ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2002 том 2 № 1

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 2 № 1 2002

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 205
Телефон 8-(3272)-91-19-04, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 2, № 1, 2002

Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I
М. С. Айтенова, Л. К. Кусаинова 3

О нелинейном уравнении Больцмана
А. Ш. Акыш 10

О замыкании системы уравнений Максвелла
Л. А. Алексеева 17

К построению системы сравнения для линейного стационарного объекта с запаздыванием
Е. Т. Аяганов, Г. Н. Пащенко 24

Спектральные свойства нагруженного дифференциального оператора
М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов 31

Об индексных множествах в обобщенных вычислимых нумерациях
В. П. Добрица 38

2-когомологии креприсоединенного модуля алгебр Ли типа A_n
Ш. Ш. Ибраев, Г. А. Туретаева 43

Критерий компактности одного класса интегральных операторов вольтерровского типа
Р. О. Ойнаров 49

Пространственно однородная дискретная модель уравнения Больцмана. Интегрируемый случай
М. И. Рахимбердиев, А. А. Калыбай 56

Исследование задачи Стефана с условием Гиббса-Томсона на свободной границе
А. С. Сарсекеева 61

Об одной модельной задаче сопряжения
М. А. Сахауева 70

Оптимальное управление для уравнений с негладкой нелинейностью. I
С. Я. Серовайский 76

О потоке плотности энергии волн Лява на статистически шероховатых границах раздела
Е. И. Уразаков 84

О гомологиях третьего порядка нильпотентной подалгебры $\mathcal{L}_1$
специальной алгебры Ли
К. Н. Утеулиева 94

ХРОНИКА

Семинар Института математики МОН РК 103

Рефераты 108

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 3 – 9*

УДК 517.518.23

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ВЛОЖЕНИЙ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА. I

М. С. Айтенова , Л. К. Кусаинова

Институт прикладной математики (РГКП ИПМ)
470076, Караганда, Университетская ул., 28, ipm@nursat.kz

В работе получены верхние и нижние оценки распределений аппроксимативных чисел вложений весовых пространств Соболева с весами общего типа в терминах локальных максимальных операторов. Даны характеристики весов, для которых полученные оценки точны в смысле слабой эквивалентности. Работа разделена на две части. В 1-ой части получены верхние оценки распределений аппроксимативных чисел вложений. Вторая часть отведена неулучшаемым оценкам указанной функции распределения.

Развернутый анализ развития теории поперечников невесовых классов дифференцируемых функций, заданных на кубах, дан в работе [1]. В настоящее время теория поперечников активно развивается в направлении различных функциональных обобщений (к примеру, работы [2]–[6]). Точные в смысле слабой эквивалентности поперечники весовых классов типа Соболева для потенциалов общего типа впервые получены М. Отелбаевым [7], в дальнейшем эти результаты были дополнены и развиты в работах [8]–[11]. В настоящей работе решается задача оценки асимптотики распределения аппроксимативных чисел вложения двухвесовых пространств Соболева в пространство Лебега с весами общего типа.

Пусть Ω — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Введем обозначения: $L(loc) = L(\Omega; loc)$, $L_q(\omega) = L_q(\Omega;\omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ – соответственно, класс локально суммируемых в Ω функций; лебегово пространство функций с конечной нормой $\|u\|_{L_q(\omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u|^q\omega\right)^{1/q}$, $0 \le \omega \in L(loc)$; класс функций u, имеющих в Ω производные $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial^{\alpha_1}x_1\ldots\partial^{\alpha_n}x_n}u$ всех порядков $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$; класс функций $u \in C^\infty(\Omega)$ с компактными носителями. Для измеримого множества $G \subset \Omega:$ $|G|$ — мера Лебега, $|G|_\omega = \int\limits_G \omega$. Через $\overline{G}$ будем обозначать замыкание G, $\mathcal{X}_G$ — характеристическая функция G, $f/_G$ — сужение функции f на G, ∂G — граница G. Неотрицательные функции из класса $L(loc)$ будем называть весами.

Пусть ρ, v — веса на Ω, при этом $\rho^{-p'/p} \in L(loc)$, $C^\infty W = C^\infty W_p^l(\rho, v)$ — класс функций

Keywords: *embedding, approximative numbers, Sobolev space*
2000 Mathematics Subject Classification: 46E35, 46A32

$u \in C^{\infty}(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_W = \|u\|_{W_p^l(\rho,v)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla_l u|^p \rho + |u|^p v \right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $|\nabla_l u| = \left(\sum\limits_{|\alpha|=l} |D^{\alpha} u|^2 \right)^{1/2}$. Через $W = W_p^l(\rho, v) = W_p^l(\Omega; \rho, v)$ будем обозначать пополнение $C^{\infty} W$ по норме (1).

Пусть X, Y — нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, соответственно, BX — единичный шар в X. Будем говорить, что X вложено в Y (запись $X \to Y$), если $X \subset Y$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $\|x\|_Y \le C\|x\|_X \quad \forall\ x \in X$. Ограниченный оператор $E : X \to Y$, заданный равенством $Ex \overset{\text{def}}{=} x$, называют оператором вложения $E = E_{X \to Y}$. Запись $E \in \sigma_{\infty}$ будет означать, что E — компактный оператор.

Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$ — совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y. Через $\mathcal{L}_N(X, Y)$ обозначим множество всех конечномерных операторов $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, размерность образа которых не превосходит N. Пусть $\mathcal{H}_N(X)$ — совокупность всех подпространств X размерности $\le N$, K — центрально-симметрическое ограниченное подмножество банахова пространства X. Величины

$$a_N(E) \overset{\text{def}}{=} \inf_{L \in \mathcal{L}_N(X,Y)} \|E - L\|,\ d_N(K, X) \overset{\text{def}}{=} \inf_{H \in \mathcal{H}_N(X)} \{\sup_{x \in K} \inf_{\xi \in H} \|x - \xi\|_X\}$$

называются, соответственно N-м аппроксимативным числом оператора E, N-поперечником по Колмогорову множества K в X; $\mathcal{N}(\lambda, E) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{a_N(E) > \lambda} 1 \quad (\lambda > 0)$ — функция распределения аппроксимативных чисел $a_N(E)$ оператора вложения E. Пусть I^n — совокупность всех кубов вида $Q = Q_d = Q_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ |y_i - x_i| < d/2,\ i = 1, \ldots, n\}$. Куб $\lambda Q = Q_{\lambda d}(x)\ \ (\lambda > 0)$. Кубу $Q = Q_d(x) \subset \Omega$ соотнесем величину

$$\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x, d) = \mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x, d|\rho, v) = d^{l-n} |Q_{(\varepsilon)}|_{\sigma}^{1/p'} \inf |Q_{(\varepsilon)} \setminus e|_v^{1/p},$$

где $Q_{(\varepsilon)} = (1 - \varepsilon)Q, \quad \delta,\ \varepsilon \in [0, 1)$, а inf берется по множеству $\mathcal{N}_{(\delta)}(Q_{(\varepsilon)})$, $\mathcal{N}_{(\delta)}(Q) \overset{\text{def}}{=} \{\ e \subset \subset Q :\ \ |e| \le \delta|Q|\}$. При этом $\varepsilon = 0$, если только $\Omega = \mathbb{R}^n$. Здесь и в дальнейшем $\sigma = \rho^{1-p'}$, $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$.

Класс $\Pi = \Pi_{(\delta,\varepsilon),l,p}(\Omega)$. Будем говорить, что весовая пара (ρ, v) на Ω удовлетворяет условию (Π) (относительно функции $d(x)$), если существует такая положительная ограниченная функция $d(x)$ на Ω, что для п.в. x в Ω

$$Q(x) \overset{\text{def}}{=} Q_{d(x)}(x) \subset \Omega \ \text{ и } \mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x, d(x)) \ge 1. \tag{2}$$

К примеру, на пространствах $W = W_p^l(\rho^{\mu}, \rho^{\nu}), \quad -\infty < \mu, \nu < \infty$, где $\rho(x)^{-1}$ эквивалентно расстоянию до границы $\partial\Omega$ ограниченной области Ω, условия (2) относительно функции $d(x) = \Delta(x) \overset{\text{def}}{=} \sup\{d > 0 :\ Q_d(x) \subset \Omega\}$ переходят в неравенство $lp + \mu \le \nu$.

Класс $\Pi^* = \Pi^*_{(\delta,\varepsilon),l,p}(\Omega)$. Будем говорить, что весовая пара (ρ, v) на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (Π^*) (в записи $(\rho, v) \in \Pi^*$), если $0 < d^*(x) \le C < \infty$ и $\overline{Q^*(x)} \subset \Omega$, где $d^*(x) = d^*_{(\delta,\varepsilon)}(x|\rho, v) \overset{\text{def}}{=} \sup\{d > 0 : \mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x, d|\rho, v) \le 1\}$, $Q^*(x) = Q_d(x)$ при $d = d^*(x)$. Функция $d^*(x)$ является обобщением на двухвесовой случай функции Отелбаева $v^*(x) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{d>0} \left\{ d > 0 : Q_d(x) \subset \Omega, \quad d^{l-n/p} \left(\int\limits_{Q_{(\varepsilon)}} v \right)^{1/p} \le 1 \right\}$ (см. [9], с.63). Пара $(\rho, v) \in \Pi^*$ удовлетворяет условию (Π) относительно $d(x) = d^*(x)$.

Пусть пара $(\rho, v) \in \Pi$ относительно функции $d(x)$. Выделим связанные с $d(x)$ семейства кубов: $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}_{(\varepsilon)}(x) = \{Q \in I^n : \ x \in Q \text{ и } \ \exists \text{ куб } Q_{(\varepsilon)}(y) \supset Q\}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(\varepsilon)} = \bigcup\limits_{x\in\Omega} \mathcal{B}(x)$. Условия вложения $W(\rho, v) \to L_q(\omega)$ выражаются в терминах средних $\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(Q_{(\varepsilon)}(x))$, где на кубах $Q = Q_d(x) \in \mathcal{B}, \ \ \mathcal{K}(Q) = \mathcal{K}(x; d) \overset{\text{def}}{=} d^{l-n}|Q|_\sigma^{1/p'}|Q|_\omega^{1/q}$.

Следующие условия

$$K = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) < \infty \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad x \to \partial\Omega \tag{3}$$

являются достаточными на парах $(\rho, v) \in \Pi$ для компактного вложения $W_p^l(\rho, v) \to L_q(\omega)$ (см. [12], с. 86). Запись $\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) \rightrightarrows 0$ при $x \to \partial\Omega$ означает выполнение следующего условия: $\forall \varepsilon > 0$ найдется компакт $F \subset \Omega$, для которого $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega\setminus F} \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) < \varepsilon$.

Семейство кубов $\mathcal{B}$ является дифференциальным базисом, что позволяет естественным образом ввести в рассмотрение максимальный оператор на функциях, определенных в области

$$M^*f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{B}(x)} |Q|^{-1} \int\limits_Q |f|, \ f \in L(loc). \tag{4}$$

Оператор $f \to M^*f(x)$ действует из $L(loc)$ в пространство $\mathfrak{M}(\Omega)$ всех измеримых функций, заданных на Ω. Действительно, множество $G_\lambda = \{x \in \Omega : M^*f(x) > \lambda\}$ — открыто. Для $\lambda \le 0 \ \ G_\lambda = \Omega$, а в случае $\lambda > 0$ найдется куб $Q \in \mathcal{B}(x)$, на котором все еще $\lambda < \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f|$, а так как $Q \in \mathcal{B}(y) \quad \forall y \in Q$, то $M^*f(y) > \lambda \quad \forall y \in Q$, а $Q \subset G_\lambda$.

Семейство кубов $\{Q^j, \ j \in J\} \subset I^n$ называют B-покрытием множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если выполнены условия:

1. $A \subset \bigcup Q^j$;
2. $\sum \mathcal{X}_{Q^j}(x) \le \varkappa_1 < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (конечная $\varkappa_1$-кратность);
3. $\{Q^j, \ j \in J\}$ распадается не более, чем на $\varkappa_2 < \infty$ подсемейств $\{Q^j, \ j \in J_\nu\}$ попарно непересекающихся кубов (конечная $\varkappa_2$-разделимость).

Пусть A — ограниченное подмножество Ω, $\{Q^x, \ x \in A\}$ — семейство кубов $Q^x = Q_{h(x)}(x) \in \mathcal{B}$. Тогда из $\{Q^x, \ x \in A\}$ можно извлечь B-покрытие с постоянными $\varkappa_i = \varkappa_i(n), \ \ i = 1, 2$. (см. [13], с.11). В дальнейшим за θ закрепим значение $\theta = l - n/p + n/q$. Заметим, что $\forall \ x \in Q, \ \ Q \in \mathcal{B}$ и $|Q|^{-1}\int\limits_Q |f| \le M^*f(x)$, откуда следует оценка

$$\mathcal{K}(Q) = d^\theta(|Q|^{-1}|Q|_\sigma)^{1/p'}(|Q|^{-1}|Q|_\omega)^{1/q} \le d^\theta\Phi(x) \ \ \forall x \in Q, \tag{5}$$

где $\Phi(x) = \Phi_{\sigma,\omega}(x) \overset{def}{=} (M^*\sigma(x))^{1/p'}(M^*\omega(x))^{1/q}$.
В силу (5) очевидно, что

$$\mathcal{K}(Q) \le \left(\int\limits_Q (\Phi(x))^{n/\theta}dx\right)^{\theta/n}. \tag{6}$$

Все формулируемые ниже результаты будут предполагать выполненными следующие условия: $l \ge n, \ \ 1 < p \le q < \infty, \ \theta > 0$, а пара $(\rho, v) \in \Pi$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi \in L_{n/\theta}$. Тогда $E_{W\to L_q(\omega)} \in \sigma_\infty$.*

Доказательство. В силу (6)

$$K = \operatorname*{vrai\,sup}_x \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) < (1-\varepsilon)^{-(l-n)}\|\Phi\|_{L_{\theta/n}}. \tag{7}$$

Тем самым выполнено достаточное условие для существования вложения $W \to L_q(\omega)$. Для доказательства включения $E_{W\to L_q(\omega)} \in \sigma_\infty$ предположим вначале, что Ω ограничено. Пусть

$\Omega_\lambda = \{x \in \Omega:\ \Delta(x) > \lambda\}$, $G_k = \Omega_{2^{-(k+1)}} \setminus \Omega_{2^{-k}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть m — минимальное целое, при котором $\Omega_{2^{-m}} \neq \emptyset$. Из представления $\int\limits_\Omega \Phi^{n/\theta} = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$, $a_k = \int\limits_{G_k} \Phi^{n/\theta}$ следует, что $\sum\limits_{k=j}^{\infty} a_k \to 0$ при $j \to \infty$. Пусть $\varepsilon \geq 2^{-s}$ $(s \geq 0)$. Из оценки $\Delta(y) \leq 2\Delta(x)$ при $y \in (1-\varepsilon)Q_{\Delta(x)}(x)$ следует, что для $x \in \Omega \setminus \Omega_{2^{-j}}$ $Q_{(\varepsilon)}(x) \subset \Omega \setminus \Omega_{2^{-(j-1)}} = \bigcup\limits_{k=j-1}^{\infty} G_k$, а значит, $\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) \leq \left(\sum\limits_{k=j-1}^{\infty} a_k\right)^{\theta/n}$. Это позволяет утверждать, что $\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) \rightrightarrows 0$ при $x \to \partial\Omega$, т.е. вместе с (7) мы имеем достаточные условия (3) компактного вложения $W \to L_q(\omega)$.

Пусть Ω неограничено. Достаточно доказать, что $BW \cap C^\infty(\Omega)$ имеет в $L_q(\omega)$ конечную τ-сеть $\forall\, \tau > 0$. Положим $\tilde{\Omega}_j = \Omega \cap Q_{jR}(0)$, $R = 2\sup\limits_{x \in \Omega} d(x)$. Для произвольно выбранного $\tau > 0$ найдется номер N, при котором $c_1 \int\limits_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_{N-1}} \Phi^{n/\theta} < (\tau/2)^{n/\theta}$, $c_1 > 0$ — число, выбор значения которого будет разъяснен ниже. Для всех $u \in C^\infty(\Omega) \cap BW$ в силу (6)

$$\|u\|_{L_q(\Omega \setminus \tilde{\Omega}_N;\omega)} \leq c \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_N} \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) \leq c c_1^{-\theta/n} \tau/2 = \tau/2, \tag{8}$$

при $c c_1^{-\theta/n} = 1$.

Множество $\mathcal{F} = \{f = u\mathcal{X}_{\tilde{\Omega}_N},\ \ u \in C^\infty(\Omega) \cap BW\}$ по доказанному ранее — предкомпактно в $L_q(\tilde{\Omega}_N;\omega)$. Пусть $\bar{g}$ — продолжение нулем на все Ω функций $g \in L_q(\tilde{\Omega}_N;\omega)$. Пусть далее $\{g_1, \dots, g_N\}$ — конечная $\tau/2$-сеть в $L_q(\tilde{\Omega}_N;\omega)$ множества $\mathcal{F}$. Тогда в силу (8) совокупность $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N\}$ будет τ-сетью для шара $BW \cap C^\infty(\Omega)$.

Пусть G — открытое подмножество Ω. Введем обозначения: E_G — оператор вложения $W(G) \to L_q(G;\omega)$, $W(G) = W_p^l(G;\rho,v)$; $\mathcal{N}(\lambda, E_G) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{a_k(E_G) > \lambda} 1$ — функция распределения аппроксимативных чисел $a_k(E_G)$; $E = E_\Omega$, $G_\lambda = \{x \in \Omega:\ \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) > \lambda\}$. Пусть F замкнуто в Ω, G — открытая окрестность F в Ω. По определению $C^\infty(F) = \bigcap\limits_G C^\infty(G)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и* $\{Q^j\}$ — *B-покрытие G_λ, выделенное из семейства* $\{(1-\varepsilon)Q_{h(x)}(x),\ x \in G_\lambda\}$, *где* $0 < h(x) \leq d(x)$. *Существует постоянная* $c > 1$ *такая, что*

$$\mathcal{N}(c\lambda, E) \leq c \max_\nu \sum_{j \in J_\nu} \mathcal{N}(\lambda; E_{Q_j}) \quad \forall \lambda > 0. \tag{9}$$

Доказательства леммы 1 содержатся в работах [8], [9].

Лемма 2. *Существуют не зависящие от* $Q \in \mathcal{B}$ *постоянные* $c_0, c > 0$ *такие, что*

$$\mathcal{N}(c\lambda, E_Q) \leq c_0, \ \ \textit{как только}\ \ K(Q) < \lambda \quad (\lambda > 0). \tag{10}$$

Доказательство. Существует проектор S, ставящий в соответствие функции $u \in C^l(\bar{Q})$, $Q = Q_d$, полином $S_l u$ степени $\leq l - 1$, для которого

$$\int\limits_Q |u - S_l u| \leq c_1 d^l \int\limits_Q |\nabla_l u|$$

(см. [8], с.220). Вложение Соболева $W_1^l(Q_1) \to L_\infty(Q_1)$ влечет оценку

$$\left(\int_Q |v|^q \omega\right)^{1/q} \leq |Q|_\omega^{1/q} \sup_{Q_d} |v| \leq c_2 d^{l-n} |Q|_\omega^{1/q} \left(\int\limits_Q |\nabla_l v| + d^{-l} \int\limits_Q |v|\right). \tag{11}$$

Полагая в (11) $v = u - S_l u$, получим, что на шаре $BW(Q)$

$$\|u - S_l u\|_{L_q(Q;\omega)} \le c_3 d^{l-n} |Q|_\omega^{1/q} \int\limits_Q |\nabla_l u| \le c_3 \mathcal{K}(Q) \Bigg(\int\limits_Q |\nabla_l u|^p \rho \Bigg)^{1/p} \le c_3 \mathcal{K}(Q) \le c_3 \lambda.$$

Т.к. $S \in \mathcal{L}_m(W(Q); L_q(Q;\omega))$ $m = c_0(l,n) > 0$, то на кубе Q, удовлетворяющем условию $\mathcal{K}(Q) \le \lambda$, числа $a_k(E_Q) \le c_3 \lambda$ при $0 \le k \le m$, откуда следует оценка (10).

Лемма 3. *Пусть для функции $d(x)$ существует не зависящее от x число $\eta \in (0,1)$ такое, что*

$$d(t) \ge \eta d(x), \quad \textit{как только} \;\; t \in Q_{(\varepsilon)}(x). \tag{12}$$

Тогда имеет место импликация

$$Q = Q_d(x) \subset Q_{(\varepsilon)}(x), \;\; \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) > \lambda \Rightarrow Q \subset \{x \in \Omega : \;\; d(x)^\theta \Phi(x) \ge c^{-1}\lambda\},$$

где $c > 0$ не зависит от x (и весов ρ, v).

Доказательство . Пусть $\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) > \lambda$, $t \in Q = Q_d(x) \subset Q_{(\varepsilon)}(x)$. В силу (5) и условия (12) $d(t)^\theta \Phi(t) = (1-\varepsilon)^{-\theta} \left(\frac{d(t)}{d(x)} \right)^\theta ((1-\varepsilon) d(x))^\theta \Phi(t) \ge (\eta/(1-\varepsilon))^\theta \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) \ge c^{-1}\lambda$, где $c^{-1} = (\eta/(1-\varepsilon))^\theta$.

Теорема 2. *Пусть пара $(\rho, v) \in \Pi$ относительно функции $d(\cdot)$, удовлетворяющей условию (12), и $\Phi = \Phi_{\sigma,\omega} \in L_{n/\theta}$. Тогда справедлива оценка*

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \le c \lambda^{-n/\theta} \int\limits_{\{d(\cdot)^\theta > c^{-1}\lambda \Phi^{-1}\}} \Phi^{n/\theta}. \tag{13}$$

Доказательство . Введем характеристический размер

$$\hat{d}(x;\lambda) = \sup_{d>0} \{d : \;\; Q = Q_d(x) \subset \Omega, \;\; \mathcal{K}(Q_{(\varepsilon)}) \le \lambda\} \tag{14}$$

(см. [8], с.220). Из монотонного возрастания $\mathcal{K}(x,d)$ по d следует, что $0 < \hat{d}(x;\lambda) \le d(x)$ на $G_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{x \in \Omega : \;\; \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) > \lambda\}$ и $\mathcal{K}(\hat{Q}_{x,\lambda}) = \lambda$, где $\hat{Q}_{x,\lambda} \overset{\text{def}}{=} (1-\varepsilon) Q_d(x)$, $d = \hat{d}(x;\lambda)$. Пусть $\{\hat{Q}^j\}_{j \in J}$ — B-покрытие, выделенное из семейства $\{\hat{Q}_{x,\lambda}, \;\; x \in G_\lambda\}$, $\hat{Q}^j = \hat{Q}_{x^j,\lambda}$. В силу леммы 3 $\hat{Q}^j \subset \{\Phi > c_1^{-1} \lambda d(\cdot)^{-\theta}\}$. Применяя леммы 1, 2 и оценку (5), выводим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(c_2\lambda, E) \;\; &\le \;\; c_2 \max_\nu \sum_{j \in J_\nu} \left(\lambda^{-1} \mathcal{K}(\hat{Q}^j) \right)^{n/\theta} \le \\ &\le \;\; c_3 \lambda^{-n/\theta} \max_\nu \sum_{j \in J_\nu} \int\limits_{\hat{Q}^j} \Phi(x)^{n/\theta} \le c_4 \lambda^{-n/\theta} \int\limits_{\{d(\cdot)^\theta > c_4^{-1}\lambda \Phi(x)^{-1}\}} \Phi(x)^{n/\theta} dx. \end{aligned}$$

Замечание 1. *Пусть вес ω удовлетворяет условию "слабого колебания"относительно базиса $\mathcal{B}$, т.е. существует такое $c > 1$, что $\forall \; Q \in \mathcal{B}$ $\;c^{-1}\omega(y) \le \omega(x) \le c\omega(y)$ при $y \in Q$. К примеру, $\omega(x) = d(x)^\mu$, где $d(x) = \min\{1, \Delta(x)\}$ на $\Omega \ne \mathbb{R}^n$. В этом случае $M^*\omega \asymp \omega$. Запись $f \asymp g$ означает, что $c^{-1} f(x) \le g(x) \le c f(x)$ с некоторой не зависящей от $x \in \Omega$ постоянной $c > 1$.*

Замечание 2. *Пусть веса ρ и v на $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ удовлетворяют относительно* $d(x) = \min\{1, \Delta(x)\}$ *одному из условий:*
a) $|Q|^{-1} \inf\limits_{e \in N_{(\delta)}(Q)} |Q \setminus e|_v \geq c_1 d(x)^{-lp-\alpha}, \ \ |Q|^{-1}|Q|_\sigma \geq c_2 d(x)^{-\beta}$;
b) $|Q|^{-1} \inf\limits_{e \in N_{(\delta)}(Q)} |Q \setminus e|_v \geq c_1 d(x)^{-\alpha}, \ \ |Q|^{-1}|Q|_\sigma \geq c_2 d(x)^{-lp'-\beta}$, *где* $\alpha/p + \beta/p' > 0$, *а* $Q = Q_{(\varepsilon)}(x)$.
В этом случае пара (ρ, v) *с точностью до постоянного множителя* $c > 1$ *удовлетворяет условию* (Π) *относительно функции* $d(x) = \min\{1, \Delta(x)\}$.

Приведем ряд результатов, непосредственно вытекающих из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть веса ρ, v, ω на $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям: a)* $(\rho, v) \in \Pi$ *относительно* $d(x) = \min\{1, \Delta(x)\} = \delta(x)$; *b)* $\int\limits_\Omega \Phi^{n/\theta} < \infty$. *Тогда* $W = W_p^l(\rho, v)$ *компактно вложено в* $L_q(\omega)$. *При этом*

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \leq c\lambda^{-n/\theta}\Bigg[\int\limits_{\Omega_1 \cap \{\Phi > c^{-1}\lambda\}} \Phi^{n/\theta} + \int\limits_{\Omega_1' \cap \{\Phi > c^{-1}\lambda\delta(\cdot)\}} \Phi^{n/\theta}\Bigg], \tag{15}$$

где $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \ \Delta(x) \geq 1\}, \ \ \Omega_1' = \Omega \setminus \Omega_1$.

В частности, пусть $\rho(x) \asymp d(x)^{-\mu}, \ \ v(x) \asymp d(x)^{-\nu}$, $-\infty < \mu, \nu < \infty$, $\nu > lp + \mu$. Пространство $W = W_p^l(\rho, v)$ компактно вложено в $L_q(\omega)$, если

$$I = \int\limits_{\Omega_1} M^*\omega^{n/lp} + \int\limits_{\Omega_1'} M^*(\rho^{-1}\omega)^{n/lp} < \infty,$$

и имеет место оценка

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \leq c\lambda^{-n/l}\Bigg[\int\limits_{\Omega_1 \cap \{(M^*\omega)^{1/p} > c^{-1}\lambda\}} (M^*\omega)^{n/lp} + \int\limits_{\Omega_1' \cap \{M^*(\rho^{-1}\omega)^{1/p} > c^{-1}\lambda\rho^{1/\mu}\}} (M^*(\rho^{-1}\omega))^{n/lp}\Bigg].$$

Если Ω ограничено, то $W_p^l(\rho, v)$ компактно вложено в $L_p(\Omega)$ и

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \leq c\lambda^{-n/l}\Bigg[|\Omega_1| + \int\limits_{\Omega_1' \cap \{\rho^{-1/p - 1/\mu} > c^{-1}\lambda\}} \rho^{-n/lp}\Bigg].$$

Базис $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(\varepsilon)}$, построенный по функции $d(x) = d^*(x)$, будем обозначать через $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*_{(\varepsilon)}$; соответственно, $\Phi^*_{\sigma,\omega} = \Phi_{\sigma,\omega}, \ \ G^*_\lambda = G_\lambda, \ \ \tilde{G^*}_\lambda = \tilde{G}_\lambda$ относительно максимального оператора M^* по базису $\mathcal{B}^*$.

Будем говорить, что вес g на Ω удовлетворяет условию (A^*_∞) (относительно базиса $\mathcal{B}$), если для данного $\tau > 0$ найдется такое $\delta \in (0, 1)$, что $\forall \ Q \in \mathcal{B}$

$$|e|_g \leq \tau|Q|_g, \quad \text{как только} \quad |e| \leq \delta|Q|. \tag{16}$$

Если вес $v \in A^*_\infty$ относительно $\mathcal{B}^*$, то при некотором $c > 1$, как нетрудно убедиться, пара $(\rho, cv) \in \Pi$ относительно $d(x) = d^*(x)$.

Теорема 4. *Пусть веса v, ρ, и ω удовлетворяют условиям: 1)* $v\rho^{-1} \in \Pi^*$; *2) ρ медленно колеблется относительно базиса* $\mathcal{B}^*_{(\varepsilon)}$, *а* $v \in A^*_\infty$;
3) $\int\limits_\Omega (\rho^{-1}M^*\omega)^{n/lp} < \infty$. *Тогда* $W = W_p^l(\rho, v)$ *компактно вложено в* $L_p(\omega)$. *При этом*

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \leq c\lambda^{-n/l}J(c^{-1}\lambda), \tag{17}$$

где $J(\lambda) = \int\limits_{\{(\rho^{-1}v)^*(\rho^{-1}M^*\omega)^{1/lp} > \lambda^{1/l}\}} (\rho^{-1}M^*\omega)^{n/lp}$.

Замечание 3. *На классе весов* $v \in \Pi^* \cap A^*_\infty$ *в ограниченной области* Ω *имеет место результат М. Отелбаева (см.[8])*

$$c^{-1}\mathcal{N}(c\lambda, E) \le \lambda^{-n/l}|\{v^* > \lambda^{1/l}\}| \le c\mathcal{N}(c^{-1}\lambda, E).$$

Если вес $v \in A_\infty$, то найдется постоянная $c = c(\delta) > 1$, $\delta \in (0,1)$, с которой пара (v, cv) удовлетворяет условию $(\Pi_{(\delta,0)})$ на $\mathbb{R}^n$ относительно функции $d(x) \equiv 1$. В следующей теореме функции M^* построены по базису $\mathcal{B} = \{Q_d: \ 0 < d \le 1\}$.

Теорема 5. *Пусть вес* $v \in A_\infty$ *и* $\Phi = (M^* v^{1-p'} M^*\omega)^{1/p} \in L_{n/l}(\mathbb{R}^n)$. *Справедливы утверждения: a)* $W^l_p(v,v)$ *компактно вложено в* $L_p(\mathbb{R}^n)$;
b) имеет место оценка

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \le c\lambda^{-n/l} J(c^{-1}\lambda),$$

где $J(\lambda) = \int\limits_{\{\Phi > \lambda\}} \Phi^{n/lp}$.

Цитированная литература

1. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
2. **Asekritona Irina, Krugljak Natan, Maligranda Lech, Persson Lars-Erik** // Stud.math. 1997. T. 124, № 2. C.107 – 132.
3. **Дьяконов Е. Г.** // Изв. вузов мат. 1997, № 4. С.32 – 50.
4. **Jiang Yangjie, Lin Yongping** // Approxim. Theory and Appl. 1999. T. 15, № 1. C. 50 – 63.
5. **Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.** // Мат. зам. 1999. Т. 65, № 6. С. 871 – 879.
6. **Темляков В. Н.** // Мат. зам. 1998. Т. 63. № 6. С. 891 – 902.
7. **Отелбаев М. О.** // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 4. С. 810 – 813.
8. **Лизоркин П. И. Отелбаев М. О.** // Труды МИАН АН СССР. 1984. Т. 170. С. 213 – 232.
9. **Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.** Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М. 1988.
10. **Кусаинова Л. К.** // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 4. С. 791 – 794.
11. **Мынбаев К. Т.** // ДАН СССР. 1984. Т. 277, № 3. С. 538 – 541.
12. **Кусаинова Л. К.** Теоремы вложения и интерполяции весовых пространств Соболева. Докт. диссерт. Алматы. 1999.
13. **Гусман М.** Дифференцирование интегралов. М. 1978.
14. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. 1973.

Поступила в редакцию 18.02.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 10 — 16*

УДК 517.9

О НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ БОЛЬЦМАНА

А. Ш. Акыш

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125

На основе метода расщепления доказана глобальная теорема существования и единственности решения полного нелинейного уравнения Больцмана в пространстве непрерывных функций.

Введение. Нелинейное уравнение Больцмана [1], опубликованное 130 лет тому назад, имеет богатую историю. Современное состояние его теории содержится, например, в работах [3]–[7]. Еще в 1983 году авторы обзора [5] писали: "... Вот уже свыше 110 лет это уравнение привлекает внимание исследователей, но лишь в последние годы была доказана *разрешимость в целом* пространственно-неоднородной задачи в случае малого отклонения состояния газа от положения равновесия — более общие результаты не получены и по сей день. ..."

Постановка задачи. Нелинейное уравнение Больцмана для упругих шарообразных молекул с радиусом χ, следуя Т. Карлеману [2], можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v, \mathrm{grad} f) = \mathbf{B}(f, f), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{B}(f,f) = \mathbf{J}(f) - f\mathbf{S}(f), \quad \mathbf{J}(f) = \int\limits_{R_3}\int\limits_{\Sigma} f(t,x,v')f(t,x,v_1')g(\theta,W)d\sigma dv_1,$$

$$\mathbf{S}(f) = \int\limits_{R_3}\int\limits_{\Sigma} f(t,x,v_1)g(\theta,W)d\sigma dv_1, \quad g(\theta,W) = 0.5\chi^2 \mid W \mid \sin\theta\cos\theta,$$

v, v_1 — векторы скорости двух сталкивающихся молекул до столкновения, а v', v_1' — векторы скорости после столкновения, соответственно,

$$v = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad v_1 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \; v' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3'), \quad v_1' = (\eta_1', \eta_2', \eta_3') \in R_3,$$

$f = f(t,x,v)$ — функции распределения молекул, имеющих скорость v; $W = v_1 - v$ — вектор относительной скорости перед взаимодействием; скорости молекул v', v_1' связаны со скоростями v, v_1 посредством обычных динамических соотношений:

$$v' = v + \beta(\beta, W), \quad v_1' = v_1 - \beta(\beta, W),$$

Keywords: *Boltzmann non-linear equation, method of splitting, global theorem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35F20, 35F30, 35L60

где β — единичный вектор в направлении рассеяния молекул:

$$\beta = \big(\sin\theta\cos\varepsilon,\ \sin\theta\sin\varepsilon,\ \cos\theta\big), \quad (\theta,\varepsilon) \in \Sigma = \big\{0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varepsilon \le 2\pi\big\}.$$

Рассмотрим для уравнения (1) смешанную задачу Коши в области
$Q = (0,T] \times G \times R_3$ с начальным условием

$$f(t,x,v)\Big|_{t=0} = \varphi(x,v), \tag{2}$$

и периодическим граничным условием

$$f(t,x,v)\Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,x,v)\Big|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1,3}, \tag{3}$$

где t — время, $t \in [0,T]$; $T < \infty$, $G = [0,1]^3$ — единичный куб, $x = (x_1,x_2,x_3) \in G, \Gamma_{\rho x_\alpha}$ — грань куба G, перпендикулярная к оси x_α, проходящая через $x_\alpha = \rho$, ρ принимает значение либо 0, либо 1.

Метод расщепления. Для решения задачи (1)–(3) используем метод расщепления. Отметим, что ранее метод расщепления был применен к некоторым дискретным моделям уравнения Больцмана в работах [4], [8].

Пусть начальная функция $\varphi(x,v)$ положительна в $G \times R_3$, т.е.

$$\varphi(x,v) > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x,v) \in \mathbf{C}^2(G)\bigcap \mathbf{C}(R_3); \tag{4}$$

$$\int\limits_{R_3} \mid v \mid^\gamma \| \varphi(v) \|_{\mathbf{C}(G)}\, dv = A_\gamma < \infty; \quad \gamma = 0,2 \tag{5}$$

и удовлетворяет граничному условию (3), где

$$\| \varphi(v) \|_{\mathbf{C}(G)} = \sup_{x\in G} \varphi(x,v), \quad \text{для} \quad \forall v \in R_3.$$

Отрезок $[0,T]$ разделим на M равных частей длины τ точками $t_n = n\tau$, $n = \overline{0, M-1}$. Предположим, что известны приближения $\{f^n(x,v)\}$ в момент времени $n\tau$. Тогда схемы метода расщепления, соответствующие задаче (1)–(3), записываются в следующем виде:

$$\frac{f^{n+1/5} - f^n}{\tau} = -f^{n+1/5}\mathbf{S}(f^n), \tag{6}$$

$$\frac{f^{n+2/5} - f^{n+1/5}}{\tau} = \mathbf{J}(f^n), \tag{7}$$

с начальным условием

$$f^0(x,v) = \varphi(x,v) \tag{8}$$

и

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5} - f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + \xi_\alpha \frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1,3}, \tag{9}$$

с граничным условием

$$f^{n+(\alpha+2)/5} \mid_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f^{n+(\alpha+2)/5} \mid_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{10}$$

Решение $f^{n+1/5}$ на дробном шаге $n + 1/5$ определяется явно из нелинейного уравнения (6):

$$f^{n+1/5} = \frac{f^n}{1 + \tau\mathbf{S}(f^n)}\ . \tag{11}$$

Отсюда следует, что это уравнение с точностью $O(\tau^2)$ можно записать в виде:

$$f^{n+1/5} = (1 - \tau \mathbf{S}(f^n))f^n. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что на решениях из пространства

$$C^{(2)}(0,T]\bigcap C^{(3)}(G)$$

уравнения (6), (7), (9) аппроксимируют на целом шаге по времени с первым порядком аппроксимации по τ следующее разностно-функциональное уравнение Больцмана:

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x_\alpha} = \mathbf{B}(f^n, f^n), \tag{13}$$

соответствующее (1).

Пусть приближение $f^n(x,v)$ — положительное и удовлетворяет неравенствам

$$\int\limits_{R_3} |\ v\ |^\gamma \|\ f^n(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv < \infty; \quad \gamma = 0, 2,$$

шаг τ подчинен ограничению

$$\tau < \left(\inf_G \int\limits_{R_3} f^n dv\right) \bigg/ \left(\sup_G \int\limits_{R_3} f^n \mathbf{S}(f^n) dv\right). \tag{14}$$

Из (6) ((12)) следует, что функция $f^{n+1/5}$ равномерно ограничена по $(x,v) \in G \times R_3$ функцией f^n, т.е.

$$f^{n+1/5}(x,v) \le f^n(x,v). \tag{15}$$

Интегрируя неравенство (15) по области R_3, имеем

$$\int\limits_{R_3} |\ v\ |^\gamma \ \|\ f^{n+1/5}(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv \le \int\limits_{R_3} |\ v\ |^\gamma \ \|\ f^n(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv, \quad \gamma = \overline{0,2}. \tag{16}$$

Складывая (7) и (11), получим

$$f^{n+2/5} = \frac{f^n}{1 + \tau \mathbf{S}(f^n)} + \tau \mathbf{J}(f^n). \tag{17}$$

Отсюда с учетом (14), используя (12) и свойство интеграла столкновений, находим

$$\int\limits_{R_3} |\ v\ |^\gamma \ \|\ f^{n+2/5}(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv \le \int\limits_{R_3} |\ v\ |^\gamma \ \|\ f^n(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv, \gamma = 0, 2. \tag{18}$$

Из последних оценок следует

$$\int\limits_{R_3} |\ v\ |\ \|\ f^{n+2/5}(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv \le \int\limits_{R_3} (1 + |\ v\ |^2)\ \|\ f^n(v)\ \|_{\mathbf{C}(G)}\ dv. \tag{19}$$

Задача (9), (10) имеет единственное положительное решение, которое задается с помощью следующих формул:

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(., x_\alpha, ., v) = \mu\nu(x_\alpha, 0) \int\limits_0^1 \exp[-a_\alpha(1 - s_\alpha)] f^{n+(\alpha+1)/5}(., s_\alpha, ., v) ds_\alpha +$$

$$+\int\limits_0^{x_\alpha}\nu(x_\alpha,s_\alpha)f^{n+(\alpha+1)/5}(.,s_\alpha,.,v)ds_\alpha,\ \ \alpha=\overline{1,3};\ \ \xi_\alpha>0\,, \tag{20}$$

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(.,x_\alpha,.,v)=\mu\gamma(1,x_\alpha)\int\limits_0^1\exp[-a_\alpha s_\alpha]f^{n+(\alpha+1)/5}(.,s_\alpha,.,v)ds_\alpha+$$

$$+\int\limits_0^{x_\alpha}\nu(x_\alpha,s_\alpha)f^{n+(\alpha+1)/5}(.,s_\alpha,.,v)ds_\alpha,\ \ \alpha=\overline{1,3};\ \ \xi_\alpha<0\,, \tag{21}$$

$$f^{n+(\alpha+2)/4}(.,x_\alpha,.,v)=f^{n+(\alpha+1)/5}(.,x_\alpha,.,v)\quad \alpha=\overline{1,3};\quad \xi_\alpha=0, \tag{22}$$

где

$$a_\alpha=\mid\tau\xi_\alpha\mid^{-1},\ \nu(y,z)=a_\alpha\exp[-a_\alpha(y-z)],\ \mu=[1-\exp(-a_\alpha)]^{-1}.$$

Из (20)–(22) следует, что $f^{n+(\alpha+2)/5}(.,x_\alpha,.,v)>0,\ \alpha=\overline{1,3}$ почти всюду в $G\times R_3$ и является периодической функцией по x_α, так как $f^{n+2/5}(.,x_\alpha,.,v)$ — положительная и периодическая по $x_\alpha,\ \alpha=\overline{1,3}$.

Лемма 1. *Для решения задачи (9)–(10) имеют место оценки:*

$$\parallel f^{n+(\alpha+2)/5}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}\leq\parallel f^{n+(\alpha+1)/5}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}\quad \forall v\in R_3,\quad \alpha=\overline{1,3}. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим решение (20) задачи (9)–(10) при $\xi_\alpha>0$. С учетом положительности решения, переходя к неравенству, получим

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(.,x_\alpha,.,v)\leq\parallel f^{n+(\alpha+1)/5}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}\left(\mu\nu(x_\alpha,0)\int\limits_0^1\exp[-a_\alpha^{(k)}(1-s_\alpha)]ds_\alpha+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{x_\alpha}\nu(x_\alpha,s_\alpha)ds_\alpha\right),\ \ \alpha=\overline{1,3};\ \ \xi_\alpha>0.$$

Вычислив интегралы, находим:

$$\mu\nu(x_\alpha,0)\int\limits_0^1\exp[-a_\alpha^{(k)}(1-s_\alpha)]ds_\alpha=\exp(-a_\alpha^{(k)}x_\alpha),\quad \int\limits_0^{x_\alpha}\nu(x_\alpha,s_\alpha)ds_\alpha=1-\exp(-a_\alpha^{(k)}x_\alpha).$$

Подставляя найденные значения интегралов в неравенство, получим доказательство первой части леммы 1 при $\xi_\alpha>0$. Таким же образом доказываются остальные случаи.

Лемма 1 доказана.

Интегрируя, неравенство (23) по области R_3, находим

$$\int\limits_{R_3}\mid v\mid^\gamma\parallel f^{n+(\alpha+2)/5}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}dv\leq\int\limits_{R_3}\mid v\mid^\gamma\parallel f^{n+(\alpha+1)/5}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}dv,\quad \gamma=\overline{0,2};\quad \alpha=\overline{1,3}. \tag{24}$$

Лемма 2. *Если начальная функция удовлетворяет условию (5), то для решений задачи (6)–(10) справедливы оценки:*

$$\int\limits_{R_3}\mid v\mid^\gamma\parallel f^{n+1}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}dv\leq\int\limits_{R_3}\mid v\mid^\gamma\parallel f^{n+4/5}(v)\parallel_{\mathbf{C}(G)}dv\leq$$

$$\leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+3/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+2/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+1/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel \varphi(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \equiv A_{\gamma},\ \gamma = 0, 2; \tag{25}$$

$$\int\limits_{R_3} \mid v \mid \parallel f^{n+1}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid \parallel f^{n+4/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid \parallel f^{n+3/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} (1+ \mid v \mid^2) \parallel \varphi(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \equiv B. \tag{26}$$

Доказательство. Из неравенств (16), (18), (24) выводится цепь неравенств

$$\int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+1}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+4/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+3/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+2/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n+1/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \mid v \mid^{\gamma} \parallel f^{n}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv,\ \gamma = 0, 2.$$

Отсюда, суммируя по n, приходим к доказательству (25), из которого следует (26).

Лемма 2 доказана.

Далее, используя преобразование Карлемана интеграла столкновений из ([2], стр.33), уравнение (17) запишем виде:

$$f^{n+2/5} = f^{n+1/5} + \tau \mathbf{J}(f^n) \equiv f^{n+1/5} + 2\tau \int\limits_{R_3} \frac{f^n(x, v')}{\rho_{vv'}} \int\limits_{E_{vv'}} f^n(x, q) dq dv', \tag{27}$$

где $E_{vv'}$ — бесконечная плоскость, dq — элемент площади на $E_{v'v}$,

$$\rho_{vv'} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_1')^2 + (\xi_2 - \xi_2')^2 + (\xi_3 - \xi_3')^2} - \text{ расстояние между } \quad v \text{ и } v'.$$

Будем пользоваться неравенствами Карлемана, которые в нашем случае запишутся в следующем виде:

$$\int\limits_{E_{v'v}} \mathbf{J}(f^n) dq \leq \pi \int\limits_{R_3 \times R_3} f^n(x, v) f^n(x, v_1) dv dv_1 \ \forall x \in G, \tag{28}$$

$$\int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \mathbf{J}(f^n) dv \leq 4\pi \int\limits_{R_3 \times R_3} f^n(x, v) f^n(x, v_1) dv dv_1,\ \forall x \in G. \tag{29}$$

Из уравнения (7) с помощью оценок (16), (24) и предыдущих неравенств получим

$$\int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n+2/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv + 4\pi\tau A_0^2,$$

$$\int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+2/5}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq \leq \int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq + \tau\pi A_0^2.$$

Тогда, объединяя последние неравенства с оценкой (23), имеем цепь неравенств

$$\int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n+1}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n+4/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n+3/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n+2/5}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv + 4\pi\tau A_0^2,$$

$$\int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+1}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq \leq \int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+4/5}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq \leq \int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+3/5}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq \leq$$

$$\leq \int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+2/5}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq \leq \int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq + \pi\tau A_0^2.$$

Отсюда, суммируя по n, найдем

$$\int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel f^{n+1}(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv \leq \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \parallel \varphi(v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv + 4\pi T A_0^2 \equiv A_3, \tag{30}$$

$$\int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+1}(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq \leq \int\limits_{E_{v'v}} \parallel \varphi(q) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dq + \pi T A_0^2 \equiv A_4. \tag{31}$$

Из уравнения (27) с учетом (15), (23) и последних неравенств, находим оценку

$$f^{n+1}(x,v) \leq f^n(x,v) + \tau A_5, \ \text{ где } \ A_5 = 2A_3A_4.$$

Отсюда получаем

$$\parallel f^{n+1}(x,v) \parallel_{\mathbf{C}(G\times R_3)} \leq \parallel \varphi(x,v) \parallel_{\mathbf{C}(G\times R_3)} + TA_5 \equiv A_6. \tag{32}$$

Единственность решения. Предположим, что имеются два решения $f(t,x,v)$ и $F(t,x,v)$. Выпишем уравнение для их разности $U = f - F$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (v,\ \mathrm{grad} U) = \mathbf{B}(f,f) - \mathbf{B}(F,F)$$

в области $Q = (0,T] \times G \times R_3$ с нулевым начальным

$$U\ |_{t=0} = 0$$

и периодическим граничным условием

$$U(t,x,v)\Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = U(t,x,v)\Big|_{\Gamma_{1x_\alpha}},\ \alpha = \overline{1,3}.$$

Благодаря $U \in \mathbf{C}(Q)$ установлено соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{R_3} \parallel U(t,v) \parallel_{\mathbf{C}(G)} dv = 0, \quad \text{что и равносильно} \quad U(t,x,v) \equiv 0.$$

Т е о р е м а . *Если положительная начальная функция $\varphi(x,v)$ удовлетворяет условиям (4)–(5), то существует единственное положительное решение задачи (1)–(3) $f(t,x,v)$ на интервале времени $[0,T]$, $T < \infty$, принадлежащее $\mathbf{C}(Q)$.*

Цитированная литература

1. **Больцман Л.** Лекции по теории газов. М., 1956. 554 с.

2. **Карлеман Т.** Математические задачи кинетической теории газов. М., 1960. 150 с.

3. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978. 495 с.

4. **Sultangazin U. M.** Discrete nonlinear models of the Boltzmann equation. M., 1987. 200 p.

5. Неравновесные явления. Уравнения Больцмана (ред. Либовиц Дж. Л., Монтролл Е. У.). Пер. с англ. М., 1986. 272 с.

6. **DiPerna R. J., Lions P. L.** // C. R. Acad. Sci. Paris. 1988, T. 306. S. I. P. 343 – 346.

7. **Сакабеков А.** // Автореф. ... док. физ.-мат.наук. Алматы, 1993. 19с.

8. **Акишев А. Ш.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37, № 3. С. 660 – 670.

9. **Акыш А. Ш.** //IЗДЕНIС. АЛМАТЫ. 2001. 1. С. 194 – 200.

Поступила в редакцию 31.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 17 — 23*

УДК 538.3+538.56

О ЗАМЫКАНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Л. А. Алексеева

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, alexeeva@math.kz

Построены обобщенные решения векторного уравнения A-поля, эквивалентного системе уравнений Максвелла, для нестационарных, стационарных и монохроматических электромагнитных полей. Предложено новое уравнение для комплексного J-тока, замыкающее систему уравнений Максвелла на основе гипотезы о магнитных зарядах: магнитный заряд существует и пропорционален массе. Рассмотрены законы сохранения энергии (A,J)-поля.

Система уравнений Максвелла для электромагнитных (ЭМ) полей в случае, когда действующие электрические токи неизвестны, незамкнута. Для ее замыкания привлекают различные, так называемые материальные уравнения, вид которых зависит от модели материальной среды, в которой ЭМ-поля исследуются. В работе [1] построено одно дифференциальное уравнение для комплексного трехмерного векторного A-поля, эквивалентное системе уравнений Максвелла для электромагнитных полей, названное *модифицированным* (точнее *комплексифицированным*) уравнением Максвелла. Вместо системы уравнений Максвелла здесь используем это уравнение и строим его замыкание.

Согласно современным физическим представлениям, магнитные заряды и токи не существуют. Это условие нарушает свойства симметрии уравнений Максвелла и накладывает требование на соленоидальность магнитных полей. Предположим, однако, что магнитный заряд существует. Здесь на основе этого предположения и гипотезы, что магнитный заряд пропорционален массе, предлагается новое дифференциальное уравнение для комплексного J-тока, которое содержит в себе уравнение Ньютона для движущихся заряженных масс. Оно и замыкает систему уравнений Максвелла.

1. Комплексифицированное уравнение Максвелла. В статье [1] показано, что систему уравнений Максвелла для ЭМ-поля можно записать в виде

$$-c^{-1}\partial_t A = i\,\mathrm{rot}\,A + J, \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{1}$$

$$\rho = c^{-1}\mathrm{div}\ A, \tag{2}$$

где A — комплексный вектор напряженности ЭМ-поля

$$A = A^E + i\,A^H = \sqrt{\varepsilon}E + i\,\sqrt{\mu}H,$$

Keywords: *complex form of Maxwell equation, generalized solution, A-field, magnetic charge, mass, Newton equations*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

ток J и комплексный заряд ρ A-поля определяются через электрические и магнитные токи и обычные ЭМ-заряды формулами

$$J = J^E - iJ^H = \sqrt{\mu} j^E - i\sqrt{\varepsilon} j^H, \quad \rho = \sqrt{\mu}\rho^E - i\sqrt{\varepsilon}\rho^H; \ \rho^E = \varepsilon \operatorname{div} E, \ \rho^H = -\mu \operatorname{div} H. \tag{3}$$

Здесь электрические и магнитные проницаемости ε, μ — положительные константы, c — скорость ЭМ-волн, E, H — напряженности электрического и магнитного поля, $j^E(x,t), j^H(x,t)$ — плотности электрических и магнитных токов, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $t \geqslant 0$.

Если ввести действительный вектор скорости зарядов V, то

$$J = \rho V, \quad j^E = \rho^E V, \quad j^H = \rho^H V. \tag{4}$$

Заметим, что энергия ЭМ-поля при такой записи определяется через модуль комплексного вектора A-поля

$$W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \|E\|^2 + \mu \|H\|^2\right) = 0,5\,\|A\|^2 = 0,5(A, A^*), \tag{5}$$

а вектор Пойнтинга как

$$P = E \times H = \frac{ic}{2} A \times A^*, \tag{6}$$

где $A^* = \sqrt{\varepsilon}E - i\sqrt{\mu}H$ — комплексно-сопряженное A.

Теорема 1. *Решение уравнения (1) является решением волнового уравнения вида*

$$\Delta A - c^{-2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -i \operatorname{rot} \mathrm{J} + \mathrm{c} \operatorname{grad} \rho + \mathrm{c}^{-1}\partial_{\mathrm{t}}\mathrm{J}. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточно взять ротор в (1), преобразовать двойной ротор с учетом равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta, \tag{8}$$

а ротор под знаком производной по времени выразить через токи и $\partial_t A$, еще раз используя (1).

Используя свойство фундаментального решения волнового уравнения легко доказывается

Теорема 2. *Если действующие токи $J \in D'_3(R^4_+)$, то обобщенное решение уравнения (1), описывающее излучаемые и затухающие на бесконечности ЭМ-волны, имеет вид свертки*

$$A = -i \operatorname{rot}(\mathrm{J} * \psi) + \mathrm{c} \operatorname{grad}(\rho * \psi) + \mathrm{c}^{-1}\partial_{\mathrm{t}}(\mathrm{J} * \psi), \tag{9}$$

где ψ — фундаментальное решение волнового уравнения $\psi = -(4\pi R)^{-1}\delta(t - R/c)$, $\delta(t - R/c)$ — простой слой на расширяющейся сфере $R = ct$ [1, 3].

Здесь $D'_3(R^4_+)$ — трехмерное пространство обобщенных вектор-функций на $D_3(R^4_+)$, $R^4_+ = R^3 \times (0, \infty)$.

Замечание. В формуле (6) [1], аналогичной (1), допущена описка в знаке перед ротором, что повлияло на знак первого слагаемого в правой части формулы теоремы 6 [1], аналогичной теореме 3, доказанной там иначе, с помощью функции Грина уравнений (1).

Рассмотрим некоторые, важные с точки зрения приложений, типы полей.

2. Монохроматическое A-поле. В радиофизике и радиотехнике изучаются и используются процессы, когда действующие токи и соответственно ЭМ-поля имеют гармоническую зависимость от времени с частотой $\omega, \omega > 0$:$J(x,t) = J(x)\exp(-i\omega t)$, $A = A(x)\exp(-i\omega t)$. В этом случае из (1) для комплексной векторной амплитуды получим следующее простое на вид уравнение

$$A = k^{-1}\operatorname{rot} A - ik^{-1} J, \quad k = \omega/c. \tag{10}$$

Если взять дивергенцию (10), с учетом равенства (8) получим, что векторная амплитуда удовлетворяет уравнению Гельмгольца (это также следует из теоремы 2). Отсюда следует, что верна следующая

Т е о р е м а 3. *Решение уравнения (11) удовлетворяет уравнению*

$$\Delta A + k^2 A = -ik\, J - i \operatorname{rot} \mathrm{J} + \mathrm{c}\, \mathrm{grad}\rho,$$

и, если $J \in D_3'(R^3)$ *и* $\operatorname{supp} \mathrm{J(x)}$ *ограничен, то представимо в виде*

$$4\pi A = ik\frac{e^{ikR}}{R} * J + i \operatorname{rot}\left(\frac{\mathrm{e^{ikR}}}{\mathrm{R}} * \mathrm{J}\right) - \mathrm{c}\, \mathrm{grad}\left(\frac{\mathrm{e^{ikR}}}{\mathrm{R}} * \rho\right), \quad \rho = -\mathrm{i}\omega^{-1}\operatorname{div} \mathrm{J}.$$

Это решение единственно в классе решений, удовлетворяющих условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности [3].

Здесь $D_3'(R^3)$ — трехмерное пространство обобщенных вектор-функций на $D_3(R^3)$.

3. Стационарное А-поле. Пусть А-поле не зависит от времени. Тогда уравнение (7) преобразуется в уравнение Пуассона:

$$\Delta A = -i\, \mathrm{rot}\mathrm{J} + \mathrm{c}\, \mathrm{grad}\rho, \tag{11}$$

решение которого имеет вид ньютоновского потенциала. А именно, легко доказывается следующая

Т е о р е м а 4. *Если* $J \in D_3'(R^3)$ *и* $\operatorname{supp} \mathrm{J(x)}$ *ограничен, то решение (11), стремящееся к нулю на бесконечности, единственно и представимо в виде свертки*

$$A = -c\, \mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi \mathrm{R}} * \rho\right) + \mathrm{i}\, \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi \mathrm{R}} * \mathrm{J}\right). \tag{12}$$

Если ввести скалярный и векторный потенциалы А-поля: $c^{-1}A = \mathrm{grad}\Phi + \mathrm{i}\, \mathrm{rot}\Psi,\ \mathrm{div}\Psi = 0$, то, подставляя их выражения в (1) и (2), с учетом равенства (8) получим также уравнения Пуассона

$$\Delta\Phi = \rho, \qquad \Delta\Psi = -c^{-1}J, \tag{13}$$

откуда следует представление потенциалов стационарного поля через ньютоновские потенциалы

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi R} * \rho, \qquad \Psi = \frac{1}{4\pi c\, R} * J, \tag{14}$$

что также следует и из (11).

П р и м е р 1 . Рассмотрим токи в шаре, вращающиеся вокруг оси X_3 с постоянной угловой скоростью ω

$$J = \rho(x)\left[\varpi \times x\right], \quad \varpi = (0,0,\omega); \quad \rho(x) = 0, \quad \|x\| > a.$$

Тогда потенциалы поля имеют вид

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\|y\|<a} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} dV(y), \ \ \Psi = -\frac{\omega}{4\pi}\int\limits_{\|y\|<a} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} dV(y).$$

Если плотность токов — константа: $\rho = \rho_0$, то интегралы можно вычислить аналитически. Например,

$$\Phi = -\frac{\rho_0}{2}\int\limits_{R'<a} R'^2 dR' \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\vartheta}} = \frac{\rho_0}{2R}\int\limits_{R'<a} R' dR' \int\limits_{-R'}^{R'} d\sqrt{R^2 + R'^2 - 2Rz} =$$

$$= \frac{\rho_0}{2R} \int\limits_{R'<a} R' \left(|R - R'| - R - R' \right) dR' = -\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0 a^3/3R, & R \geq a \\ 0,5\rho_0(a^2 - R^2/3), & R \leq a \end{array} \right. .$$

Отсюда следует известный результат [2], что вне шара потенциальная часть поля совпадает с полем точечного заряда $\rho = \rho_\delta(x)$, равного заряду шара $\rho_{S_a} = \frac{4\pi a^3 \rho_0}{3}$, сосредоточенного в точке $x = 0$. Она имеет следующий вид

$$\operatorname{grad} \Phi = \left\{ \frac{\rho_0 \mathrm{x}}{3}, \ \mathrm{R} \leq \mathrm{a}; \ \ \frac{\rho_0 \mathrm{a}^3}{3\mathrm{R}^2} \, \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{R}}, \ \mathrm{R} \geq \mathrm{a} \right\}$$

и максимальна на поверхности шара, а вне его убывает как $1/R^2$.

Аналогично находим векторный потенциал

$$\Psi_2 = -\frac{\rho_0}{4\pi R} \int\limits_{R'<a} R'^3 dR' \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin\vartheta \cos\varphi + x_1 \cos\vartheta}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\vartheta}} d\varphi =$$

$$= -\frac{\rho_0 x_1}{4\pi R} \int\limits_{R'<a} R' dR' \int\limits_{-R'}^{R'} \frac{z}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2Rz}} dz = \frac{\rho_0 x_1}{2\pi R} \int\limits_0^a \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2r^4}{3R^2}, & r \leq R \\ \frac{2}{3} r R, & r \geq R \end{array} \right\} dr =$$

$$= \frac{\rho_0 a^3 x_1}{3\pi R} \left\{ \begin{array}{ll} a^2/4R^2, & R \geq a \\ aR - 3R^2/4, & R \leq a \end{array} \right\}.$$

Также определяется

$$\Psi_1 = -\frac{\rho_0 \omega x_2}{3\pi R} \left\{ \frac{a^4}{4R^2}, \ R \geq a; \quad \left\{ R(a - \frac{3}{4}R), \ R \leq a \right\} \right\}.$$

Далее находим соленоидальную составляющую A-поля

$$\{ i \operatorname{rot} \Psi \}_{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{i}\rho_0\omega}{3\pi} \mathrm{e}_{\mathrm{kmj}} \mathrm{e}_{\mathrm{jl3}} \partial_{\mathrm{m}} \left\{ \frac{\mathrm{x_l}}{\mathrm{R}} \left\{ \frac{\mathrm{a}^4}{4\mathrm{R}^2}, \quad \mathrm{R} \geq \mathrm{a}; \ \mathrm{R}\left(\mathrm{a} - \frac{3}{4}\mathrm{R} \right), \quad \mathrm{R} \leq \mathrm{a} \right\} \right\} \Rightarrow$$

$$i \operatorname{rot} \Psi = -\frac{\mathrm{i}\,\rho_0\omega}{3\pi} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a^4}{R^3} \left(\frac{3x_1x_3}{4R^2}, \, \frac{3x_2x_3}{4R^2}, \, \frac{1}{2} - \frac{3r^2}{4R^2} \right), & R \geq a \\ \left(\frac{3x_1x_3}{4R}, \, \frac{3x_2x_3}{4R}, \, 2a - \frac{3}{2}R\left(1 + \frac{r^2}{2R^2}\right) \right), & R \leq a \end{array} \right. ,$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Здесь в экваториальной плоскости ($x_3 = 0$) и на оси вращения X_3 $\mathrm{rot}\Psi$ параллелен X_3

$$i \operatorname{rot} \Psi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, 0) = -\frac{\mathrm{i}\rho_0\omega}{3\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^4}{R^3} \left(0, \, 0, \, \frac{1}{2} - \frac{3r^2}{4R^2} \right), \ R \geq a \\ \left(0, \, 0, \, 2a - \frac{3}{2}R\left(1 + \frac{r^2}{2R^2}\right) \right), \ R \leq a \end{array} \right. ;$$

$$i \operatorname{rot} \Psi(0, 0, \mathrm{x}_3) = -\frac{\mathrm{i}\rho_0\omega}{3\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^4}{x_3^2} \, (0, \, 0, \, 5), \ R \geq a \\ \left(0, \, 0, \, 2a - \frac{3}{2} \, |x_3| \right), \ R \leq a \end{array} \right. .$$

Заметим, что как потенциалы, так и поле A непрерывны при любых x, в том числе и при $R = a$.

4. Замыкание уравнений (1) . Векторное уравнение (1) незамкнуто. Оно содержит две неизвестные вектор-функции A и J. Если J известно, то уравнения достаточно для построения решений. Тогда формула (2) служит для определения заряда по найденному A. Попробуем замкнуть (1).

Вначале рассмотрим уравнение (13). Заметим, что первое уравнение в (13) справедливо для любого ЭМ-поля, т.к. является следствием (2). Действительная часть этого уравнения описывает кулоновское поле электрического заряда, а мнимая по виду совпадает с уравнением для потенциала ньютоновского гравитационного поля, плотность массы которого пропорциональна плотности массы магнитного заряда. Закон сохранения заряда по виду также совпадает с законом сохранения массы. Отсюда естественно возникает

Гипотеза. Магнитный заряд — это гравитационная масса (с точностью до некоторого размерного сомножителя κ): $\rho_g = \kappa\sqrt{\varepsilon}\rho^H$. Магнитные токи — это количество движения этой массы или массовые токи (по аналогии с электрическими токами): $\rho_g V = \kappa\sqrt{\varepsilon} j^H$, где V — скорость движения гравитационной массы.

Опираясь на эту гипотезу, замкнем систему уравнений Максвелла. Для этого рассмотрим новое уравнение

$$\kappa \frac{dJ}{dt} = -i\rho\, c\, A + A \times J. \tag{15}$$

Здесь слева стоит полная производная тока J по времени в точке x

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} V_k \frac{\partial J}{\partial x_k}.$$

Отсюда, выделяя мнимую и действительную части, получим два уравнения для массовых и электрических токов

$$\kappa\sqrt{\varepsilon}\,\frac{dj^H}{dt} = \rho^E E + \rho^H H + j^E \times B - j^H \times D, \tag{16}$$

$$\kappa\sqrt{\mu}\,\frac{dj^E}{dt} = \left(\rho^E B - \rho^H D\right) + c^{-1}\left(E \times j^E + H \times j^H\right). \tag{17}$$

Здесь через D и B обозначены электрическое смещение и магнитная индукция: $D = \varepsilon E,\ B = \mu H$.

Если постулировать равенство гравитационной и инертной массы (что общепринято), то уравнение (15) по виду совпадает со вторым законом Ньютона. Это и послужило идеей для его введения. Действительно, здесь в левой части стоит производная от плотности количества движения, а в правой части уравнения последовательно стоят кулоновская сила притяжения зарядов ($\rho^E E$), ньютоновская сила притяжения масс ($\rho^H H$), лоренцева сила ($j^E \times B$), действующая на движущиеся заряды в магнитном поле и последняя новая сила ($-j^H \times D$), которая описывает действие электрического поля на движущиеся массы. Назовем эту силу *электромассовой.*

Второе уравнение (17) — новое. Оно описывает закон изменения электрических токов под действием A-поля. В такой форме он неизвестен и, конечно, нуждается в экспериментальной проверке, как и выше введенная *электромассовая* сила. Эти два уравнения совместно с системой двух уравнений Максвелла (действительная и мнимая части (1)) дают замкнутую систему уравнений для определения токов и напряженностей ЭМ-поля.

Определение. *Назовем K "плотностью"электрокинетической (или теплокинетической) энергии J-поля*

$$K = 0,5\kappa\,(J, J^*) = 0,5\kappa\left(\mu\left\|j^E\right\|^2 + \varepsilon\left\|j^H\right\|^2\right). \tag{18}$$

Заметим, что она включает плотность энергии электрических токов (джоулево тепло) и, согласно принятой гипотезе, плотность кинетической энергии. Второй вариант названия этой энергии предлагаем именно из этих соображений.

Название плотность в определении включено в кавычки из-за размерности, т.к. размерность этой величины не совпадает с размерностью плотности энергии (дж/м^3), поскольку наряду с квадратом скорости тока в нее входят квадраты плотностей зарядов.

Для K справедлива

Теорема 5. *(закон сохранения электрокинетической энергии)*

$$\frac{dK}{dt} = \mathrm{Im}(\rho c\, A, J^*) + \mathrm{Re}(A \times J, J^*). \tag{19}$$

Доказательство. Если уравнение (15) умножить скалярно на $0,5J^*$ и сложить с его комплексно-сопряженным, то получим формулу теоремы.

5. Уравнения (A,J)-поля. Итак, замкнутая система уравнений для (A,J)-поля может быть представлена в виде трех уравнений (два векторных и одно скалярное)

$$-c^{-1}\partial_t A = i\,\mathrm{rot} A + J, \tag{20}$$

$$\kappa \frac{dJ}{dt} = A \times J - i\rho\, c\, A, \tag{21}$$

$$\rho = c^{-1}\mathrm{div}\, A, \tag{22}$$

которые связывают три известных поля: электрическое, магнитное и гравитационное с движением масс и электрических зарядов. Если точнее, то, согласно этим уравнениям, магнитное поле есть проявление соленоидальной части H-поля, а гравитационное поле — его потенциальной части. Следовательно, полей всего два: электрическое и *гравимагнитное*.

Решения этой системы уравнений удовлетворяют следующим законам сохранения [1]

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\, J = 0, \tag{23}$$

$$\partial_t W + \mathrm{div}\, P = -\mathrm{Re}(J, A^*), \tag{24}$$

$$\frac{dK}{dt} = \mathrm{Im}(\rho c\, A, J^*) + \mathrm{Re}(A) \times J, J^*). \tag{25}$$

Заметим, что система уравнений (20)–(22) нелинейна, построение ее решений является нетривиальной задачей. Здесь в качестве ее следствий рассмотрим

Пример 2. Пусть электрических зарядов и соответственно токов нет ($\rho^E = 0,\ J^E = 0$). Тогда из (20)–(22) имеем систему уравнений для описания движения масс:

$$-\varepsilon\, \partial_t E + \mathrm{rot}\, H = 0, \quad \mu\, \partial_t H + \mathrm{rot}\, E = j^H,$$

$$\kappa \sqrt{\varepsilon}\, \frac{dj^H}{dt} = \rho^H H - j^H \times D, \tag{26}$$

$$\rho^H D = c^{-2} H \times j^H, \quad \sqrt{\varepsilon}\, \rho^H = -c^{-1}\sqrt{\mu}\, \mathrm{div}\, H, \quad \mathrm{div}\, E = 0. \tag{27}$$

Как видим, в этом случае движущаяся масса порождает не только гравимагнитное H-поле, но и соленоидальное электрическое E-поле, которое влияет на ее движение. При этом из (20)–(23) следует

$$\partial_t W + \mathrm{div}\, P = (j^{\mathrm{H}}, H), \quad \partial_t \rho^H + \mathrm{div}\, j^H = 0, \quad \frac{dK}{dt} = (\rho^H H, J^H). \tag{28}$$

Если процесс стационарный, то, согласно этим законам, $\mathrm{div}\, P = 0$, $\mathrm{div} \rho_g V = 0$, т.е. такой процесс может происходить только при соленоидальных массовых токах. Вектор Пойнтинга P тоже вихревой. Тогда

$$\mathrm{rot}\, H = 0, \quad \mathrm{rot}\, E = j^H. \tag{29}$$

Следовательно, H-поле чисто потенциальное, гравитационное, магнитного поля нет. Однако, при этом вихревое электрическое поле отлично от нуля и зависит от действующих массовых токов.

Из (27) следуют условия ортогональности

$$(E, j^H) = 0, \qquad (E, H) = 0.$$

С учетом определения полной производной и стационарности токов, в этом случае конвективная часть производной K по времени удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=i}^{3} \frac{\partial K}{\partial x_j} V_j = (\rho^H H, J^H). \tag{30}$$

Вопросы существования решения уравнений (20)–(22) и их построения для этих примеров здесь пока не рассматриваются.

6. Размерности. Пусть $< f >$ размерность f. В силу (5) размерность квадрата модуля A равна размерности плотности энергии ЭМ-поля, поэтому A-поле является энергетическим: $< (A, A^*) >=$дж/м^3.

Обозначим размерность A через $\alpha =< A >$. Из формул (2)-(6) получим размерности остальных величин: $< P >= \alpha \cdot$м/с, $< J >= \alpha/$м, $< \rho >= \alpha \cdot$с/м^2, $< k >= \alpha \cdot$с, $K = \alpha^3$с/м^2 (не путать с=сек со скоростью ЭМ-волн c).

Заключение. Представленная математическая модель (A, J)-поля (20)–(22), как показано, включает в себя систему уравнений Максвелла и уравнения Ньютона для движущихся заряженных масс. Она позволяет ввести понятие гравимагнитного поля, как поля, потенциальная часть которого является гравитацией, а соленоидальная — магнетизмом. В основе модели лежит гипотеза, что по-существу магнитный заряд — это масса, которая определяется дивергенцией гравимагнитного поля. Соответственно, магнитные токи — это движущиеся массы или массовые токи.

Вторoе уравнение ньютоновского типа (15) замыкает систему уравнений относительно A-поля и J-тока. Оно содержит в себе также закон изменения электрических токов под действием электрического и гравимагнитного полей. В такой форме этот закон, конечно, нуждается в экспериментальной проверке, как и сама гипотеза о магнитном заряде. Здесь эта гипотеза принята на основе совпадения дифференциальных уравнений для потенциалов гравитационного поля масс и поля распределенных магнитных зарядов. С нашей точки зрения, представленная модель энергетического электро-грави-магнитного А-поля непротиворечива и может рассматриваться как одна из математических моделей единой теории поля.

Цитированная литература

1. **Алексеева Л. А.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, № 2. С. 15 – 24.

2. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. М., 1966. Т. 6. 344 с.

3. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1981. 512 с.

Поступила в редакцию 6.03.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 24 – 30*

УДК 681.5

К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е. Т. Аяганов, Г. Н. Пащенко

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, Ayaganov@mail.ru

Работа посвящена построению системы сравнения для сложного объекта с запаздыванием на основе метода сравнения с векторной функцией Ляпунова, прямого метода Ляпунова и подхода Разумихина. Разработан пакет прикладных программ на языке Delphi 5.0, предназначенный для построения системы сравнения для сложного объекта с запаздыванием.

1. Введение и постановка задачи

Метод сравнения с векторной функцией Ляпунова (ВФЛ), предложенный в [1]–[3] и развитый в работах В. М. Матросова и его учеников [4]–[10], в сочетании с декомпозицией является основным инструментом анализа различных динамических свойств сложных линейных и нелинейных систем. В настоящее время известны конструктивные способы построения систем сравнения лишь для некоторых классов систем и динамических свойств [3, 7, 8].

Построение систем сравнения (СС), оптимальных с точки зрения экспоненциальной устойчивости, предложено в [7, 8]. В работах [9, 10] предложен метод построения некоторых простых математических моделей дифференциальных уравнений системы сравнения, приводящий к задачам математического программирования и близкий к рассматриваемому в настоящей работе способу построения системы сравнения.

Настоящая работа посвящена построению системы сравнения на основе подхода Разумихина с использованием скалярно-оптимизационной функции.

Предлагается способ построения оптимальных в некотором смысле СС [6, 11], не связанный с изучаемым динамическим свойством и сводящий построение СС к решению задач математического программирования [12]–[15].

В работе рассматривается задача построения системы сравнения применительно к классу сложных, высокой размерности стационарных объектов с запаздыванием, описываемых системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [16]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h), \ t \geq t_0, \\ x(t_0 + v) = \varphi(v), \ -h \leq v \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

Keywords: *system of comparison, object with delay, direct Lyapunov's method, scalar-optimized function, vector Lyapunov's function*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

где $t \in [t_0, \infty) \equiv J(t_0)$, $x(t) \in R^n$ — вектор состояний объекта, $x(t-h) \in R^n$ — вектор состояний объекта, запаздывающий на время h, $h = \text{const} > 0$ — величина запаздывания, $\varphi(v) \in C([-h, 0], R^n)$ — непрерывная, ограниченная начальная векторная функция, $C(\cdot)$ — пространство непрерывных функций $\varphi(v)$ на отрезке $[-h, 0]$ с нормой $\|\varphi(v)\|_h = \max \|\varphi(v)\|$ при $-h \le v \le 0$, $\|\varphi(v)\|$ — евклидова норма вектора $\varphi(v)$, $\|\varphi(v)\| < \nu(t_0)$, $\nu \in [t_0 - h, t_0]$ — некоторое число; $A,\ A_h \in R^{n\times n}$ — постоянные матрицы.

Настоящая работа посвящена построению линейной системы сравнения для стационарного объекта с запаздыванием на основе концепции метода сравнения с векторной функцией Ляпунова с использованием прямого метода Ляпунова, скалярно-оптимизационной функции и метода нелинейного программирования (НЛП) [12]–[15].

2. Процедура построения системы сравнения для стационарного объекта с запаздыванием

Предположим, что система (1) может быть представлена в виде "m" взаимосвязанных подсистем вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + A_{hi} x_i(t-h) + \sum\limits_{j=1, j\ne i}^{m} A_{ij} x_j(t) + \sum\limits_{j=1, j\ne i}^{m} A_{hij} x_j(t-h),\ t \ge t_0, \\ x_i(t_0 + v) = \varphi_i(v),\ -h \le v \le 0,\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{2}$$

где $x_i(t) \in R^{n_i}$ — вектор состояний i-ой подсистемы, $x_i(t-h) \in R^{n_i}$ — вектор состояний i-ой подсистемы, запаздывающий на время h, $x_j(t) \in R^{n_j}$ — вектор состояний j-ой подсистемы, $x_j(t-h) \in R^{n_j}$ — вектор состояний j-ой подсистемы, запаздывающий на время h, $h = \text{const} > 0$ — величина запаздывания, $\varphi_i(v) \in C([-h, 0], R^{n_i})$ — непрерывная, ограниченная начальная векторная функция, $C(\cdot)$ — пространство непрерывных функций $\varphi_i(v)$ на отрезке $[-h, 0]$ с нормой $\|\varphi_i(v)\|_h = \max \|\varphi_i(v)\|$ при $-h \le v \le 0$, $\|\varphi_i(v)\|$ — евклидова норма вектора $\varphi_i(v)$, $A_i, A_{hi} \in R^{n_i \times n_i}, A_{ij}, A_{hij} \in R^{n_i \times n_j}$ — постоянные блоки матриц A и A_h, соответствующие разбиению системы (1) на подсистемы.

Пусть математическая модель изолированной подсистемы имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + A_{hi} x_i(t-h),\ t \ge t_0, \\ x_i(t_0 + v) = \varphi_i(v),\ -h \le v \le 0,\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что для каждой из подсистем (3) построена функция Ляпунова

$$V_i(t, x_i) = x_i^T(t) H_i x_i(t), \quad H_i = H_i^T > 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

которая является i-ой компонентой ВФЛ-системы (1), т.е.

$$V(x) = (V_1(x_1), \dots, V_m(x_m)). \tag{5}$$

Для исследуемой системы (1) и ВФЛ (5) необходимо построить систему сравнения вида

$$\dot{y} = g(y),\ y(t_0) = y_0 \tag{6}$$

с $y \in H_c \subseteq R^m$ такую, что непрерывная функция $g : H_c \to R^m$ удовлетворяет условию Важевского $(g_i(y) \le g_i(z))$ при $y \le z$ и $y_i = z_i,\ i = \overline{1,m}$ а также условию

$$\forall x \in H,\ \dot{V}(x) \le g(V(x)), \tag{7}$$

где $\dot{V}(x) = (\dot{V}_1(x_1), \dots, \dot{V}_m(x_m))$, $H = R^n$, $\dot{V}_i(x) = (\text{grad} V_i(x_i)^T [A_i x_i(t) + A_{hi} x_i(t-h) + \sum\limits_{j=1, j\ne i}^{m} A_{ij} x_j(t) + \sum\limits_{j=1, j\ne i}^{m} A_{hij} x_j(t-h)], i = \overline{1,m}$.

Непрерывную функцию $g(y)$ будем искать в виде

$$g(y) = Py, \tag{8}$$

т.е. необходимо построить линейную систему сравнения вида

$$\dot{y} = Py, \tag{9}$$

где $P \in R^{m\times m}$ — постоянная позитивная матрица с $p_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, что обеспечивает выполнение условий Важевского в $H_c = R^n$.

Нахождение (8) осуществляется в некотором параметрическом классе непрерывных функций $\{g(p,y)\}$, удовлетворяющих заданным требованиям, из условия обеспечения наилучших показателей изучаемого свойства в СС.

В качестве критерия выбора функции $g(y)$ из заданного параметрического класса непрерывных функций, не зависящего от изучаемого свойства, возьмем минимум по p от некоторого непрерывного по своему аргументу функционала J от невязки $g(p, V(x)) - \dot{V}(x)$ неравенства (7). Неравенство (7) в рассматриваемом случае примет вид

$$\delta_i(x_i, p_i) = \sum_{j=1, j\neq i}^{m} p_{ij}V_j - R_i(x_i),\ i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

где $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{im})$ — i-ая строка матрицы P, $R_i(x_i)$ — скалярно-оптимизационная функция, являющаяся аналогом производной функции Ляпунова для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [17]

$$R_i(x) = \sup\{\dot{V}_i(x_{thi})|\, x_{thi} \in \mu_{Vi}(x_i,t)\},\ i = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Функция $R_i(x_i)$ определяется наибольшим значением функционала $\dot{V}_i(x_{thi},t)$ $i = \overline{1,m}$ на ограниченном множестве интегральных кривых [17]

$$\mu_{Vi}(x_i,t) = \{x_{thi}|V_i(\upsilon, x_i(\upsilon)) \leq V_i(t, x_i), t-h \leq \upsilon \leq t, x_i(t) = x_i\}, \tag{12}$$

вдоль которых функция $V_i(x_i)$ убывает.

Построение СС (9) сводится к следующим "m" задачам математического программирования

$$\min_{p_i \in \Re_i} J_i[g_i(p_i, V_i(x)) - R_i(x)], \tag{13}$$

где $\Re_i = \{p_i \in \Im_i \subset R^{l_i} : g_i \in W_y(H_c) \wedge (\forall x \in H, g_i(p_i, V_i(x)) - R_i(x)) \geq 0\}$, $\Im_i$ — компакт в R^{l_i}; $l = \sum_{i=1}^m l_i$. В силу (1) и выбора $V(x), g(p,V), J_i, \Re_i$ задачи нелинейного программирования (13) имеют решение.

Найдем производную функции $V_i(x_i)$. В силу (2) она имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(x_{thi},t) = x_i^T(t)(A_i^T H_i + H_i A_i)x_i(t) + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^m (x_i^T(t)H_iA_{ij}x_j(t) +\\ + x_j^T(t)A_{ij}^T H_i x_i(t)) + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^m (x_i^T(t)H_iA_{hij}x_j(t-h) +\\ + x_j^T(t-h)A_{hij}^T H_i x_i(t)) + 2x_i^T(t)H_iA_{hi}x_i(t-h), i = \overline{1,m}.\end{aligned} \tag{14}$$

Скалярно-оптимизационная функция $R_i(x_i)$, $i = \overline{1,m}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}R_i(x_i) = \sup\{x_i^T(t)(A_i^T H_i + H_i A_i)x_i(t) + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^m (x_i^T(t)H_iA_{ij}x_j(t) +\\ + x_j^T(t)A_{ij}^T H_i x_i(t)) + \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^m (x_i^T(t)H_iA_{hij}x_j(t-h) + x_j^T(t-h)A_{hij}^T H_i x_i(t)) +\\ + 2x_i^T(t)H_iA_{hi}x_i(t-h)\,|\, x_{thi} \in \mu_{Vi}(x_i,t)\},\ i = \overline{1,m}.\end{aligned} \tag{15}$$

Оценим в выражении (15) слагаемые, содержащие вектора состояний с запаздывающим аргументом $x_j(t-h), x_i(t-h)$, в соответствии с (12) и неравенствами [16]

$$\begin{aligned} 2x_i^T(t)H_iA_{hi}x_i(t-h) &\le x_i^T(t)H_i^2x_i(t) + x_i^T(t-h)A_{hi}A_{hi}^Tx_i(t-h) \le \\ &\le x_i^T(t)H_i^2x_i(t) + x_i^T(t)A_{hi}A_{hi}^Tx_i(t), \\ 2x_i^T(t)H_iA_{hij}x_j(t-h) &\le x_i^T(t)H_i^2x_i(t) + x_j^T(t-h)A_{hij}A_{hij}^Tx_j(t-h) \le \\ &\le x_i^T(t)H_i^2x_i(t) + x_j^T(t)A_{hij}A_{hij}^Tx_j(t), \\ 2x_j^T(t-h)A_{hij}^TH_ix_i(t) &\le x_i^T(t)H_i^2x_i(t) + x_j^T(t-h)A_{hij}^TA_{hij}x_j(t-h) \le \\ &\le x_i^T(t)H_i^2x_i(t) + x_j^T(t)A_{hij}^TA_{hij}x_j(t), \qquad i=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{16}$$

С учетом (16) выражение для функции $R_i(x_i)$ примет следующий вид

$$\begin{aligned} R_i(x_i) = x_i^T(t)(A_i^TH_i + H_iA_i + A_{hi}A_{hi}^T + H_i^2)x_i(t) + \\ + \textstyle\sum_{j=1,j\ne i}^m x_i^T(t)H_iA_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1,j\ne i}^m x_j^T(t)A_{ij}^TH_ix_i(t) + \\ + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1,j\ne i}^m x_j^T(t)A_{hij}A_{hij}^Tx_j(t) + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1,j\ne i}^m x_j^T(t)A_{hij}^TA_{hij}x_j(t), i=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{17}$$

В выражении (17) введем следующие обозначения

$$\tilde{A}_i = A_i + 0.5q_iI_{n_i},\ i=\overline{1,m}, \tag{18}$$

где I_{n_i} — единичная матрица размерности $(n_i \times n_i)$, $q_i = \text{const}$ выбирается из условия гурвицевости матрицы $\tilde{A}_i$

$$\begin{aligned} Q_i &= \tilde{A}_i^TH_i + H_i\tilde{A}_i + A_{hi}A_{hi}^T + 2H_i^2 - q_iH_i, \\ \breve{T}_{ij} &= H_iA_{ij},\ \breve{T}_{ij} = \tfrac{1}{2}A_{hij}A_{hij}^T,\ i=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_i(x_i) = x_i^T(t)Q_ix_i(t) + \textstyle\sum_{j=1,j\ne i}^m(x_i^T(t)\breve{T}_{ij}x_j(t) + x_j^T(t)\breve{T}_{ij}^Tx_i(t)) + \\ + \textstyle\sum_{j=1,j\ne i}^m(x_j^T(t)(\breve{T}_{ij} + \breve{T}_{ij}^T)x_j(t), i=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{20}$$

Вычислим невязку

$$\delta_i(x_i,p_i) = \textstyle\sum_{j=1,j\ne i}^m p_{ij}V_j - R_i(x) = x_i^T(t)D^i(p_i)x_i(t),\ i=\overline{1,m}, \tag{21}$$

блоки $D_{kj}^i(p_i)$ симметрической матрицы $D^i(p_i)$ определяются как

$$D_{kj}^i = \begin{cases} \delta_{kj}(p_{ik}H_k - Q_k), \text{ если } i=k=j, \\ -\delta_{ik}(\breve{T}_{kj}), \text{ если } i=k, \\ -\delta_{ik}(\breve{T}_{jk}^T), \text{ если } i=j,\ k,j=\overline{1,m}, \\ -\delta_{kj}(p_{ik}H_k - (\breve{T}_{ij} + \breve{T}_{ij}{}^T), \text{ если } k=j\ne i, \\ 0, \text{ если } k\ne j\ne i, \end{cases} \tag{22}$$

где δ_{sr} — символ Кронекера.

Отметим, что неравенство

$$\textstyle\sum_{j=1,j\ne i}^m p_{ij}V_j - R_i(x) \ge 0, i=\overline{1,m}, \tag{23}$$

будет выполнено, если справедливо условие

$$\delta_i(x_i,p_i) \ge 0,\ \forall x_i(t,\varphi_i(\upsilon)) \ne 0,\ i=\overline{1,m}. \tag{24}$$

Таким образом, задача построения СС (9) сводится к m задачам НЛП [12, 15] вида

$$\min_{p_i\in W_i} \Lambda[D^i(p_i)],\ i=\overline{1,m}, \tag{25}$$

где $W_i=\{p_i\in\Omega_i:\lambda[D^i(p_i)]\geq 0, \Omega_i=\{p_i=(p_{i1},\ldots,p_{im}):0\leq p_{ij}\leq\rho,\text{при}j\neq i \text{ и } \mid p_{ii}\mid\leq\rho\}$, ρ — достаточно большое положительное число, $\lambda[D^i(p_i)]$ — минимальное собственное значение пучка квадратичных форм (21), $\Lambda[D^i(p_i)]$ — максимальное собственное значение пучка квадратичных форм (21). В результате решения одной i-ой задачи НЛП (25) будет определена одна строка $p_i=(p_{i1},\ldots,p_{im})$ матрицы P. Матрица P может быть получена путем последовательного решения m задач (25). Для численного решения задач НЛП используется алгоритм матрично-векторного поиска [15]. Начальное приближение вектора p_i выбирается случайным образом. Если окажется, что $p_i\in W_i$, то данный вектор берется за начальное приближение. В противном случае формируется новый случайный вектор p_i.

Решение задачи (25) имеет смысл при условии, что множества W_i, $i=\overline{1,m}$ не пусты. Множества W_i, $i=\overline{1,m}$ не пусты, если $V_i(x_i)$, $i=\overline{1,m}$ удовлетворяют оценкам [3]

$$\begin{aligned} c_{i1}\|x_i\|^2\leq V_i(x_i)\leq c_{i2}\|x_i\|^2,\\ R_i(x_i)\leq -c_{i3}\|x_i\|^2,\\ \|\mathrm{grad}V_i(x_i)\|\leq c_{i4}\|x_i\|,\ i=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{26}$$

где $c_{ij}\geq 0$, $j=1,4$, $\|x_i\|^2=x_i^Tx_i$.

Условия не пустоты (26) существенно сужают используемый класс ВФЛ, поэтому можно ввести более слабые ограничения на ВФЛ [6].

Используя оценки

$$\begin{aligned} \lambda_{i\ \min}\|x_i\|^2\leq V_i(x_i)\leq \lambda_{i\ \max}\|x_i\|^2,\\ R_i(x_i)\leq \nu_i\|x_i\|^2,\\ x_j^T(t)H_iA_{hij}A_{hij}^TH_ix_i(t)+x_i^T(t)H_iA_{ij}x_j(t)+\\ +x_j^T(t)A_{ij}^TH_ix_i(t)\leq\mu_{ij}(\|x_i)\|^2+\|x_j)\|^2),\ i\neq j, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\lambda_{i\ \min}$ — минимальное собственное значение матрицы H_i; $\lambda_{i\ \max}$, ν_i, μ_{ij} — соответственно, максимальные собственные значения матриц H_i, $\tilde{A}_i^TH_i+H_i\tilde{A}_i+A_{hi}A_{hi}^T+2H_i^2-q_iH_i$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & \breve{T_{ij}} \\ \breve{T_{ij}}^T & \breve{T_{ij}}+\breve{T_{ij}}^T \end{pmatrix},$$

сформулируем теорему о существовании системы сравнения для системы (1) и ВФЛ с компонентами в виде квадратичных форм, которая сводится к достаточным условиям не пустоты множеств W_i, $i=\overline{1,m}$.

Теорема. *Для существования линейной системы сравнения (9) для системы с запаздыванием (1) и ВФЛ достаточно, чтобы для любого $i=\overline{1,m}$ выполнялись неравенства*

$$\begin{aligned} &a)\ \nu_i\leq 0 \text{ или } (\nu_i>0 \text{ и } \lambda_{i\ \min}\cdot\lambda_{i\ \max}>0),\\ &b) \text{ для любого } j=\overline{1,m} \text{ и } i\neq j\ \mu_{ij}\leq 0 \text{ или } (\mu_{ij}>0 \text{ и} \lambda_{i\ \min}>0). \end{aligned} \tag{28}$$

Предлагаемая процедура построения СС (9) состоит из следующих шагов:
Шаг 1. Декомпозиция исследуемой сложной системы на подсистемы.
Шаг 2. Задание ВФЛ: $V(x)=(V_1(x_1),...,V_m(x_m))$.
Шаг 3. Построение множеств Ω_i, $i=\overline{1,m}$.
Шаг 4. Построение множеств W_i, $i=\overline{1,m}$.

Шаг 5. Проверка не пустоты множеств W_i, $i = \overline{1, m}$. Если они не пусты, то переход к шагу 6.
Шаг 6. Решение задачи нелинейного программирования (13).
Шаг 7. Если полученное значение p_i лежит на границе Ω_i, то увеличение Ω_i и переход к шагу 5, иначе к шагу 8.
Шаг 8. Формирование, анализ и выдача результатов.

3. Пример

Рассмотрим систему с запаздыванием (1) 6-го порядка, состоящую из двух подсистем ($m = 2$), $x_1 \in R^4$, $x_2 \in R^2$, $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in R^6$, величина запаздывания $h = 1$. Матрицы исходной системы A, $A_h \in R^{6\times 6}$ и квадратичных форм функций Ляпунова $H_1 \in R^{4\times 4}$, $H_2 \in R^{2\times 2}$ для изолированных подсистем приведены ниже:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13.362754 & -0.9952 & -0.0024587 & -0.0002 & -0.00011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.004414 & -0.00015 & -11.734324 & -0.086227 & 0 & 0.020492 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.067062 & -0.00697 & 0 & -0.05519 & -2.175124 & -0.851766 \end{pmatrix},$$

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00522 & 0.00645 & 1.52544 & 0.12564 & 2.25343 & 0.35472 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6.681377 & 0.02488 & 0 & 0 \\ 0.02488 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.867162 & 0.021569 \\ 0 & 0 & 0.021569 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1.087562 & 0.2129415 \\ 0.2129415 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

За начальное приближение матрицы $P \in R^{2\times 2}$ при построении системы сравнения (9) было принято следующее

$$\begin{pmatrix} -0.055 & 0.05 \\ 0.18 & -0.55 \end{pmatrix}.$$

Для построения системы сравнения был разработан пакет прикладных программ в визуальной интегрированной среде программирования Delphi 5.0. С использованием разработанного пакета прикладных программ была построена матрица системы сравнения

$$P = \begin{pmatrix} -1.294456 & 0.0005444 \\ 0.003582 & -2.766418 \end{pmatrix}.$$

При этом $\Lambda_1(D^1(p_1)$ уменьшилось с 0.293878 до 0.000656, $\Lambda_2(D^2(p_2)$ — с 1.204041 до 0.025120, а собственные значения матрицы P с -0.45678 и -0.048765 до -2.7664 и -1.2945. Оптимизация матрицы P по критерию $\min\limits_{p} \max\limits_{i} \lambda_i(p)$ [12] дает результаты хуже, чем получены в данном случае. При реализации этой задачи абсолютные величины приращений элементов случайной поисковой матрицы и случайного поискового вектора были приняты равными 0.0002; число неудачных проб равным 100; точность вычисления собственных значений трехдиагональной симметрической матрицы равной 10^{-6}.

Цитированная литература

1. **Bellman R.** // SIAM J. of Control. 1962. Ser. A. V. 1, № 1. P. 32 – 34.

2. **Матросов В. М.** // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 6. С. 992 – 1002.

3. **Bailey F. N.** // SIAM J. of Control. 1966. Ser. A. V. 3. P. 443 – 462.

4. **Матросов В. М.** // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1374 – 1386; 1968. Т. 4, № 10. С. 1739 – 1752; 1969. Т. 5, № 7. С. 1171 – 1185; 1969. Т. 5, № 12. С. 2129 – 2143.

5. **Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.** Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск, 1980.

6. **Матросов В. М., Анапольский Л. Ю.** Вектор-функции Ляпунова и их построение. Новосибирск, 1980.

7. **Земляков А. С.** // Автореферат кандидатской диссертации. Казань, 1973. 20 с.

8. **Болденкова Н. И., Земляков А. С.** // Тезисы докладов V Казахстанской межвузовской научной конференции по математике и механике. Ч. 1. Математика. Алма-Ата. 1974. С. 26 – 27.

9. **Задорожный В. Ф., Мартынюк А. А.** // В кн.: Математическая физика. Киев, 1973. Вып. 4. С. 49 – 55.

10. **Задорожный В. Ф., Нурминский Е. А., Станишевский А. Ю.** // Кибернетика. 1977. № 5. С. 111 – 114.

11. **Абдуллин Р. З.** // В кн.: Методы оптимизации и исследование операций в энергетике. Иркутск, 1978. С. 84 – 92.

12. **Карманов В. Г.** Математическое программирование. М., 1975.

13. **Стронгин Р. Г.** Численные методы в многоэкстремальных задачах. М., 1978. 240 с.

14. **Уилкинсон Дж. Х., Райнш К.** Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., 1976.

15. **Гринченко С. Н., Растригин Л. А.** // В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига, 1976. Вып. 5. С. 167 – 184.

16. **Цыкунов А. М.** Адаптивное управление объектами с запаздыванием. М., 1984.

17. **Разумихин Б. С.** Устойчивость эредитарных систем. М., 1988.

Поступила в редакцию 6.02.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 31 — 37*

УДК 517.956

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, dzhenali@math.kz
КарГУ им.Е.А.Букетова МОН РК
470074, Караганды, Университетская ул., 28, rootphm@kargu.krg.kz

Для рассматриваемого нагруженного дифференциального оператора показано, что произвольное комплексное число λ принадлежит одному из следующих множеств: резольвентному множеству, точечному спектру или непрерывному спектру.

1. Постановка задачи и определения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный куб с ребрами длины 2π. Пусть $\mathcal{P}^\infty$ — линейное многообразие гладких, периодических по всем переменным комплексных функций, а H_x — гильбертово пространство суммируемых в квадрате на Ω функций, в котором множество $\mathcal{P}^\infty$ плотно. Полиному $A(s)$ с постоянными комплексными коэффициентами

$$A(s) = \sum_{|\beta| \le \overline{\beta}} a_\beta s^\beta,\ s^\beta = s_1^{\beta_1} \dots s_n^{\beta_n},\ |\beta| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j,\ \overline{\beta} \text{ — заданное целое число}$$

сопоставим дифференциальную операцию $A(-iD)$ таким образом, что

$$A(-iD)e^{is\cdot x} = A(s)e^{is\cdot x},\ s\cdot x = \sum_{j=1}^{n} s_j x_j.$$

Соответствующий оператор $A : H_x \to H_x$ определим как замыкание в H_x операции $A(-iD)$, определенной первоначально на функциях, принадлежащих $\mathcal{P}^\infty$. Такие операторы A называют П-операторами [1]. Пусть $\mathcal{S} = \{s = (s_1, \dots, s_n) | s_j = 0; \pm 1, \pm 2, \dots,\ j = 1, \dots, n\}$. Тогда совокупность экспонент $\{e^{is\cdot x}\},\ s \in \mathcal{S}$ образует ортогональный базис в H_x и является одновременно набором собственных элементов для каждого из операторов A. А соответствующий набор чисел $\{A(s)\},\ s \in \mathcal{S}$ — собственными значениями оператора A. Пусть $\mathcal{H} \equiv L_2(0, b; H_x)$.

Рассматриваются спектральные вопросы для нагруженного дифференциального оператора L, определяемого граничной задачей

$$[D_t - A + N]u(t) = f(t), \quad t \in (0, b), \qquad \mu u(0) - u(b) = 0, \tag{1}$$

Keywords: *loaded differential operator, a priori estimate, resolvent set, point spectrum, continuous spectrum, spectral property*
2000 Mathematics Subject Classification: 34L05, 35P05, 47A10

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $N[u(t)] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u(t_k)$, $\mu,\ \alpha_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \ldots, m,\ f \in \mathcal{H}$.

Дадим необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1. *Элемент $u \in \mathcal{H}$ будем называть решением задачи (1), если существует последовательность гладких функций $u_l(x,t)$, сходящаяся в $\mathcal{H}$ к u, такая, что u_l 2π-периодичны по переменным x_j, удовлетворяют условиям из (1) по t и $L(D)u_l = f_l \to f$ при $l \to \to \infty$ в $\mathcal{H}$.*

Пусть $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — некоторый фиксированный замкнутый оператор (вообще говоря, неограниченный) с областью определения $\mathcal{D}(T)$, плотной в $\mathcal{H}$, $E-$ тождественный оператор.

Определение 2. *Открытое множество $\rho T \subset \mathbb{C}$ называется резольвентным множеством оператора T, если для любого $\lambda \in \rho T$ оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем пространстве $\mathcal{H}$.*

Определение 3. *Замкнутое множество $\sigma T = \mathbb{C} \backslash \rho T$ называется спектром оператора T.*

Определение 4. *Точка $\lambda \in \sigma T$ принадлежит точечному спектру $\mathrm{P}\sigma T$ оператора T, если оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ не существует.*

Определение 5. *Точка $\lambda \in \sigma T$ принадлежит непрерывному спектру $\mathrm{C}\sigma T$ оператора T, если оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ существует, множество $\mathcal{D}((T - \lambda E)^{-1})$ плотно в $\mathcal{H}$, но оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ неограничен.*

Определение 6. *Точка $\lambda \in \sigma T$ принадлежит остаточному спектру $\mathrm{R}\sigma T$ оператора T, если оператор $(T - \lambda E)^{-1}$ существует, но множество $\mathcal{D}((T - \lambda E)^{-1})$ не плотно в $\mathcal{H}$.*

2. Основные результаты. Прежде всего заметим, что поскольку $D_t - A - \lambda + N = D_t - - (A + \lambda) + N$, где $A + \lambda-$ снова П-оператор, достаточно изучить случай $\lambda = 0$.

Введем обозначения: $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k$,

$$\mathrm{D}(s) \equiv \frac{[\mu - \exp\{b \cdot A(s)\}] \cdot [A(s) - \alpha] + [\mu - 1] \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \exp\{t_k A(s)\}}{A(s)}, \quad s \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

Замечание 1. *Если s такое, что $A(s) = 0$, то в (2) $\mathrm{D}(s)$ определяется следующим предельным соотношением*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(s) &= \lim_{A(s)\to 0} \frac{[\mu - \exp\{b \cdot A(s)\}] \cdot [A(s) - \alpha] + [\mu - 1] \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \exp\{t_k A(s)\}}{A(s)} = \\ &= b\alpha + (\mu - 1)[1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k t_k]. \end{aligned}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *$0 \in \rho L$ тогда и только тогда, когда выполнены условия $\mathrm{D}(s) \neq 0\ \forall s \in \mathcal{S}$.*

Замечание 2. *Если нагрузка в (1) отсутствует, то есть $\alpha_k = 0,\ k = 1, \ldots, m$, то условие леммы совпадает с условиями $\mu - \exp\{b \cdot A(s)\} \neq 0\ \forall s \in \mathcal{S}$, из* [1, c.119].

Лемма 2. $0 \in \mathrm{P}\sigma L$ *тогда и только тогда, когда для какого-либо* $s_0 \in \mathcal{S}$ *выполняется условие* $\mathrm{D}(s^0) = 0$, *где* $\mathrm{D}(s)$ *определено в (2).*

Лемма 3. $0 \in \mathrm{C}\sigma L$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{s^l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ *такая, что* $|\mathrm{D}(s^l)| \to 0$ *при* $l \to \infty$.

Из вышеуказанных лемм следует справедливость основного результата.

Теорема. *Точка* $\lambda \in \mathbb{C}$ *принадлежит одному из множеств* ρL, $\mathrm{P}\sigma L$, $\mathrm{C}\sigma L$.

3. Доказательство леммы 1. Доказательство леммы 1 основано на изучении соответствующей (1) цепочки задач:

$$[D_t - A(s) + N]u_s(t) = f_s, \qquad \mu u_s(0) - u_s(b) = 0, \qquad s \in \mathcal{S}, \tag{3}$$

где $u_s(t)$, $f_s(t)$ — зависящие от t коэффициенты разложений

$$u = \sum_{s\in\mathcal{S}} u_s(t)\mathrm{e}^{is\cdot x}, \ f = \sum_{s\in\mathcal{S}} f_s(t)\mathrm{e}^{is\cdot x}. \tag{4}$$

Используется аналог леммы из [1, с.118]:

Лемма. *Задача (1) однозначно разрешима при любом элементе* $f \in \mathcal{H}$ *тогда и только тогда, когда все задачи цепочки (3) однозначно разрешимы и существует независящая от* s *постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\|u_s\|_{L_2(0,b)} \le C\|f_s\|_{L_2(0,b)} \text{ при любом } s \in \mathcal{S}.$$

Найдем представление решений задач (3). Интегрируя эти задачи, имеем

$$u_s(t) = u_s(0)\mathrm{e}^{A(s)t} + N[u_s(t)] \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{A(s)t}}{A(s)} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{A(s)(t-\tau)} f_s(\tau)d\tau, \text{ если } A(s) \ne 0, \tag{5}$$

$$u_s(t) = u_s(0) - t \cdot N[u_s(t)] + \int\limits_0^t f_s(\tau)d\tau, \text{ если } A(s) = 0, \tag{6}$$

где $N[u_s(t)] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u_s(t_k)$. Отсюда при $t = b$ получаем

$$[\mu - \mathrm{e}^{A(s)b}]u_s(0) + \frac{1-\mathrm{e}^{A(s)t}}{A(s)} \cdot N[u_s(t)] = \int\limits_0^b \mathrm{e}^{A(s)(b-\tau)} f_s(\tau)d\tau \text{ если } A(s) \ne 0, \tag{7}$$

$$[\mu - 1]u_s(0) + b \cdot N[u_s(t)] = \int\limits_0^b f_s(\tau)d\tau, \text{ если } A(s) = 0. \tag{8}$$

Далее, приравнивая t и t_k в (5)–(6), умножая результат соответственно на α_k и суммируя полученные соотношения по k от 1 до m, будем иметь при $A(s) \ne 0$

$$-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathrm{e}^{A(s)t_k} \cdot u_s(0) + \frac{A(s) - \alpha + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \mathrm{e}^{A(s)t_k}}{A(s)} \cdot N[u_s(t)] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int\limits_0^{t_k} \mathrm{e}^{A(s)(t_k-\tau)} f_s(\tau)d\tau, \tag{9}$$

$$\text{при } A(s) = 0: \ -\alpha \cdot u_s(0) + [1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k t_k] \cdot N[u_s(t)] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int\limits_0^{t_k} f_s(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Определяя, соответственно, из систем уравнений (7), (9) и (8), (10) неизвестные величины $u_s(0)$ и $N[u_s(t)]$, получаем, что решения задач цепочки (3) имеют представление

$$u_s(t) = [D(s)]^{-1}\left[\Delta_{u_s(0)}\mathrm{e}^{tA(s)} + \Delta_{N_s}[A(s)]^{-1}(1-\mathrm{e}^{tA(s)}\right] + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau, \quad \text{если} \quad A(s)\neq 0, \tag{11}$$

где

$$\Delta_{u_s(0)} = \begin{Vmatrix} \int\limits_0^b \mathrm{e}^{(b-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau & [A(s)]^{-1}[\mathrm{e}^{bA(s)}-1] \\ \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} \mathrm{e}^{(t_k-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau & [A(s)]^{-1}\left[A(s)-\alpha+\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \mathrm{e}^{t_kA(s)}\right] \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_{N_s} = \begin{Vmatrix} \mu - \mathrm{e}^{bA(s)} & \int\limits_0^b \mathrm{e}^{(b-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau \\ -\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \mathrm{e}^{t_kA(s)} & \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} \mathrm{e}^{(t_k-\tau)A(s)}f_s(\tau)d\tau \end{Vmatrix},$$

и $\mathrm{D}(s)$ определено согласно (2);

$$u_s(t) = [\mathrm{D}(s)]^{-1}\left[\Delta_{u_s(0)} - \Delta_{N_s}\cdot t\right] + \int\limits_0^t f_s(\tau)d\tau, \quad \text{если} \quad A(s)=0, \tag{12}$$

где

$$\Delta_{u_s(0)} = \begin{Vmatrix} \int\limits_0^b f_s(\tau)d\tau & b \\ \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} f_s(\tau)d\tau & 1+\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k t_k \end{Vmatrix}, \qquad \Delta_{N_s} = \begin{Vmatrix} \mu-1 & \int\limits_0^b f_s(\tau)d\tau \\ -\alpha & \sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \int\limits_0^{t_k} f_s(\tau)d\tau \end{Vmatrix},$$

и $\mathrm{D}(s)$ определено в замечании 1.

Из (11) и (12) непосредственно следует однозначная разрешимость каждой задачи цепочки (3).

Осталось установить априорные оценки, равномерные относительно индекса s.

Пусть $A(s) = 0$. С учетом представления решения (12) непосредственно устанавливаем требуемые оценки. Пусть теперь $A(s)\neq 0$. В этом случае, в силу условия леммы 1 и условия $A(s)\neq 0$ получаем, что существуют постоянные δ_1, δ_2 такие, что $|\mathrm{D}(s)|\geq\delta_1>0$, $|A(s)|\geq \geq\delta_2>0\ \forall s\in\{\mathcal{S}|A(s)\neq 0\}$. Дальнейшее доказательство леммы 1 проводится аналогично тому, как это сделано в [2, 3, 7, 8] для доказательства теоремы об однозначной сильной разрешимости граничной задачи (1). Лемма 1 полностью доказана.

4. Доказательство леммы 2. Дополнительно к условию леммы 2 положим, что $A(s^0)\neq \neq 0$. Тогда, если при каком-то $s^0\in\mathcal{S}:\ \mathrm{D}(s^0)=0$, то функция $\left[\mathrm{e}^{tA(s^0)}+ + \dfrac{1-\mathrm{e}^{tA(s^0)}}{A(s^0)}\right]\mathrm{e}^{is^0\cdot x}$ дает нетривиальное решение однородной задачи, соответствующей (1), так как $\mu = \mathrm{e}^{bA(s^0)} + + \dfrac{1-\mathrm{e}^{bA(s^0)}}{A(s^0)}$ в силу граничного условия из (1). Пусть теперь $A(s^0)=0$. Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей (1), будет функция $(1-t)\mathrm{e}^{is^0\cdot x}$. В этом случае из граничного условия (1) будем иметь $\mu = 1-b$.

Обратно, при существовании нетривиального решения однородной задачи, соответствующей (1), нарушение условия леммы 2 невозможно. Это противоречит утверждению леммы 1.

5. Доказательство леммы 3. Так как $0 \notin \mathrm{P}\sigma L$, то заключаем, что оператор L^{-1} существует и область $\mathcal{D}(L^{-1})$ плотна в $\mathcal{H}$ (содержит заведомо все конечные суммы вида (4)). Докажем неограниченность оператора L^{-1}. Согласно предположению леммы 3 существует последовательность $\{s^l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ такая, что

$$\varepsilon_l = |\mathrm{D}(s^l)| \to 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty. \tag{13}$$

Обозначим: $A_l = A(s^l)$. В качестве правых частей в уравнении (1) возьмем последовательность функций

$$f_l = \exp{(is^l\cdot x)}, \quad \|f_l\|^2_{\mathcal{H}} = (2\pi)^n b. \tag{14}$$

Покажем, что норма решений u_l задачи (1) при правых частях вида (14) неограниченно растет при $l\to\infty$. Вид u_l в этом случае дается формулой

$$u_l = u_l(t)\exp{(is^l\cdot x)}, \quad \|u_l\|^2_{\mathcal{H}} = (2\pi)^n\|u_l(t)\|^2_{H^1(0,b)},$$

где $u_l(t)$ имеет следующее представление (в уравнениях (3) $f_{s^l}(t)\equiv 1$)

$$u_l(t) = [\mathrm{D}(s^l)]^{-1}\left\{\Delta_{u_l(0)}\mathrm{e}^{tA_l} + \Delta_{N_l}\frac{1-\mathrm{e}^{tA_l}}{A_l}\right\} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A_l}d\tau, \tag{15}$$

где

$$\Delta_{u_l(0)} = \frac{\left(A_l-\alpha+\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k\mathrm{e}^{t_kA_l}\right)\int\limits_0^b \mathrm{e}^{(b-\tau)A_l}d\tau - \left(\mathrm{e}^{bA_l}-1\right)\sum\limits_{k=1}^m\alpha_k\int\limits_0^{t_k}\mathrm{e}^{(t_k-\tau)A_l}d\tau}{A_l},$$

$$\Delta_{N_l} = (\mu-\mathrm{e}^{bA_l})\sum_{k=1}^m\alpha_k\int\limits_0^{t_k}\mathrm{e}^{(t_k-\tau)A_l}d\tau + \int\limits_0^b\mathrm{e}^{(b-\tau)A_l}d\tau\sum_{k=1}^m\alpha_k\mathrm{e}^{t_kA_l}.$$

Производя интегрирование и исключая из рассмотрения случай $A_l = 0$ (что возможно за счет перехода, если необходимо, к соответствующей подпоследовательности), получим

$$u_l(t) = \frac{1}{A_l}\left(\frac{\mu-1}{\mathrm{D}(s^l)}\,\mathrm{e}^{tA_l} - \frac{\mu-\mathrm{e}^{bA_l}}{\mathrm{D}(s^l)}\right). \tag{16}$$

Если $\mu = 1$, то $u_l(t)$ не зависит от t и условие леммы равносильно соотношению $|A_l - \alpha| \to 0$ при $l\to\infty$ (в частности, при $\alpha = 0$ имеем $|A_l|\to 0$ при $l\to\infty$), так как при $\mu = 1$ $u_l(t) = -\dfrac{1}{A_l-\alpha}$. Таким образом, в этом случае мы имеем неограниченность оператора L^{-1}.

Если $\mu \neq 1$, то в формуле (16) второе слагаемое $-(\mu-\mathrm{e}^{bA_l})[A_l\mathrm{D}(s^l)]^{-1}$ ограничено, так как для достаточно больших l имеем $|A_l-\alpha|\geq\eta>0$, и при $|A_l|\to\infty$ стремится к нулю. Поэтому, в (16) достаточно показать, что неограниченно растут нормы функций

$$v_l = \mathrm{e}^{tA_l}[\mathrm{D}(s^l)]^{-1}A_l^{-1}.$$

Положим $A_l = r_l + iq_l$, где $r_l,\ q_l$ вещественны. Имеем

$$\|v_l\|^2_{H(0,b)} = \frac{\mathrm{e}^{2br_l}-1}{2r_l\left|(\mu-\mathrm{e}^{bA_l})(A_l-\alpha)+(\mu-1)\sum\limits_{k=1}^m\alpha_k\mathrm{e}^{t_kA_l}\right|^2}\ . \tag{17}$$

Если $\mu = 0$, то правая часть (17) стремится к величине $\mathrm{e}^{-2t_k r_l}$, которая в свою очередь стремится к $+\infty$ при $r_l \to -\infty$. Последнее соответствует условию леммы $\mathrm{D}(s^l) \to 0$.

Если $\mu = \infty$, то из условия леммы следует, что $r_l \to +\infty$. Отсюда получаем неограниченность правой части (17).

Если $\mu \neq 0, 1, \infty$, то для достаточно больших l имеем $0 < \eta_1 \leq |A_l - \alpha| \leq \eta_2 < \infty$. Поскольку $|r_l|^{-1}|\mathrm{e}^{2br_l} - 1| \geq \beta > 0$ (для достаточно больших l $|\mathrm{e}^{2br_l} - 1| \geq \delta_1 >> 0,\ r_l > +N$), видим, что $\|v_l\|^2_{H(0,b)}$ растет вместе с $|\mathrm{D}(s^l)|^{-2}$. Это завершает доказательство леммы 3.

Замечание 3. *При $\mu = 0,\ \infty$ и произвольном операторе A точечный спектр оператора L не всегда пуст (в отличие от случая, когда отсутствует нагрузка* [1, *с.*122; 2; 3]*).*

Замечание 4. *Остаточный спектр оператора L пуст, как и у оператора A, то есть* $\sigma L = \overline{\mathrm{P}\sigma L},\ \mathrm{C}\sigma L = \sigma L \setminus \mathrm{P}\sigma L$. Оказалось, что это свойство оператора L не зависит от наличия нагрузки.

Множество $\mathrm{P}\sigma L$ описывается корнями λ уравнения

$$\left\{\left[|\mu|\mathrm{e}^{i\arg\mu + 2\pi li} - \mathrm{e}^{b[A(s)+\lambda]}\right]\cdot[A(s)+\lambda-\alpha] + \left[|\mu|\mathrm{e}^{i\arg\mu+2\pi li} - 1\right]\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \mathrm{e}^{t_k[A(s)+\lambda]}\right\}\cdot$$
$$\cdot\,[A(s)+\lambda]^{-1} = 0,\ s\in\mathcal{S},\ l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

7. Примеры. Рассмотрим два примера на применение полученных результатов.

1^0. Пусть $A(s) = s^2,\ \mu = 1,\ \alpha = 0$. Тогда условие (2) принимает вид $\mathrm{D}(s) = 1 - \exp bs^2$, если $s \neq 0$; в частности, $\mathrm{D}(0) = 0$. Итак, имеем

Утверждение 1. *Пусть $A(s) = s^2,\ \mu = 1,\ \alpha = 0$. Тогда $0 \in \mathrm{P}\sigma L$. Точечный спектр $\mathrm{P}\sigma L$ оператора L описывается множеством: $\lambda = -s^2 + i2\pi(b)^{-1}l,\ l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$*

2^0. Пусть $A(s) = s^2,\ \mu = 0,\ \alpha = 0$. Тогда условие (2) принимает вид $\mathrm{D}(s) = -\exp(bs^2) - s^{-2}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\exp(s^2t_k)$, если $s \neq 0$; в частности, $-\mathrm{D}(0) = 1 + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k t_k$. Таким образом, получаем

Утверждение 2. *Пусть $A(s) = s^2,\ \mu = 0,\ \alpha = 0,\ B_s = B(s, \alpha_k, t_k) \equiv \sum_{k=1}^{m}\alpha_k s^{-2}\cdot\exp(-s^2(b-t_k))$. Тогда $0 \in \rho L$, если $B_s \neq -1\ \forall s \in \mathcal{S}$; $0 \in \mathrm{P}\sigma L$, если $B_s = -1$ хотя бы для одного $s \in \mathcal{S}$. В этом случае точечный спектр $\mathrm{P}\sigma L$ описывается корнями уравнения:* $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\dfrac{\exp[-(b-t_k)(s^2+\lambda)]}{s^2+\lambda} = -1,\ s\in\mathcal{S}$.

Заключение. Отметим, что нагруженные дифференциальные операторы изучались также в работах [4–9]. В работе [6] рассматривались спектральные вопросы для нагруженных обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка на ограниченном интервале.

Цитированная литература

1. **Дезин А. А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
2. **Dzhenaliev M. T.** // J.Korean Math.Soc. 2000. V. 37, № 6. P. 1031 – 1042.
3. **Дженалиев М. Т.** // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 48 – 54.
4. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.
5. **Нахушев А. М.** // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86 – 94.
6. **Ломов И. С.** // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 80 – 93; № 9. С. 1550 – 1563.

7. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Тр. международн. конф. (26–28 окт. 2000, Алматы). Алматы. 2001. С. 20 – 24.

8. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, № 1. С. 21 – 29.

9. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Тр. Института математики НАН Беларуси (международн.конф. AMADE-2001, 14–20 февр. 2001, Минск). 2001. Т. 10. С. 45 – 49.

Поступила в редакцию 15.03.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 38 – 42*

УДК 510.55

ОБ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ОБОБЩЕННЫХ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЯХ

В. П. Добрица

АГУ имени Абая
480012, Алматы, Толе би ул., 86

В работе рассматриваются индексные множества обобщенных вычислимых нумераций и устанавливается оценка их арифметической сложности.

Рассмотрим семейство S некоторых подмножеств натурального ряда N

$$S = \{s \mid s \subseteq N\}.$$

Для не более, чем счетного семейства можно ввести его нумерацию как отображение ν из множества натуральных чисел N на все семейство S

$$\nu : N \to S$$

Следуя А. И. Мальцеву [1], эту нумерацию ν назовем K-вычислимой, если предикат включения "$y \in \nu(x)$" является K-множеством. Другими словами, множество $\{< x, y > \mid y \in \nu(x)\}$ принадлежит классу K. Здесь через $< x, y >$ обозначен номер упорядоченной пары (x, y) в Канторовской нумерации пар. В качестве класса K может рассматриваться любой класс множеств в какой-либо иерархии множеств.

Исторически сложилось так, что первоначально изучалась вычислимость семейств рекурсивно перечислимых множеств относительно класса Σ_1^0 в иерархии Клини-Мостовского [2, 3]. Это вполне закономерно в силу естественности понимания вычислимости через рекурсивную перечислимость. И только в последние годы стали рассматриваться более сложные понятия вычислимости, так называемые обобщенные вычислимости.

Заметим, что при любом K-вычислимом семействе S все множества из этого семейства так же являются K-множествами (или, что тоже самое, являются K-вычислимыми множествами).

Одной из характеристик вычислимых нумераций является сложность индексных множеств [4–6]. Индексное множество определяется как совокупность всех ν-номеров одного и того же множества. Для множества s из семейства S индексное множество в нумерации ν этого семейства определяется следующим образом

$$I_s^\nu = \{x \mid \nu(x) = s\}.$$

Keywords: *set family, computable innumerations, generalized computability, arithmetical hierarchy of sets, index sets, arithmetical complexity of sets*
2000 Mathematics Subject Classification: 03D45

Для разных элементов s семейства S индексные множества могут иметь разную сложность в одной и той же K-вычислимой нумерации. На это влияют как структура самого множества s, так и структура семейства S. Максимальная сложность индексного множества характеризует сложность и самой нумерации ν.

Проведем оценку арифметической сложности индексных множеств для K-вычислимых нумераций, где в качестве класса K берутся классы Σ^{-1}_{n+1} множеств в иерархии Ершова.

Теорема 1. *Пусть ν является Σ^{-1}_{n+1}-вычислимой нумерацией некоторого семейства S подмножеств натурального ряда. Тогда для любого множества s из семейства S индексное множество I^{ν}_{s} лежит в классе Π^0_2 арифметической иерархии Клинки-Мостовского. При этом для любого множества M из класса Π^0_2 существуют семейство S, его Σ^{-1}_{n+1}-вычислимая нумерация ν и множество s из семейства S такие, что множество M является соответствующим индексным множеством, т.е. $I^{\nu}_{s} = M$.*

Доказательство. Проведем сначала верхнюю оценку арифметической сложности этого множества. Для произвольного множества s из семейства S зафиксируем некоторый его ν-номер $m_0 : \nu(m_0) = s$.

Нумерация ν является Σ^{-1}_{n+1}-вычислимой, а соответствующий класс Σ^{-1}_{n+1} является подклассом класса Δ^0_2 иерархии Клинки-Мостовского. А потому существуют рекурсивные предикаты $A(m,u,v,y)$ и $B(m,u,v,y)$ равномерно при каждом m определяющие принадлежность элементов y множеству $\nu(m)$, рассматриваемому как Σ^0_2-множество и как Π^0_2-множество, соответственно

$$y \in \nu(m) \;\Leftrightarrow\; \exists u\, \forall v\; A(m,u,v,y),$$

$$y \in \nu(m) \;\Leftrightarrow\; \forall u\, \exists v\; B(m,u,v,y).$$

Воспользуемся этими эквивалентностями для установления верхней оценки арифметической сложности индексного множества, исходя из условия, что $m \in I^{\nu}_{s}$ тогда и только тогда, когда для каждого натурального значения y выполняется эквивалентность

$$y \in \nu(m) \;\Leftrightarrow\; y \in \nu(m_0).$$

Проведем необходимые преобразования

$$m \in I^{\nu}_{s} \;\Leftrightarrow\; \forall y\; (y \in \nu(m) \;\Leftrightarrow\; y \in \nu(m_0)) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \forall y\; ((y \not\in \nu(m) \vee y \in \nu(m_0)) \wedge (y \in \nu(m) \vee y \not\in \nu(m_0)) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \forall y\; ((\neg(\exists u\, \forall v\; A(m,u,v,y)) \vee \forall u_1\, \exists v_1\; B(m_0,u_1,v_1,y)) \wedge$$

$$\wedge (\forall u_2\, \exists v_2\; B(m,u_2,v_2,y) \vee \neg(\exists u_3\, \forall v_3\; A(m,u_3,v_3,y)))) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \forall y\, \forall u\, \forall u_1\, \forall u_2\, \forall u_3\, \exists v\, \exists v_1\, \exists v_2\, \exists v_3\; [(\neg(A(m,u,v,y)) \vee$$

$$\vee B(m_0,u_1,v_1,y)) \wedge (B(m,u_2,v_2,y) \vee \neg(A(m_0,u_3,v_3,y))].$$

В квадратных скобках, очевидно, записан рекурсивный предикат, а префиксная приставка имеет вид $\forall\exists$. В соответствии с алгоритмом Тарского-Куратовского этим установлено, что индексное множество I^{ν}_{s} лежит в классе Π^0_2 арифметической иерархии множеств.

Заметим, что если мы установим существование требуемых семейства S, элемента s и K-вычислимой нумерации ν для $K = \Sigma^{-1}_{1}$, то этот же пример будет удовлетворять требованиям теоремы и для Σ^{-1}_{n+1}-вычислимости при любом натуральном n в силу включения $\Sigma^{-1}_{1} \subset \Sigma^{-1}_{n+1}$.

Построение семейства S и его Σ^{-1}_{1}-вычислимой нумерации ν осуществим по шагам. Семейство S будет состоять из некоторых начальных отрезков натурального ряда и всего множества N.

Пусть M — произвольное множество из класса Π^0_2. Построение проведем так, что искомым будет индексное множество $I^{\nu}_N = M$. Обозначим через $P_M(u,v,x)$ рекурсивный предикат, определяющий множество M

$$x \in M \ \Leftrightarrow \ \forall u \ \exists v \ P(u,v,x).$$

Опишем построение множества $\nu(x)$ равномерно по x.

В процессе построения на каждом шаге t будут определяться значения вспомогательных общерекурсивных функций $v(t+1)$, $u(t+1)$ и дополнительно перечисляться элементы множества $v(x)$ в зависимости от истинностного значения предиката $P(u(t),v(t),x)$. До начала построения полагаем $v(0)=0$ и $u(0)=0$, а множество $\nu(x)$ пустым, т.е. пока не содержащим никаких элементов.

Шаг 0. Проверяем истинность предиката $P(0,0,x)$:

а) если предикат $P(0,0,x)$ истинен, то включаем число 0 в множество $\nu(x)$. Определяем значения вспомогательных функций $v(1)=0$, $u(1)=u(0)+1=1$ и переходим к выполнению следующего шага построения;

б) если значение предиката $P(0,0,x)$ ложно, то в множество $\nu(x)$ не добавляем никакого нового элемента. Определяем значения вспомогательных функций $v(1)=v(0)+1=1$, $u(1) = u(0)=0$. Переходим к выполнению следующего шага построения.

Допустим после шага t определены значения вспомогательных функций $u(t+1)$ и $v(t+1)$ и уже перечислена какая-то часть множества $\nu(x)$.

Шаг t+1. Проверяем истинность значение предиката $P(u(t+1),\ v(t+1),x)$:

а) в случае истинности предиката $P(u(t+1),v(t+1),x)$ включаем элемент $u(t+1)$ в множество $\nu(x)$. Полагаем $u(t+2)=u(t+1)+1$, $v(t+2)=0$ и переходим к выполнению следующего шага;

б) если же значение предиката $P(u(t+1),v(t+1),x)$ ложно, то полагаем $u(t+2)=u(t+1)$, $v(t+2)=v(t+1)+1$ и переходим к выполнению следующего шага.

Построение закончено.

Лемма 1. *Множество $\nu(x)$ равно множеству натуральных чисел тогда и только тогда, когда $x \in M$.*

Действительно, если $x \in M$, то выполняется формула $\forall u \ \exists v \ P(u,v,x)$. А тогда все натуральные значения u будут включены в множество $\nu(x)$ последовательно.

Если же $x \notin M$, то будет выполняться формула $\neg(\forall u \ \exists v \ P(u,v,x)$, которая эквивалентна формуле $\exists u \ \forall v \ (\neg P(u,v,x))$. Пусть u_0 будет наименьшим из таких u, что для всех v предикат $P(u,v,x)$ принимает ложные значения. Тогда наступит такой шаг t_0, что $u(t_0+1)=u_0$. Легко понять, что для всех $t > t_0$ значение $u(t)=u(t_0+1)=u_0$ стабилизируется, а значения функции $v(t)$ будет бесконечно расти. В этом случае по построению получим множество $\nu(x)=\{0,1,\ldots,u_0-1\}$ как начальный сегмент натурального ряда.

В силу этой леммы и имеем равенство $I^{\nu}_N = M$.

Теорема доказана.

Поскольку классы Σ^{-1}_1 и Σ^0_1 совпадают, из теоремы получается ранее известная оценка сложности индексного множества для обычной (Σ^0_1-) вычислимости.

Следствие. *Если ν – (Σ^0_1-) вычислимая нумерация семейства S рекурсивно перечислимых подмножеств натурального ряда, то для произвольного $s \in S$ индексное множество I^{ν}_s лежит в классе Π^0_2 арифметической иерархии множеств. При этом, для каждого M из класса Π^0_2 существуют вычислимое семейство S рекурсивно перечислимых множеств, его вычислимая нумерация ν и элемент $s \in S$ такие, что индексное множество I^{ν}_s совпадает с множеством M.*

Т е о р е м а 2. *Пусть ν является Π^{-1}_{n+1}-вычислимой нумерацией некоторого семейства S подмножеств натурально ряда. Тогда для любого множества s из семейства S индексное множество I^{ν}_{s} лежит в классе Π^0_2 иерархии Клини-Мостовского. При этом для любого множества M из класса Π^0_2 существуют семейство S, его Π^{-1}_{n+1}-вычислимая нумерация ν и множество s из семейства S такие, что индексное множество I^{ν}_{s} равно множеству M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Верхняя оценка сложности индексного множества I^{ν}_{s} для произвольного s из семейства S с Π^{-1}_{n+1}-вычислимой нумерацией ν проводится совершенно аналогично получению верхней оценки сложности в доказательстве теоремы 1. Точность такой оценки подтверждается построением соответствующих семейства S и его Π^{-1}_{n+1}-вычислимой нумерации ν по произвольному множеству M из класса Π^0_2 таких, что для $s = \varnothing$ индексное множество I^{ν}_{s} будет равно множеству M. При этом в семейство S включаются некоторые подмножества натурального ряда, которые получаются из множества N удалением некоторого конечного начального сегмента, а также пустое множество.

Само построение схоже с построением из теоремы 1, только исходным в построении берется множество N (вместо $\varnothing$) и действие *"включение элемента в множество $\nu(x)$"* заменяется на действие "*исключение элемента из множества $\nu(x)$*". Описание необходимого построения в остальном повторяет построение, описанное в теореме 1.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь индексные множества в обобщенных вычислимых нумерациях относительно классов арифметической иерархии множеств.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\nu(x)$ является Σ^0_{n+1}-вычислимой нумерацией некоторого семейства S подмножеств множества натуральных чисел. Тогда для любого элемента s семейства S индексное множество I^{ν}_{s} лежит в классе Π^0_{n+2}. При этом для каждого множества M из класса Π^0_{n+2} существуют семейство S подмножеств множества натуральных чисел, его Σ^0_{n+1}-вычислимая нумерация $\nu(x)$ и элемент s из семейства S такие, что индексное множество I^{ν}_{s} равно множеству M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Проведем верхнюю оценку арифметической сложности индексного множества I^{ν}_{s}. Так как множество $\{< x, y > \mid y \in \nu(x)\}$ лежит в классе Σ^0_{n+1}, то существует $0^{(n)}$-рекурсивный предикат $A(m, u, x)$, задающий это множество. Пусть s — произвольный элемент семейства S. Ясно, что существует такое значение x_0, для которого $s = \nu(x_0)$. По определению индексного множества заключаем, что

$$m \in I^{\nu}_{s} \;\Leftrightarrow\; \forall y \; (y \in \nu(m) \;\Leftrightarrow\; y \in \nu(x_0)).$$

Последнее утверждение эквивалентно следующей формуле

$$\forall y \; ((\exists u \; A(m, u, y) \vee \forall u_1 \; (\neg A(x_0, u_1, y))) \wedge (\forall u_2 \; (\neg A(m, u_2, y)) \vee (\exists u_3 \; A(x_0, u_3, y)))).$$

Вынесем в этой формуле кванторы, используя алгоритм Тарского-Куратовского, получим формулу

$$\forall y \; \forall u_1 \; \forall u_2 \; \exists u \; \exists u_3 \; ((A(m, u, y) \vee (\neg A(x_0, u_1, y))) \wedge (\neg A(m, u_2, y) \vee A(x_0, u_3, y))).$$

После кванторной приставки записан $0^{(n)}$-рекурсивный предикат, являющийся булевой комбинацией $0^{(n)}$-рекурсивных предикатов. Кванторная приставка формулы, определяющей принадлежность числа индексному множеству, имеет вид $\forall\,\exists$, а потому соответствующее индексное множество I^{ν}_{s} принадлежит классу Π^0_{n+2} арифметической иерархии множеств.

Для доказательства точности полученной оценки рассмотрим произвольное множество M из класса Π^0_{n+2}. Для него выберем $0^{(n)}$-рекурсивный предикат $P(u, \nu, x)$, определяющий множество M

$$x \in M \;\Leftrightarrow\; \forall u \; \exists \nu \; P(u, \nu, x).$$

Далее дословно повторяется построение из доказательства теоремы 1, где используется именно этот $0^{(n)}$-рекурсивный предикат $P(u, \nu, x)$.

Теорема доказана.

Легко понять, что и в этом случае полученный результат можно отнести к Π^0_{n+1}-вычислимым семействам множеств.

Теорема 4. *Пусть ν является Π^0_{n+1}-вычислимой нумерацией некоторого семейства S подмножеств натурального ряда. Тогда для любого элемента s семейства S индексное множество I^ν_s лежит в классе Π^0_{n+2}. При этом для каждого множества M из класса Π^0_{n+2} существуют семейство S подмножеств множества натуральных чисел, его Π^0_{n+1}-вычислимая нумерация ν и элемент s из семейства S такие, что индексное множество I^ν_s совпадает с множеством M.*

Цитированная литература

1. **Мальцев А. И.** // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3 – 60.
2. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1974.
3. **Ershov Yu. L.** Theory of Numberings. Препринт № 18, НИИ МИОО, НГУ, Новосибирск, 1996.
4. **Добрица В. П.** // Сибирский мат. журнал. 1986. Т. 27, № 5. С. 68 – 74.
5. **Ершов Ю. Л.** // Сибирский мат. журнал. 1970. Т. 11, № 2. С. 326 – 342.
6. **Hay L.** // J. Symb. Log. 1969. 34. С. 39 – 44.

Поступила в редакцию 20.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 43 — 48*

УДК 512.554.31

2-КОГОМОЛОГИИ КОПРИСОЕДИНЕННОГО МОДУЛЯ АЛГЕБР ЛИ ТИПА A_n

Ш. Ш. Ибраев, Г. А. Туретаева

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125

В данной работе вычислены 2-когомологии коприсоединенного модуля классических алгебр Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики.

1. Предварительные факты и формулировка основного результата. Пусть $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Пусть $\mathbf{g_C}$ — комплексная классическая алгебра Ли типа A_n, R — ее система корней. Через e_α, $\alpha \in R$ обозначаются корневые векторы из базиса Шевалле, $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, $\mathbf{g_Z}$ — соответствующая форма Шевалле. Классическая алгебра Ли $\mathbf{g}$ над полем K характеристики $p > 0$ определяется как $\mathbf{g_Z} \otimes_\mathbf{Z} K$. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением X для элемента $X \otimes 1$ алгебры Ли $\mathbf{g}$.

Пространство $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g})$ 2-когомологии присоединенного модуля алгебры Ли $\mathbf{g}$ интерпретируется как пространство локальных деформаций алгебры Ли $\mathbf{g}$. 2-когомологии присоединеного модуля классических алгебр Ли над полем характеристики $p > 2$ хорошо известны и изучены в работах [1–4]. Целью настоящей работы является вычисление пространства $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$, где $\mathbf{g}^*$ — коприсоединенный $\mathbf{g}$-модуль (теорема 1). Действие алгебры Ли $\mathbf{g}$ на коприсоединенный модуль $\mathbf{g}^*$ определяется по правилу $X(Y^*(Z)) = -Y^*([X, Z])$, где $X, Z \in \mathbf{g}$ и $Y^* \in \mathbf{g}^*$.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над K, G — алгебраическая группа алгебры Ли $\mathbf{g}$, G_1 — ядро отображения Фробениуса на G, T — максимальный тор в G, $X(T)$ — группа характеров T, $R \subset X(T)$ — система корней. Введем множества положительных R_+ и отрицательных R_- корней в R. Нумерация простых корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ соответствует таблице Бурбаки [6].

Пусть теперь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — фундаментальные веса, $X(T)_+$ — множество доминантных весов, $X_1(T)$ — множество доминантных ограниченных весов, т.е. $X_1(T) = \{ \lambda = \sum_{i=1}^n r_i \lambda_i \in \in X(T) \ : \ r_i \in Z, \ 0 \le r_i < p$, для всех $i\}$. На $X(T)$ введем обычное отношение порядка $\lambda \le \mu$ тогда и только тогда, когда существуют целые $r_i \ge 0$ такие, что $\mu - \lambda = \sum_{i=1}^n r_i \alpha_i$. Для любого T-модуля V и любого $\mu \in X(T)$ обозначим через V_μ весовое пространство в V, соответствующее весу μ.

Пусть B — подгруппа Бореля группы G, соответствующая отрицательным корням, U — унипотентный радикал B. Для каждого $\lambda \in X(T)$ можно определить одномерный модуль K_λ над B с помощью изоморфизма $B/U \cong T$. Индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = \mathrm{Ind}_B^G K_\lambda$ является ненулевым тогда и только тогда, когда $\lambda \in X(T)_+$.

Keywords: *Lie algebra, cohomology of Lie algebra, coadjoint module*
2000 Mathematics Subject Classification: 17B50, 17B56

Композиция представления группы G на векторном пространстве V с отображением Фробениуса F определяет новое представление, на котором G_1 (следовательно, и алгебра Ли $\mathbf{g}$) действует тривиально. Обозначим полученный модуль через $V^{(1)}$. Каждому весу $\mu \in X(T)$ пространства V соответствует вес $p\mu$ пространства $V^{(1)}$.

С другой стороны, если V_1 является G-модулем, на котором G_1 (или $\mathbf{g}$) действует тривиально, то существует единственный G-модуль V такой, что $V_1 = V^{(1)}$. Обозначим этот G-модуль V через $V^{(-1)}$. Например, если L является G-модулем, то каждая группа когомологии $H^i(G_1, L)$ есть G-модуль, на котором G_1 (или $\mathbf{g}$) действует тривиально. Тогда модуль $H^i(G_1, L)^{(-1)}$ является G-модулем, обладающим вышеуказанным свойством.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathbf{g}$ как ограниченную алгебру Ли с p-отображением $X \mapsto X^{[p]}$, $X \in \mathbf{g}$. Пусть $U(\mathbf{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathbf{g}$ и $U(\mathbf{g})^+$ — двусторонний идеал в $U(\mathbf{g})$ такой, что $U(\mathbf{g})$ является прямой суммой K и $U(\mathbf{g})^+$, как векторное пространство над K. Обозначим через $P(\mathbf{g})$ идеал, порожденный элементами $X^p - X^{[p]}$, $X \in \mathbf{g}$. Фактор-алгебра $U_0(\mathbf{g}) = U(\mathbf{g})/P(\mathbf{g})$ называется ограниченной универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathbf{g}$.

Известно, что когомология $H^i(G_1, V)$ для ограниченного G_1-модуля V и ограниченная когомология соответствующего $\mathbf{g}$-модуля эквивалентны ([8], I.9, С.145). Ограниченная группа когомологии ограниченной алгебры Ли впервые была введена Хохшильдом в [7]. i-ая группа ограниченной когомологии ограниченной алгебры Ли $\mathbf{g}$ с коэффициентами в ограниченном $\mathbf{g}$-модуле V обозначается через $H^i_*(\mathbf{g}, V)$. По определению $H^i_*(\mathbf{g}, V) = \mathrm{Ext}^i_{U_0(\mathbf{g})}(K, V)$.

Связь между обычной второй и ограниченной второй группами когомологий с коэффициентами в ограниченном модуле V определяется со следующей точной последовательностью G-модулей:

$$H^0(\mathbf{g}, V) \otimes \mathbf{g}^* \longrightarrow H^2(G_1, V) \longrightarrow H^2(\mathbf{g}, V) \longrightarrow H^1(\mathbf{g}, V) \otimes \mathbf{g}^* \longrightarrow H^3(G_1, V). \tag{1}$$

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Пусть $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 0$. Тогда $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) = 0$, кроме следующих случаев:*

(a) $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) \cong H^0(\lambda_1)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)}$, *если $p = 3$ и $n = 2$;*

(b) $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) \cong H^0(\lambda_1)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)}$, *если $p = 2$ и $n = 3$;*

(c) $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) \cong H^0(\lambda_3)^{(1)}$, *если $p = 2$ и $n = 5$.*

2. Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы мы используем следующие известные факты.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Тогда $H^1(G_1, \mathbf{g}^*) = 0$ кроме следующих случаев:*

(a) $H^1(G_1, \mathbf{g}^*)^{(-1)} \cong H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_2)$, *если $p = 3$ и $n = 2$;*

(b) $H^1(G_1, \mathbf{g}^*)^{(-1)} \cong H^0(\lambda_2)$, *если $p = 2$ и $n = 3$.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из результата работы [5] (предложение 4.1).

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Тогда $H^2(G_1, \mathbf{g}^*) = 0$ кроме следующих случаев:*

(a) $H^2(G_1, \mathbf{g}^*)^{(-1)} \cong H^0(\lambda_1) \oplus H^0(\lambda_3)$, *если $p = 2$ и $n = 3$;*

(b) $H^2(G_1, \mathbf{g}^*)^{(-1)} \cong H^0(\lambda_3)$, *если $p = 2$ и $n = 5$.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из результатов работы [9] (теорема (хороший случай), теорема *2A*).

Если $V = \mathbf{g}^*$, то точную последовательность (1) можно переписать в следующем виде:

$$H^0(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)\otimes\mathbf{g}^* \longrightarrow H^2(G_1,\mathbf{g}^*) \longrightarrow H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \longrightarrow H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)\otimes\mathbf{g}^* \longrightarrow H^3(G_1,\mathbf{g}^*). \qquad (2)$$

Докажем следующие вспомогательные предложения.

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, $\mathbf{g}^*$ — коприсоединенный $\mathbf{g}$-модуль и $f : H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)\otimes \mathbf{g}^* \longrightarrow H^3(G_1,\mathbf{g}^*)$ — отображение из точной последовательности (1). Тогда имеет место следующий изоморфизм G-модулей:*

$$H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \cong H^2(G_1,\mathbf{g}^*) + \operatorname{Ker} f. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность (2). Хорошо известно, что $H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \cong H^1(G_1,\mathbf{g}^*)$ и $H^0(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) = 0$ (см., например, [5], [7]). Тогда точную последовательность (2) можно переписать в виде

$$0 \longrightarrow H^2(G_1,\mathbf{g}^*) \longrightarrow H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \longrightarrow H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)\otimes\mathbf{g}^* \longrightarrow H^3(G_1,\mathbf{g}^*).$$

Последняя точная последовательность дает требуемый изоморфизм (3). Предложение 1 доказано.

Согласно предложению 1 $H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \cong H^2(G_1,\mathbf{g}^*) + \operatorname{Ker} f$. Когомологии $H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ и $H^2(G_1,\mathbf{g}^*)$ вычислены в леммах 2 и 3. Теперь остается вычислить $\operatorname{Ker} f$.

Предложение 2. *Пусть $\mathbf{g}$ — классическая алгебра Ли типа A_n над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Тогда $\operatorname{Ker} f = 0$ кроме следующих случаев:*
(a) $\operatorname{Ker} f \cong H^0(\lambda_1) + H^0(\lambda_2)$, *если* $p = 3$ *и* $n = 2$;
(b) $\operatorname{Ker} f \cong H^0(\lambda_2) + H^0(\lambda_2) + H^0(\lambda_2)$, *если* $p = 2$ *и* $n = 3$.

Доказательство. Если $H^1(G_1,\mathbf{g}^*) = 0$, то очевидно, что $\operatorname{Ker} f = 0$. Так как $H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \cong H^1(G_1,\mathbf{g}^*)$, то по лемме 1 $H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \neq 0$ только в следующих случаях:
(a) $p = 3$ и $n = 2$;
(b) $p = 2$ и $n = 3$.
Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

Случай (a). Пусть $p = 3$ и $n = 2$. Так как $H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)^{(-1)} \cong H^0(\lambda_1)\oplus H^0(\lambda_2)$ (лемма 1) и G-модули $H^0(\lambda_1)$, $H^0(\lambda_2)$ неприводимы, то достаточно показать наличие нетривиальных коциклов, имеющих веса $3\lambda_1$ и $3\lambda_2$.

Пусть $\psi_{3\lambda_1}$, $\psi_{3\lambda_2}$ — 2-коциклы из $H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$, имеющие веса $3\lambda_1$ и $3\lambda_2$, соответственно. Тогда $\psi_{3\lambda_1}$, $\psi_{3\lambda_2}$, соответственно, могут иметь только следующие ненулевые компоненты:

$$\psi_{3\lambda_1}(h_1,e_{-\alpha_1}) = a_1e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi_{3\lambda_1}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_2e^*_{-\alpha_1},\ \psi_{3\lambda_1}(h_2,e_{-\alpha_1}) = a_3e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi_{3\lambda_1}(h_2,e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_4e^*_{-\alpha_1},\ \psi_{3\lambda_1}(e_{\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_5e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi_{3\lambda_1}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2}) = a_6e^*_{-\alpha_1},\ \psi_{3\lambda_1}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_7h_1^* + a_8h_2^*;$$

$$\psi_{3\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2}) = b_1e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi_{3\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = b_2e^*_{-\alpha_2},\ \psi_{3\lambda_2}(h_2,e_{-\alpha_2}) = b_3e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi_{3\lambda_2}(h_2,e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = b_4e^*_{-\alpha_2},\ \psi_{3\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = b_5e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi_{3\lambda_2}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2}) = b_6e^*_{-\alpha_2},\ \psi_{3\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = b_7h_1^* + b_8h_2^*,$$

где $a_i, b_i \in K$.

Напомним, что действие алгебры Ли $\mathbf{g}$ на коприсоединенный модуль $\mathbf{g}^*$ определяется по правилу $X(Y^*(Z)) = -Y^*([X,Z])$, $X, Z \in \mathbf{g}$, $Y^* \in \mathbf{g}^*$.

Из условия коцикличности следует, что каждый из коциклов $\psi_{3\lambda_1}$, $\psi_{3\lambda_2}$, соответственно, является линейной комбинацией следующих двух коциклов (указаны ненулевые компоненты):

$$\psi^1_{3\lambda_1}(h_1, e_{-\alpha_1}) = 2e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^1_{3\lambda_1}(h_1, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_1},\ \psi^1_{3\lambda_1}(e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = 2e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi^1_{3\lambda_1}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_1},\ \psi^1_{3\lambda_1}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = h^*_2;$$

$$\psi^2_{3\lambda_1}(h_1, e_{-\alpha_1}) = e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^2_{3\lambda_1}(h_1, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = 2e^*_{-\alpha_1},\ \psi^2_{3\lambda_1}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = h^*_1$$

и

$$\psi^1_{3\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_2}) = 2e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^1_{3\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_2},\ \psi^1_{3\lambda_2}(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi^1_{3\lambda_2}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_2},\ \psi^2_{3\lambda_1}(e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = h^*_1;$$

$$\psi^2_{3\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^2_{3\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = 2e^*_{-\alpha_2},\ \psi^2_{3\lambda_2}(e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = h^*_2.$$

Легко заметить, что каждый из этих коциклов является нетривиальным коциклом. Однако, они попарно линейно зависимы. Действительно, если $\psi_{3\lambda_1} = c_1\psi^1_{3\lambda_1} + c_2\psi^2_{3\lambda_1}$, $c_i \in K$ и $\psi_{3\lambda_2} = d_1\psi^1_{3\lambda_2} + d_2\psi^2_{3\lambda_2}$, $d_i \in K$, то из условий $\psi_{3\lambda_1} = d\omega_{3\lambda_1}$, $\psi_{3\lambda_2} = d\omega_{3\lambda_2}$, $\omega_{3\lambda_1}, \omega_{3\lambda_2} \in C^1(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ следует, что $c_1 - c_2 = 0$ и $d_1 = d_2$.

Таким образом, мы получили два линейно независимых нетривиальных коцикла $\psi^2_{3\lambda_1}$, $\psi^2_{3\lambda_2}$, имеющих, соответственно, веса $3\lambda_1$, $3\lambda_2$ и порождающие $\operatorname{Ker} f$ как $G-$модуль.

Случай (b). Пусть $\mathbf{g} = A_3$ и $p = 2$. Так как $H^1(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)^{-1} \cong H^0(\lambda_2)$ (лемма 2) и $G-$модуль $H^0(\lambda_2)$ неприводим, то достаточно доказать, что число линейно независимых нетривиальных коциклов веса $2\lambda_2$ равно трем.

Пусть $\psi_{2\lambda_2}$ — 2-коцикл из $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ веса $2\lambda_2$. Тогда $\psi_{2\lambda_2}$ может иметь только следующие ненулевые компоненты:

$$\psi_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_2}) = a_1 e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_2 e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_3 e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_4 e^*_{-\alpha_2},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_2}) = a_5 e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi_{2\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_6 e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_7 e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi_{2\lambda_2}(h_2, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_8 e^*_{-\alpha_2},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(h_3, e_{-\alpha_2}) = a_9 e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi_{2\lambda_2}(h_3, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_{10} e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(h_3, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{11} e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi_{2\lambda_2}(h_3, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{12} e^*_{-\alpha_2},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_{13} e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{14} e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{15} e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{16} e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}) = a_{17} e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{18} e^*_{-\alpha_2},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_3}) = a_{19} e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_{20} e^*_{-\alpha_3},$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{21} e^*_{-\alpha_1},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{22} h^*_1 + a_{23} h^*_2 + a_{24} h^*_3,$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_3}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = a_{25} e^*_{-\alpha_2},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{26} h^*_1 + a_{27} h^*_2 + a_{28} h^*_3,$$

$$\psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{29} e^*_{\alpha_1},\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2-\alpha_3}, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = a_{30} e^*_{\alpha_3},$$

где $a_i \in K$.

Из условия коцикличности следует, что $\psi_{2\lambda_2}$ является линейной комбинацией следующих шести коциклов (указаны ненулевые компоненты):

$$\psi^1_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^1_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^1_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\psi^1_{2\lambda_2}(h_1, e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = e^*_{-\alpha_2},\ \psi^1_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$

$$\psi^1_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}) = e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2-\alpha_3}) = e^*_{-\alpha_2},$$

$$\psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_3},\ \psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1},$$
$$\psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1,\ \psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_3},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2},$$
$$\psi^1_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1,\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2-\alpha_3},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{\alpha_3};$$
$$\psi^2_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^2_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^2_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$\psi^2_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^2_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^2_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^2_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1,$$
$$\psi^2_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1,\ \psi_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{\alpha_1};$$
$$\psi^3_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^3_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^3_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$\psi^3_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^3_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^3_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^3_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^3_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},$$
$$\psi^3_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^3_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^3_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^3_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_3},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2},$$
$$\psi^3_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1+h^*_3;$$
$$\psi^4_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^4_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^4_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$\psi^4_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^4_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^4_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^4_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^4_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^4_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^4_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^4_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_3},$$
$$\psi^4_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1,\ \psi^4_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1+h^*_2;$$
$$\psi^5_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^5_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^5_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2})=a_{17}e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^5_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$\psi^5_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_3},\ \psi^5_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1},$$
$$\psi^5_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_1+h^*_3;$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(h_1,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_2,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_2,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(h_2,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_2,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},\ \psi^6_{2\lambda_2}(h_3,e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(e_{\alpha_3},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_2-\alpha_3},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2})=e^*_{-\alpha_3},\ \psi^6_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_2-\alpha_3})=e^*_{-\alpha_1},$$
$$\psi^6_{2\lambda_2}(e_{-\alpha_2},e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3})=h^*_2.$$

Таким образом $\psi_{2\lambda_2}=\sum_{i=1}^6 b_i\psi^i_{2\lambda_2}$, $b_i\in K$. Далее, из условия $d\omega_{2\lambda_2}=\psi_{2\lambda_2}$, где $\omega_{2\lambda_2}\in$ $\in C^1(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$, следует, что $b_1=b_2+b_3$, $b_4=b_3$, $b_5=a$, $b_6=0$, где $a\in K$. Это означает, что число линейно независимых коциклов веса $2\lambda_2$ равно трем. В качестве линейно независимых нетривиальных коциклов можно выбрать следующие три коцикла $\psi^1_{2\lambda_2}$, $\psi^4_{2\lambda_2}$, $\psi^6_{2\lambda_2}$. Как G-модуль $\operatorname{Ker} f$ порождается коциклами $\psi^1_{2\lambda_2}$, $\psi^4_{2\lambda_2}$, $\psi^6_{2\lambda_2}$. Предложение доказано.

Справедливость теоремы следует из лемм 1, 2 и предложений 1, 2.

Цитированная литература

1. **Кострикин А. И.** // Изв. АН СССР, сер. мат. 1970. Т. 34. С. 744 – 756.

2. **Рудаков А. Н.** // Изв. АН СССР, сер. мат. 1971. Т. 35. С. 1113 – 1119.

3. **Джумадильдаев А. С.** // УМН. 1976. Т. 31, № 3. С. 211 – 212.

4. **Кузнецов М. И., Чебочко Н. Г.** // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 69 – 88.

5. **Jantzen J. C.** // Progress in mathematics. 1991. V. 95, P. 289 – 315.

6. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М. 1972. 436 с.

7. **Hochschild G.** // Amer. J. Math. 1954. V. 76. P. 555 – 580.

8. **Jantzen J. C.** Representations of algebraic groups. Pure and Applied Mathematics. Boston. 1987. V. 131.

9. **Ibraev S. S.** // Proc. of Int. Conf. Achievement and Development of mathematics in framework of program "Kazakhstan in third millenium"(Almaty, october 26–28, 2000). 2001. P. 199 – 201.

Поступила в редакцию 13.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 49 — 55*

УДК 517.51

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Р. О. Ойнаров

Евразийский Национальный университет им Л.Н.Гумилева
473021, Астана, Мунаитпасова ул., 5, oinarov@math.kz

Для каждого неотрицательного целого m определяются расширяющиеся классы неотрицательных функций. Когда ядра интегральных операторов вольтерровского типа принадлежат к этим классам, в терминах ядра даются необходимые и достаточные условия их компактности.

1. Введение. В работе [1] для любого неотрицательного целого m определены классы P_m, Q_m неотрицательных функций $K(x,s)$, $0 < s \le x < \infty$ и установлена оценка

$$\|Kf\|_{q,\mu} \le c\|f\|_p, \ f \in L_p(I) \tag{1}$$

для интегральных операторов вида

$$Kf(x) = \int_0^x K(x,s)f(s)ds, \ x > 0\,, \tag{2}$$

$$Kg(s) = \int_s^\infty K(x,s)g(x)dx, \ s > 0\,, \tag{3}$$

при $K(\cdot,\cdot) \in P_m$, $K(\cdot,\cdot) \in Q_m$, $m \ge 0$, соответственно, где $I = (0,\infty)$, $1 < p \le q < \infty$, μ — борелевская мера. Если в (1) μ — мера Лебега, то из полученных результатов вытекает критерий ограниченности операторов (2) и (3) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$,$1 < p \le q < \infty$, при $K(\cdot,\cdot) \in P_m \bigcup Q_m$, $m \ge 0$.

Данная работа является продолжением работы [1] и в ней устанавливается критерий компактности операторов (2), (3) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$, $1 < p \le q < \infty$, при $K(\cdot,\cdot) \in P_m \bigcup Q_m$, $m \ge 0$. В [1] введены величины $A^+(z,\mu)$, $A^-(z,\mu)$, $A^+(\mu) = \sup\limits_{z>0} A^+(z,\mu)$, $A^-(\mu) = \sup\limits_{z>0} A^-(z,\mu)$. Если в (1) μ — мера Лебега, выражения для $A^+(z,\mu)$, $A^-(z,\mu)$, соответственно, имеют вид

$$A^+(z) \equiv A^+{}_{p,q}(z) = \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z K^{p'}(x,s)ds\right)^{\frac{q}{p'}} dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

Keywords: *Volterra type integral operator, compactness*
2000 Mathematics Subject Classification: 47G10, 47B38

$$A^-(z) \equiv A^-{}_{p,q}(z) = \left(\int\limits_0^z \left(\int\limits_z^\infty K^q(x,s)dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Из теоремы 1 и следствия 1, а также из теоремы 2 и следствия 2 работы [1], соответственно, вытекают

Теорема A. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора (2) принадлежит классу* $P_m \bigcup Q_m$, $m \ge 0$. *Тогда утверждения*

1) оператор (2) ограничен из $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$,

2) $A^+_{p,q} = \sup\limits_{z>0} A^+_{p,q}(z) < \infty$,

3) $A^-_{p,q} = \sup\limits_{z>0} A^-_{p,q}(z) < \infty$

эквивалентны, причем норма оператора (2) $\|K\|_{p\to q} \approx A^+_{p,q} \approx A^-_{p,q}$.

Теорема A^*. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора (3) принадлежит классу* $P_m \bigcup Q_m$, $m \ge 0$. *Тогда утверждения :*

1) оператор (3) ограничен из $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$,

2) $A^+_{q',p'} = \sup\limits_{z>0} A^+_{q',p'}(z) < \infty$,

3) $A^-_{q',p'} = \sup\limits_{z>0} A^-_{q',p'}(z) < \infty$

эквивалентны, причем норма оператора (3) $\|K\|_{p\to q} \approx A^+_{q',p'} \approx A^-_{q',p'}$.

Ниже нумерация формул и утверждений продолжают нумерацию формул и утверждений работы [1] и при ссылке на них указываются только номера этих формул и утверждений. Здесь, как и в работе [1], полагается $\frac{0}{0} = \infty$, $\infty \cdot 0 = 0$. Соотношение $A \ll B$ означает $A \le cB$, где константа $c > 0$ может зависеть от несущественных параметров. Мы пишем $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$. Функция $\chi_{(a,b)}(\cdot)$ – характеристическая функция интервала (a,b).

2. Основные результаты.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора (2) принадлежит классу* $P_m \bigcup Q_m$, $m \ge 0$. *Тогда утверждения*

1) оператор (2) компактен из $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$,

2) $A^+_{p,q} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} A^+_{p,q}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} A^+_{p,q}(z) = 0$,

3) $A^-_{p,q} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} A^-_{p,q}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} A^-_{p,q}(z) = 0$

эквивалентны.

Операторы (2)и (3) являются взаимно сопряженным и поэтому оператор (2) компактен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда оператор (3) компактен из $L'_q(I)$ в $L'_p(I)$. Следовательно, из теоремы 1 вытекает

Теорема 6. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора (2) принадлежит классу* $P_m \bigcup Q_m$, $m \ge 0$. *Тогда утверждения*

1) оператор (3) компактен из $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$,

2) $A^+_{q',p'} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} A^+_{q',p'}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} A^+_{q',p'}(z) = 0$,

3) $A^-_{q',p'} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} A^-_{q',p'}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} A^-_{q',p'}(z) = 0$

эквивалентны.

Доказательство теоремы 5 опирается на следующие утверждения, которые являются частными случаями теорем 5 и 6.

Теорема 5′. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора (2) принадлежит классу* P_m, $m \ge 0$. *Тогда утверждения 1),2) и 3) теоремы 5 эквивалентны.*

Т е о р е м а 6$'$. *Пусть $1<p\le q<\infty$ и ядро оператора (3) принадлежит классу P_m, $m\ge 0$. Тогда утверждения 1),2) и 3) теоремы 6 эквивалентны.*

На основании теорем $5'$и $6'$ установим сначала справедливость утверждения теоремы 5. Если ядро оператора (2) принадлежат классу P_m, $m\ge 0$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы $5'$. Пусть ядро оператора (2) $K(\cdot,\cdot)\equiv K_m(\cdot,\cdot)\in Q_m$, $m\ge 0$. Рассмотрим оператор (3) с ядром $K_m(\cdot,\cdot)$ из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$. По условию теоремы 5: $1<p\le q<\infty$, следовательно, $1<q'\le p'<\infty$. Тогда на основании теоремы $6'$ компактность оператора (3) из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ эквивалентна каждому утверждению 2), 3) теоремы 5. Но компактность оператора (3) из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ равносильна компактности оператора (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ в силу взаимо сопряженности операторов (2) и (3). Поэтому утверждение теоремы 5 справедливо и в случае, когда ядро оператора (2) принадлежит классу Q_m, $m\le 0$. Теорема 5 доказана.

Теперь перейдем к доказательству теорем $5'$ и $6'$. Теорема $6'$ доказывается таким же методом, что теорема $5'$. Поэтому мы докажем только теорему $5'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5$'$. Пусть ядро оператора (2) $K_m(\cdot,\cdot)\in P_m$, $m\ge 0$. Из утверждения леммы 1 и из соотношений (32) и (33) имеем $A^+_{p,q}(z)\approx A^-_{p,q}(z)$, где константы эквивалентности не зависят от $z>0$, откуда вытекает эквивалентность утверждений 2) и 3).

Теперь покажем эквивалентность утверждений 1) и 2). Пусть оператор (2) компактен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$, тогда он ограничен. Следовательно, в силу теоремы A выполнено условие $A^+_{p,q}<$ $<\infty$, а из (29) вытекает, что оператор $\overline{K}_m$ ограничен из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu_u}(I)$, где μ — мера Лебега. Тогда из теоремы $1'$ следует, что для $z>0$ $\overline{K}_i(z,\cdot)\in L_{p'}(0,z)$, $u(\cdot)\overline{K}_{m,i}(\cdot,z)\in L_q(z,+\infty)$, $i=$ $=0,1,\dots,m$, где функции $u(\cdot)$, $\overline{K}_{m,i}(\cdot,\cdot)$, $\overline{K}_i(\cdot,\cdot)$, $i=0,1,\dots,m-1$ из (9), (10).

Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек из I такая, что $z_k\to 0$ при $k\to\infty$. Положим $g_k(\cdot)=\chi_{(0,z_k)}(\cdot)\overline{K}_i^{p'-1}(z_k,\cdot)$, $0\le i\le m$ и рассмотрим функцию $f_k(\cdot)=g_k(\cdot)/\|g_k\|_p$. Так как $\|f_k\|_p=1$, то

$$\left|\int_0^\infty \varphi(x)f_k(x)dx\right|\le\left(\int_0^{z_k}|\varphi|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\quad\forall\varphi\in L_{p'}(I).$$

Поэтому последовательность $\{f_k\}$ из $L_p(I)$ слабо сходится к нулю. Тогда в силу компактности (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ последовательность $\{K_mf_k\}\subset L_q(I)$ сильно сходится к нулю. На основании (29)

$$\lim_{k\to\infty}\|\overline{K}_mf_k\|_{q,\mu_u}=0. \tag{35}$$

Поскольку

$$\|\overline{K}_mf_k\|_{q,\mu_u}\ge\left(\int_{z_k}^\infty\left(\int_0^{z_k}\overline{K}_m(x,s)f_k(s)ds\right)^q u^q(x)d(x)\right)^{\frac1q}\ge((7))\ge$$

$$\ge\left(\int_{z_k}^\infty|u(x)\overline{K}_{m,i}(x,z_k)|^qdx\right)^{\frac1q}\left(\int_0^{z_k}\overline{K}_i^{p'}(z_k,s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}=A_{m,i}(z_k,\mu_u),\ 0\le i\le m,$$

то на основании леммы 1 и из (32), (35) имеем $\lim\limits_{k\to\infty}A^+_{p,q}(z_k)=0$. Отсюда в силу произвольности последовательности $\{z_k\}$ следует, что

$$\lim_{z\to 0}A^+_{p,q}(z)=0. \tag{36}$$

Из компактности оператора K_m из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ следует компактность из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ сопряженного оператора K^*_m. Пусть теперь $\{z_k\}$ — произвольная последовательность из I такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\infty$. Положим $\widetilde{g}_k(\cdot)=\chi_{(z_k,\infty)}(\cdot)u^{q-1}(\cdot)\overline{K}^{q-1}_{m,i}(\cdot,z_k)$ и рассмотрим функцию

$\widetilde{f}_k(\cdot)=\frac{\widetilde{g}_k(\cdot)}{\|\widetilde{g}_k\|_{q'}}$. Так как $\|\widetilde{f}_k\|_{q'}=1$, то

$$\left|\int\limits_0^\infty \psi(s)\widetilde{f}_k(s)ds\right|\le\left(\int\limits_{z_k}^\infty|\psi(s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}},\ \forall\psi\in L_q(I),$$

что показывает слабую сходимость к нулю последовательности $\{\widetilde{f}_k\}\in L_{q'}(I)$. Тогда в силу компактности K_m^*

$$\lim_{k\to\infty}\|K_m^*\widetilde{f}_k\|_{p'}=0. \tag{37}$$

В силу неравенств (10) и (7) имеем

$$\|K_m^*\widetilde{f}_k\|_{p'}\ge\left(\int\limits_0^{z_k}\left(\int\limits_{z_k}^\infty K_m(x,s)\widetilde{f}_k(x)dx\right)^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}\gg A_{m,i}(z_k,\mu_u),\ 0\le i\le m.$$

Отсюда и из (37), как в случае (36), получаем, что $\lim\limits_{z\to\infty}A^+_{p,q}(z)=0$. Таким образом, справедлива импликация 1) $\to$ 2). Теперь покажем обратную импликацию 2) $\to$ 1). Пусть ядро оператора (2) $K_m(\cdot,\cdot)\in P_m$, $m\ge0$ и выполнено утверждение 2) теоремы 5. Из условия $A^+_{p,q}<\infty$, на основании теоремы A оператор (2) непрерывно действует из $L_p(I)$ в $L_q(I)$. В силу теоремы Фреше-Колмогорова [2, c.378] для компактности оператора (2) достаточно выполнения следующих условий

$$\lim_{y\to\infty}\left(\int\limits_y^\infty\left(\int\limits_0^x K_m(x,s)f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=0, \tag{38}$$

$$\lim_{h\to0}\|K_mf(\cdot+h)-K_mf(\cdot)\|_q=0 \tag{39}$$

равномерно относительно $f\in S=\{f: f\in L_p(I),\|f\|_p=1\}$.

Пусть $y>0$. Рассмотрим меру $d\mu_\infty(x)=\chi_{(y,\infty)}(x)dx$. По теореме 1 справедлива оценка

$$\|K_mf\|_{q,\mu_\infty}=\left(\int\limits_y^\infty\left(\int\limits_0^x K_m(x,s)f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\ll A^+(\mu_\infty),\ \forall f\in S. \tag{40}$$

Так как $A^+(y,\mu_\infty)\ge A^+(z,\mu_\infty)$ при $y\ge z$ и $A^+_{p,q}(z)\to0$ при $z\to\infty$, то существует точка $z_y: y\le z_y<\infty$ такая, что $A^+(\mu_\infty)=A^+_{p,q}(z_y)$. Следовательно, из (40) при $y\to\infty$ имеем (38).

Теперь, вводя меру $d\mu_0=\chi_{(0,y)}(x)dx$, на основании теоремы 1 получаем оценку

$$\|K_mf\|_{q,\mu_0}=\left(\int\limits_0^y\left(\int_0^x K_m(x,s)f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\ll A^+(\mu_0),\ \forall f\in S. \tag{41}$$

Поскольку $A^+(\mu_0)=\sup\limits_{z>0}A^+(z,\mu_0)$ и

$$A^+(z,\mu_0)=\begin{cases}0 & \text{при } z\ge y\\ \left(\int\limits_z^y\left(\int_0^z K_m^{p'}(x,s)ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx\right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0<z\le y\end{cases},$$

то $A^+(z,\mu_0)\le A^+_{p,q}(z)$ и $A^+(\mu_0)\le \sup\limits_{0<z<y} A^+_{p,q}(z)$. Поскольку $\lim\limits_{z\to 0} A^+_{p,q}(z)=0$, то существует точка z_y, $0<z_y\le y$ такая, что $A^+(\mu_0)\le A^+_{p,q}(z_y)$. Следовательно, из (41) имеем

$$\lim_{y\to 0}\left(\int_0^y\left(\int_0^x K_m(x,s)f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=0 \tag{42}$$

равномерно относительно $f\in S$.

Пусть $\varepsilon>0$, $0<\delta_0<1$, $0<\alpha<\beta<\infty$ и $|h|<\delta_0$. Тогда

$$\|K_mf(\cdot+h)-K_mf(\cdot)\|_q\le\left(\int_\alpha^\beta |K_mf(x+h)-K_mf(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\int_0^\alpha |K_mf(x+h)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^\alpha |K_mf(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_\beta^\infty |K_mf(x+h)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\int_\beta^\infty |K_mf(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5. \tag{43}$$

На основании (38) и (42) выберем числа α, β так, чтобы при всех $|h|<\delta_0$ и при всех $f\in S$

$$I_i\le\frac{\varepsilon}{6},\ i=2,3,4,5. \tag{44}$$

Оценим I_1. Имеем

$$I_1\le\left(\int_\alpha^\beta\left|\int_x^{x+h} K_m(x+h,s)f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_\alpha^\beta\left|\int_\alpha^x |K_m(x+h,s)-K_m(x,s)|f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\int_\alpha^\beta\left|\int_0^\alpha K_m(x+h,s)f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_\alpha^\beta\left|\int_0^\alpha K_m(x,s)f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}. \tag{45}$$

Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$I_{13}\le\left(\int_\alpha^\beta\left(\int_0^\alpha K_m^{p'}(x+h,s)ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le A^+_{p,q}(\alpha+h),$$

$$I_{14}\le\left(\int_\alpha^\beta\left(\int_0^\alpha K_m^{p'}(x,s)ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le A^+_{p,q}(\alpha).$$

В силу равенства $\lim\limits_{z\to 0}A^+_{p,q}(z)=0$ считаем, что число α выбрано так, что на ряду с оценками (44) выполняются оценки

$$I_{13}\le\frac{\varepsilon}{9},\quad I_{14}\le\frac{\varepsilon}{9} \tag{46}$$

для всех $|h|\le\delta_0$ и для всех $f\in S$.

Прежде, чем перейти к оценке величин I_{11} и I_{12}, покажем, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{s}^{\infty}K_m^q(x,s)dx\right)^{\frac{p'}{q}}ds<\infty. \tag{47}$$

Из утверждения 2) теоремы 5 и из леммы 1, а также из (32), где μ — мера Лебега, вытекает, что

$$\int\limits_{t}^{\infty}u^q(x)\overline{K}_{m,i}^q(x,t)dx<\infty,\ \int\limits_{0}^{t}\overline{K}_i^{p'}(t,s)ds<\infty,\ i=0,1,\ldots,m \tag{48}$$

почти для всех $t>0$, где функции $u(\cdot)$, $\overline{K}_{m,i}(\cdot,\cdot)$, $\overline{K}_i(\cdot,\cdot)$, $i=0,1,\ldots,m$ из (9). Будем считать, что при $t=\alpha$ и $t=\beta$ имеет место (48).

Из неравенств (9), (10) получим

$$K_m(x,s)\ll\sum_{i=0}^{m}u(x)\overline{K}_{m,i}(x,s)\overline{K}_i(s,s).$$

Отсюда в силу невозрастания по второму аргументу функций $\overline{K}_{m,i}(\cdot,\cdot)$, $i=0,1,\ldots,m-1$

$$\int\limits_{s}^{\infty}K_m^q(x,s)dx\ll\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{s}^{\infty}u^q(x)\overline{K}_{m,i}^q(x,s)dx\overline{K}_i^q(s,s)\le\sum_{i=0}^{m}\overline{K}_i^q(s,s)\int\limits_{\alpha}^{\infty}u^q(x)\overline{K}_{m,i}^q(x,\alpha)dx. \tag{49}$$

Так как $\overline{K}_i(t,s)\ge\overline{K}_i(s,s)$, $i=0,1,\ldots,m$, при $t\ge s$, то из (48) имеем

$$\int\limits_{0}^{\beta}\overline{K}_i^{p'}(s,s)ds<\infty,\ i=0,1,\ldots,m. \tag{50}$$

Из (49) и (50) следует (47).

Не ограничивая общности, считаем, что $0<h<\delta$. На основании неравенств Минковского и Гельдера получим оценки

$$I_{11}=\left(\int\limits_{\alpha+h}^{\beta+h}\left|\int\limits_{x-h}^{x}K_m(x,s)f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\le\int\limits_{\alpha}^{\beta+h}|f(s)|\left(\int\limits_{s}^{s+h}K_m^q(x,s)dx\right)^{\frac{1}{q}}ds\le$$

$$\le\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta+h}\left(\int\limits_{s}^{s+h}K_m^q(x,s)dx\right)^{\frac{p'}{q}}ds\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{51}$$

$$I_{12}\le\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f(s)|\left(\int\limits_{s}^{\beta}|K_m(x+h,s)-K_m(x,s)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}ds\le$$

$$\le\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{s}^{\beta}|K_m(x+h,s)-K_m(x,s)|^q dx\right)^{\frac{p'}{q}}ds\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{52}$$

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_s^{s+h} K^q(x,s)dx = 0$ для почти всех $s > 0$ и

$$\int\limits_s^{s+h} K^q(x,s)dx \leq \int\limits_s^{\infty} K^q(x,s)dx,\ \alpha \leq s \leq \beta + h,$$

то на основании (47) и теоремы Лебега [3, с.302] о предельном переходе под знаком интеграла из (51) имеем $\lim\limits_{h\to 0} I_{11} = 0$.

Поэтому существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$: $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ такое что

$$I_{11} \leq \frac{\varepsilon}{9} \tag{53}$$

при всех $|h| \leq \delta_1$ и при всех $f \in S$.

В силу непрерывности функций $f \in L_q(I)$ по норме $\|\cdot\|_q$ для почти всех $s > 0$ имеем

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_s^{\beta} |K_m(x+h,s) - K_m(x,s)|^q dx = 0. \tag{54}$$

Так как

$$\int\limits_s^{\beta} |K_m(x+h,s) - K_m(x,s)|^q dx \ll 2\int\limits_s^{\infty} K_m(x,s)dx,\ \alpha \leq s \leq \beta,$$

то из (47), (54) на основании теоремы Лебега [3, с.302] получим $\lim\limits_{h\to 0} I_{12} = 0$. Следовательно, существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$: $0 < \delta_2 \leq \delta_0$ такое что

$$I_{12} \leq \frac{\varepsilon}{9} \tag{55}$$

при всех $|h| \leq \delta_2$ и при всех $f \in S$.

Из (43), (44), (45), (46), (53) и (55) имеем

$$\|K_m f(\cdot + h) - K_m f(\cdot)\|_q \leq \varepsilon \quad \text{при } |h| \leq \delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

равномерно относительно $f \in S$, т. е. выполнено (39). Таким образом, из утверждения 2) теоремы 5 вытекает утверждение 1) теоремы 5. Теорема $5'$ доказана.

Цитированная литература

1. **Ойнаров Р.** // Математический журнал. Алматы. 2001. Т 1, № 1. С. 52 – 61.

2. **Иосида К.** Функциональный анализ. М., 1967. 624 с.

3. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981. 544 с.

Поступила в редакцию 28.01.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 56 – 60*

УДК 517.939

ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА. ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ

М. И. Рахимбердиев, А. А. Калыбай

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, marat@math.kz

Предлагается один из вариантов пространственно однородной дискретной модели уравнения Больцмана в виде интегрируемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Рассматривается система

$$\dot{n}_i = \sum_{j,k,l=1}^{N} \sigma_{kl}^{ij}(n_k n_l - n_i n_j),\ i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где σ_{kl}^{ij} — постоянные величины, удовлетворяющие условиям

$$\sigma_{kl}^{ij} \geq 0,\ \sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{ij}^{kl},\ \sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{kl}^{ji},\ \sigma_{kl}^{ii} = 0$$

Для краткости обозначим систему (1) как $\dot{n} = f(n)$, где $n \in R^N$.

Переменные $n_1(t), \ldots, n_N(t)$ — плотности частиц в момент времени t, обладающие скоростями $v_1, \ldots, v_N$, соответственно. Частицы находятся в пространстве R^3 и их столкновение происходит по закону абсолютно упругого взаимодействия. Предполагается, что скорости частиц различны и множество всех скоростей замкнуто относительно столкновений, то есть любые пары сталкивающихся частиц со скоростями v_i, v_j вызывают появление частиц со скоростями v_k, v_l из того же множества скоростей. Система (1) является пространственно однородной дискретной моделью уравнения Больцмана, предложенной в [1].

В силу предположения об абсолютно упругом взаимодействии частиц, на рассматриваемую модель надо наложить некоторые ограничения. Для любого столкновения частиц, которому соответствует положительное значение коэффициента σ_{kl}^{ij}, скорости v_k, v_l связаны со скоростями v_i, v_j соотношением $v_i + v_j = v_k + v_l$. Отсюда следует, что все одноименные компоненты скоростей должны удовлетворять линейной системе алгебраических уравнений

$$x_i + x_j - x_k - x_l = 0, \tag{2}$$

где индексы i, j, k, l принимают все значения, для которых $\sigma_{kl}^{ij} > 0$.

Keywords: *differential equation, singular point, invariant set*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A34, 37C75

Пусть A— матрица этой системы, r— ее ранг. Система (2) имеет очевидное ненулевое решение с равными между собой компонентами. Следовательно, если число уравнений системы (2) больше N, то все миноры N–го порядка равны нулю и, если число уравнений совпадает с N, то определитель матрицы A равен нулю. Поэтому $r < N$. Далее, при $r = N - 1$ пространство решений системы (2) одномерно, значит, никаких нетривиальных решений системы, кроме как решений с равными координатами, не существует. Но тогда с учетом абсолютно упругого взаимодействия частиц, компоненты их скоростей должны удовлетворять системе (2), то есть все скорости равны. А это, в свою очередь, приводит к вырожденному случаю ($\sigma_{kl}^{ij} = 0$), то есть отсутствию столкновений. Значит $r < N - 1$.

Выделим в системе (2) r линейно независимых строк и отбросим все другие. Получим систему уравнений с некоторой матрицей A_1, равносильную исходной.

Из системы (2) следует также, что любой четверке индексов i, j, k, l соответствует только одно столкновение. Действительно, если кроме столкновения, которому соответствует уравнение $x_i + x_j - x_k - x_l = 0$, существует и другое столкновение, то ему соответствует также и другое уравнение, например, $x_i + x_k - x_j - x_l = 0$. Складывая их, получаем уравнение $2x_i - 2x_l = 0$. Отсюда $x_i = x_l$. Но тогда и $x_k = x_l$. Поэтому $v_i = v_l$ и $v_k = v_l$, а это противоречит предположению, что разным индексам отвечают разные скорости. Итак, любые две четверки индексов i_1, j_1, k_1, l_1 и i_2, j_2, k_2, l_2, соответствующие разным столкновениям, могут иметь не более трех общих индексов.

Система (2) определяет также и линейные первые интегралы системы (1). Действительно, пусть $x = (x_1, \ldots, x_N)$ — произвольный вектор из R^N. Тогда для любого $n \in R^N$ имеет место следующее равенство

$$(f(n), x) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \sigma_{kl}^{ij} (x_k + x_l - x_i - x_j)(n_k n_l - n_i n_j), \tag{3}$$

которое получается из равенства $(f(n), x) = \frac{1}{4} \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{N} \sigma_{kl}^{ij} x_i (n_k n_l - n_i n_j)$ последовательной заменой индекса суммирования i на j, k, l и сложением полученных таким образом четырех соотношений для $(f(n), x)$. Из (3) следует, что если x — решение системы (2), то $(f(n), x) = 0$ для всех $n \in R^N$. Поэтому для любого $x \in L$, где L — пространство решений системы (2), равенство $(n, x) = C$ определяет первый интеграл системы (1). Заметим, что пространство L имеет ненулевую размерность.

Система (2) определяет также и множество особых точек системы (1) с положительными координатами. Существует очевидным образом определяемая особая точка системы — начало координат. Допустим, что система (1) имеет в конусе $K = n_1 \geq 0, \ldots, n_N \geq 0$ особую точку n^0, не все координаты которой равны нулю. Тогда, если все они положительны, из равенства (3), обозначая $x_i = \ln n_i^0$, $i = 1, \ldots, N$, получаем

$$(f(n^0), x) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \sigma_{kl}^{ij} \ln \frac{n_k^0 n_l^0}{n_i^0 n_j^0} (n_k^0 n_l^0 - n_i^0 n_j^0) = 0. \tag{4}$$

Из (4) следует, что каждое слагаемое обращается в нуль, в силу неотрицательности. Следовательно, координаты особой точки n^0 удовлетворяют системе уравнений

$$n_k^0 n_l^0 - n_i^0 n_j^0 = 0, \tag{5}$$

где индексы i, j, k, l принимают все значения, для которых $\sigma_{kl}^{ij} > 0$. Тогда их логарифм, то есть $x_i = \ln n_0^i$, $i = 1, \ldots, N$, очевидно, удовлетворяет системе (2).

Если среди координат особой точки n^0 есть нулевые, то в этом случае особая точка определяется как решение уравнения (5). Действительно, без нарушения общности можно предположить, что $n_1^0 = \cdots = n_m^0 = 0$, а $n_{m+1}^0 > 0, \ldots, n_N^0 > 0$, где $1 < m < N$. Тогда в первых

m уравнениях системы (1) все слагаемые в правой части не будут содержать членов с отрицательным знаком, поэтому $\sum\limits_{j,k,l=1}^{N} \sigma_{kl}^{ij} n_k^0 n_l^0 = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Последнее влечет обращение в нуль всех слагаемых этой суммы, а это означает, что все разности $(n_k^0 n_l^0 - n_i^0 n_j^0)$, входящие в первые m уравнений системы (1), обращаются в нуль. Теперь рассмотрим все другие разности, содержащиеся в системе (1). Заметим, что они не содержат координат n_s^0 точки n^0 с номерами $s \leq m$. Поэтому, если рассмотреть систему, состоящую из последних $m - s$ уравнений и положить $n_k^0 n_l^0 - n_i^0 n_j^0 = 0$, где индексы i, j, k, l принимают значения $1, \ldots, m$, то получим подсистему системы (1), у которой особой точкой является точка с положительными координатами $n_{m+1}^0, \ldots, n_N^0$. Применив к этой подсистеме рассуждения, аналогичные системе (1), основанные на равенстве (4), приходим к выводу , что все координаты точки n^0 удовлетворяют системе (3), а их логарифм — системе (2), соответствующей подсистеме системы (1). Очевидно, что справедливо и обратное утверждение, то есть любая точка n, координаты которой удовлетворяют системе (5), является особой точкой системы (1), а экспоненты координат решений системы (2) определяют особые точки с ненулевыми координатами.

Так как подпространство L пространства R^N всегда имеет ненулевую размерность и вектор $f(n)$ ортогонален L при любом n, то разложение $R^N = L \oplus M$, где M — ортогональное дополнение к L, таково, что сдвиг подпространства M на вектор x, то есть плоскость $x + M$ является инвариантным множеством системы (1). Заметим, что конус K является инвариантным множеством при возрастании времени (см.[2]). Поэтому и $(x + M) \cap K$ — инвариантное множество системы (1) для любого $x \in L$ при $t \geq 0$. Если плоскость $x + M$ содержит точки с положительными координатами, то среди них есть особая точка системы (1) (решение системы (5)), причем такая точка единственна (см.[2]). С другой стороны, для всякой особой точки с положительными координатами найдется $x \in L$, что эта особая точка принадлежит плоскости $(x + M)$.

Пусть n^* — произвольная неособая точка из конуса K. Тогда $n^* \in x + M$ для некоторого $x \in L$, и траектория системы (1) $n(t)$ с условием $n(0) = n^*$ принадлежит множеству $x + M \cap K$ при всех $t \geq 0$. Это множество содержит единственную особую точку n^0 системы (1) с положительными координатами и которая является ее единственной ω–предельной точкой (см.[2]).

Введем переменную $z(t) = n(t) - n^0$. Тогда $z(t) \in M$ является решением системы

$$\dot{z} = f_n'(n^0) z + f(z). \qquad (6)$$

Действительно, для любого слагаемого в правой части i–го уравнения системы (1) $h(n) = \sigma_{kl}^{ij}(n_k n_l - n_i n_j)$ выполняется соотношение

$$h(n) = \sigma_{kl}^{ij}((n_k - n_k^0 + n_k^0)(n_l - n_l^0 + n_l^0) - (n_i - n_i^0 + n_i^0)(n_j - n_j^0 + n_j^0)) =$$

$$= \sigma_{kl}^{ij}(z_k n_l^0 + z_l n_k^0 - z_i n_j^0 - z_j n_i^0) + \sigma_{kl}^{ij}(z_k z_l - z_i z_j) =$$

$$= (z_k \frac{\partial h(n)}{\partial n_k}|_{n=n^0} + z_l \frac{\partial h(n)}{\partial n_l}|_{n=n^0} + z_i \frac{\partial h(n)}{\partial n_i}|_{n=n^0} + z_j \frac{\partial h(n)}{\partial n_j}|_{n=n^0}) + h(z) = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial h(n^0)}{\partial n_s} z_s + h(z).$$

Суммируя полученные соотношения, для всех слагаемых получаем равенство $f(n) = f_n'(n^0)z + f(z)$. С учетом равенства $z'(t) = n'(t)$ приходим к выводу, что $z(t)$ есть решение системы (6). Заметим также, что в силу леммы из [3] подпространство M является собственным подпространством матрицы $f_n'(n^0)$.

2. Здесь мы введем некоторый частный случай системы (1). Рассмотрим систему взаимодействующих частиц в предположении, что любые две разные четверки индексов координат их скоростей, соответствующие двум столкновениям (положительным коэффициентам системы (1)) имеют два общих индекса, либо не имеют ни одного общего индекса.

Предположим, что множество частиц, динамику плотностей которых описывает система (1), можно представить в виде двух подмножеств. Пусть первое подмножество содержит частицы со скоростями $v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$, второе — со скоростями $v_{j_1}, \dots, v_{j_p}$. Частицы из любого подмножества, сталкиваясь, переходят в другое подмножество. Считаем также, что любое столкновение приводит к появлению только одной пары скоростей.

Система (1) при таком варианте взаимодействия частиц может быть задана в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{n}_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{s} \sigma_{2k-1\,2k+1}^{2k\quad 2k+2} \quad (n_{2k}n_{2k+2} - n_{2k-1}n_{2k+1}), \\ \dot{n}_{2k} &= \sum_{k=1}^{s} \sigma_{2k-1\,2k+1}^{2k\quad 2k+2} \quad (n_{2k-1}n_{2k+1} - n_{2k}n_{2k+2}). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $N = 2s + 2$. Обозначим эту систему $\dot{n} = F(n)$.

Матрица системы (1), соответствующая данной системе, имеет (по построению) ранг s, поэтому $s = r$, то есть матрица A совпадает с матрицей A_1.

Лемма. *Если для некоторого $x \in L$ множество $(x+M)\cap \mathrm{int}K$ непусто, то для любого $n \in (x+M)\cap \mathrm{int}K$ имеет место равенство $F(n-n^0) = 0$, где n^0 — особая точка системы (7), принадлежащая множеству $(x+M)\cap \mathrm{int}K$.*

Доказательство. Пусть для некоторого $x \in L$ множество $(x+M)\cap \mathrm{int}K$ непусто. Тогда в этом множестве существует единственная особая точка n^0 системы (7) с положительными координатами. Если n — произвольная точка из этого множества, то $z = n - n^0 \in M$. Система векторов $e_1, \dots, e_s$ является базисом пространства M, поскольку: 1) при построении данной системы каждый последующий вектор содержит две отличные от нуля координаты, которые равны нулю у всех предыдущих векторов, следовательно, они линейно независимы; 2) в силу системы (2) справедливо равенство $(e_i, x) = 0$ для любых $i \in 1, \dots, s$, $x \in L$, что означает их принадлежность к ортогональному дополнению подпространства L, то есть к M.

Поэтому вектор z из M представим в виде $z = \varphi_1 e_1 + \dots + \varphi_s e_s$. Так как векторы $e_1, \dots, e_s$, однозначно определяемые коэффициентами системы (7), имеют вид $e_p = (0, \dots, 0, 1 - 1, 1, -1, 0, \dots, 0)$, где ненулевые координаты начинаются с номера $2p - 1$, то справедливы соотношения

$$\begin{gathered} z_1 = \varphi_1,\ z_3 = \varphi_1 + \varphi_2,\ z_{2p+1} = \varphi_p + \varphi_{p+1},\ p = 1, \dots, s-1,\ z_{2s+1} = \varphi_s, \\ z_2 = -\varphi_1,\ z_4 = -\varphi_1 - \varphi_2,\ z_{2p} = -\varphi_{p-1} - \varphi_p,\ p = 2, \dots, 2s-2,\ z_{2s} = -\varphi_s. \end{gathered} \tag{8}$$

Если подставить значения z_i из соотношений (8) во все слагаемые, которые содержатся в F, то получаем $z_1 z_3 - z_2 z_4 = \varphi_1(\varphi_1 + \varphi_2) - (-\varphi_1)(-\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, $z_{2k-1}z_{2k+1} - z_{2k}z_{2k+2} = (\varphi_{k-1} + \varphi_k)(\varphi_k - \varphi_{k+1}) - (-\varphi_{k-1} - \varphi_k)(-\varphi_k - \varphi_{k+1}) = 0$, $k = 2, \dots, 2s-2$; $z_{2s-1}z_{2s+1} - z_{2s}z_{2s+2} = (\varphi_{s-1} + \varphi_s)\varphi_s - (-\varphi_{s-1} - \varphi_s)(-\varphi_s) = 0$. Поэтому и $F(z) = 0$ для любого $z \in M$. Лемма доказана.

Теорема. *Любое неособое решение системы (7) $n(t)$ с условием $n(0) \in K$ имеет вид*

$$n(t) = n^0 + \exp(F'_n(n^0)t)(n(0) - n^0),$$

где n^0 — особая точка системы с положительными координатами, принадлежащая тому же множеству $x + M \cap K$, что и $n(0)$.

Доказательство. Пусть n^* — произвольная точка конуса K и неособая для системы (7). Тогда $n^* \in x + M$ для некоторого $x \in L$. Так как плоскость $x + M$ является инвариантным множеством, то траектория системы (7) $n(t)$ с начальным условием $n(0) = n^*$ принадлежит этой плоскости при всех $t \geq 0$. Данная плоскость содержит единственную особую точку n^0 системы (1) с положительными координатами. Введем переменную $z = n - n^0$. Тогда для любого $n \in x + M$ имеет место включение $z \in x + M$. Как показано выше, $z(t) = n(t) - n^0$ есть решение системы $\dot{z}(t) = F'_n(n^0)z + F(z)$. Из леммы следует, что $F(z) = 0$, поэтому $z(t)$ есть решение линейной системы с постоянными коэффициентами $\dot{z} = F'_n(n^0)z$, то есть при $z(0) \in \in M$ ее решение выражается в виде $z(t) = \exp(F'_n(n^0)t)z(0)$. Отсюда и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. *Из леммы в* [3] *следует, что матрица* $F'_n(n^0)$ *имеет простые корни характеристического уравнения и* M *есть собственное подпространство, отвечающее отрицательным собственным значениям. Поэтому всякое неособое решение* $n(t)$ *системы* (7) *с условием* $n(0) \in K$ *имеет в силу теоремы вид* $n(t) = n^0 + \sum_{k=1}^{s} C_k \exp(\lambda_k(n_0)t)$. *При этом предполагается, что* $n(0) - n^0 = \sum_{k=1}^{s} C_k e_k$ *есть разложение вектора* $n(0) - n^0$ *по собственным векторам* $e_1, \dots, e_s$ *матрицы* $F'_n(n^0)$ *в пространстве* M, *а* $\lambda_1(n^0), \dots, \lambda_s(n^0)$ — *соответствующие им отрицательные собственные значения.*

Цитированная литература

1. **Годунов С. К., Султангазин У. М.** // Успехи матем. наук. 1971. Т. 36, № 3(159). С. 1 – 51.

2. **Калыбаева А. А., Рахимбердиев М. И.** // Известия МН-АН РК, сер. физ.-мат. 1997. № 5. С. 24 – 33.

3. **Калыбай А. А.** // Известия МН-АН РК, сер. физ.-мат. 1999. № 1. С. 40 – 45.

Поступила в редакцию 15.03.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 61 — 69*

УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С УСЛОВИЕМ ГИББСА-ТОМСОНА НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

А. С. Сарсекеева

АГУ им. Абая
480012, Алматы, Толе би ул., 86

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n\geq 2$ с границей S. Пусть $\gamma(t)$ — замкнутая поверхность в области Ω, которая делит ее на две подобласти $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ так, что $\partial\Omega_1(t)=S\bigcup\gamma(t)$, $\quad \partial\Omega_2(t)=\gamma(t)$; $\quad \gamma(0):=\Gamma$, $\quad \Omega_m(0):=\Omega_m$.

Обозначим $\Omega_T^{(m)}=\{(x,t)|\ x\in\Omega_m(t), 0<t<T\}$, $m=1,2$, $S_T=S\times(0,T)$, $\Gamma_T=\Gamma\times\times(0,T)$, $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\pi=\{x|\quad |x-y|<d_1\quad x\in\Omega,\ y\in\Gamma\}$, $d_1=\mathrm{const}>0$, $\pi_{\mathrm{T}}=\pi\times\times(0,\mathrm{T})$, $\Pi^{(\mathrm{m})}=\Omega_{\mathrm{m}}\bigcup\pi$, $\Pi_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{m})}=\Pi^{(\mathrm{m})}\times(0,\mathrm{T})$.

Пусть $\mathcal{L}_m$ — параболический оператор второго порядка

$$\mathcal{L}_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{A}_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\mathcal{A}_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i^{(m)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+a^{(m)}(x,t),$$

коэффициенты которого подчиняются условиям

$$a_{ij}^{(m)}=a_{ji}^{(m)},\qquad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j\geq a_0\xi^2\quad \forall\xi\in R^n,\quad (x,t)\in\bar{\Omega}_T^{(m)};\quad m=1,2;\quad a_0=\mathrm{const}>0.$$

Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и свободную границу $\gamma(t)$ по условиям:

$$\mathcal{L}_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u_m=0\quad \text{в}\quad Q_T^{(m)},\ m=1,2, \tag{1}$$

$$u_m|_{t=0}=u_{0m}(x)\quad \text{в}\quad \Omega_m,\ m=1,2, \tag{2}$$

$$\gamma(t)|_{t=0}=\Gamma, \tag{3}$$

$$u_1|_{S_T}=p(x,t), \tag{4}$$

$$u_1=u_2=\alpha k-\beta V_\nu\quad x\in\gamma(t),\quad 0<t<T, \tag{5}$$

Keywords: *second order parabolic equation, free boundary, mean curvature, weighted Hölder space*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R35

$$\varkappa V_\nu = -\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T, \tag{6}$$

где $\alpha, \beta, \varkappa$ — положительные постоянные, k — средняя кривизна поверхности $\gamma(t)$, $\overrightarrow{\nu}$ — нормаль к $\gamma(t)$, направленная внутрь $\Omega_2(t)$, V_ν — скорость перемещения $\gamma(t)$ в направлении $\overrightarrow{\nu}$.

Данная задача учитывает эффект переохлаждения жидкой фазы, при этом плавление вещества происходит при температуре ниже, чем температура плавления.

Базалий Б. В., Дегтярев С. П. исследовали трехмерную задачу Стефана с условием Гиббса-Томсона для уравнения теплопроводности [1]. Ими было установлено, что, если $u_{0m} \in C^{4+l}$, S, $\Gamma \in C^{5+l}$, то $u_m \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}, \rho \in C^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}$.

Радкевич Е. В. рассмотрел такую задачу для дивергентного параболического уравнения с конормальной производной в условии (6) для размерности пространства $n = 2, 3$ [2]. Им было показано, что $u_m \in C^{2+l, 1+\frac{l}{2}}, \rho \in C^{4+l, 2+\frac{l}{2}}$ при условиях: $u_{0m} \in C^{3+l}$, $S, \Gamma \in C^{l_0}$, $l_0 > l + 4$.

Таким образом, в указанных работах рассмотрены задачи в областях размерности 2 и 3 при завышенной гладкости заданных поверхностей S и Γ и начальных данных u_{0m} и получены разные результаты.

В настоящей работе получены точные результаты, т.е. ликвидирован «зазор» между гладкостью заданных и неизвестных функций в областях размерности $n \geq 2$. Кроме того, задача исследована в более широком классе функций — в весовых пространствах Гельдера, и для решения установлены коэрцитивные оценки. Из полученных результатов, в частности, вытекает разрешимость задачи и оценки решения в обычных пространствах Гельдера.

Пусть l — нецелое положительное число, $s \leq l$. Определим $C^l_s(Q_T)$ [3]–[4] как банахово пространство функций $u(x,t)$, имеющих норму

$$|u|^{(l)}_{s,Q_T} = \sup_{t \leq T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{Q'_t} + \sum_{s < 2j_0 + |j| < l} \sup_{t \leq T} t^{\frac{2j_0 + |j| - s}{2}} |D^{j_0}_t D^j_x u|_\Omega + \left\{ \begin{array}{ll} |u|^{(s)}_{Q_T}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{array} \right. , \tag{7}$$

где $Q'_t = \Omega \times \left(\dfrac{t}{2}, t\right)$,

$$\begin{aligned} [u]^{(l)}_{Q'_t} &= \sum_{2j_0 + |j| = [l]} [D^{j_0}_t D^j_x u]^{(l - [l])}_{x, Q'_t} + \sum_{0 < l - 2j_0 - |j| < 2} [D^{j_0}_t D^j_x u]^{\left(\frac{l - 2j_0 - |j|}{2}\right)}_{t, Q'_t}, \\ [v]^{(\alpha)}_{x,Q_T} &= \sup_{(x,t),(z,t) \in \bar{Q}_T} |v(x,t) - v(z,t)||x - z|^{-\alpha}, \\ [v]^{(\alpha)}_{t,Q_T} &= \sup_{(x,t),(x,\tau) \in \bar{Q}_T} |v(x,t) - v(x,\tau)||t - \tau|^{-\alpha}, \ \alpha \in (0,1), \\ |v|_{Q'_t} &= \sup_{(x,t) \in Q'_t} |v(x,t)|, \end{aligned}$$

$|u|^{(s)}_{Q_T}$—норма пространства Гельдера $C^{s, \frac{s}{2}}_{x\ \ t}(\bar{Q}_T)$.

При $s = l$ пространство $C^l_s(Q_T)$ есть пространство Гельдера $C^{l, l/2}_{x\ \ t}(\bar{Q}_T)$.

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)$ при $s \geqslant 0$ есть подпространство функций $C^l_s(Q_T)$ таких, что $D^k_t u|_{t=0} = 0$, $2k \leqslant s$; при $s < 0$ положим $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T) \equiv C^l_s(Q_T)$.

В пространстве $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)$ норма (7) эквивалентна норме [4]

$$||u||^{(l)}_{s,Q_T} = \sup_{t \leq T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{Q'_t} + \sup_{t \leq T} t^{-\frac{s}{2}} |u|_\Omega. \tag{8}$$

Следуя работам [5]–[7], сведем задачу (1)–(6) в неизвестных областях к задаче в заданных цилиндрических областях. Для этого воспользуемся параметризацией свободной границы в виде [7]

$$x = \xi + \rho(\xi, t) N(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \tag{9}$$

где $N(\xi)$ — единичное векторное поле, принадлежащее $C^\infty(\Gamma)$. При этом $N\cdot\nu_0 \geq d_2 = \mathrm{const} > 0$ $\forall \xi \in \Gamma$, ν_0 — единичная нормаль к Γ, направленная в Ω_2.

Использование $N(\xi)$ в представлении свободной границы (9) позволяет избежать потерю гладкости начальной свободной границы Γ, которая имеет место при параметризации Ханзавы Е. с $\nu_0(\xi)$ вместо $N(\xi)$ в (9) [5].

Определим условия согласования для задачи (1)–(6). Обозначим $D_t^j u_m(x,t)|_{t=0} = u_m^{(j)}(x)$, $m=1,2$, $D_t^j \rho(x,t)|_{t=0} = \rho^{(j)}(x)$.

Пусть $u_m(x,t)$, $\rho(x,t)$ — решение задачи (1)–(6). Функции $u_m^{(j)}(x)$ определим из соотношений

$$u_m^{(0)}(x) = u_{0m}(x),$$

$$u_m^{(j+1)}(x) = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \mathcal{A}_m^{(i)}\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_m^{(j-i)}(x), \quad m = 1,2, \tag{10}$$

где $\mathcal{A}_m^{(i)}(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = D_t^i \mathcal{A}_m(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$, $C_j^i = \frac{j!}{i!j-i!}$ — биномиальные коэффициенты.

Условия согласования порядка $\left[\frac{s}{2}\right]$ на границе S и $\gamma(t)$ устанавливаются из равенств

$$u_1^{(j)}(x)|_S = p^{(j)}(x), \quad j = 0,1,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right],$$

$$D_t^j\big(u_1 - u_2|_{x=\xi+\rho(\xi,t)\nu_0}\big)\big|_{t=0} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right],$$

$$D_t^k\big(u_1|_{x=\xi+\rho(\xi,t)\nu_0}\big)\big|_{t=0} = D_t^k\big(-\alpha\nabla\nu(x,t)\big|_{x=\xi+\rho(\xi,t)\nu_0} - \beta\partial_t\rho\big)\big|_{t=0},$$

$$D_t^k\left(\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial\nu} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial\nu}\bigg|_{x=\xi+\rho(\xi,t)\nu_0} + \varkappa\partial_t\rho\right)\bigg|_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,\ldots,\left[\frac{s-1}{2}\right]$$

после нахождения функций $\rho^{(j)}(x)$, $j = 1,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right]$ и подстановки вместо $u_m^{(j)}(x)$, $m = 1,2$ выражений (10).

Приведем условия согласования нулевого и первого порядка на границе S

$$u_{01}(x)|_S = p^{(0)}(x),$$

$$\mathcal{A}_1^{(0)}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_{01}(x)|_S = p^{(1)}(x);$$

на границе $\gamma(t)$

$$u_{01}(x) - u_{02}(x)\big|_\Gamma = 0,$$

$$u_{01}(x)\big|_\Gamma = -\alpha\nabla\nu_0 + \frac{\beta}{\varkappa}\left(\lambda_1^{(0)}(x)\frac{\partial u_{01}}{\partial\nu} - \lambda_2^{(0)}(x)\frac{\partial u_{02}}{\partial\nu}\right)\bigg|_\Gamma,$$

$$\mathcal{A}_1^{(0)}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_{01}(x) - \mathcal{A}_2^{(0)}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_{02}(x)\bigg|_\Gamma = \frac{1}{\varkappa}\left(\lambda_1^{(0)}(x)\frac{\partial u_{01}}{\partial\nu} - \lambda_2^{(0)}(x)\frac{\partial u_{02}}{\partial\nu}\right)\left(\frac{\partial u_{01}}{\partial\nu} - \frac{\partial u_{02}}{\partial\nu}\right)\bigg|_\Gamma.$$

Заметим, что из условия (5) можно определить $D_t^{\left[\frac{s}{2}\right]+1}\rho\big|_{t=0}$. В частности, при $\left[\frac{s}{2}\right] = 1$

$$\rho^{(2)}(x) = -\frac{1}{\beta}\left(\mathcal{A}_1^{(0)}\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_{01}(x) - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u_{01}}{\partial\nu}\left(\lambda_1^{(0)}(x)\frac{\partial u_{01}}{\partial\nu} - \lambda_2^{(0)}(x)\frac{\partial u_{02}}{\partial\nu}\right)\right).$$

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть l — нецелое положительное число, $1 < s < 2+l$, $S \in C^{2+l}, \Gamma \in C^{4+l}$, коэффициенты дифференциальных операторов $\mathcal{L}_m$ принадлежат пространству $C^{l}_{s-2}(\Pi^{(m)}_T)$, $\lambda_m(x,t) \in C^{1+l}_{s-1}(\pi_T), m = 1,2$.*

Тогда для любых функций $u_{0m} \in C^s(\Omega_m)$, $m = 1,2$, $p \in C^{2+l}_s(S_T)$, удовлетворяющих условиям согласования на S и Γ порядка $\left[\frac{s}{2}\right]$, найдется T_0, $0 < T_0 \le T$ такое, что задача (1)–(6) имеет единственное решение $u_m \in C^{2+l}_s(Q^{(m)}_{T_0})$, $m = 1,2$, $\rho \in C^{4+l}_{s+2}(\Gamma_{T_0})$, подчиняющееся оценке

$$\sum_{m=1}^{2} |u_m|^{(2+l)}_{s,Q^{(m)}_t} + |\rho|^{(4+l)}_{s+2,\Gamma_t} \le C_1 \Bigg(\sum_{m=1}^{2} |u_{0m}|^{(s)}_{\Omega_m} + |p|^{(2+l)}_{s,S_t} \Bigg), \quad t \le T_0. \tag{11}$$

Из теоремы 1 при $s = 2 + l$ следует

Теорема 2. *Пусть l — нецелое положительное число, $S \in C^{2+l}$, $\Gamma \in C^{4+l}$, коэффициенты дифференциальных операторов $\mathcal{L}_m$ принадлежат пространству $C^{l,\frac{l}{2}}_{x\ \ t}(\bar{\Pi}^{(m)}_T)$, $\lambda_m(x,t) \in$ $\in C^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x\ \ \ \ t}(\bar{\pi}_T), m = 1,2$.*

Тогда для любых функций $u_{0m} \in C^{2+l}(\bar{\Omega}_m)$, $m = 1,2$, $p \in C^{2+l,1+\frac{l}{2}}_{x\ \ \ \ t}(S_T)$, удовлетворяющих условиям согласования на S и Γ порядка $1 + \left[\frac{l}{2}\right]$, найдется T_0, $0 < T_0 \le T$ такое, что задача (1)–(6) имеет единственное решение $u_m \in C^{2+l,1+\frac{l}{2}}_{x\ \ \ \ t}(\bar{Q}^{(m)}_{T_0})$, $m = 1,2$, $\rho \in C^{4+l,2+\frac{l}{2}}_{x\ \ \ \ t}(\Gamma_{T_0})$, подчиняющееся оценке

$$\sum_{m=1}^{2} |u_m|^{(2+l)}_{Q^{(m)}_t} + |\rho|^{(4+l)}_{\Gamma_t} \le C_2 \big(\sum_{m=1}^{2} |u_{0m}|^{(2+l)}_{\Omega_m} + |p|^{(2+l)}_{S_t} \big), \quad t \le T_0. \tag{12}$$

3. Сведение задачи (1)–(6) к задаче в фиксированных областях.

Для этого перейдем к переменным $y \in \Omega$ по формуле [7]

$$x = e_\rho(y,t) \equiv y + N(y)\rho^*(y,t), \quad y \in \Omega, \tag{13}$$

где $\rho^* = \mathcal{P}\rho$ — продолжение функции $\rho \in C^{4+l}_{s+2}(\Gamma_T)$ в Ω такое, что

$$\rho^* \in C^{4+l}_{s+2}(\Omega_T), \quad \rho^*|_\Gamma = \rho, \quad \rho^*|_S = 0, \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial \nu_0}\bigg|_\Gamma = 0, \quad |\rho^*|^{(4+l)}_{s+2,\Omega_T} \le C_3 |\rho|^{(4+l)}_{s+2,\Gamma_T}.$$

Это преобразование координат при малых t отображает поверхность Γ в свободную границу $\gamma(t)$, а области Ω_m — в неизвестные области $\Omega_m(t)$, $\quad m = 1,2$.

Обозначим $v_m(y,t) = u_m(e_\rho(y,t),t)$, $\quad m = 1,2$, $\quad x^T = colon(x_1,\dots,x_n)$ — вектор–столбец. Тогда

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\nabla^T u_m + \frac{\partial u_m}{\partial t} = NJ^{-T}\nabla^T v_m \rho^*_t + \frac{\partial u_m}{\partial t}, \tag{14}$$

где J — матрица Якоби преобразования (13), $J_{kl} = \delta^l_k + N_k \frac{\partial \rho^*}{\partial y_l} + \frac{\partial N_k}{\partial y_l}\rho^*$ — элементы J, J^T — транспонированная матрица, $J^{-T} = (J^T)^{-1}$.

Очевидно, что $J|_{t=0} = E$, $\quad E$ — единичная матрица. Тогда при малых $t \le t_1$ существует обратная матрица J^{-1}, J^{kl} — элементы J^{-1}. Имеем

$\nabla^T_x\Big|_{x=e_\rho(y,t)} = J^{-T}\nabla^T_y$, $\quad \nu^T = \frac{J^{-T}\nu^T_0}{|J^{-T}\nu^T_0|}$, $\quad \nu(x,t)$ — нормаль к $\gamma(t)$, $\quad \nu_0(y)$ — к Γ,

$$V_\nu = \frac{\partial x}{\partial t}\nu^T\bigg|_{\Gamma_T} = \frac{(NJ^{-T}\nu^T_0)\rho_t}{|J^{-T}\nu^T_0|}, \quad k = -\operatorname{div}\nu^T = -\nabla_x \nu^T = -J^{-T}\nabla_y\big(|J^{-T}\nu^T_0|^{-1}J^{-T}\nu^T_0\big). \tag{15}$$

В результате замены переменных (13) и учета формул (14)–(15), задача (1)–(6) примет вид

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\rho}^{(m)} v_m := \frac{\partial v_m}{\partial t} - NJ^{-T}\nabla^T v_m \rho_t^* - \sum_{l,p=1}^{n} a_{lp}^{(m)}(y,t)\Big[J^{lk}J^{pk}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y_l \partial y_p} + J^{lk}\frac{\partial J^{pk}}{\partial y_l}\frac{\partial v_m}{\partial y_p}\Big] - \\
- \sum_{k=1}^{n} a_k^{(m)}(y,t)J^{lk}\frac{\partial v_m}{\partial y_l} - a^{(m)}(y,t)v_m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2, \\
v_m|_{t=0} = u_{0m}(y), \quad m=1,2, \quad \rho|_{t=0}=0, \quad v_1|_{S_T} = p(y,t), \quad v_1 - v_2|_{\Gamma_T} = 0, \qquad (16) \\
v_1 + \frac{1}{|J^{-T}\nu_0^T|}\Bigg(\alpha\sum_{s,k,l=1}^{n} J^{sk}\frac{\partial J^{ls}\nu_{0l}}{\partial y_k} - \frac{\alpha}{|J^{-T}\nu_0^T|^2}\sum_{l,s,i,k,m,p=1}^{n} J^{ls}\nu_{0l}J^{ik}\frac{\partial J^{ms}\nu_{0m}}{\partial y_k}J^{pi}\nu_{0p} + \\
+\beta(NJ^{-T}\nu_0^T)\rho_t\Bigg)\Bigg|_{\Gamma_T} = 0, \\
\varkappa(NJ^{-T}\nu_0^T)\rho_t + \lambda_1(y,t)\nu_0 J^{-1}J^{-T}\nabla^T v_1 - \lambda_2(y,t)\nu_0 J^{-1}J^{-T}\nabla^T v_2\Big|_{\Gamma_T} = 0,
\end{gathered}
$$

где $\Omega_T^{(m)} = \Omega_m \times (0,T)$, $\quad \nu_{0l}(l=1,\dots,n)$ — компоненты вектора ν_0.

Построим вспомогательные функции $\rho_0(y,t) \in C_{s+2}^{4+l}(\Gamma_T)$, $\quad V_m(y,t) \in C_s^{2+l}(\Omega_T^{(m)})$, $m=1,2$, по условиям

$$
\rho_0|_{t=0} = 0, \quad D_t\rho_0|_{t=0} = -\frac{1}{\beta}(N\nu_0^T)^{-1}\big(\alpha\nabla_y\nu_0^T + u_{01}\big) = -\frac{1}{\varkappa}(N\nu_0^T)^{-1}\bigg(\lambda_1^{(0)}(x)\frac{\partial u_{01}}{\partial \nu} - \lambda_2^{(0)}(x)\frac{\partial u_{02}}{\partial \nu}\bigg),
$$

$$
D_t^2\rho_0|_{t=0} = -\frac{1}{\beta}(N\nu_0^T)^{-1}\bigg(A_1^{(0)}(x,0,\frac{\partial}{\partial x})u_{01}(x) - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u_{01}}{\partial \nu}\bigg(\lambda_1^{(0)}(x)\frac{\partial u_{01}}{\partial \nu} - \lambda_2^{(0)}(x)\frac{\partial u_{02}}{\partial \nu}\bigg)\bigg);
$$

$V_m(y,t)$, $\quad m=1,2$ — решения задач

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\rho_0}^{(m)} V_m := \frac{\partial V_m}{\partial t} - NJ_0^{-T}\nabla^T V_m \rho_{0t}^* - \sum_{l,p=1}^{n} a_{lp}^{(m)}(y,t)\Big[J_0^{lk}J_0^{pk}\frac{\partial^2 V_m}{\partial y_l \partial y_p} + J_0^{lk}\frac{\partial J_0^{pk}}{\partial y_l}\frac{\partial V_m}{\partial y_p}\Big] - \\
- \sum_{k=1}^{n} a_k^{(m)}(y,t)J_0^{lk}\frac{\partial V_m}{\partial y_l} - a^{(m)}(y,t)V_m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2, \\
V_m|_{t=0} = u_{0m}(y), \quad m=1,2, \quad V_1|_{S_T} = p(y,t), \quad V_1 - V_2|_{\Gamma_T} = 0, \qquad (17) \\
\lambda_1(y,t)\mathcal{B}_{\rho_0}\nabla^T V_1 - \lambda_2(y,t)\mathcal{B}_{\rho_0}\nabla^T V_2\Big|_{\Gamma_T} = -\varkappa\rho_{0t},
\end{gathered}
$$

где $J_0 = J|_{\rho=\rho_0}$, $\quad \mathcal{B}_{\rho_0} = \frac{\nu_0 J_0^{-1}J_0^{-T}}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}$.

Задача (17) однозначно разрешима [6], ее решение удовлетворяет оценке

$$
\sum_{m=1}^{2} |V_m|_{s,\Omega_T^{(m)}}^{(2+l)} \le C_4\bigg(\sum_{m=1}^{2} |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(s)} + |p|_{s,S_T}^{(2+l)}\bigg).
$$

В задаче (16) произведем замену $v_m = V_m + \theta_m$, $m=1,2$, $\quad \rho = \rho_0 + r$, где θ_m, r — новые неизвестные функции. Выделим линейные и нелинейные относительно неизвестных функций θ_m, r части, затем запишем линейные члены в левых частях уравнений и условий, а нелинейные — в правых.

Для этого найдем производные по Фреше функций, зависящих от ρ

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{F_{\rho_0+\lambda r}-F_{\rho_0}}{\lambda}=F'_\rho(\rho_0)r,\quad \rho=\rho_0+\lambda r.$$

После некоторых преобразований задачу (16) можем представить в виде

$$L^{(m)}_{\rho_0}\theta_m-(NJ_0^{-T}\nabla^T V_m)L^{(m)}_{\rho_0}r^*+K^{(m)}(r^*,\theta_m)=\mathcal{F}_m(r^*,\theta_m)+f_m(y,t)\quad \text{в}\quad \Omega_T^{(m)},\quad m=1,2,$$

$$\theta_m|_{t=0}=0,\quad m=1,2,\quad r|_{t=0}=0,\quad \theta_1|_{S_T}=0,\quad \theta_1-\theta_2|_{\Gamma_T}=0,$$

$$\varkappa r_t+\mathcal{B}_{\rho_0}\Big(\lambda_1\nabla^T\theta_1-\lambda_2\nabla^T\theta_2\Big)+d\nabla r+d_0 r\Big|_{\Gamma_T}=\Phi_1(r,\theta_1,\theta_2),\tag{18}$$

$$\beta r_t-\alpha\sum_{q,k=1}^{n}\Big(J_0^{sk}J_0^{qs}-\frac{1}{|J^{-T}\nu_0^T|^2}J_0^{ls}\nu_{0l}J_0^{ik}J_0^{qs}J_0^{pi}\nu_{0p}\Big)\frac{\partial^2 r}{\partial y_q\partial y_k}+$$

$$+\frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\theta_1+g\nabla r+g_0 r\Big|_{\Gamma_T}=\Phi_2(r,\theta_1)+\varphi(y,t),$$

где $L^{(m)}_{\rho_0}=\frac{\partial}{\partial t}-\sum\limits_{l,p=1}^{n}a^{(m)}_{lp}(y,\rho_0,t)J_0^{lk}J_0^{pk}\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_p}$,

$K^{(m)}$ — линейные дифференциальные операторы первого порядка,
векторы $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)$, $g=(g_1,g_2,\dots,g_n)$, функции d_0,g_0 зависят от V_1,V_2,ρ_0,
$\mathcal{F}_m,\Phi_m$ — нелинейные члены:

$$\mathcal{F}_m=-\big(\mathcal{L}^{(m)}_\rho-\mathcal{L}^{(m)}_{\rho_0}-r\mathcal{L}'^{(m)}_\rho(\rho_0)\big)V_m-\big(\mathcal{L}^{(m)}_\rho-\mathcal{L}^{(m)}_{\rho_0}\big)\theta_m,$$

$$\Phi_1=-\lambda_1\big(\mathcal{B}_\rho-\mathcal{B}_{\rho_0}\big)\nabla^T\theta_1+\lambda_2\big(\mathcal{B}_\rho-\mathcal{B}_{\rho_0}\big)\nabla^T\theta_2-$$

$$-\lambda_1\big(\mathcal{B}_\rho-\mathcal{B}_{\rho_0}-r\mathcal{B}'_\rho(\rho_0)\big)\nabla^T V_1+\lambda_2\big(\mathcal{B}_\rho-\mathcal{B}_{\rho_0}-r\mathcal{B}'_\rho(\rho_0)\big)\nabla^T V_2,$$

$$\Phi_2=-\alpha\big(\mathcal{K}_\rho-\mathcal{K}_{\rho_0}-r\mathcal{K}'_\rho(\rho_0)\big)-\Big(\frac{|J^{-T}\nu_0^T|}{NJ^{-T}\nu_0^T}-\frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\Big)\theta_1-$$

$$-\Big(\frac{|J^{-T}\nu_0^T|}{NJ^{-T}\nu_0^T}-\frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}-r\Big(\frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\Big)'_\rho\Big|_{\lambda=0}\Big)V_1\Big|_{\Gamma_T},$$

f_m, φ — известные функции.

Полагая в задаче (18) $\mathcal{F}_m=0$, $\Phi_m=0$, $m=1,2$, получим следующую задачу.
Требуется найти функции $\theta_1(y,t)$, $\theta_2(y,t)$ и $r(y,t)$, $y\in\Gamma$ по условиям

$$L_m\big(y,t,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\big)\theta_m-\mu_m(y,t)L_m\big(y,t,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\big)r^*+K_m(r^*,\theta_m)=f_m(y,t)\quad \text{в}\quad \Omega_T^{(m)},\quad m=1,2,$$

$$\theta_m|_{t=0}=0,\quad m=1,2,\quad r|_{t=0}=0,\quad \theta_1|_{S_T}=0,\quad \theta_1-\theta_2|_{\Gamma_T}=0,$$

$$\varkappa r_t+b^{(1)}(y,t)\nabla\theta_1-b^{(2}(y,t)\nabla\theta_2+d(y,t)\nabla r+d_0(y,t)r|_{\Gamma_T}=\varphi_1(y,t),\tag{19}$$

$$\beta r_t-\alpha\sum_{q,k=1}^{n}c_{qk}(y,t)\frac{\partial^2 r}{\partial y_q\partial y_k}+h_0(y,t)\theta_1+g(y,t)\nabla r+g_0(y,t)r|_{\Gamma_T}=\varphi_2(y,t).$$

Эта задача была изучена в работе [8] и для нее справедлива теорема

Т е о р е м а 3. *Пусть l – нецелое положительное число, $1 < s \le 2 + l, S \in C^{2+l}, \Gamma \in C^{4+l}$, коэффициенты операторов L_m, $K_m(r^*, \theta_m)$ и μ_m принадлежат пространству $C^l_{s-2}(\Omega_T^{(m)})$, $m = 1, 2$; $b_j^{(m)}, d_j$, $j = 1, \ldots, n$, $d_0 \in C^{1+l}_{s-1}(\Gamma_T)$; c_{qk}, g_j, $j = 1, \ldots, n$, h_0, $g_0 \in C^{2+l}_s(\Gamma_T)$; матрица $\left\{c_{qk}\right\}_{q,k=1}^n$ — положительно определенная и симметрическая.*

Тогда для любых функций $f_m \in \overset{\circ}{C}{}^{l}_{s-2}(\Omega_T^{(m)})$, $m = 1, 2$, $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l}_{s-1}(\Gamma_T)$, $\varphi_2 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}(\Gamma_T)$ задача (19) имеет единственное решение $\theta_m \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}(\Omega_T^{(m)})$, $m = 1, 2$, $r \in \overset{\circ}{C}{}^{4+l}_{s+2}(\Gamma_T)$, подчиняющееся оценке

$$\sum_{m=1}^{2} |\theta_m|^{(2+l)}_{s,\Omega_T^{(m)}} + |r|^{(4+l)}_{s+2,\Gamma_T} \le C_5 \left(\sum_{m=1}^{2} |f_m|^{(l)}_{s-2,\Omega_T^{(m)}} + |\varphi_1|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_T} + |\varphi_2|^{(2+l)}_{s,\Gamma_T} \right) := C_5 ||h||_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_T)}. \quad (20)$$

4. Доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 сводится к доказательству разрешимости нелинейной задачи (18).

Запишем задачу (18) в операторной форме

$$Aw = Nw + h := Hw, \quad (21)$$

где A — линейный оператор

$$Aw = \Big\{ L^{(1)}_{\rho_0}\theta_1 - (NJ_0^{-T}\nabla^T V_1) L^{(1)}_{\rho_0} r^* + K^{(1)}(r^*, \theta_1), \quad L^{(2)}_{\rho_0}\theta_2 - (NJ_0^{-T}\nabla^T V_2) L^{(2)}_{\rho_0} r^* + K^{(2)}(r^*, \theta_2),$$

$$\theta_1\big|_{S_T}, \quad \theta_1 - \theta_2\big|_{\Gamma_T}, \quad \varkappa r_t + \mathcal{B}_{\rho_0}(\lambda_1 \nabla^T \theta_1 - \lambda_2 \nabla^T \theta_2) + d\nabla r + d_0 r\big|_{\Gamma_T}, \quad \beta r_t - \alpha \sum_{q,k=1}^{n-1} \Big(J_0^{sk} J_0^{qs} -$$

$$- \frac{1}{|J^{-T}\nu_0^T|^2} J_0^{ls}\nu_{0l} J_0^{ik} J_0^{qs} J_0^{pi} \nu_{0p} \Big) \frac{\partial^2 r}{\partial y_q \partial y_k} + \frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\theta_1 + g\nabla r + g_0 r\big|_{\Gamma_T} \Big\},$$

N — нелинейный оператор

$$Nw = \Big\{ \mathcal{F}_1(r^*, \theta_1), \ \mathcal{F}_2(r^*, \theta_2), \ 0, \ 0, \ \Phi_1(r, \theta_1, \theta_2)\big|_{\Gamma_T}, \ \Phi_2(r, \theta_1)\big|_{\Gamma_T} \Big\},$$

$$h = \Big\{ f_1(y,t), \ f_2(y,t), \ 0, \ 0, \ 0, \ \varphi(y,t) \Big\}.$$

Очевидно, что $A : \overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_T) \to \overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_T)$, $H : \overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_T) \to \overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_T)$.

На основании теоремы 3 задачу (21) можем представить в виде

$$w = A^{-1}(Nw + h) := A^{-1}Hw,$$

причем в силу оценки (20) справедливо неравенство

$$|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_5(|Nw|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}), \quad t \le T. \quad (22)$$

Пусть $B_M = \{w \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_{T_1}) : |w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_{T_1})} \le M\}$ — замкнутый шар в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_T)$.

Подберем радиус M шара B_M таким, чтобы выполнялось неравенство

$$C_5 |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} (1 - q)^{-1} \le M, \quad t \le T. \quad (23)$$

Покажем, что для малых $t \le T_1$ нелинейный оператор $A^{-1}H$ переводит замкнутый шар B_M в себя и является в нем сжимающим, т.е. выполняются неравенства

$$|A^{-1}Hw|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} := |A^{-1}Nw + A^{-1}h|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le M \quad \text{при} \quad \forall w \in B_M,$$

$$|A^{-1}(Hw - H\tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} := |A^{-1}(Nw - N\tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le q|w - \tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)}, \quad \text{где} \quad q \in (0,1).$$

Оценим $A^{-1}Hw$ при помощи неравенства (20)

$$|A^{-1}Hw|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_5(|Nw|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}) \le$$

$$\le C_5\Bigg(\bigg(\sum_{m=1}^{2} |\mathcal{F}_m|^{(l)}_{s-2,D_t^{(m)}} + |\Phi_1|^{(1+l)}_{s-1,R_t} + |\Phi_2|^{(2+l)}_{s,R_t}\bigg) + |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}\Bigg); \tag{24}$$

$$|A^{-1}(Hw - H\tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_5|Hw - H\tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} \le C_5\bigg(\sum_{m=1}^{2} |\mathcal{F}_m(r,\theta_m) - \mathcal{F}_m(\tilde{r},\tilde{\theta}_m)|^{(l)}_{s-2,D_t^{(m)}} +$$

$$+|\Phi_1(r,\theta_1,\theta_2) - \Phi_1(\tilde{r},\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)|^{(1+l)}_{s-1,R_t} + |\Phi_2(r,\theta_1) - \Phi_2(\tilde{r},\tilde{\theta}_1)|^{(2+l)}_{s,R_t}\bigg) := C_5 I. \tag{25}$$

Для оценки функций $\mathcal{F}_m,\ \Phi_m,\ m = 1,2$ представим выражения, входящие в них, в виде [7]

$$\big(F^{(m)}_{\rho} - F^{(m)}_{\rho_0}\big)\theta_m = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} F^{(m)}_{\rho_0+\lambda r}\theta_m d\lambda,$$

$$\big(F^{(m)}_{\rho} - F^{(m)}_{\rho_0} - rF'^{(m)}_{\rho}(\rho_0)\big)V_m = \int_0^1 (1-\mu)\frac{d^2}{d\mu^2} F^{(m)}_{\rho_0+\mu r} V_m d\mu. \tag{26}$$

Оценим нормы функций в правых частях неравенств (24)–(25), используя (26) и оценки произведений и композиций функций из весового пространства Гельдера $C^l_s(Q_T)$ [9]. В результате получим неравенства

$$|\mathcal{F}_m|^{(l)}_{s-2,D_t^{(m)}} \le C_6 t^{\frac{s+1}{2}} |r|^{(4+l)}_{s+2,R_t}\bigg(|r|^{(4+l)}_{s+2,R_t} + |\theta_m|^{(2+l)}_{s,D_t^{(m)}}\bigg),$$

$$|\Phi_1|^{(1+l)}_{s-1,R_t} \le C_7 t^{\frac{s+1}{2}} |r|^{(4+l)}_{s+2,R_t}\bigg(|r|^{(4+l)}_{s+2,R_t} + |\nabla\theta_1|^{(1+l)}_{s-1,R_t} + |\nabla\theta_2|^{(1+l)}_{s-1,R_t}\bigg), \tag{27}$$

$$|\Phi_2|^{(2+l)}_{s,R_t} \le C_8 t^{\frac{s+1}{2}} |r|^{(4+l)}_{s+2,R_t}\bigg(|r|^{(4+l)}_{s+2,R_t} + |\theta_1|^{(2+l)}_{s,R_t}\bigg);$$

$$|I| \le C_9 t^{\frac{s+1}{2}}\bigg(|r|^{(4+l)}_{s+2,R_t} + |\tilde{r}|^{(4+l)}_{s+2,R_t} + \sum_{m=1}^{2}\big(|\theta_m|^{(2+l)}_{s,D_t^{(m)}} + |\tilde{\theta}_m|^{(2+l)}_{s,D_t^{(m)}}\big)\bigg)\bigg(|r-\tilde{r}|^{(4+l)}_{s+2,R_t} + \sum_{m=1}^{2}|\theta_m - \tilde{\theta}_m|^{(2+l)}_{s,D_t^{(m)}}\bigg). \tag{28}$$

Применив в неравенствах (24)–(25) оценки (27)–(28), будем иметь

$$|A^{-1}Hw|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_5\big(C_{10} t^{\frac{s+1}{2}} |r|^{(4+l)}_{s+2,R_t} |w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} + |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}\big) \le C_{11} t^{\frac{s+1}{2}} |w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} |w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} + C_5|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)};$$

$$|A^{-1}(Hw - H\tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_{12} t^{\frac{s+1}{2}}\big(|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} + |\tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)}\big)|w - \tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)},$$

а так как $w, \tilde{w} \in B_M$, то, положив $C_{11}t^{\frac{s+1}{2}}M, \quad 2C_{12}t^{\frac{s+1}{2}}M \le q, \quad 0 < q < 1$, найдем T_1 такое, что будут выполняться неравенства

$$|A^{-1}Hw|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le q|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} + C_5|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} \le M;$$

$$|A^{-1}(Hw - H\tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le q|w - \tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \tag{29}$$

$\forall w, \tilde{w} \in B_M$ и $t \le T_1$.

Из неравенства (29) вытекает, что оператор $A^{-1}H$ является сжимающим в замкнутом шаре B_M. По принципу сжимающих отображений задача (21) или (18) однозначно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_{T_1})$ и для ее решения справедлива оценка (11)

$$|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_1|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)},$$

где $C_1 = C_5(1-q)^{-1}$.

Теорема 1 доказана.

Цитированная литература

1. **Базалий Б. В. Дегтярев С. П.** //Нелинейные граничные задачи. АН УССР. Киев, 1992. Вып. 4. С. 1 – 5.

2. **Радкевич Е. В.** // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 2. С. 77 – 101.

3. **Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.** Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 1975. 155 с.

4. **Солонников В. А.** Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи. Л., 1977. 20 с. (Препринт АН СССР. Ленингр. отд-ние Матем. ин-т им. В.А.Стеклова; Р–2–77).

5. **Hanzawa E. I.** //Tohoku Math.J. 1981. P. 297 – 335.

6. **Бижанова Г. И.** // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. Вып. 2. С. 46 – 76.

7. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. Вып. 6. С. 98 – 140.

8. **Сарсекеева А. С.** // Матем. журнал. Алматы, 2001. Т. 1, № 2. С. 85 – 92.

9. **Бижанова Г. И.** // Записки научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 14 – 47.

Поступила в редакцию 14.03.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 70 — 75*

УДК 517.956.4

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

М. А. Сахауева

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125

Изучена модельная задача сопряжения, возникающая при исследовании задач со свободными границами. Доказана однозначная разрешимость задачи, получены точные оценки решения в весовом пространстве Гельдера.

Рассмотрим модельную задачу сопряжения, которая возникает при линеаризации задач со свободными границами. В частности, при исследовании трехфазной задачи со свободными границами типа Стефана и Флорина [1, 2] получаются несколько модельных задач: три задачи Коши, две граничные задачи и две задачи сопряжения. Наибольший интерес представляет собой вторая модельная задача сопряжения.

Пусть R — гиперплоскость $x_n = 0$ в $\mathbb{R}^n$, $R_T = R \times (0,T)$, $D = \mathbb{R}^n$, $D_T = D \times (0,T)$, D_1 и D_2 — полупространства $x_n < 0$ и $x_n > 0$ в $\mathbb{R}^n$, соответственно, $D_T^{(m)} = D_m \times (0,T)$, $m = 1,2$. Обозначим через $L_k^{(0)}$ — параболический оператор вида $L_k^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, а через $\tilde{L}_k^{(0)}$ — соответствующий ему оператор $\tilde{L}_k^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $\quad k = 1,2,3$.

Постановка задачи. Требуется найти функции $\omega(x,t)$, $\Theta_1(x,t)$, $\Theta_2(x,t)$, $\rho(x',t)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющие нулевым начальным данным, по условиям:

$$L_1^{(0)}\omega - \alpha \tilde{L}_1^{(0)}\rho = f_1(x,t) \quad \text{в} \quad D_T^{(1)}, \tag{1}$$

$$L_2^{(0)}\Theta_1 - \beta_1 \tilde{L}_2^{(0)}\rho = f_2(x,t) \quad \text{в} \quad D_T^{(1)}, \tag{2}$$

$$L_3^{(0)}\Theta_2 - \beta_2 \tilde{L}_3^{(0)}\rho = f_3(x,t) \quad \text{в} \quad D_T^{(2)}, \tag{3}$$

$$\Theta_m - \sigma_1\omega - \sigma_2\rho|_{R_T} = \Phi_m(x',t)\ ,\ m = 1,2, \tag{4}$$

$$b\nabla\omega + c^{(1)}\nabla'\rho|_{R_T} = \Phi_3(x',t)\ , \tag{5}$$

$$b^{(1)}\nabla\Theta_1 - b^{(2)}\nabla\Theta_2 + c^{(2)}\nabla'\rho + \left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{R_T} = \Phi_4(x',t)\ , \tag{6}$$

Keywords: *problem of conjugation, weighted Hölder space*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A05,35K20

где $b,\ b^{(m)},\ c^{(m)},\ m=1,2$ — вектора с компонентами $b_i,\ b_i^{(m)},\ c_{j_1}^{(m)},\ i=\overline{1,n},\ j_1=\overline{1,n-1}$; коэффициенты $a_{ij}^{(k)},\ k=1,2,3,\ \alpha,\ \beta_m,\ \sigma_m,\ m=1,2$ — постоянные, причем $a_{ij}^{(m)}\neq a_{ij}^{(1+m)},\ m=1,2,\ a_{ij}^{(k)}=a_{ji}^{(k)},\ k=1,2,3,\ i,j=1,\ldots,n$; $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})$, $\nabla'=(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$ и

$$\begin{gathered}\sigma_2+\sigma_1\alpha-\beta_m>0,\ m=1,2,\ b_n>0,\ b_n^{(m)}>0,\ m=1,2\ ,\\ |b^{(1)}-b^{(2)}|<<1,\ |\beta_1-\beta_2|<<1,\ |c^{(2)}|<<1\ .\end{gathered}\tag{7}$$

Задачу (1)–(6) будем рассматривать в весовом пространстве Гельдера $C_s^l(Q_T)$, введенном впервые В. С. Белоносовым [3].

Определение. *Пусть l — нецелое положительное число, $s\le l$. Под $C_s^l(Q_T)$ будем понимать банахово пространство функций $u(x,t)$, определенных в области $Q_T=\Omega\times(0,T)$ и имеющих норму*

$$|u|_{s,Q_T}^{(l)}=\sup_{t\le T}t^{\frac{l-s}{2}}[u]_{Q_t'}^{(l)}+\sum_{s<2j_0+j<l}\sup_{t\le T}t^{\frac{2j_0+|j|-s}{2}}|D_t^{j_0}D_x^ju|_\Omega+\begin{cases}|u|_{Q_T}^{(s)},\ s\ge0\\ 0,\ s<0\end{cases},$$

где $Q_t'=\Omega\times(\frac{t}{2},t)$,

$$[u]_{Q_T}^{(l)}=\sum_{2j_0+|j|=[l]}[D_t^{j_0}D_x^ju]_{x,Q_T}^{(l-[l])}+\sum_{0<l-2j_0-|j|<2}[D_t^{j_0}D_x^ju]_{t,Q_T}^{\left(\frac{l-2j_0-|j|}{2}\right)},$$

$$[v]_{x,Q_T}^{(\alpha)}=\sup_{(x,t),(z,t)\in\overline{Q}_T}|v(x,t)-v(z,t)||x-z|^{-\alpha},\quad [v]_{t,Q_T}^{(\alpha)}=\sup_{(x,t),(x,\tau)\in\overline{Q}_T}|v(x,t)-v(x,\tau)||t-\tau|^{-\alpha},$$

$\alpha\in(0,1)$, $|u|_{Q_T}^{(s)}$ — *норма пространства Гёльдера* $C_{x\ t}^{s,\frac{s}{2}}(\overline{Q}_T)$:

$$|u|_{Q_T}^{(s)}=[u]_{Q_T}^{(s)}+\sum_{2j_0+|j|<s}|D_t^{j_0}D_x^ju|_{Q_T}\ .$$

При $s=l$ это пространство совпадает с пространством Гельдера $C_{x\ t}^{l,\ \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$. При $s\ge0$ определим пространство $\overset{\circ}{C}{}_s^l(Q_T)$ как подпространство функций из $C_s^l(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\partial^ku/\partial t|_{t=0}=0,\ k\le[s/2]$. При $s<0$ положим $\overset{\circ}{C}{}_s^l(Q_T)=C_s^l(Q_T)$.

Теорема. *Пусть l — нецелое положительное число, $l<s\le2+l$, $f_m(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_{s-2}^l(D_T^{(m)})$, $f_3(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_{s-2}^l(D_T^{(2)})$, $\Phi_m(x',t)\in\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(R_T)$, $\Phi_{2+m}(x',t)\in\overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(R_T)$, $m=1,2$ и выполнены условия (7). Тогда задача сопряжения (1)–(6) имеет единственное решение $\omega(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T^{(1)})$, $\Theta_m(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T^{(m)})$, $m=1,2$, $\rho(x',t)\in\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(R_T)$, где $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\in\overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(R_T)$. При всех $t\le T$ для решения справедлива оценка*

$$\begin{gathered}|\omega|_{s,D_t^{(1)}}^{(2+l)}+\sum_{m=1}^2|\Theta_m|_{s,D_t^{(m)}}^{(2+l)}+|\rho|_{s,R_t}^{(2+l)}+\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\le\\ \le c\left[\sum_{m=1}^2\left(|f_m|_{s-2,D_t^{(m)}}^{(l)}+|\Phi_m|_{s,R_t}^{(2+l)}+|\Phi_{2+m}|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\right)+|f_3|_{s-2,D_t^{(2)}}^{(l)}\right]\ .\end{gathered}\tag{8}$$

Доказательство. Построим вспомогательные функции $P(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T^{(1)})$, $V_m(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T^{(m)})$, $m=1,2$, как решения полупространственных задач:

$$L_1^{(0)}P=f_1(x,t)\quad\text{в}\quad D_T^{(1)},\tag{9}$$

$$b\nabla P|_{R_T} = \Phi_3(x',t) \ , \tag{10}$$

$$L^{(0)}_{1+m} V_m = f_{1+m}(x,t) \quad \text{в} \quad D_T^{(m)} \ , \ m=1,2, \tag{11}$$

$$V_m - \sigma_1 P|_{R_T} = \Phi_m(x',t) \ , \ m=1,2. \tag{12}$$

Решая задачу (9), (10), находим $P(x,t)$. Подставляя его в условие (12), найдем $V_m(x,t)$ из (11), (12). Решения задач подчиняются оценкам [3–6]

$$|P|^{(2+l)}_{s,D_T^{(1)}} + \sum_{m=1}^{2} |V_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} \le c_1 \left(|\Phi_3|^{(1+l)}_{s-1,R_T} + \sum_{m=1}^{2} |\Phi_m|^{(2+l)}_{s,R_T} \right) . \tag{13}$$

Построив функции $P(x,t)$, $V_m(x,t)$, $m=1,2$, произведем в задаче (1)–(6) замену

$$\begin{gathered} \omega(x,t) = p(x,t) + \alpha\rho(x',t) + P(x,t) \ , \\ \Theta_m(x,t) = u_m(x,t) + \beta_m \rho(x',t) + V_m(x,t) \ , \end{gathered} \tag{14}$$

где $p(x,t)$, $u_m(x,t)$, $m=1,2$, — новые неизвестные функции. Замена (14) делается для того, чтобы, во-первых, исключить функцию $\rho(x',t)$ в уравнениях (1)–(3), и во-вторых, свести исходную задачу к однородной задаче с нулевыми условиями (4), (5).

После замены (14) получим задачу нахождения функций $p(x,t)$, $u_m(x,t)$, $m=1,2$, $\rho(x',t)$, удовлетворяющих нулевым начальным данным, по условиям

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(1)}_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{в} \quad D_T^{(1)}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(2)}_{ij} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{в} \quad D_T^{(1)}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(3)}_{ij} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{в} \quad D_T^{(2)}, \tag{17}$$

$$u_m - \sigma_1 p + (\beta_m - \sigma_1\alpha - \sigma_2)\rho|_{R_T} = 0 \ , \ m=1,2, \tag{18}$$

$$b\nabla p + (\alpha b + c^{(1)})\nabla'\rho|_{R_T} = 0 \ , \tag{19}$$

$$b^{(1)}\nabla u_1 - b^{(2)}\nabla u_2 + (\beta_1 b^{(1)} - \beta_2 b^{(2)} + c^{(2)})\nabla'\rho + \left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{R_T} = \bar\Phi_4(x',t) \ , \tag{20}$$

где $\bar\Phi_4(x',t) = \Phi_4(x',t) - (b^{(1)}\nabla V_1 - b^{(2)}\nabla V_2)\big|_{R_T}$,

$$|\bar\Phi_4|^{(1+l)}_{s-1,R_T} \le c_2 \left(|\Phi_4|^{(1+l)}_{s-1,R_T} + \sum_{m=1}^{2} |V_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} \right) . \tag{21}$$

Применим к задаче (15)–(20) преобразования Фурье по переменной x' и Лапласа по t:

$$\bar{\tilde{f}}\,(\xi,x_n,p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_{R^{n-1}} e^{-ix'\xi} f(x',t)dx' \ .$$

При этом параболические уравнения переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения по x_n, решая которые, находим:

$$\begin{gathered} \bar{\tilde{u}}_m(\xi,x_n,p) = F_m(\xi,p)e^{(-1)^{1+m} r_m x_n} \quad \text{в} \quad D_T^{(m)}, \ m=1,2, \\ \bar{\tilde{p}}(\xi,x_n,p) = F_3(\xi,p)e^{r_3 x_n} \quad \text{в} \quad D_T^{(1)} \ , \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$r_m = r_m(\xi,p) = (-1)^m \frac{1}{a_{nn}^{(1+m)}} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_{\mu n}^{(1+m)} i\xi_\mu + \sqrt{\frac{p}{a_{nn}^{(1+m)}} - S_m(\xi)}\ ,\ m=1,2,$$

$$r_3 = r_3(\xi,p) = -\frac{1}{a_{nn}^{(1)}} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_{\mu n}^{(1)} i\xi_\mu + \sqrt{\frac{p}{a_{nn}^{(1)}} - S_3(\xi)}\ ,$$

$$S_m(\xi) = \frac{1}{a_{nn}^{(1+m)}} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{(1+m)} \xi_\mu\xi_\nu - \left(\frac{1}{a_{nn}^{(1+m)}} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_{\mu n}^{(1+m)}\xi_\mu\right)^2\ ,\ m=1,2,$$

$$S_3(\xi) = \frac{1}{a_{nn}^{(1)}} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{(1)} \xi_\mu\xi_\nu - \left(\frac{1}{a_{nn}^{(1)}} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_{\mu n}^{(1)}\xi_\mu\right)^2 .$$

Краевые условия в терминах Фурье-Лапласа имеют вид

$$\bar{\tilde{u}}_m - \sigma_1 \bar{\tilde{p}} + (\beta_m - \sigma_2 - \alpha\sigma_1)\, \bar{\tilde{\rho}}|_{R_T} = 0\ ,\ m=1,2,$$

$$b_n \frac{\partial\, \bar{\tilde{p}}}{\partial x_n} + i\sum_{k=1}^{n-1} b_k\xi_k\, \bar{\tilde{p}} + i\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha b_k + c_k^{(1)})\xi_k\, \bar{\tilde{\rho}}\Big|_{R_T} = 0\ ,$$

$$b_n^{(1)}\frac{\partial\bar{\tilde{u}}_1}{\partial x_n} - b_n^{(2)}\frac{\partial\bar{\tilde{u}}_2}{\partial x_n} + i\sum_{k=1}^{n-1}(b_k^{(1)}\xi_k\bar{\tilde{u}}_1 - b_k^{(2)}\xi_k\bar{\tilde{u}}_2) + i\sum_{k=1}^{n-1}(\beta_1 b_k^{(1)} - \beta_2 b_k^{(2)} + c_k^{(2)})\xi_k\, \bar{\tilde{\rho}} + p\, \bar{\tilde{\rho}}\Big|_{R_T} = \bar{\tilde{\bar{\Phi}}}_4\ .$$

Подставляя в эти условия (22), найдем $F_k(\xi,p),\ k=1,2,3$ и $\bar{\tilde{\rho}}$

$$F_m(\xi,p) = \left(-\sigma_1\frac{i(\alpha b' + c^{(1)'})\xi'}{b_n r_3 + ib'\xi'} + \sigma_1\alpha + \sigma_2 - \beta_m\right)\bar{\tilde{\rho}}\ ,\ m=1,2,$$

$$F_3(\xi,p) = -\frac{i(\alpha b' + c^{(1)'})\xi'}{b_n r_3 + ib'\xi'}\,\bar{\tilde{\rho}},\qquad \bar{\tilde{\rho}} = \frac{1}{D}\bar{\tilde{\bar{\Phi}}}_4\ ,$$

где

$$D = p + \sum_{m=1}^{2} b_n^{(m)} r_m\left(\sigma_1\alpha + \sigma_2 - \beta_m - \sigma_1\frac{i(\alpha b' + c^{(1)'})\xi'}{b_n r_3 + ib'\xi'}\right) +$$

$$+\left(\sigma_1\alpha + \sigma_2 - \sigma_1\frac{i(\alpha b' + c^{(1)'})\xi'}{b_n r_3 + ib'\xi'}\right) i(b^{(1)'}\xi' - b^{(2)'}\xi') + ic^{(2)'}\xi'\ ,$$

где $b'\xi' = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k\xi_k,\quad b^{(m)'}\xi' = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k^{(m)}\xi_k,\quad c^{(m)'}\xi' = \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k^{(m)}\xi_k,\ m=1,2.$

Решение задачи (15)–(20) запишем в виде потенциалов

$$\begin{aligned} u_m(x,t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \bar{\Phi}_4(y',\tau) G_m(x'-y', x_n, t-\tau)dy'\ ,\ m=1,2 \\ p(x,t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \bar{\Phi}_4(y',\tau) G_3(x'-y', x_n, t-\tau)dy'\ , \\ \rho(x',t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \bar{\Phi}_4(y',\tau) G_3(x'-y', 0, t-\tau)dy'\ , \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$G_k(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int\limits_{R^{n-1}} e^{ix'\xi}d\xi \int\limits_{Rep=p_1} e^{pt}\bar{\tilde{G}}_k(p,\xi,x_n)dp\ ,\ k=1,2,3, \tag{24}$$

$$\bar{\tilde{G}}_m(p,\xi,x_n)=\frac{\Psi_m(\xi,p)}{p+\varphi(\xi,p)}e^{(-1)^{1+m}r_m(\xi,p)x_n}\ ,\ m=1,2, \tag{25}$$

$$x_n<0 \quad \text{при} \quad m=1 \quad \text{и} \quad x_n>0 \quad \text{при} \quad m=2.$$

$$\bar{\tilde{G}}_3(p,\xi,x_n)=\frac{\Psi_3(\xi,p)}{p+\varphi(\xi,p)}e^{r_3(\xi,p)x_n}\ ,\quad x_n<0\ , \tag{26}$$

$$\Psi_m(\xi,p)=\sigma_1\Psi_3(\xi,p)+\sigma_1\alpha+\sigma_2-\beta_m\ ,\ m=1,2,\qquad \Psi_3(\xi,p)=-\frac{i(\alpha b'+c^{(1)'})\xi'}{b_n r_3+ib'\xi'}\ ,$$

$$\varphi(\xi,p)=\sum_{m=1}^{2} b_n^{(m)}r_m\Big(\sigma_1\alpha+\sigma_2-\beta_m+\sigma_1\Psi_3\Big)+(\sigma_1\alpha+\sigma_2+\sigma_1\Psi_3)i(b^{(1)'}\xi'-b^{(2)'}\xi')+ic^{(2)'}\xi'\ .$$

Ядра с выражением $p+\varphi(\xi,t)$ в знаменателе, где $\varphi=b_n r_1(\xi,p)+c_n r_2(\xi,p)+ib'\xi'$, $b_n>0$, $c_n>0$, возникают в задачах с производной по времени в граничном условии [7–10]. В работе Г. И. Бижановой и В. А. Солонникова [11] были изучены ядра (25), (26) в общем виде. Для обратных преобразований Фурье и Лапласа этих ядер при наложении определенных условий на коэффициенты были получены оценки [11, формулы (1.16), (3.9), (3.10)]. В частности, были установлены условия на коэффициенты ядер, при выполнении которых для них существуют обратные преобразования Фурье и Лапласа. Для ядер (25), (26) эти условия примут вид (7)

$$\sigma_2+\sigma_1\alpha-\beta_m>0,\ m=1,2,\quad b_n>0,\ b_n^{(m)}>0,\ m=1,2,$$

$$|\beta_1-\beta_2|<<1,\ |b^{(1)'}-b^{(2)'}|<<1,\ |c^{(2)'}|<<1.$$

Как было показано в работах [5–7], [9], эти функции подчиняются оценкам

$$|G_m|\le c_3(x^2+t^2)^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\delta_1\frac{x^2}{t}},\ n\ge 2\ ,\quad |D_tG_m|\le c_4\Big[(x^2+t^2)^{-\frac{n}{2}}+t^{-\frac{n+1}{2}}\Big]e^{-\delta_2\frac{x^2}{t}}\ ,$$

$$|D_t^2G_m|,|D_tD_{x'}G_m|\le c_5\Big[(x^2+t^2)^{-\frac{n+1}{2}}+t^{-\frac{n+2}{2}}\Big]e^{-\delta_3\frac{x^2}{t}}\ ,$$

$$|D_{x'}^{\nu}G_m|\le c_6(x^2+t^2)^{-\frac{n-1+\nu}{2}}e^{-\delta_4\frac{x^2}{t}}\ ,\ m=1,2,3,$$

где $\delta_1,\dots,\delta_4$ — положительные константы.
Для потенциалов, порожденных этими ядрами $G_m(x,t)$, справедливы неравенства

$$[(\psi*D_{x'}G_m)]^{(\alpha)}_{r-2,x,R_T}\le c_7[\psi]^{(\alpha)}_{r-2,R_T}\ ,\qquad [(\psi*D_{x'}G_m)]^{(\frac{\alpha}{2})}_{r-2,t,R_T}\le c_8[\psi]^{(\alpha)}_{r-2,R_T}\ ,$$

$$[(\psi*D_tG_m)]^{(\alpha)}_{r-2,x,R_T}\le c_9|\psi|^{(1+\alpha)}_{r-1,R_T}\ ,\qquad [(\psi*D_tG_m)]^{(\frac{\alpha}{2})}_{r-2,t,R_T}\le c_{10}|\psi|^{(1+\alpha)}_{r-1,R_T}\ ,$$

$$[(\psi*G_m)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{r-1,t,R_T}\le c_{11}|\psi|^{(\alpha)}_{r-2,R_T}\ ,\qquad |(\psi*G_m)|\le c_{12}t^{\frac{s}{2}}|\psi|^{(1+l)}_{s-1,R_T}\ ,\ m=1,2,3,$$

где $\alpha<r\le 2+\alpha,\ \alpha\in(0,1)$,

$$[v]^{(a)}_{b,x,Q_T}=\sup_{t<T}t^{\frac{a-b}{2}}[v]^{(a)}_{x,Q'_t},\ [v]^{(a)}_{b,t,Q_T}=\sup_{t<T}t^{\frac{a-b}{2}}[v]^{(a)}_{t,Q'_t},$$

$$[v]^{(a)}_{b,Q_T}=[v]^{(a)}_{b,x,Q_T}+[v]^{(\frac{a}{2})}_{b,t,Q_T},\ b\le a,\ a\in(0,1),\ Q'_t=\Omega\times(t/2,t),$$

откуда следует неравенство

$$|p|^{(2+l)}_{s,D_T^{(1)}} + \sum_{m=1}^{2} |u_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} + |\rho|^{(2+l)}_{s,R_T} + \left|\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|^{(1+l)}_{s-1,R_T} \le c_{13}|\bar{\Phi}_4|^{(1+l)}_{s-1,R_T} \ . \qquad (27)$$

Применяя замену (14), оценки функции $\bar{\Phi}_4$ — (21), вспомогательных функций P_2, V_m, $m = 1,2$ — (13), и (27), получим требуемую оценку (8). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Бижанова Г.И., Сахауева М.А.** // Известия МОН РК, серия физ.-матем. 2001. №1. С.1 – 18.

2. **Сахауева М.А.** // Тр. института математики НАН Беларуси (международн.конф. AMADE-2001, 14–20 февр. 2001, Минск). 2001 Т. 10. С. 136–141.

3. **Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.** Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 1975. 155 с.

4. **Солонников В. А.** Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи. Л., 1977. 20 с. (Препринт АН СССР. Ленингр. отд-ние Матем. ин-т им. В.А.Стеклова; Р–2–77).

5. **Белоносов В. С.** // Матем. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 163 – 188.

6. **Солонников В. А., Хачатрян А. Г.** // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 147. С. 147 – 155.

7. **Базалий Б. В.** // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 11. С. 3 – 7.

8. **Базалий Б. В., Дегтярев С. П.** // Матем. сб. 1987. Т. 132 (174), № 1. С. 3 – 19.

9. **Бижанова Г. И.** // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. Вып. 1. С. 64 – 94.

10. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5, № 1. С. 109 – 142.

11. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. Вып.6. С. 30 – 50.

Поступила в редакцию 18.03.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 76 – 83*

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. I

С. Я. Серовайский

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47, serovajskys@mail.ru

Рассматриваются задачи оптимального управления для систем, описываемых уравнениями параболического типа с негладкой нелинейностью. Наличие негладкого члена препятствует получению условий оптимальности стандартными методами. Для преодоления имеющихся трудностей осуществляется гладкая аппроксимация уравнения. В первой части уравнение является регулярным, а обоснование условий оптимальности для аппроксимирующей экстремальной задачи осуществляется с помощью дифференцирования функции состояния системы по управлению. Показывается, что метод аппроксимации обеспечивает нахождение приближенного решения исходной экстремальной задачи. Во второй части рассматривается сингулярный случай, когда соответствующая краевая задача не имеет априорных оценок решения.

1. Постановка задачи. Пусть Ω есть открытая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$ с границей S, $T>0$, $Q=\Omega\times(0,T)$, $\Sigma=S\times(0,T)$. Рассматривается система, описываемая уравнением

$$y'-\triangle y+g(y)=v+f,\ \ (x,t)\in Q \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(x,0)=y_0(x),\ \ x\in\Omega;\ \ y=0\ \ (x,t)\in\Sigma, \tag{2}$$

где v — управление, y — состояния системы, $y'=\partial y/\partial t$, f и y_0 — известные функции, g — заданная функция от y.

В соответствии с теоремой Соболева имеют место непрерывные вложения

$$H_0^1(\Omega)\subset L_6(\Omega);\ \ H^{-1}(\Omega)\subset L_{6/5}(\Omega),$$

Определим функциональные пространства

$$V=L_2(Q),\ \ X=L_2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \ X'=L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

$$Y=\big\{y|\ \ y\in X\cap L_6(Q),\ \ y'\in X'+L_{6/5}(Q)\big\}.$$

Keywords: *distributed parameter system, optimal control, non-smooth nonlinearity, smooth approximation, approached decision*
2000 Mathematics Subject Classification: 49J20, 49J50, 49K20

Предполагается, что справедливы включения $f \in X'$, $y_0 \in L_2(\Omega)$. Функция g принадлежит классу G_1 непрерывных функций, удовлетворяющих неравенствам

$$|g(y)| \le a + b\ |y|^5,\ g(y)y > |y|^6,\ \big[g(y) - g(x)\big](y - x) \ge c\ |y - x|^6\ \ \forall x, y,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Пользуясь теоремой Красносельского (см., [1], с. 312), установим, что оператор Немыцкого $g(\cdot) : L_6(Q) \to L_{6/5}(Q)$ является непрерывным. Управление v выбирается из выпуклого замкнутого подмножества U пространства V. При сделанных предположениях с помощью теории монотонных операторов установим (см., например, теорема 1.1 [2], с. 239), что для любого управления $v \in V$ задача (1), (2) имеет единственное решение $y = y(v)$ из пространства Y, причем отображение $y(\cdot) : V \to Y$ непрерывно и слабо непрерывно. Рассматривается функционал

$$I(v) \ = \ \frac{1}{2}\ \big\|y(v) - z\big\|_X^2 \ + \ \frac{\gamma}{2}\ \big\|v\big\|_2^2 \ ,$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(Q)$, z — известная функция класса X, $\gamma > 0$. Ставится следующая оптимизационная задача:

Задача 1. *Найти такое управление v, которое минимизирует функционал I на множестве U.*

Теорема 1. *Задача* 1 *разрешима.*

Действительно, критерий оптимальности представляет собой сумму квадратов норм в гильбертовых пространствах. Оба слагаемых являются ограниченными снизу выпуклыми непрерывными функционалами. Учитывая выпуклость и замкнутость множества допустимых управлений и слабую непрерывность функции состояния по управлению, установим разрешимость задачи 1 стандартным способом (см., например, [3], с. 44, предложение 1.2).

Задачи оптимального управления для систем, описываемых регулярными нелинейными уравнениями параболического типа, достаточно хорошо исследованы (см., например, [4–10]). Отличительной особенностью рассматриваемой задачи от уже известных является недифференцируемость функции g, вследствие чего явное дифференцирование функционала I не представляется возможным. Отметим, что в известных методах минимизации негладких функционалов (см., например, [3], [11]) отсутствие гладкости наблюдалось в подынтегральном выражении критерия оптимальности, а желаемый результат достигался за счет перехода от стандартной производной функционала к ее более слабым аналогам (субдифференциал, производная Кларка и т.п.). В данном случае, напротив, функционал является гладким, а недифференцируемый член присутствует в уравнении состояния, вследствие чего воспользоваться теорией негладких функционалов не представляется возможным (негладкость имеет операторный, а не функциональный смысл). Здесь непригодна и теория расширенной дифференцируемости операторов [12], поскольку возможная недифференцируемость функции состояния по управлению обусловлена не топологическими причинами, а негладкостью нелинейного члена уравнения.

2. Аппроксимация задачи. Для решения поставленной задачи осуществляется гладкая аппроксимация уравнения состояния. Рассмотрим последовательность функций $\{g_n\}$ класса G_1, удовлетворяющих условиям

$$g_n \in C^1(\mathbb{R}),\ n = 1, 2, \ldots;\ g_n(y) \to g(y) \text{ в } L_{6/5}(Q) \text{ равномерно по } y,$$

$$|g_{ny}(y)| \le a_1 + b_1|y|^4\ \ \forall y \in \mathbb{R},$$

где $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $g_{ny}(y)$ — производная от $\{g_n\}$. Тогда оператор $g_n(\cdot) : L_6(Q) \to L_{6/5}(Q)$ дифференцируем по Фреше, причем справедливо равенство (см. [1], с.312)

$$g_n'(y)h(x,t) = g_{ny}(y(x,t))\ \ h(x,t)\ \ \forall y \in L_6(Q).$$

Ставится аппроксимационная краевая задача

$$y' - \triangle y_n + g_n(y_n) = v + f, \quad (x,t) \in Q \tag{3}$$

$$y_n(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega; \quad y_n = 0 \quad (x,t) \in \Sigma. \tag{4}$$

Очевидно, для любого управления $v \in V$ задача (3), (4) имеет единственное решение $y_n = y_n(v)$ из пространства Y, причем отображение $y_n(\cdot) : V \to Y$слабо непрерывно.

Лемма 1. *При $n \to \infty$ имеет место сходимость $y_n(v) \to y(v)$ в Y равномерно по $v \in U$.*

Доказательство . Из соотношений (1) и (3) следует равенство

$$(y_n' - y') - \triangle(y_n - y) + g_n(y_n) - g_n(y) + g_n(y) - g(y) = 0.$$

Умножая его на разность $y_n - y$, интегрируя результат по области Q с учетом формулы Грина и краевых условий (2) и (4), будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \big[y_n(x,T) - y(x,T)\big]^2 dx \ + \ \|y_n - y\|_X^2 +$$

$$+ \int\limits_{Q} \big[g_n(y_n) - g_n(y)\big](y_n - y) \ dQ \ + \ \int\limits_{Q} \big[g_n(y) - g(y)\big](y_n - y) \ dQ \ = \ 0.$$

Учитывая определение множества G_1 , получаем

$$\|y_n - y\|_X^2 + \|y_n - y\|_6^6 \le \Big| \int\limits_{Q} \big[g_n(y) - g(y)\big](y_n - y) dQ \Big| \le \|g_n(y) - g(y)\|_{6/5} \|y_n - y\|_6.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|y_n - y\|_6^5 \le \|g_n(y) - g(y)\|_{6/5}.$$

В силу сходимости последовательности $\{g_n\}$, установим, что $y_n(v) \to y(v)$ в $L_6(Q)$ равномерно по $v \in U$. Из предыдущей оценки следует, что указанная сходимость реализуется и в пространстве X. Из соотношения

$$(y_n' - y') - \triangle(y_n - y) + g_n(y_n) - g(y_n) + g(y_n) - g(y) = 0.$$

следует неравенство

$$\|y_n' - y'\|_{X' + L_{6/5}(Q)} \le \|\triangle(y_n - y)\|_{X'} + \|g_n(y_n) - g(y_n)\|_{6/5} + \|g(y_n) - g(y)\|_{6/5} \le$$
$$\le c\|y_n - y\|_X + \sup_z \|g_n(z) - g_n(z)\|_{6/5} + \|g(y_n) - g(y)\|_{6/5},$$

где через c здесь и далее обозначаются различные положительные константы. В силу ограниченности последовательности $\{y_n\}$ в пространстве $X \cap L_6(Q)$, равномерной сходимости последовательности $\{g_n\}$ и непрерывности отображения $g(\cdot) : L_6(Q) \to L_{6/5}(Q)$ следует, что $y_n^{'}(v) \to y^{'}(v)$ в $X^{'} + L_{6/5}(Q)$ равномерно по $v \in U$. Таким образом, утверждения леммы действительно имеют место.

Определим функционал

$$I_n(v) \ = \ \frac{1}{2}\big\|y_n(v) - z\big\|_X^2 \ + \ \frac{\gamma}{2}\big\|v\big\|_2^2.$$

Ставится аппроксимационная задача оптимального управления.

Задача 1^n. *Найти такое управление v_n, которое минимизирует функционал I_n на множестве U.*

По аналогии с теоремой 1 устанавливается

Т е о р е м а 2. *Для любого n задача 1^n разрешима.*

Обозначим через v и v_n решение задач 1 и 1^n, соответственно. Сходимость метода аппроксимации дает следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *При $n \to \infty$ имеет место сходимость $I(v_n) \to I(v)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пользуясь условием $I_n(v_n) \le I_n(v)$, установим соотношение

$$I_n(v_n) - I(v) \le I_n(v) - I(v) \le \sup_{u \in U} \big| I_n(u) - I(u) \big|.$$

Аналогично из неравенства $I(v) \le I(v_n)$ следует

$$I(v) - I_n(v_n) \le I(v_n) - I_n(v_n) \le \sup_{u \in U} \big| I_n(u) - I(u) \big|.$$

В результате получаем оценку

$$\big| I_n(v_n) - I(v) \big| \le \sup_{u \in U} \big| I_n(u) - I(u) \big|.$$

Отсюда в силу леммы 1 следует, что $I_n(v_n) \to I(v)$. Учитывая оптимальность соответствующих управлений, установим сходимость $\min I_n(U) \to \min I(U)$. Справедлива оценка

$$\big| I(v_n) - I(v) \big| \;\le\; \big| I(v_n) - I_n(v_n) \big| \;+\; \big| I_n(v_n) - I(v) \big| \;\le\; \sup_{u \in U} \big| I_n(u) - I(u) \big| \;+\; \big| I_n(v_n) - I(v) \big|.$$

Теперь для получения желаемого результата достаточно воспользоваться леммой 1 и установленной ранее сходимостью минимумов функционалов.

Доказанное утверждение дает способ практического решения задачи 1. Для этого достаточно найти решение v_n задачи 1^n. Тогда при достаточно больших значениях параметра n значение минимизируемого функционала I на допустимом управлении v_n оказывается сколь угодно близким к его минимуму на множестве U. Задача 1^n характеризуется дифференцируемым оператором, вследствие чего ее исследование может осуществляться стандартными методами.

3. Условия оптимальности. Для получения необходимых условий оптимальности установим дифференцируемость решения краевой задачи (3), (4) по управлению в соответствии с методикой, описанной в [12]. Из соотношения (3) $v = u + \sigma h$, где $\sigma > 0$, $h \in V$ следует соотношение

$$y_n'(u + \sigma h) - \triangle y_n(u + \sigma h) + g_n(y_n(u + \sigma h)) = u + \sigma h + f.$$

Вычитая отсюда аналогичное выражение при $v = u$, установим равенство

$$\phi' - \triangle \phi + g_n(y_n(u + \sigma h)) - g_n(y_n(u)) = \sigma h,$$

где $\phi = y(u + \sigma h) - y(u)$. Умножая это соотношение на достаточно гладкую функцию λ и интегрируя результат по области Q с учетом формулы Лагранжа, будем иметь

$$\int\limits_Q \Big[\phi' - \triangle \phi + a(\sigma)^2 \phi\Big] \lambda dQ = \int\limits_Q \sigma h \lambda dQ, \tag{5}$$

где

$$a(\sigma)^2 = g_{ny}\big[y_n(u) + \delta[y_n(u + \sigma h) - y_n(u)]\big], \quad \delta \in [0, 1].$$

Отметим, что неотрицательность производной от дифференцируемой функции g_n следует из ее монотонности.

Рассмотрим краевую задачу

$$p'_\mu(\sigma) + \triangle p_\mu(\sigma) - a(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) = \mu, \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$p_\mu(\sigma)\Big|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega; \quad p_\mu(\sigma) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma. \tag{7}$$

Отметим, что функция $p_\mu(\sigma)$ зависит также от h, u и n , однако для последующих исследований эта зависимость принципиальной роли не играет. Определим функциональные пространства

$$P = \Big\{ p \ \mid \ p \in X,\, p' \in X' + L_{6/5}(Q) \Big\}, \quad P(\sigma) = \Big\{ p \in P \mid \ a(\sigma)p \in L_2(Q) \Big\}$$

и множество $M = \Big\{ \mu \in X' \,\Big|\, \|\mu\|_{X'} = 1 \Big\}$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любого номера n и значений $\sigma > 0$, $h \in V$, $u \in V$, $\mu \in X'$ задача* (6), (7) *имеет единственное решение $p_\mu(\sigma) \in P(\sigma)$, причем при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $p_\mu(\sigma) \ \to \ p_\mu(0)$ слабо в P равномерно по $\mu \in M$.*

Доказательство. Умножая равенство (6) на функцию $p_\mu(\sigma)$ и интегрируя результат формально по области Q , будем иметь неравенство

$$\int\limits_Q \Big[p_\mu(\sigma)\big|_{t=0} \Big]^2 d\Omega \ + \ \Big\| p_\mu(\sigma) \Big\|_X^2 \ + \ \int\limits_Q \Big[a(\sigma) p_\mu(\sigma) \Big]^2 dQ \ \le \ \Big\| p_\mu(\sigma) \Big\|_X \Big\| \mu \Big\|_{X'}.$$

Из монотонности и дифференцируемости функции g_n следует неотрицательность ее производной. В результате получаем оценки

$$\Big\| p_\mu(\sigma) \Big\|_X \le \Big\| \mu \Big\|_{X'}, \ \ \Big\| a(\sigma) p_\mu(\sigma) \Big\|_2 \le \Big\| \mu \Big\|_{X'}.$$

Из определения функции g_n следует ограниченность величины $a(\sigma)$ в пространстве $L_3(Q)$. Учитывая непрерывность оператора Лапласа, как отображения из пространства $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, а также неравенство Гельдера, из соотношения (6) выводим оценку

$$\begin{aligned} \Big\| p'_\mu(\sigma) \Big\|_{X' + L_{6/5}(Q)} \ &\le \ \Big\| \triangle p_\mu(\sigma) \Big\|_{X'} \ + \ \Big\| a(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \Big\|_{6/5} \ + \ \Big\| \mu \Big\|_{X'} \ \le \\ & c \ \Big\| p_\mu(\sigma) \Big\|_X \ + \ \Big\| a(\sigma) \Big\|_3 \Big\| a(\sigma) p_\mu(\sigma) \Big\|_2 \ + \ \Big\| \mu \Big\|_{X'}, \end{aligned}$$

где константа c зависит исключительно от рассматриваемой области. Отсюда в силу предшествующих неравенств следует оценка производной по времени от функции $p_\mu(\sigma)$ в пространстве $X' + L_{6/5}(Q)$. Таким образом, краевая задача (6), (7) для линейного уравнения параболического типа допускает априорную оценку решения в пространстве $P(\sigma)$. Пользуясь стандартными методами (например, методом Фаэдо – Галеркина, см. [13], с. 110), установим однозначную разрешимость этой задачи в указанном пространстве. Перейдем к пределу при $\sigma \to 0$. Отсюда следует, что $(u + \sigma h) \to u$ в V, а значит (в силу непрерывности решения задачи (1.1), (1.2) по управлению), $y(u + \sigma h) \to y(u)$ в Y, а значит, и п.в. на Q. В результате получаем, что $a(\sigma)^2 \to g_{ky}(y(u))$ п.в. на Q. В соответствии с полученными выше оценками семейство $\{p_\mu(\sigma)\}$ ограничено в пространстве P равномерно по $\mu \in M$. После выделения подпоследовательности (с сохранением прежнего обозначения), установим сходимость $p_\mu(\sigma) \to p_\mu$ слабо в P равномерно по $\mu \in M$. В соответствии с теоремой 5.1 (см., [14], с. 70) пространство P вложено компактно в $L_{6/5}(Q)$. После выделения подпоследовательностей установим сходимость $p_\mu(\sigma) \to p_\mu$ сильно п.в. на Q равномерно по $\mu \in M$. Отсюда следует, что $a(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \to g_{ky}(y(u)) p_\mu$ п.в. на Q равномерно по $\mu \in M$. Пользуясь леммой 1.3 (см., [14], с. 25) с учетом равномерной ограниченности семейства $\{a(\sigma)^2 p_\mu(\sigma)\}$ в пространстве $L_{6/5}(Q)$, заключаем, что $a(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \to g_{ky}(y(u)) p_\mu$ слабо в $L_{6/5}(Q)$. Умножая равенство (6) на произвольную достаточно гладкую функцию, интегрируя результат по области Q и переходя к пределу в полученном выражении при $\sigma \to 0$, заключаем, что $p_\mu = p_\mu(0)$. Лемма доказана.

Теперь представляется возможным установить дифференцируемость решения краевой задачи (6), (7) по управлению.

Лемма 3. *При сделанных предположениях отображение $y_n(\cdot) : V \to X$ в любой точке $u \in U$ имеем производную Гато $Dy_n(u)$, определяемую равенством*

$$-\int\limits_Q \mu Dy_n(u)h \; dQ = \int\limits_Q p_\mu(0)h \; dQ \;\; \forall \mu \in X', \;\; h \in V. \tag{8}$$

Доказательство. Очевидно, соотношение (8) определяет линейный непрерывный оператор $Dy_n(u)$, действующий из пространства V в X. Покажем, что он является производной Гато оператора $y_n(\cdot) : V \to X$ в точке u. Вернемся к рассмотрению равенства (5). Оно имеет смысл для любой функции λ из класса $P(\sigma)$. Определим в нем $\lambda = p_\mu(\sigma)$, в результате получим

$$-\int\limits_Q \mu\Big[y_n(u+\sigma h) - y_n(u)\Big] \; dQ \;\; = \int\limits_Q \sigma p_\mu(\sigma)h \; dQ \;\; \forall \mu \in X', \;\; h \in V.$$

Отсюда и из условия (8) получаем

$$\Big\|\sigma^{-1}\Big[y_n(u+\sigma h) - y_n(u)\Big] - Dy_n(u)h\Big\|_X = \tag{9}$$
$$= \sup_{\mu\in M}\Big|\int\limits_Q \mu\Big\{\sigma^{-1}\Big[y_n(u+\sigma h) - y_n(u)\Big] - Dy_n(u)h\Big\}dQ\Big| =$$
$$= \Big|\sup_{\mu\in M}\int\limits_Q \Big[p_\mu(\sigma) - p_\mu(0)\Big]hdQ\Big| \;\; \forall h \in V.$$

Переходя здесь к пределу при $\sigma \to 0$ с учетом леммы 3, установим, что оператор $Dy_k(u)$ действительно является производной Гато оператора $y_n(\cdot) : V \to X$ в точке u. Лемма доказана.

Теперь несложно установить необходимые условия оптимальности.

Теорема 4. *При сделанных предположениях решение задачи 1^n определяется по формуле*

$$v_n = \Pi(p_n/\gamma), \tag{10}$$

где Π есть проектор на множество U, а p_k – решение краевой задачи

$$p_n' + \triangle p_n - g_{ny}(y_n(v_n))p_n = \triangle z - \triangle y_n(v_n), \;\; (x,t) \in Q, \tag{11}$$

$$p_n(x,T) = 0, \;\; x \in \Omega; \;\; p_n = 0, \;\; (x,t) \in \Sigma. \tag{12}$$

Доказательство. Точка минимума v_n дифференцируемого функционала I^n на выпуклом подмножестве U удовлетворяет вариационному неравенству (см. [13], с. 18)

$$I_n'(v_n)(u - v_n) \geq 0 \;\; \forall u \in U. \tag{13}$$

Здесь производная функционала в силу формулы Грина характеризуется равенством

$$I_n'(v_n) = \int\limits_Q \Big[\triangle z - \triangle y(v_n)\Big]Dy(v_n)h \; dQ + \gamma\int\limits_Q v_n h \; dQ.$$

Пользуясь соотношением (8), найдем

$$I_n'(v_n)h = \int\limits_Q (\gamma v_n - p_n)h \ dQ.$$

В результате условие (13) принимает следующий вид

$$\int\limits_Q (\gamma v_n - p_n)(u - v_n) \ dQ \geq 0 \ \ \forall u \in U.$$

Отсюда в силу определения проектора на выпуклое подмножество гильбертова пространства следует равенство (10). Теорема доказана.

Согласно теореме 4 для нахождения решения задачи требуется совместно решить систему, включающую в себя уравнения состояния (3), (4) при $v = v_n$, сопряженную задачу (11), (12) и формулу (13). Для ее практической реализации можно воспользоваться, например, методом последовательных приближений [15]. В соответствии с доказанным теоремой 3 при достаточно больших номерах n значение функционала I на этом управлении сколь угодно близко к его минимуму на множестве U. Таким образом, управление оказывается приближенным решением задачи 1.

Во второй части статьи будет рассмотрен сингулярный случай, когда рассматриваемое уравнение не имеет априорных оценок. В этих условиях данная краевая задача может не иметь глобального решения на произвольном управлении. Вследствие этого мы не имеем возможности воспользоваться в полной степени описанной выше методикой, в частности, обосновать дифференцируемость функции состояния системы по управлению для аппроксимирующей задачи. В этой ситуации предлагается использовать гладкую аппроксимацию задачи совместно с модифицированным методом штрафа. Это позволит установить в некотором смысле приближенное решение исходной задачи.

Замечание 1. *Полученные результаты остаются в силе для любого числа измерений пространственной области при корректировке показателей в нелинейном члене и критерии оптимальности в соответствии с теоремами вложения. Если показатель роста нелинейности в определении множества G_1 не связан с показателем интегрируемости, задаваемым теоремой Соболева, то для аппроксимированного уравнения уже не удастся установить дифференцируемость решения по управлению* (*лемма* 3). *Тем не менее, сохраняется возможность обоснования его расширенной дифференцируемости* [12], *что оказывается достаточным для получения условий оптимальности типа теоремы* 4.

Замечание 2. *Критерием оптимальности может быть интегральный функционал общего вида со стандартными ограничениями на подынтегральное выражение* (*функция Каратеодори с ограничениями на степень роста нелинейностей, выпуклость и дифференцируемость*). *Если сам функционал оказывается не гладким, то описанную выше методику можно применять совместно с известными методами негладкой оптимизации* (*см.* [3], [11]). *Тогда условие оптимальности записывается не в терминах обычных функциональных производных, а с использованием их обобщений* (*субдифференциал, производная Кларка и т.д.*).

Замечание 3. *Теорема* 4 *дает лишь необходимое условие экстремума для аппроксимирующей задачи, вследствие чего нет уверенности в том, что конкретное решение системы условий оптимальности действительно минимизирует соответствующий функционал. Серьезные трудности возникнут и при практической реализации условий оптимальности. Однако те же эффекты характерны для любых нелинейных экстремальных задач.*

Замечание 4. *В теории обобщенных функций наряду со стандартным подходом* (*см., например,* [16]) *используется также секвенциальный метод* [17], *при котором распределение* *аппроксимируется гладкими функциями. Описанная выше методика в определенном смысле основана на тех же идеях. В этой связи есть основания надеяться на возможность распространения понятия секвенциальной производной на операторы. Если бы это удалось, то полученные выше результаты можно было бы установить стандартным вариационным методом с заменой обычных операторных производных на секвенциальные.*

Замечание 5. *Уравнение состояния не обязано иметь параболический тип. Полученные результаты можно распространить на достаточно широкий класс задач оптимального управления, связанных с нелинейными уравнениями с негладкими операторами.*

Цитированная литература

1. **Под ред. Крейна С. Г.** Функциональный анализ. М., 1972. 544 с.
2. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978. 336 с.
3. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979. 400 с.
4. **Wolfersdorf L.** // Z. Angew. Math. Mech. 1976. V. 56. P. 531 – 538.
5. **Ahmed K. L., Teo K. L.** // J. Optim. Theory Appl. 1978. V. 28. P. 57 – 81.
6. **Матвеев А. С., Якубович В. А.** // Сиб. матем. журн. 1978. Т. XVIII, № 5. С. 1109 – 1140.
7. **Barbu V.** // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (College de France Sem., Paris, 1979/80), Res. Notes in Math. V. 60, Pitman, London, 1982. P. 19 – 47.
8. **Friedman A.** // SIAM J. Optim. 1984. V. 22. P. 805 – 816.
9. **Серовайский С. Я.** // Сиб. матем. журн. 1989. Т. XXX, № 1. С. 212 – 215.
10. **Серовайский С. Я.** // Матем. сборник. 1994. Т. 185, № 4. С. 151 – 160.
11. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988. 280 с.
12. **Серовайский С.Я.** // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1055 – 1059.
13. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972. 414 с.
14. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 588 с.
15. **Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.** // Математический анализ. Итоги науки и техники. Вып. 14, 1977. С. 101 – 166.
16. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1987.
17. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М., 1976.

Поступила в редакцию 14.03.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 84 — 93*

УДК 539

О ПОТОКЕ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ ВОЛН ЛЯВА НА СТАТИСТИЧЕСКИ ШЕРОХОВАТЫХ ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА

Е. И. Уразаков

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480068, Алматы, аль-Фараби пр., 71

Вычислен поток плотности энергии волн Лява, распространяющихся и рассеивающихся по статистически неровной границе раздела упругого слоя с полупространством. Определены условия, позволяющие провести "лестничное"приближение в рассматриваемой задаче рассеяния. С физической точки зрения эти условия наглядны – для достаточно гладкой поверхности затухания энергетических характеристик волн Лява они определяются транспортным временем релаксации, учитывающим малоэффективность процессов рассеяния на небольшой угол.

При изучении процессов распространения и дифракции поверхностных волн на реальных границах существуют различные подходы. Одни авторы рассматривают границу, как некоторый приповерхностный слой с флуктуирующими физико-механическими свойствами, статистические свойства которого на основе определенного закона распределения затем используются для описания такой поверхности [1]. В настоящей работе рассматривается упругий слой на полупространстве с границей раздела, форма которой описывается случайной функцией координат. Отклонение формы границы раздела от идеально ровной задается гауссовским законом распределения с нулевым средним значением. Для описания таких поверхностей используются два основополагающих параметра: d — средняя длина плоских участков неровной поверхности и a — средний модуль ее амплитудного отклонения от координатной плоскости. Предполагается, что a много меньше длины распространяющейся волны. Последнее позволяет решать задачу на основе теории возмущений. Подобные задачи рассматривались также и другими авторами [3], [4]. В работах Л. М. Бреховских [3], а также А.Д. Лапина [4] другими методами рассчитывалось ослабление волн Рэлея, связанных с трансформацией последних в объемные моды полупространства. Однако, как было показано, в ряде случаев ослабление поверхностных волн (их амплитуд) не всегда определяется отмеченным выше способом. Иногда это связано с генерацией вторичных поверхностных волн. Особенностью этих ослаблений является то, что с увеличением средней длины плоских участков d (выравниванием поверхности), затухание амплитуд волн, вообще говоря, не стремится к нулю. В связи с этим нами изучается физически наблюдаемая величина — поток плотности энергии, усредненный по рассматриваемому типу поверхностей. Показано, что при больших d затухание потока плотности энергии волн Лява определяется транспортным временем τ_{tr}, убывающим с ростом d.

Keywords: *statically rough boundary, "scalene"approaching, a transport relaxation time*
2000 Mathematics Subject Classification: 74J20

1. Пусть полупространство $x \geq 0$ граничит со слоем средней толщины h, $0 < x \leq h$. В некоторой точке на границе $x = 0$ действует сила — $P_\alpha(\vec{s}, t)$, где $\vec{s} \in (y, z)$ — вектор координатной плоскости. Саму границу раздела между полупространством и слоем считаем неровной, описываемой случайной функцией координат $\vec{s}$

$$x = \xi(\vec{s}). \tag{1}$$

Здесь будет рассмотрено ослабление потока плотности энергии волн Лява вследствие его рассеяния на неровностях границы раздела на больших расстояниях и временах от места и момента возбуждения.

2. Поток плотности энергии q в упругой волне определим из уравнения неразрывности

$$\frac{dE(x, \vec{s}, t)}{dt} = -\operatorname{div} q(x, \vec{s}, t), \tag{2}$$

где плотность объемной энергии деформации E определяется соотношением

$$E = \rho c_t^2 \varepsilon_{ji}^2 + \frac{\rho}{2}\left(c_l^2 - 2c_t^2\right)\varepsilon_{ji}^2 + \frac{\rho \dot{U}_i^2}{2}\ . \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность среды, U_{ij} — тензор деформации, U_i — вектор смещения, c_l, c_t — скорости продольных и поперечных волн полупространства, соответственно. Используя уравнения движения

$$c_t^2 \Delta U_j + \left(c_l^2 - c_t^2\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} U_j = \ddot{U}_j\ , \tag{4}$$

получим для потока плотности энергии упругих волн $q_j\left(x, \vec{s}, t\right)$ следующее выражение

$$q_j(x, \vec{s}, t) = -\left[2\rho c_t^2 \dot{U}_i \varepsilon_{ij} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)\dot{U}_j \varepsilon_{kk}\right]. \tag{5}$$

3. Поверхностная волна Лява удовлетворяет следующим граничным условиям:

a) на свободной поверхности слоя

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\tilde{n}_\beta = 0,\ x = -h \tag{6}$$

(знак "тильда"относится ко всем величинам слоя);

b) на внутренней границе раздела $x = \xi\left(\vec{s}\right)$

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} n_\beta - \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\tilde{n}_\beta = p_\alpha, \\ &U_\alpha\left(x, \vec{s}\right) - \tilde{U}_\alpha\left(x, \vec{s}\right) = f_\alpha,\ x = \xi\left(\vec{s}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\vec{n}\left(\frac{1, -\frac{\partial\xi}{\partial y}, -\frac{\partial\xi}{\partial z}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}\right)$ — вектор нормали к границе раздела сред, а p_α и f_α — некоторые константы, отличные от нуля в малой области на границе, $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжения. Считая $\xi\left(\vec{s}\right)$ малой величиной по сравнению с характерной длиной λ, на расстоянии которой меняется $U_\alpha\left(x, \vec{s}\right)$ в направлении $x > 0$, амплитуда волны Лява ослабевает вглубь полупространства на расстояние порядка длины волны λ. Разложим граничные условия (7) в ряд Тейлора по степеням $\xi(\vec{s})/\lambda$ на координатной плоскости $x = 0$. Используя закон Гука — связь между тензором напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ и смещением — получим с точностью до членов второго порядка

$$\rho\left(\Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}\right)_{\alpha\beta} U_\beta\left(x, \vec{s}\right) - \tilde{\rho}\left(\tilde{\Pi}^{(0)} + \tilde{\Pi}^{(1)} + \tilde{\Pi}^{(2)}\right)_{\alpha\beta} \tilde{U}_\beta\left(x, \vec{s}\right) = p_\alpha,$$

$$U_\alpha\left(x, \vec{s}\right) + \xi\left(\vec{s}\right)\frac{\partial U_\alpha\left(x, \vec{s}\right)}{\partial x} + \frac{\xi^2\left(\vec{s}\right)}{2!}\frac{\partial^2 U_\alpha\left(x, \vec{s}\right)}{\partial x^2} - \tag{8}$$

$$-\left(\tilde{U}_\alpha\left(x,\vec{s}\right)+\xi\left(\vec{s}\right)\frac{\partial\tilde{U}_\alpha\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x}+\frac{\xi^2\left(\vec{s}\right)}{2!}\frac{\partial^2\tilde{U}_\alpha\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x^2}\right)=f_\alpha,$$

где $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}=c_t^2\delta_{\alpha\beta}\partial_\alpha+c_t^2\delta_{\beta x}\partial_\alpha+\left(c_l^2-2\right)\delta_{\alpha x}\partial_\beta$,

$\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}=-c_t^2\delta_{\alpha\beta}\partial_l\xi\partial_l-c_t^2\partial_\beta\xi\partial_\alpha-\left(c_l^2-2\right)\partial_\alpha\xi\partial_\beta+c_t^2\xi\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}\partial_x$,

$\Pi^{(2)}_{\alpha\beta}=\xi\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}\partial_x-\frac{1}{2}\xi^2\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}\partial_{xx}$. Здесь обозначено $\partial_\alpha\equiv\partial/\left(\partial r_\alpha\right)$.

Выражения для $\tilde{\Pi}^{(0)},\tilde{\Pi}^{(1)},\tilde{\Pi}^{(2)}$ получаются аналогично заменой $c_l\to\tilde{c}_l,\ c_t\to\tilde{c}_t$.

Разложим величины, зависящие от координаты $\vec{s}$, в двойной интеграл Фурье

$$U_\alpha(x,\vec{s})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{i(\vec{k}\,\vec{s})}\,U_\alpha(x,\vec{k})dk_y dk_z,$$

$$\xi\left(\vec{s}\right)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{i(\vec{k}\,\vec{s})}\,\xi(\vec{k})dk_y dk_z.$$

Компоненты волновых векторов k_y, k_z соответствуют координатам y, z в пространстве оригинала.

Уравнения (4) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по переменной нормали

$$Q_{\alpha\beta}\left(k\right)U_\beta\left(k,x\right)=0, \tag{9}$$

где $Q_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\left(\omega^2-c_t^2k^2+c_t^2\partial^2_{xx}\right)-\left(c_l^2-c_t^2\right)k_\alpha k_\beta$. Совокупность граничных условий (6) и (7) может быть сведена к интегральным уравнениям типа

$$\tilde{\Pi}^{(0)}_{\alpha\beta}(\vec{k},x)\tilde{U}_\beta(\vec{k},x)=0,\quad x=-h.$$

$$\rho\left(\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}(\vec{k},0)U_\beta(\vec{k},0)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\left[\Pi^{(1)}(\vec{k},\vec{q})+\Pi^{(2)}(\vec{k},\vec{q})\right]_{\alpha\beta}d^2\vec{q}\right)U_\beta(\vec{q},0,\omega)-$$

$$-\tilde{\rho}\left(\tilde{\Pi}^{(0)}_{\alpha\beta}(\vec{k},0)\tilde{U}_\beta(\vec{k},0)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\left[\tilde{\Pi}^{(1)}(\vec{k},\vec{q})+\tilde{\Pi}^{(2)}(\vec{k},\vec{q})\right]_{\alpha\beta}d^2\vec{q}\right)\tilde{U}_\beta(\vec{q},0,\omega)=P_\alpha(\vec{k},\omega), \tag{10}$$

$$U_\alpha(\vec{k},0)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\xi(\vec{k}-\vec{q})\frac{\partial U_\alpha(\vec{q},0)}{\partial x}d^2\vec{q}+\frac{1}{(2\pi)^4}\int\xi(\vec{k}-\vec{q}-\vec{q}')\xi(\vec{q}')\frac{\partial^2U_\alpha(\vec{k},0)}{\partial x^2}d^2\vec{q}d^2\vec{q}'-$$

$$-\left(\tilde{U}_\alpha(\vec{k},0)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\xi(\vec{k}-\vec{q})\frac{\partial\tilde{U}_\alpha(\vec{q},0)}{\partial x}d^2\vec{q}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2\pi)^4}\int\xi(\vec{k}-\vec{q}-\vec{q}')\xi(\vec{q}')\frac{\partial^2\tilde{U}_\alpha(\vec{k},0)}{\partial x^2}d^2\vec{q}d^2\vec{q}'\right)=F_\alpha(\vec{k},\omega).$$

Матрицы Q и Π остаются дифференциальными операторами по x. Аргумент нуль у смещения означает, что после дифференцирования соответствующая величина взята при $x=0$; $P_\alpha(\vec{k},\omega)$, $F_\alpha(\vec{k},\omega)$ — Фурье компоненты p_α и f_α из (6) и (7).

4. Задача заключается в нахождении решения уравнения (9), имеющего место как для слоя, так и для полупространства, удовлетворяющего граничным условиям (10) и стремящегося к нулю при $x\to\infty$. Это решение зависит как от формы поверхности $\xi\left(\vec{s}\right)$, определяющей $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\tilde{\Pi}^{(1)}$, $\tilde{\Pi}^{(2)}$, так и от разложения самого смещения в последнем уравнении (10). По этой причине найденное решение следует усреднить по некоторому распределению случайных функций $\xi(\vec{s})$. Явного вида распределения не потребуется, поскольку результат, полученный ниже, справедлив лишь во втором порядке по ξ и выражается через бинарную корреляционную функцию вида

$$\left\langle\xi(\vec{s})\xi(\vec{s'})\right\rangle=\xi_2(\vec{s}-\vec{s'}).$$

Эта функция является характеристикой поверхности и зависит от разности $\vec{s} - \vec{s'}$, так как поверхность предполагается однородной в среднем. При оценках мы будем считать известными значения $\xi_2(0) = a^2$ и радиус области d, где ξ_2 заметно отлична от нуля. Три линейно независимых решения уравнения (9) для полупространства имеют вид

$$U_{\beta\gamma}(\vec{k}, x) = U_{\beta\gamma}(\vec{k}, 0) \exp\left(ik_x^{(\gamma)} x\right)\ , k_x^{(\gamma)} = \sqrt{\omega^2/c_\gamma^2 - k^2}. \tag{11}$$

Индекс γ, нумерующий решения, может принимать значения x, y, z так, что $c_y = c_z = c_t$; $c_x = c_l$ (индекс t — отвечает поперечным поляризациям, l — продольной поляризации объемных волн). В формуле (11) для $k_x^{(\gamma)}$ берется знак корня, для которого $\mathrm{Im} k_x^{(\gamma)} > 0$, благодаря чему $U_{\beta\gamma}^{(\omega)}(\vec{k}, x) \to 0$ при $x \to \infty$. Чтобы обеспечить убывание в случае $\omega^2/c_l^2 - k^2 > 0$, считаем, что у частоты ω имеется малая добавка с положительной мнимой частью. Выписывая матрицу $Q_{\alpha\beta}$, видим, что в качестве величины $U_{\beta\gamma}^{(\omega)}(\vec{k}, 0)$ можно взять

$$U_{\beta\gamma}(\vec{k}, 0) = \begin{pmatrix} k_x^{(x)} & ik_y & ik_z \\ -ik_y & -k_x^{(y)} & 0 \\ -ik_z & 0 & -k_x^{(z)} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющемуся индексу, нумерующему решения $k_x^{(\gamma)}$, нет суммирования, а у компонент k_y, k_z он должен быть опущен.

Общее решение уравнения (9) для полупространства можно записать в виде

$$U_\alpha\left(k, x, \omega\right) = \sum_\gamma U_{\alpha\gamma}\left(k, x, \omega\right) C_\gamma\left(k, \omega\right). \tag{13}$$

Для слоя имеются два решения из-за отсутствия ограничения на выбор знака корня $k_x^{(\gamma)}$ в (11)

$$\tilde{U}_{\alpha\gamma}(k, 0) = \begin{pmatrix} \tilde{k}_x^{(x)} & ik_y & ik_z \\ -ik_y & -\tilde{k}_x^{(y)} & 0 \\ -ik_z & 0 & -\tilde{k}_x^{(z)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_{\alpha\gamma}(k, 0) = \begin{pmatrix} -\tilde{k}_x^{(x)} & ik_y & ik_z \\ -ik_y & \tilde{k}_x^{(y)} & 0 \\ -ik_z & 0 & \tilde{k}_x^{(z)} \end{pmatrix}.$$

Общее решение для слоя имеет вид, аналогичный (13):

$$\tilde{U}_\alpha(x, \vec{k}, \omega) = \sum_\gamma \tilde{U}_{\alpha\gamma}(x, \vec{k}, \omega) \tilde{C}_\gamma(\vec{k}, \omega) + \sum_\gamma \tilde{V}_{\alpha\gamma}(x, \vec{k}, \omega) \tilde{C}'_\gamma(\vec{k}, \omega). \tag{14}$$

Векторы $C(\vec{k})$, $\tilde{C}(\vec{k})$, $\tilde{C}'(\vec{k})$ определяются из граничных условий (10), которые после подстановки в них (13) и (14) принимают вид

$$H_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}, h, \omega) L_\beta(\vec{k}, \omega) + \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left[V_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega) + V_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{k}, \vec{q}, \omega)\right] L_\beta(\vec{q}, \omega) = P_\alpha(\vec{k}, \omega). \tag{15}$$

Здесь $L_\beta(\vec{k}, \omega)$ — 9-ти компонентный вектор, составленный из $C(\vec{k}, \omega)$, $\tilde{C}(\vec{k}, \omega)$, $\tilde{C}'(\vec{k}, \omega)$. Три первые компоненты L определяются $C\left(\vec{k}, \omega\right)$, а остальные L — $\tilde{C}\left(\vec{k}, \omega\right)$ и $\tilde{C}'\left(\vec{k}, \omega\right)$. Выражения $H_{\alpha\beta}^{(0)}$, $V_{\alpha\beta}^{(1)}$, $V_{\alpha\beta}^{(2)}$ являются матрицами 9×9, элементы которых находятся из следующих соотношений

$$H_{\alpha\gamma}^{(0)} = i\left[\tilde{k}_x^{(\gamma)} \tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k}, h, \omega\right) + k_\alpha \tilde{U}_{x\gamma}\left(\vec{k}, h, \omega\right) + \delta_{\alpha x}\left(\tilde{c}^2 - 2\right) k_\beta \tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{k}, h, \omega\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{k}_x^{(\gamma)} \tilde{V}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k}, h, \omega\right) + k_\alpha \tilde{V}_{x\gamma}\left(\vec{k}, h, \omega\right) + \delta_{\alpha x}\left(\tilde{c}^2 - 2\right) k_\beta \tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{k}, h, \omega\right)\right],$$

$$\alpha = 1,2,3; \quad \gamma = 1,2,\ldots,9.$$

$$H^{(0)}_{\alpha\gamma} = i\left[\rho c_t^2\left(k_x^{(\gamma)}U_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right) + k_\alpha U_{x\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right) + \delta_{\alpha x}\left(c^2-2\right)k_\beta U_{\beta\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right)\right) -\right.$$

$$-\tilde{\rho}\tilde{c}_t^2\left(\vec{k}_x^{(\gamma)}\tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right) + k_\alpha \tilde{U}_{x\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right) + \delta_{\alpha x}\left(\tilde{c}^2-2\right)k_\beta \tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right)\right) -$$

$$\left.-\tilde{k}_x^{(\gamma)}\tilde{V}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},h,\omega\right) + k_\alpha \tilde{V}_{x\gamma}\left(\vec{k},h,\omega\right) + \delta_{\alpha x}\left(\tilde{c}^2-2\right)k_\beta \tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{k},h,\omega\right)\right]$$

$$\alpha = 4,5,6; \quad \gamma = 1,2,\ldots,9.$$

$$H^{(0)}_{\alpha\gamma} = U_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right) - \left(\tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right) + \tilde{V}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},0,\omega\right)\right)$$

$$\alpha = 7,8,9; \quad \gamma = 1,2,\ldots,9.$$

Аналогичные выражения можно записать и для интегральных ядер $V^{(1)}(\vec{k},\vec{q})$, $V^{(2)}(\vec{k},\vec{q})$ из (15). Особенностью этих ядер является то, что как для $V^{(1)}$, так и для $V^{(2)}$ при $\alpha = 1,2,3$ все матричные элементы для любых γ равны нулю; при $\alpha = 4,5,6$ и $\gamma = 1,2,\ldots,9$ имеем:

$$V^{(1)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right) = \xi\left(\vec{k}-\vec{q}\right)\left\{\rho c_t^2\left[\delta_{\alpha\beta}\ \left(\vec{k}-\vec{q}\right)\vec{q}U_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\vec{k}-\vec{q}\right)_\beta q_\alpha U_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) +\right.\right.$$

$$+\left(c^2-2\right)\left(\vec{k}-\vec{q}\right)_\alpha q_\beta U_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) - q_x^{(\gamma)^2}U_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) +$$

$$+q_\alpha q_x^{(\gamma)}U_{x\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(c^2-2\right)\delta_{\alpha x}q_x^{(\gamma)}q_\beta U_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) -$$

$$-\tilde{\rho}\tilde{c}_t^2\left[\delta_{\alpha\beta}\left(\vec{k}-\vec{q}\right)\vec{q}\tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\vec{k}-\vec{q}\right)_\beta q_\alpha \tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\tilde{c}^2-2\right)\left(\vec{k}-\vec{q}\right)_\alpha q_\beta \tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) -\right.$$

$$-\tilde{q}_x^{(\gamma)^2}\tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + q_\alpha \tilde{q}_x^{(\gamma)}\tilde{U}_{x\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\tilde{c}^2-2\right)\delta_{\alpha x}\tilde{q}_x^{(\gamma)}q_\beta \tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) +$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\left(\vec{k}-\vec{q}\right)\vec{q}\tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\vec{k}-\vec{q}\right)_\beta q_\alpha \tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\tilde{c}^2-2\right)\left(\vec{k}-\vec{q}\right)_\alpha q_\beta \tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) -$$

$$\left.\left.-\tilde{q}_x^{(\gamma)}\tilde{V}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) - q_\alpha \tilde{q}_x^{(\gamma)}\tilde{V}_{x\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) - \left(c^2-2\right)\delta_{\alpha x}\tilde{q}_x^{(\gamma)}q_\beta \tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)\right]\right\}.$$

Для $V^{(2)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right)$ в случае $\alpha = 4,5,6$ и $\gamma = 1,2,\ldots,9$ имеем

$$V^{(2)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right) = i\int\frac{d^2\vec{q}'}{(2\pi)^2}\xi\left(\vec{k}-\vec{q}-\vec{q}'\right)\xi\left(\vec{q}'\right)\left\{\rho c_t^2\left[\left(\vec{q}\vec{q}' - q_x^{(\gamma)^2}\big/2\right)U_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)\ +\right.\right.$$

$$\left.+\left(\vec{q}'_{\beta x} - \frac{\delta_{\beta x}q_x^{(\gamma)}}{2}\right)q_\alpha^{(\gamma)}U_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(c^2-2\right)\left(q'_{\alpha\gamma} - \frac{\delta_{\alpha x}q_x^{(\gamma)}}{2}\right)q_\beta^{(\gamma)}U_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)\right] -$$

$$-\tilde{\rho}\tilde{c}_t^2\left[\left(\vec{q}\vec{q}' - \tilde{q}_x^{(\gamma)^2}\big/2\right)\tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(q'_{\beta x} - \frac{\delta_{\alpha x}\tilde{q}_x^{(\gamma)}}{2}\right)\tilde{q}_\alpha^{(\gamma)}\tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) +\right.$$

$$+\left(\tilde{c}^2-2\right)\left(q'_{\alpha\gamma} - \frac{\delta_{\alpha x}\tilde{q}_x^{(\gamma)}}{2}\right)\tilde{q}_\beta^{(\gamma)}\tilde{U}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \left(\vec{q}\vec{q}' - \tilde{q}_x^{(\gamma)^2}\big/2\right)\tilde{V}_{\alpha\beta}\left(\vec{q},0,\omega\right) +$$

$$\left.\left.+\left(q'_{\beta x} + \frac{\delta_{\alpha x}\tilde{q}_x^{(\gamma)}}{2}\right)\tilde{q}_\alpha^{(\gamma)}\tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) +\ \left(\tilde{c}^2-2\right)\left(q'_{\alpha\gamma} - \frac{\delta_{\alpha x}\tilde{q}_x^{(\gamma)}}{2}\right)\tilde{q}_\beta^{(\gamma)}\tilde{V}_{\beta\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)\right]\right\}.$$

Для $V^{(1)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right)$ в случае $\alpha = 7,8,9$ и $\gamma = 1,2,\ldots,9$ имеем

$$V^{(1)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right) = i\int\frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\xi\left(\vec{k}-\vec{q}\right)\left(q_x^{(\gamma)}U_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) - \tilde{q}_x^{(\gamma)}\tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right) + \tilde{q}_x^{(\gamma)}\tilde{V}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)\right).$$

Для $V^{(2)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right)$ в этом случае имеем

$$V^{(2)}_{\alpha\gamma}\left(\vec{k},\vec{q}\right)=\int\frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\xi\left(\vec{k}-\vec{q}-\vec{q}'\right)\xi\left(\vec{q}'\right)\left(q_x^{(\gamma)^2}U_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)+\tilde{q}_x^{(\gamma)^2}\tilde{U}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)+\right.$$

$$\left.+\tilde{q}_x^{(\gamma)^2}\tilde{V}_{\alpha\gamma}\left(\vec{q},0,\omega\right)\right).$$

Здесь $c^2=c_l^2/c_t^2$, $\tilde{c}^2=\tilde{c}_l^2/\tilde{c}_t^2$.

Фурье компонента потока плотности энергии волн Лява имеет следующий вид

$$\begin{gathered}q_{s'}(x,k,\omega)=-\frac{\rho c_t^2}{(2\pi)^2}\int\omega'd\omega'd^2k'\left\{(\vec{k}-\vec{k}')_s\left[U_k^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')\,U_k^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\delta_{ss'}+\right.\right.\\ \left.+U_s^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')U_{s'}^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')+(c^2-2)U_{s'}^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')U_s^{(\sigma)}\,(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\right]+\\ \left.+k_x^{(\gamma)}(\vec{k}-\vec{k}')U_x^{\gamma}(\vec{k}',\omega')U_{s'}^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')+(c^2-2)k_x^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}')U_{s'}^{(\gamma)}U_x^{\sigma}\,(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\right\}\\ L_\gamma(\vec{k}',\omega')L_\sigma(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\exp\left\{i(k_x^{(\gamma)}(\vec{k}')+k_x^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}'))x\right\}.\end{gathered}\tag{16}$$

На больших расстояниях от места возбуждения с помощью уравнения движения (9) q можно выразить через $(\vec{k}-\vec{k}')_s$, после чего выражение (16) приводится к виду

$$\begin{aligned}q_{S'}=\frac{-\rho c_t^2}{(2\pi)^2}\int\omega'd\omega'd^2\vec{k}'(\vec{k}-\vec{k}')_S L_\gamma(\vec{k}',\omega')L_\sigma(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\cdot\\ \cdot T_{SS'}^{(\gamma\sigma)}(\vec{k}',\omega',\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\exp\left\{i(k_x^{(\gamma)}(\vec{k}')+k_x^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}'))x\right\},\end{aligned}\tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}&T_{SS'}^{(\gamma\sigma)}(\vec{k}',\omega',\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')=U_k^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')\cdot U_k^{(\sigma)}(\vec{k}-kp,\omega-\omega')\sigma_{SS'}+\\ &+U_S^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')U_S^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')-2U_{S'}^{(\sigma)}(\vec{k}',\omega')U_{S'}^{(\gamma)}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')-\\ &-U_x^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')U_x^{(\sigma)}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\sigma_{SS'}.\end{aligned}$$

Для вычисления величин $\vec{L}(\vec{k})$ требуется решить (10). Считая ξ малой, решаем (10) итерациями по $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$. В нулевом приближении по ξ имеем

$$L_\alpha^{(0)}(\vec{k}',\omega')=H_{\alpha\beta}^{(0)^{-1}}(\vec{k}',\omega')P_\beta(\vec{k}',\omega').$$

Объединяя оба решения для полупространства и для слоя посредством матричной записи, получим

$$U_\alpha(x,\vec{k}',\omega')=U_\alpha^{(\gamma)}(\vec{k}',\omega')H_{\gamma\beta}^{(0)^{-1}}(\vec{k}',\omega')P_\beta(\vec{k}',\omega')\exp\left\{ik_x^{(\gamma)}(\vec{k}')x\right\}.\tag{18}$$

Это решение для фиксированного α имеет девять слагаемых по γ. В выражении (18) имеем: для $\gamma=1$ $k_x^{(\gamma)}=k_\ell=\sqrt{\frac{\omega^2}{\frac{2}{\ell}}-k^2}$; для $\gamma=2,3$ – $k_x^{(\gamma)}=k_t=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2}-k^2}$; для $\gamma=4,5,6$, имеем те же знаки корня, что и для $\gamma=1,2,3$, с той лишь разницей, что скорости распространения берутся для волн слоя, т.е. с тильдой; для $\gamma=7,8,9$ знаки корней — обратные и, тем самым, определяют решения для слоя, т.е. для $\gamma=4,5,\dots,9$.

Полюса $U_\alpha(x,\vec{k}',\omega')$, определяемые из (18) при условии $\det H_{\gamma\beta}^{(0)}(\vec{k}',\omega')=0$, дают известное дисперсионное соотношение волн Лява на ровной границе раздела. Усредненный по времени поток плотности энергии, определяемый интегрированием выражения (16) с множителем $\exp(i\vec{k}\vec{s})$, должен вычисляться при $\omega=0$. На идеальной поверхности результат интегрирования на больших расстояниях определяется полюсами и ветвлениями (18), а также перевальными точками экспонент. Последние определяют вклад объемных волн в поток плотности энергии. При интегрировании по углу между $\vec{k}$ и $\vec{s}$ имеются две перевальные точки, отвечающие двум направлениям распространения.

Вклад полюсов, т.е. волн Лява в поток плотности энергии имеет следующую асимтотику

$$q^{(s)}\left(0,\vec{s},0\right) \sim \frac{\rho}{s}\int d\omega^{'}\omega^{'3}P^{2}(\omega^{'}). \tag{18}$$

Вклад перевальной точки $k_\gamma = \dfrac{\omega}{c_\gamma}\cdot\dfrac{s}{\sqrt{x^2+s^2}}$, имеющейся в интеграле по модулю $\vec{k}$ от объемных поперечных волн в потоке, дает следующую оценку

$$\vec{q}^{(v)}\left(x,\vec{s},0\right) \sim \frac{\rho c_t x^3}{(x^2+s^2)^{\frac{5}{2}}}\int d\omega' \omega'^2 P^2(\omega'). \tag{19}$$

Вклад ветвлений, также учитывающий поперечные волны в потоке, пропорционален $(x^2+$ $+s^2)^{-\frac{5}{4}}$, что мало в сравнении с (20) на больших расстояниях по s.

Возвращаясь к случаю шероховатой границы раздела, на n-ом шаге итерации находим

$$L^{(n)}(\vec{k},\omega) = -\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}H^{(0)^{-1}}(\vec{k},\omega)\left[V^{(1)}(\vec{k},\vec{q})+V^{(2)}(\vec{k},\vec{q})\right]L^{(n-1)}(\vec{q},\omega). \tag{20}$$

Подставляя в (17) найденные из (21) значения $L^{(n)}(\vec{k},\omega)$ и усредняя по шероховатостям, видим, что возникают слагаемые двух типов. В слагаемых первого типа среднее от произведения разбивается на произведение средних. Вычисление среднего от $L_\gamma(\vec{k}',\omega')$ подробно описано в [2] и приводит к следующему результату

$$< L_\gamma(\vec{k}',\omega') >= H^{-1}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\omega')P_\beta(\vec{k}',\omega'), \tag{21}$$

$$H_{\gamma\alpha}(\vec{k}',\omega') = H^{(0)}_{\gamma\alpha}(\vec{k}',\omega') - \int\left\langle V^{(1)}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\vec{q})H^{(0)^{-1}}_{\beta\upsilon}(\vec{q},\omega')V^{(1)}_{\upsilon\alpha}(\vec{q},\vec{k}')\right\rangle\frac{d^2q}{(2\pi)^2}+\left\langle V^{(2)}_{\gamma\alpha}(\vec{k}',\vec{k}')\right\rangle.$$

Слагаемые с V изменяют спектр волн Лява. Вблизи полюса H^{-1} можно представить в виде

$$H^{-1}(\vec{k}',\omega') = \left(k'^2 - k_0^2(\omega') + \frac{i}{(\tau c_\lambda)^2}\right)^{-1}R(\vec{k}',\omega'), \tag{22}$$

где $R(\vec{k}',\omega')$ — матрица, не имеющая особенностей. Асимптотические выражения для τc_λ приведены в [2]. Отметим, что формула (22) позволяет вычислять затухание лишь во втором порядке по ξ/λ, где затухание определяется бинарной корреляционной функцией:

$$\left\langle V^{(1)}(\vec{k})V^{(1)}(\vec{k}')\right\rangle \sim \xi_2 \sim \left\langle \xi(\vec{k})\xi(\vec{k}')\right\rangle = (2\pi)^2\delta(\vec{k}+\vec{k}')\xi_2(\vec{k}).$$

Легко убедиться, что в то время как слагаемые с $V^{(1)}(\vec{k},\vec{q})$ определяют и затухание, и смещение собственных частот волн Лява на шероховатой границе раздела слой – полупространство, члены с $\langle V^{(2)}(\vec{k},\vec{k})\rangle$ вклада в затухание не дают. По этой причине они в дальнейшем рассматриваться не будут.

Не разбиваемое на произведение средних выражение во втором порядке по ξ изображено на рис.1

$$\begin{array}{rcl}
H^{(0)-1}(\vec{k}',\omega') & & H^{(0)-1}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega') \\
V^{(1)}(\vec{k},\vec{q}) & - - & V^{(1)}(\vec{k}-\vec{k}',\vec{k}-\vec{q}) \\
H^{(0)-1}(\vec{q}) & & H^{(0)-1}(\vec{k}-\vec{q}) \\
P(\vec{q},\omega) & & P(\vec{k}-\vec{q},\omega-\omega')
\end{array}$$

Рис.1.

Тонкая линия начинается с $H^{(0)-1}(\vec{k}',\omega')$ и оканчивается $P(\vec{k}',\omega')$, либо начинается с $H^{(0)-1}(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')$ и оканчивается $P(\vec{k}-\vec{q},\omega-\omega')$; пунктирной линии соответствует бинарная корреляционная функция ξ_2; в вершине появляется множитель $V^{(1)}$. Подобные графические обозначения приняты в теории возмущений квантовой статистики [6]. Произведем суммирование итерационного ряда для среднего

$$\left\langle L_\gamma(\vec{k}',\omega')L^*_\sigma(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)(\vec{k}'-\vec{k})_s\right\rangle \equiv \Pi_{\gamma\sigma s}(\vec{k}',\omega',\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega).$$

В "лестничном"приближении получаем уравнение для Π

$$\Pi_{\gamma\sigma s}(\vec{k}',\omega',\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega) = H^{-1}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\omega')H^{-1*}_{\sigma\kappa}(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)\Big[(\vec{k}'-\vec{k})_s P_\beta(\vec{k}',\omega')P^*_\kappa(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)+$$

$$+\int \langle V^{(1)}_{\beta x}(\vec{k}',q)V^{(1)*}_{\kappa\mu}(\vec{k}'-\vec{k},q-\vec{k})\rangle \Pi_{x\mu s}(\vec{q},\omega',\vec{q}-\vec{k},\omega'-\omega)\frac{d2q}{(2\pi)^2}\Big]. \qquad (23)$$

При выводе (24) мы пренебрегли членами порядка λ/d. В дальнейшем нас будет интересовать в основном случай, когда корреляционный радиус d (область, в которой ξ_2 заметно отлично от нуля) велик по сравнению с характерной длиной волн Лява. Средний по времени поток $q(x,\vec{k},\omega)$ на больших расстояниях определяется $\vec{k}$, ω, малыми по сравнению с характерными частотами и длинами волн Лява. По этой причине интеграл

$$\int \langle V^{(1)}_{\alpha x}(\vec{k}',\vec{t})V^{(1)*}_{\zeta\mu}(\vec{k}'-\vec{k},\vec{t}-\vec{k})\rangle \Pi_{x\mu s}(\vec{t},\omega',\vec{t}-\vec{k},\omega'-\omega)\frac{d^2t}{(2\pi)^2} \equiv \vec{k}'_s K_{\alpha\zeta}(\omega,\omega') \qquad (24)$$

вычислим при малых $\vec{k}$ и ω, $\vec{k}'$ соответствует длине возбуждаемых волн Лява. Для решения уравнения (24) умножим его на $\langle V^{(1)}_{\alpha\gamma}(\vec{l},\vec{k}')V^{(1)*}_{\zeta\sigma}(\vec{l}-\vec{k},\vec{k}'-\vec{k})\rangle$ и проинтегрируем по $\vec{k}'$. Получим

$$l_s K_{\alpha\zeta}(\omega,\omega') = \int < V^{(1)}_{\alpha\gamma}(\vec{l},\vec{k}')V^{1(*)}_{\zeta\sigma}(\vec{l}-\vec{k},\vec{k}'-\vec{k}) > H^{-1}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\omega')H^{-1*}_{\sigma\kappa}(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)* \qquad (25)$$

$$*\Big(P_\beta(\vec{k}',\omega')P^*_\kappa(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)+K_{\beta\kappa}(\omega,\omega')\Big)\,k'_s\frac{d^2k'}{(2\pi)^2}.$$

Характер решения (26) определяется тем, какая из функций

$$\xi_2\left(\vec{l}-\vec{k}'\right) \sim < V^{(1)}_{\alpha\gamma}(\vec{l},\vec{k}')V_{\zeta\sigma}(\vec{l}-\vec{k},\vec{k}'-\vec{k}) > \text{ или } \int H^{-1}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\omega')H^{-1*}_{\sigma\kappa}(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)$$

является при интегрировании по $\vec{k}'$ более острой. Первая функция существенно меняется при изменении модуля $\vec{k}'$ в интервале порядка d^{-1}, а вторая — в интервале $(\tau c_\lambda)^{-1}$. Соответствующие интервалы угла $\vec{k}'$: $(dk_0(\omega'))^{-1}$ для $\xi_2(\vec{l}-\vec{k}')$ и $(\tau c_\lambda k)^{-\frac{1}{2}}$ для $H^{-1}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\omega')H^{-1*}_{\sigma\kappa}(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)$.

Умножая (26) скалярно на $\vec{l}$ и используя (24), видим, что имеются следующие предельные случаи:

а) корреляционный радиус d велик по сравнению с τc_λ. Интегрирование по вектору $\vec{k}'$ в (26) выполняется с помощью "острой"функции $\xi_2(\vec{l}-\vec{k}')$, и полюсные знаменатели H^{-1} могут быть вынесены при $\vec{k}'=\vec{l}$. В этом случае использованное "лестничное"приближение неприменимо, т.к. опущенные при выводе (24) диаграммы велики по параметру $(a\vec{k}')^{-2}$;

б) при меньших значениях корреляционного радиуса $d<\tau c_\lambda$ интегрирование по модулю $\vec{k}'$ выполняется с помощью полюсных знаменателей, а интегрирование по углу θ' между $\vec{k}'$ и $\vec{l}$ — с помощью функции ξ_2 при условии

$$\frac{k}{(k_0(\omega')d)^2} << \frac{1}{\tau c_\lambda}. \qquad (26)$$

Выделяя полюсной знаменатель $b \equiv \dfrac{1}{k\cos\theta + k_0(\omega) - \dfrac{i}{\tau c_\lambda}}$, где θ угол между $\vec{k}$ и $\vec{l}$, и вводя не имеющую особенностей матрицу M

$$M(\vec{l},\vec{k}') = \frac{V^{(1)}(\vec{l},\vec{k}')R(\vec{k}')}{2k_0(\omega')},$$

получаем

$$K_{\alpha\sigma}(\omega,\omega') = i\pi b\left[\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\alpha\beta}M^*_{\sigma\kappa}\cos\theta' d\theta'\right\rangle P_\beta P^*_\kappa + \left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\alpha\beta}M^*_{\sigma\kappa}\cos\theta' d\theta'\right\rangle K_{\beta\kappa}(\omega,\omega')\right]. \quad (27)$$

Решая (28), находим

$$K_{mn}(\omega,\omega') = \left[\delta_{m\ell}\delta_{np} - i\pi b\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{m\ell}M^*_{np}\cos\theta' d\theta'\right\rangle\right]^{-1}\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\ell\alpha}M^*_{p\sigma}\cos\theta' d\theta'\right\rangle i\pi b P_\alpha P^*_\sigma. \quad (28)$$

Здесь $M^*(\vec{l},\vec{k}') = M(-\vec{l},-\vec{k}')$.

Подставляя значение $K_{\alpha\sigma}$, из (28) в выражение для поляризационного оператора $\Pi_{\gamma\sigma s}$ из (24) получаем

$$\Pi_{\gamma\sigma s} = H^{-1}_{\gamma\beta}H^{-1*}_{\sigma\kappa}k'_s\left[P_\beta P^*_\kappa + \left(\delta_{\beta\ell}\delta_{\kappa p} - i\pi b\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\beta\ell}M^*_{\kappa p}\cos\theta' d\theta'\right\rangle\right)^{-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot i\pi b\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\ell\alpha}M^*_{p\sigma}\cos\theta' d\theta'\right\rangle P_\alpha P^*_\sigma\right].$$

Представляя обратную матрицу в виде

$$\left(\delta_{\beta\ell}\delta_{\kappa p} - i\pi b\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\beta\ell}M^*_{\kappa p}\cos\theta' d\theta'\right\rangle\right)^{-1} =$$

$$= \left(\det\left(\delta_{\beta\ell}\delta_{\phi p} - i\pi b\left\langle -\!\!\!\!\!\!\int M_{\beta\ell}M^*_{\kappa p}\cos\theta' d\theta'\right\rangle\right)\right)^{-1} N_{\beta\ell,\kappa p},$$

где $N_{\beta\ell,\kappa p}$ не имеет особенностей, находим

$$\Pi_{\gamma\sigma s} = H^{-1}_{\gamma\beta}(\vec{k}',\omega')H^{*-1}_{\sigma k}(\vec{k}'-\vec{k},\omega'-\omega)k'{}_s\left\{\frac{-k\cos\theta - k_0(\omega) + i/\tau c_\lambda}{-k\cos\theta - k_0 + i/\tau_{tr}c_\lambda}\right\}N_{\beta\ell,kp}P_\ell P^*_p. \quad (29)$$

Здесь $\tau_{tr}^{-1} = \pi c_\lambda\left\langle -\!\!\!\!\!\int SpMSpM^*\left(\cos\theta' - 1\right)d\theta'\right\rangle$. Последний интеграл определяется угловой областью $\left|\theta'\right| < \left(k_0(\omega')d\right)^{-1}$, и мы получаем для него следующую оценку

$$\tau_{tr}^{-1} \sim \frac{a^2k_0^2(\omega')c_\lambda}{d}. \quad (30)$$

Из формулы (30) видно, что с ростом d время τ_{tr} растет. Асимптотика потока плотности энергии волн Лява дается следующим выражением

$$q^{(s)}(0,\vec{s},0) \sim s^{-1}\rho\int\exp\left\{-\frac{s}{\tau_{tr}c_\lambda(\omega')}\right\}\omega'^3\left|P\left(\omega'\right)\right|^2 d\omega' \quad (31)$$

для

$$(\tau c_\lambda(\omega'))^{-1} < d^{-1} < \frac{k_0(\omega')}{\sqrt{\tau c_\lambda(\omega')k}};$$

в) для случая $k/(k_0(\omega')d)^2 > (\tau c_\lambda(\omega'))^{-1}$ оценка решения уравнения (24) дается первым слагаемым в правой части (24). В этом случае ослабление потока плотности энергии волн Лява определяется по порядку величины тем же τ, что и смещение полюсов функции $H^{-1}(\vec{k}', \omega')$. Соответствующие асимптотические формулы для τ приведены в [2], в которой, в отличие от данной работы, изучалось затухание амплитуд волн Лява.

Причина возникновения транспортного времени связана с тем, что рассеяние на малый угол не вносит вклада в затухание. То есть при вычислении потока наряду с гриновскими функциями требуется рассматривать вершинные диаграммы, которые и приводят к появлению τ_{tr}. Решаемая задача близка к задаче о скин-эффекте на шероховатой поверхности [5]. Другой пример — сопротивление сплавов [6].

Цитированная литература

1. **Slobodnik J., Carr P., Budreau P.** // Applied physics letters. 1970. V. 41, No11. P. 216.
2. **Уразаков Е. И.** // Вестник КазГУ сер. мат. мех. инф. 2000, № 2(21).
3. **Бреховских Л. М.** // Акустический журнал. 1959. Т. 5, № 3. С. 48.
4. **Лапин Л. Д.** // Акустический журнал. 1969. Т. 15, № 3. С.9.
5. **Фальковский Л. А.** // ЖЭТФ. 1970. Т. 60, С. 1830.
6. **Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.** Методы квантовой теории поля в статистической физике М., 1962.

Поступила в редакцию 21.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 94 – 102*

УДК 512.519.46

О ГОМОЛОГИЯХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ $\mathcal{L}_1$ СПЕЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

К. Н. Утеулиева

Атырауский университет им. Х. Досмуханбетова
465045, Атырау, Пушкина ул., 212

Работа посвящена описанию пространства тривиальной гомологии третьего порядка максимальной нильпотентной подалгебры специальной алгебры Ли над полем характеристики нуль.

В работах [1, 2] даны описания стабильных когомологий общей алгебры Ли W_n. В настоящей работе описываются пространства $H_3^{(3)}(\mathcal{L}_1)$ специальной алгебры Ли $L = S_n$, как модули над нулевой компонентой алгебры Ли S_n.

1. Определения. Пусть P — поле характеристики нуль. $U = P[x_1, x_2, ..., x_n] = \oplus_{k\geq 0} U_k$ — ассоциативно-коммутативная алгебра многочленов, где

$$U_k = \left\langle x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \right| \left. |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k \right\rangle$$

— однородная компонента в U.

Положим $W_n = DerU$ — алгебра дифференцирования алгебры U. Пусть $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i \in \in W_n$ — дифференцирование, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Через $\mathrm{div}(D) = \sum_{i=1}^n \partial_i(f_i)$ обозначаем дивергенцию дифференцирования D. Тогда специальная алгебра Ли S_n определяется как подалгебра общей алгебры Ли W_n, состоящая из дифференцировании без дивергенции, т.е. $S_n = \langle D \in W_n | \mathrm{div}(D) = = 0\rangle$.

Положим $L = S_n$. Тогда $L = \oplus_{i\geq -1} L_i$, где

$$L_i = \left\langle x^\alpha \partial_j - \frac{\alpha_j}{|\alpha| + n - 1} x^{\alpha - \varepsilon_j} z \right| \left. |\alpha| = i + 1, j = 1, 2, \ldots, n \right\rangle.$$

Здесь $\varepsilon_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — n-вектор (1 стоит на j-ом месте), $z = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$.

$L_0 = sl_n = L_0^+ \oplus H \oplus L_0^-$ является подалгеброй в L, где

$$L_0^+ = \langle x_i \partial_j | \; i < j \rangle, \quad H = \langle x_i \partial_i - x_{i+1} \partial_{i+1} | \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \rangle, \quad L_0^- = \langle x_i \partial_j | \; i > j \rangle.$$

Умножение в L определяется так же, как и в W_n

$$[u\partial_i, v\partial_j] = u\partial_i(v)\partial_j - v\partial_j(u)\partial_i.$$

Keywords: *special Lie algebra, homology group of third degree*
2000 Mathematics Subject Classification: 13D03

Положим $\mathcal{L}_1 = \oplus_{i\geq 1} L_i$. Алгебра $\mathcal{L}_1$ является максимальной нильпотентной подалгеброй специальной алгебры Ли S_n.

Вектор m L_0-модуля M называется старшим вектором, если $L_0^+ m = 0$. Для элемента $u = x^\alpha \partial_j \in L$ определим вес $\varepsilon(u)$ и степень $\deg(u)$, полагая

$$\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \delta(i=j))\varepsilon_i,\ \deg(u) = |\alpha| - 1,$$

где δ — символ Кронекера.

Пусть

$$C_q = C_q(\mathcal{L}_1) = \langle \mathrm{alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes ... \otimes u_q) := u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_q \mid u_1 < u_2 < ... < u_q \rangle$$

— пространство q-мерных цепей алгебры $\mathcal{L}_1$, где $<$ — какой-нибудь линейный порядок в L [3]. Граничный оператор $\partial_q : C_q \longrightarrow C_{q-1}$ определяется следующим образом

$$\partial_q(u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_q) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [u_i, u_j] \wedge u_1 \wedge ... \wedge \hat{u}_i \wedge ... \wedge \hat{u}_j \wedge ... \wedge u_q,$$

где знак $\hat{a}$ означает, что элемент a опущен. Пространство C_q является градуированным L_0-модулем относительно действия

$$\rho(l)(u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_q) = \sum_{i=1}^{q} u_1 \wedge ... \wedge [l, u_i] \wedge ... \wedge u_q,$$

где $l \in L_0$ и имеет место формула

$$\rho(l)\partial = \partial\rho(l). \tag{1}$$

Пусть $Z_q = Ker\, \partial_q, B_q = Im\, \partial_{q+1}$ и $H_q(\mathcal{L}_1) = Z_q/B_q$ — пространство q-мерных циклов, границ и гомологии. Имеем

$$H_q(\mathcal{L}_1) = \oplus_{i\geq q} H_q^{(i)}(\mathcal{L}_1),$$

где $H_q^{(i)}(\mathcal{L}_1)$ — однородная компонента L_0 -модуля $H_q(\mathcal{L}_1)$. Пространство $H_q^{(q)}(\mathcal{L}_1)$ называется группой тривиальных гомологий алгебры $\mathcal{L}_1$.

2. Формулировка основного результата.

Теорема S. *Пусть $L = S_n, n \geq 6$. Имеет место изоморфизм*

$$H_3^{(3)}(\mathcal{L}_1) \cong R(6\pi_1 + \pi_{n-3}) \oplus R(4\pi_1 + \pi_2 + \pi_{n-2} + \pi_{n-1}) \oplus$$

$$\oplus R(3\pi_1 + \pi_3 + 3\pi_{n-1}) \oplus R(2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_{n-3}) \oplus R(2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_{n-2} + \pi_{n-1}) \oplus$$

$$\oplus R(2\pi_1 + \pi_3 + \pi_{n-2}) \oplus R(2\pi_1 + \pi_3 + 2\pi_{n-1}) \oplus R(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_{n-2} + \pi_{n-1}) \oplus$$

$$\oplus 2R(\pi_1 + \pi_3 + \pi_{n-1}) \oplus R(3\pi_2 + 3\pi_{n-1}) \oplus R(\pi_2 + \pi_3 + \pi_{n-2}) \oplus$$

$$\oplus R(\pi_2 + \pi_3 + 2\pi_{n-1}) \oplus R(2\pi_3 + \pi_{n-3}) \oplus R(\pi_3) \oplus R(3\pi_1) \oplus$$

$$\oplus R(3\pi_1 + \pi_2 + \pi_{n-2}) \oplus R(3\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_{n-1}) \oplus 2R(2\pi_1 + \pi_2 + \pi_{n-1}) \oplus$$

$$\oplus R(\pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_{n-1}) \oplus R(\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_{n-2}) \text{ (всего 22 компоненты)},$$

где $R(\lambda)$ — неприводимый модуль со старшим весом λ и π_i — фундаментальные веса, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство теоремы основано на разложении L_0-модуля $\wedge^3 L_1$.

П р е д л о ж е н и е S . *Имеет место следующее разложение*

$$\wedge^3 L_1 \cong R(6\pi_1+\pi_{n-3}) \oplus R(5\pi_1+2\pi_{n-1}) \oplus R(4\pi_1+\pi_2+\pi_{n-2}+\pi_{n-1}) \oplus R(4\pi_1+\pi_{n-1})\oplus$$
$$\oplus R(3\pi_1+\pi_3+3\pi_{n-1}) \oplus R(2\pi_1+2\pi_2+\pi_{n-3}) \oplus R(2\pi_1+2\pi_2+\pi_{n-2}+\pi_{n-1})\oplus$$
$$\oplus R(2\pi_1+\pi_3+\pi_{n-2}) \oplus R(2\pi_1+\pi_3+2\pi_{n-1}) \oplus R(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_{n-2}+\pi_{n-1})\oplus$$
$$\oplus 2R(\pi_1+\pi_3+\pi_{n-1}) \oplus R(3\pi_2+3\pi_{n-1}) \oplus R(\pi_2+\pi_3+\pi_{n-2}) \oplus R(\pi_2+\pi_3+2\pi_{n-1})\oplus$$
$$\oplus R(2\pi_3+\pi_{n-3}) \oplus R(\pi_3) \oplus R(5\pi_1+\pi_{n-2}) + 2R(3\pi_1) \oplus 2R(3\pi_1+\pi_2+\pi_{n-2})\oplus$$
$$\oplus 2R(3\pi_1+\pi_2+2\pi_{n-1}) \oplus 4R(2\pi_1+\pi_2+\pi_{n-1}) \oplus 2R(\pi_1+2\pi_2+\pi_{n-2})\oplus$$
$$\oplus 2R(\pi_1+2\pi_2+2\pi_{n-1}) \oplus R(\pi_1+\pi_2) \oplus R(2\pi_2+\pi_{n-1}) \text{ (\textit{всего 34 компоненты})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . По формуле размерности Вейля устанавливается, что сумма размерности неприводимых модулей, приведенных в формулировке предложения, равна размерности L_0-модуля $\wedge^3 L_1$. Нам остается найти линейно-независимые старшие векторы из $\wedge^3 L_1$, соответствующие старшим весам, приведенным в формулировке предложения. Мы воспользуемся тем, что специальная алгебра S_n не только является подалгеброй в общей алгебре W_n, а также является L_0- подмодулем и выделяется прямым слагаемым. Следовательно, пространство гомологии алгебры S_n является L_0-подмодулем пространства гомологии общей алгебры W_n. Поэтому среди 3-цепей алгебры W_n мы выбираем те цепи, компоненты которых имеют нулевую дивергенцию. Приведем их список по весам.

1. $6\pi_1+\pi_{n-3}$.
$u_1 = x_1^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_{n-2}$.
2. $4\pi_1+\pi_2+\pi_{n-2}+\pi_{n-1}$.
$u_2 = x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1}$.
3. $3\pi_1+\pi_3+3\pi_{n-1}$.
$u_3 = x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_n$.
4. $2\pi_1+2\pi_2+\pi_{n-3}$.
$u_4 = x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_{n-2} + x_1^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2^2\partial_{n-2}+$
$+x_2^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_{n-2} - x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_{n-2}-$
$-x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_{n-2} - x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_{n-2}$.
5. $2\pi_1+2\pi_2+\pi_{n-2}+\pi_{n-1}$.
$u_5 = x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} - 2x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1}$.
6. $2\pi_1+\pi_3+\pi_{n-2}$.
$u_6 = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_{n-1} - x_1^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_{n-1}-$
$-x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_{n-1} + x_1x_3\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_{n-1}+$
$+x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_{n-1} + x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n + x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n+$
$+x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n - x_1x_3\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n-$
$-x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n + x_1x_3\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n$.

Цепь u_6 может иметь отличную от нуля дивергенцию только при $i = 1,2,3,n-1,n$. При $i=1$ имеем просто нулевую цепь. Случаи $i=2,3$ и $i=n,n-1$ соответствующей группировке дают цепи с нулевой дивергенции.

7. $2\pi_1+\pi_3+2\pi_{n-1}$.
$u_7 = x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_3z + x_1^2\partial_n \wedge x_2z \wedge x_1x_3\partial_n + x_1z \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_n$,
$u_8 = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n - x_1^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n-$
$-x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n + x_1x_3\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n+$
$+x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n - x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n$.

Линейная комбинация $4u_7-(n+1)u_8$ цепей u_7, u_8 является 3-циклом алгебры S_n.

8. $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_{n-2}+\pi_{n-1}$.

$u_9 = 2x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-1}+$
$+x_1^2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} - x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_{n-1}+$
$+2x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_n + x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_n+$
$+3x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_3\partial_{n-1} + x_1x_3\partial_n \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1}.$

Отсюда видно, что цепь u_9 является циклом алгебры S_n, т.к. в цепи присутствует вес π_3 и все компоненты u_9 имеют нулевую дивергенцию.

9. $\pi_1 + \pi_3 + \pi_{n-1}$.

$u_{10} = x_1^2\partial_n \wedge x_2z \wedge x_3z + x_1z \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_3z + x_1z \wedge x_2z \wedge x_1x_3\partial_n,$
$u_{11} = \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n \wedge x_3z + x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3z+$
$+x_1^2\partial_i \wedge x_2z \wedge x_3x_i\partial_n + x_1x_i\partial_n \wedge x_2z \wedge x_1x_3\partial_i+$
$+x_1z \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n + x_1z \wedge x_2x_i\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i,$
$u_{12} = \sum_{i,j} x_1^2\partial_n \wedge x_2x_i\partial_j \wedge x_3x_j\partial_i+$
$+x_1x_i\partial_j \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_3x_j\partial_i + x_1x_i\partial_j \wedge x_2x_j\partial_i \wedge x_1x_3\partial_n.$
$u_{13} = \sum_{i,j} x_1^2\partial_i \wedge x_2x_j\partial_n \wedge x_3x_i\partial_j + x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_j \wedge x_3x_j\partial_n+$
$+x_1x_j\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_j + x_1x_j\partial_n \wedge x_2x_i\partial_j \wedge x_1x_3\partial_i+$
$+x_1x_i\partial_j \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_j\partial_n + x_1x_i\partial_j \wedge x_2x_j\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i.$

Здесь имеются следующие циклы алгебры S_n

$$u_{10} - (n+1)u_{12}, \quad 3u_{11} - 6u_{12} - (n+1)u_{13}.$$

10. $3\pi_2 + 3\pi_{n-1}$.

$u_{14} = x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_2^2\partial_n.$

То, что u_{14} является циклом алгебры S_n, нет сомнения.

11. $\pi_2 + \pi_3 + \pi_{n-2}$.

$u_{15} = x_1z \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-1}-$
$-x_1z \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_n - x_1z \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_{n-1}+$
$+x_1z \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_n + x_1x_2\partial_n \wedge x_2z \wedge x_1x_3\partial_{n-1}+$
$+x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_2z \wedge x_1x_3\partial_n + x_1^2\partial_n \wedge x_2z \wedge x_2x_3\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2z \wedge x_2x_3\partial_n + x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_3z-$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_3z - 2x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_3z,$
$u_{16} = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_{n-1} - x_1^2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_{n-1}-$
$-2x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_{n-1} + x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_{n-1}+$
$+x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_{n-1} - x_1x_3\partial_n \wedge x_2^2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n + x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n+$
$+2x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n - x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n-$
$-x_1x_3\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n + x_1x_3\partial_{n-1} \wedge x_2^2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n+$
$+x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_{n-1} + x_2^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_{n-1}-$
$-x_2^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_{n-1} - x_2x_3\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_{n-1}+$
$+x_2x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_{n-1} - x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n-$
$-x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n + x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n+$
$+x_2x_3\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n - x_2x_3\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n.$

Циклом без дивергенции данного веса является элемент
$4u_{15} - (n+1)u_{16}$.

12. $\pi_2 + \pi_3 + 2\pi_{n-1}$.

$u_{17} = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n-$
$-2x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n + x_2^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_3x_i\partial_n-$
$-x_1^2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n + x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n+$
$+x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n - x_2x_3\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n+$
$+x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n - x_2^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n-$
$-x_1x_3\partial_n \wedge x_2^2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n + x_2x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n.$

По весу видно, что данный элемент является циклом. Он может дать ненулевую дивергенцию только при $i = 1, 2, 3, n$. Случаи $i = 1, 2, 3$ вместе дают нам элемент с нулевой дивергенцией. При $i = n$ получаем нулевую цепь.

13. $2\pi_3 + \pi_{n-3}$.

$u_{18} = x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_3^2\partial_{n-2} - x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-2} \wedge x_3^2\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_3^2\partial_{n-2} + x_1^2\partial_{n-2} \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_3^2\partial_{n-1}+$
$+x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2^2\partial_{n-2} \wedge x_3^2\partial_n - x_1^2\partial_{n-2} \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_3^2\partial_n+$
$+4x_1^2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_{n-2} - 4x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-2}+$
$+4x_1^2\partial_{n-2} \wedge x_2x_3\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-1} - 4x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_3^2\partial_{n-2}+$
$+4x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-2} \wedge x_3^2\partial_{n-1} - 4x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_{n-2} \wedge x_3^2\partial_n-$
$-4x_1x_3\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-1} \wedge x_1x_3\partial_{n-2} + 4x_1x_2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-2} \wedge x_1x_3\partial_{n-1}-$
$-4x_1x_3\partial_{n-2} \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_1x_3\partial_{n-1} + 2x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_{n-2}-$
$-2x_1x_3\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-2} - 2x_1x_3\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-2} \wedge x_2x_3\partial_{n-1}+$
$+2x_1x_3\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_{n-2} \wedge x_2x_3\partial_n + 2x_1x_3\partial_{n-2} \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_3\partial_{n-1}-$
$-2x_1x_3\partial_{n-2} \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_2x_3\partial_n$.

Так как $n > 5$, данная цепь не имеет дивергенцию. По весу видно, что она является циклом.

14. π_3.

$u_{19} = x_1z \wedge x_2z \wedge x_3z$,
$u_{20} = \sum_{i,j} x_1z \wedge x_2x_i\partial_j \wedge x_3x_j\partial_i+$
$+x_1x_i\partial_j \wedge x_2z \wedge x_3x_j\partial_i + x_1x_i\partial_j \wedge x_2x_j\partial_i \wedge x_3z$,
$u_{21} = \sum_{i,j,l} x_1x_i\partial_j \wedge x_2x_j\partial_l \wedge x_3x_l\partial_i$.

Линейная комбинация $u_{20} - (n+1)u_{21}$ является циклом без дивергенции.

По формуле (1) вышеприведенные старшие векторы автоматически являются циклами, т.к. их старшие веса не содержатся во множестве старших весов L_0-модуля $L_1 \wedge L_2$.

Продолжим список старших векторов.

15. $5\pi_1 + 2\pi_{n-1}$.

$u_{22} = \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_1^2\partial_n \wedge x_1x_i\partial_n$.

Имеем

$\partial(u_{22}) = -(n-2)x_1^2\partial_n \wedge x_1^3\partial_n$.

Таким образом, u_{22} не является циклом и не имеет дивергенции.

16. $4\pi_1 + \pi_{n-1}$.

$u_{23} = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_iz$,
$u_{24} = \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n \wedge x_1z$,
$u_{25} = \sum_{i,j} x_1^2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_j \wedge x_1x_j\partial_n$.

Имеем следующую систему уравнений относитетно образов данных цепей

$\partial(u_{23}) =$
$= -2x_1z \wedge x_1^3\partial_n + (n-2)x_1^2\partial_n \wedge x_1^2z + \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_1^2x_i\partial_n$,
$\partial(u_{24}) =$
$= (n+1)x_1z \wedge x_1^3\partial_n - x_1^2\partial_n \wedge x_1^2z - \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_1^2x_i\partial_n + \sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1^3\partial_i$,
$\partial(u_{25}) =$
$= -x_1z \wedge x_1^3\partial_n - 3x_1^2\partial_n \wedge x_1^2z + n\sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_1^2x_i\partial_n + (n+1)\sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1^3\partial_i$.

Ранг матрицы данной системы

$$\begin{pmatrix} -2 & n-2 & 1 & 0 \\ n+1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & n & n+1 \end{pmatrix}$$

равен трем. Значит, здесь циклов нет. Элемент $u_{23} + u_{24} - (n+1)u_{25}$ не имеет дивергенций.

Теперь мы приводим список комбинированных циклов.

17. $5\pi_1 + \pi_{n-2}$.

$u_{26} = \sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_1^2\partial_{n-1} - x_1x_i\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_1^2\partial_n$,
$u_{27} = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_1z \wedge x_1^2\partial_{n-1}$.

Имеем
$\partial(u_{26}) = -(n+2)(x_1^2\partial_n \wedge x_1^3\partial_{n-1} - x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^3\partial_n)$,
$\partial(u_{27}) = x_1^2\partial_n \wedge x_1^3\partial_{n-1} - x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^3\partial_n$.

Цикл $(n+2)u_{27} + u_{26}$ — единственный старший цикл данного веса. Но бездивергентным элементом является $(n+1)u_{26} - u_{27}$, который не будет циклом.

18. $3\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_{n-1}$.
$u_{28} = x_1^2\partial_n \wedge x_1 z \wedge x_1x_2\partial_n$,
$u_{29} = \sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1^2\partial_n - x_2x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_1^2\partial_n$,
$u_{30} = \sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i - x_2x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i$.
Имеем
$\partial(u_{28}) = \partial(u_{29}) = x_1^2\partial_n \wedge x_1^2x_2\partial_n - x_1x_2\partial_n \wedge x_1^3\partial_n$,
$\partial(u_{30}) = -(n+2)(x_1^2\partial_n \wedge x_1^2x_2\partial_n - x_1x_2\partial_n \wedge x_1^3\partial_n)$.
Тогда имеются два цикла данного веса:
$(n+2)u_{28} + u_{30}$, $(n+2)u_{29} + u_{30}$.
Бездивергентным циклом данного веса будет

$$(2n+7)u_{28} + (n^2+3n-1)u_{29} + (n+3)u_{30}.$$

19. $3\pi_1 + \pi_2 + \pi_{n-2}$.
$u_{31} = 2x_1^2\partial_n \wedge x_2 z \wedge x_1^2\partial_{n-1} -$
$-x_1x_2\partial_n \wedge x_1 z \wedge x_1^2\partial_{n-1} + x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1 z \wedge x_1^2\partial_n$,
$u_{32} = \sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1^2\partial_{n-1} - x_2x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_1^2\partial_{n-1} -$
$-x_1x_i\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_i \wedge x_1^2\partial_n + x_2x_i\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i \wedge x_1^2\partial_n$,
$u_{33} = \sum_i x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i - x_1x_i\partial_{n-1} \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i -$
$-x_2x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_i + x_2x_i\partial_{n-1} \wedge x_1^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_i$.
Имеем следующие граничные образы
$\partial(u_{31}) = -\partial(u_{33}) = x_1^2\partial_n \wedge x_1^2x_2\partial_{n-1} - x_1x_2\partial_n \wedge x_1^3\partial_{n-1} -$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2x_2\partial_n + x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1^3\partial_n$,
$\partial(u_{32}) = 3(x_1^2\partial_n \wedge x_1^2x_2\partial_{n-1} - x_1x_2\partial_n \wedge x_1^3\partial_{n-1} -$
$-x_1^2\partial_{n-1} \wedge x_1^2x_2\partial_n + x_1x_2\partial_{n-1} \wedge x_1^3\partial_n)$.
Отсюда получаем следующие два цикла данного веса
$u_{31} + u_{33}$, $u_{32} + 3u_{33}$.
Цикл $u_{31} + nu_{32} + (3n+1)u_{33}$ не имеет дивергенцию.

20. $\pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_{n-1}$.
$u_{34} = 2x_1^2\partial_n \wedge x_2 z \wedge x_1x_2\partial_n + x_2^2\partial_n \wedge x_1 z \wedge x_1^2\partial_n$,
$u_{35} = \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n - x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_n -$
$-x_1x_2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_n + x_2^2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_n$,
$u_{36} = \sum_i x_1^2\partial_n \wedge x_2x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i - x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_i\partial_n \wedge x_1x_2\partial_i -$
$-x_1x_2\partial_n \wedge x_2x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_i + x_2^2\partial_n \wedge x_1x_i\partial_n \wedge x_1^2\partial_i$.
Следующие граничные образы
$2\partial(u_{34}) = -\partial(u_{35}) =$
$= 2(x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2^2\partial_n - 2x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2x_2\partial_n + x_2^2\partial_n \wedge x_1^3\partial_n)$,
$\partial(u_{36}) =$
$= -(n+2)(x_1^2\partial_n \wedge x_1x_2^2\partial_n - 2x_1x_2\partial_n \wedge x_1^2x_2\partial_n + x_2^2\partial_n \wedge x_1^3\partial_n)$
дают нам два цикла данного веса $2u_{34} + u_{35}$, $(n+2)u_{34} + u_{36}$ алгебры W_n.

Единственным циклом алгебры S_n является

$$2nu_{34} - (n^2+3n+4)u_{35} + (2n+4)u_{36}.$$

21. $\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_{n-2}$.
$u_{37} = 2x_1 z \wedge x_1x_2\partial_n \wedge x_1x_2\partial_{n-1} -$
$-x_1 z \wedge x_2^2\partial_n \wedge x_1^2\partial_{n-1} - x_1 z \wedge x_1^2\partial_n \wedge x_2^2\partial_{n-1}$,

$u_{38}=\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_{n-1}-x_1x_2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_n\wedge x_1^2\partial_{n-1}-$
$-x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_{n-1}+x_2^2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_{n-1}\wedge x_1x_2\partial_n+x_1x_2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_{n-1}\wedge x_1^2\partial_n+$
$+x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_{n-1}\wedge x_1x_2\partial_n-x_2^2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_{n-1}\wedge x_1^2\partial_n,$
$u_{39}=\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_n\wedge x_2^2\partial_{n-1}-x_1^2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_{n-1}-$
$-x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_{n-1}+x_1x_2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_n\wedge x_1^2\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_{n-1}\wedge x_2^2\partial_n+x_1^2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_{n-1}\wedge x_1x_2\partial_n+$
$+x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_i\partial_{n-1}\wedge x_1x_2\partial_n-x_1x_2\partial_i\wedge x_2x_i\partial_{n-1}\wedge x_1^2\partial_n.$

С помощью данных цепей получаем следующие граничные условия
$\partial(u_{38})=0,\ n\partial(u_{37})=-\partial(u_{39})=$
$=n(x_1^2\partial_n\wedge x_1x_2^2\partial_{n-1}-2x_1x_2\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_{n-1}+x_2^2\partial_n\wedge x_1^3\partial_{n-1}-$
$-x_1^2\partial_{n-1}\wedge x_1x_2^2\partial_n+2x_1x_2\partial_{n-1}\wedge x_1^2x_2\partial_n-x_2^2\partial_{n-1}\wedge x_1^3\partial_n).$

Отсюда получаем два цикла u_{38} и $nu_{37}+u_{39}$ алгебры W_n. Циклом для алгебры S_n будет $2nu_{37}+(n^2+n-1)u_{38}+2u_{39}$.

22. $2\pi_1+\pi_2+\pi_{n-1}$.
$u_{40}=x_1z\wedge x_2z\wedge x_1^2\partial_n,$
$u_{41}=\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_2z\wedge x_1^2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1z\wedge x_1^2\partial_i,$
$u_{42}=\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_i\wedge x_1z-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^2\partial_i\wedge x_1z,$
$u_{43}=\sum_i x_1^2\partial_n\wedge x_1x_2\partial_i\wedge x_iz-x_1x_2\partial_n\wedge x_1^2\partial_i\wedge x_iz,$
$u_{44}=\sum_{i,j} x_1x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_j\wedge x_1x_j\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^2\partial_j\wedge x_1x_j\partial_i,$
$u_{45}=\sum_{i,j} x_1^2\partial_i\wedge x_1x_2\partial_j\wedge x_ix_j\partial_i,$
$u_{46}=\sum_{i,j} x_1x_i\partial_n\wedge x_2x_j\partial_i\wedge x_1^2\partial_j-x_2x_i\partial_n\wedge x_1x_j\partial_i\wedge x_1^2\partial_j,$
$u_{47}=\sum_{i,j} x_1x_i\partial_j\wedge x_2x_j\partial_i\wedge x_1^2\partial_n.$

Имеем
$\partial(u_{40})=x_1z\wedge x_1^2x_2\partial_n-x_2z\wedge x_1^3\partial_n,$
$\partial(u_{41})=-(n+1)(x_1z\wedge x_1^2x_2\partial_n-x_2z\wedge x_1^3\partial_n)+$
$+\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^3\partial_i,$
$\partial(u_{42})=-(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n-x_1x_2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)-$
$-(\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^3\partial_i)+(x_1^2\partial_n\wedge x_1x_2z-x_1x_2\partial_n\wedge x_1^2z).$
$\partial(u_{43})=-(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n-x_1x_2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)+$
$+n(x_1^2\partial_n\wedge x_1x_2z-x_1x_2\partial_n\wedge x_1^2z)-(x_1z\wedge x_1^2x_2\partial_n-x_2z\wedge x_1^3\partial_n),$
$\partial(u_{44})=(n+2)(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n-x_1x_2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)+$
$+(n+1)(\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^3\partial_i),$
$\partial(u_{45})=(n+1)(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n-x_1x_2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)-$
$-(\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^3\partial_i),$
$\partial(u_{46})=-(n+1)(\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^3\partial_i)+$
$+2(x_1^2\partial_n\wedge x_1x_2z-x_1x_2\partial_n\wedge x_1^2z)-(x_1z\wedge x_1^2x_2\partial_n-x_2z\wedge x_1^3\partial_n),$
$\partial(u_{47})=2(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n-x_1x_2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)-$
$(\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1^2x_2\partial_i-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^3\partial_i).$

Ранг матрицы данных условий

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -n-1\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & n & -1\\ -n-2 & n+1 & 0 & 0\\ n+1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -n-1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 4. Значит, имеются 4 цикла алгебры W_n

$$(2n^3-3n-1)u_{40}+(2n^2+2n-1)u_{41})+(n+1)nu_{42}-(n+2)u_{43}-(n-1)u_{44},$$

$$n(n^2+n-4)u_{40}+(n^2+2n-1)u_{41})+(n+1)nu_{42}-(n+1)u_{43}+(n-1)u_{45},$$

$$(n^3-n^2-4n+6)u_{40}+(n^2-3)u_{41})-2u_{42}+2u_{43}-(n-1)u_{46},$$

$$(3n^2-2n-3)u_{40}-(n^2-3)u_{41})+2nu_{42}-2u_{43}+(n-1)u_{47}.$$

Циклами без дивергенции будут

$$(2n^2+2n-3)u_{40}-(n^3-2n^2+2n+1)u_{41}-(3n+2)u_{42}-(n+1)(2n^2-1)u_{43}+$$

$$+n(n+1)^3u_{44}+(n^2-n-1)(n+1)^2u_{45}+n_2(n+1)^2u_{46}+(n^2-n-1)(n+1)u_{47},$$

$$(n^2-2)u_{40}-u_{43}-(n+1)u_{44}+(n^2-1)u_{45}-(n+2)(n^2-n-1)u_{47}.$$

23. $3\pi_1$.
$u_{48}=\sum_{i,j,k}x_1x_i\partial_j\wedge x_1x_j\partial_k\wedge x_1x_k\partial_i$,
$u_{49}=\sum_i x_1z\wedge x_iz\wedge x_1^2\partial_i$,
$u_{50}=\sum_{i,j}x_jz\wedge x_1x_i\partial_j\wedge x_1^2\partial_i$,
$u_{51}=\sum_{i,j,k}x_ix_j\partial_k\wedge x_1x_k\partial_i\wedge x_1^2\partial_j$.
Вычисляем их граничные образы
$\partial(u_{48})=3(n+1)\sum_{i,j}x_1x_i\partial_j\wedge x_1^2x_j\partial_i-3x_1z\wedge x_1^2z-3\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_iz$,
$\partial(u_{49})=-(n-2)x_1z\wedge x_1^2z-\sum_i x_iz\wedge x_1^3\partial_i$,
$\partial(u_{50})=-\sum_{i,j}x_1x_i\partial_j\wedge x_1^2x_j\partial_i+3x_1z\wedge x_1^2z-$
$-(n+1)\sum_i x_iz\wedge x_1^3\partial_i-(n-1)\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_iz$,
$\partial(u_{51})=(n+2)\sum_{i,j}x_1x_i\partial_j\wedge x_1^2x_j\partial_i-\sum_i x_iz\wedge x_1^3\partial_i-2\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_1x_iz$.
Ранг матрицы данных условий

$$\begin{pmatrix} 3n+3 & -3 & 0 & -3\\ 0 & -n+2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -n-1 & -n+1\\ n+2 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

равен 3. Значит, имеется всего один цикл алгебры W_n

$$(n+1)u_{48}-3u_{49}+3u_{50}-3nu_{51},$$

который имеет нулевую дивергенцию.

В последующих двух весах отсутствуют циклы без дивергенции.
24. $2\pi_2+\pi_{n-1}$.
$u_{52}=\sum_i x_1^2\partial_n\wedge x_2^2\partial_i\wedge x_iz-$
$-2x_1x_2\partial_n\wedge x_1x_2\partial_i\wedge x_iz+x_2^2\partial_n\wedge x_1^2\partial_i\wedge x_iz$,
$u_{53}=\sum_i x_1x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_i\wedge x_2z-x_2x_i\partial_n\wedge x_1^2\partial_i\wedge x_2z-$
$-x_1x_i\partial_n\wedge x_2^2\partial_i\wedge x_1z+x_2x_i\partial_n\wedge x_1x_2\partial_i\wedge x_1z$,
$u_{54}=\sum_{i,j}x_1^2\partial_i\wedge x_2x_j\partial_n\wedge x_2x_i\partial_j-x_1x_2\partial_i\wedge x_2x_j\partial_n\wedge x_1x_i\partial_j-$
$-x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_j\partial_n\wedge x_2x_i\partial_j+x_2^2\partial_i\wedge x_1x_j\partial_n\wedge x_1x_i\partial_j$.
Их образы равны
$\partial(u_{52})=\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_2^2x_i\partial_n-2x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n+x_2^2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n+$
$+(n-2)(x_1^2\partial_n\wedge x_2^2z-2x_1x_2\partial_n\wedge x_1x_2z+x_2^2\partial_n\wedge x_1^2z)$,
$\partial(u_{53})=-(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_2^2x_i\partial_n-2x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n+x_2^2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)-$
$-(x_1^2\partial_n\wedge x_2^2z-2x_1x_2\partial_n\wedge x_1x_2z+x_2^2\partial_n\wedge x_1^2z)$,
$\partial(u_{54})=-(n+1)(\sum_i x_1^2\partial_i\wedge x_2^2x_i\partial_n-2x_1x_2\partial_i\wedge x_1x_2x_i\partial_n+x_2^2\partial_i\wedge x_1^2x_i\partial_n)+$
$+(x_1^2\partial_n\wedge x_2^2z-2x_1x_2\partial_n\wedge x_1x_2z+x_2^2\partial_n\wedge x_1^2z)$.

Ранг матрицы данных условий

$$\begin{pmatrix} 1 & n-2 \\ -1 & -1 \\ -n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 2. Значит, имеется всего один цикл алгебры W_n

$(n+2)u_{52} + (n^2 - n - 1)u_{53} - (n-3)u_{54}$.

Бездивергентным элементом является

$(n+1)u_{54} - u_{53} + u_{52}$.

И, наконец, последний случай.

25. $\pi_1 + \pi_2$.

$u_{55} = \sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_2 z \wedge x_i z - x_1x_2\partial_i \wedge x_1 z \wedge x_i z$,

$u_{56} = \sum_{i,j} x_1x_j\partial_i \wedge x_2x_i\partial_j \wedge x_1 z$,

$u_{57} = \sum_{i,j} x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i\partial_j \wedge x_j z - x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i\partial_j \wedge x_j z$,

$u_{58} = \sum_{i,j,k} x_1^2\partial_i \wedge x_2x_k\partial_j \wedge x_ix_j\partial_k - x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_k\partial_j \wedge x_ix_j\partial_k$.

Имеем

$\partial(u_{55}) = (n-2)(x_1 z \wedge x_1x_2 z - x_2 z \wedge x_1^2 z)$,

$\partial(u_{56}) = -2\sum_{i,j} x_1x_i\partial_j \wedge x_1x_2x_j\partial_i - x_2x_i\partial_j \wedge x_1^2x_j\partial_i +$

$+2\sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i z - x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i z$,

$\partial(u_{57}) = -\sum_{i,j} x_1x_i\partial_j \wedge x_1x_2x_j\partial_i - x_2x_i\partial_j \wedge x_1^2x_j\partial_i +$

$+x_1 z \wedge x_1x_2 z - x_2 z \wedge x_1^2 z +$

$+(n-1)\sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i z - x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i z$,

$\partial(u_{58}) = (n+1)\sum_{i,j} x_1x_i\partial_j \wedge x_1x_2x_j\partial_i - x_2x_i\partial_j \wedge x_1^2x_j\partial_i -$

$-\sum_i x_1^2\partial_i \wedge x_2x_i z - x_1x_2\partial_i \wedge x_1x_i z$.

Ранг матрицы данной системы

$$\begin{pmatrix} 0 & n-2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & n-1 \\ n+1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 3. Значит, имеется всего один цикл алгебры W_n

$2nu_{55} + (n-2)(n^2-2)u_{56} + 2(n-2)^2u_{57} - 2n(n-2)u_{58}$.

Бездивергентным элементом является

$(n+1)u_{58} - u_{57} + u_{56} - u_{55}$.

Линейная независимость старших векторов $u_1, u_2, \ldots, u_{58}$ легко проверяется. Предложение доказано.

По ходу доказательства предложения мы доказали и теорему.

Цитированная литература

1. **Фукс Д. Б.** // Функц. анал. и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 62 – 69.
2. **Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.** // Функц. анал. и его прил. 1984. Т. 18, № 3. С. 94 – 95.
3. **Джумадильдаев А. С., Умирбаев У. У.** // Мат.сб. 1995. Т. 186, № 4.

Поступила в редакцию 9.11.2001г.

Работа выполнена в рамках международных проектов
INTAS-93-2618-EXT, INTAS-99-00817.

ХРОНИКА

СЕМИНАР ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ МОН РК

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных на семинаре в феврале-марте 2002г.

М. Т. Дженалиев (Алматы), **М. И. Рамазанов** (Караганды) "О спектре нагруженного дифференциального оператора"(20 февраля 2002 г.).

Рассматриваются спектральные вопросы для нагруженного дифференциального оператора L, определяемого граничной задачей

$$[D_t - A + N]u(t) = f(t), \quad t \in (0,b), \qquad \mu u(0) - u(b) = 0,$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $N[u(t)] = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u(t_k)$, μ, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, $f \in \mathcal{H}$, $A-$ П-оператор [1], $\mathcal{H} = L_2(0,b;H)$, $H = L_2(\Omega)$, $\Omega - n$-мерный куб с ребром 2π.

Обозначим через ρL, $\mathrm{P}\sigma L$ и $\mathrm{C}\sigma L$, соответственно, резольвентное множество, точечный спектр и непрерывный спектр оператора L.

Прежде всего заметим, что поскольку $D_t - A - \lambda + N = D_t - (A+\lambda) + N$, где $A+\lambda-$ снова П-оператор, достаточно изучить случай $\lambda = 0$. Введем обозначения: $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k$,

$$\mathrm{D}(s) \equiv \frac{[\mu - \exp\{b \cdot A(s)\}] \cdot [A(s) - \alpha] + [\mu - 1] \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \exp\{t_k A(s)\}}{A(s)}, \quad s \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

Если s такое, что $A(s) = 0$, то в (1) $\mathrm{D}(s)$ заменяется предельным соотношением: $\lim\limits_{A(s)\to 0} \mathrm{D}(s) = b\alpha + (\mu - 1)[1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k t_k]$. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. $0 \in \rho L$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{D}(s) \neq 0$ $\forall s \in \mathcal{S}$.

Лемма 2. $0 \in \mathrm{P}\sigma L$ *тогда и только тогда, когда для какого-либо* $s_0 \in \mathcal{S}$ $\mathrm{D}(s^0) = 0$, *где* $\mathrm{D}(s)$ *определено в (1).*

Лемма 3. $0 \in \mathrm{C}\sigma L$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{s^l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ *такая, что* $|\mathrm{D}(s^l)| \to 0$ *при* $l \to \infty$.

Замечание 1. При $\mu = 0$, ∞ и произвольном операторе A точечный спектр оператора L не всегда пуст (в отличие от случая, когда отсутствует нагрузка [1, с.122; 2;3]).

Замечание 2. Остаточный спектр оператора L пуст, как и у оператора A, то есть $\sigma L = \overline{\mathrm{P}\sigma L}$, $\mathrm{C}\sigma L = \sigma L \setminus \mathrm{P}\sigma L$. Оказалось, что это свойство оператора L не зависит от наличия нагрузки.

Таким образом, из вышеуказанных лемм следует справедливость теоремы.

Теорема. *Точка* $\lambda \in \mathbb{C}$ *принадлежит одному из множеств* ρL, $\mathrm{P}\sigma L$, $\mathrm{C}\sigma L$.

В заключение отметим, что нагруженные дифференциальные операторы изучались также в работах [2—5].

Литература. 1. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980. 2. Dzhenaliev M. T.//J.Korean Math.Soc. 2000. Vol. 37, №6. P. 1031—1042. 3. Дженалиев М. Т.// Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, №1. С.48—54. 4. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995. 5. Ломов И. С.// Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №1. С. 80—93; №9. С. 1550—1563.

М. А. Сахауева (Алматы) "О решении двумерной двухфазной задачи Стефана"(20 февраля 2002 г.).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, заключенная между прямыми S_1 и S_2. Свободная граница γ ($y = \Psi(x,t)$) делит Ω на две подобласти: Ω_1 с границей $S_1 \cup \gamma$ и Ω_2 с границей $\gamma \cup S_2$. Предполагаем, что расстояние между S_1 и γ, γ и S_2 не превосходит некоторой положительной константы. Обозначим через L_k — параболический оператор 2-го порядка, $k = 1,2,3$.

Пусть $p(x,y,t)$ — давление в области Ω_1, $u_m(x,y,t)$ — температура в области Ω_m, $m = 1,2$. Требуется определить функции $p(x,y,t)$, $u_1(x,y,t)$, $u_2(x,y,t)$, $\Psi(x,t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$L_1 p(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_1,\ 0 < t < T,$$

$$L_{1+m} u_m(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_m,\ 0 < t < T,\ m = 1,2,$$

начальным условиям

$$\Psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}\ ,$$

$$p|_{t=0} = p_0(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega_1\ , \quad u_m|_{t=0} = u_{0m}(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega_m\ ,\ m = 1,2,$$

краевым условиям

$$p|_{S_1 \times (0,T)} = q(x,t)\ , \quad u_m|_{S_m \times (0,T)} = q_m(x,t)\ ,\ m = 1,2,$$

условиям на свободной границе $y = \Psi(x,t)$

$$u_1 = u_2 = b_1(x,y,t) + b_2(x,y,t)p(x,y,t)\ , \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0\ ,$$

$$\lambda_1(x,y,t)\frac{\partial u_1}{\partial n} - \lambda_2(x,y,t)\frac{\partial u_2}{\partial n} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\partial\Psi/\partial x)^2}}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\ ,$$

где n — нормаль к поверхности γ, направленная в область Ω_2, $n = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\partial\Psi/\partial x)^2}}\Big(-\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}; 1\Big)$.

Доказана однозначная разрешимость задачи в весовом пространстве Гельдера, введенного в [1] В.С.Белоносовым, получены точные оценки решения. Основываясь на идее работы [2], предлагается метод построения приближенного решения исследуемой задачи.

Литература. 1. Белоносов В. С., Зеленяк Т. И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск. 1975. 155 с. 2. Овчарова А.С. // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 110 – 119.

Г. И. Бижанова (Алматы), **В. А. Солонников** (Санкт-Петербург) "О разрешимости нелинейной задачи со свободной границей Маскета-Веригина в произвольной области"(20 февраля 2002 г.).

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geq 2$, $S = \partial\Omega$ и пусть замкнутая поверхность $\gamma(t)$ делит область Ω на две подобласти $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ так, что $\partial\Omega_1(t) = S \cup \gamma(t)$, $\partial\Omega_2(t) = \gamma(t)$. Пусть $\gamma(0) = \Gamma$, $\Omega_m(0) = \Omega_m$. Обозначим $Q_T^{(m)} = \{(x,t)\,|\,x \in \Omega_m(t),\ t \in (0,T)\}$, $m = 1,2$, $S_T = S \times [0,T]$. Рассмотрим задачу Маскета-Веригина. Требуется найти свободную границу $\gamma(t)$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ по условиям

$$\partial_t u_m - a_m \Delta\, u_m = 0 \text{ в } Q_T^{(m)},\ m = 1,2,$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0m}(x),\ x \in \Omega_m,\ m = 1,2,\ \gamma(t)|_{t=0} = \Gamma,$$

$$u_1|_{S_T} = b(x,t),\ u_1 - u_2|_{\gamma(t)} = 0,$$

$$\lambda_1\partial_\nu u_1 - \lambda_2\partial_\nu u_2|_{\gamma(t)} = 0,\ V_\nu = -c_0\lambda_1\,\partial_\nu u_1|_{\gamma(t)},\ 0 < t < T, \tag{1}$$

где ν — нормаль к поверхности $\gamma(t)$, направленная в $\Omega_2(t)$, V_ν — скорость перемещения $\gamma(t)$ по нормали ν.

Для малых значений времени свободная граница $\gamma(t)$ может быть задана уравнением $x = \xi + \rho(\xi,t)\,N(\xi)$, $\xi\in\Gamma$, где N — векторное поле, заданное на Γ, причем $N\in C^\infty(\Gamma)$, $N\cdot\nu \geq d_1 = \mathrm{const} > 0$.

Т е о р е м а. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$, $S,\ \Gamma\in C^{2+\alpha}$.

Тогда найдется $0 < T_0 \leq T$ *такое, что при любых функциях* $b(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S_T)$, $u_{0m} \in C^{2+\alpha}(\Omega_m)$, *удовлетворяющих условиям согласования первого порядка и условиям* $\partial_\nu u_{01} - \partial_\nu u_{02}\geq d_1 = \mathrm{const} > 0$, $|\lambda_1\nabla \mathrm{u}_{01} - \lambda_2\nabla \mathrm{u}_{02}|_\Gamma|\ll 1$, *задача (1) имеет единственное решение* $u_m\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q^{(m)}_{T_0})$, $m=1,2$, $\rho\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_{T_0})$, $\partial_t\rho\in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Gamma_{T_0})$, *которое подчиняется оценке*

$$\sum_{m=1}^{2}|u_m|^{(2+\alpha)}_{Q^{(m)}_t} + |\rho|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_t} + |\partial_t\rho|^{(1+\alpha)}_{\Gamma_t} \leq c_1\left(\sum_{m=1}^{2}|u_{0m}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_m} + |b|^{(2+\alpha)}_{S_t}\right),\ t\leq T_0.$$

Доказательство теоремы приведено в [1].

Литература. 1.Бижанова Г. И., Солонников В. А.// Алгебра и анализ. 2000. Т.12, №6. С.98–139.

А. Ш. Акыш (Алматы) "Разрешимость нелинейного уравнения Больцмана" (20 марта 2002 г.).

Сообщение является развитием работы [1]. Задача Коши для полного нелинейного уравнения Больцмана со степенным потенциалом межмолекулярного взаимодействия в области $Q = R_1^+ \times R_3\times V_3$ $\Big(t\in R_1^+\equiv[0,\infty);\ x\in R_3\equiv\{-\infty < x_j < \infty,\ j=\overline{1,3}\};\ v\in V_3,\ V_3 \equiv \{-\infty < v_j < \infty,\ j=\overline{1,3}\}\Big)$ относительно функции распределения $f=f(t,x,v)$ запишется [2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v,\mathrm{grad} f) = \mathbf{J}(f) - f\mathbf{S}(f) \equiv \mathbf{B}(f,f),\quad f(t,x,v)\Big|_{t=0} = \varphi(x,v), \tag{1}$$

где $\mathbf{J}(f) = \int\limits_{V_3}\int\limits_{\Sigma} f(t,x,v')f(t,x,v_1')K(\theta,W)d\sigma dv_1$; $\mathbf{S}(f) = \int\limits_{V_3}\int\limits_{\Sigma} f(t,x,v_1)K(\theta,W)d\sigma dv_1$; $K(\theta,W) = |W|^{(n-5)/(n-1)}\Lambda(\theta)$; $v,\ v_1$ — векторы скорости двух сталкивающихся молекул; $W=v_1-v$ — вектор относительной скорости; $v' = v+\beta(\beta,W)$, $v_1' = v_1-\beta(\beta,W)$; β — единичный вектор в направлении рассеяния молекул, $\beta = \big(\sin\theta\cos\varepsilon, \sin\theta\sin\varepsilon,\cos\theta\big)$; $(\theta,\varepsilon)\in\Sigma\equiv\big\{0\leq\theta\leq\pi; 0\leq\varepsilon\leq2\pi\big\}$. Начальная функция $\varphi(x,v)$ такая, что

$$\varphi(x,v)\in\mathbf{C}^2(R_3;L_1(V_3));\quad \int\limits_{V_3}\left\|\mathbf{B}\Big(\mathbf{B}(\varphi,\varphi),\varphi\Big)\right\|_{\mathbf{C}(R_3)}dv < \infty; \tag{2}$$

$$\int\limits_{V_3}|v|^\gamma\parallel\varphi(v)\parallel_{\mathbf{C}^m(R_3)}dv < \infty;\quad \gamma=0,2;\quad m=\overline{0,2}; \tag{3}$$

где $\mathbf{C}^m(R_3)$ — пространство m-раз дифференцируемых функций в R_3.

Теорема 1. *Если начальная функция* $\varphi(x,v)$ *удовлетворяет условиям (2), (3), то существует единственное решение* $f(t,x,v)\in C^1(R_1^+\times R_3;L_1(V_3))$ *задачи (1) и для него справедливы оценки*

$$\int\limits_{V_3}|v|^\gamma\|f(t,v)\|dv \leq \int\limits_{V_3}|v|^\gamma\|\varphi(v)\|dv;\quad \int\limits_{V_3}|v|^\gamma\|f_t(t,v)\|dv \leq \int\limits_{V_3}|v|^\gamma\|\psi(v)\|dv,\ \gamma=0,2;$$

$$\int\limits_{V_3} \|f_{tt}(t,v)\|dv \le \int\limits_{V_3} \|\chi(v)\|dv; \int\limits_{V_3} |v|^{\gamma}\|f_{x_j}(t,v)\|dv \le \int\limits_{V_3} |v|^{\gamma}\|\varphi_{x_j}(v)\|dv, \quad \gamma = 0,2; \quad j=\overline{1,3};$$

$$\int\limits_{V_3} |v|^{\gamma}\|\mathbf{B}(f,f)\|dv \le \int\limits_{V_3} |v|^{\gamma}\|f_t(t,v)\|dv + \int\limits_{V_3} |v|^{1+\gamma}\sum_{j=1}^{3}\|f_{x_j}\|dv, \ \gamma=0,1; \ \forall t \in R_1^+,$$

где $\psi(x,v) = -(v, \mathrm{grad}\varphi) + \mathbf{B}(\varphi,\varphi)$; $\chi(x,v) = -(v, grad\psi) + \mathbf{B}(\psi,\varphi)$, $\|f(t,v)\| = \sup\limits_{x\in R_3} |f(t,x,v)|$.

Теорема 2. **H** — *функция Больцмана относительно* $\|f(t,v)\|_{\mathbf{C}(R_3)}$ *имеет вид*

$$H(t) = \int\limits_{V_3} \|f(t,v)\|_{\mathbf{C}(R_3)} \ln \|f(t,v)_{\mathbf{C}(R_3)}\|dv,$$

и функция $\|f(t,v)\|_{\mathbf{C}(R_3)}$ *при* $t\to\infty$ *стремится к функции Максвелла* $\|f(v)\|_{\mathbf{C}(R_3)} = Ce^{-\alpha v^2}$, *где* C *и* α *— постоянные, определяемые с помощью следующих соотношений*

$$\int\limits_{V_3} |v|^{\gamma}\|f(t,v)\|_{\mathbf{C}(R_3)}dv = \int\limits_{V_3} |v|^{\gamma}|\varphi(x_0,v)|dv, \ \gamma = 0,2; \ \forall t,$$

x_0 *— точки, где функция* $f(t,x,v)$ *достигает своих супремумов в* R_3.

Литература. 1. Акыш А. Ш. // Математический журнал. Алматы. 2002. Т. 1, № 1. 2. Неравновесные явления: Уравнения Больцмана: пер. с англ. Под ред. Дж.Л.Либовица, Е.У.Монтролла. М., 1986.

Ю. Р. Шпади (Алматы) "Оценка влияния эффекта Колера на температурное поле в электрических контактах"(20 марта 2002 г.).

В 1940 году М.Колер опубликовал работу, в которой описал эффект, выражающийся в следующем факте: анод в электрическом коммутирующем устройстве имеет более высокую температуру по сравнению с катодом. Данный эффект отчетливо был выражен при малых токах порядка $\sim 10^{-4}A$. Колером была высказана гипотеза, что перегрев анода вызывают электроны, преодолевающие потенциальный барьер, создаваемый пленкой на поверхности электродов посредством туннельной проводимости. В дальнейшем этот эффект был детально исследован с экспериментальной стороны (Р. Хольм, Виндеман, Франк и др.).

В представленной работе для описания количественных закономерностей рассматривается осесимметричная математическая модель распределения температуры в электродах в приближении неидеального электрического контакта. Модель учитывает ток, создаваемый туннельными электронами, и включает два уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta_i}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta_i}{\partial z^2} + \frac{\rho j_i^2}{\lambda} = 0, \quad i = 1,2,$$

в которых функции $\theta_1(r,z)$ и $\theta_2(r,z)$ определяют температуру, соответственно, в катоде $D_1 = \{0<r<\infty, -\infty<z<0\}$ и аноде $D_2 = \{0<r<\infty, 0<z<\infty\}$.

Теплота $\Pi = j\cdot u_f = j^2\cdot\sigma_f$, выделяемая туннельными электронами на поверхности анода в контактном пятне $0\le r<f$, затем распределяется между катодом и анодом: $\Pi = \Pi_{\text{К}} + \Pi_{\text{а}} = \frac{\theta_f(r,0)}{W} + \Pi_{\text{а}}$, $\theta_f(r,0) = \theta_2(r,+0) - \theta_1(r,-0)$. Эта теплота учитывается краевыми условиями модели на границе контакта $z=0$

$$\lambda\frac{\partial\theta_f(r,0)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\theta_f(r,0)}{W}, & 0\le r<f, \\ 0, & f<r<\infty, \end{cases} \qquad -\lambda\frac{\partial\theta_1(r,0)}{\partial z} = \begin{cases} \Pi - \frac{\theta_f(r,0)}{W}, & 0\le r<f, \\ 0, & f<r<\infty, \end{cases}$$

На бесконечно удаленных от контактного пятна границах $z = \pm\infty$, $r = +\infty$ полагается $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Физические параметры, использованные в выражениях, имеют следующий смысл: j — плотность тока в контактном пятне, u_f — электрическое напряжение между поверхностями пленки, σ_f — электрическое туннельное удельное сопротивление на единицу площади поверхности пленки, W — удельное тепловое сопротивление сквозь пленку, λ — удельная теплопроводность материала контактов и пленки.

В результате решения краевой задачи, проведенного известными методами, определены температуры в центре пятна для обоих электродов. Результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Для оценки влияния эффекта Колера на нагрев контакта и проведения сравнительного анализа между вкладом в нагрев контактов электронов проводимости и туннельных электронов вводится безразмерный критерий Колера Ko в виде отношения сопротивления пленки к контактному сопротивлению при отсутствии пленки (сопротивлению сжатия). С помощью критерия Колера температура в центре пятна на электродах может быть выражена следующим образом

$$\theta_1(0,0) = \theta_j[1 + \eta_1(Ko)], \quad \theta_2(0,0) = \theta_j[1 + \eta_2(Ko)].$$

Функции $\eta_1(Ko)$ и $\eta_2(Ko)$ определяют, соответственно, отношение туннельных и джоулевых компонент в процессе нагрева катода и анода. Из расчета, в частности, следует, что если $Ko < < 0.02$, то туннельный нагрев анода составляет менее 10% по сравнению с джоулевым нагревом, при $Ko = 0.28$ они совпадают, а при $Ko > 1$ туннельный компонент температуры в 10 раз превышает джоулев компонент.

Литература. S.N. Kharin, A.T. Khulakhmetova, Yu. R. Spadi, "Estimation of Kohler Effect on the Temperature Field in Electrical Contacts", Proc. International IEEE Conf. INMIC-2000, Islamabad, Pakistan, 2000 pp.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518.23 2000 MSC: 46E35, 46A32

Aitenova M.S, Kusainova L.K **On asymptotics of approximative numbers distribution of general weighted Sobolev spaces embeddings. I**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.3–9.

In this work double-ended estimates of approximative numbers distribution of weighted embedding of Sobolev spaces into Lebesgue spaces with the general weights are obtained in the terms of local maximal operators.

References — 14.

УДК: 517.9 2000 MSC: 35F20, 35F30, 35L60

Akysh A.Sh. **On a non-linear Boltzmann equation** // Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.10–16.

By of the method of splitting the global theorem of existence and uniqueness of the solution of a full non-linear Boltzmann equation in the space of continuous functions is proved.

References — 9.

УДК: 538.3+538.56 2000 MSC: 35Q60

Alexeeva L.A. **On closing of Maxwell equations**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.17–23.

A new equation for three-dimensional complex vector A-field is considered. The equation is equivalent to the system of Maxwell equations for electromagnetic field. Generalized solutions of this equation are built for nonstationary, stationary and monochromatic fields. A new equation for a complex J-current which closes the system of Maxwell equations for electromagnetic field is proposed on the base of hypothesis that magnetic charge is a mass and magnetic currents are a moving this mass. The laws of conservation of (A,J)-field energy are under consideration.

References — 3.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

Ayaganov E.T., Pachshenko G.N. **On construction of the system of comparison for the linear stationary object with delay**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.24–30.

This work is devoted to the construction of the comparison system for complex object with delay on the basic of the comparison method with vector Lyapunov's function, direct Lyapunov's method and Razumikhin's approach. The package of applied programs in language Delphi 5.0 for the constructing the system of comparison for complex object with delay is developed.

References — 17.

УДК: 517.956 2000 MSC: 34L05, 35P05, 47A10

Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. **Spectral properties of the loaded differential operator**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.31–37.

For considerable loaded differential operator it is proved that any complex number belongs to one of the following sets: resolvent set, point spectrum and continuous spectrum.
References — 9.

УДК: 510.55 2000 MSC: 03D45

Dobritsa V.P. **About Index Sets in Generalized Computable Innumerations**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.38–42.

The article (describes and) gives the precise estimation of arithmetical complexity of Index sets in generalized computable innumerations, stiputeted that computability lies in a certain class of the arithmetical hierarchy of sets.
References — 10

УДК: 512.554.31 2000 MSC: 17B50, 17B56

Ibraev S.S., Turetaeva G.A. **2-cihomologies of coadjint module of Lie algebras of type** A_n// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.43–48.

Authors calculated 2-cohomologies of coadjoint module of classical Lie algebras of type A_n over algebraically closed fields of positive characteristic.
References — 10.

УДК: 517.51 2000 MSC: 47G10, 47B38

Oinarov R.O. **Criteria of compactness of one class of Volterra type integral operators**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.49–55.

The extension classes of nonnegative functions are defined for every nonnegative integer m. When the kernels of Volterra type integral operators belong to these classes, the necessary and sufficient conditions of theirs compactness are given.
References — 3.

УДК: 517.939 2000 MSC: 34A34, 37C75

Rakhimberdiev M.I., Kalybai A.A. **The spatially homogeneous discrete model of Boltzmann equation. The integrable case**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.56–60.

In this paper a variant of spatially homogeneous discrete model of Boltzmann equation in the form of integrable system of ordinary differential equations is described.
References — 3.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35R35

Sarsekeyeva A.S. **The investigation of the Stefan problem with Gibbs-Thomson condition at the free boundary**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.61–69.

The nonlinear multidimentional problem for the second order parabolic equations, in which the temperature at the unknown boundary depends on the curvature and normal velocity of the interface,

are studied. The existence, locally in time, and uniqueness for the solutions in the weighted Hölder spaces of functions are proved, the coercive estimates are established.
References — 9.

УДК: 517.956.4 2000 MSC: 35A05,35K20

Sakhauyeva M.A. **On one model problem of conjugation**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.70–75.

The model problem of conjugation emerged during investigation of problems with free borders has been studied. The theorem of existence and uniqueness for the solution in Hölder weighted space is proved, the exact estimate of the solution is established.
References — 11.

УДК: 517.977 2000 MSC: 49J20, 49J50, 49K20

Serovajsky S. **Optimal control for parabolic equations with non-smooth nonlinearity. I**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.76–83.

The optimal control problems for the systems described by the equations of parabolic type with non-smooth nonlinearity are considered. Presence of a non-smooth member interferes with the reception of conditions of optimality by standard methods. For overcoming available difficulties smooth approximation of the equation is carried out.
References — 17.

УДК: 539 2000 MSC: 74J20

Urazakov E.I. **On the flow of density of energy of Love waves on statically rough boundary**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.84–93.

The flow of density of energy of Love waves distributing and dissipating on a statically rough boundary of an elastic layer with a half-space media is obtained. The conditions allowing to do a "scalene"approaching in this problem of dispersion have been got.
References — 6.

УДК: 512.519.46 2000 MSC: 13D03

Uteulieva K.N. **On third homology group of nilpotent subalgebra $\mathcal{L}_1$ of special Lie algebra** // Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 1. P.94–102.

Third homology group of third degree $H_3^{(3)}(\mathcal{L}_1, P)$ for nilpotent subalgebra $\mathcal{L}_1$ of special Lie algebra is calculated.
References — 3.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечает требованиям журнала.