},\rho)$ корректно разрешима с константой $\overline{\gamma}$. Если $\hat{u}(x,t)\in S(u^{(0)},\rho)$, то $(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{v}(x,t),\hat{w}(x,t))\in G(u^{(0)},\rho)$. Отсюда и из условий теоремы следует, что $|f_v(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t))|\geq\delta>0$,

$$|f_v(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t))|\leq L_1(x,t),\ |f_w(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u_x}(x,t),\hat{u}_t(x,t))|\ \leq L_2(x,t),$$

$|f_u(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{u}_x(x,t),\hat{u}_t(x,t))|\leq L_3(x,t)$. Тогда по лемме константа корректной разрешимости $\overline{\gamma}$ задачи (5) – (7) в точке $\hat{u}\in S(u^{(0)},\rho)$ имеет вид (17).

По нашему предположению $u^{(0)}(x,t)=v^{(0)}(t)x$, поэтому

$$\overline{\gamma}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|u^{(0)}_{xt}-f(x,t,u^{(0)}(x,t),u^{(0)}_x(x,t),u^{(0)}_t(x,t))|=$$

$$=\overline{\gamma}|\dot{v}^{(0)}(t)-f(x,t,v^{(0)}(t)x,v^{(0)}(t),\dot{v}^{(0)}(t)x)|<\rho.$$

Тогда по теореме 2 из [7, с.34–35] задача (1) – (3) имеет решение в $S(u^{(0)},\rho)$ и существует число $\alpha\geq 1$ такое, что последовательность (13) принадлежит $S(u^{(0)},\rho)$ и по норме $C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ сходится к $u^*(x,t)$.

Установим единственность решения краевой задачи (1) – (3) в шаре $S(u^{(0)},\rho)$. Предположим обратное. Пусть существуют два решения $u^*(x,t),\overline{u}(x,t)$ краевой задачи (1) – (3) в шаре $S(u^{(0)},\rho)$. Их разность обозначим через $\triangle u(x,t)$, т.е. $\triangle u(x,t)=u^*(x,t)-\overline{u}(x,t)$. Учитывая, что $u^*(x,t),\overline{u}(x,t)-$ решения задачи (1)–(3) и используя формулу конечных приращений Лагранжа к разности $f(x,t,u^*(x,t),u^*_x(x,t),u^*_t(x,t))-f(x,t,\overline{u}(x,t),\overline{u}_x(x,t),\overline{u}_t(x,t))$, установим, что функция $\Delta u(x,t)$ является решением линейной полупериодической краевой задачи

$$\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x\partial t}=\int\limits_0^1 f_v(x,t,\overline{u}(x,t),\overline{u}_x(x,t)+\theta\Delta u(x,t),u^*_t(x,t))d\theta\Delta u_x+$$

$$+\int\limits_0^1 f_w(x,t,\overline{u}(x,t),\overline{u}_x(x,t),\overline{u}_t(x,t)+\theta\Delta u_t(x,t))d\theta\Delta u_t+$$

$$+\int\limits_0^1 f_u(x,t,\overline{u}(x,t)+\theta\Delta u(x,t),u^*_x(x,t),u^*_t(x,t))d\theta\Delta u, \tag{18}$$

$$\Delta u(0,t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{19}$$

$$\Delta u(x,0) = \Delta u(x,T), \quad x \in [0,\omega]. \tag{20}$$

Так как $(x,t,\overline{u}(x,t),\overline{u}_x(x,t)+\theta\Delta u(x,t),u_t^*(x,t)) \in G(u^{(0)},\rho)$ для любого $0<\theta<1$, то из условия а) теоремы следует, что

$$\left|\int\limits_0^1 f_v(x,t,\overline{u}(x,t),\overline{u}_x(x,t)+\theta\Delta u(x,t),u_t^*(x,t))d\theta\right| \geq \delta > 0.$$

Тогда по лемме задача (18)–(20) имеет только нулевое решение $\Delta u(x,t)=0$. Поэтому $u^*(x,t)=\overline{u}(x,t)$ для всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Пример. В области $\overline{\Omega}=[0,1]\times[0,1]$ рассмотрим краевую задачу для нелинейного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = -2\frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial x})^3 + u(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + \frac{1}{4}\sin xt, \tag{1'}$$

$$u(0,t)=0, \quad t\in[0,1], \tag{2'}$$

$$u(x,0)=u(x,1), \quad x\in[0,1]. \tag{3'}$$

Функция $v^{(0)}(t)=0$ является решением следующей двухточечной краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2v^2 + v^3,$$

$$v(0,t)=0, \quad t\in[0,1],$$

$$v(x,0)=v(x,1), \quad x\in[0,1].$$

Возьмем число $\rho=0.5$ и построим множества

$$S(0;0.5)=\{u(x,t)\in C_{x,t}^{1,1}(\overline{\Omega}) : \|u\|_1 < 0.5\},$$

$$G(0;0.5)=\{(x,t,u,v,w) : (x,t)\in[0,1]\times[0,1], |u|<0.5, |v|<0.5, |w|<0.5\}.$$

Проверим условия теоремы в $G(0;0.5)$. Для этого оценим частные производные функций $f(x,t,u,v,w)=-2v+v^3+uw^2+\frac{1}{4}sinxt$ по u,v,w для $(x,t,u,v,w)\in G(0;0.5)$:

$$|f_v(x,t,u,v,w)| = |-2+3v^2| \geq \frac{5}{4} = \delta > 0, \ \ |f_v(x,t,u,v,w)| \leq 2, |f_u(x,t,u,v,w)| = |w^2| \leq \frac{1}{4},$$

$|f_w(x,t,u,v,w)| = |2uw| \leq \frac{1}{2}$.

Согласно (17) $\overline{\gamma}=1,076$ и проверим последнее условие: $1,076 \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |\frac{1}{4}sinxt| < \frac{1}{2}$. Тогда по теореме задача $(1')-(3')$ имеет единственное решение в шаре $S(0;0.5)$.

Цитированная литература

1. **Cesari L.** // Proc.Internat.Sympos. Non-linear Vibrations. Kiev,1963.V.2.P.440–457.

2. **Hale J. K.** //Arch.Rational Mech.Anal.1967.V.23, №5. P.380–398.

3. **Aziz A. K.** // Proc. Amer. Math.Soc.1966.V.17, №3. P.557–566.

4. **Kiguradze T. I.** // Archivum mathematicum.1997.V. 33, №4. P.238–245.

5. **Джумабаев Д. С.** // Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат.1984. №1. С.31–34; Amer. Math. Soc. Transl. 1989. V.142, №2. C.91–94.

6. **Джумабаев Д. С.** // Известия АН КазССР. Сер.физ.-мат. 1984. №3. С.27–31; Amer. Math. Soc. Transl. 1989. V.142, №2. C.95–99.

7. **Джумабаев Д. С.** // Математический журнал. 2001. Т.1, №1. С.30–40.

8. **Канторович Л. А.,Акилов Г.П.** Функциональный анализ.М. Наука, 1977.

9. **Джумабаев Д. С.** // Математические заметки.1987. Т.41, №5. С.637–645.

10. **Джумабаев Д. С.,Асанова А. Т.** //Известия НАН РК. Сер.физ.-мат. 2001. №1. С.23–29.

11. **Джумабаев Д. С.** // Ж.вычисл.матем.и матем. физ. 1990. Т.30, №3. С.388–404.

12. **Темешова С. М.** // Известия НАН РК. Сер.физ.-мат. 2003. №1. С.93–100.

Поступила в редакцию 03.05.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 76 — 84*

УДК 621.316

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ЛИНЕЙНОЙ ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. В. Лобанова

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125

В работе с помощью функций Хартри решена обратная задача Стефана с подвижной границей, меняющейся по линейному закону. Найдены условия, при которых решение, полученное в виде ряда, сходится равномерно. Доказаны некоторые комбинаторные соотношения.

Введение

Задача Стефана возникает при исследовании физических процессов, связанных с фазовым превращением вещества, например, когда требуется найти распределение температуры и закон движения границы раздела фаз из уравнения теплопроводности при заданных граничном и начальном условиях, а также условии на границе раздела фаз. Обратная же задача Стефана заключается в том, чтобы по заданному закону движения границы раздела фаз восстановить закон изменения граничных условий или коэффициентов уравнения. В частности, обратная задача Стефана возникает при исследовании тепловых процессов в электрических контактах, в которых область существования одной из фаз (жидкой) стягивается в точку в начальный момент времени. Такое стягивание в точку и определяет основные трудности при численном моделировании процесса фазовых превращений при малых временах.

Задача, когда граница раздела жидкой и твердой фаз движется по автомодельному закону, то есть граница $\alpha(t) = b + \alpha_0\sqrt{t}$, была изучена в работе [2] с помощью аппарата функций Хартри. В той же работе было построено решение в виде ряда и доказана его сходимость.

В данной работе мы изучаем случай с линейной границей $\alpha(t) = ht$. Решение ищется в виде линейной комбинации функций Хартри с неизвестными коэффициентами. Граничные, начальные условия и условие Стефана приводят к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

В следующем разделе мы приводим постановку задачи и формулируем ее решение. В разделе мы исследуем полученное решение на сходимость. Дальше решается сама обратная задача Стефана и ее решение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и формулируется решение полученной системы. В разделе доказывается ранее приведенное решение полученной системы, а в последней части работы доказываются некоторые комбинаторные утверждения, применяемые в доказательствах из раздела .

Keywords: *inverse Stefan Problem, heat conducting equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35K99, 74N20, 80A20, 80A22

Постановка задачи

Найти функцию $F(t) = \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x} + h_1 u\right)\Big|_{x=0}$, если функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

в области $0 < x < \alpha(t)$, $0 \le t \le t_0$, где $\alpha(t) = h \cdot t$ и $h > 0$, с условиями

$$u|_{x=\alpha(t)} = \Phi(t), \tag{2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\alpha(t)} + h_2\Phi(t) = \Psi(t) + C \cdot \frac{d\alpha}{dt} \text{ (условие Стефана).} \tag{3}$$

Кроме того,

$$F(0) = \Psi(0) + C \cdot h - h_2 \cdot \Phi(0) + h_1 \cdot \Phi(0). \tag{4}$$

Будем предполагать, что функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ непрерывны и разлагаются в равномерно сходящиеся на $[0, t_0]$ ряды Тейлора

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_k t^k}{k!}, \qquad \Psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k t^k}{k!}. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} -p_0 &= 2a(\psi_0 + C \cdot h - h_2\phi_0), \\ -p_k &= 2a(\psi_k - h_2\phi_k), \quad \text{где } k \ge 1, \\ r &= h/2a. \end{aligned} \tag{6}$$

При таких условиях, учитывая обозначение (6) для p_i, мы докажем, что

$$\begin{aligned} F(t) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4t)^k}{2a} \cdot i^{2k} \operatorname{erfc} 0 \left(\sum_{i=0}^{k} (2r)^{2i} C_{k+i}^{2i} p_{k-i} - 2\sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i+1} C_{k+i}^{2i+1} \phi_{k-i} \right) + \\ &+ h_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4t)^k}{2} \cdot i^{2k} \operatorname{erfc} 0 \left(2\sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i} C_{k+i-1}^{2i} \phi_{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i+1} C_{k+i}^{2i+1} p_{k-i-1} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $i^n \operatorname{erfc} 0 = 1/2^n \Gamma(n/2+1)$, то (7) упрощается до вида:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2a \cdot k!} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} (2r)^{2i} C_{k+i}^{2i} p_{k-i} - 2\sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i+1} C_{k+i}^{2i+1} \phi_{k-i} \right) + \\ &+ h_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2 \cdot k!} \cdot \left(2\sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i} C_{k+i-1}^{2i} \phi_{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i+1} C_{k+i}^{2i+1} p_{k-i-1} \right). \end{aligned}$$

Сходимость полученного решения

В данном разделе мы покажем, что ряд (7) сходится, если ϕ_k и ψ_k, а стало быть, и p_k, растут не быстрее, чем M^k, где M — некоторая постоянная, для определенности, скажем, большая 1. Более того, для простоты рассуждений мы будем предполагать, что M больше любой константы, встречающейся в выражении (7).

Известно, что $i^n \operatorname{erfc} 0 = 1/2^n \cdot \Gamma(n/2+1)$, где $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$, поэтому

$$i^{2n} \operatorname{erfc} 0 = \frac{1}{2^{2n} n!}$$

Таким образом, подставляя значение $i^{2n} \operatorname{erfc} 0$, ограничения для ϕ_k и p_k в (7), с учетом $M \geq (2r)^2$, $M \geq h_1$ и $M \geq 1/a$ получаем

$$\begin{aligned}
F(t) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2a} \cdot \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{k} (2r)^{2i} C_{k+i}^{2i} M^{k-i} + 2 \sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i+1} C_{k+i}^{2i+1} M^{k-i} \right) + \\
&+ h_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2} \cdot \frac{1}{k!} \left(2 \sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i} C_{k+i-1}^{2i} M^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (2r)^{2i+1} C_{k+i}^{2i+1} M^{k-i-1} \right) \leq \\
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^{k} C_{k+i}^{2i} M^i M^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{2i+1} M^{i+1} M^{k-i} \right) + \\
&+ M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{2i} M^i M^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{2i+1} M^{i+1} M^{k-i-1} \right) \leq \\
&\leq M^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^{k} C_{k+i}^{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{2i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i}^{2i+1} \right) \leq \\
&\leq M^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} \cdot 4 \cdot 2^{2k},
\end{aligned}$$

так как каждая из четырех сумм заведомо меньше, чем $\sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i = 2^{2k}$. Очевидно, что полученный мажорантный ряд сходится.

Решение задачи

Решение задачи (1)–(3) будем искать в следующем виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\sqrt{t}\right)^k \left(i^k \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + (-1)^k \, i^k \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right), \tag{8}$$

где $i^k \operatorname{erfc}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{k!} \displaystyle\int_0^{\infty} s^k e^{-(s+x)^2} \, ds$ — функции Хартри, $k \geq 0$.

Заметим, что представление решения в виде (8) возможно, если граница определена многочленом, а граничные функции разлагаются в ряд Тейлора по целым степеням.

Известно, что функции Хартри дифференцируемы и справедливы равенства

$$\left(i^0 \operatorname{erfc} x\right)' = e^{-x^2}; \quad \left(i^n \operatorname{erfc} x\right)' = -i^{n-1} \operatorname{erfc} x \ \text{ для всех } n \geq 1. \tag{9}$$

Дифференцируя (8), получаем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(\sqrt{t})^{k-1}}{2a} \left(i^{k-1} \operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2a\sqrt{t}} \right) + (-1)^{k-1} \, i^{k-1} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right). \tag{10}$$

Тогда в силу условия $F(t) = \left. \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x} + h_1 u \right) \right|_{x=0}$ имеем

$$F(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \frac{t^k}{2a} \cdot 2 \cdot i^{2k} \operatorname{erfc} 0 + h_1 \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} t^k \cdot 2 \cdot i^{2k} \operatorname{erfc} 0. \tag{11}$$

Теперь, исходя из условий (2) и (3), найдем коэффициенты A_k. Из (2) и (8) получаем, что

$$\Phi(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\sqrt{t}\right)^k \left(i^k \operatorname{erfc}\left(-\frac{h\sqrt{t}}{2a}\right) + (-1)^k i^k \operatorname{erfc}\left(\frac{h\sqrt{t}}{2a}\right)\right). \tag{12}$$

С. Н. Хариным в работе [1] была доказана следующая формула:

$$i^k \operatorname{erfc}(-x) + (-1)^k i^k \operatorname{erfc}(x) \;=\; \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{x^{k-2m}}{2^{2m-1} m!(k-2m)!}. \tag{13}$$

После подстановки (13) и (5) в уравнение (12), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_k t^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\sum_{m=0}^{[k/2]} \left(\frac{h}{2a}\right)^{k-2m} \cdot \frac{t^{k-m}}{2^{2m-1} m!(k-2m)!}\right). \tag{14}$$

Учитывая (2), условие (3) преобразуется в следующее:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} = \Psi(t) + C \cdot h - h_2 \cdot \Phi(t). \tag{15}$$

Тогда, принимая во внимание разложения (5) и обозначения (6) и подставляя (10) в (15), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k t^k}{k!} \;=\; 2a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{1}{2a} \left(\sum_{m=0}^{[(k-1)/2]} \left(\frac{h}{2a}\right)^{k-1-2m} \cdot \frac{t^{k-1-m}}{2^{2m-1} m!(k-1-2m)!}\right). \tag{16}$$

Приведем подобные (при одинаковых степенях t) в равенствах (14) и (16) соответственно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n t^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\sum_{k=n}^{2n} A_k \left(\frac{h}{2a}\right)^{2n-k} \cdot \frac{1}{2^{2(k-n)-1}(k-n)!(2n-k)!}\right), \tag{17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n t^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\sum_{k=n}^{2n} A_{k+1} \left(\frac{h}{2a}\right)^{2n-k} \cdot \frac{1}{2^{2(k-n)-1}(k-n)!(2n-k)!}\right). \tag{18}$$

Для упрощения записи обозначим $h/2a$ как r. Далее, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t в равенствах (17) и (18), то получим следующие системы линейных уравнений:

$$\text{при } t^0 \;:\; \begin{cases} 2A_0 &= \phi_0, \\ 2A_1 &= p_0 \end{cases}$$

$$\text{при } t^1 \;:\; \begin{cases} r^1 A_1/2^{-1} + r^0 A_2/2^1 &= \phi_1, \\ r^1 A_2/2^{-1} + r^0 A_3/2^1 &= p_1, \end{cases}$$

$$\text{при } t^2 \;:\; \begin{cases} r^2 A_2/(2^{-1}\cdot 0!\cdot 2!) + r^1 A_3/(2^1 \cdot 1! \cdot 1!) + r^0 A_4/(2^3 \cdot 2! \cdot 0!) &= \phi_2/2!, \\ r^2 A_3/(2^{-1}\cdot 0!\cdot 2!) + r^1 A_4/(2^1 \cdot 1! \cdot 1!) + r^0 A_5/(2^3 \cdot 2! \cdot 0!) &= p_2/2!. \end{cases}$$

Если обе части умножить на $n!$, то уравнения при t^n будут иметь следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n+k} \cdot C_n^k \cdot \frac{r^{n-k}}{2^{2k-1}} \;=\; \phi_n, \tag{19}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n+k+1} \cdot C_n^k \cdot \frac{r^{n-k}}{2^{2k-1}} \;=\; p_n. \tag{20}$$

Очевидно, что $A_0 = \phi_0/2$, $A_1 = p_0/2$. Докажем, что

$$A_{2n} = 4^{n-1}\left(2\sum_{i=0}^{n-1}(2r)^{2i}C_{n+i-1}^{2i}\phi_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1}(2r)^{2i+1}C_{n+i}^{2i+1}p_{n-i-1}\right), \quad (21)$$

$$A_{2n+1} = \frac{4^n}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}(2r)^{2i}C_{n+i}^{2i}p_{n-i} - 2\sum_{i=0}^{n-1}(2r)^{2i+1}C_{n+i}^{2i+1}\phi_{n-i}\right). \quad (22)$$

После подстановки (21) и (22) в уравнение (11) мы получим искомый ответ (7).

Доказательство формул (21) и (22)

Для проверки подставим (21),(22) в уравнения (19) и (20). Для начала проверим уравнение (19) для четного n:

$$\begin{aligned}\phi_{2n} = & \sum_{k=0}^{n}4^{n+k-1}\left(2\sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i}C_{n+k+i-1}^{2i}\phi_{n+k-i} - \sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i+1}C_{n+k+i}^{2i+1}p_{n+k-i-1}\right)\cdot \\ & \cdot C_{2n}^{2k}\frac{r^{2n-2k}}{2^{4k-1}} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{4^{n+k}}{2}\left(\sum_{i=0}^{n+k}(2r)^{2i}C_{n+k+i}^{2i}p_{n+k-i} - 2\sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i+1}C_{n+k+i}^{2i+1}\phi_{n+k-i}\right)\cdot \\ & \cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot\frac{r^{2n-2k-1}}{2^{4k+1}}.\end{aligned}$$

После упрощения получим

$$\begin{aligned}\phi_{2n} = & \sum_{k=0}^{n}\frac{(2r)^{2n-2k}}{2}\cdot C_{2n}^{2k}\cdot\left(2\sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i}C_{n+k+i-1}^{2i}\phi_{n+k-i} - \sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i+1}C_{n+k+i}^{2i+1}p_{n+k-i-1}\right) + \\ + & \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2r)^{2n-2k-1}}{2}\cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n+k}(2r)^{2i}C_{n+k+i}^{2i}p_{n+k-i} - 2\sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i+1}C_{n+k+i}^{2i+1}\phi_{n+k-i}\right).\end{aligned}$$

Приведем подобные в правой части для ϕ_{n+m} и p_{n+m}, где $0 \le m < n$, то есть $i = k - m$.

$$\begin{aligned}\phi_{n+m} \ : \ & \sum_{k=m}^{n}\frac{(2r)^{2n-2k}}{2}\cdot C_{2n}^{2k}\cdot\left(2(2r)^{2(k-m)}C_{n+k+k-m-1}^{2(k-m)}\phi_{n+m}\right) - \\ - & \sum_{k=m}^{n-1}\frac{(2r)^{2n-2k-1}}{2}\cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot\left(2(2r)^{2(k-m)+1}C_{n+k+k-m}^{2(k-m)+1}\phi_{n+m}\right) = \\ = & (2r)^{2n-2m}\phi_{n+m}\left(\sum_{k=m}^{n}C_{n+2k-m-1}^{2(k-m)}\cdot C_{2n}^{2k} - \sum_{k=m}^{n-1}C_{n+2k-m}^{2(k-m)+1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\right) = \\ = & (2r)^{2n-2m}\phi_{n+m}\cdot\sum_{k=2m}^{2n}(-1)^k C_{n+k-m-1}^{k-2m}\cdot C_{2n}^{k} = 0,\end{aligned}$$

так как последняя сумма является функцией $P_2(n, m+1, 2m)$ из леммы 2 ниже по тексту, которая равна нулю, если $0 \le m < n$. Очевидно, что коэффициент при ϕ_{2n} равен 1.

Ниже для первой суммы $i = k - m$, а для второй суммы $i = k - m - 1$:

$$\begin{aligned} p_{n+m} \quad &: \quad \frac{(2r)^{2n-2m-1}}{2} p_{n+m} \left(\sum_{k=m}^{n-1} C_{n+2k-m}^{2(k-m)} \cdot C_{2n}^{2k+1} - \sum_{k=m+1}^{n} C_{n+2k-m-1}^{2(k-m)-1} \cdot C_{2n}^{2k} \right) = \\ &= \quad -\frac{(2r)^{2n-2m-1}}{2} p_{n+m} \sum_{k=2m+1}^{2n} (-1)^k C_{n+k-m-1}^{k-2m-1} \cdot C_{2n}^{k} = 0, \end{aligned}$$

так как последняя сумма является функцией $P_2(n, m+1, 2m+1)$, которая равна 0.

Теперь приведем подобные для ϕ_m и p_m, где $0 \le m < n$, то есть $i = n + k - m$.

$$\begin{aligned} \phi_m \quad &: \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(2r)^{2n-2k}}{2} \cdot C_{2n}^{2k} \cdot \left(2(2r)^{2(n+k-m)} C_{2n+2k-m-1}^{2(n+k-m)} \phi_m \right) - \\ &- \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2r)^{2n-2k-1}}{2} \cdot C_{2n}^{2k+1} \cdot \left(2(2r)^{2(n+k-m)+1} C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)+1} \phi_m \right) = \\ &= \quad (2r)^{4n-2m} \phi_m \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+2k-m-1}^{2(n+k-m)} \cdot C_{2n}^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)+1} \cdot C_{2n}^{2k+1} \right) = \\ &= \quad (2r)^{4n-2m} \phi_m \cdot \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n+k-m-1}^{2n+k-2m} \cdot C_{2n}^{k} = 0, \text{ так как} \end{aligned}$$

последняя сумма является функцией $R_0(2n, m+1, 2m)$ из леммы 3, равной нулю.

Рассмотрим последний вариант коэффициентов для первого случая для коэффициентов при p_m, где $0 \le m < n$. Ниже для первой суммы $i = n + k - m$, а для второй суммы $i = n + k - m - 1$.

$$\begin{aligned} p_m \quad &: \quad \frac{(2r)^{4n-2m-1}}{2} p_m \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)} \cdot C_{2n}^{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} C_{2n+2k-m-1}^{2(n+k-m)-1} \cdot C_{2n}^{2k} \right) = \\ &= \quad -\frac{(2r)^{4n-2m-1}}{2} p_m \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n+k-m-1}^{2n+k-2m-1} \cdot C_{2n}^{k} = 0, \end{aligned}$$

так как последняя сумма является функцией $R_0(2n, m+1, 2m+1)$, которая равна 0.

Для нечетного n уравнение (19) проверяется аналогичным способом.

Настала очередь проверить уравнение (20) для четного n. Имеем

$$\begin{aligned} p_{2n} = \quad & \sum_{k=0}^{n} A_{2n+2k+1} \cdot C_{2n}^{2k} \cdot \frac{r^{2n-2k}}{2^{4k-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} A_{2n+2k+2} \cdot C_{2n}^{2k+1} \cdot \frac{r^{2n-2k-1}}{2^{4k+1}} = \\ = \quad & \sum_{k=0}^{n} \frac{4^{n+k}}{2} \left(\sum_{i=0}^{n+k} (2r)^{2i} C_{n+k+i}^{2i} p_{n+k-i} \quad - 2 \sum_{i=0}^{n+k-1} (2r)^{2i+1} C_{n+k+i}^{2i+1} \phi_{n+k-i} \right) \cdot C_{2n}^{2k} \cdot \frac{r^{2n-2k}}{2^{4k-1}} + \\ + \quad & \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n+k} \left(2 \sum_{i=0}^{n+k} (2r)^{2i} C_{n+k+i}^{2i} \phi_{n+k+1-i} - \sum_{i=0}^{n+k} (2r)^{2i+1} C_{n+k+1+i}^{2i+1} p_{n+k-i} \right) \cdot C_{2n}^{2k+1} \cdot \frac{r^{2n-2k-1}}{2^{4k+1}}. \end{aligned}$$

Упростим правую часть. Получим

$$p_{2n} = \sum_{k=0}^{n}(2r)^{2n-2k}\cdot C_{2n}^{2k}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n+k}(2r)^{2i}C_{n+k+i}^{2i}p_{n+k-i} \quad -2\sum_{i=0}^{n+k-1}(2r)^{2i+1}C_{n+k+i}^{2i+1}\phi_{n+k-i}\right)+$$
$$+ \quad \sum_{k=0}^{n-1}(2r)^{2n-2k-1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot\left(2\sum_{i=0}^{n+k}(2r)^{2i}C_{n+k+i}^{2i}\phi_{n+k+1-i}-\sum_{i=0}^{n+k}(2r)^{2i+1}C_{n+k+1+i}^{2i+1}p_{n+k-i}\right).$$

Требуется доказать, что левая часть данного равенства тождественно равна правой. Сразу же можно вычислить, что подобные при p_{2n} после приведения дают 1. Докажем, что при остальных p_i и ϕ_i коэффициенты равны 0.

Приведем подобные для ϕ_{n+m} и p_{n+m}, где $0\le m<n$. Имеем

$$\begin{aligned}
\phi_{n+m} \quad : \quad & -2\sum_{k=m}^{n}(2r)^{2n-2m+1}\cdot C_{2n}^{2k}\cdot C_{n+2k-m}^{2(k-m)+1}\phi_{n+m}+\\
+ \quad & 2\sum_{k=m-1}^{n-1}(2r)^{2n-2m+1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot C_{n+2k+1-m}^{2(k-m)+2}\phi_{n+m}=\\
= \quad & 2\cdot(2r)^{2n-2m+1}\phi_{n+m}\left(\sum_{k=m-1}^{n-1}C_{n+2k+1-m}^{2(k-m)+2}\cdot C_{2n}^{2k+1}-\sum_{k=m}^{n}C_{n+2k-m}^{2(k-m)+1}\cdot C_{2n}^{2k}\right)=\\
= \quad & 2\cdot(2r)^{2n-2m+1}\phi_{n+m}\cdot\sum_{k=2m-1}^{2n}(-1)^kC_{n+k-m}^{k-2m+1}\cdot C_{2n}^{k}=\\
= \quad & 2\cdot(2r)^{2n-2m+1}\phi_{n+m}\cdot P_2(n,m,2m-1)=0.
\end{aligned}$$

Соберем коэффициенты для p_{n+m}. Получаем

$$\begin{aligned}
p_{n+m} \quad : \quad & (2r)^{2n-2m}p_{n+m}\left(\sum_{k=m}^{n}C_{n+2k-m}^{2(k-m)}\cdot C_{2n}^{2k}-\sum_{k=m}^{n-1}C_{n+2k+1-m}^{2(k-m)+1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\right)=\\
= \quad & (2r)^{2n-2m}p_{n+m}\sum_{k=2m}^{2n}(-1)^kC_{n+k-m}^{k-2m}\cdot C_{2n}^{k}=(2r)^{2n-2m}p_{n+m}\cdot P_2(n,m,2m)=0.
\end{aligned}$$

Осталось привести подобные для ϕ_m и p_m, где $0\le m<n$. Имеем

$$\begin{aligned}
\phi_m \quad : \quad & -2\sum_{k=0}^{n}(2r)^{2n-2k}\cdot C_{2n}^{2k}\cdot\left((2r)^{2(n+k-m)+1}C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)+1}\phi_m\right)+\\
+ \quad & 2\sum_{k=0}^{n-1}(2r)^{2n-2k-1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot\left((2r)^{2(n+k-m)+2}C_{2n+2k-m+1}^{2(n+k-m)+2}\phi_m\right)=\\
= \quad & -2(2r)^{4n-2m+1}\phi_m\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)+1}\cdot C_{2n}^{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+2k+1-m}^{2(n+k-m+1)}\cdot C_{2n}^{2k+1}\right)=\\
= \quad & -2(2r)^{4n-2m+1}\phi_m\cdot\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kC_{2n+k-m}^{2n+k-2m+1}\cdot C_{2n}^{k}=0,
\end{aligned}$$

так как последнее равенство есть не что иное, как $R_0(2n,m,2m-1)$.

$$\begin{aligned}
p_m \quad : \quad & \sum_{k=0}^{n}(2r)^{2n-2k}\cdot C_{2n}^{2k}\cdot\Big((2r)^{2(n+k-m)}C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)}p_m\Big)-\\
- \quad & \sum_{k=0}^{n-1}(2r)^{2n-2k-1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\cdot\Big((2r)^{2(n+k-m)+1}C_{2n+2k-m+1}^{2(n+k-m)+1}\phi_m\Big)=\\
= \quad & (2r)^{4n-2m}\phi_m\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n+2k-m}^{2(n+k-m)}\cdot C_{2n}^{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+2k+1-m}^{2(n+k-m)+1}\cdot C_{2n}^{2k+1}\right)=\\
= \quad & (2r)^{4n-2m}\phi_m\cdot\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{2n+k-m}^{2n+k-2m}\cdot C_{2n}^{k}=0,
\end{aligned}$$

так как последнее равенство есть не что иное, как $R_0(2n,m,2m)$.

При нечетном n доказательство подобное. Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи и доказали корректность найденного решения.

Некоторые комбинаторные вычисления

Лемма 1. Функция $P_0(n,r)$, определенная для всех $n\geq 1$ и всех $r<n$ следующим образом:

$$P_0(n,r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^k\cdot C_k^r\cdot C_n^k,$$

тождественно равна 0.

Доказательство. Вспомним, что $C_n^k\cdot C_k^r=C_n^r\cdot C_{n-r}^{k-r}$. Тогда

$$\begin{aligned}
P_0(n,r) \;&=\; \sum_{k=r}^{n}(-1)^k\cdot C_k^r\cdot C_n^k=\sum_{k=r}^{n}(-1)^k\cdot C_n^r\cdot C_{n-r}^{k-r}=\\
&=\; C_n^r\cdot\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^{k-r}\cdot C_{n-r}^{k}=C_n^r\cdot(1-1)^{n-r}=0.
\end{aligned}$$

Лемма 2. Функции $P_1(n,s,r)$ и $P_2(n,s,r)$, определенные для каждого $n\geq 1$ и каждых $r<s\leq n$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_1(n,s,r) \;&=\; \sum_{k=r}^{2n+1}(-1)^k\cdot C_{n+k-s}^{k-r}\cdot C_{2n+1}^{k},\\
P_2(n,s,r) \;&=\; \sum_{k=r}^{2n}(-1)^k\cdot C_{n+k-s}^{k-r}\cdot C_{2n}^{k},
\end{aligned}$$

тождественно равны 0.

Доказательство. В силу тождества Паскаля $C_{n+k-s}^{k-r}=C_{n+k-s-1}^{k-r}+C_{n+k-s-1}^{k-r-1}$, а посему для $i=1,2$

$$P_i(n,s,r)=P_i(n,s+1,r)+P_i(n,s+1,r+1).$$

Применяя последнее равенство многократно, получаем

$$\begin{aligned}
P_2(n,n-s,n-s-r) \;&=\; \sum_{i=0}^{s}C_s^i\cdot P_2(n,n,n-i-r)=\sum_{i=0}^{s}C_s^i\cdot P_0(2n,2n-i-r)=0,\\
P_1(n,n-s,n-s-r) \;&=\; \sum_{i=0}^{s}C_s^i\cdot P_0(2n+1,2n+1-i-r)=0,
\end{aligned}$$

где функция $P_0(n, r)$ взята из леммы 1.

Лемма 3. Функция $R_0(n, s, r)$, определенная для всех $n \geq s \geq 1$ и всех $r \in [s, n]$ следующим образом:

$$R_0(n, s, r) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_{n+k-s}^{n+k-r} \cdot C_n^k,$$

тождественно равна 0.

Доказательство. Заметим, что $R_0(n, s, s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0$. Кроме того, как и в лемме 2, верно, что $R_0(n, s, r) = R_0(n, s+1, r) + R_0(n, s+1, r+1)$. Применяя данное тождество многократно, получаем слагаемые типа $R_0(n, s, s)$, которые равны 0.

Цитированная литература

1. **С. Н. Харин.** // Сб. "Дифференциальные уравнения и их приложения". Наука, Алма-Ата, 1987. С.45.

2. **К. С. Искакова.** Обратные задачи Стефановского типа в теории электродуговых процессов. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Алматы. 1994.

Поступила в редакцию 10.12.2004 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 85 — 91*

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТОННЕЛЯ

В. Н. Украинец

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125

Используя решение задачи о действии на упругое полупространство произвольно приложенной нагрузки, движущейся вдоль параллельной его свободной поверхности оси круговой цилиндрической полости, исследуется влияние земной поверхности на НДС поверхности выработки при разной глубине заложения тоннеля. Полагается, что функция нагрузки может быть разложена в ряд Фурье по угловой координате и интеграл Фурье по осевой координате. Движение полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости в потенциалах Ламе, для решения которых предложен метод интегрального преобразования Фурье. При скоростях движущейся нагрузки не достигающих скорости волны Релея, получено стационарное решение задачи. Результаты расчетов представлены в виде эпюр компонент НДС контура выработки, построенных для тоннелей разной глубины заложения при действии движущейся с постоянной скоростью ступенчатой осесимметричной нагрузки.

Проектирование гидротехнических и транспортных тоннелей в условиях городской застройки приводит к проблеме определения такой глубины их заложения, при которой вибрация земной поверхности, как следствие движущихся по тоннелям эксплуатационных нагрузок, не будет оказывать неблагоприятного воздействия на людей и близлежащие здания и сооружения. Одной из модельных задач для таких исследований является задача для упругого полупространства, ослабленного цилиндрической полостью. В отличие от аналогичной задачи для упругого пространства, моделирующей заглубленный тоннель, данная задача является более сложной, так как возникает необходимость учитывать отражаемые границей полупространства волны. Исследованию указанной проблемы посвящена статья [1], где рассматривалась периодическая задача. В настоящей работе рассматривается задача упругого полупространства в случае воздействия апериодических нагрузок, бегущих вдоль полости с постоянной скоростью. Полагается, что функция нагрузки может быть разложена в ряд Фурье по угловой координате и интеграл Фурье по осевой координате. Используя полученное аналитическое решение задачи, исследуется и приводится сравнительный анализ НДС тоннеля при разной глубине его заложения в случае действия ступенчатой осесимметричной радиальной нагрузки.

Keywords: *elastic semispace, cylindrical cavity, moving load, Lame potential, Fourie transformation*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H05

1.Постановка и решение задачи. Используя для исследований модельный подход, представим тоннель как бесконечную круговую цилиндрическую полость радиуса, R расположенную в упругом однородном и изотропном полупространстве с параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ.

Пусть в декартовой системе координат ось Z совпадает с осью полости, параллельной свободной от нагрузок плоской границе полупространства, а ось X перпендикулярна к этой границе: $x \leq h$, где h – расстояние от оси полости до границы полупространства (земной поверхности). В направлении оси полости по её внутренней поверхности движется с постоянной скоростью c нагрузка P:

$$\sigma_{rj}\,|_{r=R} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \tag{1}$$

где σ_{rj} – компоненты тензора напряжений в среде, $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки P в подвижной цилиндрической системе координат $(r, \theta, \eta = z - ct)$.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x = h$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \tag{2}$$

Движение полупространства описывается динамическими уравнениями теории упругости

$$\left(\frac{1}{M_{\mathrm{P}}^2} - \frac{1}{M_S^2}\right) \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{M_S^2}\nabla^2\mathbf{u} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\eta^2}, \tag{3}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор смещения упругой среды; $M_{\mathrm{P}} = c/c_P, M_S = c/c_S$ – числа Маха; $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения волн расширения - сжатия и сдвига в среде, ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа.

Преобразуем уравнение (3), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе [2]:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{rot}\Psi. \tag{4}$$

Потенциал Ψ можно представить в виде $\Psi{=}\varphi_2\mathbf{e}_\eta{+}\operatorname{rot}(\varphi_3\mathbf{e}_\eta)$, где $\mathbf{e}_\eta$ – орт оси η.

Из (3) и (4) следует, что потенциалы φ_j удовлетворяют видоизмененным волновым уравнениям

$$\nabla^2\varphi_{\mathrm{j}} = M_{\mathrm{j}}^2\frac{\partial^2\varphi_{\mathrm{j}}}{\partial\eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Здесь $M_1 = M_P$, $M_2 = M_3 = M_S$.

Применив к (5) преобразование Фурье по η, находим

$$\nabla_2^2\varphi_j^* - m_j^2\xi^2\varphi_j^* = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где $m_j^2 = 1 - M_j^2, m_1 = m_P$, $m_2 = m_3 = m_S$, $\varphi_j^*(r, \theta, \xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(r, \theta, \eta)\, e^{-i\xi\eta} d\eta$.

Выразив компоненты напряженно-деформированного состояния среды через потенциалы Ламе и применив преобразование Фурье по η, можно получить выражения для трансформант перемещений u_i^* и напряжений σ_{ij}^* в декартовой $(i = x, y, \eta,\ j = x, y, \eta)$ и цилиндрической $(i = r, \theta, \eta,\ j = r, \theta, \eta)$ системах координат, как функции от φ_j^*.

Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полость среде. В этом случае $M_S < 1\,(m_S > 0)$ и решения уравнений (6) можно представить в виде

$$\varphi_j^* = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \tag{7}$$

где $\Phi_j^{(1)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r)\, e^{in\theta}$, $\Phi_j^{(2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta$.

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = m_j \xi$; $g_j(\xi,\zeta)$, a_{nj} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [1], представление потенциалов в форме (7) приводит к следующим выражениям для трансформант потенциалов в декартовой системе координат:

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + g_j(\xi,\zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \tag{8}$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}$, $\Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j}\right)^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся переписанными для трансформант граничными условиями (2) с учётом (8). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая в силу произвольности y их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем $g_i(\xi,\zeta)$ через коэффициенты a_{nj}:

$$g_j(\xi,\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk}\Phi_{nk}. \tag{9}$$

Здесь

$$\Delta = \left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2 - 4\rho_0^2 \sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{11} = \frac{\Delta}{2\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}} - \frac{\left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2}{\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}}, \quad \Delta_{12} = -2\zeta(2\rho_0^2 - \beta^2), \Delta_{13} = 2\xi\left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{21} = -\frac{M_S^2}{m_S^2}\Delta_{12}, \Delta_{22} = -\frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23} = -4\xi\zeta\frac{M_S^2}{m_S^2}\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{31} = -\frac{\Delta_{13}}{m_S^2 \xi^2}, \quad \Delta_{32} = \frac{\Delta_{23}}{\beta^2}, \quad \Delta_{33} = -\frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}} + \frac{\left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2}{\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}},$$

$$\alpha = M_P\xi, \quad \beta = M_S\xi, \quad \rho_0^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \Delta_* = \left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2 - 4\rho_{0*}^2\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$

$$\rho_{0*}^2 = \xi^2 + \left(2/m_S^2 - 1\right)\zeta^2.$$

Заметим, что $\Delta(\rho_0)$ – определитель (функция) Релея, который, как хорошо известно, имеет два действительных корня: $\pm\rho_R = \pm\xi M_R$. Здесь $M_R = c/c_R$ – число Маха, c_R – скорость поверхностной волны Релея ($c_R < c_S$) в упругом полупространстве. Поскольку соответствующие $\pm\zeta_R = \pm\xi\sqrt{M_R^2 - 1}$, то $\Delta(\rho_0)$ не обращается в нуль на действительной оси, если $M_R < 1$ или $c < c_R$ (дорелеевские скорости). В этом случае условия существования преобразования Фурье выполняются и для вычислений интегралов (8) с учётом (9) можно воспользоваться одним из численных методов интегрирования, предварительно определив коэффициенты a_{nj}.

Для дорелеевской скорости движущейся нагрузки соотношения (8) перепишем в виде:

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^{3} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk}\Phi_{nk} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \tag{10}$$

Подставляя (10) в выражения для трансформант перемещений и напряжений в декартовых координатах, получим

$$u_l^* = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left(\mathrm{T}_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + \mathrm{T}_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{iy\varsigma} d\zeta, \tag{11}$$

$$\frac{\sigma^*_{lm}}{\mu} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left(S^{(1)}_{lmj} F^{(1)}_{nj} + S^{(2)}_{lmj} F^{(2)}_{nj} \right) e^{iy\varsigma} d\zeta.$$

Здесь $l = x, y, \eta$, $m = x, y, \eta$,

$$F^{(1)}_{nj} = \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_n a_{nj}, F^{(2)}_{nj} = e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^{3} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_n a_{nk} \Phi_{nk},$$

$$T^{(1)}_{x1} = -T^{(2)}_{x1} = -f_1, \quad T^{(1)}_{x2} = T^{(2)}_{x2} = -\zeta, \quad T^{(1)}_{x3} = -T^{(2)}_{x3} = f_3\xi,$$

$$T^{(1)}_{y1} = T^{(2)}_{y1} = i\zeta, \quad T^{(1)}_{y2} = -T^{(2)}_{y2} = if_2, \quad T^{(1)}_{y3} = T^{(2)}_{y3} = -i\xi\zeta,$$

$$T^{(1)}_{\eta 1} = T^{(2)}_{\eta 1} = i\xi, \quad T^{(1)}_{\eta 2} = T^{(2)}_{\eta 2} = 0, \quad T^{(1)}_{\eta 3} = T^{(2)}_{\eta 3} = -im_S^2\xi^2,$$

$$S^{(1)}_{xx1} = S^{(2)}_{xx1} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_P^2), \quad S^{(1)}_{xx2} = -S^{(2)}_{xx2} = 2\zeta f_2, \quad S^{(1)}_{xx3} = S^{(2)}_{xx3} = -2f_3^2\xi,$$

$$S^{(1)}_{yy1} = S^{(2)}_{yy1} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_P^2), \quad S^{(1)}_{yy2} = -S^{(2)}_{yy2} = -2f_2\zeta, \quad S^{(1)}_{yy3} = S^{(2)}_{yy3} = 2\xi\zeta^2,$$

$$S^{(1)}_{\eta\eta 1} = S^{(2)}_{\eta\eta 1} = n_2 - 2n_1, \quad S^{(1)}_{\eta\eta 2} = S^{(2)}_{\eta\eta 2} = 0, \quad S^{(1)}_{\eta\eta 3} = S^{(2)}_{\eta\eta 3} = 2m_S^2\xi^3,$$

$$S^{(1)}_{xy1} = -S^{(2)}_{xy1} = -2f_1\zeta i, \quad S^{(1)}_{xy2} = S^{(2)}_{xy2} = -(f_2^2 + \zeta^2)i, \quad S^{(1)}_{xy3} = -S^{(2)}_{xy3} = 2f_3 i\xi\zeta,$$

$$S^{(1)}_{\eta y1} = S^{(2)}_{\eta y1} = -2\xi\zeta, \quad S^{(1)}_{\eta y2} = -S^{(2)}_{\eta y2} = -\xi f_2, \quad S^{(1)}_{\eta y3} = S^{(2)}_{\eta y3} = n_2\zeta,$$

$$S^{(1)}_{x\eta 1} = -S^{(2)}_{x\eta 1} = -2f_1 i\xi, \quad S^{(1)}_{x\eta 2} = S^{(2)}_{x\eta 2} = -\xi\zeta i, \quad S^{(1)}_{x\eta 3} = -S^{(2)}_{x\eta 3} = n_2 f_3 i,$$

$$n_1 = (1 + m_P^2)\xi^2, \quad n_2 = (1 + m_S^2)\xi^2.$$

Представим φ^*_j в цилиндрической системе координат. Воспользовавшись разложением [3] $\exp\left(ikr\cos\theta\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n\left(kr\right) e^{in\theta}$, находим, что

$$\exp\left(iy\varsigma + (x-h)\sqrt{\varsigma^2 + k^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(kr) e^{in\theta} \left(\frac{\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 + k^2}}{k} \right)^n \exp\left(-h\sqrt{\varsigma^2 + k^2}\right).$$

Тогда $\varphi^*_j = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_j r) + I_n(k_j r) \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi,\zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}$. Подставляя в последнее выражение из (9) $g_j(\xi,\zeta)$, получим

$$\varphi^*_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta}, \tag{12}$$

где $b_{nj} = \sum\limits_{k=1}^{3} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_{mk} A^{mk}_{nj}$, $A^{mk}_{nj} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \Phi_{mk} \Phi_{nj} e^{-h(f_k + f_j)} d\zeta.$

Подставляя (12) в выражения для трансформант НДС среды в цилиндрических координатах, получим

$$u^*_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left[T^{(1)}_{lj} \left(K_n(k_j r)\right) a_{nj} + T^{(2)}_{lj} \left(I_n(k_j r)\right) b_{nj} \right] e^{in\theta}, \tag{13}$$

$$\frac{\sigma^*_{lm}}{\mu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left[S^{(1)}_{lmj} \left(K_n(k_j r)\right) a_{nj} + S^{(2)}_{lmj} \left(I_n(k_j r)\right) b_{nj} \right] e^{in\theta}, \quad l = r,\theta,\eta, \quad m = r,\theta,\eta.$$

Здесь $T_{r1}^{(1)} = k_1 K_n' (k_1 r)$, $T_{r2}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n (k_2 r)$, $T_{r3}^{(1)} = -\xi k_3 K_n' (k_3 r)$,

$$T_{\theta 1}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n (k_1 r) \cdot i, \quad T_{\theta 2}^{(1)} = -k_2 K_n' (k_2 r) \cdot i, \quad T_{\theta 3}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n (k_3 r) \cdot i,$$

$$T_{\eta 1}^{(1)} = \xi K_n (k_1 r) \cdot i, \quad T_{\eta 2}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta 3}^{(1)} = -k_3^2 K_n (k_3 r) \cdot i,$$

$$S_{rr1}^{(1)} = 2 \left(k_1^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n (k_1 r) - \frac{2k_1 K_n' (k_1 r)}{r}, \quad S_{rr2}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n (k_2 r) - \frac{2nk_2 K_n' (k_2 r)}{r},$$

$$S_{rr3}^{(1)} = -2\xi \left(k_3^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n (k_3 r) + \frac{2\xi k_3 K_n' (k_3 r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 1}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda M_P^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n (k_1 r) + \frac{2k_1 K_n' (k_1 r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 2}^{(1)} = -\frac{2nK_n (k_2 r)}{r^2} + \frac{2nk_2 K_n' (k_2 r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 3}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n (k_3 r)}{r^2} - \frac{2\xi k_3 K_n' (k_3 r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta 1}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda M_P^2}{2\mu} \right) K_n (k_1 r), S_{\eta\eta 2}^{(1)} = 0, S_{\eta\eta 3}^{(1)} = 2m_3^2 \xi^3 K_n (k_3 r),$$

$$S_{r\theta 1}^{(1)} = \left(-\frac{2nK_n (k_1 r)}{r^2} + \frac{2nk_1 K_n' (k_1 r)}{r} \right) \cdot i,$$

$$S_{r\theta 2}^{(1)} = \left(-\left(k_2^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n (k_2 r) + \frac{2k_2 K_n' (k_2 r)}{r} \right) \cdot i,$$

$$S_{r\theta 3}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n (k_3 r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_3 K_n' (k_3 r)}{r} \right) \cdot i, \quad S_{\theta\eta 1}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n (k_1 r)}{r},$$

$$S_{\theta\eta 2}^{(1)} = \xi k_2 K_n' (k_2 r), \quad S_{\theta\eta 3}^{(1)} = \frac{n\xi^2 \left(1 + m_3^2\right) K_n (k_3 r)}{r},$$

$$S_{r\eta 1}^{(1)} = 2\xi k_1 K_n' (k_1 r) \cdot i, \quad S_{r\eta 2}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n (k_2 r) \cdot i}{r}, \quad S_{r\eta 3}^{(1)} = -\xi^2 k_3 \left(1 + m_3^2\right) K_n' (k_3 r) \cdot i,$$

$K_{\mathrm{n}}' (kr) = \frac{dK_{\mathrm{n}}(kr)}{d(kr)}$, $T_{lj}^{(2)}$, $S_{lmj}^{(2)}$ получаются из $T_{lj}^{(1)}, S_{lmj}^{(1)}$ заменой $K_n (k_j r)$ на $I_n (k_j r)$.

Для определения коэффициентов a_{nj} воспользуемся граничными условиями (1), представив их в виде

$$\sigma_{rj}^* \big|_{r=R} = P_j^*(\theta, \xi), \quad j = r, \theta, \eta, \tag{14}$$

где $P_j^*(\theta, \xi) = p_j (\theta) p_j^* (\xi)$, $p_j (\theta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}$, $p_j^* (\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_j(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$, $j = r, \theta, \eta$. Подставляя в (14) соответствующие выражения из (13) и приравнивая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с определителем нормального типа:

$$\mu \sum_{j=1}^{3} \left[S_{rmj}^{(1)} \left(K_n(k_j R) \right) a_{nj} + S_{rmj}^{(2)} \left(I_n(k_j R) \right) b_{nj} \right] = P_{nm} p_m^* (\xi), \quad m = r, \theta, \eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{15}$$

После определения коэффициентов a_{nj}, применяя к (11) и (13) обратное преобразование Фурье, можно вычислить компоненты НДС полупространства в декартовой и цилиндрической системах координат. Окончательное решение будет зависеть от вида движущейся нагрузки.

При численной реализации задач для решения систем уравнений (15) удобно пользоваться методом последовательных отражений. Для этого представим φ_j^* в виде $\varphi_j^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Phi_j^{(k)}$, где $\Phi_j^{(2k)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}^{(2k)} K_n(k_j r) e^{in\theta}\,(k=0,1,2)$, назовем потенциалами волн, излучаемых полостью, а $\Phi_j^{(2k+1)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}^{(2k+1)} I_n(k_j r)\, e^{in\theta}\,(k=0,1,2)$ – потенциалами волн, отраженных границей полупространства.

С учетом этого граничные условия (15) можно представить в виде бесконечной системы уравнений блочно-диагонального типа с матрицами (3х3) вдоль главной диагонали:

$$\sum_{j=1}^{3} S_{rmj}^{(1)}\left(K_n(k_j R)\right) a_{nj}^{(2k)} = \begin{cases} P_{nm} p_m^*(\xi)/\mu, \; k=0, \\ \\ -\sum\limits_{\mathrm{j}=1}^{3} S_{rmj}^{(2)}\left(I_n(k_j R)\right) a_{nj}^{(2k-1)}, \; k \neq 0, \end{cases} \tag{16}$$

$m = r, \theta, \eta\,;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Коэффициенты $a_{nj}^{(2k-1)}$ определяются соотношением $a_{nj}^{(2k-1)} = \sum\limits_{l=1}^{3} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml}^{2(k-1)} A_{nj}^{ml}$.

Окончательно получим $a_{nj} = a_{nj}^{(0)} + a_{nj}^{(2)} + a_{nj}^{(4)} + ...$

Заметим, что, рассматривая граничные условия (16) только при $k=0$ и исключая из (7) $\Phi_j^{(2)}$, получим решение аналогичной задачи для упругого пространства.

2. Численные эксперименты. Для оценки влияния земной поверхности на НДС поверхности выработки рассмотрим круговой цилиндрический тоннель радиуса R = 1м в массиве алевролита ($\lambda = 1,688 \cdot 10^3$МПа, $\mu_a = 2,532 \cdot 10^3$МПа, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$кг/м^3, $c_P = 1643,4$м/с, $c_S = 1006,4$м/с, $c_R = 917$м/с) при воздействии движущейся с постоянной дорелеевской скоростью $c = 100$ м/с равномерно распределенной по участку длиной $2l = 0,4$ м поверхности выработки нормальной осесимметричной нагрузки давления интенсивностью P_1 . Начало координат фиксируем посередине участка приложения нагрузки. Подбирая P_1 таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения равнялась сосредоточенной кольцевой нагрузке интенсивностью P_0 , получим

$$p_r^*(\xi) = -P_0 \sin(\xi l)/(\xi l); \quad P_{0r} = 1, \mathrm{P}_{nr} = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2...$$

На рисунке приведены эпюры компонент НДС массива алевролита на контуре поперечного сечения выработки при разной глубине заложения тоннеля (кривая 1 соответствует $h/R = 2$, кривая 2 – $h/R = 4$, кривая 3 – $h/R = \infty$).

Из анализа результатов следует, что при глубине заложения $h = 2,0\,R$ характер изменения компонент НДС по контуру поперечного сечения выработки и их величины заметно отличаются от НДС контура заглубленного $(h/R = \infty)$ тоннеля. Если в случае заглубленного тоннеля u_R, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\eta\eta}$ не меняются по исследуемому контуру, а $u_\theta = 0$ во всех его точках, то при $h/R = 2$ наблюдается следующая картина. В верхней точке контура сечения выработки прогиб её поверхности максимален, а сжимающие осевые напряжения достигают максимального по абсолютной величине значения. Тангенциальное смещение этой точки, как и диаметрально ей противолежащей, равно нулю, а максимальные тангенциальные смещения испытывают точки контура при $\theta = \pm 45^0$. Наибольшие нормальные тангенциальные напряжения возникают в точках контура при $\theta = \pm 80^0$. При этом абсолютные величины компонент НДС контура в заглубленном тоннеле меньше, чем их экстремальные значения в тоннеле глубиной заложения $h = 2,0\,R$.

С увеличением глубины заложения в два раза ($h/$ R =4,0) происходит выравнивание напряжений и перемещений по контуру поперечного сечения выработки и компоненты НДС массива данного тоннеля в окрестности выработки практически не отличаются от одноименных компонент заглубленного тоннеля. То есть влияние земной поверхности на НДС массива алевролита в окрестности выработки при данной глубине заложения незначительно.

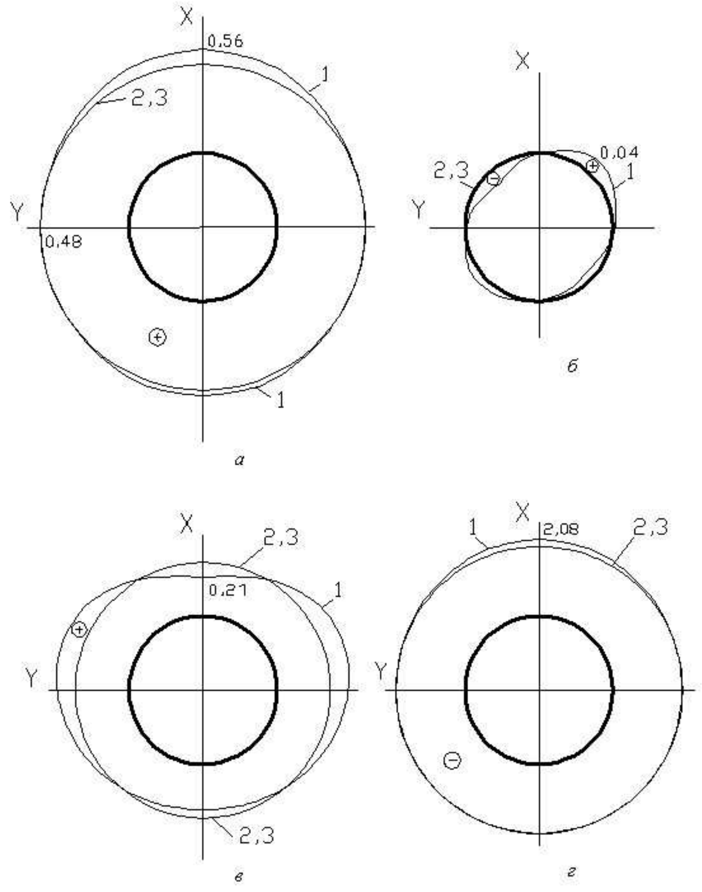

Рис: Эпюры перемещений и напряжений на контуре поперечного сечения выработки $(\eta = 0)$: $u_r\,\mu_a/P_0$ (а), $u_\theta\,\mu_a/P_0$ (б), $\sigma_{\theta\theta}/P_0$ (в), $\sigma_{\eta\eta}/P_0$ (г)

Цитированная литература

1. **Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н.** // Известия АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат. 1986. №5. С. 75-80.

2. **Новацкий В.** Теория упругости. М., 1975.

3. **Иванов Е.А.** Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, 1968.

Поступила в редакцию 20.02.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 92–95*

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 60 лет академику НАН Республики Казахстан, генеральному директору Центра физико-математических исследований, доктору физико-математических наук, профессору Кальменову Тынысбеку Шариповичу, одному из лидеров математики Казахстана.

Кальменов Т.Ш. родился 5 мая 1946 года. Он — выпускник Новосибирского государственного университета и представитель школы выдающегося ученого член-корр. АН СССР А.В.Бицадзе.

В 1983 году в МГУ им. М.В. Ломоносова он защитил докторскую диссертацию на тему: "О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов". В этой диссертации наряду со спектральной проблемой в задаче Трикоми исследована многомерная задача Дарбу с данными на поверхностях временного типа, установлены критерий самосопряженности регулярных краевых задач для модельных уравнений и критерий сильной разрешимости задачи Трикоми.

Кальменов Т.Ш. — известный организатор науки. Он совместно с М.Отелбаевым в 70–80 годы в КазГУ организовал научный семинар, в работе которого участвовали и докладывали свои результаты почти все математики нашей Республики, а также ученые из других стран.

На посту декана математического факультета КазГУ с 1985 по 1991 годы он уделял большое внимание развитию науки и создавал условия для научной работы.

В 1989г. был открыт межрегиональный (Казахстан, Туркменистан, Таджикистан, Кыргызстан) диссертационный Совет под председательством Кальменова Т.Ш.

В 2000 году в Шымкенте на базе ЮКГУ вновь был открыт межрегиональный диссертационный Совет (Узбекистан, Туркменистан, Казахстан) и крупный научный семинар с участием ведущих ученых Узбекистана.

В 1996 году под его непосредственным руководством в Шымкенте был проведен I съезд математиков РК. По его инициативе в КазХТИ были созданы новые факультеты по математическим специальностям и на работу приглашались ведущие математики.

Основными научными достижениями Кальменова Т.Ш. являются следующие.

В своих первых научных работах он получает неожиданные результаты — для уравнения

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + \alpha u = f$$

— необходимое и достаточное условие корректности всех классических задач — задачи Коши, задачи Гурса и Дарбу. Показывает, что в классе аналитических по переменной x решение вырождающегося гиперболического уравнения

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + b(y)u_y + c(y)u = f$$

определяется однозначно по данным только на одной из характеристик, и, в частным случае, при $k(y) = y^{2m}$, получает необходимое и достаточное условие разрешимости. Эти оригинальные результаты были получены им с помощью представления решения и из свойств гипергеометрических функций.

В 1976 году Т.Ш.Кальменову на основе установленного им принципа максимума удалось доказать существование собственной функции задачи Трикоми для уравнений смешанного типа. Это явилось решением крупной научной проблемы и началом нового перспективного научного направления — спектральной теории уравнения смешанного типа.

Им установлена неединственность регулярного решения первой задачи Дарбу и получен критерий (необходимые и достаточные условия) корректности классических задач Дарбу и Гурса для нехарактеристически вырождающегося гиперболического уравнения.

Найден критерий разрешимости задачи Коши с данными на характеристике в классе аналитических функций для нехарактеристически вырождающихся гиперболических уравнений.

Кальменовым Т.Ш. установлен критерий сильной разрешимости основных краевых задач для модельного уравнений смешанного типа.

Им было найдено явное решение многомерной задачи Дарбу для волнового уравнения с данными на временной поверхности. Построив функцию Грина для нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского, он для эллиптических уравнений показал полноту их корневых векторов.

Кальменовым Т.Ш. найден критерий полноты корневых векторов для произвольного и линейного вполне непрерывного операторов в гильбертовом пространстве, а также для симметрических дифференциальных уравнений второго порядка. Критерий полноты корневых векторов был сведен к критерию плотности глобальных следов корневых векторов на границе области.

Он показывает, что спектр задачи Трикоми бесконечен. Развивая этот результат, устанавливает, что спектр любой регулярной краевой задачи для произвольного дифференциального уравнения либо пуст, либо бесконечен.

Таково резюме его основных научных достижений.

В 1978 году он удостоен премии Ленинского комсомола Казахстана, в 1996 году стал Заслуженным деятелем науки и техники Республики Казахстан. В 1989 году избран член-корреспондентом АН КазССР, и в 2003 году становится академиком НАН РК.

Кальменов Т.Ш. участвовал в работе многих Международных конференций, в том числе, (г.Москва; май, октябрь, 2005.), (г.Новосибирск; октябрь, 2005), (г.Ташкент; апрель, 2005.).

Он — член Оргкомитета трех Международных конференций. Выполняет научные работы совместно с МИ РАН Российской Федерации, МГУ им.М.В.Ломоносова, Институтом математики им.С.Л.Соболева СО РАН.

В настоящее время, Кальменов Т.Ш. — научный руководитель республиканской темы Программы фундаментальных исследований МОН РК: "Фредгольмовые задачи для дифференциальных уравнений". Одновременно, руководитель тем государственной программы по космической технологии:

1. Разработать технологические основы создания и применения спутниковых навигационных систем в интересах социально-экономического развития Республики Казахстан.

2. Создать корпоративную информационную инфраструктуру, объединяющую центры обработки информации, ведомственные и территориальные информационно-измерительные сети.

Им подготовлены 6 докторов наук, 48 кандидатов наук. Его научная школа признана научной общественностью.

Тынысбек Шарипович находится в расцвете творческих сил для активной плодотворной научной и научно-организационной деятельности на благо общества, развития науки и физико-математического образования Республики Казахстан.

М.А.Садыбеков, Б.Д.Кошанов

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Т.Ш.КАЛЬМЕНОВА

1. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения// *Дифференциальные уравнения*, 1971, т.1, №1.

2. Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения// *Дифференциальные уравнения*, 1972, т.8, №1.

3. О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений// *Дифференциальные уравнения*, 1973, т.9, №1, с.84–96.

4. О задаче Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения// *Дифференциальные уравнения*, 1974, т.10, №1, с.54–68.

5. О единственности решения задачи Дарбу для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений// *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.*, 1974, №1.

6. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *Дифференциальные уравнения*, 1977, т.13, №8, с.1418–1425.

7. О спектре задачи Геллерстедта// *Труды Института математики и механики АН КазССР*, 1977, с.167–169.

8. О полупериодической задаче Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа// *Дифференциальные уравнения*, 1978, т.14, №3, с.546–547.

9. О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка// *Дифференциальные уравнения*, 1979, т.9, №2, с.354–356.

10. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *Дифференциальные уравнения*, 1981, т.17, №5, с.863–875 (соавтор, М.О.Отелбаев).

11. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения// *Дифференциальные уравнения*, 1981, т.17, №6, с.1105–1121.

12. О регулярных расширениях одного минимального оператора Лаврентьева-Бицадзе// Сборник трудов *"Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики"*. 1981, Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, с.82–84.

13. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *ДАН СССР*, 1981, т. 261, №2 (соавтор, А.Б.Базарбеков).

14. О регулярных расширениях полуминимального оператора Лаврентьева-Бицадзе// *Дифференциальные уравнения*, 1982, т.18, №1, с.37–58.

15. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в пространствах// *Дифференциальные уравнения*, 1981, т.18, №2, с.260–280 (соавтор, А.Б.Базарбеков).

16. О спектре одной самосопряженной задачи для волнового уравнения// *Вестник АН КазССР*, 1982, №2, с.63–66.

17. О регулярных краевых задачах для многомерного волнового уравнения// *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.*, 1982, №3, с.18–24.

18. Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *Дифференциальные уравнения*, 2000, Т. 29, № 11 (соавтор, М.А.Бименов).

19. Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми// *Дифференциальные уравнения*, 2003, Т. 39, № 10, с.1425–1428 (соавтор, М.А.Бименов).

20. Природа спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений// Труды Международной научной конференции *"Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики"*, 16–19 ноября 2004г., г.Ташкент, с.231–233 (соавторы, А.Ш.Шалданбаев, Н.С.Иманбаев).

21. Структура спектрального множества регулярных задач для дифференциальных уравнений// *Вычислительные технологии*, Т. 9, №3, 2003, Алматы, с.61–69 (соавторы, А.Ш.Шалданбаев, А.В.Роговой).

22. Спектральные вопросы квазирегулярной задачи Дирихле и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *Труды Инситута математики СО РАН*, 2002, с.37–45 (соавторы, М.А.Джаманкараева, М.А.Бименов).

23. Спектральные свойства корневых векторов задачи Трикоми для задачи Трикоми// *Математический журнал*, №1, 2004 (соавторы, Д.Т.Кальменов, М.А.Джаманкараева).

24. Спектральные свойства корневых подпространств задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Сборник трудов международной конференции *"Современные проблемы математической физики и информационных технологий"*, 18–24 апреля 2005, г.Ташкент, т.1, с.74–78 (соавтор, Б.Д.Кошанов).

25. Полнота корневых векторов задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Сборник трудов международной конференции *"Современные проблемы математической физики и информационных технологий"*, 18–24 апреля 2005, г.Ташкент, т.1, с.69–72 (соавтор, У.А.Искакова).

26. Спектральные свойства корневых векторов задачи Трикоми// *Математический журнал*, Т.4, №4 (14), 2004, с.44–48 (соавтор, Б.Д.Кошанов).

27. Построение решений задач для бигармонических уравнений// Материалы международной научной конференции *"Актуальные проблемы механики и машиностроения"*, 17–19 июня 2005, г.Алматы, т.3, с.223–226 (соавтор, Б.Д.Кошанов).

28. О свойстве гладкости младшего члена одного класса нелинейных уравнений// Тезисы докладов международной научной конференции *"Проблемы теоретической и прикладной механики"*, 1–2 марта 2006, г.Алматы, с.141.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 96–99*

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук профессору Фалалееву Леониду Петровичу, известному специалисту по теории аппроксимации, отличнику народного просвещения Республики Казахстан.

Он родился 16 июля 1946 года в руднике Жолымбет Акмолинской области в многодетной семье служащего. Закончив школу с золотой медалью в 1964 году, принимал участие во 2-ой Казахстанской математической олимпиаде, по завершение которой был оставлен как один из победителей в летней школе при КазГУ им. С.М.Кирова (ныне КазНУ им.аль-Фараби). В августе 1964 года поступает на механико-математический факультет КазГУ. Специализацию проходил по кафедре математического анализа. Закончив в 1969 году с отличием университет, был рекомендован в аспирантуру Института Математики и механики (ИММ) АН Каз ССР. В аспирантуре под руководством член-корреспондента АН КазССР Т.И.Аманова им была выполнена кандидатская диссертация "О приближении функций линейными средними рядов Фурье". В диссертации были рассмотрены вопросы приближения в равномерной метрике различных классов непрерывных функций операторами, построенными на базе линейных методов суммирования (прямоугольные и треугольные матрицы) тригонометрических рядов и рядов Фурье-Чебышева. При этом были найдены точные и асимптотически точные константы в оценках приближения средними Чезаро, Абеля-Пуассона и др., установлены точные константы в поточечных оценках приближения. Защита состоялась в июне 1972 года на диссертационном совете ИММ АН КазССР (оппоненты Я.С.Бугров и М.П.Барыкин, ведущая организация — МФТИ).

После досрочного окончания аспирантуры Фалалеев был распределен в Институт математики и механики (ИММ) АН КазССР. Работал в лаборатории теории функций и функционального анализа, руководимой член-корр. АН КазССР Т.И.Амановым. Впоследствии лабораторию возглавлял директор Института (1987–2003гг.) академик НАН РК Н.К.Блиев.

Докторскую диссертацию на тему "Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье" Леонид Петрович успешно защитил в 1994 году на диссертационном совете Института математики АН РК (оппоненты В.Ф.Бабенко, В.А.Баскаков, А.А.Женсыкбаев, ведущая организация — Институт Математики УрО РАН).

Наиболее существенные научные результаты Л.П.Фалалеевым получены в следующих направлениях. Приведены общие точные оценки приближения классов непрерывных функций операторами, объединяющими дискретные и непрерывные методы суммирования рядов Фурье по тригонометрической системе и системе полиномов Чебышева 1-го рода [1–3], [5, 7]. С высокой точностью решена задача Колмогорова-Никольского для средних Чезаро и Рисса для обычных и сопряженных функций [8, 12], [14]. Найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения дифференцируемых функций от бигармонического оператора [4, 6]. Исследовано поведение классических констант Лебега и Ландау [10, 18]. Изучено поведение средних Вороного-Нёрлунда (в периодическом и непериодическом случаях) [15]. Найдены точные константы в неравенстве Джексона для уклонения матричных операторов на классе непрерывных и дифференцируемых функций [22]. Установлено поведение оценок уклонения функций из класса Зигмунда от обобщенного оператора Абеля-Пуассона [26, 30]. Аналогичная задача решена для сопряженных функций [21]. Установлена поточеченая оценка уклонения дифференцируемых функций от оператора гармонического типа (оператор Anghelutza). Для этих операторов исследованы порядки убывания коэффициентов Фурье в случае, когда сходимость последовательности понимается в обобщенном смысле [31, 33]. Получены тонкие оценки констант Лебега операторов, построенных по суммам Фурье с лакунами степенного и экспоненциального типов, позволяющие в общем виде исследовать их аппроксимативные свойства на подклассах непрерывных функций [17, 30]. Найдены достаточные условия ограниченности норм матричных операторов, гарантирующих неулучшаемые аппроксимативные оценки в равномерной и интегральной метриках [27–33]. Получен ряд неулучшаемых оценок приближения непрерывных функций операторами, построенными по подпоследовательностям с полустепенными лакунами [36]. Найдены порядки убывания коэффициентов Фурье функций, принадлежащих пространствам Лоренца, С.Л.Соболева, С.М.Никольского, О.В.Бесова. Сходимость последовательности понимается при этом в обобщенном смысле (Чезаро, Рисс, Зигмунд) [34–37]. Исследованы аппроксимативные свойства операторов, построенных по суммам Фурье с $\varphi-$лакунарными индексами [40].

По материалам научных исследований Л.П.Фалалеевым опубликовано более 90 научных работ в международных и республиканских изданиях, в том числе в таких ведущих математических журналах, как "Труды Математического Института им.В.А. Стеклова РАН", "Математические заметки", "Сибирский математический журнал", "Доклады НАН РК", "Известия НАН РК. Серия физико-математическая", "Вестник МОН РК", в трудах многих международных конференций. Его публикации выставлялись на сайте Европейского математического общества. Они имеют высокий индекс цитируемости. Результаты его исследований представлялись на многих международных математических съездах, симпозиумах и конференциях (София 1984, Киев 1983, Новосибирск 1979, 1980, 2003, 2004, Москва 2005, Минск 1999, Баку 1989, Днепропетровск 1985, Одесса 1990, Ульяновск 1990, Воронеж 1993, Саратов 1982, 1986, 1990, 1992, Калуга 1996, Сингапур 1990).

С 1973г. по 1994г. он по совместительству преподает на механико-математическом факультете Казахского государственного университета. Под его руководством защищено 3 кандидатских диссертации. С 1969 года занимается проведением республиканских и областных олимпиад школьников, работал в подшефной РФМШ, принимал участие в подготовке команды школьников РК к участию в международных олимпиадах (составление задач). С 1981 года Л.П. Фалалеев — "Отличник народного просвещения КазССР".

Друзья и коллеги искренне поздравляют Леонида Петровича с замечательным юбилеем и от всей души желают ему успехов в работе, творческого вдохновения, крепкого здоровья, счастья и благополучия.

Бердышев В.И., Мирошниченко В.Л.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Л.П. ФАЛАЛЕЕВА

1. Суммирование рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами // *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.* 1971. № 3. С.70–71.

2. Суммирование рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами // *Труды ИММ АН КазССР.* 1971. Т. 2, С.90–96.

3. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица (C, α) -средними ряда Фурье // *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.* 1972. № 1. С.74–81.

4. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла // *Теоремы вложения и их приложения.* Материалы всесоюзного симпозиума. Алма-Ата. 1973. Алма-Ата. Наука КазССР. 1976. С.163–167.

5. О приближении функций полиномами наилучшими в заданной системе точек // *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.* 1977. № 1. С.82–86.

6. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона// *Пятое советско-чехословацкое совещзание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики* (труды совещания). Новосибирск. 1979. С.13–16. (соавтор, Аманов Т.И.)

7. Аппроксимативные свойства матричного метода суммирования рядов Фурье-Чебышева // *Теория кубатурных формул и вычислительная математика.* Новосибирск. Наука. 1980. С.188–191.

8. Приближение сопряженных функций суммами Чезаро // *Математические заметки.* 1980. Т.28. Вып.3. С.451–458.

9. Об одном методе суммирования рядов Фурье-Якоби // В сб. *Применение функционального анализа в теории приближений.* Калинин. 1983. С.109–117.

10. Об асимптотическом поведении констант Лебега. // В сб. *Применение функционального анализа в теории приближений.* Калинин. 1984. С.122–126. (соавтор, Сюсюкалов А.И.)

11. Приближение функций линейными средними рядов Фурье // *Международная конференция по конструктивной теории функций.* София. 1984. С.165.

12. О точности представления сопряженных функций суммами Чезаро // *Сибирский математический журнал.* 1984. Т.XXV, № 4. С.199–205.

13. Аппроксимативные свойства операторов типа операторов Абеля-Пуассона // *Теория функций и приближений.* Труды 2-й Саратовской зимней школы. Ч.3. Саратов. 1986. С.115–117.

14. О приближении функций из класса Зигмунда сопряженными суммами Чезаро // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова.* 1987. Т.180. С.222–224.

15. О матричном методе приближения сопряженных функций // *Труды международной конференции по теории приближения функций.* Киев 30 мая — 6 июня 1983. Москва. Наука. 1987. С.443–445.

16. Дробные разности и вопросы сходимости // Всесоюзная школа-конференция *"Современные проблемы теории функций".* Баку. 1989. С.104.

17. Rate of convergence of linear mean subsequencies of Fourier sums// World Scientific publishing. *Topics in polynomials of one and several variables and their applications.* Singapore. 1991. P.25-39. (соавтор, Блиев Н.К.)

18. Неравенства для констант Ландау // *Сибирский математический журнал.* 1991. Т.32, № 5. С.194–195.

19. О матричных методах суммирования в L_p // *Математические заметки.* 1993. Т.54. Вып.5. С.111–118.

20. Приближение непериодических функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона // *Известия НАН РК. Серия физ.-мат.* 1995. № 5. С.54–58.

21. Средние Эйлера и Рисса рядов Фурье-Чебышева // *Известия МН-АН РК. Серия физ.-мат.* 1997. № 1. С.16–23.

22. О точных константах для матричных методов суммирования// *Сибирский математический журнал.* 1995. Т.36, № 4. С.927–933.

23. Порядки убывания коэффициентов Фурье по ортогональным системам // Тезисы Международной конференции *"АМАДЕ".* Минск. 2001. С.126.

24. Непрерывные методы суммирования коэффициентов Фурье // *Вестник МН и ВО НАН РК.* 1999. С.64–69.

25. О порядке убывания коэффициентов Фурье // *Известия МОН РК. Серия физ.-мат.* 2000. № 5. С.53–57.

26. Приближение сопряженных функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона// *Математические заметки.* 2000. Т.67. вып.4. С.595–602.

27. О подпоследовательностях сумм Фурье с различным порядком роста // *Теория приближения функций и операторов.* Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения С.Б.Стечкина. Россия. Екатеринбург. 28 февраля — 3 марта 2000 года. С.159.

28. О константах Лебега подпоследовательностей сумм Фурье// *Четвертый сиб.конгресс по прикладной и индустриальной математике* (ИНПРИМ – 2000), посвященный памяти М.А. Лаврентьева. Новосибирск, 26 июня — 1 июля 2000. С.139.

29. Приближение функций подпоследовательностями сумм Фурье // Международная конференция *"Методы сплайн-функций".* Новосибирск. 29 января — 2 февраля. 2001. С.72.

30. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона // *Сибирский математический журнал.* 2001. Т.42, № 4. С.926–936.

31. О непрерывном методе суммирования коэффициентов Фурье// *Математический журнал.* 2001. Т.1, С.107–110.

32. Аппроксимация функций суммами Фурье с пропусками // *Известия МОН РК, НАН РК. Серия физ.-мат.* 2002. № 3. С.53–58.

33. О тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами // *Известия НАН РК. Серия физ.-мат.* 2003. № 1. С.63–67.

34. О поведении коэффициентов Фурье функций из различных пространств // *Вестник НАН РК.* 2004. № 6. С.143–147.

35. О поведении коэффициентов Фурье в пространствах L_p и Лоренца // *Известия НАН РК. Серия физ.-мат.* 2004. № 3. С.59–62.

36. Общие константы Лебега линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье // *Математические заметки.* 2004. Т.75. Вып.3. С.435–443.

37. О поведении коэффициентов Фурье функций из различных пространств // Международная конференция *"Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ"* (Москва, 23-29 мая 2005 г.), посвященная столетию С.М.Никольского. Тезисы докладов. С.223.

38. Приближение непериодических функций оператором гармонического типа// В сб. *Применение функционального анализа в теории приближений.* Тверь. 2005. ТГУ. С.116–126.

39. О порядке убывания коэффициентов Фурье // Международная конференция *"Современные проблемы математики, механики, информатики",* посвященная 75-летию ТулГУ и 85-летию со дня рождения профессора С.Б.Стечкина, Тула 22 – 26 ноября 2005г. С.155.

40. О $\varphi-$лакунарных рядах Фурье // 4 международный симпозиум *"Ряды Фурье и их приложения".* Абрау-Дюрсо, 29 мая – 5 июня 2006.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.95 2000 MSC: 35D05, 35Q30

A b u l k a i r o v U. U. **Flow inverse problem of the flow for 2D-3D Navier-Stokes system**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.14–22.

In this paper theorems of existence and uniqueness of strong solutions of flow problem for linearized 2D–3D Navier-Stokes system are proved.
References -10.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35D05, 35Q30

А б ы л қ а и р о в О. У. **Сызықтандырылған 2-3 өлшемді Навье-Стокс жүйесі үшін ағу кері есебі** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.14–22.

Бұл жұмыста сызықтандырылған 2-3 өлшемді Навье-Стокс жүйесі үшін ағу есебінің күшті шешімінің бар және жалғыздығы туралы теоремалары дәлелденді. Зерттелінген сызықтандырылған 2-3 өлшемді Навье-Стокс жүйесі үшін ағу кері есеп шешімінің априорлық бағалары дәлелденіп, шешімнің бар және жалғыздығы туралы жеткілікті шарттары алынды және есептің Фредгольмді шешілуі дәленденді.
Әдебиеттер тізімі - 10.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

A l d a s h e v S. A. **Criterion of existence of ligen functions of spectral Darboux-Protter problem for the degenerating multidimentional hyperbolic equations**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.23–32.

In this paper criterion of existence of countable ligen functions of spectral Darboux-Protter problem for the degenerating multidimentional hyperbolic equations is proved as well as a Valterra type of its adjoint problem is stated.
References —17.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

А л д а ш е в С. А. **Азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған спектральдық Дарбу-Проттер есебінің жекеменшік функциялары бар болу критериясы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.23–32.

Мақалада азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған спектральдық Дарбу-Проттер есебінің жекеменшік функциялары бар болу критериясы алынған және оған түйіндес есептің вольтеррлығы дәлелденген.
Библ. — 17.

УДК: 517.928 2000 MSC: 34D08

A l d i b e k o v T . M . **On upper semicontinuity over then high generalized Lyapunov exponents of linear system's of differential equations**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.33–36.

In this paper necessary and sufficient conditions of upper semicontinuity of high generalized Lyapunov exponent are obtained.
References — 8

УДК: 517.928 2000 MSC: 34D08

Ә л д і б е к о в Т . М . **Сызықты дифференциалдық жүйелердің жалпылама үлкен Ляпунов көрсеткішінің жоғарыдан орнықтылығы туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.33–36

Жұмыста үлкен жалпылама Ляпунов көрсеткішінің жоғарыдан орнықтылығының қажетті және жеткілікті шарты дәлелденген.
Библ. — 8.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 45D05

A m a n g a l i e v a M . M , D z h e n a l i e v M . T . , R a m a z a n o v M . I . , T u i m e b a - y e v a A . E . **Volterra Special Integ-ral Equation of second type. 2. Nonhomogeneous case and nonlocal Problems** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.37–44.

Some questions of solvability of special Volterra integral equation of second type and its adjoint equation are considered. It is proved that the equation is Noetherian and its index is equal to 1. The results are applied for investigating nonlocal integral – boundary value problem for parabolic equation in a quarter plane.
References — 13.

УДК: 517.956,517.968.2 2000 MSC: 45D05

А м а н ғ а л и е в а М . М . , Ж и е н ә л и е в М . Т . , Р а м а з а н о в М . И . , Т ү й м е б - а е в а А . Е . **Вольтерра типтес екінші текті арнайы интегралдық теңдеу. 2. Біртекті жағдай және бейлокалды есептер**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.37–44.

Вольтерра типтес екінші текті арнайы интегралдық және оның түйіндес теңдеулері үшін шешілімділік мәселелері қарастырылады. Зерттелген теңдеудің нетерлі және оның индексі бірге тең екендігі көрсетілген. Алынған нәтижелер ширек жазықтықта параболалық теңдеу үшін локалсыз ішкі-шекаралық есептерді зерттеуде пайдаланған.
Библ. — 13.

УДК: 517.51 2000 MSC: 60G07, 46B45

A u b a k i r o v T . U . , N u r c u l t a n o v E . D . **Stochastic processes and spaces with variable approximation properties**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.45–55.

In this paper spaces of stochastic processes and interpolation methods for this spaces are introduced and interpolation and embedding theorems. On this results spaces of Besov type with variable approximation properties are investigated.
References — 13.

УДК: 517.51 2000 MSC: 60G07, 46B45

А у б а к и р о в Т. У., Н ұ р с ұ л т а н о в Е. Д. **Стохаластикалық процестер және айнымалы аппроксимациалық қасиеттері бар кеңістіктер**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.45–55.

Жұмыста стохаластикалық кеңістіктер жиыны және осы кеңістіктер үшін интерполяциялық әдіс анықталған, интерполяциялық және енгізу теоремалары дәлелденген. Алынған нәтежелер негізінде айнымалы аппроксимациалық қасиеттері бар Бесов кеңістіктері типтес кеңістіктер зерттелген.
Библ. — 13.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64

V e r b o v s k i y V. V. **On quantifier elimination for ordered group of reals with named dense subgroup**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.56–59.

Let H be a dense subgroup in $\mathbb{R}$. We prove that $(\mathbb{R}, <, +, 0, H, H_q, e_{p,q,i})_{q \in \mathbb{Q}^+}$ admits quantifier elimination, where $H_q = \{q \cdot h : h \in H\}$ for some $q \in \mathbb{Q}^+$. If for some $p, q \in \mathbb{Q}^+$ we have that $|H_q : H_p| = n_{p,q} < \infty$, then let $c_{p,q,i} \in H_q$ for $i < n_{p,q}$ be representatives of all cosets of H_p in H_q.
As a corollary we obtain that $(\mathbb{R}, <, +, H)$ does not have independence property.
References — 1.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64

В е р б о в с к и й В. В. $(\mathbb{R}, <, +, 0, H, H_q, e_{p,q,i})_{q \in \mathbb{Q}^+}$ **кванторды қысқартуға болады** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.56–59.

H $\mathbb{R}$-дың тығыз топы болсың. Дәлелденді $(\mathbb{R}, <, +, 0, H, H_q, e_{p,q,i})_{q \in \mathbb{Q}^+}$ кванторды қысқартуға болады, мындағы $H_q = \{q \cdot h : h \in H\}$ үшін $q \in \mathbb{Q}^+$. Егер кейбір $p, q \in \mathbb{Q}^+$ $|H_q : H_p| = n_{p,q} < \infty$ орындалса, онда $c_{p,q,i} \in H_q$ үшін $i < n_{p,q}$ H_q-дағы H_p топы сыңын барлық сыбайластық табы өкілі болады. Соңдықтаң $(\mathbb{R}, <, +, H)$-да тәуелсіздік қасиетті орындалмайды.
Библ. — 1.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

D z h u m a b a e v D. S., N a z a r o v a K. J. **On one version of parametrization's method for nonlinear two-point boundary value problem**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.60–67.

Nonlinear two-point boundary value problem as meaning of solutions on middles of intervals where is considered differential equation through of introduction additional parameters is investigated. Conditions of existence of isolated solution and convergence it of method of multitude bilateral shooting are established in terms of initial data.
References — 15.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Ж ұ м а б а е в Д. С., Н а з а р о в а К. Ж. **Сызықсыз екі нүктелі шеттік есепке арналған параметрлеу әдісінің бір нұсқасы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.60–67.

Сызықсыз екі нүктелі шеттік есеп дифференциалдық теңдеу қарастырылатын кесіндіні бөлген аралықтардың орталарындағы шешімнің мәндері ретінде қосымша параметрлер енгізу

арқылы зерттеледі. Бастапқы берілімдер терминінде оқшауланған шешімнің бар болу шарты және оған жиындық екі жақты ату әдісінің жинақталуы тағайындалған.

Библ. — 15.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

K a b d r a k h o v a S . S . **On semiperiodic boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation with mixed derivative** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.68–75.

The sufficient conditions of the existence of a unigue solution of semiperiodical boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation with mixed derivative are obtained.

References — 12.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

Қ а б д р а х о в а С . С . **Аралас туындылы сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылайпериодты шеттік есеп туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.68–75.

Аралас туындылы сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылайпериодты шеттік есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынған.

Библ. —12.

УДК: 621.316 2000 MSC: 35C10, 35K99, 74N20, 80A20, 80A22

L o b a n o v a V . V . **Solution of the inverse Stefan Problems with a linear movable boundary**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.76–84.

In the paper one inverse Stephen problem with a movable linear boundary is solved using Hartri's functions. Conditions which guarantee uniform convergence of a solution as a series are obtained. Some combinatorial formulae have been proved.

References — 2.

УДК: 621.316 2000 MSC: 35C10, 35K99, 74N20, 80A20, 80A22

Л о б а н о в а В . В . **Сызықты жылжымы шекаралы бір кері Стефан есесбінің шешімі**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.76–84.

Сызықтың заң бойынша өзгеретін жылжымалы шекаралы кері Стефан есебі Хартри функциясының көмегімен шешілді. Қатар түрінде алынған шешімнің бірқалыпты жинақталуының шарттары табылды. Белгілі бір комбинаторлық қатынастар дәлелденді.

Библ. —2.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74H05

U k r a i n e t s B . N . **Influence of terrestrial surface on stress-strain state of tunnel surface**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 2 (20). P.85–91.

In this paper influence of terrestrial surface on stress-strain state of tunnel surface influence of terrestrial surface on stress-strain state of tunnel surface is under consideration.

References — 3.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74H05

Украинец В. Н. **Өнімдер бетіндегі КДК-сына жер бетінің әсері жүктемелердің қозғалыстағы әсері** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 2 (20). Б.85–91.

Цилиндр тәріздес куыс: паралельді өсі бойынша жер беті қозғлысының тұрақты жүктеменің кенеулі жартылай қеністікке әсеріне есеп шешімін қолдануы, әр түрлі терендікте орналасқан үңгірдін өнімдер беттерінің КДК-сына жер бетінің әсері зертеледі.

Ламе потенциалдарының динамикалық тепе-тендік теориясындағы жартылай кеңістік қозғалысы көрсетіледі.

Релей толқының жылдамдығына жетілмеген қозғалыстағы жүктеменің жылдамдықтары стационарлық есеп шешімі табылған.

Жер құрамы әр түрлі болатын, терең куысты коршайтын жердін калындығын анықтайтын КДК-ның контуры есептің шешуі эпюрімен берілген.

Библ. — 3.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 2 (20) 2006

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304
тел.: 8(3272)-91-20-03, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 17.07.2006г.
Тираж 300 экз. Объем 106 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129
Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053
e-mail: print_express@bk.ru