ISSN 1682–0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2003 том 3 № 3 (9)

Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 3 № 3 (9) 2003

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 3, № 3 (9), 2003

ХРОНИКА

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

В г.Алматы с 24 по 26 сентября 2003 года в Институте математики МО и Н РК прошла Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения", посвященная 100-летию со дня рождения основателя первой научной математической школы в Казахстане, первого директора Института математики, академика Константина Петровича Персидского. Она была проведена Институтом математики совместно с Казахским национальным университетом им.аль-Фараби, Актобинским государственным университетом им.Х.Жубанова и Жетысуским государственным университетом им.И.Жансугурова.

Этот номер журнала полностью посвящен публикации избранных докладов, сделанных на этой юбилейной конференции. Остальные доклады будут опубликованы в последующих номерах "Математического журнала".

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 6 — 11*

КОНСТАНТИН ПЕТРОВИЧ ПЕРСИДСКИЙ

Константин Петрович Персидский родился 23 октября 1903 г. в селе Лобановка Старо-Рачейской волости Сызранского уезда Симбирской губернии. Отец его, Петр Иванович, работал счетоводом, мать, Варвара Павловна Пачина, была крестьянкой из села Лобановка, занималась домашним хозяйством.

Константин Персидский был вынужден сочетать учебу с физическим трудом, выполняя работу на мыловаренном заводе, разгрузке барж на Волге и т.д.. В своей автобиографии при поступлении на учебу он указал, что имеет специальность кочегара, занимался крестьянским трудом, а также работал в ремесленном производстве. Проявив склонность и большие способности к математике еще в школьные годы, он осознал необходимость учиться дальше после окончания средней школы. Подав в 1921 г. заявление в Московскую горную академию и выдержав вступительные испытания, он не стал там учиться ввиду трудного положения в семье. В 1922 г. К.П. Персидский поступил учиться в Самарский государственный университет на педагогический факультет, физико-математическое отделение.

В 1923 г. К.П. Персидский переводится на физико-математический факультет Казанского государственного университета, на 2 курс. В Казани он получает хорошую подготовку, обучаясь у известных профессоров Д.Н. Зелигера, А.П. Котельникова, Н.Н. Парфентьева и др. Его дипломная работа была выполнена на тему "Приложение непрерывных дробей к вычислению вероятностей для теоремы Якова Бернулли". За период учебы в Казанском государственном университете до его окончания в 1927 г. получал стипендию от Самарского ГИКа (городской исполнительный комитет). После успешного окончания физико-математического факультета отборочная комиссия, состоящая из представителей студенческого актива и профессорско-преподавательского состава (ППС), рекомендовала К.П. Персидского в аспирантуру. В период аспирантуры он проявил большую творческую способность, написав в первые два-три года шесть научных статей по различным разделам математики. Этим работам К.П. Персидского дал высокую оценку его научный руководитель Н.Н. Парфентьев. Вскоре К.П. Персидский написал еще три работы (в том числе одну по теории устойчивости движения), и после успешного окончания аспирантуры его оставляют на педагогической работе в должности доцента. Весьма плодотворно проходят уже первые годы его научно-педагогической деятельности. В эти годы работы доцентом он уже автор 13 работ, в том числе 6 – по теории вероятностей и 4 – по теории устойчивости движения. Знаменательно то, что в этот период у него появляется новое направление научных интересов. И это не случайно.

В 30-х годах в Казани объединяющим центром почти всех творчески работающих механиков и некоторых математиков университета стал научный семинар, организованный Н.Г. Четаевым в 1931 г. в Казанском университете по теории устойчивости движения. В математизации работы семинара существенную роль сыграл К.П. Персидский, который параллельно Н.Г. Четаеву, читавшему специальный курс "Теория устойчивости движения", стал читать специальный курс "Устойчивость интегралов (решений) дифференциальных уравнений", студентам, специализирующимся по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

Активная творческая деятельность К.П. Персидского и разносторонний оригинальный характер его исследований, получивших высокую оценку у ведущих ученых в этих областях, уже на третьем году работы доцентом привели к постановке вопроса о присвоении ему ученого звания профессора.

Приведем отрывки из отзывов ученых при представлении К.П. Персидского к ученому званию профессора (из личного архива К.П. Персидского).

Профессор А.Я. Хинчин: "...В этих работах К.П. Персидский показал себя вполне владеющим современной методикой теории вероятностей, обладающим прекрасным научным вкусом и большой изобретательностью в обосновании доказываемых положений...".

Профессор Н.Г. Четаев: "...Быстрота, с которой Константин Петрович вошел в трудную область и прочно разобрался в существенных понятиях устойчивости, заставляют считать, что в лице Константина Петровича мы имеем сильного научного работника, которому заслуженно можно дать звание профессора...".

Профессор Н.Н. Парфентьев: "...В представленных физико-математическому факультету работах доцент Персидский К.П. обрисовал себя видным исследователем в области обоснования теории вероятностей, примыкающим по своим новаторским замыслам к большой русской школе математиков, являющейся в мировой науке в разрешении проблем обоснования теории вероятностей основной и законодательной...В наши дни мы имеем необычный расцвет исследований по теории вероятностей, и вся русская школа в лице математиков Хинчина А.Я., Колмогорова А.Н., Бернштейна Н.С. и ряда молодых математиков, не выпускает из своих рук ведущей роли в мировом масштабе в области теории вероятностей, и вот к этой блестящей плеяде ученых надо причислить и доцента Персидского, независимо от указанной плеяды поставившего себе ряд проблем кардинальной важности в деле обоснования теории вероятностей и успешно их разрешившего своими собственными методами…"

Такую же высокую оценку работам К.П. Персидского дали профессора Н.Г. Чеботарев и А.Н. Колмогоров.

Константин Петрович был утвержден в ученом звании профессора кафедры математики решением квалификационной комиссии Наркомпроса РСФСР от 11.01.1934 г. После утверждения в ученом звании профессора он сосредоточил свое внимание на вопросах теории устойчивости движения, возвращаясь, время от времени к вопросам теории вероятностей, и написал ряд работ по важнейшим проблемам этой теории.

В середине 1940 г. К.П. Персидский принимает предложение Всесоюзного комитета по делам высшей школы при СНК СССР помочь молодому Казахскому государственному университету им. С.М. Кирова в подготовке математических кадров и в августе месяце того же года переезжает в г. Алма-Ату. С тех пор 30 лет своей жизни он отдал развитию математической науки и математического образования в Казахстане. С 1940 по 1968 гг. Константин Петрович работает в КазГУ, где заведует сначала кафедрой математического анализа и с 1946 г. – вновь организованной кафедрой дифференциальных уравнений.

К.П. Персидский был выдающимся специалистом по теории дифференциальных уравнений и устойчивости их решений, а также опытным организатором учебно-научной работы. Сразу после переезда в Алма-Ату К.П. Персидский включается в активную работу по организации научно-исследовательской работы на факультете. Впервые за время функционирования факультета было объединение значительной части преподавателей математических кафедр КазГУ, КазПИ и других вузов Алма-Аты для совместного участия в работе объединенного математического научного семинара под руководством К.П. Персидского с широкой тематикой по различным разделам математики и механики. В семинаре ведущее место занимали актуальные (для того времени) вопросы математической теории устойчивости движения, играющей важную роль в развивающихся теориях полета самолетов, автоматического регулирования и оптимального управления. Первыми ощутимыми результатами работы семинара было завершение работ некоторыми из участников над кандидатскими диссертациями и представление их к защите. Так, М.К. Сатбаев и В.П. Марачков представили свои диссертации в мае месяце. Первый из них защитил диссертацию в КазГУ 3 июня, а второй – в КазанГУ 26 июня. Для того времени это было большим достижением. И в военное время не останавливалась работа по повышению квалификации преподавательского состава. Под руководством К.П. Персидского защитили кандидатские диссертации участники семинара доцент КазГУ Ш.М. Еникеев в ноябре 1942 г. и доцент КазПИ им. Абая О.А. Жаутыков в феврале 1944 г. Большой объем научных исследований выполнил сам Константин Петрович в 1943-1944 гг. Он завершил работу над докторской диссертацией "К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений", защита которой затянулась из-за сложного военного времени и состоялась только в начале июня 1946 г. в МГУ им. М.В. Ломоносова. Официальными оппонентами выступили известные математики: профессор МГУ В.В. Немыцкий, члены-корреспонденты АН СССР В.В. Степанов и Н.Г. Четаев. Краткое содержание диссертации было опубликовано во Всесоюзном математиком журнале "Успехи математических наук" (новая серия, 1946 г., т.1, вып. 5-6, стр. 250-255). Полученные, по всем рассмотренным вопросам диссертации, результаты были оценены специалистами как выдающиеся. Многие из них явились ответами на вопросы, долгое время остававшиеся в теории устойчивости спорными, и оказали в дальнейшем огромное влияние на последующее развитие этой теории.

Одновременно с КазГУ Константин Петрович работает в АН КазССР. Здесь до сентября 1951 г. он заведует Сектором математики и механики, в сентябре 1951г. избирается действительным членом АН КазССР и с 1951 г. по 1954 г. является Академиком – председателем Отделения физико-математических наук. В 1965 г. старания К.П. Персидского, академика АН КазССР О.А. Жаутыкова и других видных математиков республики по созданию Института математики и механики увенчались успехом. В январе 1966 г. Константин Петрович назначается первым директором Института математики и механики и переходит на работу в Академию наук. Под его руководством Институт получил быстрое развитие. Была разработана широкая тематика научных исследований, создано около десятка лабораторий по современным направлениям математики. Лабораторией дифференциальных уравнений в функциональных пространствах заведовал он сам.

Начиная с 1948 года наряду с успешным продолжением исследований по теории конечных систем дифференциальных уравнений, развернулась работа по теории бесконечных систем дифференциальных уравнений, основные программные положения которой были разработаны К.П. Персидским в 1947 г. и изложены в его работах, опубликованных в "Известиях АН КазССР", "ПММ" и "ДАН СССР". Опираясь на эти источники, разрабатывали различные вопросы теории счетных систем ряд членов математических кафедр КазГУ, КазПИ, КазГМИ, а так же аспиранты и соискатели Сектора математики и механики АН КазССР и защитили кандидатские диссертации.

Работы К.П. Персидского по уравнениям в линейно-нормированных пространствах и так называемым функциональным уравнениям также послужили источником для защиты диссертаций большой группой математиков.

Опубликованные работы К.П. Персидского и других казахстанских математиков благодаря периодически издававшимся печатным органам – "Известия АН КазССР", "Вестник АН КазССР", "Прикладная математика и механика", "Математический сборник", "ДАН СССР" и другие – стали достоянием математиков Советского Союза и зарубежья. В середине 50-х годов в математическом мире заговорили о "Казахстанской школе по дифференциальным уравнениям" во главе с К.П. Персидским. Это было серьезным признанием вклада казахстанцев в математическую науку.

Огромно значение педагогической деятельности К.П. Персидского в развитии учебного процесса высшей школы республики. С 1940 по 1946 гг. он являлся заведующим кафедрой математического анализа КазГУ. После блестящей защиты им докторской диссертации в 1946 г. в КазГУ была организована кафедра дифференциальных уравнений, которую он возглавлял до 1968 г. В период работы на кафедре К.П. Персидский читал лекции по таким фундаментальным дисциплинам, как дифференциальные уравнения, теория вероятностей, теории функций действительного и комплексного переменных, интегральным уравнениям и другим. Уже в конце сороковых и в начале пятидесятых годов в виде специальных курсов начал читать "Функциональный анализ", "Методы вычислений", с 1960г. – общий курс "Математическая логика", которые в те годы еще не были включены в типовой учебный план. Константин Петрович в начале пятидесятых годов добился создания при кафедре дифференциальных уравнений Лаборатории вычислительных машин, что явилось в последующем основой для специализации "вычислительная математика".

Константин Петрович Персидский помогал ряду вузов г. Алма-Аты в организации учебного процесса, принимал активное участие в комплектовании кадрами их математических кафедр. Вместе со своими учениками из КазГУ (Багаутдиновым Г.Н., Еникеевым Ш.М., Ибрашевым Х.И., Харасахалом В.Х. и другими) читал лекции по фундаментальным и специальным курсам высшей математики в КазПИ, ЖенПИ, ГМИ и др.

В последние годы жизни Константин Петрович ввел в науку два типа нелинейных нормированных пространств и разработал в них основные вопросы математического анализа, теории дифференциальных и специального вида функциональных уравнений. На основе результатов К.П. Персидского и его учеников (Г.Н. Багаутдинова, А.А. Хабибуллина, О.М. Мейрамкулова, Н.И. Лобановой) издана монография “Дифференциальные уравнения и устойчивость их решений в некоторых нелинейных пространствах” (Алматы, "Гылым", 1996 г., 170 с.).

Константин Петрович с 1947 г. до конца своей жизни был первым бессменным ответственным редактором механико-математического выпуска “Известия АН КазССР”, с 1952 по 1969 г. был первым и бессменным председателем впервые организованного на физико-математическом факультете КазГУ Совета по присуждению ученых степеней; организовал и проводил Первую, Вторую, Третью республиканские межвузовские научные конференции и ряд республиканских совещаний по математике, в которых принимали участие ученые из крупных научных центров и вузов страны: академики М.И. Иманалиев (Фрунзе), Н.Н. Красовский (Свердловск), Л.Д. Кудрявцев, С.М. Никольский (Москва), В.А. Плисс (Ленинград), Н.Н. Яненко (Новосибирск) и многие другие.

Константин Петрович был большим патриотом своей Родины, активно участвовал в проведении в жизнь больших государственных мероприятий, решительно боролся за приоритет советской науки. В годы Великой Отечественной войны он был научным консультантом на крупном промышленном предприятии оборонного значения, участвовал в подготовке квалифицированных технических кадров для Армии.

Многогранная деятельность К.П. Персидского была высоко оценена правительством – он награжден двумя орденами Трудового Красного Знамени, медалями, Почетными Грамотами Верховного Совета КазССР, избран академиком АН КазССР, ему присвоено звание “Заслуженный деятель науки КазССР”.

Константин Петрович ушел из жизни после тяжелой продолжительной болезни 22 июня 1970 г.

Идеи и результаты К.П. Персидского находят свои продолжения в работах его учеников и последователей. Были выпущены Избранные труды К.П. Персидского в двух томах, Наука, Алма-Ата, 1976, I т., 271 с., II т., 247 с. и библиография К.П. Персидского, Наука, Алма-Ата, 1984 г., 50 с. Они являются одними из основных источников по специальным курсам, читаемым в ряде вузов республики в т.ч. КазНУ им. аль-Фараби. Ряды его учеников, защитивших докторские диссертации при его жизни (О.А. Жаутыков, В.Х. Харасахал, А.К. Бедельбаев) пополнились новыми именами (С.К. Персидский, Ю.Г. Золотарев, Е.И. Глузберг, М.О. Тулегенов). К этой группе можно отнести, наверное и учеников его учеников (Д.У. Умбетжанова, И.Т. Тажимуратова, Я.М. Гольцера, Д.С. Жумабаева, Ж.С. Сартабанова и др.).

Многие видные математики (академики НАН РБ Н.П. Еругин, РАН Н.Н. Красовский, В.И. Зубов, В.А. Плисс, В.В. Румянцев, В.М. Матросов, уругвайские профессоры Х. Массера, Х. Шеффер, чешские профессоры Я. Курцвеиль, И. Вркоч, бельгийские профессоры Н.Руш, П. Абетс, М. Лалуа) высоко оценивая результаты К.П. Персидского в своих монографиях и статьях, ссылаются на его труды по теории устойчивости как на первоисточники, где изложена постановка вопроса и получены первые фундаментальные результаты.

В заключении еще раз отметим основные достижения К.П.Персидского в математической науке.

Первые серьезные научные результаты К.П.Персидский получил по теории вероятностей и посвящены они были закону больших чисел и предельным теоремам. Он дал оригинальное решение проблемы закона больших чисел, установив достаточно широкие условия, при которых среднеарифметическое случайных величин равносходится по вероятности со среднеарифметическими их математических ожиданий. В этих работах К.П.Персидский вводит новую формулировку закона больших чисел, отличную от чебышевской и дает законченное решение проблемы закона больших чисел, когда последовательность случайных величин является независимой.

Всемирную известность К.П.Персидскому принесли результаты по теории устойчивости.

Введя понятие о равномерной устойчивости, он установил достаточные условия равномерной и равномерно асимптотической устойчивости нулевого решения, обобщив тем самым первые две теоремы Ляпунова. Одним из первых доказал обратимость теорем Ляпунова, а именно доказал существование функции, удовлетворяющей первой теореме, что показало универсальность второго метода Ляпунова.

К.П.Персидскому принадлежит знаменитая теорема о равномерной устойчивости по первому приближению, где необходимым и достаточным условием является равномерная экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы первого приближения при нелинейном члене, имеющем более высокий порядок малости. С помощью введенного им понятия сектора доказал наиболее общую теорему о неустойчивости, которая обобщила теоремы А.М.Ляпунова и Н.Г.Четаева о неустойчивости.

К.П.Персидский получил основополагающие результаты и по первому методу Ляпунова, а именно, по теории характеристических показателей. Введя строго математическое определение устойчивости характеристических показателей, доказал фундаментальную теорему об устойчивости характеристических показателей линейной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами, что послужило началом бурных исследований в этом направлении качественной теории дифференциальных уравнений.

Огромно значение работ К.П.Персидского, посвященных разработке общей теории устойчивости для бесконечной, в частности счетной системы дифференциальных уравнений (как обыкновенных так и в частных производных), для дифференциальных и функциональных уравнений в банаховых пространствах. Им впервые в математической науке было введено понятие "нелинейного пространства", где не выполняется свойство коммутативного сложения. В нем он ввел основные понятия дифференциального и интегрального исчисления и построил теорию дифференциальных уравнений и устойчивости их решений. Весомые результаты К.П.Персидский получил по построению моделей пространства Лобачевского. В качестве примера нелинейного пространства он приводит пространство Лобачевского. Применил метод Лобачевского для трансцендентных уравнений, описываемых голоморфными функциями. Ввел понятие дуги, угла между элементами, кручения, сектора, площади и разработал теорию измерения геометрических фигур в линейных нормированных пространствах.

Думается, что научные труды К.П. Персидского будут основой для исследований и развития математической науки многим поколениям математиков.

Жизнь и деятельность К.П. Персидского является примером вдохновенного труда для нынешнего и будущих поколений.

Профессоры КазНУ им. аль-Фараби

Г.Н. Багаутдинов, Ж.С. Сулейменов

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 12 — 19*

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ-ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ-ПУАССОНА

С. А. Алдашев

Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева
480012 г. Алматы, ул. Шевченко, 97

В работе изучается ряд задач Дарбу-Проттера для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона. Для одних задач получены критерий единственности регулярного решения, а для других доказаны теоремы единственности решения.

1.Постановка задач и результаты. Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = t+\varepsilon, \quad |x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $(x_1, ..., x_m)$, $0 \le t \le (1-\varepsilon)/2$, $0 \le \varepsilon < 1$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S, соответственно.

В области D_ε рассмотрим уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \ge 2$, α — действительное число.

Через $u_\alpha(x,t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α.

Рассмотрим следующие задачи Дарбу-Проттера для уравнения (1) .

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha\Big|_S = 0, \quad u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = 0, \quad \text{при} \quad \alpha < 1; \tag{2}$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}\Big|_S = 0, \quad u_\alpha|_{s_\varepsilon} = 0, \quad \text{при} \quad \alpha = 1; \tag{3}$$

$$t^{\alpha-1} u_\alpha\Big|_S = 0, \quad u_\alpha|_{s_\varepsilon} = 0, \quad \text{при} \quad \alpha > 1; \tag{4}$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = 0, \quad \text{при} \quad \alpha \ge 0; \tag{5}$$

Keywords: *Darboux-Protter problem, Euler-Darboux-Poisson equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q05

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha}(u_\alpha - u_{\alpha,1})_t = 0, \quad u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = 0, \quad \text{при} \quad \alpha < 0, \tag{6}$$

где $u_{\alpha,1}(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1) с данными $u_{\alpha,1}(x,t) = \tau(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,1}(x,0) = 0.$$

Рассмотрим также задачи 1^* и 2^*, которые, соответственно, отличаются от задач 1 и 2 лишь тем, что вместо $u_\alpha\Big|_{S_\varepsilon} = 0$ задается $u_\alpha\Big|_{S_1} = 0$.

Задачи Дарбу для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \tag{7}$$

предложены М.Н. Проттером [1].

Для дальнейшего нам удобно перейти от декартовых координат x_1, ..., x_m, t к сферическим r, θ_1, ..., θ_{m-1}, t.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1}), W_2^l(s), l = 0, 1, ...$ — пространство Соболева.

Через $\overline{\tau}_n^k(r), \overline{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$, соответственно, функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$.

Через H_ε обозначим проекцию области D_ε на плоскость (r,t).

Имеет место

Теорема 1. *В классе $C(\overline{D}_\varepsilon \backslash S) \cap C^2(D_\varepsilon)$ решения задач 1 и 2 $u(x,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.*

Теорема 2. *Решения задач 1^* и 2^* в классе $C(\overline{D}_\varepsilon \backslash S) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $\forall \varepsilon \geq 0$ тривиальны.*

При $\alpha = 0$ эти теоремы доказаны в [2,3].

2. Сведение задач 1 и 2 к двумерным задачам Дарбу. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0, \tag{8}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \cdot \sin^{m-j-1} \cdot \theta_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\sin^{m-j-1} \cdot \theta_j \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j}),$$

$$g_1 = 1, \;\; g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2, \;\; j > 1.$$

Так как искомое решение $u_\alpha \in C^2(D_\varepsilon)$, то его можно искать в виде ряда

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{\upsilon}_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{9}$$

где $\overline{\upsilon}_{\alpha,n}^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Подставив (9) в (8) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [4], получим

$$L_\alpha \overline{\upsilon}_{\alpha,n}^k \equiv \overline{\upsilon}_{\alpha,nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{\upsilon}_{\alpha,nr}^k - \overline{\upsilon}_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t}\overline{\upsilon}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{\upsilon}_{\alpha,n}^k = 0,$$

$$\lambda_n = n(n+m-2), \;\; k = \overline{1, k_n}, \;\; n = 0, 1, ...,$$

которое с помощью замены переменных $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$ сводится к уравнению

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^k \equiv \upsilon_{\alpha,nrr}^k - \upsilon_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t}\upsilon_{\alpha,nt}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}\upsilon_{\alpha,n}^k = 0. \tag{10}$$

Далее, из краевых условий (2)-(6) для функций $\upsilon_n^k(r,t)$, соответственно, будем иметь

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,0)=0,\ \upsilon_{\alpha,n}^k(r,r-\varepsilon)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\ \alpha<1; \tag{11}$$

$$\frac{\upsilon_{\alpha,t}^k}{\ln t}|_{t=0}=0,\ \upsilon_{\alpha,n}^k(r,r-\varepsilon)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\alpha=1; \tag{12}$$

$$(t^{\alpha-1}\upsilon_{\alpha,n}^k)|_{t=0}=0,\quad \upsilon_{\alpha,n}^k(r,r-\varepsilon)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\quad \alpha>1; \tag{13}$$

$$\frac{\partial \upsilon_{\alpha,n}^k}{\partial t}|_{t=0}=0,\quad \upsilon_{\alpha,n}^k(r,r-\varepsilon)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\quad \alpha\geq 0; \tag{14}$$

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha(\upsilon_{\alpha,n}^k-\upsilon_{\alpha,n}^{1,k})_t=0,\quad \upsilon_{\alpha,n}^k(r,r-\varepsilon)=0, k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...,\quad \alpha<1, \tag{15}$$

где $\upsilon_{\alpha,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (10) с данными

$$\upsilon_{\alpha,n}^{1,k}(r,0)=\tau_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_{\alpha,n}^{1,k}(r,0)=0.$$

Таким образом, задачи 1 и 2 сведены к двумерным задачам Дарбу в области H_ε для уравнения (10). Аналогичным образом сводятся задачи 1^* и 2^* к соответствующим двумерным задачам Дарбу. Решения этих задач будем изучать в п.п. 4 и 5.

Наряду с уравнением (10) рассмотрим уравнение

$$L_0\upsilon_{0,n}^k \equiv \upsilon_{0,nrr}^k + \frac{m-1}{r}\upsilon_{0,nr}^k - \upsilon_{0,ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\upsilon_{0,n}^k = 0, \tag{16}$$

которое с помощью замены переменных $\xi=\frac{r+t}{2}$, $\eta=\frac{r-t}{2}$ сводится к уравнению

$$M\upsilon_{0,n}^k \equiv \upsilon_{0,n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}\upsilon_{0,n}^k = 0. \tag{17}$$

Решения задачи Коши для (17) с данными

$$\upsilon_{0,n}^k(\xi,\xi)\equiv\tau_n^k(\xi)\quad \left(\frac{\partial \upsilon_{0,n}^k}{\partial\xi}-\frac{\partial \upsilon_{0,n}^k}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}=\nu_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2}\leq\xi\leq\frac{1}{2}$$

имеет вид [5]

$$\upsilon_{0,n}^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+ \tag{18}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1,$$

где $\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\tau}_n^k(2\xi)$, $\nu_n^k(\xi)=\sqrt{2}(2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\nu}_n^k(2\xi)$,

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_{\mu_1}\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi\eta+\xi_1\eta_1)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]=P_{\mu_1}(z)$$

— функция Римана для уравнения $M\upsilon_{0,n}^{k}=0$ [6], а $P_{\mu_1}(z)$ — функция Лежандра,

$$\mu_1=n+\frac{(m-3)}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке $(\xi_1,\,\eta_1)$, направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

3. Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10) и (16). Сначала приведем некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для дальнейших исследований.

Если υ_α — решение уравнения $L_\alpha\upsilon=0$, то функция

$$\upsilon_{2-\alpha}=t^{\alpha-1}\upsilon_\alpha \tag{19}$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha}\upsilon=0$.

Если υ_α — решение уравнения $L_\alpha\upsilon=0$, то функция

$$\frac{1}{t}\frac{\partial\upsilon_\alpha}{\partial t}=\upsilon_{\alpha+2} \tag{20}$$

будет решением уравнения $L_{2+\alpha}\upsilon=0$.

Оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha\upsilon_\alpha=t^{1-\alpha}L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1}\upsilon_\alpha). \tag{21}$$

Указанные свойства устанавливаются аналогично тому, как они были доказаны для уравнения (1) [7].

Из равенства (19) имеем

$$\upsilon_{2-\alpha-2p}=t^{\alpha+2p-1}\upsilon_{\alpha+2p}. \tag{22}$$

Применив к (22) p раз формулу (20), а затем (19), получим

$$\upsilon_{2-\alpha}=(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^p(t^{\alpha+2p-1}\upsilon_{\alpha+2p}). \tag{23}$$

Соотношение (23) является фундаментальной формулой [7] для решения задачи Коши.

Пусть $p\ge0,\ q\ge0$ — наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$k+2p\ge m-1,\quad 2-k+2q\ge m-1.$$

Утверждение1. *Если $\upsilon_{0,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условию*

$$\upsilon_{0,n}^{2,k}(r,0)=0,\ \ \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_{0,n}^{2,k}(r,0)=\nu_n^k(r),$$

то функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{2,k}(r,t)=\gamma_{-\alpha}t^{-\alpha}\int\limits_0^1\upsilon_{0,n}^{2,k}(r,\xi t)\xi(1-\xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv \tag{24}$$

$$\equiv\gamma_{-\alpha}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)D_{0\,t^2}^{\alpha/2}\upsilon_{0,n}^{2,k}(r,t)$$

при $\alpha<0$ будет решением уравнения (10), удовлетворяющим условию

$$\upsilon_{\alpha,n}^{2,k}(r,0)=0,\ \lim_{t\to0}t^\alpha\frac{\partial}{\partial t}\upsilon_{\alpha,n}^{2,k}=\upsilon_n^k(r). \tag{25}$$

Если же $0 < \alpha < 1$, *то функция*

$$\upsilon_{\alpha,n}^{2,k}(r,t) = \gamma_{2-k+2q}(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^q \left[t^{1-k+2q} \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \equiv \tag{26}$$

$$\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1}\Gamma(q - \frac{\alpha}{2}+1) D_{0\,t^2}^{\alpha/2-1} \left[\frac{\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t} \right]$$

является решением уравнения (10) с начальными данными (25), где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ *— Гамма функция,* D_{0t}^{α} *— оператор Римана-Лиувилля [7], а* $\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,t)$ *— решение уравнения (16) с начальным условием*

$$\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0.$$

Утверждение 2. *Если* $\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,t)$ *— решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условию*

$$\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,0) = \tau_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \tag{27}$$

то функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_\alpha \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \tag{28}$$

$$\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2}) t^{1-\alpha} D_{0\,t^2}^{-\alpha/2} \left[\frac{\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t} \right]$$

при $\alpha > 0$ *есть решение уравнения (10), удовлетворяющее условию (27).*

Утверждение 3. *Если* $\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,t)$ *— решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условию (27), то функция*

$$\upsilon_{1,n}^{1,k}(r,t) = \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln[t(1-\xi^2)] d\xi \tag{29}$$

является решением уравнения $L_1\upsilon = 0$ *с начальными данными* $\frac{\upsilon_{1,n}^{1,k}}{\ln t}|_{t=0} = \tau_n^k(r)$.

Справедливость приведенных утверждений устанавливается аналогичным образом, как они доказаны для уравнения (1) и волнового уравнения (7) [8-10].

Приведем некоторые следствия из утверждений 2, 3.

Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, $r = 0, 1, ...$ Если $\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16) с данными

$$\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(1-\alpha)...(\alpha+2p-1)},\ \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \tag{30}$$

то из утверждения 2 следует, что функция

$$\upsilon_{\alpha+2p,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_{\alpha+2p} \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}+p-1} d\xi \tag{31}$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p}\upsilon = 0$, удовлетворяющим начальному условию (30).

Тогда из соотношений (23) и (19) вытекает, что функция

$$\upsilon^{1,k}_{\alpha,n}(r,t) = t^{1-\alpha}(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^p(t^{\alpha+2p-1}\upsilon^{1,k}_{\alpha+2p,n}) \equiv \gamma_{k+2p}2^{p-1}\Gamma(\frac{\alpha}{2}+p)t^{1-\alpha}D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}}[\frac{\upsilon^{1,k}_{0,n}(r,t)}{t}]$$

есть решение уравнения (10) и удовлетворяет условию (27).

Пусть $\alpha = -(2r+1)$. Если $\upsilon^{1,k}_{0,n}(r,t)$ — решение задачи Коши для (16) с данными (27), то из (19), (23) и из утверждения 3 нетрудно получить, что функция

$$\upsilon^{1,k}_{-(2r+1),n}(r,t) = t^{2(r+1)}(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{r+1}[\int_0^1 \upsilon^{1,k}_{0,n}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\ln(t(1-\xi^2))d\xi] \tag{32}$$

является решением задачи Коши для $L_{-(2r+1)}\upsilon = 0$, удовлетворяющее условию (27).

Используя [11, лемма 1.14.2], соотношение (32) можно записать в виде

$$\upsilon^{1,k}_{-(2r+1),n}(r,t) = \frac{a}{2}t^{2(r+1)}D_{0t^2}^{\frac{1}{2}+r}[\frac{\upsilon^{1,k}_{0,n}(r,t)}{t}], \tag{33}$$

$$a = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \ln t.$$

4. Доказательство теоремы 1 для задач 1 и 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу 1. Случай $\alpha < 1$. Учитывая формулы (24),(26), а также обратимость D^{β}_{0t} [7,11], задача (10),(11) сводится к задаче Дарбу для уравнения (16) с данными $\upsilon^k_{0,n}(r,0) = 0$, $\upsilon^k_{0,n}(r,r-\varepsilon) = 0$, которая в классе $C(\bar{H}_\varepsilon) \cap C^2(H_\varepsilon)$ имеет нулевое решение [3].

Следовательно, с учетом утверждения 1 получим тривиальное решение задачи (10),(11) в классе $C(\bar{H}_\varepsilon) \cap C^2(H_\varepsilon)$.

Теперь рассмотрим случай $\alpha = 1$. Решение задачи (10), (12) будем искать в виде $\upsilon^k_{1,n} = \upsilon^{1,k}_{1,n} + \upsilon^{2,k}_{1,n}$, где $\upsilon^{2,k}_{1,n}(r,t)$ — решение уравнения (10) с данными $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\upsilon^{2,k}_{1,n}}{\ln t} = 0$, а $\upsilon^{1,k}_{1,n}(r,t)$ — решение задачи Дарбу для (10) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}\upsilon^{1,k}_{1,n}(r,0) = 0, \quad \upsilon^{1,k}_{1,n}(r,r-\varepsilon) = -\upsilon^{2,k}_{1,n}(r,r-\varepsilon). \tag{34}$$

В силу (18), (29) получим, что $\upsilon^{2,k}_{1,n}(r,t) \equiv 0$. Аналогично, как в случае $\alpha < 1$, задача (10), (34) сводится к задаче для $L_0\upsilon^{1,k}_{1,n} = 0$ с данными

$$\frac{\partial}{\partial t}\upsilon^{1,k}_{0,n}(r,0) = 0, \quad \upsilon^{1,k}_{0,n}(r,r-\varepsilon) = 0, \tag{35}$$

которое имеет нулевое решение [3]. Следовательно, задача (10), (12) также имеет нулевое решение.

В силу свойства (21) оператора L_α и формулы (19) задача (10), (13) сводится к исследованному случаю $\alpha < 1$.

Таким образом, показано, что, если $\varepsilon > 0$, то в классе $C(\bar{D}_\varepsilon \backslash S) \cap C^2(D_\varepsilon)$ решения задачи 1 $u(x,t) \equiv 0$.

Теперь рассмотрим задачу 2, которая сведена к задачам (10), (14) и (10), (15).

Если $\alpha \geq 0$, то из (28) следует, что задача (10), (14) сводится к задаче Дарбу для уравнения $L_0\upsilon^k_{0,n} = 0$ с данными (35), решение которого тождественно равно нулю [3].

При $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$ решение задачи (10), (15) будем искать в виде $\upsilon^k_{\alpha,n} = \upsilon^{1,k}_{\alpha,n} + \upsilon^{2,k}_{\alpha,n}$, где $\upsilon^{2,k}_{\alpha,n}(r,t) \equiv 0$ — решение задачи Коши для уравнения (10) с данными

$$\upsilon^{2,k}_{\alpha,n}(r,0) \equiv 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \upsilon^{2,k}_{\alpha,n} = 0, \tag{36}$$

а $\upsilon^{1,k}_{\alpha,n}(r,t)$ — решение задачи Дарбу для (10) с данными (34).

Задача (10), (36) изучена в п. 3. Так как $\nu^k_n(r) \equiv 0$, то из (18), (24) следует, что $\upsilon^{2,k}_{\alpha,n}(r,t) \equiv 0$. Задача (10), (34) в свою очередь, в силу (31) приводится к задаче Дарбу для $L_0 \upsilon^{1,k}_{0,n} = 0$ с данными (35), имеющей нулевое решение [3].

Следовательно, с учетом утверждения 2 получим тривиальные решения задач (10), (14) и (10), (15) при $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$.

Пусть далее $\alpha = -(2r+1)$. Решение задачи (10), (15) ищем в виде $\upsilon^k_{\alpha,n} = \upsilon^{1,k}_{\alpha,n} + \upsilon^{2,k}_{\alpha,n}$, где $\upsilon^{2,k}_{\alpha,n}(r,t)$ — решение задачи Коши (10), (36), а $\upsilon^{1,k}_{\alpha,n}(r,t)$ — решение задачи Дарбу для (10) с условием (34).

Так как $\upsilon^{2,k}_{\alpha,n}(r,t) \equiv 0$, то в силу (33) задача (10), (34) сводится к задаче Дарбу $L_0 \upsilon^{1,k}_{0,n} = 0$ с данными (35), имеющей тривиальное решение [3]. Значит, в этом случае задача (10), (15) также имеет нулевое решение.

Таким образом, если $\varepsilon > 0$, то решение задачи 2 $u(x,t) \equiv 0$.

Пусть теперь решения задач 1 и 2 в классе $C(\bar{D}_\varepsilon \backslash S) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $\quad u(x,t) \equiv 0$. Покажем, что $\varepsilon > 0$. Предположим противное, т.е. $\varepsilon = 0$. В этом случае в [12, 13] показано, что задачи 1 и 2 имеют бесчисленное множество в $C(\bar{D}_0 \backslash S_0) \cap C^2(D_0)$ нетривиальных решений, что приводит к противоречию. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим задачу 1^* и пусть $\alpha < 1$. В этом случае задача 1^* приводится к задаче Дарбу для уравнения (10) с данными $\upsilon^k_{\alpha,n}(r,0) = 0$, $\quad \upsilon^k_{\alpha,n}(r,1-r) = 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$, которая, в свою очередь, сводится к краевой задаче для (16) с условиями

$$\upsilon^k_{0,n}(r,0) = 0, \quad \upsilon^k_{0,n}(r,1-r) = 0, \quad \varepsilon \le r \le 1. \tag{37}$$

При $\alpha = 1$ задача 1^* аналогично приводится к задаче Дарбу для (16) с данными

$$\frac{\partial}{\partial t} \upsilon^k_{0,n}(r,0) = 0, \quad \upsilon^k_{0,n}(r,1-r) = 0, \quad \varepsilon \le r \le 1. \tag{38}$$

Если $\varepsilon = 0$, то в [14], а если $\varepsilon > 0$, то в [15] показано, что задачи (16), (37) и (16), (38) имеют нулевые решения.

Случай $\alpha > 1$ сводится к $\alpha < 1$.

Таким образом, доказано, что решение задачи 1^* $\quad u(r,\theta,t) \equiv 0$.

Теорема 2 для задачи 1^* доказана. Ее справедливость для задачи 2^* устанавливается аналогично.

Цитированная литература

1. **Protter M.H.** // J. Rath. Mech. and Anal. 1954. 3. P.435—446

2. **Алдашев С.А.** // Математический журнал. 2002. Т.2, N4(6) С.26—29.

3. **Алдашев С.А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.

4. **Михлин С.Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.

5. **Бицадзе А.В.** Уравнения смешанного типа. М., 1959. С.164.

6. **Copson E.T.** // On the Riemann-Green function. J.Rath. Mech. and Anal. 1958. 1. P.324—348.

7. **Weinstein A.** The Fifth Simpsium in applied Math. MCGraw-Hill. New York. 1954. P.137—147.

8. **Терсенов С.А.** Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973.

9. **Алдашев С.А.** // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. N6. С.3—14.

10. **Терсенов С.А.** Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1982.

11. **Нахушев А.М.** Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000.

12. **Алдашев С.А.** // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2000. С.116—118.

13. **Алдашев С.А** //Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф. 2001. N1(24). С.51—63.

14. **Алдашев С.А** // Украинский математический журнал. 2003. Т.55. №1. С.100—107.

15. **Алдашев С.А** // Украинский математический журнал. 2000. Т.52. №5. С.590—595.

Поступила в редакцию 03.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 20 — 24*

УДК 519.6:537.812

КВАТЕРНИОНЫ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Л. А. Алексеева

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы, ул.Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

В работах [1, 2] рассмотрены обобщенные решения гамильтоновой формы уравнений Максвелла для электромагнитных (ЭМ) полей при заданных токах. Комплексификация электромагнитного поля с введением магнитных зарядов и токов названа там A-полем. Относительно токов форма незамкнута. Здесь введены комплексные кватернионы, на основе которых построены кватернионы A-поля. С введением комплексных градиентов построены уравнения A-поля в кватернионах, эвивалентные уравнениям Максвелла. Построены все основные соотношения и законы сохранения для электромагнитных полей на основе комплексных градиентов различных характеристик A-поля.

1. Модифицированное уравнение Максвелла. Систему уравнений Максвелла, состоящую из двух векторных и двух скалярных уравнений для ЭМ-поля, можно записать в виде одного векторного и одного скалярного уравнений. Здесь запишем представленные в [1] соотношения в пространстве Минковского $\{(\tau, x) = (\tau = ct, x_1, x_2, x_3)\}$:

$$\partial_\tau A + i \ \operatorname{rot} A + J = 0, \tag{1}$$

$$\rho = c^{-1} \operatorname{div} A, \tag{2}$$

где A — комплексный вектор напряженности ЭМ-поля, $A = \sqrt{\varepsilon}\, E + i\sqrt{\mu}\, H$, J — ток, который определяется через электрические и магнитные токи формулой: $J = \sqrt{\mu}\, j^E - i\sqrt{\varepsilon}\, j^H$, а комплексный заряд А-поля выражается через обычные ЭМ-заряды, как $\rho = \sqrt{\mu}\, \rho^E - i\sqrt{\varepsilon}\, \rho^H$, $\rho^E = \varepsilon \operatorname{div} E$, $\rho^H = -\mu \operatorname{div} H$. Здесь электрические и магнитные проницаемости ε, μ - положительные константы, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — скорость ЭМ-волн, E, H — напряженности электрического и магнитного полей, $j^E(x,t), j^H(x,t)$ — плотности электрических и магнитных токов, $x = (\, x_1, \, x_2, \, x_3\,)$, $t \geqslant 0$.

Если ввести действительный вектор скорости зарядов V, то $J = \rho V$, где $j^E = \rho^E V, j^H = \rho^H V$. Во введенной системе координат удобнее назвать зарядом выражение

$$\hat{\rho} = \operatorname{div} A. \tag{3}$$

Keywords: *Maxwell equations, Hamilton form, All-up quaternion, all-up gradient, potential of an electromagnetic field.*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

Тогда $J = \hat{\rho}\bar{V}$, где $\bar{V}$ — безразмерная скорость, $\bar{V} = V/c$. Для тока проводимости $\rho = 0,\ J \neq 0$. Заметим, что плотность энергии ЭМ-поля при такой записи определяется через модуль комплексного вектора поля

$$W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\left\|E\right\|^2 + \mu\left\|H\right\|^2\right) = 0,5\left\|A\right\|^2 = 0,5(A, A^*),$$

а вектор Пойнтинга

$$P = c^{-1}E \times H = \frac{i}{2}[A^*, A],$$

где $A^* = \sqrt{\varepsilon}E - i\sqrt{\mu}H$ — комплексно-сопряженное A. Здесь и далее $(a, b), [a, b] = a \times b$ — скалярное и векторное произведения a и b. Справедливы следующие теоремы [1].

Т е о р е м а 1. *Решение уравнения (1) удовлетворяет законам сохранения заряда и энергии A-поля*

$$\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0, \tag{4}$$

$$\partial_\tau W + \operatorname{div} P = -\operatorname{Re}(J, A^*). \tag{5}$$

Т е о р е м а 2. *Решение уравнения* (1) *является решением волнового уравнения вида*

$$\Box A = -i\ \operatorname{rot} J + \operatorname{grad}\rho + \partial_\tau J. \tag{6}$$

Здесь $\Box = \Delta - \partial_\tau^2$ — волновой оператор, Δ — оператор Лапласа.

Т е о р е м а 3. *Если действующие токи* $J \in D_3'(R_+^4)$, *то обобщенное решение уравнения* (1), *описывающее излучаемые и затухающие на бесконечности ЭМ-волны, имеет вид свертки:* $A = -i\ \operatorname{rot}(J * \psi) + c\ \operatorname{grad}(\rho * \psi) + c^{-1}\partial_t (J * \psi)$, *где* ψ *— фундаментальное решение волнового уравнения*

$$\Box\psi = \delta(x, t), \quad \psi = -(4\pi R)^{-1}\delta(\tau - R), \tag{7}$$

$\delta(x, t)$ — обобщенная δ-функция, $\delta(\tau - R)$ — *простой слой на расширяющейся сфере* $R = \tau$.

Заметим, что соотношения для A-поля (1), (3) не содержат универсальных констант, в частности, скорость электромагнитных волн, которая во введенной системе координат безразмерна и равна 1.

Введем новое представление для электромагнитного поля. Для этого вначале рассмотрим кватернионы, которые тоже можно комплексифицировать.

2. Комплексные кватернионы. Введем комплексное пространство кватернионов К $= \{\mathbf{F} = f + F\}$ (f — комплексные числа: $f = f_1 + if_2$, а F — трехмерный вектор с комплексными компонентами: $F = F_1 + i\,F_2$), K — линейное пространство, $a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = (af + bg) + (aF + bG)$ с известной операцией умножения ($\circ$)[3]

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \tag{8}$$

Последняя операция коммутативна ($\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$), если

$$[F, G] = [G, F], \tag{9}$$

и ассоциативна ($(\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \circ \mathbf{H} = \mathbf{F} \circ (\mathbf{G} \circ \mathbf{H})$), если

$$[[F, G], H] = [F, [G, H]]. \tag{10}$$

В силу свойств векторного произведения ($[F, G] = -[G, F]$, $[[F, G], H] = G(F, H) - F(G, H)$, $[F, [G, H]] = G(F, H) - H(F, G)$) выполнение условий (9) и (10) возможно для действительных векторов, если они коллинеарны или хотя бы один из них — нулевой. Для комплексных векторов эти равенства дают определенную зависимость между действительными и мнимыми составляющими компонент векторов, входящих в кватернионы, для которых свойства коммутативности или ассоциативности умножения выполняются.

О п р е д е л е н и е. *Назовем сопряженным* $\mathbf{F}$ *кватернион* $\mathbf{F}^* = f^* - F^*$, *где звездочка обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа.*

Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, то кватернион *самосопряженный.* Таковыми, как легко видеть, являются действительные кватернионы — числа ($\mathbf{F} = f_1$) и комплексные кватернионы с действительной скалярной частью и чисто мнимой — векторной ($\mathbf{F} = f_1 + iF_2$) и только они.

Рассмотрим

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^* = (f + F) \circ (f^* - F^*) = (f, f^*) + (F, F^*) + f^*F - fF^* - [F, F^*] =$$

$$= |f|^2 + |F|^2 + 2i(f_2F_1 - f_1F_2 + [F_1, F_2])) = f_0 + iF_0^r,$$

где f_0, F_0^r — действительные. Как видим, это — самосопряженный кватернион, $(\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^*)^* = f_0 + iF_0^r$.

Заметим, что $(\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^*)^* \neq \mathbf{F}^* \circ \mathbf{F} = f_0 + iF_0^l$, поскольку, вообще говоря, $[F_1, F_2] \neq [F_2, F_1]$. Только если эти два последние вектора коллинеарны или один из них нулевой, то $F_0^r = F_0^l$ и тогда операция умножения сопряженных кватернионов коммутативна.

О п р е д е л е н и е. *Назовем кватернион* $\mathbf{F}^{-1}$ *правым обратным* $\mathbf{F}$, *если* $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = 1$, *и левым обратным* ${}^{-1}\mathbf{F}$, *если* ${}^{-1}\mathbf{F} \circ \mathbf{F} = 1$.

Поскольку $(f_0 + iF_0) \circ (f_0 - iF_0) = f_0^2 - (F_0, F_0)$, если $f_0^2 \neq (F_0, F_0)$, то $(f_0 + iF_0)^{-1} = (f_0 - iF_0)/(f_0^2 - (F_0, F_0))$. Следовательно, в этом случае

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^* \circ (f_0 + iF_0^r)^{-1} = \mathbf{F}^* \circ (f_0 - iF_0^r)/(f_0^2 - |F_0^r|^2), \tag{11}$$

$${}^{-1}\mathbf{F} = (f_0 + iF_0^l)^{-1} \circ \mathbf{F}^* = (f_0 - i\,F_0^l) \circ \mathbf{F}^*/(f_0^2 - \left|F_0^l\right|^2).$$

В случае действительных кватернионов ($\operatorname{Im}\mathbf{F} = 0$) $F_0 = 0$ и формула приобретает известный вид [3] $\mathbf{F}^{-1} = {}^{-1}\mathbf{F} = (f + F)^{-1} = (f - F)/(f^2 + |F|^2)$.

Равенства (11) позволяют решать кватернионные уравнения типа

$$\mathbf{X} \circ \mathbf{F} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{F} \circ \mathbf{Y} = \mathbf{G}, \tag{12}$$

решение которых, если существует, имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{Y} = {}^{-1}\mathbf{F} \circ \mathbf{G}. \tag{13}$$

Заметим, что для существования таких решений необходимо, чтобы выполнялись соответствующие данным кватернионам условия типа (10) для ассоциативности умножения.

Далее будем рассматривать функциональные пространства кватернионов $K(R_+^4) = \{\mathbf{F} = f(x,\tau) + F(x,\tau)\}$, где f и F — локально интегрируемые функции, дифференцируемые на $R_+^4 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, \tau = ct),\ x \in R^3,\ t \geqslant 0\}$ требуемое число раз. В силу последнего и линейности пространства K кватернионы можно интегрировать и дифференцировать: $\int\limits_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega f(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) + \int\limits_\Omega F(\mathbf{x})dV(\mathbf{x})$, $dV(\mathbf{x}) = dx_1dx_2dx_3dx_4$, $\mathbf{F}_{,j} = f_{,j} + F_{,j}$.

Обозначим $\nabla = \operatorname{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Введем дифференциальные кватернионные операторы $\mathbf{D}^+ = \partial_\tau + i\nabla$, $\quad \mathbf{D}^- = \partial_\tau - i\nabla$, которые назовем *комплексными градиентами.*

Заметим, что в смысле выше данных определений каждый из них можно назвать самосопряженным оператором: $(\mathbf{D}^-)^* = \mathbf{D}^-$, $(\mathbf{D}^+)^* = \mathbf{D}^+$. Их действие на K определим как в алгебре кватернионов

$$\mathbf{D}^+\mathbf{F} = (\partial_\tau + i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f - i\,(\nabla, F) + \partial_\tau F + i\nabla f + i[\nabla, F],$$

$$\mathbf{D}^{-}\mathbf{F} = (\partial_\tau - i\nabla)\circ(f+F) = (\partial_\tau f + i\, div\, F) + \partial_\tau F - igrad\, f - i\, rot\, F.$$

Волновой оператор ($\Box$) представим в виде

$$\mathbf{D}^{-}\circ\mathbf{D}^{+} = \mathbf{D}^{+}\circ\mathbf{D}^{-} = \partial_\tau^2 - \Delta = \Box. \tag{14}$$

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{D}^{-}(\mathbf{D}^{+}\mathbf{F}) = \mathbf{D}^{+}(\mathbf{D}^{-}\mathbf{F}) = \Box\mathbf{F}. \tag{15}$$

Соотношения (14), (15) позволяют решать кватернионные дифференциальные уравнения типа

$$\mathbf{D}^{\pm}\mathbf{F} = \mathbf{G}(x,t) \tag{16}$$

с известной правой частью. Действительно, из (15) следует, что $\Box\,\mathbf{F} = \mathbf{D}^{\mp}\mathbf{G}(x,t)$, а любое решение этого уравнения представимо в виде

$$\mathbf{F} = \psi(x,t) * \mathbf{D}^{\mp}\mathbf{G}(x,t) + \mathbf{F}_0, \tag{17}$$

где $\mathbf{F}_0$ — решение однородного уравнения $\mathbf{D}^{\pm}\mathbf{F}_0 = 0$. Легко проверить, что в силу (14), (7) и свойств дифференцирования свертки (17) является решением (16). Воспользуемся этими соотношениями для записи кватернионов комплексифицированного электромагнитного поля (A-поля).

3. Кватернионы A-поля. Рассмотрим вектор напряженности A-поля как кватернион, $\mathbf{A} = 0 + A$. Тогда, взяв его произведение с комплексно-сопряженным кватернионом $\mathbf{A}^* = 0 - A^*$, согласно введенным в п.1 обозначениям, получим самосопряженный кватернион

$$0,5\,\mathbf{A}^*\circ\mathbf{A} = 0,5\,(A^*,A) - 0,5\,[A^*,A] = W + i\,P.$$

Определение. *Назовем* $\boldsymbol{W} = W + iP$ *— кватернионом энергии-импульса A-поля.*

Введем потенциал А-поля $\mathbf{\Phi} = i\,\phi - \Phi$, комплексный градиент которого равен $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-}\mathbf{\Phi} = (\partial_\tau - i\,\nabla)(i\phi - \Phi) = i(\partial_\tau\phi - \operatorname{div}\Phi) + i\operatorname{rot}\Phi - \partial_\tau\Phi + \operatorname{grad}\phi. \tag{18}$$

Поскольку скалярная часть $\mathbf{A}$ равна нулю, отсюда следует лоренцева калибровка для векторного потенциала $\mathbf{\Phi}$

$$\partial_\tau\phi - \operatorname{div}\Phi = 0 \tag{19}$$

и представление А через скалярный и векторный потенциалы:

$$A = \operatorname{grad}\phi - \partial_\tau\Phi + i\operatorname{rot}\Phi.$$

Далее

$$\mathbf{D}^{+}\mathbf{A} = (\partial_\tau + i\,\nabla)(0 + A) = -i\operatorname{div}A + \partial_\tau A + i\operatorname{rot}A, \tag{20}$$

и согласно (1) и (3)

$$\mathbf{D}^{+}\mathbf{A} = -(i\rho + J), \quad \rho = \operatorname{div}A, \quad J = -\partial_\tau A - i\operatorname{rot}A. \tag{21}$$

(Здесь и далее шапочку над ρ убираем.)

Определение. *Назовем* $\Theta = i\,\rho + J$ *кватернионом заряда-тока A-поля.*

Отсюда следует, что формулы (1) и (3) можно рассматривать просто как определение заряда и тока. Далее, поскольку $\mathbf{D}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{D}^{+}\mathbf{D}^{-}\mathbf{\Phi} = \Box\mathbf{\Phi}$, получим волновое уравнение для потенциала

$$\Box\mathbf{\Phi} = -\mathbf{\Theta}, \tag{22}$$

из которого следуют волновые уравнения для скалярной и векторной части $\mathbf{\Phi}$

$$\Box\phi = -\rho, \quad \Box\Phi = J.$$

С учетом (14), (15) и (19) найдем

$$\mathbf{D}^{-}\mathbf{D}^{+}\mathbf{A} = -(\partial_\tau - i\nabla)(i\rho + J) = -i(\partial_\tau\rho + \operatorname{div} J) - \operatorname{grad}\rho - \partial_\tau J + i \operatorname{rot} J = 0 + \Box A.$$

Отсюда, сравнивая кватернионы, следует закон сохранения заряда (см. теорему 1) и волновое уравнение для A-поля (см. теорему 2).

Далее рассмотрим действие операторов $\mathbf{D}^{\mp}$ на кватернион энергии-импульса

$$\mathbf{D}^{\pm}\mathbf{W} = (\partial_\tau \pm i\nabla)(W + iP) = (\partial_\tau W \pm \operatorname{div} P) \mp \operatorname{rot} P + i(\partial_\tau P \pm \nabla W). \tag{23}$$

Вычислим правую часть

$$\mathbf{D}^{\pm}\mathbf{W} = (\partial_\tau W \pm \operatorname{div} P) \mp rot\, P + i(\partial_\tau P \pm \nabla W)) = (\partial_\tau \pm i\nabla)(\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}) =$$
$$= 0,5\{((\partial_\tau A^*_m \mp ie_{mlk}A^*_{l,k})A_m + \mathbf{e}_j((-e_{jlv}A^*_{l,\tau} \mp i\, e_{jlm}A^*_{u,l}e_{muv})A_v \pm i(A^*_{k},_j\, A_k))+$$
$$+(\partial_\tau A_m \pm ie_{mlk}A_{l,k})A^*_m + \mathbf{e}_j((e_{jvl}A_{l,\tau} \pm ie_{jlm}e_{muv}A_{u,l})A^*_v \pm i(A^*_k A_{k},_j\,))\}$$

Здесь e_{mlk} — псевдотензор Леви-Чивита. Отсюда с учетом (1) следует закон сохранения энергии (5) и представление других составляющих кватерниона через напряженность A-поля.

Заключение. Показано, что просто последовательное (тройное) взятие комплексных градиентов от кватернионного потенциала A-поля (с лоренцевой калибровкой), определяет кватернионы, соответствующие напряженности поля, зарядам и токам, закону сохранения заряда и волновому уравнению для вектора A. Скалярная часть комплексного градиента кватерниона энергии-импульса A-поля дает закон сохранения энергии. Следовательно, уравнения Максвелла — это просто комплексный градиент кватерниона напряженности A-поля.

Заметим, что подобные закономерности должны наблюдаться для любого векторного поля с одной скоростью распространения возмущений, только физическое проявление комплексных градиентов от кватернионов этого поля будет иметь другую природу. Следует ее только находить.

Цитированная литература

1. **Алексеева Л.А.** //Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2003. Т.43, №5. С.759–766.
2. **Алексеева Л.А.** // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39, №6. С.769–776.
3. Математическая энциклопедия. Т.2. М., 1977. С.837–838.

Поступила в редакцию 20.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 25 — 32*

УДК 517.956

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. Асанова

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы, ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Исследуется нелокальная краевая задача с данными на пересекающихся линиях для систем гиперболических уравнений второго порядка. На основе метода введения функциональных параметров установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи и предложен алгоритм его нахождения.

В последнее время особый интерес вызывают нелокальные задачи для некоторых классов уравнений в частных производных. В определенной степени это связано с тем обстоятельством, что нелокальные задачи возникают при математическом моделировании ряда физических и биологических процессов.

В области $\Omega = \{0 < t < T\,,\ 0 < x < T\}\,,\ T > 0$ плоскости переменных (t, x) рассматривается нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) \tag{1}$$

с условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_2(t)\frac{\partial u(t,t)}{\partial t} + P_1(t)\frac{\partial u(t,t)}{\partial x} + P_0(t)u(t,t) + S_2(t)\frac{\partial u(t,0)}{\partial t} +$$
$$+ S_1(t)\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} + S_0(t)u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_2(t)$, $P_1(t)$, $P_0(t)$, $S_2(t)$, $S_1(t)$, $S_0(t)$, n — вектор-функции $f(t,x)$, $\psi(t)$ являются непрерывными в $\bar{\Omega}$, $[0,T]$, соответственно, функция $\varphi(x)$, непрерывно дифференцируема на $[0,T]$,

$$||u(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|, \qquad ||A(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|, \quad ||u(t,x)||_1 = \max_{x\in[0,T]} ||u(t,x)||.$$

Keywords: *system of hyperbolic equations, the non-local boundary value problem, the method of functional parameter' introduction*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

Пусть $C(J,R^n)$ — множество непрерывных на J $(J\subset R^1$ или $J\subset R^2)$ функций $u:J\to R^n$. Функция $u(t,x)\in C(\bar\Omega,R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\bar\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\bar\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$ называется классическим решением задачи (1)—(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x)\in\Omega$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Для решения задачи и нахождения классического решения применяется метод введения функциональных параметров [1], являющийся обобщением метода параметризации [2] на гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными. Методом введения функциональных параметров были исследованы нелокальные краевые задачи [1,3—6] для систем гиперболических уравнений второго порядка с данными на характеристиках в прямоугольной области. Для них установлены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения в терминах коэффициентов. Как видно, соотношение (3) связывает значения искомой функции и ее производных на двух пересекающихся линиях $x=t$ и $x=0$. Частный случай этой задачи рассмотрен в работе [8]. Метод введения функциональных параметров позволяет наряду с установлением однозначной разрешимости задачи (1) — (3) предложить алгоритм нахождения его решения без построения матрицы Римана. При этом от коэффициентов системы требуется только непрерывность на $\bar\Omega$, что дает возможность расширить класс разрешимых краевых задач для систем гиперболических уравнений.

Схема метода. Через $q(t)$ обозначим значения функции $u(t,x)$ при $x=0$ и сделаем замену $\widetilde u(t,x)=u(t,x)-q(t)$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестной функцией $q(t)$:

$$\frac{\partial^2\widetilde u}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde u}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde u}{\partial t}+C(t,x)\widetilde u+f(t,x)+B(t,x)q'(t)+C(t,x)q(t),\tag{4}$$

$$\widetilde u(0,x)+q(0)=\varphi(x),\qquad x\in[0,T],\tag{5}$$

$$\widetilde u(t,0)=0,\qquad t\in[0,T],\tag{6}$$

$$P_2(t)\frac{\partial\widetilde u(t,t)}{\partial t}+P_1(t)\frac{\partial\widetilde u(t,t)}{\partial x}+P_0(t)\widetilde u(t,t)+S_2(t)\frac{\partial\widetilde u(t,0)}{\partial t}+S_1(t)\frac{\partial\widetilde u(t,0)}{\partial x}+$$
$$+S_0(t)\widetilde u(t,0)+[P_2(t)+S_2(t)]q'(t)+[P_0(t)+S_0(t)]q(t)=\psi(t),\qquad t\in[0,T].\tag{7}$$

Задачи (4)—(7) и (1)—(3) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t,x)$ является решением задачи (1)—(3), то пара $(q(t)=u(t,0),\widetilde u(t,x)=u(t,x)-u(t,0))$ будет решением (4)—(7) и, наоборот, если $(q(t),\widetilde u(t,x))$, — решение задачи (4)—(7), то функция $q(t)+\widetilde u(t,x)$ будет решением задачи (1)—(3). Из (5) и (6) следует, что

$$q(0)=\varphi(0).\tag{8}$$

Таким образом, при фиксированных $q'(t)$, $q(t)$ получаем задачу Гурса на прямоугольнике Ω с условиями (6) и

$$\widetilde u(0,x)=\varphi(x)-\varphi(0),\qquad x\in[0,T].\tag{9}$$

Соотношение (7) с условием (8) позволяют определить $q'(t)$, $q(t)$ при фиксированных значениях $\widetilde u(t,x)$ и его производных.

Пусть $\widetilde v(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde u(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde w(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde u(t,x)}{\partial t}$, тогда из (6), (9) получаем $\widetilde v(0,x)=\varphi'(x)$, $\widetilde w(t,0)=0$. Известно, что при фиксированных $q'(t)$, $q(t)$ задача Гурса на Ω эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde v(t,x)=\int\limits_0^t\Big[A(\tau,x)\widetilde v(\tau,x)+B(\tau,x)\widetilde w(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde u(\tau,x)\Big]d\tau+$$

$$+\int_0^t \Big[f(\tau,x)+B(\tau,x)q'(\tau)+C(\tau,x)q(\tau)\Big]d\tau+\varphi'(x), \tag{10}$$

$$\widetilde{w}(t,x)=\int_0^x \Big[A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)\Big]d\xi+$$

$$+\int_0^x \Big[f(t,\xi)+B(t,\xi)q'(t)+C(t,\xi)q(t)\Big]d\xi, \tag{11}$$

$$\widetilde{u}(t,x)=\int_0^t d\tau\int_0^x \Big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi)+C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi)\Big]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^x \Big[f(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)q'(\tau)+C(\tau,\xi)q(\tau)\Big]d\xi+\varphi(x)-\varphi(0). \tag{12}$$

Вместо $\widetilde{w}(t,\xi)$ подставим соответствующую правую часть (11) и, повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,...)$ раз, получим

$$\widetilde{w}(t,x)=\int_0^x B(t,\xi_1)...\int_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int_0^{\xi_{\nu-1}} B(t,\xi_\nu)\widetilde{w}(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1+$$

$$+\int_0^x \Big[A(t,\xi_1)\widetilde{v}(t,\xi_1)+C(t,\xi_1)\widetilde{u}(t,\xi_1)\Big]d\xi_1+...+$$

$$+\int_0^x B(t,\xi_1)...\int_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int_0^{\xi_{\nu-1}} \Big[A(t,\xi_\nu)\widetilde{v}(t,\xi_\nu)+C(t,\xi_\nu)\widetilde{u}(t,\xi_\nu)\Big]d\xi_\nu...d\xi_1+$$

$$+\int_0^x f(t,\xi_1)d\xi_1+...+\int_0^x B(t,\xi_1)...\int_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int_0^{\xi_{\nu-1}} f(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1+$$

$$+\Big[\int_0^x C(t,\xi_1)d\xi_1+...+\int_0^x B(t,\xi_1)...\int_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int_0^{\xi_{\nu-1}} C(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1\Big]q(t)+$$

$$+\Big[\int_0^x B(t,\xi_1)d\xi_1+...+\int_0^x B(t,\xi_1)...\int_0^{\xi_{\nu-1}} B(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1\Big]q'(t). \tag{13}$$

Введем обозначения $\quad D_\nu(t)=\int_0^t B(t,\xi_1)d\xi_1+...+\int_0^t B(t,\xi_1)...\int_0^{\xi_{\nu-1}} B(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1,$

$$H_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v})=\int_0^t \Big[A(t,\xi_1)\widetilde{v}(t,\xi_1)+C(t,\xi_1)\widetilde{u}(t,\xi_1)\Big]d\xi_1+...+$$

$$+\int\limits_0^t B(t,\xi_1)...\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} \Big[A(t,\xi_\nu)\widetilde{v}(t,\xi_\nu)+C(t,\xi_\nu)\widetilde{u}(t,\xi_\nu)\Big]d\xi_\nu...d\xi_1,$$

$$G_\nu(t,\widetilde{w})=\int\limits_0^t B(t,\xi_1)...\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} B(t,\xi_\nu)\widetilde{w}(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1,$$

$$F_\nu(t)=\int\limits_0^t f(t,\xi_1)d\xi_1+...+\int\limits_0^t B(t,\xi_1)...\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} f(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1,$$

$$E_\nu(t)=\int\limits_0^t C(t,\xi_1)d\xi_1+...+\int\limits_0^t B(t,\xi_1)...\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}} B(t,\xi_{\nu-1})\int\limits_0^{\xi_{\nu-1}} C(t,\xi_\nu)d\xi_\nu...d\xi_1.$$

Подставляя соответствующие значения $\widetilde{w}(t,x)$ из правой части (13) при $x=t$, $x=0$ в (7) и учитывая обозначения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной

$$Q_\nu(t)q'(t)=-\widetilde{E}_\nu(t)q(t)-\widetilde{H}_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v})-\widetilde{G}_\nu(t,\widetilde{w})-\widetilde{F}_\nu(t),\quad t\in[0,T], \tag{14}$$

где $Q_\nu(t)=P_2(t)[I+D_\nu(t)]+S_2(t)$, $\widetilde{E}_\nu(t)=P_0(t)+P_2(t)E_\nu(t)+S_0(t)$,
$\widetilde{H}_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v})=P_2(t)H_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{v})+P_1(t)\widetilde{v}(t,t)+P_0(t)\widetilde{u}(t,t)+S_1(t)\widetilde{v}(t,0)+S_0(t)\widetilde{u}(t,0)$,
$\widetilde{G}_\nu(t,\widetilde{w})=P_2(t)G_\nu(t,\widetilde{w})$, $\widetilde{F}_\nu(t)=P_2(t)F_\nu(t)-\psi(t)$, I — единичная $(n\times n)$-матрица.
Соотношения (10) – (12) и (14) с условием (8) позволяют найти решение задачи (1) – (3) в $\bar{\Omega}$.

Метод введения функциональных параметров разбивает на два этапа процесс нахождения неизвестных функций:
1) нахождение введенного функционального параметра $q(t)$, $q'(t)$ из соотношений (14) с условием (8).
2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$ из системы интегральных уравнений (10) – (12).

Если известны функции $q(t)$, $q'(t)$, то, решая систему интегральных уравнений (10)-(12), найдем функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$ и, суммируя $q(t)+\widetilde{u}(t,x)$ получим решение исходной задачи. Если известны функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, то решая уравнение (14) при условии (8), найдем $q(t)$, $q'(t)$. Снова суммируя $q(t)+\widetilde{u}(t,x)$, найдем решение задачи (1)-(3).

Так как неизвестными являются как функции $q(t)$, $q'(t)$, так и функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (10) – (12), (14) с условием (8) находится как пределы последовательностей $q^{(k)}(t)$, $\{q^{(k)\prime}(t)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x),\widetilde{w}^{(k)}(t,x)\}$, определяемых по следующему алгоритму.

Шаг 0. Предполагая в правой части (14) $q(t)=\varphi(0)$, $\widetilde{u}(t,x)=\varphi(x)-\varphi(0)$, $\widetilde{v}(t,x)==\varphi'(x)$, $\widetilde{w}(t,x)=0$, из уравнения (14) найдем $q^{(0)\prime}(t)$. Используя условия (8) находим функцию $q^{(0)}(t):\ q^{(0)}(t)=\varphi(0)+\int\limits_0^t q^{(0)\prime}(\tau)d\tau.$ Из системы интегральных уравнений (10) – (12), где $q(t)=q^{(0)}(t)$, $q'(t)=q^{(0)\prime}(t)$, определим функции $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$.

Шаг 1. Из уравнения (14), где в правой части $q(t)=q^{(0)}(t)$, $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)=\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, найдем $q^{(1)\prime}(t)$. Вновь используя условия (8) находим $q^{(1)}(t)=\varphi(0)+\int\limits_0^t q^{(1)\prime}(\tau)d\tau$ и из систем интегральных уравнений (10)-(12), где $q(t)=q^{(1)}(t)$, $q'(t)=q^{(1)\prime}(t)$, определим функции $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$. И т.д.

Следующее утверждение обеспечивает равномерную сходимость предложенного алгоритма и существование единственного классического решения задачи (1) – (3).

Т е о р е м а 1. *Пусть при некотором* ν, $\nu = 1, 2, ...,$ $(n \times n)$ *-матрица* $Q_\nu(t)$ *обратима при всех* $t \in [0, T]$ *и выполняются неравенства*

a) $||[Q_\nu(t)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(t)$,

b) $\lambda(t,\nu) = \gamma_\nu(t)||P_2(t)||\Big[e^{\beta(t)T} - 1 - \beta(t)T - ... - \frac{1}{\nu!}[\beta(t)T]^\nu\Big] \le \alpha < 1$, *где* $\beta(t) = ||B(t,x)||_1$.

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(3).

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$||\widetilde{E}_\nu(t)|| \le ||P_0(t)|| + ||S_0(t)|| + ||P_2(t)||T||C(t,x)||_1 \sum_{j=0}^{\nu-1} [\beta(t)T]^j/j!,$$

$$||\widetilde{F}_\nu(t)|| \le ||\psi(t)|| + ||P_2(t)||T||f(t,x)||_1 \sum_{j=0}^{\nu-1} [\beta T]^j/j!,$$

$$||\widetilde{H}_\nu(t,\widetilde{u},\widetilde{w})|| \le (||P_0(t)|| + ||S_0(t)||)\cdot||\widetilde{u}(t,x)||_1 T + (||P_1(t)|| + ||S_1(t)||)\cdot||\widetilde{v}(t,x)||_1 T +$$

$$+||P_2(t)||T\Big[||A(t,x)||_1\cdot||\widetilde{v}(t,x)||_1 + ||C(t,x)||_1\cdot||\widetilde{u}(t,x)||_1\Big] \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\beta(t)T]^j}{j!} \le$$

$$\le b_0(t)\Big[||\widetilde{v}(t,x)||_1 + ||\widetilde{u}(t,x)||_1\Big], \qquad (15)$$

где

$$b_0(t) = [||P_0(t)|| + ||S_0(t)|| + ||P_1(t)|| + ||S_1(t)|| + ||P_2(t)|| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\beta(t)T]^j}{j!} \max\{||B(t,x)||_1, ||C(t,x)||_1\}]T.$$

В силу условия а) при фиксированных $\{q(t), \widetilde{u}(t,x), \widetilde{w}(t,x), \widetilde{v}(t,x)\}$, функция $q'(t)$ определяется единственным образом из уравнения (14). При фиксированных $q(t) \in C([0,T], R^n)$, $q'(t) \in C([0,T], R^n)$ система интегральных уравнений (10) – (12) имеет единственное решение $\{\widetilde{u}(t,x), \widetilde{w}(t,x), \widetilde{v}(t,x)\}$, где $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{v}$ принадлежат $C(\bar{\Omega}, R^n)$ и справедливы оценки

$$||\widetilde{w}(t,x)||_1 \le Te^{\beta(t)T}||f(t,x)||_1 + \Big[e^{\beta(t)T} - 1\Big]||q'(t)|| + Te^{\beta(t)T}||C(t,x)||_1\cdot||q(t)|| +$$

$$+Te^{\beta(t)T}\max\{||B(t,x)||_1, ||C(t,x)||_1\}\Big[||\widetilde{u}(t,x)||_1 + ||\widetilde{v}(t,x)||_1\Big], \qquad (16a)$$

$$||\widetilde{u}(t,x)||_1 + ||\widetilde{v}(t,x)||_1 \le \Big\{||\varphi(x) - \varphi(0)||_1 + (1+T)\int_0^t \Big[1 + \beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T}\Big]||f(\tau,x)||_1 d\tau +$$

$$+(1+T)\int_0^t \beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T}||q'(\tau)||d\tau + (1+T)\int_0^t \Big[1 + \beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T}\Big]||C(\tau,x)||_1\cdot||q(\tau)||d\tau\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{\int_o^t \max\{||B(\tau,x)||_1, ||C(\tau,x)||_1\}(1 + \beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T})d\tau\Big\}. \qquad (16b)$$

Из интегрального уравнения (11) при помощи неравенства Беллмана-Гроноулла для последовательных разностей $\widetilde{w}^{(k)}(t,x) - \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)$ получаем оценку

$$||\widetilde{w}^{(k)}(t,x) - \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)|| \le$$

$$\leq \Big[e^{\beta(t)x}-1\Big]||q^{(k)\prime}(t)-q^{(k-1)\prime}(t)||+Te^{\beta(t)x}\Big(||C(t,x)||_1\cdot||q^{(k)}(t)-q^{(k-1)}(t)||+$$

$$+\max\{||B(t,x)||_1,||C(t,x)||_1\}\Big[||\widetilde{v}^{(k)}(t,x)-\widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)||_1+||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||_1\Big]\Big). \quad (17a)$$

Для разностей $q^{(k)}(t)-q^{(k-1)}(t)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)$, $k=0,1,2,...$ с учетом неравенств (16), (17a) справедливы оценки

$$||q^{(k)}(t)-q^{(k-1)}(t)||\leq\int\limits_0^t||q^{(k)\prime}(\tau)-q^{(k-1)\prime}(\tau)||d\tau, \quad (17b)$$

$$||\widetilde{v}^{(k)}(t,x)-\widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)||_1+||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||_1\leq\int\limits_0^t a_0(\tau)||q^{(k)\prime}(\tau)-q^{(k-1)\prime}(\tau)||d\tau, \quad (17c)$$

где $a_0(\tau)=e^{a_1(t)}(1+T)\Big[\beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T}+a_2(t)\Big]$, $a_2(t)=\int\limits_0^t\Big[1+\beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T}\Big]||C(\tau,x)||_1d\tau$,
$a_1(t)=\int\limits_0^t\max\Big[||B(\tau,x)||_1,||C(\tau,x)||_1\Big](1+\beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T})d\tau.$

Тогда для разности $q^{(k+1)\prime}(t)-q^{(k)\prime}(t)$, принимая во внимание (15), имеем оценку

$$||q^{(k+1)\prime}(t)-q^{(k)\prime}(t)||\leq||[Q_\nu(t)]^{-1}||\cdot\Big[||\widetilde{E}_\nu(t)||\cdot||q^{(k)}(t)-q^{(k-1)}(t)||+$$

$$+b_0(t)\Big[||\widetilde{w}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)||_1+||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||_1\Big]+$$

$$+||P_2(t)||\Big\{\int\limits_0^t\beta(t)...\int\limits_0^{\xi_{\nu-2}}\beta(t)\int\limits_0^{t,\xi_{\nu-1}}\beta(t)||\widetilde{w}^{(k)}(t,\xi_\nu)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,\xi_\nu)||d\xi_\nu d\xi_{\nu-1}...d\xi_1\Big\}\Big].$$

Подставив сюда (17a) и вычисляя повторные интегралы, а также учитывая оценки (17b), (17c), имеем

$$||q^{(k+1)\prime}(t)-q^{(k)\prime}(t)||\leq\alpha||q^{(k)\prime}(t)-q^{(k-1)\prime}(t)||+\int\limits_0^t b_1(\tau)||q^{(k)\prime}(\tau)-q^{(k-1)\prime}(\tau)||d\tau, \quad (18)$$

где $b_1(\tau)=\gamma_\nu(t)\cdot\Big[||\widetilde{E}_\nu(t)||+b_2(t)||C(t,x)||_1+a_0(\tau)b_3(t)\Big]$,
$b_2(t)=||P_2(t)||T\Big[e^{\beta(t)T}-1-...-\frac{(\beta(t)T)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\Big]$, $b_3(t)=b_0(t)+b_2(t)\max\Big(||B(t,x)||_1,||C(t,x)||_1\Big)$.

Из нулевого и первого шага алгоритма вытекают следующие оценки

$$||q^{(0)}(t)-\varphi(0)||\leq\gamma_\nu(t)\Big\{||\varphi(0)||+\int\limits_0^t\Big(||\widetilde{F}_\nu(\tau)||+b_0(\tau)\Big[||\varphi'(x)||_1+||\varphi(x)-\varphi(0)||_1\Big]\Big)d\tau\Big\}=d_1(t),$$

$$||q^{(0)\prime}(t)||\leq\gamma_\nu(t)\Big(||\widetilde{E}_\nu(t)||||\varphi(0)||+||\widetilde{F}_\nu(t)||+b_0(t)\Big[||\varphi'(x)||_1+||\varphi(x)-\varphi(0)||_1\Big]\Big)=d_2(t),$$

$$||q^{(1)\prime}(t)-q^{(0)\prime}(t)||\leq\gamma_\nu(t)||\widetilde{E}_\nu(t)||\cdot d_1(t)+\alpha\cdot d_2(t)+$$

$$+\gamma_\nu(t)\Big[e^{a_1(t)}b_0(t)+b_3(t)\Big]\Big[||\varphi'(x)||_1+||\varphi(x)-\varphi(0)||_1\Big]+$$

$$+\gamma_\nu(t)[b_3(t)e^{a_1(t)}(1+T)\int\limits_0^t\Big[1+\beta(\tau)Te^{\beta(\tau)T}\Big]||f(\tau,x)||_1d\tau+b_2(t)||f(t,x)||_1]+$$

$$+\gamma_\nu(t)e^{a_1(t)}[(1+T)b_3(t)a_2(t)+b_2(t)||C(t,x)||_1]\Big(||\varphi(0)||+\int\limits_0^t d_2(\tau)d\tau\Big)=d(t). \qquad (19)$$

Для функции $\Delta_k(t)=||q^{(k+1)\prime}(t)-q^{(k)\prime}(t)||$ на основе (18) установим неравенство

$$\Delta_k(t)\le\alpha^k\sum_{j=0}^k\frac{k!}{(k-j)!\cdot j!}\cdot\frac{1}{j!}\Big(\frac{h_1}{\alpha}\Big)^j\cdot h_2, \qquad (20)$$

где $h_1=\int\limits_0^T b_1(\tau)d\tau,\ \ h_2=\max\limits_{t\in[0,T]}d(t)$. Так как $\alpha\in(0,1)$, то, выбрав число $\theta\in(0,(1-\alpha)/\alpha)$, используем предельное соотношение пункта 6^0 из [9, С.327]. Согласно этому утверждению из $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{h_1}{\theta\alpha}\Big)^k=0$ следует, что $z_k=\frac{1}{(1+\theta)^k}\sum\limits_{j=0}^k\frac{k!}{(k-j)!\cdot j!}\cdot\theta^j\cdot\frac{1}{j!}\Big(\frac{h_1}{\theta\alpha}\Big)^j\to0$ при $k\to\infty$.
Тогда существует число $h_3>0$, ограничивающее последовательность z_k, и из (20) получим основную оценку $\Delta_k(t)\le\alpha^k(1+\theta)^k\cdot z_k\cdot h_2\le\alpha_1^k\cdot h_2\cdot h_3$, где $\alpha_1=\alpha(1+\theta)<1$.
Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k(t)$ при $t\in[0,T]$, обеспечивающая равномерную сходимость последовательностей $q^{(k)\prime}(t)$ к непрерывной на $t\in[0,T]$ функции $q^{*\prime}(t)$.
Из неравенства (17b) вытекает равномерная сходимость последовательности $q^{(k)}(t)$ к функции $q^*(t)\in C([0,T],R^n)$. На основе оценок (17c), (17a) следует равномерная относительно $(t,x)\in\bar\Omega$ сходимость последовательностей $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, соответственно, к функциям $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$, принадлежащим $C(\bar\Omega,R^n)$. Очевидно, что функция $u^*(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций $\{q^*(t)+\widetilde{u}^*(t,x)\}$, принадлежит $C(\bar\Omega,R^n)$ и является классическим решением задачи (1) — (3).
Докажем единственность решения задачи (1)—(3). Пусть существует два классических решения $u^*(t,x)$ и $u^{**}(t,x)$. Тогда соответствующие им системы пар $(q^*(t)+\widetilde{u}^*(t,x))$, $(q^{**}(t)+\widetilde{u}^{**}(t,x))$ будут решениями краевой задачи (4) — (7) и аналогично (18) для разностей $q^{*\prime}(t)-q^{**\prime}(t)$ справедлива оценка

$$||q^{*\prime}(t)-q^{**\prime}(t)||\le\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_0^t b_1(\tau)||q^{*\prime}(\tau)-q^{**\prime}(\tau)||d\tau.$$

Отсюда с помощью неравенства Гронуолла-Беллмана имеем $||q^{*\prime}(t)-q^{**\prime}(t)||=0$ и в силу соотношений $q^*(t)=\varphi(0)+\int\limits_0^t q^{*\prime}(\tau)d\tau,\quad q^{**}(\tau)=\varphi(0)+\int\limits_0^t q^{**\prime}(\tau)d\tau$ получим $q^*(t)=q^{**}(t)$.
Аналогично (17c) устанавливается неравенство

$$||\widetilde{w}^*(t,x)-\widetilde{w}^{**}(t,x)||_1+||\widetilde{u}^*(t,x)-\widetilde{u}^{**}(t,x)||_1\le\int\limits_0^t a_0(\tau)||q^{*\prime}(\tau)-q^{**\prime}(\tau)||d\tau,$$

откуда вытекает, что $\widetilde{u}^*(t,x)=\widetilde{u}^{**}(t,x)$ при всех $(t,x)\in\bar\Omega$. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.** // Изв. МОН и НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С. 23 – 29.

2. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

3. **Асанова А. Т.** // Вестник МОН и НАН РК. 2002. № 1. С. 81 – 88.

4. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1673 – 1685.

5. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1343 – 1354.

6. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Изв. МОН и НАН РК. Сер. физ.-мат. 2002. № 3. С. 18 – 24.

7. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 295 – 297.

8. **Харибегашвили С. С.** // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 243 – 254.

9. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 1969.

Поступила в редакцию 01.12.2003 г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 33 –38*

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА НОСИТЕЛЬ НЕЛОКАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ПЕРЕСЕКАЕТСЯ С ГРАНИЦЕЙ

А. Г. Бапахова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
г.Алматы, пр.аль-Фараби, 71

В статье доказана разрешимость задачи Бицадзе-Самарского для параболического уравнения 2-го порядка в конечной области методом потенциалов. Построены специальные потенциалы с ядром функции Грина. При помощи потенциалов задача редуцируется к СИУ, ядра которых имеют существенные особенности. Выделяя главную часть ядра с существенными особенностями СИУ, находим необходимые условия, при которых характеристические операторы имеют ограниченные обратные операторы. Используя исследования свойств характеристических операторов, методом регуляризации доказано существование решения первоначальных СИУ с существенными особенностями.

Постановка задачи. Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$Lu \equiv a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u - u_t = F(x,t) \tag{1}$$

в области

$$\Omega_t \equiv \{0 < x < l, 0 < t < T\}, \tag{2}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \tag{3}$$

и нелокальным краевым условиям

$$u_x\Big|_{x=0} = \varphi_1(t), \tag{4}$$

$$u(l,t) + h(t)u(\gamma(t),t) = \varphi_2(t), \tag{5}$$

Keywords: *nonlocal condition of Bitsadze-Samarskiy, parabolic equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35K20

где $\gamma(t)$ — монотонная однозначно-положительная функция и $\gamma(0) = l$;

1^0) коэффициенты $a(x,t) \in C^{\alpha+1,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\Omega_T)$ и $a(x,t) \geq a_0 =$ const > 0, $0 < \alpha \leq 1$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in C^{\alpha,0}_{x,t}(\Omega_T)$, где $C^{k+\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$ — класс Гельдера;

2^0) заданные функции $F(x,t) \in C^{\alpha,0}_{x,t}(\Omega_T)$, $f(x) \in C(\Omega)$, $h(t), \varphi_1, \varphi_2 \in C[0,T]$ ограничены.

Кроме того, выполняется условие согласования

$$f_x(0) = \varphi_1(0). \tag{6}$$

Построение функции Грина задачи Дирихле для уравнения (1) в Ω_T.

Для уравнения теплопроводности

$$u_t = a(\xi,\tau)u_{xx} \tag{7}$$

с "замороженным"коэффициентом в точке (ξ, τ) методом продолжения построим функцию Грина

$$Q_0^{(\xi,\tau)}(x \pm \xi, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\sqrt{\pi a(\xi,\tau)(t-\tau)}} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi-2kl)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}\right)\right]. \tag{8}$$

Функцию Грина $Q(x,t;\xi,\tau)$ смешанной краевой задачи для уравнения (1) в Ω_T построим методом Леви, взяв за параметрикс $Q_0^{(\xi,\tau)}(x \pm \xi, t-\tau)$, т.е.

$$Q^{(\xi,\tau)}(x \pm \xi, t-\tau) = Q_0^{(\xi,\tau)}(x \pm \xi, t-\tau) + \int_\tau^t d\lambda \int_\Omega Q_0^{(\eta,\lambda)}(x \pm \eta, t-\lambda)\Phi(\eta,\lambda,\xi,\tau)d\eta = Q_0 + Q_1. \tag{9}$$

Неизвестную функцию $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ выберем так, чтобы $Q(x,t;\xi,\ \tau)$, определенная равенством (9), удовлетворяла однородному уравнению $Lu = 0$. Подставляя $Q(x,t;\xi,\tau)$ в $Lu = 0$ и используя равенство (7), относительно $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ получим следующее интегральное уравнение

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) = K(x,t;\xi,\tau) + \int_\tau^t d\lambda \int_\Omega K(x,t;\eta,\lambda)\Phi(\eta,\lambda,\xi,\tau)d\eta, \tag{10}$$

где

$$K(x,t;\xi,\tau) = [a(x,t) - a(\xi,t)]D_x^2 Q_0 + b(x,t)D_x Q_0 + c(x,t)Q_0. \tag{11}$$

В силу условий, налагаемых на коэффициенты уравнения (1), легко получить оценку

$$|K(x,t;\xi,\tau)| \leq \frac{M}{(\sqrt{t-\tau})^{3-\alpha}} \exp\left\{-\delta\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}. \tag{12}$$

Следовательно, K(x,t;ξ, τ) — ядро со слабой особенностью. Поэтому интегральное уравнение (12) можно решить методом последовательных приближений. Кроме того, можно показать, что построенная функция $Q(x,t;\xi,\tau)$ имеет производные $D_\xi Q$, $D_x^2 Q$, $D_\xi D_x Q$, $D_x^2 D_\xi Q$, непрерывные при $x \neq \xi$ и подчиняющиеся неравенствам

$$\left|D_t^k D_x^s D_\xi Q\right| \leq \frac{M}{(\sqrt{t-\tau})^{2+2k+s}} \exp\left(-\delta\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad 0 \leq 2k+s \leq 2. \tag{13}$$

Для функции $Q_1(x,t;\xi,\tau)$ справедлива оценка

$$|D_x^s D_\xi Q_1| \leq \frac{M}{(\sqrt{t-\tau})^{1+s-\alpha}} \exp\left\{-\delta \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\} \quad , \quad 0 \leq s \leq 2. \tag{14}$$

Из представления (9) в силу (8) следует, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{x=0} = Q(l,\tau) = 0. \tag{15}$$

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию 1^0), а заданные функции условию 2^0), то решение задачи (1)—(4) выражается в виде суммы объемных и поверхностного потенциалов*

$$\begin{gathered} u(x,t) = -\int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi,\tau) Q(x,t;\xi,\tau) d\xi + \int_0^l f(\xi) Q(x,t;\xi,0) d\xi + \\ + \int_0^t \varphi_1(\tau) D_\xi Q|_{\xi=0} d\tau = V(F) + V_0(f) + W(\varphi_1). \end{gathered} \tag{16}$$

Сведение краевой задачи (1)—(3) к интегральному уравнению. Решение нелокальной задачи (1)-(5) будем искать в виде

$$u(x,t) = V(F) + V_0(f) + W(\varphi_1) + \int_0^t \sigma(\tau) D_\xi Q|_{\xi=l} d\tau, \tag{17}$$

где σ(x,t) — неизвестная непрерывная функция.

Нетрудно проверить, что функция u(x,t), определенная формулой (17), удовлетворяет неоднородному уравнению (1), начальному условию (3) и краевому условию (4).

Неизвестную функцию σ(x,t) выберем так, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла нелокальному условию (5).

Используя свойства тепловых потенциалов, относительно σ(t) получим следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$\sigma(t) + h(t) \int_0^t \sigma(\tau) D_\xi Q \Bigg|_{\substack{\xi = l \\ x=\gamma(t)}} d\tau = \Psi(t), \tag{18}$$

где

$$\Psi(t) = \varphi_2(t) - [V(F) + V_0(f) + W(\varphi_1)]_{x=l} - h(t)[V(F) + V_0(f) + W(\varphi_1)]_{x=\gamma(t)}. \tag{19}$$

Очевидно, что $\Psi(t)$ — непрерывная ограниченная функция.

При к=0 и к=1 слагаемые уравнения (18) имеют особенность в ядрах; все остальные ядра, входящие в это уравнение, — ограниченные.

Ядро имеет следующий вид

$$K(\gamma(t)-l, t-\tau; a(l,\tau)) = \frac{\gamma(t)-l}{2\sqrt{\pi a(l,\tau)(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{(\gamma(t)-l)^2}{4a(l,\tau)(t-\tau)}\right). \tag{20}$$

Выделяя главную часть ядра интегрального уравнения (18), представим его в виде

$$\begin{aligned} K(\gamma(t), t-\tau; a(l,\tau)) = K(\gamma(t), t-\tau; a(l,t)) + [K(\gamma(t), t-\tau; a(l,\tau)) - \\ -K(\gamma(t), t-\tau; a(l,t))] = K_0(t,\tau) + K_1(t,\tau). \end{aligned}$$

Так как $a(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha+1,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$, то легко показать, что разность $K_1(t,\tau)$ удовлетворяет оценке

$$|K_1(t,\tau)| \le \frac{M}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{2}}}. \qquad (21)$$

Решение характеристического уравнения. Рассмотрим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$\sigma(t) + h(t)\int\limits_0^t \sigma(\tau)K_0(\gamma(t), t-\tau; a(l,t))d\tau = \Psi(t), \qquad (22)$$

где Ψ (t) — непрерывная ограниченная функция.

Относительно интегрального оператора

$$K_0\sigma = \int\limits_0^t \sigma(\tau)K_0(\gamma(t), t-\tau; a(l,t))d\tau \qquad (23)$$

докажем следующие утверждения.

Лемма1. *Если в окрестности* $t = 0$ *функция* $l - \gamma(t) = bt^q$, *то справедливы соотношения*

$$|K_0| = \begin{cases} = 1, \quad q > \frac{1}{2}, \\ = Erf\left(\frac{b}{2\sqrt{a(l,t)}}\right) = 1 - erf\left(\frac{b}{2\sqrt{a(l,t)}}\right) < 1, \quad q = \frac{1}{2}, \\ < Mexp\left(-\frac{b}{2\sqrt{a(l,t)}t^{\frac{1}{2}-q}}\right) < M\frac{2\sqrt{a(l,t)}}{b}t^{1/2-q}, \quad q < 1/2. \end{cases} \qquad (24)$$

где M, b_0 — *положительные постоянные.*

Доказательство. Оператор $K_0 \cdot 1$ при помощи замены

$$z = \frac{l-\gamma(t)}{2\sqrt{a(l,t)(t-\tau)}} \qquad (25)$$

представим в виде

$$K_0 \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t)}^{\infty} \exp\left(-z^2\right)dz, w(z) = \frac{l-\gamma(t)}{2\sqrt{a(l,t)t}}.$$

Используя интеграл Гаусса

$$erfz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-z^2\right)dz, \quad z > 0, \quad erf\infty = 1, Erfz = 1 - erfz,$$

имеем

$$K_0 \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t)}^{\infty} \exp\left(-z^2\right)dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-z^2\right)dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{w(t)} \exp\left(-z^2\right)dz =$$

$$= 1 - erfw(t) = 1 - erf\left(\frac{bt^{q-1/2}}{2\sqrt{a(l,t)}}\right),$$

откуда получаем соотношение (24).

Из соотношения (24) следует, что при $q < 1/2$ при малых значениях t для любого ε $|K_0| < \varepsilon$.

Лемма2. *Если* $\sigma(t) \in \overset{0}{C}{}^{\alpha}[0,T]$, $0 < \alpha \leq 1$ *и* $(l-\gamma(t)) \in C^q[0,T]$, $q \geq \frac{1}{2}$, *то* $K_0\sigma \in \overset{0}{C}{}^{\frac{\alpha}{2}}[0,T]$, *где* $\overset{0}{C}{}^{\alpha}[0,T] = \{\sigma \in C^{\alpha}[0,t],\ \sigma(0) = 0\}$. *В частности, если* $\sigma(t) \in \overset{0}{C}[0,T]$, *то* $K_0\sigma \in \overset{0}{C}[0,T]$.

Доказательство. При помощи замены (25) $K_0\sigma$ преобразуем к виду

$$K_0\sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t)}^{\infty} \sigma(t - t\frac{w^2(t)}{z^2})\exp\{-z^2\}dz.$$

Рассмотрим разность

$$K_0\sigma(t) - K_0\sigma(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t)}^{\infty}\left[\sigma\left(t - t\frac{w^2(t)}{z^2}\right) - \sigma(0)\right]\exp\left(-z^2\right)dz.$$

Имеем

$$|K_0\sigma(t) - K_0\sigma(0)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t)}^{\infty}\left|t - t\frac{w^2(t)}{z^2}\right|^{\alpha} e^{-z^2}dz \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}|t|^{\alpha}\int\limits_{w(t)}^{\infty} e^{-z^2}dz \leq M_1 t^{\alpha}.$$

Пусть $t_2 > t_1 \neq 0$. Разность представим в виде

$$K_0\sigma(t_1) - K_0\sigma(t_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t_1)}^{w(t_2)}\sigma(t_1 - t_1\frac{w^2(t_1)}{z^2}\exp\left(-z^2\right)dz +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{w(t_2)}^{\infty}\left[\sigma\left(t_1 - t_1\frac{w^2(t_1)}{z^2}\right) - \sigma\left(t_2 - t_2\frac{w^2(t_2)}{z^2}\right)\right]\exp\left(-z^2\right)dz.$$

Отсюда

$$|K_0\sigma(t_1) - K_0\sigma(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Из результатов лемм 1 и 2 следует

Теорема 2. *Если* $(l - \gamma(t)) \in C^q[0,T]$ *и* $\gamma(0) = l$, *то оператор* K_0 *является оператором сжатия при* $q > \frac{1}{2}$ *и* $|h(t)| < 1$, *либо при* $q = \frac{1}{2}$ *и* $|h(t)|Erf(\frac{b}{\sqrt{2a(l,t)}}) < 1$, *либо при* $q < \frac{1}{2}$ *и* $|h(t)| < N$. *Характеристическое интегральное уравнение (23) имеет единственное решение в классе функции* $\overset{0}{C}[0,T]$, *которое можно найти методом последовательных приближений.*

Решение сингулярного интегрального уравнения. Существование решения сингулярного интегрального уравнения (23) докажем методом регуляризации. При выполнении условий теоремы 2 для оператора $E + h(t)K_0$, где E — единичный оператор, существует ограниченный обратный оператор. Поэтому решение характеристического интегрального уравнения (22) можно представить в виде

$$\sigma(t) = (E + h(t)K_0)^{-1}\Psi. \tag{26}$$

Используя равенство (26), сингулярное уравнение (18) можно заменить эквивалентным интегральным уравнением

$$\sigma(x,t) + R\sigma = \Psi_1(t), \tag{27}$$

где $R = (E + h(t)K_0)^{-1}K_1, \Psi_1(t) = (E + h(t)K_0)^{-1}\Psi$. Очевидно, что оператор R, как произведение ограниченного оператора $(E + h(t)K_0)^{-1}$ и слабосингулярного оператора K_1, является слабосингулярным и $\Psi_1 \in \overset{0}{C}[0, T]$ в силу леммы 2. Поэтому интегральное уравнение (27) имеет единственное решение $\sigma(x, t) \in C[0, T]$, которое можно найти методом последовательных приближений. Тем самым доказано существование непрерывного решения интегрального уравнения (18). В результате мы имеем

Теорема 3. *При выполнении условий* 1^0) *и* 2^0) *на коэффициенты и заданные функции и условий теоремы 2 смешанная нелокальная задача (1)-(5) имеет регулярное решение, определенное формулой (17), где неизвестная функция* $\sigma(t)$ *— решение интегрального уравнения (18).*

Цитированная литература

1. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

2. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

3. **Эйдельман С.Д.** Параболические системы. М., 1964.

Поступила в редакцию 20.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 39 – 42*

УДК 517.946

О МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. Б. Бержанов, А. У. Бекбауова

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
463000 г.Актобе, пр. А.Молдагуловой, 34

Получено достаточное условие существования и единственности периодического по части независимых переменных решения одной системы уравнений в частных производных первого порядка, не разрешенных относительно производных.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{gathered} D_\varepsilon x \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi} + b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \psi}\right) x = P(t,\varphi,\psi)x + \\ +\mu Q(t,\varphi,\psi,x,D_\varepsilon x,\mu) \end{gathered} \tag{1}$$

где x, Q — n-векторы – столбцы; φ, $a(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = a^0(t) + \varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ — m-векторы; ψ, $b(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = b^0(t) + \varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ — k-векторы; $P(t,\varphi,\psi)$ — $n \times n$-матрица; $a \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $b \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}$ — скалярные произведение m-k-мерных векторов a, b и символических векторов

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \varphi_m}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = \left(\frac{\partial}{\partial \psi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \psi_k}\right);$$

ε μ — положительные параметры.

Пусть $t \in R$, $\varphi \in R^m = \{\varphi : ||\varphi|| < \infty\}$, $\psi \in R^k = \{\psi : ||\psi|| < \infty\}$, $x \in R_\Delta = \{x : ||x|| < \Delta\} \subset R^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\mu \in [0, \mu_0]$.

Вектор-функцию $f(t,\varphi,\psi) \in R^n$, определенную и непрерывную в R^{1+m+k}, назовем многопериодической по части переменных, если она многопериодична по t, φ с вектор-перидом $(\theta,\omega) \in R^{1+m}$ равномерно относительно $\psi \in R^k$. Очевидно, для такой функции $f(t,\varphi,\psi)$ при любых $(t,\varphi,\psi) \in R^{1+m+k}$ имеет место равенство $f(t+\theta, \varphi + q\hat{\omega}, \psi) - f(t, \varphi, \psi) = 0$, где $q\hat{\omega} = (q_1\omega_1, \ldots, q_m\omega_m)$, $q = (q_1, \ldots, q_m)$ — целочисленный вектор.

Поставим задачу определения достаточных условий существования единственного многопериодического по части переменных решения системы (1).

Будем полагать, что *выполнены условия* (S), если вектор-функции $a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $Q(t,\varphi,\psi,x,y,\mu)$ и матрица $P(t,\varphi,\psi)$

Keywords: *multiperiodic solution, equation of patrial derivative*
2000 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35F20

ограничены и равномерно непрерывны по $t, \varphi, \psi, x, \varepsilon, \mu$;

обладают ограниченными и равномерно непрерывными частными производными до второго порядка включительно по координатам векторов φ,ψ, x, y при всех $(t,\varphi,\psi)\in R^{1+m+k}$, $t \in R$, x,$y \in R_\Delta$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $\mu\in[0,\mu_0,]$;

относительно t, φ многопериодичны с вектор-периодом $(\theta,\omega,)$ равномерно по $\psi\in R^k$, x, $y \in R_\Delta$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu\in[0, \mu_0]$;

det $P(t,\varphi,\psi)\neq 0$ $\forall(t,\varphi,\psi)\in R^{1+m+k}$.

Очевидно, при выполнении условий (S) имеют место соотношения

$$\begin{gathered}
\|a^0(t)\| \le a_0,\ \|a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\| \le a_{10},\ \|b^0(t)\| \le b_1, \\
\|b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\| \le b_{10},\ \|P(t,\varphi,\psi)\| \le P_0,\ \|Q(t,\varphi,\psi,0,0,\varepsilon)\| \le Q_0, \\
\|a_1(t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\varepsilon) - a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\| \le \beta_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|), \\
\|b_1(t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\varepsilon) - b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\| \le \beta_2(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|), \\
\|P(t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - P(t,\varphi,\psi)\| \le P_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\|), \\
\|Q(t,\overline{\varphi},\overline{\psi},\overline{x},\overline{y},\mu) - Q(t,\varphi,\psi,x,y,\mu)\| \le \sigma(\|\overline{\varphi}-\varphi\| + \|\overline{\psi}-\psi\| + \|\overline{x}-x\| + \|\overline{y}-y\|), \\
a(t+\theta,\varphi+\hat{q}\omega,\psi,\varepsilon) - a(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = 0,\ b(t+\theta,\varphi+\hat{q}\omega,\psi,\varepsilon) - b(t,\varphi,\psi,\varepsilon) = 0, \\
P(t+\theta,\varphi+\hat{q}\omega,\psi) - P(t,\varphi,\psi) = 0,\ Q(t+\theta,\varphi+\hat{q}\omega,\psi,x,y,\mu) - Q(t,\varphi,\psi,x,y,\mu) = 0
\end{gathered} \tag{2}$$

для всех $t \in R,\ \varphi,\overline{\varphi} \in R^m,\ \psi,\overline{\psi} \in R^k,\ \overline{x},x \in R_\Delta,\ \overline{y},y \in R_\Delta,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],\ \mu \in [0,\mu_0]$.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получаем систему

$$D_0x^0 = P(t,\varphi,\psi)x^0 + \mu Q(t,\varphi,\psi,x^0,D_0x^0,\mu), \tag{3}$$

которую назовем условно-вырожденной.

Следуя идеям работ [1, 2], строим характеристическую $(m+k)$-мерную вектор-функцию $\Gamma(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon) = \{\lambda(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\ \xi(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon)\}$ оператора D_ε, обращающуюся при $t = t_0$ в вектор $\{\varphi,\ \psi\}\in\mathrm{R}^{m+k}$. Очевидно, ее m- и k-мерные компоненты определяются из системы

$$\begin{gathered}
\lambda(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon) = \varphi - \int_{t_0}^{t} a[s,\lambda(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\xi(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\varepsilon]ds, \\
\xi(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon) = \psi - \int_{t_0}^{t} b[s,\lambda(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\xi(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\varepsilon]ds.
\end{gathered} \tag{4}$$

Условия (S) обеспечивают существования и единственность решения задачи Коши для системы (4). При этом $\Gamma(t_0,t_0,\varphi,\psi,\varepsilon) = \{\varphi,\psi\}$.

Лемма 1. *Для вектор-функций $\lambda(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $\xi(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ при условии (S) справедливы соотношения:*

I(a) $||\lambda(t_0,\ t,\ \overline{\varphi},\ \overline{\psi},\ \varepsilon)$ - $\lambda(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon)|| + ||\xi(t_0,\ t,\ \overline{\varphi},\ \overline{\psi},\ \varepsilon)$ - $\xi(t_0,\ t,\varphi,\psi,\varepsilon)|| \le$
$\le (||\overline{\varphi}-\varphi|| + ||\overline{\psi}-\psi||)\ \exp(2\beta\varepsilon|t-t_0|)$,

I(б) $\lambda(t_0+\theta,\ t+\theta,\varphi+\hat{q}\omega,\psi,\varepsilon) = \lambda(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon) + \hat{q}\omega$,
$\xi(t_0+\theta,t+\theta,\varphi+\hat{q}\omega,\psi,\varepsilon) = \xi(t_0,t,\varphi,\psi,\varepsilon)$.

Предположим, что линейная система

$$D_\varepsilon x = P(t,\varphi,\psi)x \tag{5}$$

является некритической [3, с.68]. Тогда для системы (4) может быть построена матрица типа Грина, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered}
\|X(t_0,t,\varphi,\psi)\| \le B exp\{-\gamma|t-t_0|\}, \\
X(t-0,t,\varphi,\psi) - X(t+0,t,\varphi,\psi) = E,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $B \geq 1$ и $\gamma > 0$ — постоянные, E — единичная матрица. При выполнении условий (S), (5) и при $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon} = \frac{\gamma}{4\beta B}$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ частные производные по координатам векторов φ и ψ матрицы Грина удовлетворяют соотношению

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right\| + \left\| \frac{\partial X}{\partial \psi} \right\| \leq B^* \exp\{-\frac{\gamma}{2}|t - t_0|\}, \qquad (7)$$

где $B^* = LBP_1$, $L = 4B\gamma^{-1}$.

Лемма 2. *Для матрицы Грина при выполнении условий (S), (5), (6) справедливы оценки:*

II(а) $\quad ||X(t_0, t, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) - X(t_0, t, \varphi, \psi)|| \leq \frac{1}{2}B^*(B+2)\left(||\overline{\varphi} - \varphi|| + ||\overline{\psi} - \psi||\right)\exp\{-\frac{\gamma}{2}|t - t_0|\}$;

II(б) $\quad X(t_0 + \theta, t + \theta, \varphi + q\overset{\wedge}{\omega}, \psi) - X(t_0, t, \varphi, \psi) = 0.$

Пусть $B'_n(\Delta_1, \delta_1)$ есть класс n-мерных многопериодических по части переменных вектор-функций $f(t, \varphi, \psi)$ с вектор-периодом (θ,ω), имеющих ограниченные и равномерно непрерывные частные производные первого порядка по координатам векторов φ, ψ и удовлетворяющих в R^{1+m+k} неравенствам

$$||f(t, \varphi, \psi)|| \leq \Delta_1, \quad ||f(t, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) - f(t, \varphi, \psi)|| \leq \delta_1\left(||\overline{\varphi} - \varphi|| + ||\overline{\psi} - \psi||\right),$$

а $B''_n(\Delta_2, \delta_2)$ есть класс n-мерных многопериодических по части переменных вектор-функций $g(t, \varphi, \psi)$ с вектор-периодом (θ,ω), удовлетворяющих аналогичным неравенствам с постоянными Δ_2, δ_2.

Пусть $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, δ=δ_1+δ_2.

Рассмотрим класс

$$B_{2n}(\Delta, \delta) = B'_n(\Delta_1, \delta_1) \times B''_n(\Delta_2, \delta_2)$$

вектор-функций $\{f(t, \varphi, \psi)$,$g(t, \varphi, \psi)\}$, в котором норму определим следующим образом

$$|||\{f(t, \varphi, \psi), g(t, \varphi, \psi)\}||| = \|f(t, \varphi, \psi)\|_B + \|g(t, \varphi, \psi)\|_B + \left\|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right\|_B + \left\|\frac{\partial f}{\partial \psi}\right\|_B + \left\|\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right\|_B + \left\|\frac{\partial g}{\partial \psi}\right\|_B,$$

где $\| \cdot \|_B = \sup\limits_{R^{1+m+k}} \| \cdot \|$.

Тогда класс $B_{2n}(\Delta, \delta)$ становится полным нормированным пространством.

Теорема. *Если система (4)— некритическая и выполнены условия (S), то для достаточно малых значений параметров ε и μ система (1) допускает единственное многопериодическое по части переменных решение из класса $B'_n(\Delta_1, \delta_1)$, обращающееся при ε =0 в многопериодическое по части переменных решение условно-вырожденной системы (2), а при μ =0 – в нулевой вектор.*

Доказательство. Рассмотрим оператор T, отображающий каждую вектор-функцию $\{f(t, \varphi, \psi),\ g(t, \varphi, \psi)\} \in B_{2n}(\Delta, \delta)$ в вектор функцию $\{F(t, \varphi, \psi),\ G(t, \varphi, \psi)\}$ так, что

$$F(t, \varphi, \psi) = \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X^*(s, t, \varphi, \psi) \cdot Q(s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \zeta(s, t, \varphi, \psi), f(s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \zeta(s, t, \varphi, \psi)),$$
$$g(s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \zeta(s, t, \varphi, \psi)), \mu)ds,$$

$$G(t, \varphi, \psi) = P(t, \varphi, \psi)F(t, \varphi, \psi) + \mu Q(t, \varphi, \psi, f(t, \varphi, \psi), g(t, \varphi, \psi), \mu).$$

Для вектор-функций $F(t, \varphi, \psi)$, $G(t, \varphi, \psi)$ в силу условий (S), неравенства (5) и оценок I(а)-(б), II(а)-(б) при $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon} = \frac{\gamma}{4\beta B}$ имеют место соотношения

$III(a) \quad ||F(t, \varphi, \psi)\| \leq \mu\frac{2B}{\gamma}(Q_0 + \sigma\Delta) \equiv \mu C_1,$

$\qquad\qquad |G(t, \varphi, \psi)\| \leq \mu(Q_0 + \sigma\Delta) \cdot (P_0\frac{2B}{\gamma} + 1) \equiv \mu C_2,$

$III(б) \quad ||F(t, \overline{\varphi}, \overline{\psi}) - F(t, \varphi, \psi)|| \leq \mu C_3\left(||\overline{\varphi} - \varphi|| + ||\overline{\psi} - \psi||\right),$

$$||G(t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - G(t,\varphi,\psi)|| \le \mu C_4 \left(||\overline{\varphi}-\varphi|| + ||\overline{\psi}-\psi||\right),$$

где $C_3 = \left(\frac{4B}{\gamma}\sigma + (Q_0+\sigma\Delta)(B+2)\frac{2B^*}{\gamma}\right)$, $C_4 = P_0C_3 + P_1C_2$;

III(в) $\quad F(t+\theta,\varphi+q\overset{\wedge}{\omega},\psi) - F(t,\varphi,\psi) = 0,$

$\quad G(t+\theta,\varphi+q\overset{\wedge}{\omega},\psi) - G(t,\varphi,\psi) = 0;$

III(г) $\quad ||F_{\overline{f},\overline{g}}(t,\varphi,\psi) - F_{f,g}(t,\varphi,\psi)|| \le \mu\frac{2B}{\gamma}\sigma\left(||\overline{f}-f|| + ||\overline{g}-g||\right) \equiv \mu C_5\left(||\overline{f}-f|| + ||\overline{g}-g||\right),$

$||G_{\overline{f},\overline{g}}(t,\varphi,\psi) - G_{f,g}(t,\varphi,\psi)|| \le \mu\sigma\left(\frac{2B}{\gamma}+1\right)\left(||\overline{f}-f|| + ||\overline{g}-g||\right) \equiv \mu C_6\left(||\overline{f}-f|| + ||\overline{g}-g||\right).$

На основании лемм 1, 2 и в силу неравенств (2), (6), (7) из III(а)-(г) при $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon} = \frac{\gamma}{4\beta B}$, $0<\mu<\overline{\mu}$ получим оценки

IV(а) $\quad ||F(t,\varphi,\psi)|| \le \Delta_1, \quad ||G(t,\varphi,\psi)|| \le \Delta_2;$

IV(б). $\quad ||F(t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - F(t,\varphi,\psi)|| \le \delta_1(||\overline{\varphi}-\varphi|| + ||\overline{\psi}-\psi||),$

$\quad ||G(t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - G(t,\varphi,\psi)|| \le \delta_2(||\overline{\varphi}-\varphi|| + ||\overline{\psi}-\psi||);$

IV(в). $\quad F(t+\theta,\varphi+q\overset{\wedge}{\omega},\psi) - F(t,\varphi,\psi) = 0,$

$\quad G(t+\theta,\varphi+q\overset{\wedge}{\omega},\psi) - G(t,\varphi,\psi) = 0;$

IV(г). $\quad \|F_{\overline{f},\overline{g}}(t,\varphi,\psi) - F_{f,g}(t,\varphi,\psi)\| \le \frac{1}{4}\left(\|\|\overline{f}-f\|\| + \|\|\overline{g}-g\|\|\right),$

$\quad \|G_{\overline{f},\overline{g}}(t,\varphi,\psi) - G_{f,g}(t,\varphi,\psi)\| \le \frac{1}{4}\left(\|\|\overline{f}-f\|\| + \|\|\overline{g}-g\|\|\right),$

где $\overline{\mu}=min\{\mu_1,\ \mu_2,\mu_3,\ \mu_4,\ \mu_5,\ \ \mu_6\}$, $\mu_1 = \frac{\Delta_1}{C_1}$, $\mu_2 = \frac{\Delta_2}{C_2}$, $\mu_3 = \frac{\delta_1}{C_3}$, $\mu_4 = \frac{\delta_2}{C_4}$, $\mu_5 = \frac{1}{4C_5}$, $\mu_6 = \frac{1}{4C_6}$.

Из IV (а)-(г) видно, что оператор $T=\{F,G\}$ при значениях параметров $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon}$, $0<\mu<\overline{\mu}$ отображает класс $B_{2n}(\Delta,\delta)$ в себя, причем такой оператор является сжимающим. Следовательно, в $B_{2n}(\Delta,\delta)$ существует единственная неподвижная точка $\{f^*,\ g^*\}$, где $f^* = f^*(t,\varphi,\psi),\ g^* = g^*(t,\varphi,\psi)$, удовлетворяющая условию

$$f^* = F_{f^*,g^*}(t,\varphi,\psi),\ g^* = G_{f^*,g^*}(t,\varphi,\psi).$$

С другой стороны, легко показать, что

$$g^*(t,\varphi,\psi) = D_\varepsilon f^*(t,\varphi,\psi).$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финасовой поддержке Фонда науки МОН РК (№ 1-1-1.2-12(60)).

Цитированная литература

1. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963.

2. **Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.** Лекции по методу интегральных многообразий. Киев, 1968.

3. **Умбетжанов Д.У.** Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата, 1979.

Поступила в редакцию 01.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 43 – 47*

УДК 517.968

О НЕТЕРОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

Н. К. Блиев

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы, ул.Пушкина,125 Bliev@math.kz

Теории сингулярных интегральных уравнений в различных функциональных пространствах посвящено большое количество работ.

Подробная теория интегральных уравнений с сингулярным интегральным оператором с ядром Коши в пространствах непрерывных по Гёльдеру на контуре Γ плоской области функций $C_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \le 1$ имеется в монографиях [1] и [2], которая нашла многочисленные приложения в теории упругости и в краевых задачах математической физики.

В свое время некоторые виды сингулярных интегральных операторов, в том числе с ядром Коши, были изучены нами в шкале пространств Никольского - Бесова [3],[4].

В данной работе приводится продолжение указанных результатов, позволяющих доказать нетеровую разрешимость сингулярных интегральных с ядром Коши уравнений в пространствах непрерывных в терминах пространств Бесова функций, не вложенных в $C_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \le 1$.

Приведем следующее утверждение, доказательство которого имеется в [3, с. 61].

1°. **Лемма.** *Пусть G ограниченная область комплексной плоскости E, ограниченная ляпуновским контуром $\Gamma \in C^1_\nu$, $0 < \nu \le 1$, $f(\tau)$ принадлежит пространству Бесова $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, где p, θ, r удовлетворяют одному из следующих условий:*

а) $1 < p < 2, \quad \theta = 1, \quad r = \frac{1}{p}$,

б) $1 < p < 2, \quad \theta \ge 1, \quad r > \frac{1}{p}$,

в) $p \ge 2, \quad \theta \ge 1, \quad r > 1 - \frac{1}{p}$.

И пусть выполнено условие $r + \frac{1}{p} - 1 < \nu \le 1 \quad (r < 1)$.

Тогда интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in G \tag{1}$$

принадлежит $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$, *где* $\alpha = r + \frac{1}{p} - 1$, *при этом*

$$\|\Phi(z)\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)} \le M\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)}. \tag{2}$$

Keywords: *singular integral, integral of Cauchy type, norms*
2000 Mathematics Subject Classification: 32A55, 45E05

Здесь и в дальнейшем M (с индексом и без индекса) означает положительную постоянную, не зависящую от рядом стоящего сомножителя.

Заметим, что в случаях б) и в) $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ вложено в $C_\mu(\Gamma)$ при некотором μ, $0 < \mu \le 1$. Функция $\Phi(z)$, принадлежащая $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$, является непрерывной по Гельдеру с некоторым положительным показателем в замкнутой области $\overline{G}$. Следовательно, в этих случаях приходим к известным из [1], [2] результатам, хотя информация о существовании обобщенной производной является дополнительным сведением.

В случае а) $B^r_{p,\theta}(\Gamma) = B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$ вложено в пространство $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций, а $B^{1+\alpha}_{p,1}(G) = B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G)$ вложено в пространство $C(\overline{G})$ непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$ в силу предельной теоремы вложения [5] и соответствующие операторы вложения ограничены. При этом $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma) \not\to C_{\mu_1}(\Gamma)$, $B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G) \not\to C_{\mu_2}(\overline{G})$ ни при каких $0 < \mu_1, \mu_2 \le 1$.

Этот результат представляется интересным, поскольку известно, что для любой плотности $f(\tau) \in C(\Gamma)$ интеграл типа Коши, вообще говоря, не является непрерывной функцией в замкнутой области $\overline{G}$.

В условиях а) леммы функция $\Phi(z) \in B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G)$ представляется интегралом типа Коши (1), имеет след из $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$ [5, с. 307, 337], который является сужением $\Phi(z)$ на Γ по непрерывности, т. е. совпадает с ее угловым граничным значением изнутри области G

$$\Phi^+(t) = \lim_{G \ni z \to t_0 \in \Gamma} \Phi(z).$$

В силу (2) имеет место оценка

$$\|\Phi^+(t)\|_{B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)} \le M_1 \|\Phi(z)\|_{B^{1+\alpha}_{p,1}(G)} \le M\|f\|_{B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)}. \tag{3}$$

Следовательно, существует сингулярный интеграл [6, с. 190]

$$S_\Gamma f = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}, t \in \Gamma, \tag{4}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, который в силу (2) и (3) является ограниченным оператором в $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$

$$\|S_\Gamma f\|_{B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)} \le M\|f\|_{B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)}. \tag{5}$$

Кроме того, граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ изнутри и извне Γ соответственно выражаются формулами Сохоцкого-Племеля:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}S_\Gamma f, \quad \Phi^-(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}S_\Gamma f. \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = S_\Gamma f.$$

2°. Пусть теперь $\varphi(t, t_1)$ — функция точек t, t_1 контура Γ принадлежит $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma\times\Gamma)$, $1 < p < 2$. Рассмотрим повторные интегралы, отличающиеся порядком интегрирования

$$J(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau, \tau_1)d\tau_1}{\tau_1 - \tau},$$

$$J_1(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau,\tau_1)d\tau}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}.$$

Оба интеграла имеют смысл. Первый из них существует как сингулярный интеграл в смысле Коши и принадлежит $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, так как

$$J(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \qquad \text{где} \qquad \psi(\tau) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau,\tau_1)d\tau_1}{\tau_1-\tau},$$

существует в смысле главного значения по Коши и принадлежит $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$ в силу (5).

Второй интеграл представим в виде

$$J_1(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\theta(\tau,\tau_1) - \theta(\tau_1,\tau_1)d\tau_1}{\tau_1 - t}, \tag{$*$}$$

где

$$\Theta(\xi,\tau_1) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau,\tau_1)d\tau}{\tau-\xi} \in B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma).$$

Следовательно, $J_1(t)$ существует и представляет собой непрерывную на Γ функцию.

Теперь нетрудно убедиться в справедливости формулы перестановки Пуанкаре-Бертрана ([7 с. 95]; [2 с. 66 см. сноску])

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t}\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau,\tau_1)d\tau_1}{\tau_1-\tau} = \varphi(t,t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau,\tau_1)d\tau}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}. \tag{7}$$

Если $\varphi(t,t_1)$ зависит только от t, т. е. $\varphi(t,t_1) = \varphi(t) \in B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, $1<p<2$, то в силу ($*$) легко видеть, что $J_1(t) = 0$. Следовательно, из формулы (7) непосредственно следует, что $S^2_\Gamma\varphi = \varphi$ для любой $\varphi(t) \in B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, $1<p<2$, т. е. имеем важное соотношение

$$S^2_\Gamma = J,$$

где J — тождественный (единичный) оператор в $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, $1<p<2$.

3°. При изучении сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши часто приходится иметь дело с интегральным оператором

$$S^a f = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{a(\tau) - a(t)d\tau}{\tau - t} f(\tau)d\tau, \tag{8}$$

где $a(t)$ — заданная (непрерывная) функция.

Мы будем считать, что $a(t) \in B^r_{p,1}(\Gamma)$, $r = \frac{1}{p}$, $1<p<2$. Покажем, что при этом S^a вполне непрерывен из $B^r_{p,1}(\Gamma)$ в $B^r_{p,1}(\Gamma)$. Заметим, что $B^r_{p,1}(\Gamma)$ есть нормированное кольцо (банаховая алгебра) с обычными операциями сложения и умножения функций на число [3], [8].

Поэтому из ограниченности S^a в $B^r_{p,1}(\Gamma)$ (см. (5)) и компактного вложения $B^r_{p,1}(\Gamma) \hookrightarrow L_p(\Gamma)$ [5] получаем, что S^a вполне непрерывен из $B^r_{p,1}(\Gamma)$ в $L_p(\Gamma)$, т.е. образ $S^a(\aleph)$ любого ограниченного в $B^r_{p,1}(\Gamma)$ множества $\aleph$ есть компактное множество в $L_p(\Gamma)$, следовательно, [5]

1) (равномерно) ограничено в $L_p(\Gamma)$:

$$\sup_{f\in\aleph}\|S^a f\|_{L_p(\Gamma)} \le M, \tag{9}$$

2) равностепенно непрерывно по сдвигу: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $|h| < \delta$

$$\sup_{f\in\aleph}\|(S^a f)(t+h) - (S^a f)(t)\|_{L_p(\Gamma)} \le \sup_{f\in\aleph}\|(T_h - J)S^a f\|_{L_p(\Gamma)} \le \varepsilon, \tag{10}$$

где J — тождественный оператор, T_h — оператор сдвига, т.е. $T_h\varphi(t) = \varphi(t+h)$. Разность под нормой берется по точкам t и $t+h$, лежащим на Γ, в противном случае считается равной нулю.

Пользуясь выражением нормы в $B^r_{p,1}(\Gamma)$, имеем

$$\sup_{f\in\aleph}\|(T_h - J)S^a f\|_{B^r_{p,1}(\Gamma)} = \sup_{f\in\aleph}\|(T_h - J)S^a f\|_{L_p(\Gamma)} +$$

$$+\sup_{f\in\aleph}\left(\int\limits_\Gamma \|(T_h - J)\triangle_\tau S^a f\|_{L_p(\Gamma)}\frac{d\tau}{|\tau|^{1+r}}\right) < \infty, \tag{11}$$

где $\triangle_\tau$ — первая разность с шагом τ $(t, t+\tau \in \Gamma)$.

Рассмотрим

$$\sup_{f\in\aleph}\int\limits_\Gamma \|(T_h - J)\triangle_\tau S^a f\|_{L_p(\Gamma)}\frac{d\tau}{|\tau|^{1+r}} = \sup_{f\in\aleph}\int\limits_\Gamma A d\tau =$$

$$= \sup_{f\in\aleph}\int\limits_0^l A d\tau(s) \le \sup_{f\in\aleph}\int\limits_0^\eta A d\tau(s) + \sup_{f\in\aleph}\int\limits_\eta^l A d\tau(s) = J_1 + J_2, \tag{12}$$

где l — длина контура Γ.

Для $S^a f \in B^r_{p,1}(\Gamma)$ интеграл J_1 будет меньше произвольно заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно малом η в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Для J_2 при фиксированном η справедлива оценка

$$|J_2| \le M(\eta)\sup_{f\in\aleph}\|(T_h - J)S^a f\|_{L_p(\Gamma)}. \tag{13}$$

Тогда в силу (10) из (11)-(12) следует равностепенная непрерывность по сдвигу множества $S^a(\aleph)$ в $B^r_{p,1}(\Gamma)$.

Таким образом, $S^a(\aleph)$ как множество, компактное в $L_p(\Gamma)$ и равностепенно непрерывное по сдвигу в $B^r_{p,1}(\Gamma)$, компактно в $B^r_{p,1}(\Gamma)$ [5], т.е. S^a вполне непрерывен в $B^r_{p,1}(\Gamma)$.

4°. Выше приведенные результаты по интегралам типа Коши (1) и сингулярному оператору (4) позволяют изучать в $B^r_{p,1}(\Gamma)$, $r = \frac{1}{p}$, $1 < p < 2$ методами работ [1] и [2] сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши нормального типа

$$Af \equiv a(t)f(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t} + \mathbf{K}f = g(t), \tag{14}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ — заданные функции из $B^r_{p,1}(\Gamma)$ и $a^2(t) + b^2(t) \ne 0$ на Γ, $\mathbf{K}$ — некоторый вполне непрерывный оператор.

Результаты п.п. $2° - 3°$ позволяют рассматривать композиции операторов вида A из (14). Следовательно, поступая как в [1, с. 197] можно показать существование двустороннего регуляризатора к оператору A.

Следовательно, уравнение (14)-- нетёрево в $B^r_{p,1}(\Gamma)$ и имеют место теоремы Нетёра о разрешимости. Соответствующие (14) характеристическое уравнение и линейная задача сопряжения рассматривал И. Абитбеков [9].

Пространство $B^r_{p,1}(\Gamma) \subset C(\Gamma)$ является нормированным кольцом, удовлетворяющим условиям, приведенным в книге З. Прёсдорфа [10], следовательно, приведенные там методы функционального анализа применимы и к вырожденным случаям уравнения (14).

Цитированная литература

1. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
2. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. М., 1963.
3. **Блиев Н.К.** Обобщеные аналитические функции в дробных пространствах. Алма-Ата, 1985.
4. **Bliev N.K.** Generalized analytic functions in fractional spaces. USA, Longman. 1997.
5. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения М., 1996.
6. **Привалов И.И.** Граничные свойства однозначных аналитических функций. М., 1950.
7. **Хведелидзе Б.В.** //В кн.: Современные проблемы математики. 1975. Т.7. С.5—162.
8. **Мазья В.Г., Шапошникова Т.О.** // ДАН СССР. 1979. Т.18., №4. С.1065—1067.
9. **Абитбеков И.А.** Канд. дисс. Алма-Ата, 1985.
10. **Прёсдорф З.** Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.

Поступила в редакцию 20.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 48 — 54*

УДК 517.925:62.50

ЦЕНТРАЛЬНАЯ КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

С. С. Жуматов

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы, ул. Пушкина, 125 marat207@math.kz

Системы дифференциальных уравнений, неразрешенные относительно старшей производной приведены к канонической и центральной канонической формам. Получены достаточные условия абсолютной устойчивости вырожденных систем управления.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, неразрешенн относительно старшей производной. В общем случае такие системы имеют следующий вид

$$f(t,x,\dot{x})=0, \quad f\in R^s,\ x\in R^n\ (s\le n),\ t\in(\alpha,\beta).$$

Неявный характер этой системы порождает ряд трудностей, связанных с существованием и единственностью, устойчивостью и ограниченностью решений. В работе [1] такие системы названы неявными дифференциальными системами, введены понятия устойчивости и ограниченности решений относительно заданных нелинейных функций. Получены достаточные условия устойчивости и ограниченности, где явно фигурируют эти функции. В [2], основываясь на квалификации из [3], исследованы особые точки неявных систем дифференциальных уравнений при $s=n$. Под решением понимается C^1 — гладкая функция $x(t)$, удовлетворяющая данной системе. В окрестности особой точки системы матрица $\partial f/\partial\dot{x}$ — вырожденная. Кроме того, решение, проходящее через особую точку, может быть не C^1-гладким. Рассмотрены особые точки определенного типа, называемые правильными, которые являются в некотором смысле типичными для уравнения общего положения. Показано, что среди правильных особых точек встречаются, в основном, точки трех типов: точки ветвления (существуют ровно два решения, выходящие из данной точки, и нет ни одного входящего решения), точки остановки (существуют ровно два решения, входящие в данную точку, и нет ни одного выходящего решения) и точки единственности (существуют одно решение, выходящее из данной точки, и одно входящее). Установлено, что если функция f — достаточно гладкая, то в окрестности правильной особой точки решение $x(t)$ представимо в виде композиции гладкой функции и корня из t

Keywords: *system control, programm manyfold, canonical form, stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29

некоторой степени. В [4, 5] для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения с конечными соотношениями, неразрешенного относительно производной, строится другое дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной и не содержащее конечных соотношений. Решения нового явного и исходного уравнений тесно связаны. Эта связь позволяет судить об устойчивости решения исходного уравнения по поведению соответствующего решения построенного уравнения. В [6] проведены исследования неявных систем относительно заданного многообразия и получены достаточные условия асимптотической устойчивости программного многообразия таких систем.

Рассмотрим неявную дифференциальную систему, возникающую при построении систем по заданному многообразию Ω:

$$H(t,x(t))\dot{x}(t) = f(t,x), \quad H \in R^{s\times n}, \quad \omega \in R^s, \quad s \leq n, \quad t \in I = (\alpha,\beta), \tag{1}$$

где $H(t,x(t)) = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$, $f(t,x) = F(t,\omega(t,x)) - \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$, α,β — конечные или бесконечные числа, $F(t,0) \equiv 0$ — функция Еругина [7], а многообразие Ω задано в линейном виде:

$$\omega(t,x) \equiv H_1(t)x = 0, \tag{2}$$

где $H_1(t) \in R^{s\times n}$ — заданная непрерывная матрица. Построению систем уравнений по заданному многообразию, обладающих свойствами устойчивости, оптимальности и получению оценок качества показателей переходного процесса в окрестности программного многообразия при $s < n$ посвящены множество работ. Обзор этих работ приведен в [8, 9].

Ставится задача приведения к каноническим формам систем (1).

В начале рассмотрим случай, когда $s < n$, и дадим описание некоторых методов приведения системы (1) к каноническим формам.

Вместе с уравнением (1) рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = f(t,x) - b\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T\omega. \tag{3}$$

Здесь b и c — постоянные векторы управления и наблюдения, ξ и σ — скалярные величины, $\varphi(\sigma)$ — нелинейная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0 \wedge k_1\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) < k_2 1\sigma^2, \tag{4}$$

где k_1 и k_2 - некоторые постоянные.

Известно, что функция $\varphi(\sigma)$, по существу, является функцией управления по отклонению от программы, так как на программном многообразии Ω функция обращается в нуль и уравнение (3) принимает вид $\dot{x}(t) = f(t,x))$. Следовательно, многообразие Ω и для (3) является интегральным. Дифференцируя уравнения (2) по времени t, в силу системы уравнений, полагая $F(t,\omega(t,x)) = A_1(t)\omega$, получим

$$\dot{\omega} = -A_1(t)\omega - b\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T\omega, \tag{5}$$

где $b = H_1(t)b_1(t)$.

Для системы (5) справедливы следующие утверждения из [10].

Определение 1. *Пусть $A_1(t)$ — матрица линеаризованной системы*

$$\dot{\omega} = -A_1(t)\omega,$$

а $r \neq 0$ – s-мерный произвольный вектор-столбец. Тогда пара (r, A_1) (линеаризованная система) называется регулярной, если векторы $r, A_1r, ..., (A_1)^s r$ — линейно независимы, т.е.

$$\det \parallel r \; A_1 r \; ... \; (A_1)^s r \parallel \neq 0.$$

Заметим, что если $r = b$, то из регулярности пары (r, A_1) следует вполне управляемость системы (5). Если $r = c$ и пара (r, A_1^T) регулярна, то имеет место вполне наблюдаемость системы (5).

Лемма 1. Пусть пара (r, A_1^T) регулярна и

$$\delta(\lambda) = \det \| -A_1 + \lambda E\| = \lambda^s + a_1^{(1)}\lambda^{s-1} + \cdots + a_s^{(1)} = 0. \tag{6}$$

Тогда имеет место соотношение:

$$\Phi R = RA_1 \ \vee \ \Phi = RA_1R^{-1}. \tag{7}$$

Здесь $a^{(1)}$ – s-характеристический вектор, Φ — сопровождающая матрица,

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_s^{(1)} & a_{s-1}^{(1)} & a_{s-2}^{(1)} & \cdots & a_1^{(1)} \end{matrix} \right\|,$$

$$R^T = \|A^T r \ (A^T)^2 r \ \cdots \ (A^T)^s r\|^T.$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\lambda = \operatorname{diag} \ \| \lambda_1, \ldots, \lambda_s \|, \tag{8}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные корни характеристического уравнения линеаризованной системы

$$\delta(\lambda) = \det \| -A_1 + \lambda E\| = 0. \tag{9}$$

Составим матрицу

$$T_i = \left\| \begin{matrix} T_{i1}(\lambda_1) & \cdots & T_{is}(\lambda_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{i1}(\lambda_s) & \cdots & T_{is}(\lambda_s) \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

где T_i— матрица, составленная из элементов присоединенной матрицы для $\| -A_1 + \lambda E\|$. Тогда имеют место матричные равенства

$$\lambda T_i = T_i A_1 \quad \forall i_1^s. \tag{11}$$

С помощью замены $\varpi = T\omega$, где $T = T_i$ — невырожденная матрица при фиксированном индексе i, и леммы 2 вместо системы (5) получим каноническую форму уравнений вида

$$\dot{\varpi} = -\widetilde{P}(t)\varpi - b\xi, \ \ \xi = \varphi(\sigma), \ \ \sigma = p^T\varpi, \tag{12}$$

где

$$P = \operatorname{diag} \|\rho_1, \ldots, \rho_s\| \quad (\rho_i \neq \rho_j), \quad d = Tb, \quad p = T^{-T}c.$$

Если $d_k \neq 0 \quad \forall k_1^s$, то простой заменой $\upsilon_k = -\varpi_k/d_k$ из (12) перейдем к форме Лурье

$$\dot{\upsilon} = -\widetilde{P}(t)\upsilon + e\xi, \ \ \xi = \varphi(\sigma), \ \ \sigma = \beta^T\varpi, \tag{13}$$

где e и β — векторы-столбцы

$$e = (1, 1, \ldots, 1), \quad \beta = -(p_1d_1, \ldots, p_sd_s) = (\beta_1, \ldots, \beta_s).$$

Пусть пара (r, A_1^T) — регулярна. Тогда с помощью замены $\varpi = K\omega$ и леммы 1 из системы (5) можно получить

$$\dot{\varpi} = -\widetilde{P}(t)\varpi - s\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = l^T\varpi, \tag{14}$$

где P — сопровождающая матрица, s и l — векторы-столбцы

$$s = Kb, \quad l = K^{-1}c, \quad K^T = \|r \ A_1^T r \ \cdots \ (A_1^T)r\|.$$

Пусть пара (r, A_1) — регулярна. Тогда с помощью замены $\varpi = R^{-T}\omega$ из системы (5) получим систему

$$\dot{\varpi} = -\widetilde{P}(t)\varpi - s\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = l^T\varpi, \tag{15}$$

где

$$s = R^{-1}b, \quad l = Rc, \quad R^T = \|r \ A_1 r \ \cdots \ (A_1)^{s-1}r\|.$$

Лемма 3. *Пусть*
1)$s \neq 0$ — вектор наперед заданной структуры;
2) пара (r, A_1) вполне управляема;
3) пара (r, A_1^T) регулярна, где r определяется из равенства

$$K_1 r = s, \quad K_1 = \left\| \begin{array}{c} b^T \\ b^T A_1^T \\ \vdots \\ b^T (A_1^T)^{s-1} \end{array} \right\|.$$

Тогда система (5) преобразуется в систему (14) с наперед заданным вектором s.

Лемма 4. *Пусть*
1) $l \neq 0$;
2) пара (c^T, A_1) вполне наблюдаема;
3) пара (r, A_1^T) регулярна, где r определяется из равенства

$$R_1 r = l, \quad R_1 = \left\| \begin{array}{c} c^T \\ c^T A_1^T \\ \vdots \\ c^T (A_1^T)^{s-1} \end{array} \right\|.$$

Тогда система (5) преобразуется в систему (15) с наперед заданным вектором s.

Теперь рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение матрицы $H(t)$ при $s = n$ имеет r нулевых корней. Нашей целью является приведение полученной системы к центральной канонической форме. Выбираем функцию Еругина следующим образом

$$F(t, x, \omega) = -A_2(t)\omega. \tag{16}$$

Тогда будем иметь систему (1) вида

$$H(t)\dot{x} = A_2(t)\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}. \tag{17}$$

Принимая во внимание выражение (2), имеем

$$H(t)\dot{x} = -A(t)x - q(t), \tag{18}$$

где $H(t) \in R^{s\times s}, \ A(t) = A_2(t)H_1(t), \ q(t) = \dfrac{\partial\omega}{\partial t}.$

Приведем некоторые определения из [11].

Определение 2. *Центральной канонической формой системы (18) называется выражение*

$$\left\|\begin{matrix} E_{s-r} & 0 \\ 0 & N(t) \end{matrix}\right\| \dot y = \left\|\begin{matrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_r \end{matrix}\right\| y + q(t),$$

где E_{s-r}, E_r — единичные матрицы, соответственно, порядков $s-r$, r, $N(t)$ — верхняя треугольная матрица с нулевыми квадратными блоками на диагонали.

Рассмотрим оператор $L(t) = -A(t) - H(t)\dfrac{d}{dt}$.

Определение 3. *Будем полагать, что матрица $H(t)$ имеет некоторые жордановые клетки относительно оператора $L(t)$, если существуют ненулевые векторы $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in R^s$, которые при всех $t \in I$ удовлетворяют соотношениям*

$$H(t)\varphi_1(t) = 0, \quad H(t)\varphi_i(t) = L(t)\varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2,r}, \tag{19}$$

а уравнение

$$H(t)z = L(t)\varphi_r(t)$$

не имеет решений ни в одной точке интервале I.

Определение 4. *Если матрица $H(t)$ имеет некоторые жордановые клетки относительно оператора $L(t)$, то векторы, которые их составляют , называются жордановым набором матрицы $H(t)$ относительно оператора $L(t)$.*

Определение 5. *Пусть жорданов набор матрицы $H(t)$ относительно оператора $L(t)$ состоит из векторов $\varphi_i^{(j)}$, $j = \overline{1,l_i}$, $i = \overline{1,r}$. Относительно j сохраняется свойство (19). Обозначим через $\psi_i^{(1)}$, $i = \overline{1,r}$ собственные векторы матрицы $H(t)^*$, сопряженной с $H(t)$. Тогда справедливо равенство*

$$(L(t)\varphi_i^{(j)}, \psi_k^{(1)}) = 0 \ \ \forall t \in I, \quad j = \overline{1, l_{i-1}} \ \ i,k = \overline{1,r},$$

а скалярное произведение $(L(t)\varphi_i^{(j)}, \psi_k^{(1)})$, $j = \overline{1,r}$ (при фиксированном i) не обращается в нуль на отрезке (α, β). Если при этом

$$\det \ \| (L(t)\varphi_i^{(l_i)}, \psi_j^{(1)}) \|_1^r \neq 0 \ \ \forall t \in (\alpha, \beta),$$

то данный жорданов набор назовем полным.

Теорема 1 [11]. *Пусть $A(t)$, $H(t) \in C^{2m}(\alpha,\beta)$, $\operatorname{rank} H(t) = s - r$ и матрица $H(t)$ имеет в интервале (α,β) полный жорданов набор относительно оператора $L(t)$, который складывается с r клеток порядка $l_1, \ldots, l_r$, при $\max\limits_i l_i = m$. Тогда существуют неособые при всех $t \in (\alpha, \beta)$ $s \times s-$матрицы $\widetilde M(t)$, $G_1(t) \in C^1(\alpha,\beta)$ такие, что умножением на $\widetilde M(t)$ и заменой $x = G_1(t)y$ система (18) приводится к центральной канонической форме*

$$\left\|\begin{matrix} E_{s-l} & 0 \\ 0 & J \end{matrix}\right\| \dot y = \left\|\begin{matrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_l \end{matrix}\right\| y + \widetilde M(t) q(t),$$

где $l = l_1 + \cdots + l_r$, $J = diag(J_1, \ldots, J_r)$, J_j — жордановые клетки порядка l_j $j = \overline{1,r}$.

Выберем функцию Еругина в следующем виде

$$F(t,x,\omega) = -A_2(t)\omega - B(t)\xi, \quad \dot\xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \tag{20}$$

где $A_2(t) \in R^{s\times s}$ — гурвицевая, $B(t) \in R^{s\times k}$ — непрерывная, $P \in R^{k\times k}$ — постоянная матрицы, φ, $\sigma \in R^k$ — векторы, а нелинейная вектор-функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет локальным условиям квадратичной связи и дифференцируема по σ:

$$\varphi(t,0) = 0; \quad 0 < \sigma^T K_1 \varphi(t,\sigma) < \sigma^T K(t)\sigma \ \ \forall \ \sigma \neq 0, \tag{21}$$

$$K_2 < \frac{\partial\omega}{\partial\sigma} < K_3. \tag{22}$$

Здесь $K,\ K_i\ \ (i=1,2,3)$−диагональные матрицы.

С учетом (2) и (20) получим систему (18) в виде

$$H(t)\dot{x} = -A_1(t)\omega - q(t) - B(t)\xi,\ \ \dot{\xi} = \varphi(\sigma),\ \ \sigma = P^T\omega, \tag{23}$$

где $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (21), (22).

На основе теоремы 1 система (23) приводится к центральной форме

$$\begin{cases} \dot{u} = -M(t)u - M_1(t)q_1 - M_1(t)B_1(t)\varphi_1(\sigma_1), \\ J\dot{v} = -v - M_2(t)q_2 - M_2(t)B_2(t)\varphi_2(\sigma_2), \\ \sigma_1 = Q_1^Tu + P_1^Tg_1(t),\ \sigma_2 = Q_2^Tu + P_2^Tg_2(t), \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2,\ \ y = (u^Tv^T)^T. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $q_1(t),\ q_2(t)$ играют роль постоянно действующих возмущений. Для системы (24) без возмущений строим функцию Ляпунова вида

$$V = u^TLu + v^TJNJv + \int\limits_0^{\sigma_1}\varphi^T(\sigma_1)\beta_1 d\sigma_1 + \int\limits_0^{\sigma_2}\varphi^T(\sigma_2)\beta_2 d\sigma_2, \tag{25}$$

где $L = L^T > 0,\ N = N^T > 0$, а $\beta_1,\ \beta_2$ - положительные диагональные матрицы. Дифференцируя функцию (25), в силу системы (24) получим

$$-\dot{V} = u^TG_0u + +2u^TG_1\varphi_1(\sigma_1) + 2v^TG_4\varphi_2(\sigma_2) + \varphi_1^T(\sigma_1)G_2\varphi_1(\sigma_1) + v^TG_3v + \varphi_2^T(\sigma_2)G_5\varphi_2(\sigma_2) > 0,$$

если выполняются обобщенные условия Сильвестра

$$\left\|\begin{array}{cccc} G_0 & G_1 & 0 & 0 \\ G_1^T & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & G_4 \\ 0 & 0 & G_4^T & G_5 \end{array}\right\| \gg 0. \tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть нелинейность $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (21) и существуют положительно определенные матрицы $L,\ N,\ \beta$. Тогда для абсолютной устойчивости системы (24) без возмущений достаточно выполнения условии (26).*

Из устойчивости системы (24) без возмущений вытекает, что

$$\|q_1(t)\| \le \delta(\varepsilon),\ \|q_2(t)\| \le \delta(\varepsilon) \text{ при } \|u\| \le \varepsilon,\ \|v\| \le \varepsilon. \tag{27}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 3. Тогда для абсолютной устойчивости системы (24) достаточно выполнения условия (27).*

Цитированная литература

1. **Bajic P.N.** //Int. J. Cont. 1990. V. 52, № 5. P. 1167—1187.

2. **Ремизов А.О.** //Дифференц. уравнения. 2002. Т.38, № 5. С.622—630.

3. **Арнольд В.И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.

4. **Козеренко К.В.** // А.и Т. 2000. № 11. С.85 — 93.

5. **Козеренко К.В.** //Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 2. С. 235—238.

6. **Жуматов С.С.** //Изв. МОН РК, НАН РК.Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С.30—34.

7. **Еругин Н.П.** //Прикл. мат. и мех., 1952. Т.16, вып. 6. С.653—670.

8. **Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. и др.** Построение систем программного движения. М., 1971, 352 с.

9. **Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.** //Вестник Российского ун-та Дружбы народов. 1994. № 1. С.5—21.

10. **Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.** Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы, 1999.

11. **Яковець В.П.** // Укр.мат.журнал. 1997. Т. 49, № 9. С. 1278—1296.

Поступила в редакцию 03.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 55 — 61*

УДК 517.977.55

КОНСТРУИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ВОЛНОВЫМИ ЗВЕНЬЯМИ И С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

З. Н. Мурзабеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
480012 г. Алматы, ул. Масанчи, 39/47

Рассматривается задача оптимального управления для гибридных систем с волновыми звеньями и с закрепленными концами. Для нахождения управления использован комбинированный подход с применением множителей Лагранжа специального вида.

1. Введение. В данной работе рассматривается гибридная система, которая описывается совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных гиперболического типа, решения которых связаны граничными условиями. Смешанные системы такого типа возникают при исследовании паровых турбин, гидротурбин, электрических линий и некоторых процессов, протекающих в химических реакторах [1, 2, 3].

Исследованию устойчивости подобных систем посвящено большое количество работ [1, 2]. Многие авторы связывают с изучаемой системой некоторую нелинейную систему с отклоняющимся аргументом, к которой затем применяют частотный метод исследования абсолютной устойчивости. Для этих систем получены, в основном, лишь частотные критерии абсолютной устойчивости, причем только для случая, когда положение равновесия единственно.

В работах [4, 5] рассмотрены задачи стабилизации и управления гибридных систем с свободным правым концом траектории.

Применение методов оптимального управления для гибридных систем обычно наталкивается на серьезные вычислительные трудности. Поэтому поиск новых подходов для динамических систем с закрепленными концами траекторий является актуальной задачей оптимального управления.

2. Постановка задачи. Система с сосредоточенными параметрами описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + R_1(t)v_1(l,t) + R_2(t)v_2(0,t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — вектор состояния размерности $n \times 1$; $u = u(x,t)$ — вектор управляющих воздействий размерности $r \times 1$; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размерностей $n \times n$, $n \times r$, соответственно; $R_1(t)$,

Keywords: *hybrid system control, fixed ends, Lagrange multiplier, optimal control*
2000 Mathematics Subject Classification: 49K15, 49K20

$R_2(t)$ — вектора размерности $n \times 1$. Компоненты $A(t)$, $B(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ кусочно-непрерывны и ограничены на $[0, T]$.

Звено с распределенными параметрами описывается гиперболической системой уравнений

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha(y)\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} - \alpha(y)\frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$v_1(y, 0) = v_1^0(y), \quad v_2(y, 0) = v_2^0(y),$$

где $v_1 = v_1(y, t)$, $v_2 = v_2(y, t)$ — скалярные функции, $y \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, $\alpha(y) > 0$.

Решения систем (1)и (2) связаны граничными условиями

$$\begin{aligned} v_1(0, t) + \gamma_1 v_2(0, t) = c_1^* x(t), \\ \gamma_2 v_1(l, t) + v_2(l, t) = c_2^* x(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где γ_1, γ_2 — постоянные величины; c_1, c_2 — постоянные вектора размерности $n \times 1$.

Обозначим через D прямоугольник $D = \{(y, t) : y \in [0, l], \; t \in [0, T]\}$.

Будем говорить, что функции двух переменных $v_1(y, t)$, $v_2(y, t)$ принадлежат классу $L_2(D)$, если они принадлежат классу $L_2[0, l]$ при любом фиксированном $t \in [0, T]$ и принадлежат классу $L_2[0, T]$ при любом фиксированном $y \in [0, l]$.

Для решений $v_1(y, t)$, $v_2(y, t) \in L_2(D)$ задачи (2), (3) выполняются условия $v_i(y, 0) = v_i^0(y) \in L_2[0, l]$, $v_i(0, t) \in L_2[0, T]$, $v_i(l, t) \in L_2[0, T]$, $i = 1.2$. Будем считать, что дифференциальное уравнение (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + R_1(\tau)v_1(l, \tau) + R_2(\tau)v_2(0, \tau)]d\tau.$$

Обозначим через U компактное выпуклое множество кусочно непрерывных управлений $u \in R^r$.

Пара (x, u) является допустимым процессом при постоянно действующих возмущениях $v_1(l, t)$ и $v_2(l, t)$, если $x \in R^n$ — абсолютно непрерывная вектор-функция, $u \in U \subset R^r$ — кусочно-непрерывная вектор-функция и выполняется дифференциальное уравнение — обычная модель при исследовании задач технического содержания. Ограничение на управления вида $u \in U$ связано с ограниченными возможностями управляемого аппарата воздействовать на процесс. Начальные условия гиперболической системы (2) и системы (1) согласованы с граничными условиями (3). Очевидно, что имеют место следующие условия

$$v_1^0(0) + \gamma_1 v_2^0(0) = c_1^* x(0), \quad \gamma_2 v_1^0(l) + v_2^0(l) = c_2^* x(0).$$

Определение 1. *Решением задачи (1)—(3) будем называть совокупность функций $x(t) \in R^n$ абсолютно непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные почти всюду для всех $t \in [0, T]$, $v_1(y, t)$ и $v_2(y, t) \in L_2(D)$ непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные в прямоугольнике $D = \{(y, t) : y \in [0, l], \; t \in [0, T]\}$, если*

а) кусочно-непрерывная векторная функция $u \in U$;

б)векторная функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием;

в) функции $v_1(y, t)$, $v_2(y, t)$ удовлетворяют системе уравнений (2) с начальными граничными условиями (3).

Следует отметить, что в указанный класс решений могут входить не только классические, но и обобщенные решения.

Ставится задача. Требуется определить управление $u = u(x, t) \in U$, которое переводит систему (1) из некоторого начального состояния $x(0) = x_0$ в желаемое конечное состояние $x(T) = 0$ за заданное время T и минимизирует квадратичный функционал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T [x^*Q(t)x + u^*R(t)u + \gamma_3(t)v_2^2(0,t) + \gamma_4(t)v_1^2(l,t)]dt, \tag{4}$$

где $Q(t)$, $R(t)$ — симметричные матрицы, причем $Q(t)$ является неотрицательно определенной, $R(t)$ — положительно определенной, $\gamma_3(t)$, $\gamma_4(t)$ — положительные величины. Символ " $*$ " обозначает операцию транспонирования.

При исследовании поставленной задачи и определении возможностей управляющих воздействий будем рассматривать как состояние объекта функцию $x(t)$, а функции $v_1(y,t)$, $v_2(y,t)$ будем считать как постоянно действующие возмущения через граничные условия. В данной задаче система (1) воздействует на систему (2) через граничные условия (3), и в свою очередь, сама система (1) находится под воздействием (2). Для решения задачи (1)—(4) образуем вспомогательный функционал J^t прибавлением к квадратичному функционалу (4) системы дифференциальных уравнений (1), (2) с некоторыми множителями

$$J^t = \int\limits_t^T \Bigg\{ \frac{1}{2}[x^*Qx + u^*Ru + \gamma_3 v_2^2(0,\tau)] + (q+Kx)^*(Ax + Bu + R_1v_1(l,t) + R_2v_2(0,\tau) - \dot{x}) -$$

$$- \int\limits_0^l \left[(\psi_1 + \beta_1 v_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \alpha\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (\psi_2 + \beta_2 v_2)\left(\frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \alpha\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right] dy \Bigg\} d\tau, \tag{5}$$

где $q = q(t)$ — вектор размерности $n\times 1$; $K = K(t)$ — симметричная положительно определенная матрица размерности $n\times n$; $\psi_1 = \psi_1(y,t)$, $\psi_2 = \psi_2(y,t)$, $\beta_1 = \beta_1(y,t)$, $\beta_2 = \beta_2(y,t)$ — скалярные функции.

Интегрируя по частям слагаемые в первой части выражения (5), с учетом граничных условий получим

$$J^t = \frac{1}{2}x^*(t)Kx(t) + q^*(t)x(t) + \int\limits_0^l \Bigg[\frac{1}{2}\beta_1 v_1^2(y,t) + \frac{1}{2}\beta_2 v_2^2(y,t) + \psi_1(y,t)v_1(y,t) + \psi_2(y,t)v_2(y,t) -$$

$$-\frac{1}{2}\beta_1(y,T)v_1^2(y,T) - \frac{1}{2}\beta_2(y,T)v_2^2(y,T) - \psi_1(y,T)v_1(y,T) - \psi_2(y,T)v_2(y,T)\Bigg]dy + \int\limits_t^T \Bigg[\frac{1}{2}x^*Qx +$$

$$+\frac{1}{2}u^*Ru + (q+Kx)^*(Ax+Bu+R_1v_1(l,\tau)+R_2v_2(0,\tau + x^*\dot{q} + \frac{1}{2}x^*\dot{K}x\Bigg]d\tau + \int\limits_t^T\int\limits_0^l \Bigg[v_1^2\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial t} + \frac{\partial\alpha\beta_1}{\partial y}\right) +$$

$$+v_2^2\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial t} - \frac{\partial\alpha\beta_2}{\partial y}\right) + v_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} + \frac{\partial\alpha\psi_1}{\partial y}\right) + v_2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} - \frac{\partial\alpha\psi_2}{\partial y}\right)\Bigg]dyd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_t^T \Big\{ v_1^2(l,\tau)(\gamma_4 - \beta_1(l,\tau)\alpha +$$

$$+\beta_2(l,\tau)\gamma_2^2\alpha(l)) + v_2^2(o,\tau)(\gamma_3 - \beta_2(0,\tau)\alpha(0) + \beta_1(0,\tau)\gamma_1^2\alpha(0)) + x^*(\alpha(0)\beta_1(0,\tau)c_1c_1^* +$$

$$+\alpha(l)\beta_2(l,\tau)c_2c_2^*)x-2[\alpha(0)\beta_1(o,\tau)\gamma_1v_2(0,\tau)c_1^*+\alpha(l)\beta_2(l,\tau)\gamma_2v_1(l,\tau)c_2^*]x+2[\alpha(0)\psi_1)(0,\tau)c_1^*+$$

$$+\alpha(l)\psi_2(l,\tau)c_2^*]x-2\alpha(l)v_1(l,\tau)*[\psi_1(l,\tau)+\gamma_2\psi_2(l,\tau)]-2\alpha(0)v_2(0,\tau)[\gamma_1\psi_1(0,\tau)+\psi_2(0,\tau)]\Big\}d\tau. \quad (6)$$

Теперь найдем управление, доставляющее экстремум функционалу J^t и удовлетворяющее ограничению $u\in U$

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)x(t)+q(t)). \quad (7)$$

Подставляя управление (7) в функционал (6), получаем

$$J_0^t=\frac{1}{2}x^*(t)K(t)x(t)+x^*(t)q(t)+\int\limits_0^l\Big[\frac{1}{2}\beta_1(y,t)v_1^2(y,t)+\frac{1}{2}\beta_2(y,t)v_2^2(y,t)+\psi_1(y,t)v_1(y,t)+$$

$$+\frac{1}{2}\psi_2(y,t)v^2(y,t)+\frac{1}{2}\beta_1(y,T)v_1^2(y,T)+\frac{1}{2}\beta_2(y,T)v_2^2(y,T)\Big]dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T q^*BR^{-1}B^*qd\tau-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\Big[(x^*R_3-v_1(l,\tau))^2+(x^*R_4-v_2(0,\tau))^2\Big]d\tau, \quad (8)$$

где обозначено $R_3=KR_1-\alpha(l)\beta_2(l,\tau)\gamma_2c_2,\quad R_4=KR_2-\alpha(0)\beta_1(0,\tau)\gamma_1c_1$.

Выражение (8) представляет собой минимальное значение функционала J^t, в котором матрица $K(t)$ имеет положительные функции $\beta_1(y,t)$, $\beta_2(y,t)$ и функции $q(t)$, $\psi_1(y,t)$, $\psi_2(y,t)$ определяются из следующих ниже уравнений.

Матрица $K(t)$ является решением нелинейного матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\dot K+KA+A^*K-KBR^{-1}B^*K+Q+\alpha(0)\beta_1(0,t)c_1c_1^*+\alpha(l)\beta_2(l,t)c_2c_2^*+R_3R_3^*+R_4R_4^*=0 \quad (9)$$

с начальным условием $K(0)=K_0>0$.

Некоторые методы решений уравнения типа (9) приведены в работе [8, с.488, 527]. Преимуществом данного конструирования является то, что начальное условие $K(0)=K_0>0$ выбирается произвольно из условия устойчивости матрицы $A_1=A-BR^{-1}B^*K_0$.

Функция $q(t)$ является сопряженным состоянием $x(t)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot q=-(A-BR^{-1}B^*K)^*q-\alpha(0)c_1\psi_1(0,t)-\alpha(l)c_2\psi_2(l,t). \quad (10)$$

Функции $\beta_1(y,t)$, $\beta_2(y,t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha\beta_1}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\beta_2}{\partial t}-\frac{\partial\alpha\beta_2}{\partial y}=0,$$

$$\beta_1(y,0)=\beta_1^0(y)>0,\quad \beta_2(y,0)=\beta_2^0(y)>0 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\alpha(l)(\beta_1(l,t) - \gamma_2^2\beta_2(l,t)) = (\gamma_4 + 1),$$

$$\alpha(0)(-\gamma_1^2\beta_1(0,t) + \beta_2(0,t)) = (\gamma_3 + 1), \quad |\gamma_1\gamma_2| < 1.$$

Функции $\psi_1(y,t)$, $\psi_2(y,t)$ являются решениями уравнений

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2\alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial t} - \frac{\partial\psi_2\alpha}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

$$\psi_1(y,T) = -\beta_1(y,T)v_1(y,T), \quad \psi_2(y,T) = -\beta_2(y,T)v_2(y,T)$$

с граничными условиями

$$\psi_1(l,t) + \gamma_2\psi_2(l,t) = \alpha^{-1}(l)R_1^*q(t),$$

$$\gamma_1\psi_1(0,t) + \psi_2(0,t) = \alpha^{-1}(0)R_2^*q(t).$$

Для дифференциального уравнения (10) можно найти начальное условие $q(0)$, которое обеспечивает выполнение условия $x(T) = 0$.

Дифференциальное уравнение, определяющее оптимальный закон движения (1) с управлением (7) совместно с уравнениями (2), (3), (9)-(12), будет следующим:

$$\dot{x} = A_1(t)x - B_1(t)q + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \tag{13}$$

где обозначено

$$A_1 = A - BR^{-1}B^*K, \quad B_1 = BR^{-1}B^*, \quad f = R_1v_1(l,t) + R_2v_2(0,t). \tag{14}$$

Пусть $\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x,$$

а через $W(o,T)$ обозначена матрица

$$W(o,T) = \int_0^T \Phi(0,\tau)B(\tau)R^{-1}(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(0,\tau)d\tau.$$

Нестационарная линейная система (13) управляема в момент времени $[0,T]$, если и только если для некоторого конечного T матрица $W(0,T)$ является положительно-определенной матрицей [7].

Заметим, что для функции $\Phi(t,\tau)$ будет справедливым следующее соотношение

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t,\sigma)\Phi(\sigma,\tau)$$

для любых t, τ, σ.

Решение уравнения (13) при $t = T$ можно представить в следующем виде

$$x(T) = \Phi(T,0)x_0 + \int_0^T \Phi(T,\tau)[f(\tau) - B_1(\tau)q(\tau)]d\tau, \tag{15}$$

а решение уравнения (10)

$$q(t) = \Phi^*(0,t)q(0) - \int\limits_0^t \Phi^*(\tau,t)f_1(\tau)d\tau,$$

где обозначено

$$f_1(t) = \alpha(0)c_1\psi_1(0,t) + \alpha(l)c_2\psi_2(l,t).$$

Отсюда следует, что для выполнения условия $x(T) = 0$ можно найти начальное условие

$$q(0) = W^{-1}(0,T)(x(0) + \Phi(0,T)(z(T) + z_1(T) - x(T)). \qquad (16)$$

Вектора $z(T)$, $z_1(T)$ определяются из решения дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = A_1(t)z_1 - B_1(t)q_1, \quad z_1(0) = 0,$$

$$\dot{q}_1 = A_1^*(t)q_1 + f_1(t), \quad q_1(0) = 0,$$

$$\dot{z} = A_!(t)z + f(t), \quad z(0) = 0.$$

Минимальное значение функционала находим из выражения (8) при $t = 0$

$$J_0^* = \frac{1}{2}x^*(0)K(0)x(0) + x^*(0)q(0) + \int\limits_0^l \Big[\frac{1}{2}\beta_1(y,0)v_1^2(y,0) + \frac{1}{2}\beta_2(y,0)v_2^2(y,0) + \psi_1(y,0)v_1(y,0) +$$

$$+\psi_2(y,0)v_2(y,0) + \frac{1}{2}\beta_1(y,T)v_1^2(y,T) + \frac{1}{2}\beta_2(y,T)v_2^2(y,T)\Big]dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^T q^*B_1qd\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Big[(x^*R_3 - v_1(l,t))^2 + (x^*R_4 - v_2(0,t))^2\Big]dt. \qquad (17)$$

Таким образом получен следующий результат.

Теорема. *Пусть система (1)-(3) управляема, существует симметричная положительно определенная матрица$K(t)$, удовлетворяющая уравнению (9), существуют $q(t)$, $\psi_1(y,t)$, $\psi_2(y,t)$, $\beta_1(y,t)$, $\beta_2(y,t)$ удовлетворяющие уравнениям (10), (11), (12). Тогда управление (7) переводит систему (1) из начального состояния $x(0)$ в желаемое состояние $x(T) = 0$ за заданное время T и минимизирует функционал (4).*

Замечание 1. *Предложен комбинированный подход конструирования синтезирующих и программных управлений для нестационарной гибридной системы с волновыми звеньями. Синтезирующее управление соответствует построению оптимальной стабилизации исходной системы на бесконечном промежутке времени. Программное управление — это та часть управляющего воздействия, которое обеспечивает переходный процесс системы управления из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное состояние $x(T) = 0$.*

Замечание 2.*По условию задачи начальные и граничные условия согласованы. В момент времени $t = T$ состояние системы (1) $x(T) = 0$ и условия успокоения волновых звеньев $v_1(l,T) = 0$, $v_2(0,T) = 0$. Минимальное время успокоения колебаний волновых звеньев составляет $T = 2l$ с учетом граничного управления на одном конце [9].*

Цитированная литература

1. **Резван В.** Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М., 1983.

2. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 2. Под ред. Солодовникова В.В. М., 1967.

3. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. М., 1977.

4. **Мурзабеков З.Н.** Сборник научных трудов "Управление динамическими системами". Алма-Ата. КазГУ. 1986. С.64—69.

5. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М., 1979.

6. **Калман Р.Е.** //Труды I Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. 1961. Т.2. С.521—547.

7. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М. 1998.

8. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М., 1975.

Поступила в редакцию 20.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 62 – 67*

УДК 517.925

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ D-УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Мухамбетова

Актюбинский государственный университет имени К. Жубанова
463000 г.Актобе, ул. А. Молдагуловой, 34 amina- 15 @mail.ru

Установлены достаточные условия устойчивости и неустойчивости решений линейных D-уравнений второго порядка с колебательными коэффициентами.

Основы теории устойчивости решений систем дифференциальных уравнений заложены в известной основополагающей работе Ляпунова А.М. Один из фундаментальных результатов этой работы, названный в литературе интегральным признаком Ляпунова [1, с.202], касается устойчивости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Этот признак не имеет аналога в квазипериодическом случае. В данной заметке признак обобщается на многопериодический случай для линейных D-уравнений второго порядка. Для этого используются ранее введенные понятия и методы исследования [2, 3]. Путем перехода на главную диагональ пространства независимых переменных получены соответствующие результаты для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с квазипериодическими коэффициентами. При этом применяется теорема о существовании действительных гладких ветвей логарифма функциональных матриц, определенных на многомерном торе [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее линейное уравнение

$$D^2x = p(t,\varphi,\psi)x \tag{1}$$

с дифференциальным оператором $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial \varphi_k}$, где $D^2x = D\,(D\,x),\ t \in (-\infty, +\infty) = R$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in R\times ...\times R^m$, $\psi = \varphi - e\,t$ — характеристика оператора D, $e = (1, ..., 1) - m-$ вектор, $p\,(t,\,\varphi,\,\psi)$ — заданная функция, обладающая свойствами периодичности и гладкости вида

$$p\,(t\,+\,\theta,\,\varphi\,+\,k\,\omega,\psi\,+\,k\,\omega\,) \equiv p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \in C^{(0,\,1,\,1)}_{t,\,\varphi,\,\psi}\,(R\,\times\,R^m\,\times\,R^m)\,\forall\,k\,\in\,Z^m, \tag{2}$$

Keywords: *D-equations, oscillating coefficient, function space, stability of solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20

$\theta,\, \omega_1,\, ...,\, \omega_m$ — рационально несоизмеримые периоды, $k\,\omega \,=\, (k_1\omega_1,\, ...,\, k_m\omega_m)$ — кратный вектор-период.

Заметим, что зависимость коэффициента $p\,(t,\, \varphi\,, \psi\,) \;=\; p\,(t,\, \varphi,\, \varphi - et)$ от переменной t, вообще говоря, не обладает свойством периодичности, хотя $p\,(t,\, \varphi,\, \psi)$ вдоль диагонали $\varphi = et$ переходит в квазипериодическую функцию.

Уравнение (1) можно представить в виде эквивалентной системы

$$D\, z \,=\, P\,(t,\, \varphi,\, \psi)\, z, \tag{3}$$

где $z = (z_1, z_2)$, причем $z_1 = x,\; z_2 = Dx,\; P(t, \varphi, \psi)$ — матрица вида

$$P\,(t,\, \varphi,\, \psi) \,=\, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\,p\,(t,\, \varphi,\, \psi) & 0 \end{bmatrix},$$

которая в силу (2) обладает свойствами

$$P\,(t \,+\, \theta,\, \varphi \,+\, k\,\omega, \psi \,+\, k\,\omega\,) \,\equiv\, P\,(t,\, \varphi,\, \psi) \,\in\, C^{(0,\,1,\,1)}_{t,\,\varphi,\,\psi}\,(R \,\times\, R^m \,\times\, R^m)\,\forall\, k \,\in\, Z^m. \tag{4}$$

Введем функциональное пространство U ω - периодических и непрерывно дифференцируемых при $\varphi \,\in\, R^m$ вектор - функций $u\,(\varphi) \,=\, (u_{\,1}(\varphi),\, u_{\,2}(\varphi))$ с нормой, определяемой супремумом модуля

$$U \,=\, \left\{ u\,(\varphi) :\, u\,(\varphi + k\,\omega) \,=\, u\,(\varphi) \,\in\, C^{(1)}_{\varphi}\,(R^m),\, \forall\, k \,\in\, Z^m;\; \|u\| \,=\, \sup_{R^m} |u\,(\varphi)| \right\}, \tag{5}$$

где $|u| \,=\, \sqrt{u_1^2 \,+\, u_2^2}$.

При условии (4) для каждой $u\,(\varphi) \,\in\, U$ система (3) допускает единственное решение $z \,=\, z\,(t,\, \varphi,\, \psi,\, u\,(\psi))$, удовлетворяющее начальному условию $z|_{\,t=0} \,=\, u\,(\varphi)$, причем это решение при каждом значении t принадлежит пространству U. Здесь ограничимся рассмотрением решений системы (3) с начальными данными из функционального пространства (5).

Решение $z^* \,=\, z\,(t,\, \varphi,\, \psi,\, u^*\,(\psi))$ системы (3) назовем устойчивым, если $\forall\, \varepsilon \,>\, 0$ можно указать $\delta \,=\, \delta\,(\varepsilon) \,>\, 0$ такое, что

$$|z\,(t,\, \varphi, \psi,\, u\,(\psi)) \,-\, z\,(t,\, \varphi, \psi,\, u^*\,(\psi))|_t \,=\, \sup_{\psi \in\, R^m} |z\,(t, et + \psi, \psi, u(\psi)) - z(t, et + \psi, \psi, u^*(\psi)| < \varepsilon$$

при $t \geq 0$, как только $\|u\,(\varphi) \,-\, u^*(\varphi)\| \,<\, \delta$.

Поставим задачу об исследовании устойчивости нулевого решения системы (3) при условии (4) на основе обобщения на случай D-уравнений интегрального признака Ляпунова для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

2. Обобщение постоянной Ляпунова на D-системы и теорема об устойчивости.

Пусть $X(t,\, \varphi,\, \psi)$ — матрицант системы (3). Следовательно, в силу (4) имеем свойства

$$DX(t, \varphi, \psi) \,=\, P(t, \varphi, \psi) X(t, \varphi, \psi), \qquad X(0, \varphi, \varphi) \,=\, E,$$

$$X(t, \varphi + k\omega,\, \psi + k\omega) \,=\, X(t,\, \varphi,\, \psi) \in C^{(1,1,1)}_{t.\varphi,\psi}(R \times R^m \times R^m)\,\forall k \in Z^m,$$

$$X(t + \theta,\, \varphi,\, \psi) = X(t, \varphi,\, \psi) \cdot X(\theta, \psi, \psi), \tag{6}$$

где E — двумерная единичная матрица, матрица $X(\theta,\psi,\psi)$ называется матрицей монодромии системы (3), а собственные значения $\rho=\rho(\psi)$, определяемые уравнением

$$\det[X(\theta,\psi,\psi)-\rho E]=0, \tag{7}$$

называются ее мультипликаторами.

Очевидно, что матрицант $X(t,\varphi,\psi)$ представляется в виде

$$X(t,\,\varphi,\psi)=\left[\begin{array}{ll}\xi(t,\varphi,\psi) & \eta(t,\varphi,\psi)\\ D\xi(t,\varphi,\psi) & D\eta(t,\varphi,\psi)\end{array}\right], \tag{8}$$

где $\xi(t,\,\varphi,\psi)$и $\eta(t,\varphi,\psi)$ — линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям $\xi\,(0,\varphi,\varphi)=1$, $D\,\xi\,(0,\varphi,\varphi)=0$ и $\eta\,(0,\varphi,\varphi)=0$, $D\,\eta\,(0,\,\varphi,\varphi)=1$.

Следуя Ляпунову, решения $\xi\,(t,\;\varphi,\psi)$ и $\eta\,(t,\varphi,\psi)$ получим в виде сходящихся рядов

$$\xi\,(t,\varphi,\psi)=1-\int\limits_0^t(t-t_1)p\,(t_1,\psi+et_1,\psi)d\,t_1+$$

$$+\int\limits_0^t(t-t_1)p(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)\,dt_1\int\limits_0^{t_1}(t_1-\,t_2)\,p\,(t_2,\,\psi+et_2,\,\psi)dt_2-... \tag{9}$$

$$\eta(t,\,\varphi,\,\psi)=t-\int\limits_0^t(t-t_1)\,p(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)t_1dt_1+$$

$$+\int\limits_0^t(t-t_1)\,p(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)dt_1\int\limits_0^{t_1}(t_1-t_2)\,p\,(t_2,\,\psi+et_2,\,\psi)\cdot t_2dt_2-... \tag{10}$$

Учитывая, что $Sp\,P\,(t,\,\varphi,\,\psi)=0$,

$$\det X(\theta)=\det X(0,\,\varphi,\,\varphi)\exp\left[\int\limits_0^\theta Sp\,P(s,\,\psi+es,\,\psi)ds\right]=1. \tag{11}$$

Тогда в силу соотношений (8)-(11) из уравнения (7) получим

$$\rho^2-a\rho+1=0, \tag{12}$$

где $a=a(\psi)$ — функция, определяемая соотношением

$$a\,(\psi)=\xi(\theta,\,\psi,\,\psi)+D\,\eta\,(\theta,\,\psi,\,\psi)=Sp\,X(\theta,\,\psi,\,\psi), \tag{13}$$

является *аналогом константы Ляпунова* для D-систем.

Из (10) имеем

$$D\eta(t,\,\varphi,\psi)=1-\int\limits_0^t t_1p(t_1,\psi+et_1,\psi)dt_1+$$

$$+\int\limits_0^t p\,(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)dt_1\int\limits_0^{t_1}(t_1-\,t_2)\,t_2\,p\,(t_2,\,\psi+et_2,\,\psi)dt_2-\int\limits_0^{t_1}p\,(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)dt_1\times$$

$$\times \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t_2)\, p\,(t_2,\, \psi + et_2,\, \psi) dt_2 \int\limits_0^{t_2} (t_2 - t_3) t_3 p\,(t_3,\, \psi + et_3,\, \psi) dt_3 + \, \ldots \tag{14}$$

Следовательно, на основе (9) и (14) из (13) получим постоянную на диагонали функцию Ляпунова в виде

$$a(\psi) = 2 - \theta \int\limits_0^{\theta} p(t_1, \psi + et_1, \psi) dt_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{\theta} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 (\theta - t_1 + t_2)(t_1 - t_2) p\,(t_1,\, \psi + et_1,\, \psi)\, p\,(t_2,\, \psi + et_2,\, \psi) -$$

$$- \int\limits_0^{\theta} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \int\limits_0^{t_2} dt_3 (\theta - t_1 + t_3)(t_1 - t_2)\,(t_2 - t_3) p\,(t_1,\, \psi + et_1,\, \psi)\, p\,(t_2,\, \psi +$$

$$+ \, et_2,\, \psi)\, p\,(t_3,\, \psi + et_3,\, \psi) \, + \, \ldots \tag{15}$$

Из уравнения (12)

$$\rho_{\,1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4}).$$

Так как функция $a(\psi)$ в силу (2) является ω-периодической, то возможны три случая

1) $m = \min|a(\psi)| > 2$, 2) $M = \max|a(\psi)| < 2$, 3) $m \le 2 \le M$.

Если $m > 2$, то уравнение (12) имеет два действительных корня $\rho_1(\psi)$ и $\rho_2(\psi)$, один из которых по модулю меньше единицы, а другой — больше. Следовательно, областью изменения одного мультипликатора является отрезок одного из интервалов (-1,0) или (0,1), а областью изменения другого — отрезок из интервала $(-\infty,\, -1)$ или из интервала $(1,\, +\infty)$, соответственно. Спектр матрицы монодромии в данном случае *не охватывает нуля* и существует действительная гладкая многопериодическая ветвь логарифма матрицы монодромии [4].

Если $M < 2$, то мультипликаторы $\rho_1(\psi)$ и $\rho_2(\psi)$ — комплекснозначные ω-периодические функции, по модулю равные единице, причем $\rho_1(\psi) \neq \rho_2(\psi)$. Следовательно, их области изменения являются непересекающимися замкнутыми дугами единичной окружности комплексной плоскости. При $M < 2$ спектр матрицы монодромии также *не охватывает нуля* и ее логарифм имеет действительную ветвь.

Случай $m \le 2 \le M$ требует дальнейшего изучения, на котором останавливаться здесь не будем.

В случаях 1) и 2) нетрудно показать, что матрицант $X(t, \varphi, \psi)$ системы (3) можно записать в виде

$$X(t,\, \varphi,\, \psi) = \Phi(t,\, \varphi,\, \psi) \exp\, [t\, \Lambda\, (\psi)], \tag{16}$$

где $\Lambda(\psi) = Ln\, X(\theta, \psi, \psi)$ — действительная ветвь логарифма матрицы монодромии $X(\theta,\ \psi, \psi)$, $\Phi(t, \varphi, \psi) = X(t, \varphi, \psi) \exp\,[-t\Lambda(\psi)] - (\theta,\, \omega,\, \omega)$ — периодическая по $(t,\, \varphi,\, \psi)$ матрица.

Так как решение z системы (3) представимо следующим образом

$$z(t, \varphi, \psi, u(\psi)) = X(t,\, \varphi,\, \psi) \cdot u(\psi), \tag{17}$$

то в случае 1) система (3) неустойчива, а в случае 2) — устойчива.

В силу эквивалентности уравнения (1) и системы (3) это обстоятельство остается справедливым и для уравнения (1).

Тем самым доказана

Т е о р е м а 1. *При выполнении условия (2) D-уравнение (1) устойчиво, если наибольшее значение M модуля функции $a(\psi)$, определяемое соотношением (15), меньше 2 и неустойчиво, если наименьшее значение m ее модуля больше 2.*

3. Признаки неустойчивости и устойчивости. Пусть $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \not\equiv 0$ и $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \leq 0$. Тогда нетрудно показать, что

$$\int\limits_0^\theta p\,(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)dt_1 < 0 \qquad \text{и} \qquad (-1)^n I_n =$$

$$= (-1)^n \int\limits_0^\theta dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 ... \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n (\theta - t_1 + t_n)(t_1 - t_2)...(t_{n-1} - t_n) p\,(t_1,\,\psi+et_1,\,\psi)...p\,(t_n,\,\psi+et_n,\,\psi) > 0.$$

Следовательно, из формулы (15) имеем $a(\psi) > 2$. На основе теоремы 1 сформулируем следующее утверждение

Т е о р е м а 2. *Пусть $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \not\equiv 0$ и $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \leq 0$. Тогда при условии (2) D-уравнение (1) неустойчиво, причем мультипликаторы положительные и один из них больше единицы, а другой — меньше.*

Теперь допустим, что $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \geq 0$ и не обращается тождественно в нуль, причем предположим выполненным условие

$$0 < I(\psi) = \theta \int\limits_0^\theta p\,(\tau,\,\psi+e\tau,\,\psi)d\tau \leq 4. \tag{18}$$

Тогда нетрудно показать, что $I_1 = I > 0$, $I_{k+1} > I_k > 0 \quad (k = 1, 2, ...)$ и из $a = 2 - I_1 + I_2 - ... + (-1)^k I_k + ...$ получим $2 - I(\psi) < a(\psi) < 2$.

Следовательно, на основе (18) имеем $-2 < a\,(\varphi) < 2$. Далее, в силу теоремы 1 уравнение (1) устойчиво, мультипликаторы $\rho_1(\psi) \neq \rho_2(\psi)$ — комплексно-сопряженные и $\rho_1(\psi) = \rho_2(\psi) = 1$, $\psi \in R^m$. Справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \not\equiv 0$ и $p\,(t,\,\varphi,\,\psi) \geq 0$. Тогда при выполнении условий (2) и (18) D-уравнение (1) устойчиво, причем мультипликаторы — комплексно-сопряженные и модули их равны единице.*

Условие (18) назовем обобщенным интегральным признаком устойчивости Ляпунова для D-уравнения (1).

Учитывая, что $(\theta,\,\omega,\,\omega)-$ периодические функции $x(\,t,\,\varphi,\,\psi)$ и функции $D^2\,x$, полученные путем двукратного применения к ним оператора D, при $\varphi = et$ обращаются, соответственно, в квазипериодические функции $\xi\,(t)$ и их производные $\frac{d^2}{d\,t^2}\,\xi\,(t)$, из уравнения (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} = q\,(t)\,\xi \tag{$1'$}$$

с квазипериодическим по Бору коэффициентом $q\,(t) = p\,(t,\,et,\,0)$.

Тогда для уравнения ($1'$) имеют место следующие следствия теорем 1– 3

С л е д с т в и е 1. *При условиях теоремы (1) уравнение ($1'$) устойчиво при $M < 2$ и неустойчиво при $m > 2$, где M, m — наибольшее и наименьшее значения функции-аналога постоянной Ляпунова для уравнения (1).*

С л е д с т в и е 2. *При условиях теоремы 2 уравнение* $(1')$ *неустойчиво.*

С л е д с т в и е 3. *При условиях теоремы 3 уравнение* $(1')$ *устойчиво.*

Доказательства этих следствий получим из теорем 1—3 при $\varphi = et$.

Цитированная литература

1. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости М., 1967.
2. **Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А., Бержанов А.Б.** // Поиск, 2001. №6. С. 147 — 151.
3. **Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А.** // Математический журнал. Алматы, 2003. Т.3, №1 (7). С. 68 — 73.
4. **Самойленко А.М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. М., 1987.

Поступила в редакцию 03.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 68 — 73*

УДК 517.36

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С. К. Персидский

Таврический Национальный университет им. В.И.Вернадского

В работе для одного класса нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений получены необходимые и достаточные условия экспонциальной устойчивости в целом и экспоненциальной неустойчивости. Исследуется экспоненциальная устойчивость возмущенных систем с нелинейным первым приближением.

Заметим, что проблема экспоненциальной устойчивости нелинейных систем связана с работой Л.Гуревича [1], в которой приведены достаточные условия экспоненциальной устойчивости в целом одной нелинейной сложной системы с нелинейными изолированными подсистемами, которые предполагаются либо экспоненциально устойчивыми, либо- экспоненциально неустойчивыми.

1. Об экспоненциальной устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений. Пусть $K(\alpha_1, ..., \alpha_n) : x_s\alpha_s \geq 0$, где $s = 1, ...n,$ — выпуклый конус пространства R^n, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ — параметры конуса [2]. Например, положительный октант K_n^+ пространства R^n имеет параметры, равные единице.

Определение 1. *Матрицу размерности $n \times n$, будем называть квазипозитивной, если элементы P_{sk} матрицы P и параметры некоторого конуса $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ связаны соотношениями*

$$p_{sk}\alpha_s\alpha_k \geq 0 \quad \text{при} \quad s \neq k, \quad \text{где} \quad s = 1, ..., n; \quad k = 1, ..., n. \tag{1.1}$$

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с квазипозитивной матрицей P :

$$x' = P\varphi(x), \tag{1.2}$$

$\varphi(x) =$ col $(\varphi_1(x_1), ..., \varphi_n(x_n))$, где $\varphi_s(x_s)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

Keywords: *Lyapunov stability, exponential stability of solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D20

$$\varphi_s(x_s)x_s > 0 \quad \text{при} \quad x_s \neq 0, \quad s = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. *Пусть правые части системы дифференциальных уравнений (1.2) удовлетворяют сформулированным выше условиям, а функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют соотношению (1.3) и неравенствам*

$$k_1|x_s| \leq |\varphi_s(x_s)| \leq k_2|x_s|, \ (s = 1, ..., n), \tag{1.4}$$

где $k_2 > k_1$ — некоторые положительные числа.

Тогда для абсолютной экспоненциальной устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни "характеристического" уравнения

$$\det(P - \lambda E) = 0 \tag{1.5}$$

имели отрицательные части.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1.2) экспоненциально устойчива при любых непрерывных функциях $\varphi_s(x_s)$, удовлетворяющих условиям (1.1) и (1.3); в частности, она экспоненциально устойчива при $\varphi_s(x_s) = x_s \ \ (s = 1, ..., n)$, но тогда все корни характеристического уравнения (1.5) должны иметь отрицательные вещественные части.

Достаточность. В рассматриваемом случае все корни характеристического уравнения (1.5) лежат в левой полуплоскости. В силу этого все определяемые из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} p_{sk}b_k\alpha_k + p_{ss}b_s = -\alpha_s, \quad (s = 1, ..., n) \tag{1.6}$$

числа $b_1, ..., b_n$ будут положительные [2].

Умножая правые части этой системы на соответствующие параметры $\alpha_1, ..., \alpha_n$ конуса $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, получим систему

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{sk}|b_k + p_{ss}b_s = -1, \ \ (s = 1, ..., n) \tag{1.7}$$

Положим $\nu(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{s=1}^{n} b_s|x_s| = \sum\limits_{s=1}^{n} b_s x_s sign x_s$. Тогда ν' в силу системы (1.2) приводится к виду

$$\nu'_{(1.2)} \leq \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}\Big|p_{ks}\Big|b_k + p_{ss}b_s\right)\Big|\varphi_s(x_s)\Big| = -\sum_{s=1}^{n}\Big|\varphi_s(x_s)\Big|$$

Согласно (1.4) окончательно получаем неравенства

$$d_1\|x\| \leq \nu'(x_1) \leq d_2\|x\|, \quad \nu'_{(1.2)} \leq -k_1\|x\| \leq -\frac{k_1}{d_2}\nu(x) \tag{1.8}$$

где $d_1 = \min\limits_s\{b_s\}, \ \ d_2 = \max\limits_s\{b_s\}$ и $\|x\| = \sum\limits_{s=1}^{n}|x_s|$.

Следовательно, на решениях системы (1.2) выполнены неравенства

$$\|x(t)\| \leq \frac{d_2}{d_1}\|x(t_0)\| \exp\left(-\frac{k_1}{d_2}(t - t_0)\right), \tag{1.9}$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что система вида (1.2) впервые была рассмотрена Е.А.Барбашиным [3].

Рассмотрим далее нелинейную систему дифференциальных уравнений с квазипозитивной матрицей P, рассмотренную в нашей работе [4];

$$x' = P\varphi(x) + R(\varphi(x)), \tag{1.10}$$

где вектор-функция $R(\varphi(x))$ удовлетворяет соотношению

$$\|R(\varphi)\| = o\|\varphi\| \quad \text{при} \quad \|\varphi\| \to 0. \tag{1.11}$$

Соответствующую систему вида (1.2), содержащуюся в (1.10), будем называть "нелинейным первым приближением" системы (1.10).

Теорема 1.2. *Пусть непрерывные функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют соотношениям (1.3) и неравенствам (1.4). Тогда для экспоненциальной устойчивости решения системы (1.10) в некоторой достаточно малой окрестности начала координат необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.5) имели отрицательные вещественные части.*

Доказательство. При $\varphi_s(x_s) = x_s \quad (s = 1, 2, ..., n)$ нелинейная возмущенная система (1.10) переходит в линейную возмущенную систему Ляпунова вида

$$x' = Px + R(x), \quad \text{где} \quad \|R(x)\| = o\|x\| \quad \text{при} \quad \|x\| \to 0.$$

Отсюда следует выполнение необходимых условий теоремы.

Для доказательства достаточности определим числа $b_1, ..., b_n$ из соответствующей системы (1.7) и положим $\nu(x) = \sum\limits_{s=1}^{n} b_s|x_s|$. Эта функция будет удовлетворять неравенству

$$d_1\|x\| \le \nu(x) \le d_2\|x\|,$$

где $d_1 > 0$, $d_2 > 0$. В силу полной системы (1.10) полная производная функция $\nu(x)$ будет удовлетворять неравенству

$$\nu'_{(1.10)} \le -\frac{k_1}{2}\|x\| - \left(\frac{k_1}{2}\|x\| - d_2\|R(x)\|\right).$$

Из последнего неравенства следует, что в достаточно малой окрестности начала координат $\|x\| < \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, решения системы (1.10) будут удовлетворять неравенству вида

$$\|x(t)\| \le \frac{d_2}{d_1}\|x(t_0)\| \exp\left(-\frac{k_1}{2d_1}(t - t_0)\right),$$

то завершает доказательство теоремы.

Пусть дана система дифференциальных уравнений (1.2) с квазипозитивной матрицей P, причем все функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют неравенствам (1.3). Тогда, нетрудно видеть [2], что соответствующий конус $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ будет для системы (1.2) замкнутым сектором. Отсюда легко получить следующую теорему об экспоненциальной неустойчивости в конусе.

Теорема 1.3. *Пусть система (1.2) с квазипозитивной матрицей P такова, что функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют условиям (1.4) и в соответствующем конусе $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ неравенствам*

$$\alpha_s\varphi_s(x_s) \ge \alpha_s x_s, \quad (s = 1, ..., n), \tag{1.12}$$

тогда для экспоненциальной неустойчивости решений этой системы в рассматриваемом конусе необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.5) имели положительные вещественные части.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из условия квазипозитивности матрицы P следует, что соответствующий конус $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ является закрытым сектором [2]. Определим числа $b_1, ..., b_n$ из системы уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{ks}|b_k + p_{ss}b_s = 1, \quad (s = 1, 2, ..., n).$$

Нетрудно видеть, что все b_s положительные. Затем в рассматриваемом конусе положим $\nu(x) = \sum\limits_{s=1}^{n} b_s x_s \alpha_s = \sum\limits_{s=1}^{n} b_s |x_s|$. В силу системы (1.2) и условия (1.12) в рассматриваемом конусе имеем

$$d_1\|x\| \leq \nu(x) \leq d_2\|x\|; \quad \nu'_{(1.2)} = \sum_{s=1}^{n} |\varphi_s(x_s)| \geq \|x\|.$$

Следовательно, $\nu'_{(1.2)}(x) \geq \frac{1}{d_2}\nu(x)$, или $\|x(t)\| \geq \frac{d_1}{d_2}\|x(t_0)\| \exp\left(\frac{1}{d_2}(t - t_0)\right)$.

Теорема доказана.

2. Экспоненциальная устойчивость решений нелинейных разностных систем. Пусть P вещественная постоянная невырожденная матрица размерности $n \times n$ и $\alpha_1, ...\alpha_n$ — параметры некоторого конуса $K(\alpha_1, ...\alpha_n) \subset R^n$.

Определение 2.1. *Будем называть указанную матрицу "квазиположительной", если ее элементы p_{sk} и параметры некоторого конуса $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ связаны соотношениями*

$$p_{sk}\alpha_k\alpha_s \geq 0 \quad (s, k = 1, ..., n) \tag{2.1}$$

Рассмотрим систему разностных уравнений с "квазиположительной" матрицей P следующего вида

$$x(m+1) = P\varphi(x(m)), \tag{2.2}$$

где $m \in I = \{0, 1, ..., n, ...\}$, $\varphi(x(m)) = \text{ col } (\varphi_1(x_1(m)), ...\varphi_n(x_n(m)))^T$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что все функции $\varphi_s(x_s(m))$ являются однозначными, принимающими в каждой точке множества I конечные значения и сохраняющими знаки своих аргументов ($\varphi_s(0) = 0$).

Теорема 2.1. *Пусть правые части системы разностных уравнений (2.2) удовлетворяют сформулированным выше условиям, а функции $\varphi_s(x_s(m))$ удовлетворяют, кроме того, при любом $m \in I$ неравенствам вида*

$$|\varphi_s(x_s(m))| \leq |x_s(m)|, \quad (s = 1, ..., n), \tag{2.3}$$

тогда для абсолютной экспоненциальной устойчивости решений рассматриваемой системы уравнений (2.2) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\det(P - \mu E) = 0 \tag{2.4}$$

лежали внутри единичного круга.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность условий теоремы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{ks}|b_k + (p_{ss}-1)b_s = -1, \quad (s=1,...,n) \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть [5], что все определяемые из системы (2.5) числа $b_1,...,b_n$ будут положительными.

Положим $\nu(x(m)) = \sum\limits_{s=1}^{n} b_s|x_s(m)|$.

Очевидно, что функции $\nu(x)$ удовлетворяют неравенству $a\|x\| \le \nu(x) \le b\|x\|$, где $a>0$, $b>0$. Не нарушая общности, будем считать, что $b>1$. Отсюда нетрудно показать, что на решениях системы (2.2) должно выполняться неравенство

$$\nu(x(m+1)) \le \left(1-\frac{1}{b}\right)\nu(x(m)) = \lambda\nu(x(m)), \tag{2.6}$$

где $0<\lambda<1$.

Из (2.6) заключаем о том, что при всех $m \ge m_0 \ge 0$ должно выполняться соотношение

$$\|x(m)\| \le \frac{b}{a}\lambda^{m-m_0}\|x(m_0)\| = Be^{-\beta(m-m_0)}\|x(m_0)\|, \tag{2.7}$$

где $B=\frac{b}{a}\ge 1, \quad \beta=-\ln\lambda>0$. Это доказывает достаточность условий теоремы.

Замечание. *Если правые части системы (2.2) заданы в некоторой ограниченной области $h: m\in I, \quad \|x\|\le R$, и при этом выполнены все условия теоремы 2.1., то решение системы (2.2) будет экспоненциально устойчиво в области h.*

Имеет также место следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Если нелинейное первое приближение системы*

$$x(m+1) = P\varphi(x(m)) + R\varphi(x(m)) \tag{2.8}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, а $\|R(\varphi)\| = o(\|\varphi\|)$ при $\|\varphi\|\to 0$, то в некоторой достаточно малой окрестности начала координат решения системы (2.8) экспоненциально устойчивы

Теорема 2.3. *Пусть конечно-разностная система (2.2) с квазиположительной матрицей P такова, что в соответствующем конусе $K(\alpha_1,...,\alpha_n)$ выполнены неравенства*

$$\alpha_s\varphi_s(x_s(m)) \ge \alpha_s x_s(m), \quad (s=1,...,n),$$

тогда если все корни характеристического уравнения (2.4) лежат вне круга единичного радиуса, то в указанном конусе решения рассматриваемой системы уравнений экспоненциально неустойчивы.

В качестве примера на применение теоремы 2.1 для случая ограниченной области рассмотрим в области $h: m\in I, \quad \|x\|\le 1$ разностную систему

$$\begin{cases} x_1(m+1) = 0,5\sin^3 x_1(m) + 0,1x_2^5(m), \\ x_2(m+1) = 0,1\sin^3 x_1(m) + 0,5x_2^5(m). \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет корни μ_1 и μ_2, лежащие внутри единичного круга, а соответствующий конус $K(\alpha_1,\alpha_2)$ имеет параметры α_1 и α_2 равные единице, кроме того в $h \quad |\sin^3 x_1| \le |x_1|$; $|x_2^5| \le |x_2|$.

Найдем числа b_1 и b_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} (0,5-1)b_1 + 0,1b_2 = -1, \\ 0,1b_1 + (0,5-1)b_2 = -1 \end{cases} \tag{2.9}$$

и положим $\nu(x_1, x_2) = b_1|x_1| + b_2|x_2|$.

Применим к функции $\nu(x_1, x_2)$ довольно грубую оценку:

$$2\|x\| \leq \nu(x_1, x_2) \leq 3\|x\|.$$

Тогда в силу системы

$$\nu(x(m+1)) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right)\nu(x(m)).$$

Отсюда приходим к следующей оценке решений системы (2.9)

$$\|x(m)\| \leq \frac{3}{2}\|x(m_0)\|e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(m-m_0)},$$

которая справедлива для всей области h при $m \geq m_0 \geq 0$..

В заключении заметим, что невозмущенные системы дифференциальных и разностных уравнений (1.2) и (2.2) допускают существование закрытого сектора в виде некоторого выпуклого конуса $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, что, в конечном итоге, и позволило доказать все теоремы, приведенные в настоящей работе.

В теории устойчивости понятие сектора было введено К. П. Персидским [6]. Это понятие оказалось очень плодотворным и оно нашло широкое применение в методе функций Ляпунова.

Цитированная литература

1. **Grujic L.T.** //Int. J. Contr. 1974. V.2D P.453–463.
2. **Персидский С. К.** //Прикл. мат. и механика. 1970. Т.34, С.219–226.
3. **Барбашин Е. А.** Функции Ляпунова, М., 1970.
4. **Персидский С. К.** //Динамические системы. 2000. Вып. 16. С.15–21.
5. **Персидский С. К.** //Дифф. уравн. и их применения. Алма-Ата, 1979. С.114–116.
6. **Персидский С. К.** //. Известия АН Каз. ССР, серия математика. 1947. Вып.1. №42. С.48–53.

Поступила в редакцию 03.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 74 –78*

УДК 517.948.34

БИСИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Х. Розов

МГУ им. М.В.Ломоносова
г. Москва, rozov@rozov.mccme.ru

К столетию со дня рождения
Константина Петровича Персидского,
русского математика, навсегда вошедшего
в историю математики братского Казахстана

Теория сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений — как обыкновенных, так и в частных производных — к настоящему времени составила полнокровную самостоятельную область математики, представляющую большой теоретический интерес, имеющую важные практические приложения, ставящую серьезные вычислительные проблемы. Речь идет об изучении широкого круга разнообразных задач, касающихся свойств решений дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, то есть в ситуации, когда не действуют классические теоремы о "хорошей" зависимости решений от параметра.

Сущность понятия "сингулярной возмущенности" системы дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр, можно попытаться сформулировать так: "при стремлении параметра к нулю разрешающий оператор Коши для основного массива значений времени и начальных условий из ограниченных множеств (или оператор последования Пуанкаре) сходится в подходящей топологии к предельному объекту, действующему в пространстве меньшей размерности" (см. [1]). Это весьма общее и потому не очень четкое описание представления о сингулярно возмущенных системах в каждом отдельном случае наполняется вполне конкретным и точным содержанием.

С момента зарождения интереса к систематическому исследованию сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, как отдельного объекта изучения, прошло относительно мало лет. По-видимому, впервые вопрос о связи решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего малый множитель при производной наивысшего порядка, с решениями "вырожденного" дифференциального уравнения, получающегося из исходного, если в нем параметр формально заменить множителем-нулем, был поставлен Ченом [2] в 1935

Keywords: *singular perturbation, boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D15, 34E15

г., а пионерская статья, рассматривающая тот же вопрос в нелинейном случае, опубликована Нагумо [3] в 1939 г. Однако в самостоятельную и богатую математическую теорию изучение сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений стало превращаться только после классических работ А.Н.Тихонова [4—6]. Именно благодаря этим работам позднее в математическом фольклоре появилась фраза: "Малый параметр породил большую теорию".

Сегодня сингулярно возмущенным обыкновенным дифференциальным уравнениям и сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям в частных производных посвящены многие тысячи журнальных публикаций и сотни монографий. Свой вклад в развитие этой теории внесли многие крупнейшие российские математики:Д.В.Аносов, Н.С.Бахвалов, В.Ф.Бутузов, А.Б. Васильева, М.И. Вишик, А.А. Дородницын, А.М. Ильин, С.А. Ломов, Л.А. Люстерник, Е.Ф. Мищенко, Л.С. Понтрягин, О.А. Олейник и многие другие. Особенно приятно отметить большие достижения казахской "школы малого параметра", которую создал и возглавляет академик К.А. Касымов.

В последнее время пристальный интерес стали привлекать к себе ситуации, особенностью которых является следующее обстоятельство: "вырожденная" задача, соответствующая исходно рассматриваемой сингулярно возмущенной задаче, сама обладает той или иной "сингулярностью" (в широком смысле этого слова). Задачи такого типа, следуя [7], естественно называть "бисингулярными".

В настоящей работе речь пойдет о некоторых соображениях и подходах к теории бисингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Линейные бисингулярные задачи. Рассмотрим хорошо знакомый вопрос о построении асмптотического решения краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного уравнения второго порядка

$$\epsilon x'' + p(t)x' + h(t,x) = 0,\ 0 < \epsilon \ll 1, t \in \operatorname{int} I.$$

Как известно, процесс построения асимптотического решения начинается с определения на рассматриваемом отрезке $I = [-1,1]$ нулевого приближения с помощью вырожденного уравнения

$$p(t)x' + h(t,x) = 0. \tag{2}$$

Если $p(t) \neq 0$ на I, то при выполнении известных классических предположений уравнение (2) имеет решения, продолжимые на весь отрезок I. В этом случае к уравнению (1) применима теория так называемого "регулярного вырождения" (см. [8, 9]).

Принципиально иная ситуация возникает в случае, когда исходное уравнение (1) является бисингулярным, т.е. когда вырожденное уравнение (2) само имеет особенности или сингулярности. Типичные "сингулярности" проявляются, например, в следующих случаях: функция $p(t)$ обращается в нуль в некоторых точках отрезка I (и, следовательно, в этих точках "вырожденное" уравнение (2) само "вырождается"); функции $p(t)$ и $h(t,x)$ в некоторых точках отрезка I испытывают разрывы и т.д. Тогда задача определения нулевого приближения и, следовательно, задача построения асимптотического решения бисингулярной краевой задачи (1) существенно осложняется. В частности, она требует подробного исследования свойств решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями коэффициентов, например, когда старший коэффициент такого уравнения обращается в нуль на рассматриваемом отрезке изменения независимой переменной.

Приведем два результата, относящиеся к этому кругу вопросов. Отметим, что некоторые достаточно общие рассмотрения линейных дифференциальных уравнений с особенностями старшего коэффициента проведены в [10].

Теорема 1. *Допустим, что* $p(t) \in C^1(I),\ h(t,x) \in C^1(I \times \mathbb{R})$;

$$p(0) = 0, \quad p(t) \neq 0 \text{ на } I \setminus \{0\}; \tag{3}$$

уравнение $h(0,x)=0$ *имеет единственный корень* $x=a$, *причем*

$$h'_x(0,a)>0. \tag{4}$$

Тогда для уравнения (2) возможны следующие конфигурации решений.

1). *"Правый веник с ручкой", если*

$$p(t)<0 \quad \text{на} \quad I_-=[-1,0) \quad \text{и на} \quad I_+=(0,1].$$

В этом случае у уравнения (2) существует континуум решений, определенных на I, *причем*

— *на* I_- *все эти решения совпадают между собой, так что имеется единственная интегральная кривая на* I_-, *выходящая из некоторой однозначно определяемой точки* $(-1,x_0)$ *и приходящая в фиксированную точку* $(0,a)$;

— *на* I_+ *все эти решения различны между собой, так что имеется пучок непересекающихся интегральных кривых на* I_+, *выходящих из фиксированной точки, и эту точку с произвольной точкой* $(1,\xi)$ *соединяет единственная интегральная кривая*;

— *любое из этих решений имеет при* $t=0$ *производную* $-h'_t(0,a)/h'_x(0,a)$.

2). *"Левый веник с ручкой", если*

$$p(t)>0 \text{ на } I_- \text{ и на } I_+.$$

В этом случае у уравнения (2) существует континуум решений, определенных на I, *причем их описание идентично приведенному в п.* 1). *с заменой* I_- *на* I_+ *и* ∓ 1 *на* ± 1.

3). *"Веники без ручек", если*

$$p(t)>0 \quad \text{на} \quad I_- \quad \text{и} \quad p(t)<0 \text{ на } \quad I_+.$$

В этом случае у уравнения (2) существует континуум решений, определенных на I, *причем и на* I_-, *и на* I_+ *имеются пучки интегральных кривых, описанных в п.* 1).

4). *"Ручки без веников", если*

$$p(t)<0 \quad \text{на} \quad I_- \quad \text{и} \quad p(t)>0 \quad \text{на} \quad I_+.$$

В этом случае у уравнения (2) существует единственное решение, определенное на I *и проходящее через однозначно определяемые точки* $(-1,x_-)$ *и* $(1,x_+)$ *и фиксированную точку* $(0,a)$, *причем при* $t=a$ *это решение имеет производную* $-h'_t(0,a)/[p'(0)+h'_x(0,a)]$.

5). *Если* $p(t)>0$ *на* I_- *и* $p(t)<0$ *на* I_+ *и, кроме того,* $p'(0)+h'_x(0,a)<0$, *то уравнение (2) не имеет решений, определенных на* I.

Теорема 2. *Допустим, что* $p(t)\in C^m(I)$, $h(t,x)\in C^m(I\times\mathbb{R})$ *и выполнены условия (3), (4). Тогда все описанные в теореме 1 решения уравнения (2), определенные на отрезке* I, *принадлежат пространству* $C^\nu(I)$, *где* $\nu=\min(m,k)$; *здесь* $k=\sup\{n\in\mathbb{N}: np'(0)+h'_x(0,a)>0\}$.

Используя описание решений уравнения (2) с особенностями коэффициентов, для решения краевой задачи, состоящей из бисингулярного уравнения (1) (в предположениях теоремы 2) и граничных условий при $t=-1$ и $t=1$, можно построить асимптотическое представление, содержащее $[\nu/2]$ членов.

Ситуация существенно осложняется, когда коэффициенты вырожденного уравнения (2) допускают еще и разрывы. Так, если в уравнении (2) функция $p(t)$ имеет на I только один нуль и только одну точку разрыва первого рода (отличную от своего нуля), то возникает 16 различных случаев (см. [11]).

2. Нелинейные бисингулярные задачи. Рассмотрим вопрос о построении асимптотического решения краевой задачи для сингулярно возмущенного нелинейного уравнения второго порядка

$$\epsilon^2 y'' = f(x,y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \epsilon < 1 \tag{5}$$

$$y(0) = A_0, \quad y(1) = A_1, \tag{6}$$

в предположении, что нелинейная правая часть — разрывная функция:

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если} \quad y < 0, \\ h(x,y), & \text{если} \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Допустим, что

$$g(x,y) \in C^\infty([0,1] \times (-\infty, 0]), \quad h(x,y) \in C^\infty([0,1] \times [0,\infty)),$$

и будем считать, что $A_0 < 0, \ A_1 > 0$.

Решением задачи (5), (6) будем называть любую функцию $y = y(x,\epsilon), \ 0 \leq x \leq 1$, которая при всех $x \in [0,1]$ обладает абсолютно непрерывной первой производной, удовлетворяет уравнению (5) при $y \neq 0$ и подчинена краевым условиям (6). Краевую задачу (5), (6) также следует считать бисингулярной — вырожденное уравнение $f(x,y) = 0$, являющееся "конечным" (недифференциальным), имеет особенность, возникающую из-за разрывности функции $f(x,y)$.

Теорема 3. *Пусть для задачи (5), (6) существуют нижняя $\alpha(x,\epsilon)$ и верхняя $\beta(x,\epsilon)$ барьерные функции. Тогда эта краевая задача имеет решение, удовлетворяющее неравенству*

$$\alpha(x,\epsilon) \leq y(x,\epsilon) \leq \beta(x,\epsilon), \ 0 \leq x \leq 1.$$

Теорема 4. *Предположим, что:*

1) *уравнения $g(x,y) = 0$ и $h(x,y) = 0$ определяют, соответственно, функции $y = \varphi_i(x), \ x \in [0,1], \ i = 0,1$ такие, что*

$$\varphi_0(x) < 0, \quad g(x,\varphi_0(x)) = 0, \quad \varphi_1(x) > 0, \quad h(x,\varphi_1(x)) = 0, \quad x \in [0,1];$$

2) *выполнены неравенства*

$$g'_y(x,\varphi_0(x)) \geq p > 0, \quad h'_y(x,\varphi_1(x)) \geq p > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0,1];$$

3) *функция*

$$\psi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,\omega)\, d\omega$$

имеет единственный нуль $x = x_0 \in (0,1)$;

4) *справедлива оценка*

$$\int_{\varphi_i(x_0)}^{s} f(x_0,\omega)\, d\omega > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq |s| < |\varphi_i(x_0)|, \ i = 0,1;$$

5) *выполнено неравенство*

$$\varphi'_0(x_0) g(x_0,0) - \varphi'_1(x_0) h(x_0,0) + \psi'(x_0) \neq 0.$$

Тогда существует решение $y = Y(x,\epsilon), \ 0 \leq x \leq 1$ краевой задачи (5), (6), имеющее внутренний переходный слой в окрестности точки $x = x_0$.

З а м е ч а н и е. 1. *Если функция $\psi(x)$ имеет n нулей на интервале $(0,1)$ и для каждого из них выполняются условия 4) и 5), то у краевой задачи (5), (6) существует 2^{n-1} решений с внутренними переходными слоями.*

Замечание 2. *Если функция $\psi(x)$ не имеет нулей на интервале $(0,1)$, то у краевой задачи (5), (6) существует решение с краевым слоем т в окрестности точки $x = 1$, если $\psi(x) > 0$ или в окрестности точки $x = 0$, если $\psi(x) < 0$.*

Замечание 3. *Если $\psi(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$, то у краевой задачи (5), (6) может существовать бесконечно много решений с внутренними переходными слоями.*

Т е о р е м а 5. *Допустим, что выполнены условия* 1) - 5) *теоремы 4. Кроме того, пусть точки A_0 и A_1 находятся, соответственно, в области влияния точки покоя присоединенного уравнения*

$$s'' = f(x_0, \varphi_i(x_0) + s), i = 0, 1.$$

Тогда для решения краевой задачи (5), (6), существующего согласно теореме 4, может быть эффективно построено асимптотическое при $\epsilon \to 0$ представление вида

$$y_k(x,\epsilon) = \sum_{i=0}^{k} \epsilon^i \Big[y_i(x) + u_i(x/\epsilon) + v_i((1-x)/\epsilon) + w_i((x-x_0)/\epsilon) \Big],$$

причем справедлива оценка

$$|Y(x,\epsilon) - y_k(x,\epsilon)| + \epsilon |Y'(x,\epsilon) - y_k'(x,\epsilon)| \le M\epsilon^{k+1}, \ x \in [0,1].$$

Цитированная литература

1. **Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А,Ю., Розов Н.Х.** Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., 1995.

2. **Tschen Yu-Whu.** // Comp. Math. 1935. V.2, N 3. P. 378–401.

3. **Nagumo M.** // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. Ser. 3. 1939. V.21. P.529–534.

4. **Тихонов А.Н.** // Матем. сб. 1948. Т.22, № 2. С.193–204.

5. **Тихонов А.Н.** // Матем. сб. 1950. Т.27, № 1. С.147–156.

6. **Тихонов А.Н.** С // Матем. сб. 1952. Т.31, № 3. С.575–586.

7. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М., 1989.

8. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** // Успехи матем. наук. 1957. Т.12, № 5. С.3–75.

9. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

10. **Глушко В.П.** Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж, 1972.

11. **Розов Н.Х., Сушко В.Г.** // Докл. АН России. 1993. Т.332, № 3. С.294–296.

Поступила в редакцию 10.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 79 –88*

УДК 517.9

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Самойленко, Ю. В. Теплинский

Институт математики НАН Украины
01601 Украина, Киев-4, ул. Терещенковская, 3 sam@imath.kiev.ua
Каменец-Подольский государственный университет
32300 Украина, г. Каменец-Подольский, ул. Огиенко 61, teplin@kp.rel.com.ua

1. Краткая история вопроса и постановка задач. В пятидесятых — семидесятых годах XX века работы многих математиков, например, Ю.А. Митропольского [1], и А.Г. Илюхина [2] показали, что к решению различных задач, в которых рассматриваются колебания систем с распределёнными параметрами, удобно применять аппарат счётных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Как отмечено в [2], примером такой задачи является задача о поперечных колебаниях стержня, нагруженного осевой периодически изменяющейся силой. К таким системам приводят также и задачи из различных разделов теоретической физики.

Теория счётных систем дифференциальных уравнений была создана К.П. Персидским. Его систематические исследования привели к доказательству теорем существования и единственности решения задачи Коши для таких систем, разработке методов приближённого их решения, построению для них теории устойчивости. Основные результаты К.П. Персидского, полученные в этой области, позднее были опубликованы в виде сборника его статей [3]. Впоследствии определились различные направления в изучении счётных систем: общая теория, системы уравнений с частными производными, теория характеристических чисел и устойчивость решений, усреднение, многопериодические решения и некоторые другие. Из многих научных работ, посвящённых этой тематике, отметим работы В.Г. Бродовского [4], О.А. Жаутыкова [5,6], В.Х. Харасахала [7], З.И. Халилова [8], К.Г. Валеева и О.А. Жаутыкова [9], Д.У. Умбетжанова [10], их учеников и последователей.

Для отыскания и исследования колебательных решений дифференциальных систем в настоящее время широко используются методы теории инвариантных тороидальных многообразий. Хорошо известно [11], что первые глубокие результаты в области инвариантных тороидальных многообразий систем нелинейной механики были получены в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [12, 13, 14]. Позже идеи, высказанные ими, были развиты в работах Ю.А. Митропольского, что привело к созданию метода интегральных многообразий нелинейной механики [15]. Весомый вклад в теорию возмущения инвариантных тороидальных многообразий внесли

Keywords: *infinite system of ordinary differential equation, periodic solution, invariant manifold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K13, 34K19

Я. Курцвейль [16], S.P. Diliberto [17, 18], J.K. Hale [19], I. Kupka [20], J.H. Kyner [21]. В 1960 — 1970 годах J. Moser и R.J. Sacker опубликовали серию работ [22-26], которые практически завершили создание этой теории.

Применительно к задачам нелинейной механики один из подходов к теории возмущения инвариантных торов был предложен А.М. Самойленко в 1970 году [27]. Этод метод основывался на применении функции Грина (теперь её часто называют функцией Грина-Самойленко) и повлёк за собой целый ряд исследований, что привело к созданию теории расширений динамических систем на торах, которая в основном сформировалась в работах Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко и В.Л. Кулика [28]. В последние 10 — 15 лет активизировались исследования инвариантных тороидальных многообразий счётных систем дифференциальных уравнений. Фундамент этих исследований был заложен в работах авторов этого сообщения [29—38]. Здесь предлагается обзор основополагающих результатов, полученных нами в этой области. Условия существования инвариантных тороидальных многообразий линейных систем, теория возмущения таких многообразий для нелинейных систем, свойства гладкости и устойчивости этих многообразий, возможность редукции рассматриваемых задач на случай конечномерных систем растущей размерности — вот перечень основных вопросов, которым посвящено это сообщение.

2. Основные результаты. Рассмотрим сначала систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in R^m,\ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathfrak{M},\ P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица, ограниченная по норме $\|P(\varphi)\| = \sup\limits_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi)|$, $\mathfrak{M}$ — банахово пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\limits_i\{|x_i|\}$, $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), a_2(\varphi), \dots, a_m(\varphi)\}$ — ограниченная по норме пространства $\mathfrak{M}$ функция. Предположим, что эта функция и матрица $P(\varphi)$ периодичны относительно φ_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ с периодом 2π. Интерпретируя φ_i как угловые координаты, будем считать, что система уравнений (1) определена на m-мерном торе $\mathcal{T}_m$.

Обозначим через C_φ множество матриц типа $P(\varphi)$, для которых $\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi} |p_{ij}(\varphi)| < \infty$. Множество 2π-периодических по φ_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ функций и матриц, допускающих ограниченные по норме и непрерывные по координатам относительно φ производные по φ_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ до r-го порядка включительно, обозначим через $C^r(\mathcal{T}_m)$. В нём выделим подмножество $C^r_{Lip}(\mathcal{T}_m)$ элементов, производные которых по φ_i до r-го порядка включительно удовлетворяют условию Липшица по φ. Уточним, что функции и матрицы дифференцируются покоординатно и поэлементно, соответственно.

Пусть $\Omega^t_\tau(\varphi)$ — матрицант уравнения $\dfrac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x$, где $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$ — решение первого уравнения системы (1). Если существует такая бесконечная матрица $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m) \bigcap C_\varphi$, что функция

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при} \quad \tau \le 0; \\ \Omega^0_\tau(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E & \text{при} \quad \tau > 0, \end{cases}$$

где E — бесконечная единичная матрица, удовлетворяет неравенству $\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| d\tau \le K = const < \infty$, то эту функцию называют функцией Грина задачи об инвариантных торах (в дальнейшем изложении — функция Грина) системы (1).

Инвариантным тором $\mathcal{T}$ системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + c(\varphi), \tag{2}$$

где $c(\varphi) = \{c_1(\varphi), c_2(\varphi), \dots\}$ — ограниченная по норме пространства $\mathfrak{M}$ 2π-периодическая по $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, m)$ функция, называют множество точек $x \in \mathfrak{M}$:

$$x = u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), \dots), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

если функция $u(\varphi)$ определена при всех $\varphi \in R^m$, 2π-периодична относительно φ^i $(i = 1, 2, 3, \dots, m)$, ограничена по норме и при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ удовлетворяет равенству

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_t(\varphi)) + c(\varphi_t(\varphi)).$$

Этот тор называют непрерывным или гладким относительно φ, если соответствующим свойством обладает порождающая его функция $u(\varphi)$.

Оказывается, что если $a(\varphi) \in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m) \bigcap C_\varphi$, $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, то существование функции Грина системы уравнений (1) является достаточным условием существования инвариантного тора системы (2). Отметим, что вопрос существования функции Грина для счётной системы (1) изучен пока что слабо. В самом простом случае, когда матрицант системы уравнений (1) удовлетворяет условию экспоненциального затухания, то есть $\forall \varphi \in R^m$ и $t \geq 0$ имеет место неравенство $\|\Omega^t_0(\varphi)\| \leq K \exp\{-\gamma t\}$, где положительные постоянные K, γ не зависят от φ, функция Грина системы (1) легко выписывается, причём $C(\varphi) = E$.

Если $\forall \varphi \in R^m$ пространство $\mathfrak{M}$ представимо в виде прямой суммы подпространств $E_1(\varphi)$ и $E_2(\varphi)$ так, что решение $x_t(\varphi, x_0)$ уравнения $\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x$, принимающее при $t = 0$ значение $x_0 \in E_1(\varphi)$, удовлетворяет оценке

$$||x_t(\varphi, x_0)|| \leq K \exp\{-\gamma(t - \tau)||x_\tau(\varphi, x_0)||\} \quad (t \geq \tau, \{t, \tau\} \subset R^1),$$

а принимающее значение $x_0 \in E_2(\varphi)$ — оценке

$$||x_t(\varphi, x_0)|| \leq K \exp\{\gamma(t - \tau)||x_\tau(\varphi, x_0)||\} \quad (t \leq \tau, \{t, \tau\} \subset R^1),$$

где K и γ — положительные постоянные, не зависящие от φ, то это уравнение, а также систему (1), называют экспоненциально дихотомичными (э-дихотомичными) на оси.

Если при этом существует бесконечная матрица $C_1(\varphi) \in C_\varphi$, проектирующая пространство $\mathfrak{M}$ на подпространство $E_1(\varphi)$ с помощью операции умножения матрицы на вектор, то э-дихотомичное на оси уравнение называют э-дихотомичным с матричным проектором.

Если система уравнений (1) является э-дихотомичной на оси и имеет при этом матричный проектор $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m) \bigcap C_\varphi$, то при липшицевых $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ и $P(\varphi) \in C_\varphi$ у неё существует функция Грина, удовлетворяющая оценке $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\}$. В случае, когда $a(\varphi) = \omega$, где ω — постоянный вектор несоизмеримых частот, для э-дихотомичности с матричным проектором системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовали матрица $C_1(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m) \bigcap C_\varphi$, такая, что $\Omega^0_t(\varphi)C_1(\varphi_t(\varphi)) = C_1(\varphi)\Omega^0_t(\varphi)$, $C^2_1(\varphi) = C_1(\varphi)$ $\forall t \in R^1, \varphi \in \mathcal{T}_m$ и положительные постоянные $T, d < 1$, при которых имеют место неравенства $\|\Omega^T_0(\varphi)C_1(\varphi)\| \leq d$, $\|\Omega^{-T}_0(\varphi)(E - C_1(\varphi))\| \leq d$.

Отметим, что существование таких постоянных $T, d < 1$, что $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m \quad \|\Omega^T_0(\varphi)\| \leq d$, является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы уравнений (1).

Достаточные условия существования непрерывного инвариантного тора системы уравнений (2) предоставляет следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что* $\{a(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi) \subset C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m) \bigcap C_\varphi$ *и система (1) является э-дихотомичной с матричным проектором. Тогда система уравнений (2) имеет инвариантный тор, порождаемый функцией*

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi)c(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

удовлетворяющей по φ *условию Гёльдера*

$$\|u(\varphi) - u(\bar{\varphi})\| \leq K^0 \|\varphi - \bar{\varphi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

где $K^0 = const > 0$, ν *— постоянная, взятая из неравенства* $\frac{\gamma}{\alpha} > \frac{\nu}{\nu+1}$, α *— постоянная Липшица функции* $a(\varphi)$, $\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_m$.

О дифференцируемости инвариантного тора говорит следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1,* $\{a(\varphi),\ P(\varphi),\ c(\varphi)\} \subset C^1(\mathcal{T}_m)$, *ряды* $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(\varphi)|$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\frac{\partial c_i(\varphi)}{\partial \varphi_s}|$ *равномерно сходятся для* $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} |\frac{\partial p_{sj}(\varphi)}{\partial \varphi_i}| \leq p_s = \text{ const } < \infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} p_s = p^* < \infty.$$

Тогда, если

$$\gamma > \alpha_0 = \max_{\varphi} \max_{\|\eta\|=1} \|\frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \eta\|, \quad \eta \in R^m,$$

то инвариантный тор системы уравнений (2) дифференцируем по φ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Условия дифференцируемости инвариантного тора по φ_i до l-го порядка включительно получены нами методом укорочения системы уравнений (2). Наряду с последней рассмотрим укороченную систему

$$\frac{d \overset{(n)}{x}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi_t(\varphi)) \overset{(n)}{x}_i + c_s(\varphi_t(\varphi)) \quad (s = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Матрицант соответствующей однородной системы уравнений обозначим через $\overset{(n)}{\Omega}{}^t_\tau(\varphi)$, инвариантный тор системы (3) и порождающую его функцию — через $\mathcal{T}^{(n)}$ и $\overset{(n)}{u}(\varphi)$, соответственно, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\overset{(n)}{x} = (\overset{(n)}{x}_1, \overset{(n)}{x}_2, \ldots, \overset{(n)}{x}_n)$.

Теорема 3. *Пусть система уравнений (2) удовлетворяет условиям:*

1. $a(\varphi) \in C^0_{lip}(\mathcal{T}_m)$; $\{P(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^0(\mathcal{T}_m)$.

2. $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \max\limits_{\varphi} |p_{sj}(\varphi)| \leq K\varepsilon(n)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, *где* $K = const < \infty$, $\varepsilon(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

3. $\overset{(n)}{\Omega}{}^0_\tau(\varphi) \leq N \exp\{\gamma\tau\}$, $\tau \leq 0$; N, γ *— положительные постоянные, не зависящие от* n *и* φ.

Тогда система уравнений (2) имеет инвариантный тор, порождаемый функцией $x = u(\varphi)$, *где* $\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{u}_j(\varphi) = u_j(\varphi)$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ *равномерно по* $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Условия дифференцируемости инвариантного тора системы уравнений (2) до l-го порядка даются следующим утверждением.

Теорема 4. *Пусть система уравнений (2) удовлетворяет условиям теоремы 3 и* $\{a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^l_{Lip}(\mathcal{T}_m)$. *Тогда, если* $\gamma > l\alpha_0$, *то инвариантный тор системы (2) принадлежит пространству* $C^l(\mathcal{T}_m)$.

Если положить $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \in \mathfrak{M}$, то систему уравнений вида (2) следует рассматривать на бесконечномерном торе $\mathcal{T}_\infty$. Обозначим эту систему через (2_∞), не выписывая её отдельно. Рассмотрим также конечномерную систему уравнений, полученную из системы (2_∞) с помощью укорочения по φ до m-го порядка и по x — до n-го порядка:

$$\frac{d \overset{(m)}{\varphi}_i}{dt} = a_i(\overset{(m)}{\varphi}) \quad (i = \overline{1, m}); \quad \frac{d \overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{P}(\overset{(m)}{\varphi}) \overset{(n)}{x} + \overset{(n)}{c}(\overset{(m)}{\varphi}), \tag{4}$$

где $\overset{(m)}{\varphi} = (\overset{(m)}{\varphi}_1, \overset{(m)}{\varphi}_2, \dots, \overset{(m)}{\varphi}_m, 0, 0, 0, \dots)$, $\overset{(n)}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overset{(n)}{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\overset{(n)}{P} = [p_{ij}]_{i,j=1}^n$. Матрицант системы $\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{P}(\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi}))\overset{(n)}{x}$ обозначим через $\Omega_\tau^t(\overset{(m)}{\varphi})_n$, а порождающую инвариантный тор системы (4) функцию — через $\overset{(n)}{u}(\overset{(m)}{\varphi})$. Здесь $\overset{(m)}{\varphi}_t(\overset{(m)}{\varphi})$ — решение первого уравнения системы (4), дополненное нулями до вектора со счётным числом координат, такое, что $\overset{(m)}{\varphi}_0(\overset{(m)}{\varphi}) = \overset{(m)}{\varphi}$.

Говорят, что функция $f(\varphi)$ удовлетворяет усиленным условиям Коши-Липшица относительно $\varphi \in \mathfrak{M}$ с коэффициентом $\varepsilon(m)$, если

$$\|f(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots) - f(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \bar\varphi_{m+1}, \bar\varphi_{m+2}, \dots)\| \le$$
$$\le \varepsilon(m) \sup\{|\varphi_{m+1} - \bar\varphi_{m+1}|, |\varphi_{m+2} - \bar\varphi_{m+2}|, \dots\},$$

где $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$, а $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots)$ и $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \bar\varphi_{m+1}, \bar\varphi_{m+2}, \dots)$ — произвольные точки из $\mathfrak{M}$, первые m координат которых совпадают. В множестве $C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ выделим подмножество элементов, удовлетворяющих по φ усиленным условиям Коши-Липшица, и обозначим его через $C^{0^*}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$.

Следующая теорема позволяет редуцировать задачу построения инвариантного тора системы уравнений (2_∞) на случай конечномерной системы (4), размерность которой неограниченно возрастает.

Теорема 5. *Пусть система уравнений (2_∞) удовлетворяет условиям:*

1. $\{a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^{0^*}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$, *причём* $a(\varphi)$ *— с постоянной* $\alpha(m)$.

2. $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \sup\limits_{\varphi} |p_{sj}(\varphi)| \le K\delta(n)$ $(s = 1, 2, \dots)$, *где* $K =$ const $< \infty$, $\delta(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

3. $\Omega_\tau^t(\overset{(m)}{\varphi})_n \le N \exp\{\gamma\tau\}$, $\tau \le 0$, *где положительные постоянные* N *и* γ *не зависят от* n, m, φ.

4. $\gamma > \alpha(0)$.

Тогда функция $u(\varphi)$, *порождающая инвариантный тор системы* (2_∞), *представима в виде повторного предела*

$$u(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{u}(\overset{(m)}{\varphi}),$$

в котором внешний предельный переход понимается в смысле нормы пространства $\mathfrak{M}$, *а внутренний — в покоординатном смысле, причём* $u(\varphi) \in C^{0^*}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$.

Отметим, что для системы уравнений (2_∞) имеет место теорема 1. В случае, если $a(\varphi) = \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \mathfrak{M}$, теорема (5) даёт представление для инвариантного тора системы уравнений с почти периодическими коэффициентами (случай бесконечного частотного базиса).

Рассмотрим теперь нелинейную систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, x, \mu), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x, \mu)x + c(\varphi, \mu), \tag{5}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in R^m$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathfrak{M}$, $a(\varphi, x, \mu)$, $c(\varphi, \mu)$ — периодические относительно φ_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ с периодом 2π ограниченные вектор-функции, $P(\varphi, x, \mu) = [p_{ij}(\varphi, x, \mu)]_{i,j=1}^\infty$ — 2π-периодическая по φ_i бесконечная матрица, $\mu \in (0, \mu_0]$ — положительный параметр, $c(\varphi, 0) \equiv 0$.

Предположим, что $\forall\ x \in D_0 = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le d\}$ таких, что $x \in C^l(\mathcal{T}_m)$, и $\forall\ \varphi \in \mathcal{T}_m, \mu \in (0, \mu_0]$ имеет место включение

$$\{a(\varphi, x, \mu), P(\varphi, x, \mu), c(\varphi, \mu)\} \subset C^l(\mathcal{T}_m),$$

причём

$$\|a(\varphi, x, \mu) - a(\bar\varphi, \bar x, \mu)\| \le \sigma(\|\varphi - \bar\varphi\| + \|x - \bar x\|),$$

$$\|P(\varphi, x, \mu) - P(\varphi, \bar{x}, \mu)\| \leq \sigma(\|x - \bar{x}\|), \quad \sigma = const > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi, x} |p_{ij}(\varphi, x, \mu)| \leq p^0 = const \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

где элементы $p_{ij}(\varphi, x, \mu)$ $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$ матрицы $P(\varphi, x, \mu)$ непрерывны по φ, $\{x, \bar{x}\} \subset D_0$ и $\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_m$.

Множество $\mathcal{T}$: $x = u(\varphi, \mu) = \{u_1(\varphi, \mu), u_2(\varphi, \mu), \dots\}, \varphi \in \mathcal{T}_m$ называют инвариантным тором системы уравнений (5), если существует такое $\tilde{\mu} \in (0, \mu_0]$, что при любом $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$ функции $u_i(\varphi_t, \mu)$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ непрерывно дифференцируемы по t и

$$\frac{du(\varphi_t, \mu)}{dt} = P(\varphi_t, u(\varphi_t, \mu), \mu)u(\varphi_t, \mu) + c(\varphi_t, \mu)$$

для всех $t \in R^1, \varphi \in \mathcal{T}_m$, где $\varphi_t = \varphi_t(\varphi, \mu)$ — решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, u(\varphi, \mu), \mu),$$

удовлетворяющее условию $\varphi_0(\varphi, \mu) = \varphi \in \mathcal{T}_m$.

Для построения инвариантного тора системы (5) используется итерационный процесс, линеаризующий задачу отыскания инвариантного тора на каждом шаге. Этот процесс состоит в построении последовательности $\{\mathcal{T}^{(i)}(\mu)\}_{i=0}^{\infty}$ инвариантных торов, в которой $\mathcal{T}^{(0)}(\mu) : x = 0, \varphi \in \mathcal{T}_m$, а $(i+1)$-ый определяется как инвариантный тор $\mathcal{T}^{(i+1)}(\mu) : x = u^{(i+1)}(\varphi, \mu), \varphi \in \mathcal{T}_m$ системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, u^{(i)}(\varphi, \mu), \mu), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, u^{(i)}(\varphi, \mu), \mu)x + c(\varphi, \mu).$$

Оказывается, что если для всех $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$ $\|u(\varphi, \mu) - u^{(i)}(\varphi, \mu)\| \to 0$ при $i \to \infty$ равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то функция $u(\varphi, \mu), \varphi \in \mathcal{T}_m$ порождает инвариантный тор системы уравнений (5) при $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$. Перед тем, как сформулировать достаточные условия такой сходимости, введём понятие грубости функции Грина линейной системы уравнений.

Для функции $f(\varphi)$ из $C^l(\mathcal{T}_m)$ положим

$$\|f(\varphi)\|_0 = \sup_{\varphi} \|f(\varphi)\|, \quad \|f(\varphi)\|_l = \sup_{0 \leq s \leq l} \|D_{\varphi}^s f(\varphi)\|_0,$$

где D_{φ}^s — оператор дифференцирования по φ_i до s-го порядка.

Функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (1) называют грубой, если существует такая постоянная $\delta > 0$, что при всех $a^1(\varphi) \in C^l(\mathcal{T}_m)$, для которых $\|a^1(\varphi)\| < \delta$, существует функция Грина $\bar{G}_0(\tau, \varphi)$ системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a^1(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x \tag{6}$$

такая, что $\bar{G}_0(\tau, \varphi)f(\varphi) \in C^l(\mathcal{T}_m)$ и

$$\|\bar{G}_0(\tau, \varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))\|_l \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\}\|f\|_l,$$

где $\varphi_t(\varphi)$ — решение первого из уравнений (6), $f(\varphi)$ — произвольная функция из $C^l(\mathcal{T}_m)$, K и γ — положительные постоянные, не зависящие от δ, φ, f.

Подвергнем систему уравнений (1) возмущению и рассмотрим систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a^1(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = (P(\varphi) + P^1(\varphi))x + f(\varphi). \tag{7}$$

Оказывается, что если система (1) имеет грубую функцию Грина, то для любых достаточно малых по норме $\|\cdot\|_l$ $\{a^1(\varphi), P^1(\varphi)\} \in C^l(\mathcal{T}_m)$ и произвольной функции $f(\varphi) \in C^l(\mathcal{T}_m)$ возмущённая система уравнений (7) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}$: $x = u(\varphi), \varphi \in \mathcal{T}_m$, удовлетворяющий условию $\|u(\varphi)\|_l \leq K_1\|f(\varphi)\|_l$, где K_1 — положительная постоянная, не зависящая от f и φ. Это позволяет доказать следующий результат.

Теорема 6. *Пусть система уравнений (5) такова, что линеаризованная система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, 0, 0), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, 0, 0)x$$

имеет грубую функцию Грина и при $x \in C^l(\mathcal{T}_m)$ справедливо неравенство

$$\max\{\|a(\varphi, x, \mu) - a(\varphi, 0, 0)\|_l, \|P(\varphi, x, \mu) - P(\varphi, 0, 0)\|_l, \|c(\varphi, \mu)\|_l\} \leq L_l(d, \mu_0),$$

где $L_l(d, \mu_0) \to 0$ при $d \to 0, \mu_0 \to 0$.

Тогда существует такое $\tilde{\mu} \in (0, \mu_0]$, что для всех $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$ система уравнений (5) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}(\mu)$: $x = u(\varphi, \mu) \in C^{l-1}(\mathcal{T}_m), \varphi \in \mathcal{T}_m, l \geq 1$, причём $\|u(\varphi, \mu)\| \to 0$ при $\mu \to 0$.

Если правая часть первого из уравнений (5) не зависит от x, то можно обойтись и без условия грубости функции Грина. Например, для системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + \mu c(\varphi, x), \tag{8}$$

у которой $P(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m) \cap P_\varphi$; $a(\varphi) \in C^0_{lip}(\mathcal{T}_m)$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Предположим, что при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\|x\| \leq d$ функция $c(\varphi, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x, и при $\mu = 0$ система уравнений (8) имеет функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$, удовлетворяющую неравенству*

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\},$$

где γ, K — положительные постоянные, не зависящие от τ, φ.

Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для всех $\mu \in [0, \mu_0]$ система (8) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}(\mu)$: $x = u(\varphi, \mu), \varphi \in \mathcal{T}_m$, причём $\|u(\varphi, \mu)\| \to 0$ при $\mu \to 0$.

Ранее введённое условие экспоненциального затухания матрицанта линейной системы уравнений (1) приводит к экспоненциальной устойчивости её тривиального инвариантного тора и обеспечивает притяжение к нему её решений. Укажем условия, гарантирующие аналогичное поведение решений нелинейной счётной системы.

Рассмотрим сперва квазилинейную систему уравнений (8). Для неё имеет место теорема об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора следующего вида.

Теорема 8. *Предположим, что при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\|x\| \leq d$ функция $c(\varphi, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x, а матрицант соответствующей однородной системы вида (1) экспоненциально затухает. Тогда при достаточно малом μ траектория решения $x_t = x(x_0, t, \varphi, \mu), x_0 = x(x_0, 0, \varphi, \mu)$ системы (8) притягивается при $t \to +\infty$ к траектории на её инвариантном торе $\mathcal{T}(\mu)$: $x = u(\varphi, \mu), \varphi \in \mathcal{T}_m$ по закону*

$$\|x_t - u(\varphi_t(\varphi))\| \leq K_0\|x_0 - u(\varphi, \mu)\| \exp\{-\gamma_0 t\}, \quad t \geq 0,$$

где K_0 и γ_0 — положительные постоянные.

Рассмотрим теперь систему уравнений общего вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, x), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x + c(\varphi), \tag{9}$$

где $\varphi \in R^m, x \in \mathfrak{M}$.

Положим $D = \mathcal{T}_m \times D_0$. Пусть $\mathcal{T}$: $x = u(\varphi) \in C^1_{Lip}(\mathcal{T}_m), \varphi \in \mathcal{T}_m$ является инвариантным тором системы уравнений (9), входящим в множество D_0 с некоторой ρ-окрестностью.

Обозначим через $\psi = \psi_t(\psi_0), \psi_0(\psi_0) = \psi_0 \in \mathcal{T}_m$ решение уравнения $\frac{d\psi}{dt} = a(\psi, u(\psi))$, определяющего поток траекторий на инвариантном торе $\mathcal{T}$. Решение системы уравнений (9) с начальными значениями φ_0, x_0 запишем в виде $\varphi = \varphi_t(\varphi_0, x_0)$, $x = x_t(\varphi_0, x_0)$.

Скажем, что движения системы уравнений (9) в окрестности инвариантного тора $\mathcal{T}$ притягиваются при $t \to \infty$ к её движениям на торе по экспоненциальному закону, если существуют такие положительные постоянные $\{\rho_0, \rho_1\} \subset R^1$, что для любого решения $\{\varphi, x\}$ этой системы уравнений, удовлетворяющего условию

$$\min_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|\varphi_0 - \varphi\| \le \rho_0, \quad \|x_0 - u(\varphi_0)\| \le \rho_1,$$

существует такая траектория на торе $u(\psi_t(\psi_0))$, где ψ_0 зависит от φ_0, x_0, что выполняется неравенство

$$\|\varphi_t(\varphi_0, x_0) - \psi_t(\psi_0)\| + \|x_t(\varphi_0, x_0) - u(\psi_t(\psi_0))\| \le K \exp\{-\gamma t\},$$

где K и γ — положительные постоянные, $t \ge 0$.

Определим норму $\|\cdot\|_D$ бесконечной матрицы $P(\varphi, x)$ равенством

$$\|P(\varphi, x)\|_D = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(\varphi, x) \in D} |p_{ij}(\varphi, x)|.$$

Матрицу $P(\varphi, x)$ называют липшицевой на D, если $\forall\ \{(\varphi, x), (\bar{\varphi}, \bar{x})\} \in D$ имеет место неравенство $\|P(\varphi, x) - P(\bar{\varphi}, \bar{x})\| \le K\{\|\varphi - \bar{\varphi}\| + \|x - \bar{x}\|\}$, $K = const > 0$. Множество ограниченных по норме $\|\cdot\|_D$ матриц, удовлетворяющих на D условию Липшица, обозначим через C_D.

Будем считать, что $a(\varphi, u(\varphi)) \in C^1_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, а функции $a(\varphi, x), P(\varphi, x)x$ имеют частные производные по Фреше относительно x в области D_0, причём эти производные $\frac{\partial a(\varphi,x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial P(\varphi,x)x}{\partial x}$ представляют собой матрицы $D_1(\varphi, x)$ и $D_2(\varphi, x)$ из множества C_D, которые действует на точку $x^* \in \mathfrak{M}$ способом умножения соответствующей матрицы на вектор x^*. При этом, естественно, матрица $D_1(\varphi, x)$ имеет m строк и бесконечное число столбцов.

В этих предположениях замена переменных $\varphi = \psi + \mu\Theta$, $x = u(\psi + \mu\Theta) + \mu^2 x_1$, где μ — положительный параметр, преобразует систему уравнений (9) в окрестности инвариантного тора $\mathcal{T}$ к системе вида

$$\frac{d\Theta}{dt} = A^1(\psi, \Theta, \mu)\Theta + \mu A^2(\psi, \Theta, x_1, \mu)x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = P^1(\psi, \Theta, x_1, \mu)x_1,$$

где A^1 — квадратная матрица размерности $m \times m$, матрица A^2 имеет m строк и бесконечное число столбцов, $P^1 = [p_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица.

Матриöанты систем ураывнений $\frac{dx_1}{dt} = P^1(\psi_t, 0, 0, 0)x_1$ и $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial a(\psi_t, u(\psi_t))}{\partial \psi_t}\Theta$ обозначим через $\Omega^t_\tau(P_0)$ и $\Omega^t_\tau(A_0)$, соответственно. Поведение решений системы уравнений (9) определяет следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть* $\forall\ x \in C^1(\mathcal{T}_m) \bigcap D_0\ \{a(\varphi, x), P(\varphi, x), c(\varphi)\} \subset C^1(\mathcal{T}_m)$ *и частные производные Фреше* $\{\frac{\partial a(\varphi,x)}{\partial x}\ \frac{\partial P(\varphi,x)x}{\partial x}\} \subset C_D$ *при всех* $x \in D_0, \varphi \in R^m$. *Допустим, что тор* $\mathcal{T}$: $x = u(\varphi), \varphi \in \mathcal{T}_m$ *лежит в области* D_0 *вместе с некоторой своей* ρ*-окрестностью, является инвариантным множеством системы (9) и*

$$\{u(\varphi), a(\varphi, u(\varphi))\} \subset C^1_{Lip}(\mathcal{T}_m).$$

Кроме того, предположим, что имеют место неравенства

$$\|\Omega_t^s(P_0)x_0\| \leq \exp\{-\int_t^s \beta(\psi_\tau)d\tau\}\|x_0\|, \quad x_0 \in \mathfrak{M}, \|x_0\| \leq 1,$$

$$\|\Omega_s^t(A_0)\Theta_0\| \leq \exp\{-\int_s^t \alpha(\psi_\tau)d\tau\}\|\Theta_0\|, \quad \Theta_0 \in R^m, \|\Theta_0\| \leq 1,$$

где $0 \leq t \leq s$, $\min \beta(\psi) \geq \beta_0 > 0$, $\alpha(\psi) \leq 0$, $\beta(\psi) + \alpha(\psi) > \gamma = const > 0$, *причём* $\alpha(\psi_t)$ *и* $\beta(\psi_t)$ *— интегрируемые функции.*

Тогда движения системы уравнений (9) в достаточно малой окрестности тора $\mathcal{T}$ *(то есть при достаточно малых* ρ_0 *и* ρ_1*) притягиваются при* $t \to +\infty$ *к её движениям на торе по экспоненциальному закону.*

Отметим, что малость постоянных ρ_0 и ρ_1 вполне определяется малостью параметра μ в формулах проведённой выше замены переменных.

Можно рассматривать систему уравнений более общего вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, x, \varepsilon), \quad \frac{dx}{dt} = F(\varphi, x, \varepsilon), \tag{10}$$

где функции $a(\varphi, x, \varepsilon)$, $F(\varphi, x, \varepsilon)$ являются 2π-периодическими по $\varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, непрерывными по φ, x в области D при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, причём в этой области существует частная производная Фреше относительно x функции $F(\varphi, x, \varepsilon)$, принадлежащая множеству C_D. Систему (10) можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, x, \varepsilon), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x, \varepsilon)x + f(\varphi, \varepsilon),$$

где $f(\varphi, \varepsilon) = F(\varphi, 0, \varepsilon)$, $P(\varphi, x, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial F(\varphi, tx, \varepsilon)}{\partial (tx)} dt$. Последняя система уравнений имеет вид системы (5), для которой вопрос существования инвариантного тора решается теоремой 6. Для получения достаточных условий притяжения движений этой системы к движениям на инвариантном торе следует применить теорему 9.

Отметим, что к настоящему времени свойства гладкости инвариантных торов счётных систем дифференциальных уравнений, определённых на бесконечномерном торе $\mathcal{T}_\infty$, и поведение движений таких систем в окрестности их инвариантных торов практически не изучены. Отметим также, что в последние годы многие из изложенных выше результатов были распространены на различного вида счётные системы с импульсным воздействием, системы разностных и дифференциально-разностных уравнений.

Цитированная литература

1. **Митропольский Ю.А.** // Укр. мат. журн. 1964. Т.16, № 3. С.334—337.
2. **Илюхин А.Г.** // Укр. мат. журн. 1962. Т.14, № 3. С.250 — 259.
3. **Персидский К.П.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. Алма-Ата, 1976.
4. **Бродовский В.Г.** // Изв.АН Каз.ССР. Сер.матем. и физика. 1966. №1. С.84–94.
5. **Жаутыков О.А.** // Укр. мат. журн. 1965. Т.17, №1. С.39–46.
6. **Жаутыков О.А.** // Мат. сб. 1957. Т.49, Вып.3. С.317–330.
7. **Харасахал В.Х.** // Изв. АН Каз. ССР. Сер. иатем. и мех. 1950. Вып.4. С.98–108.
8. **Халилов З.И.** // ДАН СССР. 1952. Т.84. С.229–232.

9. **Валеев К.Г., Жаутыков О.А.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1974.

10. **Умбетжанов Д.У.** Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата, 1979.

11. **Самойленко А.М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. М., 1987.

12. **Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.** Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.

13. **Боголюбов Н.Н.** О некоторых статистических методах в математической физике. Киев, 1945.

14. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.

15. **Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.** Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., 1973.

16. **Курцвейль Я.** // Дифференц. уравнения. 1968. Т.4, № 5. С.785—797.

17. **Diliberto S.P.** // Rend. del Circolo Math. Palermo. 1960. Ser.9. P.265–299; 1961. Ser.10. P.111–161.

18. **Diliberto S.P.** // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т.1. Киев, 1970. С.257–264.

19. **Hale J.K.** //Annals of Math . 1961. **73**, №3. P.946–531.

20. **Kupka I.** //Comp. Rend. Acad. Sc.–Paris. 1964. **73**, №17. P.4197–4200.

21. **Kyner J.H.** //Rend. del Circolo Math.—Palermo. 1961. Ser.11, №9. P.98–110.

22. **Мозер Ю.** // УМН. 1968. Т.23, №4. С.179–238.

23. **Мозер Ю.** Лекции о гамильтоновых системах. М., 1973.

24. **Moser J.** // Math. Amm. 1967. **169**. P.136–176.

25. **Sacker R.J.** // Comm. Pure Appl. Math. 1965. **18**, №4. P.717–732.

26. **Sacker R.J.** // J. Math. and Mech. 1969. **18**, №8. P.705–761.

27. **Самойленко А.М.** //Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т.Ў. Киев, 1970. С.495–499.

28. **Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.** Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. Киев, 1990.

29. **Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.** // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21, №8. С.1353–1361.

30. **Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.** // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. №1. С.26–30.

31. **Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.** // Докл. АН УССР. Сер. А. 1991. №7. С.31–33.

32. **Теплинский Ю.В.** // Укр. мат. журн. 1975. Т.27, №6. С.847–851.

33. **Теплинский Ю.В.** // Укр. мат. журн. 1977. Т.29, №6. С.835–841.

34. **Теплинский Ю.В.** // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. №9. С.796–800.

35. **Теплинский Ю.В.** // Укр. мат. журн. 1983. Т.35, №2. С.194–199.

36. **Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.** Счётные системы дифференциальных уравнений. Киев, 1993.

37. **Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.** // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, №5. С.781–790.

38. **Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.** // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, №2. С.204–212.

Институт математики НАН Украины, г. Киев.

Поступила в редакцию 10.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 89 — 90*

УДК 519.6:537.812

НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ В УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА

С. С. Саутбеков

КазНУ им. аль-Фараби
480100 г.Алматы, пр. аль-Фараби, 71 sautbek@math.kz

Известно, что в классической электродинамике поле произвольно движущегося точечного заряда определяется потенциалами Льенара-Вихерта. Однако в них не учитывается наличие величины собственного магнитного момента частицы, например, источник дипольного магнитного поля. Поэтому для нейтральных частиц, особенно для близких расстояний является актуальным учет собственного магнитного момента для определения электромагнитного поля при ее произвольном движении, хотя, разумеется, вкладом магнитного момента у заряженных частиц можно практически пренебречь. В данной работе вводится определение плотности нейтральных токов посредством магнитного момента частицы, который имеет такое же значение, например, как заряд для тока проводимости. Магнитный момент $\mathbf{P}$ электрически нейтральной точечной частицы считается постоянным ($\mathbf{P} = \mathbf{const}$), а ее местоположение определяется уравнением движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t})$.

Согласно известной формуле электродинамики магнитный момент определяется как

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2}\int[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')]\mathrm{dV}(\mathrm{r}') = -\frac{\mu}{2}[\mathbf{r} * \mathbf{j}] \quad (\mathrm{P} = \mu \mathrm{IS}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $*$ — свертка по пространственным координатам, прямые и круглые скобки показывают векторное и скалярное произведения соответственно. Учитывая тождества

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}[[\mathbf{P}\,\nabla]\,\mathbf{r}], \quad \mathbf{P} = \mathbf{P} * \delta(\mathbf{r}),$$

легко получим формулу плотности нейтрального тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}(\mathrm{t})) = -\frac{1}{\mu}[\mathbf{P}\,\nabla]\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(\mathrm{t})), \tag{2}$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция Дирака.

Тогда векторный потенциал определяется в виде свертки плотности тока

$$\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j} \underset{\mathrm{x,t}}{*} \psi \tag{3}$$

Keywords: *magnetic moment, douplet, conduction current, vector potential*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

с фундаментальным решением волнового уравнения

$$\psi = -\frac{1}{4\pi \mathrm{r}}\delta(t - \mathrm{r}/c),$$

где $\underset{x,t}{*}$ — свертка по всем пространственным координатам и времени, c — скорость света.

Подставив выражение (2) в (3) и произведя свертку, получим

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi}[\mathbf{P}\,\nabla]\frac{1}{(\mathrm{R} - (\mathbf{R}\,\mathbf{v}/c))_\tau}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau)$, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, τ — корень уравнения:

$$\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau)|/c.$$

Электромагнитное поле произвольно движущейся точечной частицы с заданным магнитным моментом $\mathbf{P}$ в общем виде определяется через векторный потенциал (4) следующим образом

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \qquad (5)$$

В частности, при $\mathrm{v} = 0$ из (4) и (5) имеем поле магнитного диполя

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi\mu}\,\mathrm{rot}[\mathbf{P}\,\nabla]\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{4\pi\mu \mathrm{r}^3}\left(\frac{3(\mathbf{P}\,\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{\mathrm{r}^2} - \mathbf{P}\right),$$

которое формально можно получить из соответствующей формулы электростатики следующей заменой: $\varepsilon \to \mu$, $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, где e — заряд, v — скорость электрона. Если собственный магнитный момент задан в собственной системе отсчета ($\mathbf{P}_0$), то при релятивистских скоростях согласно преобразованию Лоренца его можно определить в лабораторной системе отсчета

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + (\gamma^{-1} - 1)(\mathbf{v}\mathbf{P_0})\mathbf{v}/\mathrm{v}^2, \quad \gamma = (1 - \mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2)^{-1/2}.$$

Полученный векторный потенциал целесообразно использовать для расчета короткодействующих ядерных сил взаимодействий, а также магнитного поля массивных астрофизических объектов.

Цитированная литература

1. **Саутбеков С.С.** // ДАН РК. 2002. № 6. С. 68—75.

Поступила в редакцию 20.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 91 — 105*

УДК 517.968.7:539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В. С. Сергеев

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН e-mail: vsergeev@ccas/ru
Россия г.Москва, 119991, ул. Вавилова 40

Интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра в настоящее время находят важные применения в задачах о движении тела в воздушном потоке при нестационарном обтекании [1—3]; их использование позволяет достаточно хорошо учесть влияние на движущееся тело возникающего за ним вихревого следа. Этими уравнениями описываются также, в частности, реологические процессы, протекающие при деформации тел, и вязкоупругие свойства материалов [4—7].

Систематическое изучение уравнений данного класса началось с работ В.Вольтерра [8, 9], который применил их в задачах наследственной упругости и построил общую теорию функционалов [10], развив, в частности, для целей наследственной механики указанный М. Фреше [11] способ представления аналитического функционала в виде ряда, составленного из кратных интегралов. Наряду с этим В.Вольтерра обосновал математическую модель межвидового взаимодействия биологических популяций, базирующуюся на использовании интегродифференциальных уравнений.

В дальнейшем в развитие теории интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, в том числе в вопросы устойчивости, существенный вклад внесли работы Я.В.Быкова [12, 13] и его научной школы в Киргизии (см. [13] и последующие выпуски этого издания, монографии [14, 15]), а также целый ряд исследований, которые нашли отражение в монографиях [16—19]. Большая библиография и обзор, касающийся интегродифференциальных уравнений данного типа, содержится в [10] и в обзоре [20].

В своей основополагающей монографии по теории устойчивости [21] А.М.Ляпунов значительное внимание уделил исследованию критических случаев, дав полный анализ двух основных из них, подчеркнув тем самым их теоретическую важность для выяснения общей структуры поведения решений дифференциальных уравнений и дав мощный импульс дальнейшим исследованиям в области критических случаев, а также развитию второго метода Ляпунова в работах И.Г.Малкина, Г.В.Каменкова, К.П.Персидского, Н.Г.Четаева, С.Н.Шиманова, Н.Н.Красовского, В.В.Румянцева, В.М.Матросова и многих других ученых. Обстоятельный обзор полученных в этом направлении главных результатов содержится в публикациях [22, 23, 24].

Keywords: *integro-ordinary differential equation, Lyapunov stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D20, 45J05

Значительное внимание в исследованиях последних десятилетий по критическим случаям уделялось анализу устойчивости при наличии резонансов с использованием метода нормальных форм; эти результаты отражены частично в [25, 26].

Рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра, предполагая, что нелинейные члены заданы голоморфной в окрестности нуля функцией переменной и, быть может, некоторых функционалов в интегральной форме. В [27, 28] показано, что если характеристические показатели решений линеаризованного уравнения все отрицательны, то нулевое решение экспоненциально устойчиво и общее решение нелинейного уравнения представляется в некоторой окрестности нуля степенным рядом по начальным значениям, который является аналогом рядов первого метода Ляпунова в теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

В критических по Ляпунову случаях одного нулевого и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения заключение об устойчивости для уравнений с интегральными ядрами разностного типа зависит от знака постоянной g_k, определяемой по членам до k-го порядка правой части включительно. В [29—33] содержатся соответствующие утверждения о неустойчивости. Остановимся подробнее на этих результатах.

1. Неустойчивость. Пара чисто мнимых корней. Исследуется устойчивость по Ляпунову нулевого решения интегродифференциального уравнения типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int\limits_0^t K(t-s)x(s)ds + F(x,\tilde{y},t), \quad x \in R^n, \quad \tilde{y} \in R^m, \tag{1}$$

где $A - (n \times n)$ - постоянная матрица, $(n \times n)$ - матрица $K(t) \in C$ определена для $t \in R^+$, голоморфная по x, $\tilde{y}$ функция $F(x,\tilde{y},t):\ B_2(x,\tilde{y}) \times R^+ \ \to\ R^n$, причем $B_2(x,\tilde{y}) = \{x \in R^n,\ \tilde{y} \in R^m : \|x\| < H_1,\ \|\tilde{y}\| < H_2\}$ для заданных $H_i > 0$ $(i = 1,2)$, имеет непрерывные коэффициенты разложения в степенной ряд, экспоненциально стремящиеся к постоянным при $t \to +\infty$, или постоянные коэффициенты. Функционал $\tilde{y}$ имеет вид

$$\tilde{y} = \int\limits_0^t \tilde{k}(t-s)\phi(x(s),s)ds, \tag{2}$$

где $\phi(x,t):\ B_1(x) \times R^+ \ \to\ R^k$, причем $B_1(x) = \{x \in R^n : \|x\| < H_1\}$, – голоморфная по x функция с коэффициентами разложения того же типа, что и коэффициенты функции $F(x,\tilde{y},t)$, ядро $\tilde{k}(t) \in C - (m \times k)$ – матрица, заданная для $t \in R^+$.

Будем предполагать, что матрица $K(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|K(t)\| \le C\exp(-\beta t), \qquad C,\ \beta = \text{const} > 0, \tag{3}$$

и такая же оценка справедлива для матрицы $\tilde{k}(t)$.

Будем также считать, что функции F и ϕ таковы, что при замене x на εx $(\varepsilon = \text{const})$, в том числе и в выражении (2) для $\tilde{y}$, разложение F в степенной ряд по ε начинается с членов не ниже второго порядка.

Решение задачи Коши для уравнения (1), (2) с начальными условиями $x_0 = x(0)$ из некоторой окрестности нуля существует и единственно [12] по крайней мере для $t \in [0,T]$ для некоторого $T > 0$.

Пусть $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для матрицы $K(t)$. Характеристическое уравнение для (1)

$$\det(\lambda E_n - A - K^*(\lambda)) = 0 \tag{4}$$

ввиду (3) определено в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq -\beta$.

Будем предполагать, что уравнение (4) имеет в этой полуплоскости конечное число корней λ'_j $(j = 1,...,N;\ N \geq n)$, причем $\operatorname{Re}\lambda'_j < 0$ $(j = 1,...,N-2)$ и $\lambda'_{N-1} = \mathrm{i}\omega$, $\lambda'_N = -\mathrm{i}\omega$, $\omega > 0$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей.

Пусть все корни характеристического уравнения, отвечающие характеристическим показателям λ_i $(i = 1,...,n)$ решений линеаризованного уравнения (1), являются простыми и $\operatorname{Re}\lambda'_s < \lambda_1$ $(s = 1,...,N-n)$; среди них могут быть комплексно сопряженные.

Будем использовать следующие обозначения.

Если функция $f(t)$ при $t \in R^+$ удовлетворяет неравенству

$$\|f(t)\| \leq C\exp(\gamma t), \qquad C = \mathrm{const} > 0, \qquad \gamma = \mathrm{const},$$

тогда будем писать $f(t) \in e_1(\gamma)$, т. е. $f(t)$ принадлежит классу $e_1(\gamma)$.

Аналогичным образом, если функция $f_1(t,s)$, определенная на множестве $J_1 = \{(t,s) \in R^2 : 0 \leq s \leq t < +\infty\}$, удовлетворяет неравенству

$$\|f_1(t,s)\| \leq C\exp[\gamma(t-s)], \qquad C = \mathrm{const} > 0, \qquad \gamma = \mathrm{const},$$

тогда будем писать $f_1(t,s) \in e_2(\gamma)$.

Резольвента $R'(t)$ линеаризованного уравнения (1) может быть представлена в виде [34]

$$R'(t) = \sum_{i=N-n+1}^{n} P_i\exp(\lambda'_i t) + R_1(t), \qquad t \in R^+, \tag{5}$$

где p_i – постоянные матрицы и $(n \times n)$ – матрица $R_1(t) \in C^1$ такова, что $R_1(t) \in e_1(-\beta_1)$, причем $\beta_1 > 0$ – некоторая постоянная, удовлетворяющая неравенствам $-\beta < -\beta_1 < \lambda_1$.

Будем полагать, что при некотором $\beta' \geq \beta_1$ для представления (5) справедливо

$$\frac{dR_1(t)}{dt} \in e_1(-\beta'). \tag{6}$$

Проведем ряд преобразований, позволяющих выделить критические переменные и привести линейную часть уравнения (1) к виду дифференциального уравнения с постоянной диагональной матрицей. Пусть $X'(t)$ - фундаментальная матрица линеаризованного уравнения (1), нормальная в смысле Ляпунова. Пусть $x'_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ - фундаментальные решения. Тогда имеем $n-2$ решения с характеристическими показателями $\chi(x'_j(t)) = \lambda_j < 0$ $(j = 1,...,n-2)$ и 2 решения вида

$$\begin{aligned} x'_{n-1}(t) &= u\cos\omega t - v\sin\omega t + x''_{n-1}(t), \\ x'_n(t) &= v\cos\omega t + u\sin\omega t + x''_n(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где u, v – вещественные постоянные векторы и $\chi(x''_k(t)) \leq \lambda_{n-2}$ $(k = n-1, n)$.

Введем в рассмотрение матрицу $Y'(t) = (y'_{ij}(t))$ такую, что $Y'(t)X'(t) = E_n$. Линеаризованное уравнение (1) в рассматриваемом случае является правильным, и для строк матрицы $Y'(t)$ имеем соотношение $\chi(y'_{i1}(t),...,y'_{in}(t)) = \lambda_i$ $(i = 1,...,n)$. При выполнении определенных условий невырожденности [33] сделаем преобразование переменных

$$\begin{aligned} y' &= \exp(\Lambda'_2 t)Y'_2(t)x', \qquad y_k = \sum_{j=1}^{n} y'_{kj}(t)x_j, \quad k = n-1, n, \\ x' &= \mathrm{col}(x_1,...,x_{n-2}), \qquad \Lambda'_2 = \mathrm{diag}(\lambda'_{N-n+1},...,\lambda'_{N-2}), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\lambda'_{N-n+l} = \lambda_l, \qquad l = 1, ..., n-2.$$

В соотношении (8) $Y_2'(t)$ – матрица, такая, что $Y_2'(t)X_2'(t) = E_{n-2}$, где $X_2'(t)$ матрица, которая получена из матрицы $X'(t)$ вычеркиванием двух последних строк и столбцов.

Перейдем далее к комплексно сопряженным критическим переменным $w = \operatorname{col}(w_{n-1}, w_n)$, полагая

$$w_{n-1} = y_{n-1} + \mathrm{i}\, y_n, \quad w_n = y_{n-1} - \mathrm{i}\, y_n. \tag{9}$$

В результате преобразования (7) — (9) на основании Леммы 1 из [29] получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dt} &= \Lambda_2' y' + \exp(\Lambda_2' t)\int\limits_0^t \varphi(t,s)\Theta(y'(s), w(s), \hat{y}(s), s)ds + \\ &+ Y_2'(t)\Theta(y', w, \hat{y}, t), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_k}{dt} &= \int\limits_0^t \sum_{j=1}^n (\varphi_{n-1j}(t,s) \pm \mathrm{i}\,\varphi_{nj}(t,s))F_j'(y'(s), w(s), \hat{y}(s), s)ds + \\ &+ \sum_{j=1}^n (y'_{n-1j}(t) \pm \mathrm{i}\, y'_{nj}(t))F_j'(y', w, \hat{y}, t), \qquad k = n-1, n, \end{aligned} \tag{11}$$

в которых $\hat{y}(t)$ – интеграл (2), преобразованный к переменным y', w, функции F_j' – преобразованные к этим переменным компоненты вектор-функции F, компоненты вектора Θ являются суммой линейных членов по w, линейных по w интегральных членов и вектора $F' = \operatorname{col}(F_1', ..., F_{n-2}')$. Верхний знак в (11) соответствует $k = n-1$. В уравнениях (10), (11)

$$\begin{aligned} \varphi(t,s) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(Y_2'(t)X_2(t-s)\right), \\ \varphi_{kj}(t,s) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^n y'_{ki}(t)x_{ij}(t-s)\right), \quad k = n-1, n, \end{aligned} \tag{12}$$

где $X(t) = (x_{ij}(t))$ – фундаментальная матрица линеаризованного уравнения такая, что $X(0) = E_n$ и $X_2(t)$ – матрица, получаемая из $X(t)$ вычеркиванием двух последних столбцов и строк.

Уравнения (11) являются комплексно сопряженными. Можно показать, что интегральные ядра (12) принадлежат классу $e_2(-\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$. Такими же будут все интегральные ядра в правых частях уравнений (10), (11). Все коэффициенты $\xi(t)$ в правых частях этих уравнений при членах, зависящих только от некритических переменных и не стоящих под знаком интеграла, обладают следующей структурой:

$$\xi(t) = \xi_0 + \xi_1(t), \quad \xi_0 = \mathrm{const}, \quad \xi_1(t) \in e_1(-\gamma), \quad \gamma > 0. \tag{13}$$

Далее серией преобразований, включающих замены переменных с интегральными членами, проводится упрощение правых частей уравнений (10), (11) с целью выявления постоянной, определяющей свойство устойчивости, и исключения из некритической подсистемы ряда членов, зависящих только от критических переменных до некоторого конечного порядка.

Обозначая новую некритическую переменную через u, запишем преобразованное уравнение (10) в виде

$$\frac{du}{dt} = \Lambda_2' u + U(u, w, t), \tag{14}$$

где интегральный оператор U таков, что $U(0,\varepsilon w,t)$ имеет разложение по ε, начинающееся с членов некоторого порядка $\nu+1$, и интегральные члены в $U(\varepsilon u,\varepsilon w,t)$, линейные по u, начинаются с членов порядка ν_1+1 по ε.

Уравнения (11) приводятся к виду

$$\frac{dw_j}{dt}=\sum_{p=2}^{2m+1}G_j^{(p)}(w,t)\exp(\pm\,\mathrm{i}\,\omega\,t)+\Phi_j(u,w,t),\quad j=n-1,n,\tag{15}$$

где верхний знак отвечает $n-1$ и нижний знак – n. Интегральные операторы $\Phi_j(u,w,t)$ таковы, что разложения по ε для $\Phi_j(\varepsilon u,\varepsilon w,t)$ начинаются с членов второго порядка по ε и все члены до порядка $2m+1$ включительно обращаются в 0 при $u=0$. В силу свойств исходного уравнения и сделанных предположений функции $G_j^{(p)}(w,t)$ (15) являются однородными полиномами по w_{n-1}, w_n степени p, коэффициенты которых имеют вид $\xi_0\exp(\mathrm{i}\,\omega\,\rho t)+\xi_1(t)$, где $\xi_0=\mathrm{const}$, ρ – целое и $\xi_1(t)\in e_1(-\gamma)$ для некоторого $\gamma>0$. При этом, если $\hat G_j^{(p)}(w,t)$ – многочлен, получаемый из $G_j^{(p)}(w,t)$ отбрасыванием в коэффициентах слагаемых, экспоненциально стремящихся к нулю, то

$$\hat G_j^{(p)}(w,t)\equiv g_j^{(p)}(w_{n-1}\exp(-\,\mathrm{i}\,\omega\,t),w_n\exp(\mathrm{i}\,\omega\,t))$$

($g_j^{(p)}(z_1,z_2)$ – однородный многочлен степени p), и коэффициент при $w_{n-1}^k w_n^l$ в $\hat G_j^{(p)}(w,t)$ равен $C_j^{k,l}\exp[\mathrm{i}\,\omega(l-k)t]$ $(C_j^{k,l}=\mathrm{const})$.

Далее упростим уравнения (15) с помощью замены переменных

$$w_j'=w_j+\sum_{p=2}^{2m+1}\sum_{k+l=p}m_j^{k,l}(t)w_{n-1}^k w_n^l,\qquad j=n-1,n\tag{16}$$

с ограниченными при $t\in R^+$ коэффициентами $m_j^{k,l}(t)\in C^1$, приведя члены, стоящие под знаком суммы в уравнении (15) , к автономной форме.

Преобразование (16) позволяет исключить из уравнений (15) все члены четной степени p $(p\le 2m)$, зависящие лишь от w_{n-1},w_n. Если p нечетно, например $p=2m+1$, то заменой (16) из указанных членов исключаются все члены степени $2m+1$, кроме члена вида $h_{n-1}^{m+1,m}(t)w_{n-1}^{m+1}w_n^m(t)$ в уравнении для dw_{n-1}/dt и члена $h_n^{m,m+1}(t)w_{n-1}^m w_n^{m+1}(t)$ во втором из рассматриваемых уравнений. Коэффициенты при этих членах соответствующим выбором функций $m_j^{k,l}$ приводятся к постоянным.

В результате преобразования (16) уравнения (15) примают вид

$$\frac{dw_j'}{dt}=\sum_{k=1}^{m}C_j^{(k)}r^{2k}w_j'+\phi_j(u,w',t),\qquad j=n-1,n,\tag{17}$$

где $C_j^{(k)}=\mathrm{const}$, $r^2=w_{n-1}'w_n'$, $w'=\mathrm{col}(w_{n-1}',w_n')$, $\phi_j(u,w',t)$ – интегральный оператор, аналогичный $\Phi_j(u,w,t)$. Уравнения (17) для $j=n-1$ и $j=n$ являются комплексно сопряженными.

Используя уравнения (17) получим вещественное уравнение

$$r\frac{dr}{dt}=\sum_{k=1}^{m}g_{2k+1}r^{2k+2}+R^{(3)}(v,v',t)+R^{(2m+3)}(v,v',t),\tag{18}$$

в котором $g_{2k+1}=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{col}(v_1,...,v_{n-2})$, $v'=\mathrm{col}(v_{n-1},v_n)$ — векторы вещественных переменных, отвечающих u, w', а $R^{(3)}(v,v',t)$, $R^{(2m+3)}(v,v',t)$ – интегральные операторы такие, что $R^{(3)}(\varepsilon v, \varepsilon v', t)$ – многочлен по ε степени $2m+2$, начинающийся с членов 3–го порядка, причем $R^{(3)}(0, v', t) \equiv 0$, а разложение в ряд по ε для $R^{(2m+3)}(\varepsilon v, \varepsilon v', t)$ начинается с членов порядка $2m+3$. Все интегральные ядра в уравнении (18), также как и в уравнении (14), принадлежат классу $e_2(-\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$ и все коэффициенты при членах, зависящих только от некритических переменных и стоящих вне знаков интеграла, экспоненциально стремятся к постоянным.

Пусть в уравнении (18) $g_3 = \ldots = g_{2m-1} = 0$ и

$$g_{2m-1} > 0.$$

Постоянную g_{2m-1} будем называть постоянной Ляпунова.

Положим в уравнении (14) $\nu = 4m$, $\nu_1 = 2m+1$. Рассмотрим вещественную функцию

$$\begin{aligned} V &= r^{4m+1} - \sum_{k=1}^{s} v_k^2 - \sum_{j=1}^{2p} v_{s+j}^2 = \\ &= r^{4m+1} - \sum_{k=1}^{s} v_k^2 - \sum_{j=1}^{p} u_{s+2j-1}u_{s+2j} \\ &\ (s+2p = n-2) \end{aligned} \tag{19}$$

в области

$$D = \{(v, v') \in R^n : V > 0, \ \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < h^2\}, \qquad h = \text{const}, \tag{20}$$

которую будем рассматривать как сектор П.К. Персидского.

В области D (20) справедливы неравенства

$$|v_j| < r^{2m+\frac{1}{2}}, \quad |v_k| \le r, \quad j = 1, \ldots, n-2; \ k = n-1, n. \tag{21}$$

На основании (19), (21) так же, как в [29], можно показать, что в D выполняется неравенство

$$\frac{dr}{dt} > 0 \tag{22}$$

при некотором h. Составим производную от функции V (19) в силу уравнений (14), (18) и оценим ее в области D, учитывая, что в D выполняются неравенства (21), (22). Так, например, для интегральных членов наименьшего порядка $2m+2$ в уравнении (14), линейных по v, имеем оценку

$$\Big\| \int_0^t K'(t,s) v_j(s) w_{n-1}^k(s) w_n^l(s) ds \Big\| \le$$

$$\le C \int_0^t \exp[-\gamma(t-s)] r^{2m+k+l+\frac{1}{2}}(s) ds < \frac{C}{\gamma} r^{4m+\frac{3}{2}}(t).$$

Аналогичным образом можно оценить с помошью голоморфной функции от $r^{\frac{1}{2}}$ все интегральные члены в выражении для dV/dt. Совершив указанную процедуру, получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &> (4m+1)(g_{2m+1} - r^{\frac{1}{2}} R'_{2m+1}(r^{\frac{1}{2}})) - \\ &- 2v^T(\Lambda_2 + rR''_{2m+1}(r^{\frac{1}{2}}))v, \end{aligned}$$

в котором $\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2})$, а $R'_{2m+1}(x)$, $R''_{2m+1}(x)$ – сходящиеся степенные ряды от x с положительными коэффициентами. Следовательно, в области D выполняется неравенство $dV/dt > 0$, откуда на основании теоремы Четаева о неустойчивости [23, с. 25 ; 35, с. 24], справедливой также для траекторий, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра, вытекает неустойчивость нулевого решения.

Итак, имеем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для уравнения (1) — (3) характеристическое уравнение (4) в полуплоскости* $Re\,\lambda > -\beta$ *имеет конечное число корней* λ'_j $(j = 1, \ldots, N;\ N \geq n)$, *причем* $Re\,\lambda'_j < 0$ $(j = 1, \ldots, N-2)$ *и* $\lambda'_{N-1} = i\omega$, $\lambda'_N = -i\omega$, *и пусть все корни* λ'_k, *отвечающие характеристическим показателям* λ_s $(s = 1, \ldots, n)$, *являются простыми и* $Re\,\lambda'_i < \lambda_1$ $(i = 1, \ldots, N-n)$. *Пусть выполнены соотношение (6) и условия принадлежности преобразования (8) к преобразованиям Ляпунова.*

Тогда, если в уравнении (18) первая отличная от нуля постоянная $g_{2m+1} > 0$, *то нулевое решение уравнения (1) – (3) неустойчиво.*

Рассмотрим далее уравнение (1), (3), в котором сохраняются свойства вектор-функций $F(x, \tilde{y}, t)$, $\phi(x, t)$, но предполагается, что

$$\tilde{y} = \int\limits_0^t k'(t, s)\phi(x(s), s)ds, \tag{23}$$

где непрерывная по t, s матрица $k'(t, s)$ определена в области $J'_1 = \{(t, s) \in R^2 : 0 \leq s < t < +\infty)$ и удовлетворяет в ней неравенству

$$\|k'(t, s)\| \leq C\frac{\exp[-\beta(t-s)]}{(t-s)^{\rho_0}}, \quad C,\ \beta = \mathrm{const} > 0, \quad \rho_0 = \mathrm{const}, \quad 0 \leq \rho_0 < 1. \tag{24}$$

Функции, удовлетворяющие неравенству (24), будем считать принадлежащими классу $e'_2(\rho_0, -\beta)$. Если $\rho_0 = 0$, то этот класс, как и ранее, будем обозначать через $e_2(-\beta)$.

Будем предполагать, что интегральное ядро $K(t-s) \in e'_2(\rho_0, -\beta)$.

Отметим, что интегральные ядра с особенностями типа (24) используются в моделях нестационарной аэродинамики [1, 2], и вязкоупругости [4, 5].

Вся описанная выше процедура выявления постоянной Ляпунова может быть проведена для случая уравнения (1), (23), (24). На каждом шаге преобразований при этом будет сохраняться основное свойство получаемых новых уравнений иметь лишь интегральные ядра $\kappa(t, s) \in e'_2(\rho_0, -\gamma)$ либо $e_2(-\gamma)$ $(\gamma > 0)$ и обладать коэффициентами $\xi(t)$ при членах правой части (стоящими вне знака интеграла) такими, что для них справедливо представление (13). Оценим, например, некоторые коэффициенты, выраженные через интегралы, которые появляются в ходе проведения преобразований. Так, если $K(t-s) \in e'_2(\rho_0, -\beta)$ $(\beta > 0)$, то имеем

$$\int\limits_0^t K(t-s)ds = \int\limits_0^\infty K(s)ds - \int\limits_t^\infty K(s)ds = k_0 + k_1(t)$$

и, следовательно, это функция типа (13) с $k_1(t) \in e_1(-\beta)$.

Если $K(t, s) \in e'_2(\rho_0, -\beta)$ и $f(t) \in e_1(-\alpha)$ при $\beta > 0$, $\alpha > 0$, то получаем оценку

$$\left\|\int\limits_0^t K(t, s)f(s)ds\right\| \leq C\exp(-\alpha t)\int\limits_0^t \frac{\exp[-(\beta-\alpha)(t-s)]}{(t-s)^{\rho_0}}ds \in e_1(-\delta+\varepsilon), \tag{25}$$

где $\delta = \min(\alpha, \beta)$ и $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число, такое, что $-\delta + \varepsilon < 0$.

Рассмотрим интегральное ядро $h(t, \tau)$ вида

$$h(t,\tau) = \int\limits_0^{\tau} k(t,s)ds,$$

где $k(t, s) \in e_2'(\rho_0, -\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$. Имеем

$$\|h(t,\tau)\| \le C \int\limits_{t-\tau}^{t} \frac{\exp(-\alpha s)}{s^{\rho_0}} ds < C \int\limits_{t-\tau}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha s)}{s^{\rho_0}} ds \le C' \exp[-\alpha(t-\tau)], \tag{26}$$

где $C' > 0$ – некоторая постоянная, и поэтому $h(t, \tau) \in e_2(-\alpha)$.

Оценки, подобные (25), (26), допускают и все другие члены преобразованных уравнений, содержащие интегралы с особенностями рассматриваемого типа в интегральных ядрах.

Проводя обозначенную выше процедуру преобразования уравнения (1), (23), (24), приходим к уравнению в форме (18). Все последующие рассуждения подобны предыдущим.

Имеет место следующее утверждение, аналогичное Теореме 1.

Теорема 2. *Пусть для уравнения (1), (23) выполнены условия (24) и* $K(t-s) \in e_2'(\rho_0, -\beta)$ $(\beta > 0)$, *а также сохранены другие предположения Теоремы 1.*

Тогда нулевое решение неустойчиво.

Рассмотрим критический случай одного нулевого корня для несколько более общего уравнения.

2. Неустойчивость. Один нулевой корень. Исследуем устойчивость по Ляпунову нулевого решения интегродифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int\limits_0^t K(t-s)x(s)ds + F(x, \tilde{y}, \tilde{z}, t), \quad x, \tilde{y}, \tilde{z} \in R^n, \quad x = \mathrm{col}(x_1, ..., x_n), \tag{27}$$

в котором A– постоянная $(n \times n)$ - матрица, $(n \times n)$ - матрица $K(t)$ непрерывна при $t \in I = \{t \in R : t > 0\}$ и удовлетворяет, как и в Теореме 2, оценке

$$\|K(t)\| \le \frac{C\exp(-\beta t)}{t^{\rho_0}}, \quad C > 0,\ \beta > 0,\ 0 \le \rho_0 < 1. \tag{28}$$

Голоморфная по $x, \tilde{y}, \tilde{z}$ в некоторой окрестности нуля и непрерывная ограниченная по $t \in I$ функция $F(x, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ обладает теми же свойствами, что и аналогичная функция в уравнении (1), и, следовательно, коэффициенты разложения в степенной ряд экспоненциально стремятся при $t \to +\infty$ к постоянным или сами постоянны. Переменная $\tilde{y}$ имеет интегральное представление (23), а $\tilde{z}$ – аналитический функционал, заданный рядом Фреше

$$\tilde{z}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j(k)=1}^{n} \int\limits_0^t ... \int\limits_0^t K^{j(k)}(t-s_1, ..., t-s_k) x_{j_1}(s_1)...x_{j_k}(s_k) ds_1..., ds_k. \tag{29}$$

Здесь $j(k)$ обозначает набор индексов $j_1, ..., j_k$. Непрерывная вектор-функция $K^{j(k)}(s_1, ..., s_k)$ задана на множестве $I_k' = \{(s_1, ..., s_k) \in R^k : 0 < s_j < +\infty,\ j = 1, ..., k\}$ и удовлетворяет оценке

$$\|K^{j(k)}(s_1, ..., s_k)\| \le C \frac{\exp(-\beta_1 s_1 - ... - \beta_k s_k)}{(s_1 ... s_k)^{\rho}} \tag{30}$$

где $C > 0$, ρ, β_i $(i = 1, ..., k)$, – постоянные, причем $0 \le \rho < 1$, и существует не зависящее от k число β_0, такое, что $0 < \beta_0 \le \beta_i$. Если в неравенстве (30) $\beta_1 = ... = \beta_k = \beta_0$, то будем отмечать это свойство как $K^{j(k)}(s_1, ..., s_k) \in e'_{k+1}(\rho, -\beta_0)$.

Матрица-функция $k'(t, s)$ в соотношении (23) подчинена неравенству (24).

Будем предполагать, что характеристическое уравнение (4) имеет в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -\beta$ конечное число корней λ'_j $(j = 1, ..., L,\ L \ge n)$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей, причем

$$\operatorname{Re}\lambda'_1 \le \operatorname{Re}\lambda'_2 \le ... \le \operatorname{Re}\lambda'_{L-1} < \lambda'_L = 0 \tag{31}$$

т.е. имеет место критический случай одного нулевого корня.

Будем считать корни λ'_{L-k} $(k = 1, ..., n-1)$ простыми (среди них могут быть комплексно сопряженные).

Приводимый ниже результат [33] (Теорема 3) обобщает соответствующее утверждение работы [29] на случай интегральных ядер с особенностями типа (24), (30) и функцией $F(x, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$, зависящей от функционалов $\tilde{y}, \tilde{z}$.

Для резольвенты линеаризованного уравнения справедливо представление (5), и будем считать, как и ранее, что выполнено условие (6).

Следуя описанной в разд. 1 схеме исследования, проведем преобразование, выделяющее критическую переменную, для чего по фундаментальной матрице решений $X'(t)$ (нормальной в смысле Ляпунова) введем матрицу $Y'(t) = (y'_{ij}(t))$ $(Y'(t)X'(t) = E_n)$, а также матрицу $Y'_1(t)$ $(Y'_1(t)X'_1(t) = E_{n-1})$, где матрица $X'_1(t)$ получается из $X'(t)$ вычеркиванием n-ой строки и n-го столбца.

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} &z' = \exp(\Lambda'_1 t)Y'_1(t)x', \qquad && z' = \operatorname{col}(z_1, ..., z_{n-1}), \\ &x' = \operatorname{col}(x_1, ..., x_{n-1}), \qquad && \Lambda'_1 = \operatorname{diag}(\lambda'_{L-n+1}, ..., \lambda'_{L-1}), \end{aligned} \tag{32}$$

выделяя некритическую подсистему и приводя ее линейную часть к диагональной форме, и определяем критическую переменную

$$z_n = \sum_{j=1}^{n} y'_{nj}(t)x_j. \tag{33}$$

При этом предполагаются выполненными определенные стандартные условия невырожденности [33] преобразований (32), (33). В результате получается система следующего типа:

$$\frac{dz_n}{dt} = Z_n(z, z_n, t), \tag{34}$$

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda'_1 z + \Phi'(z, z_n, t), \tag{35}$$

которая является аналогом системы (10), (11).

Уравнения (34), (35) содержат интегральные члены с интегральными ядрами, удовлетворяющими только оценкам типа (24), (30). Коэффициенты разложений в степенные ряды по z_i $(i = 1, ..., n)$ для неинтегральных членов в правых частях уравнений (34), (35) имеют структуру (13).

Процедура дальнейших преобразований уравнений (34), (35) такая же, как в разд. 1.

Для определения постоянной Ляпунова интегральные члены в уравнении (34), зависящие только от критической переменной, интегрированием по частям преобразуются последовательно, начиная с наинисшей степени, до некоторого порядка k. Например, для члена второго порядка ряда Фреше с интегральным ядром $K^{n,n}(t-s_1,t-s_2)\in e_3'(\rho,-\beta_0)\quad(\beta_0>0)$ получаем

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^t K^{n,n}(t-s_1,t-s_2)z_n(s_1)z_n(s_2)ds_1ds_2=$$

$$=\int\limits_0^t[z_n(t)\int\limits_0^t K^{n,n}(t-s_1,t-s_2)ds_1-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_1} K^{n,n}(t-\tau,t-s_2)d\tau Z_n(z(s_1),z_n(s_1),s_1)ds_1]z_n(s_2)ds_2=$$

$$=k^{n,n}(t)z_n^2(t)+\dots\ ,$$

причем многоточие обозначает члены более второго порядка. Коэффициент $k^{n,n}(t)$ дается выражением

$$k^{n,n}(t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^t K^{n,n}(s_1,s_2)ds_1ds_2=k_0^{n,n}+k_1^{n,n}(t),\quad k_0^{n,n}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K^{n,n}(s_1,s_2)ds_1ds_2,$$

где $k_0^{n,n}$ – постоянная и $k_1^{n,n}(t)\in e_1(-\alpha)$ для некоторого $\alpha>0$. Экспоненциально стремящиеся к нулю члены в коэффициентах не влияют на постоянную Ляпунова и дальнейшими преобразованиями исключаются.

Последующие упрощения некритической подсистемы и уравнения для критической переменной, идейно такие же, как в предыдущем разделе, приводят к уравнению

$$\frac{du_n}{dt}=g_pu_n^p+U_n^{(2)}(u,u_n,t)+U_n^{(p+1)}(u,u_n,t),\tag{36}$$

в котором u_n,u – новые критическая и некритическая переменные, $U_n^{(2)},\ U_n^{(p+1)}$ – интегральные операторы, такие, что $U_n^{(2)}(0,u_n,t)\equiv0$, $U_n^{(2)}(\varepsilon u,\varepsilon u_n,t)$ – многочлен по ε степени p без свободного и линейного членов, а разложение по ε для $U_n^{(p+1)}(\varepsilon u,\varepsilon u_n,t)$ начинается с члена, содержащего ε^{p+1}.

Так же, как в [29] строится функция Четаева, выделяющая сектор, в котором траектория уходит от начала, и доказывается следующее утверждение [33].

Теорема 3. *Пусть характеристическое уравнение (4) для уравнения (27) – (29), (23) имеет в комплексной полуплоскости* $Re\,\lambda>-\beta$ *конечное число корней* λ_j' $(j=1,...,L)$, *причем* $\lambda_L'=0$, *справедливы неравенства (31), корни* λ_{L-k}' $(k=1,...,n)$ *являются простыми. Пусть выполнены условия (24), (30), (6) и условия невырожденности [33] преобразования (32), (33).*

Пусть в уравнении (36) постоянная $g_p\neq0\quad(g_s=0,\ s=2,...,p-1)$ *при* p *четном или* $g_p>0$ *при* p *нечетном.*

Тогда нулевое решение уравнения (27), (23), (29) неустойчиво.

В следующем разделе исследуется вопрос об асимптотической устойчивости в указанных критических случаях для интегродифференциальных уравнений с ядрами экспоненциально-полиномиального типа.

3 Асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим класс уравнений (1) с функцией $F(x,t)$ в правой части и интегральным ядром $K(t)$, имеющим экспоненциально-полиномиальную структуру

$$K(t) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=0}^{l} Q^{(s,p)} t^p \exp(\beta_s t), \tag{37}$$

где $Q^{(s,p)}$ – $(n \times n)$ – постоянные матрицы, $\beta_s = \text{const}$. Функция $F(x,t)$ обладает теми же свойствами, что и функция $F(x,\tilde{y},t)$ по переменным x,t в уравнении (1). Исследуем устойчивость в критическом случае пары чисто мнимых корней при условии, что постоянная Ляпунова $g_{2m+1} < 0$. Если справедливо представление (37), то характеристическое уравнение приводится к полиномиальному виду и имеет конечное число корней. Пусть корни этого уравнения обладают такими же свойствами, как в теореме 1.

Будем считать, что выполнены условие (3) и условия, которые позволяют провести преобразование (8), (9), выделяющее критические переменные w_{n-1}, w_n ($y' \in R^{n-2}$ – некритическая переменная), и представим уравнение (1) в форме (10), (11), где функции Θ, F_j $(j = 1, ..., n-2)$ не зависят от аргумента $\tilde{y}$ и обладают всеми указанными для них свойствами.

Все интегральные ядра в уравнениях (10), (11) – убывающего типа и принадлежат к классу $e_2(-\gamma)$ $(\gamma > 0)$.

Общее решение уравнения (1), (37) имеет структуру решения дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, и поэтому все интегральные ядра в уравнениях (10), (11) в данном случае относятся к экспоненциально-полиномиальному типу. Это позволяет исключить интегральные члены введением дополнительных переменных с помощью замен вида

$$u_{ps} = \int_0^t (t-s)^p \exp[-\alpha_s(t-s)]\Phi(y'(s), w(s), s)ds, \tag{38}$$

где $p > 0$ – целое, $\alpha_s = \text{const} > 0$, $\Phi(y', w, t)$ — некоторая функция в интегральных членах уравнений (10), (11). Интегральные члены с тригонометрическими функциями типа $t^p \exp(-\alpha' t)\cdot$ $\cdot \sin(\Omega(t-\tau))$, $\alpha' > 0, \Omega = \text{const} > 0$ исключим введением переменных

$$u' = \int_0^t \exp[(-\alpha_0 + \mathrm{i}\,\Omega)(t-\tau)] \exp(-\alpha_0 \tau)\Phi(y'(\tau), w(\tau), \tau)d\tau \tag{39}$$

$(0 < \alpha_0 < \alpha')$, относя функции вида $t^p \exp[-(\alpha' - \alpha_0)t]$ к коэффициенту при данном интегральном члене. Переменной (39) будет отвечать комплексно сопряженная переменная $\bar{u}'$. Замена (38) порождает систему уравнений

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{du_{ps}}{dt} & = & p u_{p-1s} - \alpha_s u_{ps}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du_{0s}}{dt} & = & -\alpha_s u_{0s} + \Phi(y', w, t), \end{array} \tag{40}$$

а замена (38) дает уравнение

$$\frac{du'}{dt} = (-\alpha_0 + \mathrm{i}\,\Omega)u' + \exp(-\alpha_0 t)\Phi(y', w, t). \tag{41}$$

Исключим с помощью замен типа (38), (39) из уравнений (10), (11) интегральные члены во всех членах, порядок которых (по ε) более $2m+1$. При этом будем под Φ подразумевать члены в $F_j^{'}$, имеющие порядок, не меньший $2m+2$. Появившиеся в результате преобразований интегральные члены вида

$$\int_0^t K_p^{(l_p)}(t,s_p)u_1^{l_{p1}}(s_p)...u_n^{l_{pn}}(s_p)\int_0^{s_p} K_{p-1}^{(l_{p-1})}(s_p,s_{p-1})u_1^{l_{p-11}}(s_{p-1})\cdot$$
$$\cdot u_n^{l_{p-1n}}(s_{p-1})\int_0^{s_{p-1}}...ds_1...ds_p$$

исключаются последовательными заменами, начиная с внутреннего интеграла, для чего вводятся переменные

$$\begin{array}{rcl} u_{l_1}^{(r_1)}(s_2) & = & \int\limits_0^{s_2}(s_2-s_1)^{r_1}\exp[-\alpha(s_2-s_1)]u_1^{l_{11}}(s_1)... \\ & ... & u_n^{l_{1n}}(s_1)ds_1 \\ u_{l_1 l_2}^{(r_1,r_2)}(s_3) & = & \int\limits_0^{s_3}(s_3-s_2)^{r_2}\exp[-\alpha'(s_3-s_2)]\zeta_{l_1}^{(r_1)}(s_2)\times \\ & \times & u_1^{l_{21}}(s_2)...u_n^{l_{2n}}(s_2)u_{l_1}^{(r_1)}(s_2)ds_2, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,} \end{array} \tag{42}$$

где $\alpha,\alpha',...$ – положительные постоянные, l_p – набор индексов $l_{p1},...,l_{pn}$, $\zeta_{l_1}^{(r_1)}(s_2)$ – функция, которая появляется как часть ядра $K_1^{(l_1)}(s_1,s_2)$. Отметим, что вводится конечное число новых переменных, связанных группами уравнений вида (40), (41).

Переобозначим все вновь введенные переменные типа (38), (39), (42) как $v=\mathrm{col}(v_1,...,v_M)$ и представим систему (10), (11) после проведенных дальнейших преобразований $y'\to w'=\mathrm{col}(w_1,...,w_{n-2})$, в форме дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dw_j}{dt} & = & G_{2m+1}^{(j)}w_j(w_{n-1}w_n)^{2m}+\sum\limits_{i=1}^{M}\rho_j^{(i)}(t)v_i+\Phi_j(w',w,v,t), \\ \dfrac{dw'}{dt} & = & \Lambda_2'w'+\rho(t)v+\sum\limits_{k=n-1,n}q_k^{''}(t)w'w_k+\Phi^{(2)}(w',v,t)+\Phi^{(3)}(w',w,v,t), \end{array} \tag{43}$$

где $G_{2m+1}^{(j)}=\mathrm{const},\ j=n-1,n$ и все функции от t – непрерывны и ограничены при $t\in R^+$. В (43) $\Phi_j,\Phi^{(2)},\Phi^{(3)}$ – функции, обладающие специальными свойствами, которые следуют из свойств интегральных операторов, фигурирующих в разд. 1.1.

Далее проводится автономизация уравнений (43) и уравнения для переменной v до членов порядка $2m+1$ включительно с помощью замены переменных $w',w,v\to\tilde w',\tilde w,\tilde v$ (тождественной в линейном приближении) в форме многочленов от указанных переменных с непрерывными ограниченными при $t\in R^+$ коэффициентами. Это преобразование не изменяет первую отличную от нуля постоянную g_{2m+1}.

Перейдем от переменных $\tilde w'=\mathrm{col}(\tilde w_1',...,\tilde w_{n-2}')$, $\tilde w=\mathrm{col}(\tilde w_{n-1},\tilde w_n)$, $\tilde v=\mathrm{col}(\tilde v_1,...,\tilde v_M)$ к вещественным переменным $w^*=\mathrm{col}(w_1^*,...,w_{n-2}^*)$, w_j^*, v_k^* $(j=n-1,n;\ k=1,...,M)$ и введем новые переменные $r,\ \phi,w_i^{''},\ v_k^{''}$ $(i=1,...,n-2)$ по формулам

$$\begin{array}{l} w_i^*=rw_i^{''},\qquad v_k^*=rv_k^{''}, \\ w_{n-1}^*=r\cos\varphi,\quad w_n^*=r\sin\varphi,\quad r^2=\tilde w_{n-1}\tilde w_n. \end{array} \tag{44}$$

Замену (44) следует понимать в том смысле, на который указал Н.Н. Красовский [37 с. 529].

В результате получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= g_{2m+1}r^{2m+1} + \sum_{s=1}^{M} r v_s^{''}(\rho_1^{(s)}\sin\varphi + \rho_2^{(s)}\cos\varphi) + \\
&+ \Phi_{n-1}^{*}(rw^{''}, rv^{''}, r, \varphi, t)\sin\varphi + \Phi_n^{*}(rw^{''}, rv^{''}, r, \varphi, t)\cos\varphi, \\
\frac{dw^{''}}{dt} &= \Lambda_2^{*}w + \rho^{*}v^{''} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}w^{''} + \sum_{k=n-1,n} q_k^{*} r w_k^{''} w^{''} + \\
&+ \frac{1}{r}\Phi^{(2)*}(rw^{''}, rv^{''}) + \frac{1}{r}\Phi^{(3)*}(rw^{''}, rv^{''}, \varphi, t)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

с голоморфными относительно переменных r, $w^{''} = \mathrm{col}(w_1^{''}, ..., w_n^{''})$, $v'' = \mathrm{col}(v_1^{''}, ..., v_M^{''})$ правыми частями, периодическими по φ с непрерывными ограниченными по $t \in R^{+}$ функциями. В (45) знак * означает, что соответствующая функция преобразована в результате перехода к вещественным переменным.

К системе (45) следует присоединить уравнение, отвечающее дополнительным переменным, с правой частью того же типа, что и в (45), и постоянной матрицей линейной части с отрицательными собственными значениями.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$
V = r + V'(w^{''}, v^{''}), \tag{46}
$$

где $V'(w^{''}, v^{''})$ — положительно определенная квадратичная форма, определяемая на основании теоремы Ляпунова [26 с.76] согласно уравнению $dV'/dt = -w^{''T}w^{''} - v^{''T}v^{''}$, в котором производная берется в силу линеаризованных уравнений для некритических переменных и переменной $v^{''}$.

Функция V (46) положительно определена по $w^{''}, v^{''}, r \geq 0$ и ее производная в силу полных уравнений при $g_{2m+1} < 0$ отрицательно определена по $w^{''}, v^{''}, r \geq 0$. Нулевое решение будет асимптотически устойчиво по $r, w^{''}, v^{''}$ и, следовательно, нулевое решение уравнения (1), (37) асимптотически устойчиво по x.

Теорема 4. *Пусть для уравнения (1), (37) с голоморфной по x функцией $F(x,t)$ и непрерывными по $t \in R^{+}$ экспоненциально стремящимися к постоянным (или постоянными) коэффициентами в критическом случае пары чисто мнимых корней выполнено условие $g_{2m+1} < 0$ для первой отличной от нуля постоянной в уравнении (18) и справедливы все другие предположения Теоремы 1, относящиеся именно к этому уравнению.*

Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво.

Можно показать, что в критическом случае одного нулевого корня для уравнения (1), (37) имеет место утверждение, аналогичное Теореме 4, т.е. при выполнении соответствующих условий невырожденности, если первая отличная от 0 постоянная преобразованного уравнения для критической переменной $g_{2m+1} < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво. Более подробно результаты, относящиеся к асимптотической устойчивости, отражены в работе [37].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196) и программы Ведущие научные школы (НШ-2000.2003.1).

Цитированная литература

1. **Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.** Крыло в нестационарном потоке газа. М., 1971.

2. **Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В.** Введение в аэроавтоупругость. М., 1980.

3. **Астапов И.С., Белоцерковский С.М., Морозов В.И.** // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С.61–70.

4. **Работнов Ю.Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.

5. **Ильюшин А,А., Победря Б.Е.** Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1979.

6. **Арутюнян Н.Х., ДроздовА.Д., Наумов В.Э.** Механика растущих вязкоупругопластических тел. М., 1987.

7. **Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.** Теория ползучести неоднородных тел. М., 1983.

8. **Volterra V.** // Acta Math. 1912. 35, N4. P. 295–354.

9. **Volterra V.** Leconcs sur les équations integrales et les équations integro-differentielles, professes à la faculté des sciences de Rome en 1910. Paris, 1913.

10. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М., 1982.

11. **Fréchet M.** // Ann. de l'École Normale Sup. Sér. 3. 1910. V. 97. P.193–216.

12. **Быков Я.В.** О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1957.

13. **Быков Я.В.** // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе, Вып. 1. С.3-54.

14. **Филатов А.Н.** Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, 1971.

15. **Филатов А.Н.** Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, 1974.

16. **Burton T.A.** Volterra integral and differential equations. N.-Y., 1983.

17. **Burton T.A.** Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Orlando, 1985.

18. **Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.** Applied theory of functional differential equations. Dordrecht/Boston/London. 1992.

19. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.

20. **Иманалиев М.И., Хведелидзе Б.В., Гегелия Т.Г., Бабиев А.А., Боташев А.И.** // Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, № 12. С.2050–2069.

21. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т.2. М.-Л., 1956.

22. **Румянцев В.В.** // Механика в СССР за 50 лет. М., 1968. С.7–66.

23. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

24. **Веретенников** Устойчивость и колебания нелинейных систем. М., 1984.

25. **Куницын А.Л., Маркеев А.П.** // Итоги науки и техники. Общая механика. Т.4. М., 1979. С.58–139.

26. **Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.** Устойчивость критических положений равновесия. Пущино, 1985.

27. **Сергеев В.С.** // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 5. С.166–174.

28. **Сергеев В.С.** // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 5. С.744–751.

29. **Сергеев В.С.** //Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, № 8. С.1443–1454.

30. **Сергеев В.С.** // ПММ. 1998. Т. 62, вып.1. С.79–86.

31. **Сергеев В.С.** // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М., 1988. С.67–81.

32. **Сергеев В.С.** // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М., 1987. С.34–53.

33. **Сергеев В.С.** // ПММ. 2002. Т. 66, вып. 6. С.968–978.

34. **Jordan J.S., Wheeler R.L.** // SIAM Jornal Math. Anal. Vol. 11. № 1. P. 119–132.

35. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., 1962.

36. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М., 1966.

37. **Сергеев В.С.** // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М., 1999. С.11–32.

Поступила в редакцию 10.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 106 –113*

УДК 51(07),372.8051

РАЗВИТИЕ ИДЕЙ К.П. ПЕРСИДСКОГО В СПЕЦИАЛЬНОМ КУРСЕ "ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ", ЧИТАЕМОГО СТУДЕНТАМ КАЗНУ им. АЛЬ-ФАРАБИ

Ж. С. Сулейменов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
г.Алматы, пр.аль-Фараби, 71

В работе излагается методика чтения спецкурса “Теория устойчивости”, содержание которого базируется на классических результатах основоположников этой теории, в том числе К.П. Персидского. Приводятся также результаты казахстанских математиков, развивающих идеи К.П. Персидского.

Теория устойчивости движения является одним из основных прикладных разделов высшей математики, где органически сплелись теория дифференциальных уравнений и теоретическая механика. Она имеет широкое применение в различных областях техники, физики, биологии и т.д.. Спецкурс “Теория устойчивости” является естественным продолжением курса обыкновенных дифференциальных уравнений и дает основу знаний для качественного исследования решений дифференциальных уравнений.

Целью курса является пополнение и закрепление знаний студентов по общей теории дифференциальных уравнений и подготовка к решению прикладных задач, требующих качественное исследование.

В результате изучения курса студенты:
а) имеют представление о современном состоянии и направлении развития теории устойчивости, различных видах (в целом, абсолютной, технической и др.) устойчивости, об устойчивости в критических случаях, о построении функции Ляпунова для некоторых нелинейных систем;
б) знают условия устойчивости линейных систем (с постоянными, периодическими и переменными коэффициентами), основные теоремы Ляпунова в его втором методе, устойчивость по первому приближению, теоремы Четаева Н.Г., Персидского К.П., Малкина И.Г. и др. по развитию второго метода Ляпунова;
в) приобретают навыки изучения научных литератур (монографий и журнальных статей) по теории устойчивости, умение использовать знания в выполнении курсовых и выпускных работ, выбирать методы исследования устойчивости решений конкретных задач.

Проблемы устойчивости движения возникли впервые в механике при изучении положения равновесия системы. Простое наблюдение показывает, что некоторые положения равновесия

Keywords: *stability theory, Lyapunov stability,*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D20, 34D23

системы устойчивы к небольшим возмущениям, а другие, даже принципиально возможные положения равновесия практически не могут быть реализованы. Так, например, если маятник занимает нижнее положение, то небольшие возмущения могут вызвать только его колебания. Если же после некоторых усилий удастся установить маятник в верхнем положении, то малейший толчок вызовет его падение. Конечно, в данном примере вопрос об устойчивости решается элементарно, но в общем случае выяснение устойчивости положения является делом не так уж легким.

Теория устойчивости создавалась многими математиками, механиками, физиками. Фундаментальные результаты в ней принадлежат А.М. Ляпунову [1].

В спецкурсе, читаемом для студентов 3-го курса механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби по специальности “математика”, изучается в основном устойчивость решений нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f \in C^{(0;1)}_{t,x}(D)$, $D \subset R^{n+1}$, $f = (f_1, ..., f_n)$.

При допущенных условиях через любую точку открытой области D проходит единственное решение системы (1); это решение на конечном промежутке будет непрерывной функцией начальных данных. Непрерывная зависимость решения от его начального значения на бесконечном промежутке изменения переменной t есть и устойчивость этого решения.

Обычно считая, что $f(t, 0) = 0$, изучают устойчивость тривиального решения (т.е.$x = 0$) в области

$$D = \{(t, x) \in R^{n+1} : \forall t \geq t_0 \geq 0, \, \|x\| \leq h\}, \tag{2}$$

где $h > 0$ — известное число.

Решение $x = x(t)$ можно рассматривать в R^n_x, принимая t в качестве параметра. Тогда оно определяет в R^n_x траекторию, а решение $x_0(t) = 0$ будет точкой покоя (положением равновесия), его устойчивость будет устойчивостью положения равновесия (t-параметр).

В качестве примера можно рассматривать устойчивость или неустойчивость положения равновесия линейной автономной системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где a_{jk} — действительные числа, $j, k = 1, 2$, $|A| \neq 0$.

Единственным положением равновесия является начало координат $(0; 0)$, и его устойчивость легко исследуется.

1. Устойчивый узел, устойчивый фокус — асимптотически устойчивые положения равновесия.

2. Центр — устойчивое по Ляпунову, но не асимптотически устойчивое положение равновесия.

3. Седло, неустойчивый узел, неустойчивый фокус — неустойчивые положения равновесия.

Спецкурс начинается с рассмотрения задач, относящихся к теории устойчивости и со строгих математических изложений определений простой и асимптотической устойчивостей и неустойчивости. Отсутствие таких определений до Ляпунова часто приводило к недоразумениям, так как движение устойчивое в одном смысле, могло оказаться неустойчивым в другом понимании этих слов и наоборот. Понятие равномерной устойчивости было введено К.П. Персидским [2] и почти все фундаментальные теоремы о равномерной устойчивости доказаны им.

Важное значение теория устойчивости движения имеет для техники. Корабль, самолет, ракета, спутник при своем движении должны устойчиво сохранять заданный курс или траекторию. Турбины, генераторы должны устойчиво сохранять заданный режим работы и т.д.

В спецкурсе излагаются основные классические результаты по теории устойчивости, принадлежащие самому А.М. Ляпунову и его последователям Н.Г. Четаеву, К.П. Персидскому, И.Г. Малкину, Г.В. Каменькову, Е.А. Барбашину, Н.Н. Красовскому, Я. Курцвейлю, И. Вркочу, В.И. Зубову, И.Л. Массера, В.М. Матросову и др.. Значительное место в спецкурсе занимают результаты К.П. Персидского и его учеников.

При исследовании на устойчивость нулевого решения нелинейной системы (1) до Ляпунова исследователи ограничивались рассмотрением линейной по x части функции $f(t,x)$, когда нелинейный остаток имел более высокий порядок малости:

$$f(t,x) = A(t)x + g(t,x), \quad \|g(t,x)\| \le \gamma(\|x\|) \cdot \|x\|, \tag{3}$$

где $A(t)$ - матрица, $x = colon(x_1, ...x_n)$, а $g(0,0) = 0$ и $\gamma(\|x\|) \rightrightarrows 0$ при $\|x\| \to 0$. Но не всегда устойчивость линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4}$$

дает устойчивость нулевого решения системы (1) с $g(t,x)$, удовлетворяющей условию (3). В так называемых "критических случаях" для выяснения устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо привлечь к исследованию и функцию $g(t,x)$. Устойчивость или неустойчивость нулевого решения нелинейной системы (1) с малой нелинейностью $g(t,x)$ (в окрестности $x = 0$ функция $g(t,x)$ имеет более высокий, чем первый, порядок малости), определяемая только с помощью системы (4), называется устойчивостью или неустойчивостью по первому приближению, сама система (4) называется системой первого или линейного приближения. Необоснованная замена нелинейной системы (1) с ее линейным приближением приводили к ошибочным, порой даже парадоксальным выводам. Так было, например, при изучении устойчивости грушевидной фигуры равновесия, центробежных регуляторов паровых машин.

Заслуга в строго математической постановке вопроса об устойчивости по первому приближению и в определении условий, когда для выяснения устойчивости или неустойчивости достаточно рассмотрение системы первого приближения принадлежит А.М. Ляпунову. В спецкурсе излагается его знаменитая теорема об устойчивости по первому приближению.

Устойчивость по первому приближению была развита в работах К.П. Персидского. Ему принадлежит не менее знаменитая теорема о равномерной устойчивости по первому приближению [3], [6].

Теорема. Для равномерной устойчивости нулевого решения нелинейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{5}$$

где $A(t)$ — непрерывная на R_0^+ матрица, $f(t,x)$ — любая нелинейная функция $f \in C_{t,x}^{(0,1)}(D)$, $f(t,0) = 0$, удовлетворяющая условию малости

$$\|f(t,x)\| \le \gamma(\|x\|)\|x\|, \quad \gamma(\|x\|) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \to 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы решение системы первого приближения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

определяемое условием $y(t_0) = y_0$, где (t_0, y_0) — любая точка области D из (2), удовлетворяло неравенству

$$\|y(t, t_0, y_0)\| \le B\|y_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \ \ \forall t \ge t_0, \tag{6}$$

числа $B \ge 1$ и $\alpha > 0$ не зависят от t_0 и y_0. При этом выполнение условия (6) достаточно и для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5).

Условия этой теоремы до сих остаются критерием равномерной устойчивости по первому приближению. Доказательство этой глубокой теоремы изобилует непростыми выкладками и переходами из одного условия к другому. Поэтому до сих пор оно не изложено в существующих учебниках по теории устойчивости, а приводится (если необходимо на нее ссылаться) только формулировка теоремы. Только в учебном пособии [7] впервые в учебной литературе приведено достаточно полное доказательство в компактной, векторной форме записи.

Следует отметить, что впервые в математической науке в исследованиях нелинейной дифференциальной системы вида (1) применен К.П. Персидским метод перехода от дифференциальной системы к интегральной, представленной посредством решения линейной системы (4). Т.е. вместо системы (1) рассматривается система

$$x(t,t_0,x_0)=y(t,t_0,x_0)+\int\limits_{t_0}^{t} y(t,\tau,f(\tau,t_0,x_0))d\tau.$$

Исследования устойчивости по первому приближению вели ученики К.П.Персидского — Ш.М.Еникееев, М.Р.Решетов и др.

Для решения задачи устойчивости Ляпунов разработал специальные приемы, которые он сгруппировал в два метода: первый и второй.

Первый метод основан на определении показателя роста или убывания решения и рассмотрении свойств решений при различных операциях над ними с точки зрения этой характеристики. Исследования, проведенные в этом направлении, привели к появлению так называемой теории показателей Ляпунова.

Второй метод основан на использовании некоторых функций (называемых функциями Ляпунова), обладающих вместе со своей полной производной, найденной на основании системы (1), некоторыми свойствами. При соответствующем выборе этих функций можно сделать заключения об устойчивости или неустойчивости нулевого решения системы (1), не решая саму систему. Второй метод более употребителен в приложениях ввиду простоты его применения (при условии удачного выбора функций Ляпунова). Этим объясняется наличие сравнительно большого количества работ по теории устойчивости, где вопрос решается с помощью применения второго метода Ляпунова. Поэтому второй метод часто называют "прямым методом".

Рассмотрим скалярную функцию $v(t,x)=v(t,x_1,...,x_n)$, определенную и непрерывную в области D. Пусть функция v зависит лишь от x, т.е. $v=v(x)=v(x_1,...,x_n)$ и знакопостоянна в области D. Тогда, если она равняется нулю только в начале координат $x=0$, т.е. при $x_1=...=x_n=0$, она называется знакоопределенной функцией. Если $v(t,x)$ зависит от t и для нее существует знакоопределенная положительная функция $w(x)$, что выполняется одно из двух неравенств:

1) $v(t,x)\geq w(x)$, $\forall(t,x)\in D$;

2) $v(t,x)\leq -w(x)$, $\forall(t,x)\in D$,

то $v(t,x)$ называется знакоопределенной в D функцией.

Говорят, что функция $v(t,x)$ имеет бесконечно малый высший предел при $\|x\|\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при любом $t\geq t_0$ и x:

$$\|x\|<\delta \Rightarrow |v(t,x)|<\varepsilon,$$

т.е. $v(t,x)\rightrightarrows 0$ при $\|x\|\to 0$.

Пусть $v(t,x)$ определена и непрерывно дифференцируема в D. Тогда ее производную

$$\dot v(t,x)=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}f_j(t,x)=\frac{\partial v}{\partial t}+(\text{ grad } v,f)=:\dot v(t,x)\Big|_{(1)}$$

где $\operatorname{grad} v := (\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n})$, называют полной производной функции $v(t,x)$, взятой в силу системы (1).

Пусть $v(t,x)$ и $w(x)$ знакоопределенные положительные функции, удовлетворяющие неравенству

$$v(t,x) \geq w(x), \ \ \forall (t,x) \in D.$$

Рассмотрим поверхности уровня

$$w(x) = C, \quad C \geq 0.$$

Предположим, что в пространстве R_x^n они представляют собой семейство непрерывных замкнутых поверхностей, окружающих начало координат $x = 0$ и монотонно расширяющихся при росте параметра C. Тогда очевидно, что каждая поверхность уровня

$$v(t,x) = C_1$$

для любого значения параметра t будет целиком расположена внутри соответствующей поверхности $w(x) = C_1$ (C_1 — одно из значений C).

Если

$$\dot{v}(t,x)_{|(1)} > 0 \ \ \text{при} \quad v(t,x) = C,$$

то интегральные кривые системы (1) в точках поверхности, $v(t,x) = C$ переходит с отрицательной стороны поверхности, характеризуемой нормалью $-\operatorname{grad} v$, на положительную ее сторону, определяемую нормалью $+\operatorname{grad} v$. Если $\dot{v}(t,x)_{|(1)} < 0$ при $v(t,x) = C$, то имеет место обратная картина. Такого рода поверхности $v(t,x) = C$ называются поверхностью без контакта для множества интегральных кривых системы (1). Идея второго метода Ляпунова состоит в построении системы замкнутых поверхностей без контакта, окружающих точку $x = 0$.

Ляпунов доказал свои знаменитые три теоремы, ставшие неиссякаемым источником для многочисленных исследований по теории устойчивости во всем математическом мире.

Первую теорему Ляпунова о простой устойчивости нулевого решения системы (1) К.П. Персидский развивал для равномерной устойчивости [3].

Теорема. Если для системы (1) существует, допускающая бесконечно малый высший предел, знакоопределенная функция $v(t,x) \in C^1(D)$, полная производная которой, взятая в силу системы (1) есть тождественный нуль или знакопостоянная функция, противоположного знака с функцией $v(t,x)$, то нулевое решение этой системы (1) устойчиво равномерно.

В таком же ключе К.П. Персидский доказал теорему о равномерно асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), развивающую вторую теорему Ляпунова. Исследования в этом направлении были продолжены учеником К.П. Персидского В.П. Марачковым.

Одной из центральных проблем в теории устойчивости являлась проблема о существовании функции Ляпунова. Условия теорем Ляпунова являются достаточными: если существует функция с определенными свойствами, то нулевое решение системы устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво. Закономерно появление вопроса, а существуют ли функции, удовлетворяющие этим теоремам? Если существуют, то теоремы Ляпунова имеют характер завершенности и являются универсальными. Одним из первых, вопрос в общем виде об обращении теорем Ляпунова об устойчивости, ставил и решил К.П.Персидский. Он обратил первую теорему Ляпунова и положил начало многочисленным исследованиям, посвященным проблеме о существовании функций Ляпунова [4]. Метод построения функции в этой теореме Персидского носит конструктивный характер.

Теорема. Пусть система (1) в области

$$\overline{D} = \{(t,x) \in R^{n+1} : t \geq t_0 \geq 0, \|x\| < H < \infty\}$$

имеет нулевое решение $x = 0$, устойчивое по Ляпунову. Тогда для системы (1) в области (2) существует функция Ляпунова $v(t,x) \in C^1(D)$, удовлетворяющая первой теореме Ляпунова об устойчивости.

Теорему о равномерной асимптотической устойчивости обратили И.Л. Массера и И.Г.Малкин.

В 50-е годы прошлого столетия перед исследователями по теории устойчивости стояла актуальная задача об определении наиболее общих условий неустойчивости нулевого решения. Попытки многих математиков, механиков решить эту задачу наталкивались на ряд существенных трудностей, и предложенные некоторыми из них теоремы о неустойчивости, будучи эффективными в некоторых случаях теряли это качество или даже смысл в общем случае. Единственный содержательный результат в этом направлении получил Н.Г. Четаев. Достойный результат получил также ученик К.П. Персидского – Х.И. Ибрашев.

К.П. Персидский подошел к решению этой задачи весьма своеобразно, предложив совершенно иную методику. Введя важное понятие о секторе и решив задачу топологического характера об условиях существования сектора, он получил на этой основе теорему о неустойчивости, которая и сейчас является одной из наиболее общих теорем о неустойчивости [6].

Пусть W есть некоторая область принадлежащая области (2):

$$D_p = \{(t,x) \in D : t \geq t_0 \geq 0,\ \|x\| \leq r < h\}.$$

Обозначим через $W(\tau)$ пересечение W с плоскостью $t = \tau \geq t_0$. Будем полагать, что точка $(\tau, 0)$ есть или внутренняя или граничная точка области $W(\tau)$, т.е. предполагаем, что любая точка оси Ot является или внутренней или граничной точкой области W. Будем полагать, что $W(\tau)$ имеет хотя бы одну граничную точку, лежащую на поверхности $\|x\| = r$. Обозначим через J множество тех точек G, которые лежат на поверхности $\|x\| = r$. Множество $\sigma = G \backslash J$ назовем боковой поверхностью области W. Область W будем называть сектором (или полусектором), если для $\forall \varepsilon > 0\ t_0 \geq 0\ \ \exists\ \ (t_0, x_0),\ 0 \leq \|x_0\| < \varepsilon$, что интегральная кривая системы (1), проходящая через эту точку, при $\|x\| < r$ целиком располагается в области W.

Теорема. Если для системы дифференциальных уравнений (1) существует сектор W, в котором некоторая функция $v(t,x)$ и ее полная производная $\dot{v}(t,x)$, взятая в силу системы (1) удовлетворяют условиям:

1) внутри и на границе сектора W функция $v(t,x)$ ограничена;

2) в любой внутренней точке сектора W функция $v(t,x) > 0$ при $\|x\| > 0$;

3) в любой внутренней точке сектора

$$\dot{v}(t,x)|_{(1)} \geq \eta(t, v(t,x)),$$

где $\eta(t,v)$ - неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям

$$\eta(t,\alpha) \geq \eta(t,\beta) \text{при} \quad \alpha \geq \beta \geq 0,$$

$$\int\limits_0^\infty \eta(t,\alpha)dt = \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

В дальнейшем развивая это понятие сектора С.К. Персидский доказал теоремы о неустойчивости для широкого класса дифференциальных уравнений.

Идеи и результаты К.П. Персидского по устойчивости и неустойчивости решений невозмущенного движения были развиты его учениками: С.И. Горшиным, для движений при постоянно действующих возмущениях; О.Т. Матуциной, для устойчивости в большом; Г.Н.Багаутдиновым, для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка; Б. Тулегеновым, для дифференциальных систем второго порядка; О.А. Жаутыковым, В.Х. Харасахалом, А.А. Ермолаевым, О.О. Хаймульдиным, Л.К. Булашевой, Т.Б. Досумовым, У. Калижановым и др., для счетных систем дифференциальных уравнений; Г.Т.Узаковым, Р.Х. Тенчуриным, О. Мейрамкуловым, Т.А. Джилкибаевой, Н.И.Лобановой и др., для уравнений в линейных и нелинейных нормированных пространствах.

К.П. Персидский занимался исследованиями устойчивости и в критических случаях. В частности установил условия устойчивости и неустойчивости нулевого решения нелинейной системы, характеристическое уравнение линейной автономной части которой имеет $n-1$ кратный нулевой корень.

Развитием результатов по критическим случаям занимались Е.И. Дыхман, М.Я.Ятаев, М.О. Тулегенов, А.А. Хабибулин, Д.Р. Шафиева и др..

Все результаты школы К.П. Персидского по теории устойчивости нашли в том или ином объеме отражение в спецкурсе, наряду с работами российских и зарубежных математиков и механиков.

К.П. Персидский получил основополагающие результаты и по первому методу, а именно, по теории характеристических показателей. Введя понятие устойчивости характеристических показателей, он доказал фундаментальную теорему об устойчивости характеристических показателей линейной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами. Отсюда следует более общая теорема, что характеристические показатели (х.п.) приводимой системы (например, периодической системы) устойчивы. Эти теоремы дают возможность в исследованиях (в определении х.п.) заменить системы близкие к постоянным и периодическим, этими же системами. После этих работ в качественной теории дифференциальных уравнений начались бурные исследования по устойчивости х.п. системы (Ю.С. Богданов, Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, Д.М. Гробман, В.А. Якубович, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов и многие другие).

Вопросом устойчивости характеристических показателей занимался и лектор спецкурса "Теория устойчивости". Он рассматривал х.п. линейной системы с коэффициентами, являющимися функциями со слабой вариацией. С помощью условий, накладываемых на корни уравнения, подобного характеристическому, установил условия устойчивости х.п. системы, их положительности и отрицательности, получил также другие оценки х.п.. Эти результаты он затем перенес на линейные дифференциально-разностные системы. В спецкурсе эти результаты приведены как продолжение и практическое применение исследований К.П. Персидского.

Базовой литературой для спецкурса является учебное пособие автора [7]. Фундаментальные результаты К.П. Персидского со всей строгостью и полнотой изложены в этом учебном пособии. Такое чтение спецкурса, где излагаются фундаментальные результаты нашего соотечественника, учителя, ставящего его в один ряд с основоположниками теории устойчивости, должно побуждать интерес у студентов к читаемому курсу и стремление заниматься исследованиями в этой области.

Цитированная литература

1. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. М., 1950. С.368.

2. **Персидский К.П.** Об устойчивости движения по первому приближению. // Математический сборник. М., 1933. Т.40, В.3. С.284–293.

3. **Персидский К.П.** К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. Ч.1 "Изв. физ.-мат. общества при Казанском университете". Т.VIII, вып.3. 1936-1937 г. С.47–85.

4. **Персидский К.П.** Об одной теореме Ляпунова. ДАН СССР. Т.14, №19. 1937. С.541–544.

5. **Персидский К.П.** Ко второй методе Ляпунова. Изв. АН КазССР. серия мат. и мех. Вып.1. 1947. С.48–55.

6. **Персидский К.П.** Равномерная устойчивость по первому приближению. ПММ, Т.13, №3. 1949. С.229–240.

7. **Сүлейменов Ж.С.** Дифференциалдық тең деулер – 2. Алматы. Білім. 1996. С.256.

Поступила в редакцию 11.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 114 — 119*

УДК 517.925.5:519.216

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

М. И. Тлеубергенов

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы, ул.Пушкина,125 marat207@math.kz

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости одной из обратных задач — основной задачи динамики при наличии возмущений из класса случайных процессов с независимыми приращениями.

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1—4] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2, 3]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [4].

В работах [5—7] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, решены: 1) **общая задача динамики** – построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) **задача восстановления уравнений движения** — построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) **задача замыкания уравнений движения** — построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

1. Постановка задачи. Общая задача построения стохастических уравнений. Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \lambda = \lambda(x, \dot{x}, t) \in C^{221}_{x\dot{x}t}. \tag{1}$$

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equation, integral manyfold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \tag{2}$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (2).
Здесь $x \in R^n$, $\xi \in R^k$, $\sigma(x, \dot{x}, t)$ — матрица размерности $(n \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ – система случайных процессов с независимыми приращениями, которую, следуя [8], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t, dy)$, ξ_0- винеровский процесс; P^0 — пуассоновский процесс; $P^0(t, dy)$ — число скачков процесса P^0 в интервале $[\,0,\, t\,)$, попадающих на множество dy; $c(y)$- векторная функция, отображающая пространство R^n в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t.

Предполагается, что вектор–функция $f(x, \dot{x}, t)$ и матрица $\sigma(x, \dot{x}, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x и $\dot{x}$ в области

$$U_H(\Lambda) = \{y = (x, \dot{x}) : \rho\big(y, \Lambda(t)\big) < H, H > 0\}, \tag{3}$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $\big(x(t)^T, \dot{x}(t)^T\big)^T$ уравнения (2) с начальным условием $\big(x(t_0)^T, \dot{x}(t_0)^T\big)^T = (x_0^T, \dot{x}_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [8].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений $(\sigma \equiv 0)$ достаточно полно исследована в работах [2—4], а случай, когда $\sigma \neq 0$ и $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ – система независимых винеровских процессов, как частный вид процессов с независимыми приращениями, рассмотрен в [5].

В настоящей работе для решения стохастической основной обратной задачи используется метод квазиобращения Мухарлямова [4, с. 12].

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [8, с.201] составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f + S_1 + S_2 + S_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma\dot{\xi}, \tag{4}$$

где $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : \sigma\sigma^T$; $S_2 = \int[\lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) - \lambda(x, \dot{x}, t) - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma\dot{x}c(y)]dy$; $S_3 = \int[\lambda(x, \dot{x}+$ $+\sigma c(y), t) - \lambda(x, \dot{x}, t)]\dot{P}^0(t, dy)$, а под $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : D$, следуя [8], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(x, \dot{x}, t)$ вектора $\lambda(x, \dot{x}, t)$ по компонентам $\dot{x}$ на матрицу D

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : D = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial\dot{x}^2}D\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial\dot{x}^2}D\big) \end{bmatrix}.$$

Введем произвольные функции Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A и $m \times k$-матрицу B, обладающие свойством $A(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, $B(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, такие, что имеет место уравнение

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, x, \dot{x}, t) + B(\lambda, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \tag{5}$$

На основе уравнений (4) и (5) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f = A - \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - S_1 - S_2 - S_3, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma = B, \end{cases} \tag{6}$$

из которых нужно определить вектор-функции f и матрицу σ.

Для разрешения задачи потребуется

Лемма 1[4, с.12—13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu), \tag{7}$$

$$\mu = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n},\ m \le n,$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$v = sv^\tau + v^\nu. \tag{8}$$

Здесь s — произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k — единичные орты пространства R^n, $v^\tau = (v_k^\tau)$, где

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},\ v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T — матрица, транспонированная к H.

Из соотношений (6) по лемме 1 определим вектор-функцию f и матрицу σ в виде

$$f = s_1 \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ \left(A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - S_1 - S_2 - S_3\right), \tag{9}$$

$$\sigma_i = s_2 \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ B_i, \tag{10}$$

где

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}} C\right] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial\dot{x}_1} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\dot{x}_1} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\dot{x}_n} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

$\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni})^T$ – i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k})$;
$B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \dots, B_{\mu i})^T$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$, $(\mu = \overline{1,m},\ l = \overline{1,k})$.

Следовательно справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (2) имело заданное интегральное многообразие (1), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f и матрица σ уравнения (2) имели, соответственно, вид (9) и (10).*

Замечание 1.1. *Если $c(y) \equiv 0$, то данная задача сводится к ранее рассмотренной в [5] основной обратной задаче при наличии случайных возмущений из класса независимых винеровских процессов.*

2. Линейный случай общей задачи. По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv G_1(t)x + G_2(t)\dot{x} + l(t) = 0, \lambda \in R^m, x \in R^n \tag{11}$$

требуется построить линейное стохастическое уравнение вида

$$\ddot{x} = \Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \phi(t) + T\dot{\xi}, \tag{12}$$

для которого множество (11) являлось бы интегральным многообразием, т.е. по заданным $m \times n$-матрицам $G_1(t)$, $G_2(t)$ и m-мерной функции $l(t)$ определить $n \times n$-матрицы и n-мерную вектор-функцию $\phi(t)$, а также $n \times k$-матрицу $T(t)$ так, чтобы для построенного уравнения (12) заданные свойства (11) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (4) имеет вид

$$\dot{\lambda} = \dot{G}_1(t)x + \dot{G}_2(t)\dot{x} + \dot{l}(t) + G_1\dot{x} + G_2\Big(\Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \phi(t)\Big) + G_2T\dot{\xi}, \tag{13}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Н.П.Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции B_1 со свойством $B_1(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$ имеем

$$\dot{\lambda} = A_1\lambda + B_1(\lambda, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) следуют равенства

$$\begin{cases} \dot{G}_1(t)x + \dot{G}_2(t)\dot{x} + \dot{l}(t) + G_2\Phi_1(t)x + G_2\Phi_2(t)\dot{x} + G_2\phi(t) = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = A_1(G_1(t)x + G_2(t)\dot{x} + l(t)), \\ G_2T = B_1, \end{cases}$$

которые преобразуются к виду

$$\begin{cases} G_2(t)\Phi_1(t) = A_1(t)G_1(t) - \dot{G}_1(t), \\ G_2(t)\Phi_2(t) = A_1(t)G_2(t) - \dot{G}_2(t), \\ G_2\phi(t) = A_1(t)l(t) - \dot{l}(t), \\ G_2T = B_1. \end{cases} \tag{15}$$

Далее из равенств (15) с использованием леммы 1 имеем

$$\phi(t) = s_1\left[G_2C\right] + \left(G_2\right)^+ L(t), \tag{16}$$

$$\Phi_1(t) = s_2\left[G_2C\right] + \left(G_2\right)^+ M_i, \tag{17}$$

$$\Phi_2(t) = s_3\left[G_2C\right] + \left(G_2\right)^+ N_i, \tag{18}$$

$$T_i = s_4\left[G_2C\right] + \left(G_2\right)^+ B_{1i}, \tag{19}$$

где $L(t)$ имеет вид $L(t) = A_1(t)l(t) - \dot{l}(t)$, а через Φ_{1i}, Φ_{2i}, T_i, M_i, N_i и B_{1i} обозначены, соответственно, i-ые столбцы матриц Φ_1, Φ_2, T, $M = A_1(t)G_1(t) - \dot{G}_1(t)$, $N = A_1(t)G_2(t) - \dot{G}_2(t)$ и B_1. Здесь s_μ $(\mu = 1,2,3,4)$ — произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

Теорема 2. *Для того чтобы стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (12) имело заданное интегральное многообразие (11) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения (12) имели соответственно вид (16)-(19).*

Замечание 2.1. *В линейной постановке в отличие от нелинейной $S_1 \equiv S_2 \equiv S_3 \equiv 0$ и условия разрешимости в теореме 2 при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями совпадают с условиями разрешимости в аналогичном линейном случае при наличии случайных возмущений из класса независимых винеровских процессов [5].*

3. Стохастическая задача Еругина на плоскости $(x, \dot{x})$. Пусть $x \in R^1$ и интегральная кривая на плоскости $(x, \dot{x})$ задана в виде

$$\Lambda(t) : \eta(x, \dot{x}, t) = 0, \ \eta \in R^1, \tag{20}$$

по которой требуется построить уравнение

$$\ddot{x} = v(x, \dot{x}, t) + \gamma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}, \ \xi \in R^1, \tag{21}$$

где $\xi = \xi(t, \omega)$ — скалярный винеровский процесс[5], т.е. стохастическая задача Еругина заключается в определении функций $v = v(x, \dot{x}, t)$ и $\gamma = = \gamma(x, \dot{x}, t)$ по заданной функции $\eta = \eta(x, \dot{x}, t)$ так, чтобы множество (20) было интегральным многообразием уравнения (21).

По правилу стохастического дифференцирования Ито[1] имеем

$$\dot{\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}v + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3 + \frac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}\gamma\dot{\xi}, \tag{22}$$

где $\widetilde{S}_1 = \dfrac{1}{2}\gamma^2\dfrac{\partial^2\eta}{\partial\dot{x}^2}$; $\widetilde{S}_2 = \int\{\eta(x, \dot{x} + \gamma c(y), t) - \eta(x, \dot{x}, t) - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\gamma\dot{x}c(y)\}dy$; $\widetilde{S}_3 = \int\{\eta(x, \dot{x} + \gamma c(y), t) -$ $-\eta(x, \dot{x}, t)\}\dot{P}^0(t, dy)$.

Введем функции Еругина $a = a(\eta, x, \dot{x}, t)$ и $b = b(\eta, x, \dot{x}, t)$ такие, что

$$a(0, x, \dot{x}, t) = b(0, x, \dot{x}, t) = 0$$

и справедливо равенство

$$\dot{\eta} = a + b\dot{\xi}. \tag{23}$$

Далее уравнения (22) и (23) влекут соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}v = a - \dfrac{\partial\eta}{\partial t} - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dot{x} + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}\gamma = b. \end{cases} \tag{24}$$

Из (24) в предположении, что в рассматриваемой области (3) существует $\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}\right)^{-1} \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} v = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}\right)^{-1}\Big(a - \dfrac{\partial\eta}{\partial t} - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dot{x} - \dfrac{1}{2}\gamma^2\dfrac{\partial^2\eta}{\partial\dot{x}^2}\Big), \\ \gamma = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\dot{x}}\right)^{-1}b. \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, из (25) следует, что множество стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка в случае $x \in R^1$, обладающее заданной интегральной кривой (20), имеет вид

$$\ddot{x} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{x}}\right)^{-1} \left(a - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\dot{x} - \widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_3\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{x}}\right)^{-1} b\dot{\xi}.$$

Таким образом, в основной обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях построено множество стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием.

Цитированная литература

1. **Еругин Н. П.** //ПММ. 1952. Т.10. вып.16. С.659—670.

2. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.** Построение систем программного движения. М., 1971.

3. **Галиуллин А. С.** Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.

4. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М., 1986.

5. **Тлеубергенов М. И.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". 1999. №1. С.48—51.

6. **Тлеубергенов М. И.** //Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, № 5. С.714—716.

7. **Тлеубергенов М. И.** //Доклады МН–АН РК. 1999. №1. С.53—60.

8. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила в редакцию 18.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 3 (9) . С. 120—120*

ХРОНИКА

О КОНФЕРЕНЦИИ "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

В г.Алматы с 24 по 26 сентября 2003 года в Институте математики МО и Н РК прошла Международная конференция "Дифференциальные уранения", посвященная 100-летию со дня рождения крупного математика, основателя первой научной математической школы в Казахстане, первого директора Института математики, академика Константина Петровича ПЕРСИДСКОГО. Она была проведена Институтом математики совместно с Казахским национальным университетом им.аль-Фараби, Актобинским государственным университетом им.Х.Жубанова и Жетысуйским государственным университетом им.И.Жансугурова.

К началу конференции были изданы книга воспоминаний об академике К.П.Персидском, программа и тезисы.

Работа конференции была организована как пленарные заседания (с 10–00 до 13–00 ежедневно) и секционные заседания (с 14–00 до 18–00 ежедневно) по секциям:

1. Дифференциальные уравнения,
2. Теория устойчивости и динамические системы,
3. Математическая физика и вычислительная математика,
4. Смежные вопросы математического анализа.

На первом пленарном заседании, проходившем в конференц-зале Дома Ученых, был заслушан доклад ученика К.П.Персидского профессора КазНУ Ж.С.Сулейменова "О жизнедеятельности академика К.П.Персидского", а также воспоминания участников конференции.

24 сентября 2003 года в доме, где проживал академик К.П.Персидский, торжественно была открыта памятная доска. В тот же день было организовано посещения могилы Константина Петровича, где были возложены цветы.

Всего было заслушано 7 пленарных:

— Ж.С.Сулейменов "О жизнедеятельности академика К.П.Персидского",

— Д.С.Джумабаев "О метода параметризации для дифференциальных уравнений",

— М.И.Рахимбердиев "О результатах К.П.Персидского в теории устойчивости",

— М.О.Отелбаев "О системе Навье-Стокса",

— Т.Ш.Кальменов "О спектральных свойствах дифференциальных операторов",

— В.Н.Монахов "О дискретных динамических системах",

— А.С.Андреев "О развитии прямого метода Ляпунова об устойчивости на неавтономные сиситемы"

и более 60 секционных докладов.

Закрытие конференции состоялось 26 сентября 2003 года в конференц-зале Института математики. На закрытии участники поделились своими впечатлениями и пожеланиями по итогам проведенной конференции.

Орг.комитет
Алматы, 26 сентября 2003 года

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.