

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2009 том 9 № 4 (34)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 4(34) 2009

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадильдаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

*Адрес редколлегии и редакции: 050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(727)2-72-01-66, journal@math.kz, <http://www.math.kz>*

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 9, № 4 (34), 2009

Динамическое поведение трехслойной оболочки в упругом пространстве при воздействии подвижной нагрузки <i>Л. А. Алексеева, С. Р. Гирнис, В. Н. Украинец</i>	5
О корректной разрешимости полупериодической краевой задачи с импульсным воздействием для систем гиперболических уравнений <i>А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев</i>	14
О стабилизации линейных стационарных управляемых систем <i>Э. Т. Ашырова, Дж. Мамытов, Ж. Шаршеналиев</i>	20
Об оптимизационном методе решения задачи Коши-Дирихле для уравнения Пуассона <i>А. М. Аязбаева, М. Т. Дженалиев, К. Б. Иманбердиев</i>	26
Задачи распараллеливания <i>Ж.А. Балдыбек, М.О. Отелбаев</i>	35
Об устойчивости РДС относительно части переменных в критическом случае одного корня равного единице <i>К. Б. Бопиев, А. Т. Жунусова</i>	43
Об устойчивости нестационарной РДС в критическом случае <i>С. К. Бопиева</i>	48
Опыт использования алгоритмов внутренних точек в моделях энергетики <i>В. И. Зоркальцев, Д. С. Медвежонков, С. М. Пержабинский</i>	54
Об однозначной и корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений <i>Ж. М. Кадирбаева</i>	63
Анализ существования и устойчивости равновесного состояния однопродуктового рассредоточенного рынка <i>А. Г. Коваленко</i>	72
Шинцелеево уравнение $x_1x_2\dots x_n = t^k$ <i>С. Ш. Кожсегельдинов</i>	78
Моделирование колебаний полуограниченной струны <i>Ж. Н. Кутунаев</i>	85

Об однозначной разрешимости линейной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с нагрузениями

К. И. Усманов 90

Рефераты 96

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Л. А. АЛЕКСЕЕВА, С. Р. ГИРНИС, В. Н. УКРАИНЕЦ

Институт Математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz
Павлодарский гос. Университет им. С. Торайгырова
140008 Павлодар vitnikukr@mail.ru

На основе аналитического решения задачи о действии подвижной нагрузки на трёхслойную оболочку в упругом пространстве исследуются критические скорости нагрузки, а также напряжённо-деформированное состояние оболочки и окружающего массива. Исследовано влияние контактных условий на динамическое поведение оболочки.

Задачи о действии подвижной осесимметричной нормальной нагрузки на тонкостенную и толстостенную круговую цилиндрическую оболочку в упругой среде рассматривались соответственно в статьях [1,2]. Данные задачи являются модельными при исследовании динамики тоннелей глубокого заложения, подкреплённых однородной цилиндрической оболочкой (обделкой). Однако использование такой модели подземного сооружения может быть ограничено при использовании в практике строительства многослойных (например, сталебетонных) цилиндрических обделок [3]. В [4] построено аналитическое решение задачи о действии бегущей нагрузки на трёхслойную оболочку в упругом пространстве. В данной работе, на его основе исследуются критические скорости равномерно движущейся по внутренней поверхности трёхслойной оболочки нагрузки, а также напряжённо-деформированное состояние (НДС) оболочки и окружающего массива при разных контактных условиях на границах раздела сред.

1. Постановка и аналитическое решение задачи. Следуя [4] рассмотрим цилиндрическую полость радиусом $r = R_1$ в бесконечной, линейно-упругой, однородной и изотропной среде. Полость подкреплена трёхслойной круговой оболочкой, средним слоем которой является толстостенная оболочка (заполнитель), а внешние слои (обшивки) представляют собой тонкостенные оболочки. Полагаем, что контакт между слоями оболочки, оболочкой и окружающим её массивом может быть как жестким, так и скользящим. В силу малости толщины составляющих обшивку оболочек будем считать, что они контактируют с заполнителем и окружающим массивом вдоль срединных поверхностей. Обозначим толщину внешней оболочки обшивки h_{01}

Keywords: *Tunnel, moving load, trilaminar casing, elasticity, critical velocity, stress-strain state, contact conditions*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

© Л. А. Алексеева, С. Р. Гирнис, В. Н. Украинец, 2009.

при радиусе кривизны ее срединной поверхности R_1 , а толщину внутренней обложки обшивки – h_{02} с радиусом кривизны срединной поверхности R_2 . По внутренней поверхности слоистой обложки в направлении ее оси z с постоянной скоростью c (меньшей, чем скорости распространения волн сдвига в заполнителе и окружающем массиве) движется нагрузка интенсивностью P . Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно использовать подвижную цилиндрическую систему координат $\eta = z - ct$, θ , r .

Для описания движения оболочек обшивки воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{(1 - \nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\right] \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1 - \nu_{0k}}{2R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0rk}}{\partial \eta} = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}} (q_{\eta k} - q_{\eta R_k}), \\ & \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{1 - \nu_{0k}}{2} \left(1 - \frac{\rho_{0k}c^2}{\mu_{0k}}\right) \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{0rk}}{\partial \theta} = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}} (q_{\theta k} - q_{\theta R_k}), \quad (1) \\ & \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0\eta k}}{\partial \eta} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{0\theta k}}{\partial \theta} + \frac{h_{0k}^2}{12} \Delta \Delta u_{0rk} + \frac{(1 - \nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}} \frac{\partial^2 u_{0rk}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0rk}}{R_k^2} = -\frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}} (q_{rk} - q_{rR_k}), \end{aligned}$$

где для внешней обложки обшивки $k = 1$, для внутренней – $k = 2$; $u_{0\eta k}$, $u_{0\theta k}$, u_{0rk} – перемещения точек срединных поверхностей оболочек обшивки; ν_{0k} , μ_{0k} , ρ_{0k} – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала оболочек обшивки; $q_{jR_2} = \sigma_{rj2}|_{r=R_2}$, $q_{jR_1} = \sigma_{rj2}|_{r=R_1}$, $q_{jR_1} = \sigma_{rj1}|_{r=R_1}$ – составляющие реакции заполнителя и среды, σ_{rj2} , σ_{rj1} – соответственно компоненты тензора напряжений в заполнителе и среде ($j = \eta, \theta, r$); $q_{j2} = P_j$ ($j = \eta, \theta, r$), P_η , P_θ , P_r – составляющие интенсивности подвижной нагрузки P ; Δ – оператор Лапласа.

Для описания движения заполнителя и окружающей среды используем динамические уравнения теории упругости:

$$\left(\frac{1}{M_{pk}^2} - \frac{1}{M_{sk}^2}\right) \text{grad div } u_k + \frac{1}{M_{sk}^2} \Delta u_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial \eta^2}, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к среде, а 2 – к заполнителю; $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде и заполнителе, $\lambda_k = 2\mu_k\nu_k/(1 - 2\nu_k)$, μ_k – модули сдвига, ν_k – коэффициенты Пуассона, u_k – векторы смещений точек пространства и заполнителя.

Выражая векторы смещений через потенциалы Ламе

$$u_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k}e_\eta) + \text{rotrot}(\varphi_{3k}e_\eta), \quad k = 1, 2,$$

преобразуем уравнения (2) к виду:

$$\Delta \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Применив к (3) преобразование Фурье по η , находим:

$$\Delta_2 \varphi_{jk}^* - m_{jk}^2 \xi^2 \varphi_{jk}^* = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$, $m_{1k} \equiv m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$, $\varphi_{jk}^*(r, \theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{jk}(r, \theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$.

Выразив компоненты напряжённно-деформированного состояния среды и заполнителя через потенциалы Ламе и применив преобразование Фурье по η , можно получить выражения для трансформант напряжений σ_{ijk}^* и перемещений u_{ik}^* ($i, j = r, \theta, \eta; k = 1, 2$) в цилиндрической системе координат как функции от φ_{jk}^* .

Так как скорость движения нагрузки меньше, чем скорости распространения волн сдвига во внешнем слое оболочки и среде, то $M_{sk} < 1$ ($m_{sk} > 0$) и решения (4) можно представить в виде:

для среды –

$$\varphi_{j1}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) e^{in\theta}; \quad (5)$$

для заполнителя –

$$\varphi_{j2}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj+3} K_n(k_{j2}r) + a_{nj+6} I_n(k_{j2}r)) e^{in\theta}. \quad (5a)$$

Здесь $j = 1, 2, 3$, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$; $I_n(kr)$, $K_n(kr)$ – функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента, a_{n1}, \dots, a_{n9} – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Применив к (1) преобразование Фурье по η и разлагая функции перемещений точек срединных поверхностей оболочек обшивки и нагрузок в ряды Фурье по θ , для n -го члена разложения получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1k}^2 u_{0n\eta k} + \nu_{02k} n \xi_{0k} u_{0n\theta k} - 2i\nu_{0k} \xi_{0k} u_{0nrk} &= G_{0k} (q_{n\eta k} - q_{n\eta R_k}), \\ \nu_{02k} n \xi_{0k} u_{0n\eta k} + \varepsilon_{2k}^2 u_{0n\theta k} - 2in u_{0nrk} &= G_{0k} (q_{n\theta k} - q_{n\theta R_k}), \\ 2i\nu_{0k} \xi_{0k} u_{0n\eta k} + 2in u_{0n\theta k} + \varepsilon_{3k}^2 u_{0nrk} &= G_{0k} (q_{nrk} - q_{nr R_k}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k = 1, 2$; $\varepsilon_{1k}^2 = \alpha_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2$, $\varepsilon_{2k}^2 = \beta_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2$, $\varepsilon_{3k}^2 = \gamma_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2$, $\xi_{0k} = \xi R_k$, $\alpha_{0k}^2 = 2\xi_{0k}^2 + \nu_{01k} n^2$, $\beta_{0k}^2 = \nu_{01k} \xi_{0k}^2 + 2n^2$, $\gamma_{0k}^2 = \chi_k^2 (\xi_{0k}^2 + n^2)^2 + 2$, $\varepsilon_{0k}^2 = \nu_{01k} \xi_{0k}^2 M_{s0k}^2$, $\nu_{01k} = 1 - \nu_{0k}$, $\nu_{02k} = 1 + \nu_{0k}$, $M_{s0k} = c/c_{s0k}$, $c_{s0k} = \sqrt{\frac{\mu_{0k}}{\rho_{0k}}}$, $\chi_k^2 = \frac{h_{0k}^2}{6R_k^2}$, $G_{0k} = -\frac{\nu_{01k} R_k^2}{\mu_{0k} h_{0k}}$, $q_{nmR_2} = (\sigma_{rm2}^*)_n$ при $r = R_2$; $q_{nm1} = (\sigma_{rm1}^*)_n$ и $q_{nmR_1} = (\sigma_{rm1}^*)_n$ при $r = R_1$; $q_{nm2} = P_{nm}$; u_{0nm} , P_{nm} – соответственно коэффициенты разложения

$$u_{0m}^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{0m}(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

и

$$P_m^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

в ряды Фурье по угловой координате θ ($m = \eta, \theta, r$). Из (6) находим:

$$\begin{aligned} u_{0n\eta k} &= \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^3 \delta_{\eta jk} (q_{nj k} - q_{nj R_k}), \\ u_{0n\theta k} &= \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^3 \delta_{\theta jk} (q_{nj k} - q_{nj R_k}), \\ u_{0nrk} &= \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^3 \delta_{r jk} (q_{nj k} - q_{nj R_k}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\delta_{nk} &= \delta_{|n|k} = (\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k}\varepsilon_{3k})^2 - (\varepsilon_{1k}\xi_1)^2 - (\varepsilon_{2k}\xi_2k)^2 - (\varepsilon_{3k}\xi_3k)^2 + 2\xi_1\xi_2k\xi_3k, \\ \delta_{\eta 1k} &= (\varepsilon_{2k}\varepsilon_{3k})^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2k} = \xi_1\xi_2k - \xi_3k\varepsilon_{3k}^2, \quad \delta_{\eta 3k} = i(\varepsilon_{2k}^2\xi_2k - \xi_1\xi_3k), \\ \delta_{\theta 1k} &= \delta_{\eta 2k}, \quad \delta_{\theta 2k} = (\varepsilon_{1k}\varepsilon_{3k})^2 - \xi_2k^2, \quad \delta_{\theta 3k} = i(\varepsilon_{1k}^2\xi_1 - \xi_2k\xi_3k), \\ \delta_{r 1k} &= -\delta_{\eta 3k}, \quad \delta_{r 2k} = -\delta_{\theta 3k}, \quad \delta_{r 3k} = i(\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k})^2 - \xi_3k^2, \\ \xi_1 &= 2n, \quad \xi_2k = 2\nu_{0k}\xi_{0k}, \quad \xi_3k = \nu_{02k}\xi_{0k}n,\end{aligned}$$

для $q_{nj}k$ и $q_{nj}R_k$ индекс $j = 1$ соответствует индексу η , $j = 2 - \theta$, $j = 3 - r$.

Для определения коэффициентов a_{n1}, \dots, a_{n9} воспользуемся следующими граничными условиями с учётом (5), (5а) и (7).

При жёстком сцеплении слоёв оболочки граничные условия можно представить в виде:

для скользящего контакта оболочки с массивом –

при $r = R_1$, $u_{r1}^* = u_{r2}^*$, $u_{j2}^* = u_{0j1}$, $\sigma_{r\eta 1}^* = 0$, $\sigma_{r\theta 1}^* = 0$, при $r = R_2$ $u_{j2}^* = u_{0j2}$, $j = r, \theta, \eta$;

для жёсткого контакта оболочки с массивом –

при $r = R_1$, $u_{j1}^* = u_{j2}^*$, $u_{j1}^* = u_{0j1}$, при $r = R_2$ $u_{j2}^* = u_{0j2}$, $j = r, \theta, \eta$.

При скользящем контакте слоёв оболочки граничные условия имеют вид:

для скользящего контакта оболочки с массивом –

при $r = R_1$, $u_{r1}^* = u_{r2}^*$, $u_{r2}^* = u_{0r1}$, $\sigma_{r\eta 2}^* = 0$, $\sigma_{r\theta 2}^* = 0$, $\sigma_{r\eta 1}^* = 0$, $\sigma_{r\theta 1}^* = 0$,

при $r = R_2$ $u_{r2}^* = u_{0r2}$, $\sigma_{r\eta 2}^* = 0$, $\sigma_{r\theta 2}^* = 0$;

для жёсткого контакта оболочки с массивом –

при $r = R_1$, $u_{r1}^* = u_{r2}^*$, $\sigma_{r\eta 2}^* = 0$, $\sigma_{r\theta 2}^* = 0$, $u_{j1}^* = u_{0j1}$,

при $r = R_2$ $u_{r2}^* = u_{0r2}$, $\sigma_{r\eta 2}^* = 0$, $\sigma_{r\theta 2}^* = 0$, $j = r, \theta, \eta$.

Приравнивая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) систему линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида для определения коэффициентов. После определения коэффициентов a_{n1}, \dots, a_{n9} , применяя обратное преобразование Фурье, можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния среды и заполнителя. При этом для вычисления интегралов Фурье можно использовать любой численный метод, если определители $\Delta_n(\xi, c)$ системы уравнений, полученной для конкретных граничных условий, не обращаются в ноль, т.е. когда скорость бегущей нагрузки ниже критической скорости (см. п.2).

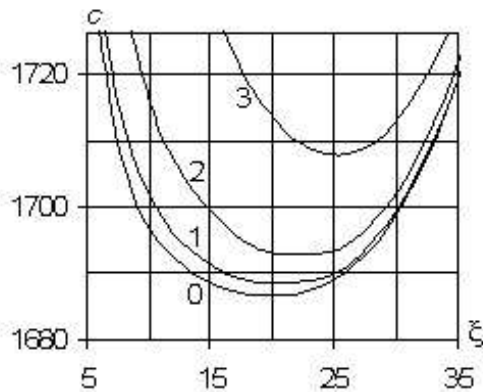


Рис. 1: Дисперсионные кривые трёхслойной оболочки при жёстком сопряжении слоёв.

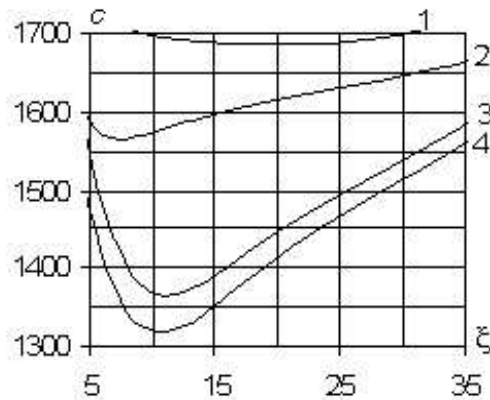


Рис. 2: Дисперсионные кривые трёхслойной оболочки при различных контактных условиях.

Компл. НДС	θ, град										
	0	20	40	60	80	90	100	120	140	160	180
Жёсткий контакт оболочки с массивом											
u_{γ}^*	-0,028	-0,026	-0,021	-0,007	0,021	0,047	0,073	0,101	0,114	0,119	0,122
$\sigma_{\eta\eta}^*$	0,065	0,069	0,107	0,148	0,189	0,187	0,185	0,225	0,266	0,304	0,308
$\sigma_{\eta m}^*$	0,007	-0,011	-0,004	-0,041	-0,113	-0,294	-0,474	-0,546	-0,583	-0,576	-0,594
Скользящий контакт оболочки с массивом											
u_{γ}^*	-0,034	-0,031	-0,025	-0,009	0,021	0,049	0,077	0,108	0,123	0,130	0,132
$\sigma_{\eta\eta}^*$	0,181	0,105	0,156	0,223	0,175	0,205	0,236	0,188	0,254	0,305	0,229
$\sigma_{\eta m}^*$	-0,035	-0,064	-0,045	-0,063	-0,130	-0,290	-0,450	-0,517	-0,535	-0,516	-0,545

Рис. 3: Компоненты НДС внутренней поверхности заполнителя в сечении $\eta = 0$.

2. Критические скорости нагрузки. Приравнявая симметричные относительно n и ξ функции $\Delta_n(\xi, c)$ к нулю, можно получить численными методами дисперсионные кривые в плоскости (ξ, c) . Для фиксированного значения n координатам $\xi_{(n)}, c_{(n)}$ любой точки кривой соответствует свободная волна, распространяющаяся вдоль оси оболочки. Форма этой волны зависит от числа n и удовлетворяет соответствующей однородной системе уравнений. Проведенные в п.4 численные исследования $\Delta_n(\xi, c)$ показали, что для каждой n -моды может существовать дозвуковая, соответствующая минимуму построенной в плоскости (ξ, c) дисперсионной кривой критическая скорость $c = c_{(n)*}$, при которой в двух точках $\pm\xi_{(n)*}$ ($\xi_{(n)*} > 0$) $\Delta_n(\pm\xi_{(n)*}, c_{(n)*}) = 0, \partial\Delta_n(\pm\xi_{(n)*}, c_{(n)*})/\partial\xi = 0$. В этом случае стационарного решения задачи для данной моды не существует. Причём, минимальная критическая скорость, независимо от условия сопряжения оболочки со средой, имеет место при $n = 0$ (см. п.3). Поэтому, если $0 < c < c_{(0)*}$, то $\Delta_n(\xi, c) \neq 0$ для любых ξ и n . В этом случае допустимо прямое и обратное преобразование Фурье и полученные соотношения решают поставленную задачу. При $c_{(n)*} < c < \min c_{sk}$ ($k = 1, 2$) для каждого n существуют четыре особые точки $\pm\xi_{(n)1}, \pm\xi_{(n)2}$ в которых $\Delta_n(\pm\xi_{(n)l}, c_{(n)}) = 0, \partial\Delta_n(\pm\xi_{(n)l}, c_{(n)})/\partial\xi \neq 0, l = 1, 2$. В этих случаях решение существует, если ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы уравнений для данной n -моды. При движении с такими сверхкритическими скоростями нагрузка генерирует позади себя свободные цилиндрические незатухающие вдоль оси оболочки гармонические волны ча-

Комп. НДС	θ , град										
	0	20	40	60	80	90	100	120	140	160	180
Жёсткий контакт оболочки с массивом											
u_y^*	-0,027	-0,026	-0,020	-0,009	0,015	0,037	0,059	0,082	0,094	0,098	0,101
$\sigma_{??}^*$	0,043	0,065	0,055	0,067	0,052	0,190	0,327	0,313	0,325	0,315	0,337
$\sigma_{\eta\eta}^*$	-0,020	-0,022	-0,029	-0,027	0,003	0,046	0,089	0,118	0,120	0,113	0,111
Скользкий контакт оболочки с массивом											
u_y^*	-0,037	-0,032	-0,026	-0,014	0,018	0,039	0,061	0,091	0,104	0,110	0,115
$\sigma_{??}^*$	0,048	0,067	0,085	0,058	0,131	0,217	0,303	0,376	0,349	0,367	0,387
$\sigma_{\eta\eta}^*$	-0,082	-0,091	-0,079	-0,049	0,029	0,109	0,188	0,266	0,296	0,309	0,300

Рис. 4: Компоненты НДС наружной поверхности заполнителя в сечении $\eta = 0$.

Комп. НДС	θ , град										
	0	20	40	60	80	90	100	120	140	160	180
Жёсткий контакт оболочки с массивом											
u_y^*	-0,027	-0,026	-0,020	-0,009	0,015	0,037	0,059	0,082	0,094	0,098	0,101
$\sigma_{??}^*$	0,013	0,029	0,025	0,031	0,007	0,026	0,046	0,022	0,028	0,024	0,040
$\sigma_{\eta\eta}^*$	-0,002	-0,003	-0,003	-0,002	-0,003	-0,021	-0,039	-0,040	-0,040	-0,039	-0,040
Скользкий контакт оболочки с массивом											
u_y^*	-0,037	-0,032	-0,026	-0,014	0,018	0,039	0,061	0,091	0,104	0,110	0,115
$\sigma_{??}^*$	0,003	0,004	0,020	0,020	0,020	0,006	-0,008	-0,008	-0,008	0,009	0,009
$\sigma_{\eta\eta}^*$	0,033	0,017	0,018	0,009	-0,061	-0,130	-0,200	-0,269	-0,278	-0,278	-0,294

Рис. 5: Компоненты НДС контактирующей с оболочкой поверхности массива в сечении $\eta = 0$.

стоты $\omega_{(n)l} = c\xi_{(n)l}$ и длины $\lambda_{(n)l} = 2\Pi\xi_{(n)l}$, движущиеся вдоль поверхности оболочки вслед за действующей нагрузкой с той же скоростью [5]. Амплитуда этих волн не зависит от z и экспоненциально затухает при $r \rightarrow \infty$. При $c = c_{(n)*}$ точки $\xi_{(n)1}$ и $\xi_{(n)2}$ сливаются в одну $\xi_{(n)*}$. Стационарного решения задачи в этом случае не существует. Для таких скоростей в оболочке возникают резонансные явления, для изучения которых следует переходить к нестационарной постановке задачи. Значение параметра задачи $c = c_{(n)*}$ можно характеризовать как точку бифуркации решения, при переходе через которую возникает неустойчивость движения. Этот факт может оказаться существенным для практики строительства подземных транспортных сооружений.

3. Численные эксперименты. Рассмотрим трёхслойную сталебетонную оболочку в массиве песчаника ($\nu_1 = 0,28$, $\mu_1 = 7,8 \cdot 10^3$ МПа, $\rho_1 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $c_{s1} = 1766$ м/с). Параметры оболочки: внутренний и внешний слой обшивки – тонкие стальные оболочки ($\nu_{0k} = 0,3$, $\mu_{0k} = 8,08 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_{0k} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $k = 1,2$) толщиной $h_0 = h_{01} = h_{02} = 0,02$ м и радиусами кривизны срединных поверхностей соответственно $R_2 = R = 1$ м и $R_1 = 1,15R$; средний слой (заполнитель) толщиной $h_c = R_1 - R_2$ – бетон ($\nu_2 = 0,2$, $\mu_2 = 1,21 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_2 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{s2} = 2200$ м/с).

На рисунке 1 для данной оболочки при $\xi > 0$ изображены дисперсионные кривые c (м/с)

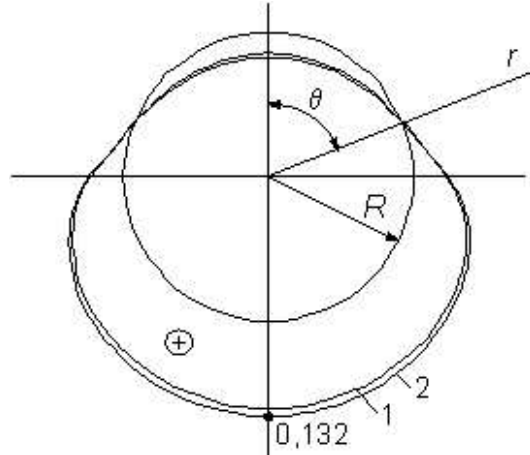


Рис. 6: Эпюры радиальных перемещений u_r° , м на контуре поперечного сечения $\eta = 0$ внутренней поверхности заполнителя.

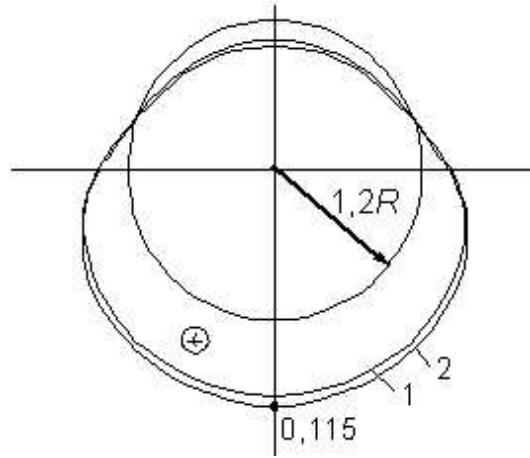


Рис. 7: Эпюры радиальных перемещений u_r° , м на контуре поперечного сечения $\eta = 0$ внешней поверхности заполнителя.

$\sim \xi$ (м^{-1}) (контакт между слоями оболочки, а также между оболочкой и окружающим её массивом полагался жёстким). По дисперсионным кривым определены значения критических скоростей нагрузки $c_{(n)^*}$: $c_{(0)^*} = 1687$ (м/с), $c_{(1)^*} = 1689$ (м/с), $c_{(2)^*} = 1693$ (м/с), $c_{(3)^*} = 1708$ (м/с).

Обозначения кривых: $n = 0$ (0); $|n| = 1$ (1); $|n| = 2$ (2); $|n| = 3$ (3).

Минимальные значения критических скоростей нагрузки $c_{(0)^*}$ при различных контактных условиях оболочки определяются по дисперсионным кривым, построенным на рисунке 2. По кривой 1 (жёсткое сцепление слоёв оболочки, оболочки и массива), находим $c_{(0)^*} = 1687$ м/с; по кривой 2 (жёсткое сцепление слоёв оболочки при скользящем контакте оболочки с массивом) – $c_{(0)^*} = 1564$ м/с; по кривой 3 (скользящий контакт между слоями оболочки, жёстко сопряжённой с массивом) – $c_{(0)^*} = 1367$ м/с; по кривой 4 (скользящий контакт между слоями оболочки, оболочкой и массивом) - $c_{(0)^*} = 1318$ м/с. То есть в данном случае, при жёстком контакте оболочки с массивом критические скорости нагрузки $c_{(0)^*}$ могут быть меньше, чем при скользящем контакте, если заменить жёсткий контакт между слоями на скользящий.

Исследуем напряжённо-деформированное состояние трёхслойной оболочки и окружающего её массива при воздействии бегущей с докритической скоростью $c = 100$ м/с нормальной нагрузки интенсивностью P° , равномерно распределённой по нижней половине внутренней

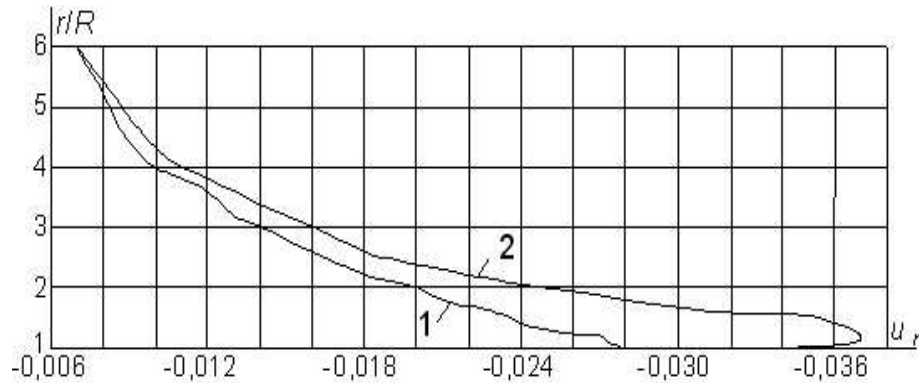


Рис. 8: Изменения радиальных перемещений u_r^0 , м в сечении $\eta = 0$ с удалением от верхней точки внутренней поверхности заполнителя.

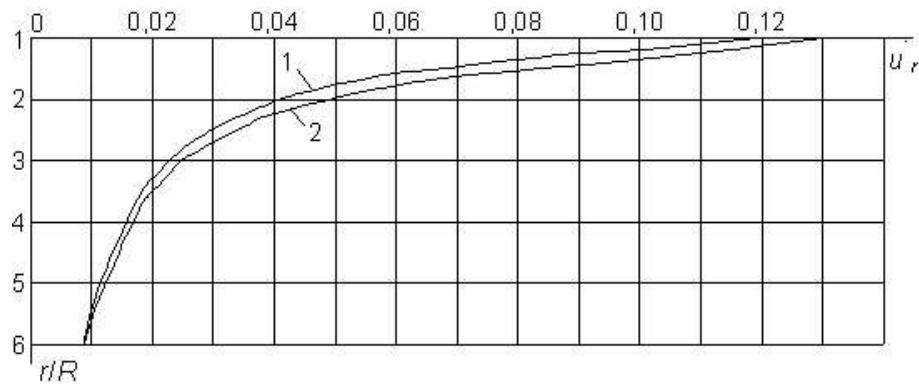


Рис. 9: Изменения радиальных перемещений u_r^0 , м в сечении $\eta = 0$ с удалением от нижней точки внутренней поверхности заполнителя.

поверхности оболочки ($r = R_2 = R = 1\text{ м}$, $90^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$) в интервале $|\eta| \leq 0,2R$. Характеристики массива: $\nu_1 = 0,25$, $\mu_1 = \mu = 4,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $\rho_1 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $c_{s1} = 1240,35 \text{ м/с}$ [3]. Параметры оболочки: внутренний и внешний слой обшивки - тонкие стальные оболочки толщиной $h_0 = h_{01} = h_{02} = 0,02 \text{ м}$ и радиусами кривизны срединных поверхностей соответственно $R_2 = R = 1 \text{ м}$ и $R_1 = 1,2R$; средний слой (заполнитель) толщиной $h_c = R_1 - R_2$ - бетон. Будем полагать, что слои оболочки жёстко сопряжены между собой, а её контактные условия с массивом могут быть различными.

Результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния данной оболочки и окружающего её массива приведены в таблицах (рис.3-5) и проиллюстрированы на рисунках 6-9.

Обозначения: $u_r^0 = u_r \mu / P^0$, м, $\sigma_{\theta\theta}^0 = \sigma_{\theta\theta} / P^0$, $\sigma_{\eta\eta}^0 = \sigma_{\eta\eta} / P^0$.

Обозначения кривых: 1 - жёсткий контакт оболочки с массивом; 2 - скользящий контакт оболочки с массивом.

Из анализа результатов следует строгое выполнение граничных условий в месте контакта оболочки с массивом ($r = 1,2R$). В случае скользящего контакта максимальные радиальные перемещения u_r контактирующих поверхностей больше, чем при жёстком контакте (рисунок 3). При замене жёсткого контакта на скользящий происходит возрастание экстремальных значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на наружной поверхности заполнителя (на внутренней поверхности они практически не меняются) и их снижение на контактирующей с оболочкой поверхности массива. Экстремальные значения $\sigma_{\eta\eta}$ при этом уменьшаются на внутренней поверхности заполнителя и увеличиваются на его наружной поверхности, а также на контактной

поверхности массива. При удалении в радиальном направлении от внутренней поверхности заполнителя, как видно из рисунка 4, влияние контактных условий на радиальные смещения точек снижается.

Цитированная литература

1. **Пожуев В.И.** //Строительная механика и расчет сооружений. 1978. №1. С. 44 – 48.
2. **Львовский В.М., Онищенко В.И., Пожуев В.И.** //Сб. "Вопросы прочности пластичности". Днепропетровск. 1974. С. 98 – 110.
3. **Булычев Н.С.** Механика подземных сооружений в примерах и задачах. М., 1989.
4. **Украинец В.Н., Гирнис С.Р.** //Математический журнал. Алматы. 2008. Т.8, №1(27). С. 21 – 26.
5. **Алексеева Л.А., Украинец В.Н.** //Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1987. №4. С. 156 – 161.

Поступила в редакцию 16.07.2009г.

УДК 517.968.7

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Исследуется полупериодическая краевая задача с импульсным воздействием для систем гиперболических уравнений со смешанной производной методом введения функциональных параметров. Установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных.

Рассматривается полупериодическая краевая задача с импульсным воздействием для системы гиперболических уравнений со смешанной производной в фиксированные моменты времени на прямоугольнике $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial x} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial x}, \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(t_i - 0, x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t_i + 0, x)}{\partial x} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где $u \in R^n$, $(n \times n)$ – матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, n – вектор-функция $f(t, x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, n – вектор-функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны на $[0, \omega]$, n – вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < T$, $\|u(t, x)\| = \max_{i=\overline{1, n}} |u_i(t, x)|$,

$$\|A(t, x)\| = \max_{i=\overline{1, n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|.$$

Keywords: *system of hyperbolic equations, semi-periodical boundary value problem, impulsive effect, method of additional parameter's introduction, correct solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37

© А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев, 2009.

Решением задачи (1)–(4) будем называть кусочно-непрерывную на $\bar{\Omega}$ функцию $u(t, x)$, имеющую кусочно-непрерывные на $\bar{\Omega}$ частные производные $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x}$, удовлетворяющую системе (1) при всех $(t, x) \in \Omega$, кроме линий $t = t_i$, $i = \overline{1, m}$, условию (2), периодическому условию (3) и условиям импульсного воздействия в фиксированные моменты времени (4).

В работе [1] исследована периодическая краевая задача для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с импульсным воздействием при помощи численно-аналитического метода.

В статье [2] изучалась полупериодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений с импульсным воздействием методом введения функциональных параметров [3], где условие периодичности и условия импульсного воздействия задавались для искомой функции $u(t, x)$. Также относительно граничной функции $\psi(t)$ дополнительно предполагалось выполнение условия периодичности: $\psi(0) = \psi(T)$. В отличие от [2] в настоящей работе рассматривается полупериодическая краевая задача с импульсным воздействием для систем гиперболических уравнений, где условие периодичности (3) и условия импульсного воздействия (4) задаются для производной по переменной x искомой функции $u(t, x)$. Для исследования задачи (1)–(4) применяется метод введения функциональных параметров. С помощью этого метода получены коэффициентные условия однозначной разрешимости полупериодической краевой задачи с импульсным воздействием для системы гиперболических уравнений со смешанной производной (1)–(4). На основе эквивалентности корректных разрешимостей краевой задачи с импульсным воздействием для систем гиперболических уравнений и семейства периодических краевых задач с импульсным воздействием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлен критерий корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

Дополнительные параметры вводятся как значения искомой функции на характеристиках $t = t_i$, $i = \overline{0, m}$, $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$. С помощью прямых $t = t_i$, $i = \overline{1, m}$, область Ω разбивается на подобласти $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times [0, \omega]$, $r = \overline{1, m+1}$. Через $u_r(t, x)$ обозначим сужение функции $u(t, x)$ на Ω_r , $r = \overline{1, m+1}$. Вводятся параметры $\lambda_r(x) = u_r(t_{r-1}, x)$, $r = \overline{1, m+1}$ и задача (1)–(4) путем введения новых неизвестных функций $\tilde{u}_r(t, x) = u(t, x) - \lambda_r(x)$, $r = \overline{1, m+1}$, сводится к следующей эквивалентной задаче с параметрами:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u}_r + A(t, x) \lambda'_r(x) + C(t, x) \lambda_r(x) + f(t, x), \quad (5)$$

$$(t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, m+1},$$

$$\tilde{u}_r(t_{r-1}, x) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (6)$$

$$\tilde{u}_r(t, 0) = \psi(t) - \psi(t_{r-1}), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (7)$$

$$\lambda'_1(x) = \lambda'_{m+1}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \frac{\partial \tilde{u}_{m+1}(t, x)}{\partial x}, \quad x \in [0, \omega], \quad (8)$$

$$\lambda'_i(x) + \lim_{t \rightarrow t_i-0} \frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x} - \lambda'_{i+1}(x) = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Решением задачи (5)–(9) является система пар $(\lambda(x), \tilde{u}([t], x))$ с элементами $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{m+1}(x))'$, $\tilde{u}([t], x) = (\tilde{u}_1(t, x), \tilde{u}_2(t, x), \dots, \tilde{u}_{m+1}(t, x))'$, где функции $\tilde{u}_r(t, x)$ непрерывны на Ω_r , имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}_r(t, x)}{\partial t \partial x}$ на Ω_r , $r = \overline{1, m+1}$ (на линиях $t = t_{r-1}$ системе (5) удовлетворяют $\frac{\partial \tilde{u}_{r, \text{нп}}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{u}_{r, \text{нп}}(t, x)}{\partial t}$,

$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{r, \text{пр}}(t, x)}{\partial t \partial x}$), конечный левосторонний предел $\lim_{t \rightarrow t_{r-0}} \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial x}$, $r = \overline{1, m+1}$ и при $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$ удовлетворяет системе гиперболических уравнений (5) и условиям (6)–(9).

Задачи (1)–(4) и (5)–(9) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t, x)$ является решением (1)–(4), то система пар $(\lambda(x), \tilde{u}([t], x))$, где $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{m+1}(x))'$, $\tilde{u}([t], x) = (\tilde{u}_1(t, x), \tilde{u}_2(t, x), \dots, \tilde{u}_{m+1}(t, x))'$, $u_r(t, x) = u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, m+1}$, $\lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}(t, x) = u(T, x)$, $\lambda_r(x) = u_r(t_{r-1}, x)$, $\tilde{u}_r(t, x) = u_r(t, x) - u_r(t_{r-1}, x)$, $r = \overline{1, m+1}$, будет решением (5)–(9), и наоборот, если $(\lambda_r(x), \tilde{u}_r(t, x))$, $r = \overline{1, m+1}$, – решение (5)–(9), то функция $u(t, x)$, определяемая равенствами $u(t, x) = \lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, m+1}$, $u(T, x) = \lambda_{m+1}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_{m+1}(t, x)$ будет решением задачи (1)–(4).

В отличие от задачи (1)–(4) здесь появились начальные условия (6) как значения неизвестной функции на характеристиках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, m+1}$.

При фиксированных $\lambda_r(x), \lambda_r'(x)$, $r = \overline{1, m+1}$, функции $\{\tilde{u}_r(t, x)\}$, $r = \overline{1, m+1}$, являются решениями задачи Гурса на Ω_r с условиями (6), (7).

Введя обозначения $\tilde{v}_r(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial x}$, $\tilde{w}_r(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial t}$ из (6), (7) получим $\tilde{v}_r(t_{r-1}, x) = 0$, $\tilde{w}_r(t, 0) = \dot{\psi}(t)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r(t, x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \left[A(t, \xi) \tilde{v}_r(t, \xi) + B(t, \xi) \tilde{w}_r(t, \xi) + C(t, \xi) \tilde{u}_r(t, \xi) + \right. \\ \left. + f(t, \xi) + A(t, \xi) \lambda_r'(\xi) + C(t, \xi) \lambda_r(\xi) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r(t, x) = \int_{t_{r-1}}^t \left[A(\tau, x) \tilde{v}_r(\tau, x) + B(\tau, x) \tilde{w}_r(\tau, x) + C(\tau, x) \tilde{u}_r(\tau, x) + \right. \\ \left. + f(\tau, x) + A(\tau, x) \lambda_r'(x) + C(\tau, x) \lambda_r(x) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(t, x) = \psi(t) - \psi(t_{r-1}) + \int_{t_{r-1}}^t d\tau \int_0^x \left[A(\tau, \xi) \tilde{v}_r(\tau, \xi) + B(\tau, \xi) \tilde{w}_r(\tau, \xi) + \right. \\ \left. + C(\tau, \xi) \tilde{u}_r(\tau, \xi) + f(\tau, \xi) + A(\tau, \xi) \lambda_r'(\xi) + C(\tau, \xi) \lambda_r(\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Вместо $\tilde{v}_r(\tau, x)$ подставим соответствующую правую часть (11) и, повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим представление функции $\tilde{v}_r(t, x)$:

$$\tilde{v}_r(t, x) = G_{\nu r}(t, x, \tilde{v}_r) + H_{\nu r}(t, x, \tilde{u}_r, \tilde{w}_r) + F_{\nu r}(t, x) + D_{\nu r}(t, x) \lambda_r'(x) + E_{\nu r}(t, x) \lambda_r(x), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} G_{\nu r}(t, x, \tilde{v}_r) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) \tilde{v}_r(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ H_{\nu r}(t, x, \tilde{u}_r, \tilde{w}_r) = \int_{t_{r-1}}^t \left[B(\tau_1, x) \tilde{w}_r(\tau_1, x) + C(\tau_1, x) \tilde{u}_r(\tau_1, x) \right] d\tau_1 + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} \left[B(\tau_\nu, x) \tilde{w}_r(\tau_\nu, x) + C(\tau_\nu, x) \tilde{u}_r(\tau_\nu, x) \right] d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\
 F_{\nu r}(t, x) & = \int_{t_{r-1}}^t f(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\
 D_{\nu r}(t, x) & = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\
 E_{\nu r}(t, x) & = \int_{t_{r-1}}^t C(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} C(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1,
 \end{aligned}$$

$(t, x) \in \Omega_r, r = \overline{1, m+1}$.

Из условий согласования в точках $(t_{r-1}, 0), r = \overline{1, m+1}$, вытекает:

$$\lambda_r(0) = \psi(t_{r-1}), \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{14}$$

Переходя в правой части (13) к пределу при $t \rightarrow t_r - 0$, находим $\lim_{t \rightarrow t_r - 0} \tilde{v}_r(t, x), r = \overline{1, m+1}, x \in [0, \omega]$, подставляя их в (8), (9) для неизвестных вектор-функций $\lambda_r(x), r = \overline{1, m+1}$, получаем систему $m+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных:

$$Q_\nu(x) \lambda'(x) = -E_\nu(x) \lambda(x) - F_\nu(x) - H_\nu(x, \tilde{u}, \tilde{w}) - G_\nu(x, \tilde{v}), \tag{15}$$

где

$$Q_\nu(x) = \begin{vmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & -[I + D_{\nu(m+1)}(T, x)] \\ I + D_{\nu 1}(t_1, x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu 2}(t_2, x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu m}(t_m, x) & -I \end{vmatrix},$$

I – единичная матрица размерности $(n \times n)$,

$$E_\nu(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -E_{\nu(m+1)}(T, x) \\ E_{\nu 1}(t_1, x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\nu 2}(t_2, x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_{\nu m}(t_m, x) & 0 \end{vmatrix},$$

$$F_\nu(x) = (-F_{\nu(m+1)}(T, x), F_{\nu 1}(t_1, x) - \varphi_1(x), \dots, F_{\nu m}(t_m, x) - \varphi_m(x))',$$

$$H_\nu(x, \tilde{u}, \tilde{w}) = (-H_{\nu(m+1)}(T, x, \tilde{u}_{m+1}, \tilde{w}_{m+1}), H_{\nu 1}(t_1, x, \tilde{u}_1, \tilde{w}_1), \dots, H_{\nu m}(t_m, x, \tilde{u}_m, \tilde{w}_m))',$$

$$G_\nu(x, \tilde{v}) = (-G_{\nu(m+1)}(T, x, \tilde{v}_{m+1}), G_{\nu 1}(t_1, x, \tilde{v}_1), \dots, (G_{\nu m}(t_m, x, \tilde{v}_m))'.$$

Если известны функции $\lambda_r(x), \lambda'_r(x), r = \overline{1, m+1}$, то решая систему интегральных уравнений (10)–(12), найдем функции $\tilde{u}_r(t, x), \tilde{w}_r(t, x), \tilde{v}_r(t, x)$ и из системы функций $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$ получим решение исходной задачи. Если известны функции $\tilde{u}_r(t, x), \tilde{w}_r(t, x), \tilde{v}_r(t, x)$, то решая уравнение (15) при условии (14), найдем $\lambda'_r(x), \lambda_r(x)$ и снова из системы функций $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$ найдем решение задачи (1)–(4).

Здесь неизвестными являются как функции $\lambda_r(x)$, $\lambda'_r(x)$, так и функции $\tilde{u}_r(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решения функциональных соотношений (10)–(12), (15) с условием (14) находятся как пределы последовательностей $\{\lambda_r^{(k)}(x)\}$, $\{\lambda'_r{}^{(k)}(x)\}$, $\{\tilde{u}_r^{(k)}(t, x)\}$, $\{\tilde{w}_r^{(k)}(t, x)\}$, $\{\tilde{v}_r^{(k)}(t, x)\}$, определяемых по следующему алгоритму:

0 – Шаг. Предполагая в правой части (15) $\lambda_r(x) = \psi(t_{r-1})$, $\tilde{u}_r(t, x) = \psi(t) - \psi(t_{r-1})$, $\tilde{w}_r(t, x) = \dot{\psi}(t)$, $\tilde{v}_r(t, x) = 0$, и считая, что матрица $Q_\nu(x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$, из уравнения (15) найдем $\{\lambda_r^{(0)}(x)\}$, $r = \overline{1, m+1}$. Используя условия (14), находим функции $\lambda_r^{(0)}(x)$: $\lambda_r^{(0)}(x) = \psi(t_{r-1}) + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi$. Из системы интегральных уравнений (10) – (12), где $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $\lambda'_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, определим функции $\tilde{u}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}_r^{(0)}(t, x)$, $r = \overline{1, m+1}$.

1 – Шаг. Из системы (15), где в правой части $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $\tilde{u}_r(t, x) = \tilde{u}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x) = \tilde{w}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x) = \tilde{v}_r^{(0)}(t, x)$, $r = \overline{1, m+1}$, в силу обратимости $Q_\nu(x)$ при $x \in [0, \omega]$ найдем $\{\lambda_r^{(1)}(x)\}$, $r = \overline{1, m+1}$. Вновь используя условия (14), находим $\lambda_r^{(1)}(x)$: $\lambda_r^{(1)}(x) = \psi(t_{r-1}) + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi$. Из систем интегральных уравнений (10)–(12), где $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$, $\lambda'_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$, определим функции $\tilde{u}_r^{(1)}(t, x)$, $\tilde{w}_r^{(1)}(t, x)$, $\tilde{v}_r^{(1)}(t, x)$, $r = \overline{1, m+1}$. И т.д.

Процесс нахождения неизвестных функций метод введения функциональных параметров разбивает на два этапа:

- 1) нахождение введенных функциональных параметров $\lambda_r(x)$, $\lambda'_r(x)$ из соотношения (15) с условием (14).
- 2) нахождение неизвестных функций $\tilde{u}_r(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x)$ из системы интегральных уравнений (10)–(12).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1)–(4).

Теорема 1. Пусть при некотором ν , $\nu \in \mathbb{N}$, $(n(m+1) \times n(m+1))$ – матрица $Q_\nu(x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} a) \quad & \| [Q_\nu(x)]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(x), \\ b) \quad & q_\nu(x) = \gamma_\nu(x) \cdot \left[e^{\alpha(x)h} - 1 - \sum_{j=1}^{\nu} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right] \leq \chi < 1, \end{aligned}$$

где $\gamma_\nu(x)$ – положительная, непрерывная по $x \in [0, \omega]$ функция, $\alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(t, x)\|$,

$$h = \max_{i=\overline{1, m+1}} (t_i - t_{i-1}), \quad \chi - const.$$

Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1)–(4) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме доказательства теоремы из [2].

Основным условием однозначной разрешимости задачи (1)–(4) является обратимость $(n(m+1) \times n(m+1))$ – матрицы $Q_\nu(x)$, которая строится через сумму повторных интегралов из матрицы $A(t, x)$ и единичные матрицы. В работе [2] приведена лемма, которая устанавливает эквивалентность обратимости матрицы $Q_\nu(x)$ размерности $(n(m+1) \times n(m+1))$ обратимости матрицы $M_\nu(x) = - \prod_{s=m+1}^1 [I + D_{\nu i}(t_i, x)]$ размерности $(n \times n)$. С помощью этой леммы также можно получить рекуррентные формулы нахождения блочных элементов матрицы $[Q_\nu(x)]^{-1}$.

В дальнейшем будем исследовать вопросы корректной разрешимости задачи (1)–(4).

Определение 1. Краевая задача (1)–(4) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t, x)$, $\psi(t)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, она имеет единственное решение $u(t, x)$ и справедливо неравенство

$$\max \left(\max_{(t,x) \in \Omega} \|u(t, x)\|, \max_{(t,x) \in \Omega} \left\| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right\|, \max_{(t,x) \in \Omega} \left\| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right\| \right) \leq$$

$$\leq K \max \left(\max_{(t,x) \in \Omega} \|f(t,x)\|, \max_{t \in [0,T]} \|\psi(t)\|, \max_{i=\overline{1,m}} \max_{x \in [0,\omega]} \|\varphi_i(x)\| \right), \quad (16)$$

где константа K не зависит от $f(t,x)$, $\psi(t)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,m}$.

Рассмотрим семейство периодических краевых задач с импульсным воздействием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in [0,\omega], \quad v \in R^n, \quad (17)$$

$$v(0,x) = v(T,x), \quad x \in [0,\omega], \quad (18)$$

$$v(t_i - 0, x) - v(t_i + 0, x) = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,m}. \quad (19)$$

При фиксированных $x \in [0,\omega]$ задача (17), (18), (19) является периодической краевой задачей с импульсным воздействием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопросы существования и единственности решения задачи (17), (18), (19) при фиксированных $x \in [0,\omega]$ исследованы многими авторами, обзор и библиографию которых можно посмотреть в работах [4, 5]. В работе [6] задача (17)–(19) была исследована и решена методом параметризации [7]. Получены необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости периодических и двухточечных краевых задач с импульсным воздействием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных [8].

При изменении переменной x на $[0,\omega]$ получим семейство периодических краевых задач с импульсным воздействием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Справедлива

Теорема 2. *Краевая задача (1)–(4) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима задача (8), (9).*

Условия теоремы 1 обеспечивают не только однозначную, но и корректную разрешимость задачи (1)–(4). Кроме того, на основе теоремы 2 доказывается, что условия теоремы 1 являются также и необходимыми условиями корректной разрешимости полупериодической краевой задачи с импульсным воздействием для систем гиперболических уравнений (1)–(4).

Теорема 3. *Краевая задача (1)–(4) корректно разрешима тогда и только тогда, когда существует ν , $\nu \in \mathbb{N}$, при котором $(n(m+1) \times n(m+1))$ – матрица $Q_\nu(x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства а), б) Теоремы 1.*

Доказательства теорем 2 и 3 проводится аналогично схеме доказательств теорем 2 и 3 из [9], с учетом специфики рассматриваемой задачи.

Цитированная литература

1. Ткач А.В. // Nonlinear Oscillations. 2001. Vol. 8, № 2. С. 278 – 288.
2. Асанова А.Т., Медетбекова Р.А. // Матем. журнал. 2009. Т. 9, № 3. С. 13 – 21.
3. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1343 – 1354.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев, 1992.
5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
6. Тлеулесова А.Б. // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 5. С. 114 – 122.
7. Джумабаев Д.С. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
8. Тлеулесова А.Б. // Матем. журнал. 2005. Т. 5, № 3. С. 87 – 95.
9. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337 – 346.

Поступила в редакцию 10.09.2009г.

УДК 681.5

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Э. Т. АШЫРОВА, Дж. МАМЫТОВ, Ж. ШАРШЕНАЛИЕВ

Институт автоматки и информационных технологий
720071 Бишкек пр. Чуй, 265-а avtomatika_nankr@mail.ru
Кыргызский государственный университет архитектуры и строительства

Рассматривается задача стабилизации системы со скалярным модальным управлением. Предложен алгоритм размещения собственных чисел позиционной замкнутой системы управления. Осуществлен синтез, обеспечивающий стабилизацию, за счет свойств организации коэффициента усиления в виде не только одной матрицы, а серии матриц n -го порядка.

Введение. Любой инженерный проект построения динамических систем основывается на решении уравнений движения и равновесия системы. Задачам стабилизации динамических систем посвящены многочисленные исследования, в частности, работы [2, 3, 4] с наиболее полной библиографией.

Существует два принципа управления динамическими объектами как в программной, так и в позиционной системе с обратной связью, использующие как априорную, так и текущую информацию (рис.1).

В инженерной практике наиболее известны два метода исследования: метод оптимального управления, призванный обеспечить наилучший режим относительно принятого критерия качества в задачах программирования оптимальных траекторий и синтеза корректирующих устройств, и метод модального управления, формирующий цепи обратных связей, придающих системе желаемое распределение корней. При модальном управлении корням соответствуют составляющие свободного движения системы, то есть моды.

В данной работе качество стабилизации рассматриваемой системы достигается путем управления модами системы, что позволяет построить систему с заданным спектром, то есть с заданным декрементом затухания.

Процесс управления можно осуществить путем управления собственными значениями (числами) системы, то есть достичь заранее заданной динамики фазовой траектории. Этот подход связан с методом обеспечения степени устойчивости, разработанным Я.З. Цыпкиным, Н.Н. Красовским, А.М. Летовым, А.М. Михайловым и другими учеными.

Keywords: *stationary equation, linear governed system, stabilization problem, modal control*

2000 Mathematics Subject Classification: 49J15, 49N35

© Э. Т. Ашырова, Дж. Мамытов, Ж. Шаршеналиев, 2009.

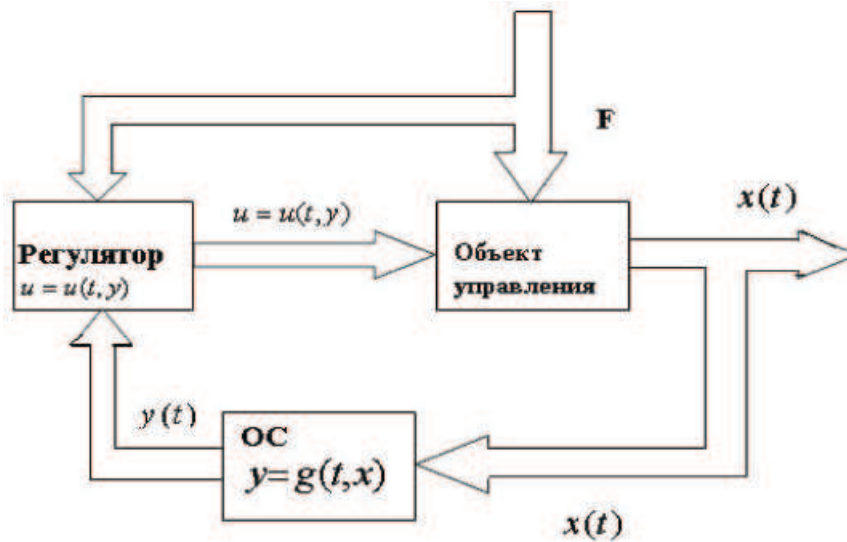


Рис. 1: Система управления с комбинированной гибкой обратной связью

Несмотря на очевидное различие между методами модального и оптимального управления, все же между ними имеется определенная связь.

В теории оптимального управления каждому оптимизирующему функционалу соответствует определенный спектр системы с обратной связью и, наоборот, каждому заданному спектру замкнутой системы соответствует определенный набор оптимизирующих функционалов.

Особым достоинством модального управления является простота вычислительных процедур. Для стационарного линейного объекта модальность управления обеспечивается наличием у него свойств управляемости и наблюдаемости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему с одним управляющим воздействием:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad (1)$$

где $A - n \times n$, $b - n \times 1$, $x - n \times 1$ – матрицы, а u – скалярное управление.

Передаточная функция равна

$$W(p) = (pE_n - A)^{-1}, \quad (2)$$

$E_n - n \times n$ – единичная матрица.

Для матрицы A состояния системы из (1), (2) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det(\lambda E_n - A) = 0.$$

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему с одним управляющим воздействием вида (1). Пусть p_0, p_1, \dots, p_{n-1} – коэффициенты характеристического многочлена матрицы A , то есть

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0. \quad (3)$$

Известно, что p_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) определенным образом выражаются через элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) матрицы A [5]. Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ – требуемые собственные числа

матрицы $\bar{A} = A - bM$, где $M - 1 \times n$ матричный коэффициент усиления управления, то есть $u = -Mx$.

Задача. Требуется найти матрицу M такую, что $A - bM$ имела бы заданный набор собственных чисел $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$.

2. Решение задачи. Известно [1, 2, 3], что необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы размещения собственных чисел является условие:

$$\det K \neq 0, \text{ где } K = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b). \quad (4)$$

Рассмотрим следующие два многочлена n -й степени относительно λ и μ :

$$R_n(\lambda) = |\lambda E - \bar{A}| = \lambda^n + \bar{p}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{p}_1\lambda + \bar{p}_0,$$

$$Q_n(\mu) = (\mu - \nu_1)(\mu - \nu_2)\dots(\mu - \nu_n) = \mu^n + Q_{n-1}(\nu)\mu^{n-1} + \dots + Q_1(\nu)\mu + Q_0(\nu),$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, а $Q_j(\nu)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) – известные функции от ν , которые по формулам Виета известным образом выражаются через корни $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ многочлена $Q_n(\mu)$. Далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ и μ многочленов $R_n(\lambda)$ и $Q_n(\mu)$, получим

$$\bar{p}_j = Q_j(\nu) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5)$$

Отметим, что поскольку $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ заданные (требуемые) конкретные числа, то $Q_j(\nu)$ также будут конкретными числами согласно формулам Виета.

Теперь, в силу условия (5) многочлен $R_n(\lambda)$ имеет n корней $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, которые определяем следуя [2] из матричного уравнения:

$$MS = \bar{M}, \quad (6)$$

где $S - n \times n$, $M - 1 \times n$ и $\bar{M} - 1 \times n$ матрицы, которые строятся следующим образом:

$$a^0. S = (S_1, S_2, \dots, S_n), \text{ где}$$

$$S_n = b, \quad S_{n-1} = Ab + p_{n-1}b, \quad \dots, \quad S_2 = A^{n-2}b + p_{n-1}A^{n-3}b + \dots + p_2b,$$

$$S_1 = A^{n-1}b + p_{n-1}A^{n-2}b + \dots + p_1b.$$

Отметим, что матрица S является неособой.

$$b^0. \bar{M} = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n), \quad \bar{m}_{k+1} = \bar{p}_k - p_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \text{ или в силу (5)}$$

$$\bar{m}_{k+1} = Q_k(\nu) - p_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Поэтому из (6) находим:

$$M(\nu) = \bar{M}(\nu)S^{-1}, \quad (7)$$

то есть находим элементы $m_{k+1}(\nu)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) искомой строчной матрицы $M(\nu)$.

Если замыкаем систему (1) управлением $u = -M(\nu)x = -\bar{M}(\nu)S^{-1}x$, то получим:

$$\frac{dx}{dt} = (A - b\bar{M}(\nu)S^{-1})x = \bar{A}(\nu)x. \quad (8)$$

Тогда, в силу алгоритма решения проблемы размещения собственных чисел [2, 4], а также в силу (5) характеристический многочлен матрицы $\bar{A}(\nu)$ имеет желаемые корни $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, то есть управление $u = -M(\nu)x = -\bar{M}(\nu)S^{-1}x$ решает проблему размещения собственных чисел.

Замечание 1. Отметим, что если выполнены условия $\text{Re}\lambda_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то управление $u = -\bar{M}(\nu)S^{-1}x$ решает вопрос о стабилизации управляемой системы (1).

Если же теперь в (1) произвести замену переменных $x = Kz$, где K определяется согласно (4), то получим [4]:

$$\frac{dz}{dt} = A_0z + b_0u, \tag{9}$$

где $A_0 = K^{-1}AK$, $b_0 = K^{-1}b$.

Нетрудно подсчитать, что

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь p_0, p_1, \dots, p_{n-1} – коэффициенты многочлена (3).

Если для управляемой системы (9) управление u построить в виде $u = -\bar{M}(\nu)S^{-1}Kz$, то характеристический многочлен матрицы $A_0 - b_0\bar{M}(\nu)S^{-1}K$ также будет иметь в качестве своих корней числа: $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$. В самом деле, с учетом обозначений из (9) и (10):

$$|\lambda E - A_0 + b_0\bar{M}(\nu)S^{-1}K| = |\lambda K^{-1}K - K^{-1}AK + K^{-1}b\bar{M}(\nu)S^{-1}K| = |K^{-1}||\lambda E - b\bar{M}(\nu)S^{-1}K|.$$

Последнее выражение совпадает с характеристическим многочленом системы (8), который имеет корни $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$.

Таким образом, путем подбора $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ можно решить вопросы стабилизации, колебаний и другие вопросы для управляемых систем.

3. Основной результат: алгоритм. Из всего изложенного выше можно предложить следующий алгоритм решения проблемы размещения собственных чисел матрицы замкнутой линейной стационарной системы и вопросов стабилизации ее решения.

1⁰. Вычислить $n \times n$ матрицу $K = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$ и проверить, что $|K| \neq 0$. Найти K^{-1} .

2⁰. Произвести в данной системе замену переменных $x = Kz$ и получить матрицу $A_0 = K^{-1}AK$, $b_0 = K^{-1}b$. Последний столбец A_0 дает с обратным знаком коэффициенты p_0, p_1, \dots, p_{n-1} характеристического многочлена (3), которые весьма нужны для дальнейшего.

3⁰. Составить скалярные величины $Q_0(\nu), Q_1(\nu), \dots, Q_{n-1}(\nu)$ по следующим формулам Виета:

$$Q_0(\nu) = (-1)^n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n,$$

$$Q_1(\nu) = (-1)^{n-1} [\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1} + \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-2} + \dots + \nu_2 \nu_3 \dots \nu_n],$$

.....

$$Q_{n-2}(\nu) = \nu_1 \nu_2 + \nu_1 \nu_3 + \dots + \nu_1 \nu_n + \nu_2 \nu_3 + \dots + \nu_{n-1} \nu_n,$$

$$Q_{n-1}(\nu) = -(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n).$$

4⁰. Составить $1 \times n$ матрицу $\bar{M}(\nu) = (\bar{m}_1(\nu), \bar{m}_2(\nu), \dots, \bar{m}_n(\nu))$, где

$$\bar{m}_{k+1}(\nu) = Q_k(\nu) - p_k \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

5⁰. Составить $1 \times n$ неособую матрицу $M(\nu) = (m_1)(\nu), m_2)(\nu), \dots, m_n)(\nu)$ и найти S^{-1} .
Здесь

$$S_n = b, \quad S_{n-1} = AS_n + p_{n-1}b, \dots, S_2 = AS_3 + p_2b, S_1 = AS_2 + p_1b.$$

6⁰. Определить $1 \times n$ матрицу $M(\nu) = (m_1)(\nu), m_2)(\nu), \dots, m_n)(\nu)$ по формуле (7):

$$M(\nu) = \overline{M}(\nu)S^{-1}.$$

Тогда управление $u = -M(\nu)Kz$ решает проблему размещения собственных чисел и стабилизации для системы (9), а управление $u = -M(\nu)z$ решает аналогичную задачу для исходной системы (1).

Замечание 2. Коэффициенты p_0, p_1, \dots, p_{n-1} характеристического многочлена заданной матрицы A можно было бы вычислить, не прибегая к преобразованию (10), по формулам [5]:

$$p_k = (-1)^k P_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (11)$$

где p_k есть сумма всех главных миноров порядка k этой матрицы. Однако, когда n достаточно большое число, нам кажется более приемлемым вычисление этих коэффициентов преобразованием (10).

Замечание 3. Когда число n невелико (например, $n = 2$, либо 3, либо 4), то коэффициенты p_k следует вычислять по формулам (11) и применять предложенный алгоритм исключая пункт 2⁰.

4. Пример. Пусть в системе (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Следуя предложенному выше алгоритму, последовательно получим:

$$1^0. K = (b \quad Ab \quad A^2b), \quad Ab = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2b = \begin{pmatrix} 33 \\ 36 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 33 \\ 3 & 10 & 36 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad |K| = 6 \neq 0,$$

$$K^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & -12 & -6 \\ -12 & 15 & -9 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2^0. A_0 = K^{-1}AK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b_0 = K^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Отсюда } p_0 = -8, \quad p_1 =$$

14, $p_2 = -7$, то есть сразу получаем коэффициенты характеристического многочлена $|A - \lambda E|$.

3⁰. Взяв в комплексной плоскости произвольные три числа ν_1, ν_2, ν_3 , составим величины $Q_0(\nu), Q_1(\nu), Q_2(\nu)$, где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ по формулам:

$$Q_0(\nu) = -\nu_1\nu_2\nu_3, \quad Q_1(\nu) = \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3, \quad Q_2(\nu) = -(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3).$$

$$4^0. \overline{M}(\nu) = (\overline{m}_1)(\nu), \overline{m}_2)(\nu), \overline{m}_3)(\nu), \quad \text{где } \overline{m}_1 = Q_0(\nu) - p_0 = -\nu_1\nu_2\nu_3 + 8, \\ \overline{m}_2 = Q_1(\nu) - p_1 = -\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3 - 14, \quad \overline{m}_3 = Q_2(\nu) - p_2 = -(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) + 7.$$

5⁰. Составим матрицу [2] $S = (S_1, S_2, S_3)$, где

$$S_3 = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = Ab + p_2b = \begin{pmatrix} -12 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad S_1 = AS_2 + p_1b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 12 & -12 & 3 \\ 8 & -11 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6⁰. $M(\nu) = \overline{M}(\nu)S^{-1}$, отсюда:

$$\begin{aligned}m_1(\nu) &= \frac{1}{3}[\bar{m}_1(\nu) + \bar{m}_2(\nu) + \bar{m}_3(\nu)], \\m_2(\nu) &= -\frac{1}{2}[\bar{m}_1(\nu) - \bar{m}_2(\nu) - \bar{m}_3(\nu)], \\m_3(\nu) &= -\frac{1}{2}[\bar{m}_1(\nu) + 2\bar{m}_2(\nu) + 6\bar{m}_3(\nu)].\end{aligned}$$

В частности, если взять в качестве $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = -3$, $\nu_3 = -4$, то $\bar{m}_1 = 32$, $\bar{m}_2 = 12$, $\bar{m}_3 = 16$, $m_1 = 20$, $m_2 = -60$, $m_3 = 136$, $M = (m_1, m_2, m_3) = (20, -60, 136)$.

Если принять в качестве управления $u = -Mx$, то оно будет стабилизировать систему (1). А если взять управление в виде $u = -MKx$, то оно будет стабилизировать систему (9), т.е. характеристические многочлены $|\lambda E - (A + MS^{-1})|$ и $|\lambda E - (A_0 + MS^{-1}K)|$ имеют одни и те же корни $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = -3$, $\nu_3 = -4$.

Если взять другие значения ν_1, ν_2, ν_3 из комплексной плоскости, то получим другую матрицу \bar{M} и, следовательно, другую M .

Таким образом, в зависимости от подбора чисел ν_1, ν_2, ν_3 получим серии величин M .

Заключение. В работе, для скалярного управления разработана методика его построения и реализующий ее алгоритм, позволяющие построить серию желаемых матриц n -го порядка, полностью отвечающих требованиям проблемы размещения собственных чисел.

Цитированная литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
2. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М., 1986.
3. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск, 1972.
4. Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л., 1981.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.

Поступила в редакцию 12.03.2009г.

УДК 517.956, 517.977.1, 517.977.5

ОБ ОПТИМИЗАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ–ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А. М. Аязбаева, М. Т. Дженалиев, К. Б. Иманбердиев

Институт математики МОН РК

050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

КазНУ им. аль-Фараби

050012 Алматы ул.Масанчи, 39/47 kanzharbek-ikb@mail.ru

В ограниченной двумерной прямоугольной области рассматривается задача Коши-Дирихле для уравнения Пуассона. Изучаемая некорректная граничная задача сведена к задаче оптимального управления. В терминах решения сопряженной граничной задачи установлены условия оптимальности. Найден критерий сильной разрешимости некорректной граничной задачи.

Введение. В последнее время среди специалистов по уравнениям математической физики значительно возрос интерес к задачам, не являющимся корректными по Ж.Надамард [1]. Они всегда привлекали внимание исследователей. Прежде всего, это связано с их важностью не только в теоретическом плане, но также и с тем, что с ними приходится сталкиваться во многих прикладных задачах из различных областей науки и техники. Здесь можно отметить классические работы Ж.Надамард [1], А.Н.Тихонова [2], М.М.Лаврентьева [3] и многих других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

В данной работе для решения исходной задачи мы применяем методы оптимального управления.

1. Постановка задачи. В области $\Omega = \{x, t \mid 0 < x < \pi, -1 < t < 1\}$ рассматривается следующая граничная задача:

$$y_{tt}(x, t) + y_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (-1, 1), \quad (1)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(\pi, t) = 0, \quad (2)$$

$$y(x, -1) = \varphi_1(x), \quad y_t(x, -1) = \varphi_2(x). \quad (3)$$

Будем предполагать, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in L_2(\Omega), \quad \varphi_1 \in H_0^1(0, \pi), \quad \varphi_2 \in L_2(0, \pi). \quad (4)$$

Keywords: *spectral problem, eigenfunction, spectrum*

2000 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

© А. М. Аязбаева, М. Т. Дженалиев, К. Б. Иманбердиев, 2009.

Поскольку по переменной t заданы условия Коши, задача является некорректно поставленной. Она изучалась многими исследователями.

В книге R.Lattes, J.L.Lions [4] показано, что задача (1)–(3) является некорректно поставленной в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. разрешающий граничную задачу (1.1) оператор L_C^{-1} неограничен в $L_2(\Omega)$.

Отметим, что критерий корректности однородной смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона в прямоугольной области был установлен в работе Кальменова Т.Ш. и Исковой У.А. [5]. В ней критерий корректности был получен в терминах собственных значений и коэффициентов разложения правой части уравнения по полной ортонормированной системе собственных функций некоторого семейства обобщенных спектральных задач с наличием оператора отклонения-инвертирования одной из двух независимых переменных. В работе [6] рассматривается некорректная задача для уравнения теплопроводности. Общий метод регуляризации построения приближенного решения некорректных задач математической физики был предложен Тихоновым А.Н. [2]. В работе R.Lattes и J.-L.Lions [4] для регуляризации некорректно поставленных краевых задач предлагается метод квазиобращения путем замены исходного уравнения семейством вспомогательных с малым параметром (имеющих более высокий дифференциальный порядок), для каждого из которых решается корректная граничная задача. Особенности и вопросы регуляризации задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучают Melnikova I.V. и Anufrieva U.A. [7], где на основе применения методов полугрупп ими получены алгоритмы построения точных и регуляризованных решений.

2. Задача оптимизации. Поставим в соответствие задаче (1)–(3) следующую оптимизационную задачу:

$$y_{tt}(x, t) + y_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (5)$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad (6)$$

$$y_t(x, -1) = \varphi_2(x), \quad y(x, 1) = \psi(x), \quad \psi \in L_2(0, \pi), \quad (7)$$

функционал оптимальности:

$$\mathcal{J}(\psi) = \int_0^\pi |y(x, -1) - \varphi_1(x)|^2 dx \rightarrow \min_{\psi} \quad (8)$$

где ψ играет роль функции управления.

Таким образом, мы сформулировали задачу оптимального управления в виде (5)–(8). Известно, что в теории оптимального управления задача (5)–(8) также некорректна.

3. Регуляризация задачи оптимизации. Эффективным инструментом решения некорректной задачи является метод регуляризации. Используя этот метод, для рассматриваемой задачи нужно выбрать стабилизатор. В нашем случае управление выбирается из множества $\mathcal{U} \equiv L_2(0, \pi)$, поэтому функция $\alpha \cdot \int_0^\pi |\psi(x)|^2 dx$ может служить стабилизатором. Этот математический прием называют регуляризацией по Тихонову. Здесь $\alpha > 0$.

Далее, на множестве \mathcal{U} рассматривается задача минимизации функционала:

$$\mathcal{J}_\alpha(\psi) = \int_0^\pi |y(x, -1) - \varphi_1(x)|^2 dx + \alpha \int_0^\pi |\psi(x)|^2 dx \rightarrow \min_{\psi \in \mathcal{U}} \quad (9)$$

Для задачи оптимизации (5)–(7) и (9) необходимо получить условия оптимальности.

Определение 1. Элемент $\bar{\psi} \in L_2(0, \pi)$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{J}(\bar{\psi}) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi),$$

называется оптимальным управлением.

Ведем следующие обозначения:

$y(x, t, \psi)$ – есть решение задачи (5)–(7), соответствующее заданному управлению $\psi(x)$;

$$\pi(\psi_1, \psi_2) = \int_0^\pi [y(x, -1; \psi_1) - y(x, -1; 0)][y(x, -1; \psi_2) - y(x, -1; 0)]dx + \alpha \cdot \int_0^\pi \psi_1(x) \cdot \psi_2(x)dx;$$

$$L(\psi_1) = \int_0^\pi [\varphi_1(x) - y(x, -1; 0)][y(x, -1; \psi_1) - y(x, -1; 0)]dx,$$

здесь $\pi(\psi_1, \psi_2)$ – билинейная непрерывная форма из \mathcal{U} , а $L(\psi_1)$ – непрерывная линейная форма. Используя эти обозначения, функционал (9) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{J}_\alpha(\psi) = \pi(\psi, \psi) - 2L(\psi) + \int_0^\pi |y(x, -1; 0) - \varphi_1(x)|^2 dx.$$

4. Существование решения регуляризованной задачи. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Поскольку $\pi(\psi, \psi)$ – билинейная непрерывная симметричная форма из \mathcal{U} и удовлетворяет условию

$$\pi(\psi, \psi) \geq c \|\psi\|^2, \quad (10)$$

то для задачи (5)–(9) найдется такой элемент $\bar{\psi} \in \mathcal{U}$:

$$\mathcal{J}(\bar{\psi}) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi),$$

и этот элемент будет единственным.

Доказательство. Существование. Пусть $\{\psi_n\} \in \mathcal{U}$ – минимизирующая последовательность, т.е.

$$\mathcal{J}(\psi_n) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi). \quad (11)$$

Согласно условию (10)

$$\mathcal{J}(\psi_n) \geq c \|\psi_n\|^2 - c_1 \|\psi_n\|, \quad (12)$$

из соотношения (11) и (12)

$$\|\psi_n\| \leq \text{const}. \quad (13)$$

Из последовательности $\{\psi_n\}$ в (13) на множестве \mathcal{U} можно выделить такую подпоследовательность $\{\psi_\mu\}$, которая слабо сходится, т.е.

$$\psi_\mu \rightarrow \omega. \quad (14)$$

Поскольку \mathcal{U} – слабо замкнутое множество, то

$$\omega \in \mathcal{U}.$$

Так как функция $\psi \rightarrow \pi(\psi, \psi)$ на \mathcal{U} слабо полунепрерывна снизу, а $\psi \rightarrow L(\psi)$ непрерывна в слабой топологии, то получаем:

$$\underline{\lim} \mathcal{J}(\psi_\mu) \geq \mathcal{J}(\omega). \quad (15)$$

Далее, из соотношений (11) и (15) имеем:

$$\omega \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{J}(\omega) \leq \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi).$$

Таким образом, выполняется равенство

$$\mathcal{J}(\omega) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi)$$

и для завершения доказательства достаточно принять $\bar{\psi} = \omega$.

Единственность. Поскольку $\psi \rightarrow \pi(\psi, \psi)$ строго выпуклая функция (т.е. при $\psi_1 \neq \psi_2$ выполняется неравенство $\pi((1-\theta)\psi_1 + \theta\psi_2, (1-\theta)\psi_1 + \theta\psi_2) < (1-\theta)\pi(\psi_1, \psi_1) + \theta\pi(\psi_2, \psi_2)$, здесь $\theta \in (0, 1)$), тогда и $\psi \rightarrow \mathcal{J}(\psi)$ строго выпуклая функция. Пусть минимум достигается на \mathcal{U} в двух элементах ψ_1 и ψ_2 , т.е.

$$\mathcal{J}(\psi_1) = \mathcal{J}(\psi_2) = \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi).$$

Из выпуклости множества \mathcal{U} следует $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \in \mathcal{U}$, а для $\psi_1 \neq \psi_2$ из строгой выпуклости функционала $\psi \rightarrow \mathcal{J}(\psi)$ имеем:

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)\right) < \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\psi).$$

Отсюда может быть только $\psi_1 = \psi_2 = \bar{\psi}$. Единственность доказана.

5. Условие оптимальности в терминах производной по направлению [8]. Решение задачи (5)–(7), (9) обозначим:

$$\bar{\psi}(x) = \arg \min_{\psi \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_\alpha(\psi).$$

Согласно результатам работы [8] справедливо следующее

Утверждение 1. $\bar{\psi} \in \mathcal{U}$ является функцией оптимального управления только тогда, когда выполняется следующее неравенство:

$$\langle \mathcal{J}_{\alpha\psi}(\bar{\psi}), \psi - \bar{\psi} \rangle \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U} \equiv L_2(0, \pi),$$

т.е. выполняется:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x)] \cdot y_\psi(x, -1; \bar{\psi}) \cdot [\psi - \bar{\psi}] dx + \\ + \alpha \cdot \int_0^\pi \bar{\psi}(x) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}. \quad (16) \end{aligned}$$

Преобразуем неравенство (16). Для этого граничную задачу (5)–(7) запишем в операторном виде: $\mathcal{A}y = \mathcal{F} \triangleq \{f, \varphi_2, \psi\}$. Решение $y(x, t; \psi)$ этого операторного уравнения можно записать в следующем виде: $y(x, t; \psi) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{A}_0^{-1}f + \mathcal{A}_1^{-1}\varphi_2 + \mathcal{A}_2^{-1}\psi$.

Далее, берем производную этого решения по направлению $\psi - \bar{\psi}$:

$$y_\psi(x, t; \bar{\psi}) \cdot [\psi - \bar{\psi}] = \mathcal{A}_2^{-1}[\psi - \bar{\psi}] = \mathcal{A}_2^{-1}\psi - \mathcal{A}_2^{-1}\bar{\psi} = y(x, t; \psi) - y(x, t; \bar{\psi}),$$

или $y_\psi(x, t; \bar{\psi}) \cdot [\psi - \bar{\psi}] = y(x, t; \psi) - y(x, t; \bar{\psi})$.

Таким образом, неравенство (15) принимает вид:

$$\int_0^\pi [y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x)] \cdot [y(x, -1; \psi) - y(x, -1; \bar{\psi})] dx + \\ + \alpha \cdot \int_0^\pi \bar{\psi}(x) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}. \quad (17)$$

6. Сопряженная граничная задача. Далее, чтобы сформулировать сопряженную граничную задачу сначала рассмотрим следующее выражение:

$$\int_{-1}^1 \int_0^\pi [y_{tt}(x, t; \bar{\psi}) + y_{xx}(x, t; \bar{\psi})] \cdot v(x, t) dx dt.$$

Преобразуя это выражение, находим:

$$\int_{-1}^1 \int_0^\pi [y_{tt} + y_{xx}] \cdot v(x, t) dx dt = \left| \begin{array}{l} v(0, t) = v(\pi, t) = 0; \\ v_t(x, -1) = y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x); \\ v(x, 1) = 0. \end{array} \right| = \\ = \int_{-1}^1 \int_0^\pi y(x, t) \cdot [v_{tt} + v_{xx}] dx dt - \int_0^\pi y_t(x, -1; \bar{\psi}) \cdot v(x, -1) dx - \\ - \int_0^\pi y(x, 1; \bar{\psi}) \cdot v_t(x, 1) dx + \int_0^\pi y(x, -1; \bar{\psi}) \cdot v_t(x, -1) dx = 0. \quad (18)$$

На основании (17) введем сопряженную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt}(x, t) + v_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (-1, 1); \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \in (-1, 1); \\ v_t(x, -1) = y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x), \quad v(x, 1) = 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

7. Условия оптимальности. Заменяя в интеграле (18) $v_t(x, -1)$ на $y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x)$ и учитывая граничное условие (7), перепишем выражение (18) в виде:

$$\int_0^\pi y(x, -1; \bar{\psi}) \cdot [y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x)] dx = \\ = \int_0^\pi v(x, -1) \cdot y_t(x, -1; \bar{\psi}) dx + \int_0^\pi v_t(x, 1) \cdot \bar{\psi}(x) dx. \quad (20)$$

Далее, аналогично для $y(x, t; \psi)$ и $v(x, t; \bar{\psi})$ получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} y(x, -1; \psi) \cdot [y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x)] dx &= \\ &= \int_0^{\pi} v(x, -1) \cdot y_t(x, -1; \psi) dx + \int_0^{\pi} v_t(x, 1) \cdot \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Из соотношений (20) и (21) получаем:

$$\int_0^{\pi} [y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x)] \cdot [y(x, -1; \psi) - y(x, -1; \bar{\psi})] dx = \int_0^{\pi} v_t(x, 1) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx. \quad (22)$$

Неравенство (16) можно переписать в виде:

$$\int_0^{\pi} v_t(x, -1) \cdot [y(x, -1; \psi) - y(x, -1; \bar{\psi})] dx + \alpha \cdot \int_0^{\pi} \bar{\psi}(x) \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}. \quad (23)$$

А из соотношений (22) и (23) придем к неравенству:

$$\int_0^{\pi} [v_t(x, 1) + \alpha \cdot \bar{\psi}(x)] \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}. \quad (24)$$

Таким образом, из (1)–(3), (19) и (24) получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) + y_{xx}(x, t) = f, \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \\ y_t(x, -1) = \varphi_2(x); \quad y(x, 1) = \bar{\psi}(x), \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} v_{tt}(x, t) + v_{xx}(x, t) = 0, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \\ v_t(x, -1) = y(x, -1; \bar{\psi}) - \varphi_1(x), \quad v(x, 1) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$\int_0^{\pi} [v_t(x, 1) + \alpha \cdot \bar{\psi}(x)] \cdot [\psi(x) - \bar{\psi}(x)] dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{U}, \quad (27)$$

на основе которых сформулируем условия оптимальности в виде утверждения:

Утверждение 2. *Чтобы элемент $\bar{\psi}$ был оптимальным решением задачи (5)–(7) и (9), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (25), (26) и вариационному неравенству (27).*

8. Применение метода разделения переменных. Для разрешения условий оптимальности (25)–(27) используем метод разделения переменных. Будем искать решения граничных задач (25) и (26) в виде:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) X_k(x), \quad v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) X_k(x),$$

где

$$X_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi/2}}, \quad \lambda_k = k^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи:

$$X''(x) = \lambda \cdot X(x), \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Из (25)–(27) соответственно получаем:

$$y_k''(t) - k^2 y_k(t) = f_k(t), \quad t \in (-1, 1), \quad y_k'(-1) = \varphi_{2k}; \quad y_k(1) = \bar{\psi}_k; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$v_k''(t) - k^2 v_k(t) = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad v_k'(-1) = y_k(-1) - \varphi_{1k}; \quad v_k(1) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

$$[v_k'(1) + \alpha \cdot \bar{\psi}_k] \cdot [\psi_k - \bar{\psi}_k] \geq 0, \quad \text{для } \forall \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где $f_k(t)$, φ_{1k} , φ_{2k} , $\bar{\psi}_k$, ψ_k , $k = 1, 2, \dots$, — коэффициенты Фурье функций $f(x, t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ по системе (28).

Выпишем решения граничных задач (29) и (30):

$$y_k(t) = \bar{\psi}_k \cdot \frac{\operatorname{ch} k(t+1)}{\operatorname{ch} 2k} + \varphi_{2k} \cdot \frac{\operatorname{sh} k(t-1)}{k \operatorname{ch} 2k} + \int_{-1}^1 G_k(t, \tau) \cdot f_k(\tau) d\tau; \quad (32)$$

$$v_k(t) = [y_k(-1) - \varphi_{1k}] \cdot \frac{\operatorname{sh} k(t-1)}{k \operatorname{ch} 2k}; \quad (33)$$

где

$$G_k(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{sh} k(1-t) \cdot \operatorname{ch} k(1+\tau)}{k \cdot \operatorname{ch} 2k}, & -1 < \tau < t < 1; \\ -\frac{\operatorname{sh} k(1-\tau) \cdot \operatorname{ch} k(1+t)}{k \cdot \operatorname{ch} 2k}, & -1 < t < \tau < 1. \end{cases} \quad (34)$$

Из (32)–(33) находим:

$$\begin{aligned} v_k'(1) + \alpha \bar{\psi}_k &= \frac{1}{\operatorname{ch} 2k} \left[\left(\alpha \operatorname{ch} 2k + \frac{1}{\operatorname{ch} 2k} \right) \bar{\psi}_k - \varphi_{1k} - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_{2k} \frac{\operatorname{th} 2k}{k} + \int_{-1}^1 G_k(-1, \tau) f_k(\tau) d\tau \right]; \end{aligned} \quad (35)$$

а неравенства (31) принимают при $k = 1, 2, \dots$ вид (где $A_{k\alpha} = (1 + \alpha \operatorname{ch}^2 2k) / \operatorname{ch} 2k$):

$$\left[A_{k\alpha} \bar{\psi}_k - \varphi_{1k} - \varphi_{2k} \frac{\operatorname{th} 2k}{k} + \int_{-1}^1 G_k(-1, \tau) f_k(\tau) d\tau \right] \cdot [\psi_k - \bar{\psi}_k] \geq 0 \quad \text{для } \forall \psi_k. \quad (36)$$

Так как для функций $\psi(x)$ нет ограничений, кроме принадлежности пространству $L_2(0, \pi)$, то из (36) находим оптимальные значения Фурье-коэффициентов $\bar{\psi}_k$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\bar{\psi}_k = A_{k\alpha}^{-1} \left[\varphi_{1k} + \varphi_{2k} \frac{\operatorname{th} 2k}{k} - \int_{-1}^1 G_k(-1, \tau) f_k(\tau) d\tau \right]. \quad (37)$$

Решения $y_k(t)$, найденные по формуле (32) в соответствии с оптимальными коэффициентами Фурье $\bar{\psi}_k$, $k = 1, 2, \dots$, из (37), должны удовлетворять следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} y_k(-1) = \varphi_{1k},$$

которые действительно имеют место. И это согласуется с условием $y(x, -1) = \varphi_1(x)$ из (3).

Таким образом, для нахождения точного решения задачи (5)–(8) в (37) перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ и составим следующий ряд:

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2/\pi} \cdot \operatorname{ch} 2k \left[\varphi_{1k} + \varphi_{2k} \frac{\operatorname{th} 2k}{k} - \int_{-1}^1 G_k(-1, \tau) f_k(\tau) d\tau \right] \sin kx,$$

а для исходной задачи Коши-Дирихле (1)–(3) получим решение на основе формул (32).

Заключение. Из равенств (37) и (32) непосредственно следует:

во-первых, что с ростом индекса k и при $\alpha \rightarrow 0$ коэффициенты Фурье функции $\bar{\psi}(x)$ и соответственно решение $y_k(t)$ могут неограниченно возрастать, если этот рост не будет "подавляться" соответствующим более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов φ_{1k} , φ_{2k} и значений норм $\|f_k(t)\|_{L_2(-1,1)}$;

во-вторых, что граничная задача (1)–(3) при условиях (4) имеет единственное L_2 -сильное решение [9], тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{ch} 2k|^2 \left[|\varphi_{1k}|^2 + \left| \varphi_{2k} \frac{\operatorname{th} 2k}{k} \right|^2 + \|f_k(\tau)\|_{L_2(-1,1)}^2 \right] < +\infty. \quad (38)$$

Таким образом, становится ясным не только смысл регуляризации в задаче (5)–(7) и (9), но и природа некорректности в задаче Коши-Дирихле (1)–(3) [5, 6]. А регуляризация позволяет найти приближенное решение.

Цитированная литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
3. Лаврентьев М.М. //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
4. Lattes R., Lions J.L. Methode de quasireversibilite et applications. Paris, 1967.
5. Кальменов Т.Ш., Исакова У.А. //Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.
6. Дженалиев М.Т., Кальменов Т.Ш., Рамазанов М.И. //Материалы "Совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям" (Алматы, 16–18 марта 2009). Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2009. С. 162–167.
7. Melnikova I. V., Anufrieva U. A. //Journal of Mathematical Sciences. 2008. Т. 148, No.4. P. 481–632.

8. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва, 1972.
9. **Дезин А.А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.

Поступила в редакцию 05.12.2009 г.

УДК 517.956

ЗАДАЧИ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ

Ж.А. Балдыбек , М.О. Отелбаев

КазНУ им. аль-Фараби

050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 2261032@mail.ru

Рассмотрены задачи распараллеливания, связанные с необходимостью решения дифференциальных задач. Решены с помощью распараллеливания задача Коши и многоточечная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Для нелинейных уравнений рассмотрен вариант распараллеливания с помощью линеаризации.

Введение. Пусть k_i ($i = 1, 2, \dots, m$) – некоторые вычислительные средства (ЭВМ), далее BC , и с их помощью решается некоторая задача Z . Предположим, что скорость BC k_j равна v_j . Тогда BC k_j задачу Z решает за время

$$N(Z) \cdot v_j^{-1} = T_j, \quad (1)$$

а все BC $\sum_{j=1}^m k_j$ вместе за время

$$T = N(Z) \left[\sum_{j=1}^m v_j \right]^{-1}, \quad (2)$$

где $N(Z)$ – объем работы, нужной для решения задачи Z .

Пусть A – некоторый алгоритм, который решает задачу Z с помощью совокупности $BC\{k_j\}$ за время T_A . Следующее число

$$K_A = T_A T^{-1} < 1$$

назовем коэффициентом эффективности. Как правило, $K_A < 1$, но существуют такие задачи, которые обычно являются ”надуманными”, для которых $T_A T^{-1} > 1$. Нужно отметить, что существуют задачи, когда увеличение количества BC не дает положительного эффекта. Это замечание, очевидно, справедливое для простых задач имеет отношение и к сложным задачам. Мы нацелены на задачи распараллеливания, связанные с необходимостью решения дифференциальных задач.

Keywords: *A counts, stability, equilibrium condition*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L40

© Ж.А. Балдыбек , М.О. Отелбаев, 2009.

1. Задача распараллеливания для обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$LU = U^{(n)} + a_1(x)U^{(n-1)} + \dots + a_n(x)U = f(x), \quad (3)$$

где $a_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и $f(x)$ – непрерывные на $[0, 1]$ функций. Присоединим к (3) начальные условия Коши:

$$U(0) = C_0, \quad U'(0) = C_1, \quad U^{(n-1)}(0) = C_{n-1}. \quad (4)$$

Хорошо известно, что задача (3)–(4) имеет единственное решение $U(x)$. Нас интересует проблема численного решения этой задачи с помощью *BC*

$$k_1, k_2, \dots, k_m.$$

Будем предполагать, что скорости *BC* k_j равны v_j ($j = \overline{1, m}$).

Отрезок $[0, 1]$ разобьем на отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ так, чтобы

$$\Delta_1^- = 0, \quad \Delta_1^+ = \Delta_2^-, \dots, \Delta_j^+ = \Delta_{j+1}^-, \dots, \Delta_m^+ = 1. \quad (5)$$

Здесь Δ_j^- – левый конец, а Δ_j^+ – правый конец отрезка Δ_j .

При $j \neq 1$, $\ell = \overline{0, n-1}$, на отрезке Δ_j решим задачи Коши:

$$\begin{cases} U_{j,\ell}^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k U_{j,\ell}(t) = 0, & t \in \Delta_j, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^s U_{j,\ell}(t) \Big|_{t=\Delta_j^-} = \delta_{s\ell}, & s = \overline{0, n-1}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\delta_{s\ell} = 0$ при $s \neq \ell$ и $\delta_{\ell\ell} = 1$.

На этом же отрезке решим задачу:

$$\begin{cases} U_{j,\ell}^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k U_{j,\ell}(t) = f(t), & t \in \Delta_j, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^s U_{j,\ell}(t) \Big|_{t=\Delta_j^-} = 0, & s = \overline{0, n-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно общей теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1–2] имеем, что решение уравнения (3) на отрезке Δ_j ($j \neq 1$) определяется в виде:

$$U_j(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j\ell} U_{j\ell} + U_j^0, \quad (8)$$

где $C_{j\ell}$ – постоянные числа.

На отрезке Δ_1 решим задачу (3), (4):

$$\begin{aligned} U_1^{(n)} + \sum_{k=1}^n a_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-k} U_1 &= f, \\ U_1(0) = C_0, U_1'(0) = C_1, \dots, U_1^{(n-1)}(0) &= C_{n-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь, выберем постоянные в (8) так, чтобы $U_j(t)$ были решением задачи (3), (4) на отрезке Δ_j ($j = 2, 3, \dots, m - 1$). Для этого достаточно выбрать постоянные $C_{j\ell}$ в (8) из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_1 \right] (\Delta_1^+) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{2\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{2\ell} \right] (\Delta_2^-), \quad k = \overline{0, n-1}, \\ \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{2\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{2\ell} \right] (\Delta_2^+) + \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_2^0 \right] (\Delta_2^+) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{3\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{3\ell} \right] (\Delta_3^-), \quad k = \overline{0, n-1}, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{j\ell} \right] (\Delta_j^+) + \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_j^0 \right] (\Delta_j^+) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j+1, \ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{j+1, \ell} \right] (\Delta_{j+1}^-), \\ k &= \overline{0, n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

или учитывая выбор $U_{j, \ell}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_1 \right] (\Delta_1^+) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{2k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \\ \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{2\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{2\ell} \right] (\Delta_2^+) + \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_2^0 \right] (\Delta_2^+) &= C_{3k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \\ \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{j\ell} \right] (\Delta_j^+) + \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_j^0 \right] (\Delta_j^+) &= C_{j+1, k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j \leq m - 1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Рассмотрим задачу Коши (3), (4) в произвольном интервале (a, b) . Через K обозначим количество операций, которое затрачивается для решения этой задачи (при фиксированном алгоритме решения).

Для общих уравнений вида (3), как правило, выполняется приближенное равенство:

$$K = (b - a) K_A, \quad (12)$$

где K_A зависит от выбранного алгоритма.

Конечно, в частных случаях, для численного решения (3), (4) можно придумывать специальные алгоритмы, для которых приближенное равенство (12) возможно не выполняется.

Если выполняется приближенное равенство (12), то для решения задачи (3), (4) в интервале Δ_1 потребуется $K_A d(\Delta_1)$ операций.

Для решения задач (6), (7) на Δ_j ($j = 2, 3, \dots, m$) потребуется $(n + 1) K_A d(\Delta_j)$ операций. Здесь $d(\Delta_j)$ – длина Δ_j . Поэтому всего потребуется

$$N = K_A \left[d(\Delta_1) + (n + 1) \sum_{j=2}^m d(\Delta_j) \right] \quad (13)$$

операций.

BC k_j поручим решать задачу в интервале Δ_j . Тогда BC k_1 должен выполнить $K_A d(\Delta_1)$, а k_j ($j \geq 2$) $(n + 1) K_A d(\Delta_j)$ – операций и k_1 затратит $\frac{K_A d(\Delta_1)}{v_1}$, а k_j затратит $\frac{(n + 1) K_A d(\Delta_j)}{v_j}$ времени.

Мы хотим, чтобы все BC закончили работу одновременно, т.е. выполнялись равенства

$$\frac{K_A d(\Delta_1)}{v_1} = \frac{(n + 1) K_A d(\Delta_j)}{v_j}, \quad j = 2, 3, \dots, m.$$

Отсюда получаем:

$$d(\Delta_j) = \frac{v_j}{v_1} \frac{d(\Delta_1)}{n+1}, \quad j = 2, \dots, m.$$

Кроме того, так как непересекающиеся интервалы Δ_j заполняют $(0, 1)$, имеем:

$$\left(\sum_{j=2}^m \frac{v_j}{v_1(n+1)} + 1 \right) d(\Delta_1) = 1.$$

Таким образом,

$$d(\Delta_1) = v_1 \frac{n+1}{\sum_{j=2}^m v_j + (n+1)v_1}, \quad (14)$$

$$d(\Delta_j) = v_j \frac{1}{\sum_{j=2}^m v_j + (n+1)v_1}, \quad (j = 2, \dots, m). \quad (15)$$

Теперь поручим одному из BC решить систему (10).

Интервал $(0,1)$ разбиваем на непересекающиеся интервалы Δ_j ($j = 1, \dots, m$), которые удовлетворяют (14) и (15).

На Δ_1 BC k_1 решает задачу Коши с условием (4).

На Δ_j ($j \geq 2$) BC k_j решает все задачи (6), (7).

И в конце один из BC решает задачу (11) и тем самым по формулам (8) получает решение задачи (3), (4) на интервале Δ_j при $j \geq 2$, A при $j = 1$ решение задачи (3), (4) уже получен BC k_1 .

Замечание 1. Когда необходимо иметь высокую точность, то задачи Коши (6), (7) требуют гораздо большего количества операций, чем количество операций необходимых для решения (10). Поэтому мы за решение (10) принялись в самом конце. Так можно поступать так же в случае, когда BC не очень много.

Замечание 2. Отметим, что если $m \leq n$, то метод распараллеливания не выгоден. При $m > n + 1$ метод выгоден.

Замечание 3. Если число m очень большое (т.е., если BC слишком много), то решение системы (10) превратится в проблему (из-за объема работы).

Конечно, в таких случаях можно использовать только часть BC и проблема решения системы (10) снимается.

Но можно поступить следующим образом. Допустим S количество BC , $1000 < S < 6000$ и пусть уравнение имеет порядок $n \leq 4$.

Разобьем BC на 15 групп $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{15}$. Теперь распределение задачи проведем между этими группами. Тогда (10) будет системой порядка 15. Может случиться в некоторых группах опять-таки слишком много BC , тогда разобьем эту группу на подгруппы и задачу, полученную группой, распределим по подгруппам.

2. О проблеме распараллеливания многоточечных задач. Рассмотрим уравнение (3), к которому присоединим многоточечные условия:

$$\sum_{\ell=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{k\ell}^s \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^s \tilde{U} \right] (x_\ell) = C_k \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (16)$$

где x_1, x_2, \dots, x_{m_1} – точки из отрезка $[0, 1]$.

Решение задачи (3), (16) не всегда существует. Поэтому предполагаем, что решение $\tilde{U}(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее условиям (16), существует и единственно.

Для распараллеливания задачи (3), (16) решим все задачи (6) и (7) на отрезках Δ_j , ($j = 1, 2, \dots, m$).

Решение $\tilde{U}(t)$ задачи (3), (16) на отрезке Δ_j ищем в виде:

$$\tilde{U}(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j\ell} U_{j\ell}(t) + U_j(t), \quad t \in \Delta_j. \quad (17)$$

Будем предполагать, что точки x_ℓ ($\ell = 1, \dots, m_1$) не попадают на концы интервалов Δ_j ($j = \overline{1, m}$), а также $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и $x_j \in \Delta_j$.

Из условия непрерывности решения и его производных до $(n-1)$ -го порядка получим:

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{j\ell} \right] (\Delta_j^+) + \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_j \right] (\Delta_j^+) = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j+1,\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{j+1,\ell} \right] (\Delta_{j+1}^-) \\ (k = \overline{0, n-1}, j = \overline{1, m-1}),$$

или

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{j\ell} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_{j\ell} \right] (\Delta_j^+) + \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k U_j \right] (\Delta_j^+) = C_{j+1,k} \\ (k = \overline{0, n-1}, j = \overline{1, m-1}). \quad (18)$$

Отсюда следует, что все $C_{j,k}$ ($j = \overline{2, m}$) выражаются через $C_{1,k}$.

Для определения $\{C_{1,k}\}$ воспользуемся условием (16). Тогда получим n -уравнений. Таким образом, мы получаем систему $(m \times n)$ уравнений с $(m \times n)$ неизвестными, из них $(m-1)n$ уравнений это (18) и n уравнений имеют следующий вид:

$$C_k = \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{kr}^{(s)} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^s \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell'1,\ell} U_{\ell'\ell} + U_{\ell'} \right) \right] (x_\ell), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (19)$$

Здесь ℓ' – номер интервала из набора $\{\Delta_j\}$, которому принадлежит точка ℓ' . Система (18), (19) может быть решена методом прогонки.

Отметим, что и в этом случае сохраняет силу Замечание 3 из п.1. Поэтому можно считать, что $m \leq 5n$ (m число BC), следовательно, системы (18), (19) не очень большие.

3. Об одном методе сведения задачи распараллеливания нелинейных уравнений к линейным. Для решения нелинейных задач обычно используют итерации, т.е. последовательное приближение более простыми задачами (например линейными).

Прямое использование методов предыдущих параграфов к нелинейным задачам невозможно, так как линейные комбинации решений уже не обязательно решение. Для уравнений с частными производными, даже в линейном случае, применению предыдущих результатов мешает то, что однородные уравнения имеют бесконечное множество решений.

Мы рассмотрим систему обыкновенных нелинейных уравнений. Известно, что любую систему можно привести к системе первого порядка за счет увеличения количества неизвестных. Поэтому, мы рассмотрим систему первого порядка:

$$U' + A(t, U)U = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (20)$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$U(0) = C_0, \quad (21)$$

где $A(t, U)$ – матрица $n \times n$, $U(t)$ и $f(t)$ – вектор функции;

$$U(t) = (U_1(t), \dots, U_n(t)), \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)),$$

а C_0 – n -мерный числовой вектор.

Пусть $f(t)$ непрерывна по $t \in [0, 1]$, а от $A(t, x)$ потребуем, чтобы она была непрерывно-дифференцируема по совокупности переменных и удовлетворяла условиям:

$$\langle A(t, x)y, y \rangle \geq 0, \quad (22)$$

$$A(t, x) - A(t, y) = K(t, y, x - y), \quad (23)$$

где матрица $K(t, y, x - y)$ при малых $|x - y|$ удовлетворяет условию:

$$K(t, y, x - y) \leq C(t, |y|) \left[|x - y| + 0(|x - y|^2) \right],$$

где $C(t, |y|)$ непрерывная от $t \in [0, 1]$ и $y, |y| \in (0, \infty)$ функция.

Для решения (20) построим последовательность $U_0, U_1, \dots, U_j, U_{j+1}, \dots$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} U_{n+1} + A(t, U_n) U_{n+1} &= f(t), \quad t \in [0, 1], \\ U_{n+1}|_{t=0} &= C_0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

При $n = 0$ $U_0(t)$ берется произвольной вектор-функцией такой, что $U_0(0) = C_0$. Справедлива

Лемма. а) Решение задачи (20), (21) существует и единственно.

б) Последовательность вектор-функций $U_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), построенная согласно рекуррентным уравнениям (24), при $n \rightarrow \infty$ сходятся к решению задачи (20).

Приведем краткую схему доказательства этой леммы.

Пункт а) леммы есть хорошо известный классический результат. Умножим уравнение (24) на $U_{n+1}(t)$ скалярно и проинтегрируем от 0 до t , тогда нетрудно получить:

$$\frac{|U_{n+1}(t)|^2 - |C_0|^2}{2} + \int_0^t \langle A(\eta, U_n) U_{n+1}, U_{n+1} \rangle d\eta = \int_0^t \langle U_{n+1}, f(\eta) \rangle d\eta.$$

Отсюда и из условия (22) вытекает:

$$\begin{aligned} |U_{n+1}(t)|^2 &\leq |C_0|^2 + 2 \int_0^t \langle U_{n+1}(\eta), f(\eta) \rangle d\eta \leq \\ &\leq |C_0|^2 + 2 \sqrt{\int_0^t |U_{n+1}(\eta)|^2 d\eta} \sqrt{\int_0^t |f(\eta)|^2 d\eta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} |U_{n+1}(t)|^2 &\leq |C_0|^2 + 2 \sup_{0 \leq t \leq 1} |U_{n+1}(t)| \sqrt{\int_0^t |f(\eta)|^2 d\eta}, \\ \sup_{0 \leq t \leq 1} |U_{n+1}(t)|^2 &\leq |C_0|^2 + \left(2 \sup_{0 \leq t \leq 1} |U_{n+1}(t)| \right) \cdot \left(\int_0^1 |f(\eta)|^2 d\eta \right). \end{aligned}$$

Это неравенство дает, что все $|U_n(t)|$ ограничены числом независимо от n . Поэтому из уравнения (24) и из ограниченности $|f(\cdot)|$ и $|A(t, \cdot)|$ вытекает, что

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\left| \frac{dU_n(t)}{dt} \right|^2 + |U_n(t)|^2 \right) < \infty.$$

Тогда, в силу теоремы Арцеля следует, что последовательность $\{U_n(t)\}$ компактна. Следовательно, можно выбрать подпоследовательности U_{n_j} так, чтобы $U_{n_j}(t)$, $U_{n_{j+1}}(t)$ сходились к некоторым пределам:

$$U_{n_j}(t) \rightarrow g, \quad U_{n_{j+1}} \rightarrow v \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad (25)$$

из рекуррентных уравнений (24) имеем:

$$0 = \omega'_{n+1}(t) + A(t, U_n) \omega_{n+1} + (A(t, U_n) - A(t, U_{n-1})) U_n, \quad (26)$$

$$\omega_{n+1}(0) = 0,$$

где $\omega_{n+1} = U_{n+1} - U_n$.

Но в силу (23)

$$A(t, U_{n-1}) = A(t, U_n - \omega_n) = A(t, U_n) + K(t, U_n, \omega_n). \quad (27)$$

Так как U_n ограничены и непрерывны в совокупности из (26) и (27), из общей теорий систем обыкновенных дифференциальных уравнений получим:

$$\omega_{n+1}(t) = \int_0^t S_n(t, \xi) K(\xi, U_n(\xi), \omega_n(\xi)) d\xi, \quad (28)$$

где $S_n(t, \xi)$ – некоторая ограниченная матрица. Воспользуемся (23), тогда из последних рекуррентных равенств при малых t вытекает:

$$\begin{aligned} |\omega_n(t)| &\leq \int_0^t |S_n(t, \xi)| C(|U_n(\xi)|)(|\omega_n(\xi)|^2) d\xi \leq R \cdot \int_0^t (|\omega_n(\xi)| + O(|\omega_n(\xi)|^2)) d\xi \leq \\ &\leq 2Rt \cdot \sup \left(|\omega_n(\eta)| + O(|\omega_n(\eta)|^2) \right) \leq (2Rt)^2 \sup_{0 < \eta < t} (|\omega_{n-1}(\eta)| + O(|\omega_{n-1}(\eta)|^2)) \leq (2Rt)^n < 0, \end{aligned}$$

где R и K_0 – некоторые числа. Последние неравенства справедливые при малых t дают, что

$$\omega_n(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

если $t \in [0, t_0]$ из (25) и (24) вытекает, что:

$$\begin{cases} v' + A(t, g)v = f(t), \\ v|_{t=0} = C_0. \end{cases} \quad (30)$$

При малых $t \in [0, t_0]$ из (29) вытекает, что $v(t) = g(t)$ для всех $t \in [0, 1]$. Пусть t_0 – верхняя всех тех точек для которых $z(t) = g(t)$.

Из (28) при $t > t_0$ когда $|t_0 - t|$ получаем:

$$\omega_{n+1}(t) = \omega_{n+1}(t_0) + \int_{t_0}^t S_n(t, \xi) K(\xi, U_n(\xi), \omega_n(\xi)) d\xi.$$

Отсюда, несущественно меняя рассуждения, использованные при выводе (29), так как $\omega_{n+1}(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\omega_n(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, когда $|t - t_0|$ малы $t - t_0 \in [0, \varepsilon]$. Теперь пользуясь (25) и (26), получим $v(t) = g(t)$ при малых $t - t_0$. Это противоречие допущено относительно $t_0 < 0$. Таким образом, в (30) при всех $t \in [0, 1]$ выполнено $z(t) = g(t)$. Поэтому лемма доказана. Численное решение уравнения (24) при каждом n можно распараллеливать методом п.2, так как система (24) состоит из неоднородных линейных уравнений, рассмотренных в п.2.

Цитированная литература

1. **Бибиков Ю.Н.** Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1981.
2. **Хаусхолдер А.** Основы численного анализа. М., 1966.

Поступила в редакцию 21.01.2009г.

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО–ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО КОРНЯ РАВНОГО ЕДИНИЦЕ

К. Б. БОПАЕВ, А. Т. ЖУНУСОВА

Жетысуский Государственный Университет им. И. Жансугурова
040000 Талдыкорган ул. Жансугурова, 187а aigul-z@mail.ru

Рассматривается устойчивость разностно-динамических систем относительно части переменных в критическом случае, когда среди корней характеристического уравнения первого приближения имеется один корень равный единице. Получены критерии устойчивости и неустойчивости по части переменных.

Рассмотрим нелинейную РДС:

$$x_{jn+1} = X_j(x_{1n}, \dots, x_{mn}), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где

$$X_j(0, \dots, 0) = 0.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости $x_{in} = 0, i = \overline{1, k}$, нулевого решения (1) по отношению к $x_{in}, \dots, x_{kn}, (k > 0, m = k + l, l > 0)$. Обозначим эти переменные через $y_{in} = x_{in}, (i = \overline{1, k})$, остальные через $z_{vn} = x_{k+vn} (v = \overline{1, l})$. Пусть функции X_j представляют собой степенные ряды, расположенные по степеням $y_{in} (i = \overline{1, k})$ и $z_{vn} (v = \overline{1, l})$, сходящиеся в области

$$|y_{in}| \leq h, \quad i = \overline{1, k}, \quad |z_j| < H < \infty, \quad j = \overline{1, p}, \quad (2)$$

где h, H – некоторые постоянные.

Теперь РДС (1) имеют вид

$$y_{in+1} = \sum_{\tau=1}^k a_{i\tau} y_{\tau n} + Y_i(y_{1n}, \dots, y_{kn}, z_{1n}, \dots, z_{ln}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

$$z_{\nu n+1} = \sum_{\tau=1}^k b_{\nu\tau} y_{\tau n} + \sum_{\mu=1}^l c_{\nu\mu} z_{\mu n} + Z_\nu(y_{1n}, \dots, y_{kn}, z_{1n}, \dots, z_{ln}), \quad \nu = \overline{1, l},$$

Keywords: *Stability, instability, critical case*

2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

© К. Б. Бопаев, А. Т. Жунусова, 2009.

где $a_{i\tau}, b_{\nu\tau}, c_{\nu\mu}$ - постоянные, Y_i, Z_ν - функции от переменных $y_{in}, z_{\nu n}$ ($i = \overline{1, k}$), ($\nu = \overline{1, l}$) которые разлагаются в области (2) в ряды по степеням этих переменных, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка. Переменные $z_{\nu n}$ ($\nu = \overline{1, l}$) всегда ограничены (условие А), так как принадлежат области (2). Это условие является исходным предположением при исследовании системы (3). Пусть

$$Y_i(0, \dots, 0, z_{1n}, \dots, z_{ln}) = 0, \quad |Y_i| \leq \sum_{\tau=1}^k h_{i\tau} |y_{\tau n}|, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где $h_{i\tau}$ - достаточно малые положительные постоянные.

В [1] зависимости от корней уравнения

$$|a_{i\tau} - \delta_{i\tau} \lambda| = 0 \quad (5)$$

были доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению относительно переменных y_{jn} $j = \overline{1, k}$, для случая, когда РДС имеют (3).

Результаты работы [1] подсказывают что для РДС (3) может иметь критический случай устойчивости по части переменных аналогично в [2], т.е. справедлива теорема

Теорема 1. *Если уравнение (5) не имеет корней по модулю больших единицы, но имеет корни по модулю равные единице, то члены высших порядков в первой группе РДС (3) можно выбрать так, чтобы при выполнении условия (А) получить, по желанию, как устойчивость, так и неустойчивость относительно переменных y_{in} , $i = \overline{1, k}$.*

Таким образом, все случаи, которые могут представиться при исследовании задачи устойчивости относительно переменных y_{in} , $i = \overline{1, k}$, когда РДС имеют вид (3), можно разбить на две категории: случаи некритические, когда задача решается линейными приближениями, и случаи критические, когда требуется рассмотрение членов более высоких порядков (теорема 1).

Будем исследовать устойчивость нулевого решения РДС (3) относительно переменных y_{in} , $i = \overline{1, k}$ в предположении, что один корень уравнения (5) равен единице, а остальные по модулю меньше единицы, т.е. будем рассматривать критический случай одного единичного корня при решении задачи устойчивости относительно части переменных. РДС

$$y_{in+1} = \sum_{\tau=1}^k a_{i\tau} y_{\tau n}, \quad i = \overline{1, k},$$

приведем к виду [4]

$$u_{n+1} = u_n, \quad u_{\alpha n+1} = \sum_{\beta=1}^{k-1} P_{\alpha\beta} u_{\beta n} + P_{\alpha} u_n, \quad \alpha = \overline{1, k-1}.$$

Тогда РДС (3) будет иметь вид

$$u_{n+1} = U(u_n, u_{1n}, \dots, u_{k-1,n}, z_{1n}, \dots, z_{ln}), \quad (6)$$

$$u_{\alpha n+1} = \sum_{\beta=1}^{k-1} P_{\alpha\beta} u_{\beta n} + P_{\alpha} u_n + U_{\alpha}(u_n, u_{1n}, \dots, u_{k-1,n}, z_{1n}, \dots, z_{ln}),$$

$$z_{\nu n+1} = \sum_{\beta=1}^{k-1} b'_{\nu\beta} u_{\beta n} + b'_{\nu} u_n + \sum_{\beta=1}^l c_{\nu\mu} z_{\mu n} + Z'_{\nu}(u_n, u_{1n}, \dots, u_{k-1,n}, z_{1n}, \dots, z_{ln}),$$

$$\alpha = \overline{1, k-1}, \quad \nu = \overline{1, l},$$

причем для функций U и U_α $\alpha = \overline{1, k-1}$ выполняются условия типа (4).

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{k-1} P_{\alpha\beta} u_{\beta n} + P_\alpha u_n + U_\alpha(u_n, u_{1n}, \dots, u_{k-1, n}, z_{1n}, \dots, z_{ln}) = 0, \quad \alpha = \overline{1, k-1}, \quad (7)$$

определяющих переменные $u_{\alpha n}$, как функции от переменной u_n , а также z_{1n}, \dots, z_{ln} . Функциональный определитель по переменным $u_{\beta n}$, $\beta = \overline{1, k-1}$ этой системы при $u_n = u_{1n} = \dots = u_{k-1, n} = 0$ отличен от нуля. Поэтому существует единственное решение системы (7) вида:

$$\omega_{\alpha n} = u_{\alpha n}(u_n, z_{1n}, \dots, z_{ln}) = A_\alpha^{(1)} \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \beta n \end{pmatrix} u_n + A_\alpha^{(2)} \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \beta n \end{pmatrix} u_n^2 + \dots,$$

причем $A_\alpha^{(1)} = const$, $\alpha = \overline{1, k-1}$.

Сделаем теперь в РДС (6) преобразование переменных

$$u_{\alpha n} = \xi_{\alpha n} + \omega_{\alpha n}, \quad \alpha = \overline{1, k-1}.$$

Получаем

$$u_{n+1} = u_n + \bar{U} \begin{pmatrix} k-1 & l \\ u_n, & \xi, & z \\ 1 \alpha n & 1 \nu n \end{pmatrix}, \quad \xi_{\alpha n+1} = \sum_{\beta=1}^{k-1} P_{\alpha\beta} \xi_{\beta n} + \bar{U}_\alpha \begin{pmatrix} k-1 & l \\ u_n, & \xi, & z \\ 1 \beta n & 1 \nu n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$z_{\nu n+1} = \sum_{\beta=1}^{k-1} b'_{\nu\beta} \xi_{\beta n} + b'_\nu u_n + \sum_{\beta=1}^l c_{\nu\mu} z_{\mu n} + \sum_{\beta=1}^{k-1} b'_{\nu\beta} \omega_{\beta n} + Z_\nu \begin{pmatrix} u_n, & \underbrace{\xi_{\beta n} + \omega_{\beta n}}, & z \\ \overline{1, k-1} & & 1 \mu n \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \overline{1, k-1}, \quad \nu = \overline{1, l}.$$

Здесь

$$\bar{U} \begin{pmatrix} k-1 & l \\ u_n, & \xi, & z \\ 1 \alpha n & 1 \nu n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u_n, & \underbrace{\xi_{\beta n} + \omega_{\beta n}}, & z \\ \overline{1, k-1} & & 1 \mu n \end{pmatrix},$$

$$\bar{U}_\alpha \begin{pmatrix} k-1 & l \\ u_n, & \xi, & z \\ 1 \beta n & 1 \nu n \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^{k-1} P_{\alpha\beta} \omega_{\beta n} + P_\alpha \omega_{\alpha n} + U_i \begin{pmatrix} u_n, & \underbrace{\xi_{\beta n} + \omega_{\beta n}}, & z \\ \overline{1, k} & & 1 \mu n \end{pmatrix} - \omega_{\alpha n+1}$$

– аналитические функции переменных $u_n, \xi_{\alpha n}, z_{\nu n}$, разложение которых начинается членами не ниже второго порядка. Так, как новые переменные обращаются одновременно в нуль тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль старые переменные, то задача устойчивости по отношению к одним переменным эквивалентна задаче устойчивости по отношению к

другим переменным. Поэтому можно для решения задачи рассматривать уравнения (8). Обозначим

$$\bar{U}^{(0)} \begin{pmatrix} u_n, & l \\ z & \\ 1 & \mu n \end{pmatrix} = \bar{U} \begin{pmatrix} u_n, 0, \dots, 0, & l \\ z & \\ 1 & \mu n \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix} u_n^M + g_1 \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix} u_n^{M+1} + \dots,$$

$$\bar{U}_\alpha^{(0)} \begin{pmatrix} u_n, & l \\ z & \\ 1 & \mu n \end{pmatrix} = \bar{U}_\alpha \begin{pmatrix} u_n, 0, \dots, 0, & l \\ z & \\ 1 & \mu n \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix} u_n^L + h_1 \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix} u_n^{L+1} + \dots,$$

$$\alpha = \overline{1, k-1},$$

и пусть

$$\bar{U}^{(0)} \neq 0, L > M, g \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix} = g_0 + g^* \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где g_0 – постоянная. Пусть также функции $\bar{U} \begin{pmatrix} u_n, & k-1 & l \\ \xi, & & z \\ 1 \beta n & 1 \nu n & \end{pmatrix}, \bar{U}_i \begin{pmatrix} u_n, & k-1 & l \\ \xi, & & z \\ 1 \beta n & 1 \nu n & \end{pmatrix}$

не содержат членов, линейных относительно ξ (условие Б),
1, βn

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V_n = \frac{1}{M+1} g_0 u_n^{M+1} - V_{2n}, \quad (10)$$

где $V_2 = V_2 \begin{pmatrix} k-1 \\ \xi \\ 1 \beta n \end{pmatrix}$ – определенно-положительная квадратичная форма, такая, что

$$\Delta V_2 = V_{2n+1} - V_{2n} = V_2 \left(\sum_{\beta=1}^{k-1} P_{1\beta} \xi_{\beta n}, \dots, \sum_{\beta=1}^{k-1} P_{k-1\beta} \xi_{\beta n} \right) - V(\xi_{1n}, \dots, \xi_{k-1n}) = - \sum_{\beta=1}^{k-1} \xi_{\beta n}^2.$$

Вычислим первую разность от V_n в силу РДС (8).

$$\begin{aligned} \Delta V_n &= V_{n+1} - V_n = \frac{1}{M+1} g_0 u_{n+1}^{M+1} - U_{2n+1} - \frac{1}{M+1} g_0 u_n^{M+1} + V_{2n} = \\ &= \frac{1}{M+1} g_0 \left(u_n + \bar{U} \begin{pmatrix} u_n, & k-1 & l \\ \xi, & & z \\ 1 \alpha n & 1 \nu n & \end{pmatrix} \right)^{M+1} - \\ &\quad - V_2 \left[\underbrace{\sum_{\beta=1}^{k-1} P_{\alpha\beta} \xi_{\beta n} + \bar{U}_\alpha \begin{pmatrix} u_n, & k-1 & l \\ \xi, & & z \\ 1 \beta n & 1 \nu n & \end{pmatrix}}_{\alpha = \overline{1, k-1}} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{M+1} g_0 u_n^{M+1} + V_{2n} = g_0 g u_n^{2M} + g_0 g_1 u_n^{2M+1} + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где, в силу условия (Б) и (4), $\bar{U}_\alpha \begin{pmatrix} n \\ 0, 0, \dots, 0 \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix} = 0$, причем разложения всех функций в ряд по совокупности аргументов начинается с членов не ниже второго порядка.

Теперь, учитывая, что для $z_{\nu n}$ ($\nu = \bar{1}, \bar{l}$) выполняется условие (А), рассмотрим два случая. Первый – функция $g \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$ при любых $z_{\mu n}$ принимает только положительные значения, т.е.

g_0 – положительная постоянная, а $g^* \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$ – определенно-положительная функция. Тогда

ΔV_n будет определенно-положительной функцией относительно переменных $u_n, \begin{pmatrix} k-1 \\ \xi \\ 1 \beta n \end{pmatrix}$ и, следовательно, нулевые решения РДС (3) будут неустойчивы относительно переменных [3].

Второй случай – функция $g \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$ принимает при любых $z_{\mu n}$ только отрицательные значения. Тогда первая разность ΔV_n (11) будет определенно положительной функцией по отношению к переменным $u_n, \begin{pmatrix} k-1 \\ \xi \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$ и, очевидно, при нечетном M нулевое решение РДС

(6) будет асимптотически устойчиво по отношению к переменным $u_n, \begin{pmatrix} k-1 \\ \xi \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$, а при M четном неустойчиво [3].

Таким образом, получаем следующую теорему

Теорема 2. Пусть РДС при исследовании устойчивости относительно переменных в критическом случае одного единичного корня уравнения (5) приведена к виду (8). Выполнены условия (А), (Б), (4) и (9). Тогда если $g \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$ принимает только отрицательные значения, то при нечетном M нулевое решение РДС (8) асимптотически – устойчиво, при четном M – неустойчиво; если $g \begin{pmatrix} l \\ z \\ 1 \mu n \end{pmatrix}$ принимает только положительные значения, то РДС (8) – неустойчиво.

Цитированная литература

1. **А.Т. Жунусова** //Международная научная конференция молодых ученых "Наука и образование-2008". Астана. 2008. С. 143 – 145.
2. **В.П. Прокопьев** //Прикладная математика и механика. 1975. Т.39. С. 422 – 426.
3. **Н.И. Казеева** //Изв. Вузов. Математика. 1970. № 10. С. 31 – 36.
4. **К. Адильжанулы** //Вестник ЖГУ. №1 – 2. С.3 – 6.

Поступила в редакцию 22.07.2009г.

УДК 517.962

Об устойчивости нестационарной РДС в критическом случае

С. К. БОПАЕВА

Жетысуский Государственный Университет им. И. Жансугурова
040000 Талдыкорган ул. Жансугурова, 187а.

В предлагаемой работе исследуется задача устойчивости нестационарных РДС в критическом случае, когда корни характеристического уравнения первого приближения имеют пары комплексно сопряженных корней по модулю равных единице.

Задача об устойчивости РДС в критическом случае была предметом исследований многих работ, начиная с 60-го года прошлого века [1–5]. Все они исследовали задачи для автономных или периодических по n РДС.

Рассмотрим РДС вида:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos \varphi - y_n \sin \varphi + \sum_{k+m=2}^M a^{(km)}(n) x_n^k y_n^m + X^{(M+\nu)}(n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= x_n \sin \varphi + y_n \cos \varphi + \sum_{k+m=2}^M b^{(km)}(n) x_n^k y_n^m + Y^{(M+\nu)}(n, x_n, y_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где $a^{(km)}(n)$, $b^{(km)}(n)$ – ограниченные непрерывные функции от n , а функции $X^{(M+\nu)}$, $Y^{(M+\nu)}$ в области

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < H, \quad \forall n > 0, \quad (2)$$

удовлетворяют оценкам $|X^{(M+\nu)}, Y^{(M+\nu)}| < A(|x_n| + |y_n|)^{M+\nu}$ при некоторых $\nu > 1$ и $A > 0$. Переходя к комплексным переменным $z_n = x_n + iy_n$, $\bar{z}_n = x_n - iy_n$, получим:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= e^{i\varphi} z_n + \sum_{k+m=3}^M C^{(km)}(n) z_n^k \bar{z}_n^m + Z^{(M+\nu)}(n, z_n, \bar{z}_n), \\ \bar{z}_{n+1} &= e^{-i\varphi} \bar{z}_n + \sum_{k+m=3}^M \bar{C}^{(km)}(n) z_n^m \bar{z}_n^k + \bar{Z}^{(M+\nu)}(n, z_n, \bar{z}_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $C^{(km)}(n)$, $\bar{C}^{(km)}(n)$, ($2 \leq k+m \leq M$) – комплекснозначные ограниченные, непрерывные функции от времени; $Z^{(M+\nu)}$, $\bar{Z}^{(M+\nu)}$ удовлетворяют тем же оценкам, что и $X^{(M+\nu)}$, $Y^{(M+\nu)}$.

Keywords: *Stability, dynamical systems*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© С. К. Бопаета, 2009.

Рассмотрим функцию

$$V_n = z_n \bar{z}_n + \sum_{k+m=3}^{2L} M_{k+m=3} \alpha^{(km)}(n) z_n^k \bar{z}_n^m. \quad (4)$$

Ее первая разность в силу РДС (1) записывается следующим образом:

$$V_n = \sum_{k+m=3}^{2L} M_{k+m=3} \beta^{(km)}(n) z_n^k \bar{z}_n^m + W(n, z_n, \bar{z}_n),$$

где W – функция, ограниченная по n и имеющая порядок малости относительно z_n, \bar{z}_n больший $2L$; $\beta^{(km)}(n) = \alpha^{(km)}(n+1)e^{i(k-m)\varphi} - \alpha^{(km)}(n) + \gamma^{(km)}(n)$, где $\gamma^{(km)}(n)$ – известные, зависящие от $C^{(km)}, \bar{C}^{(km)}$ и $X(l, r)$ (где $l+r < k+m$) функции. Определим последовательность функций $\alpha^{(km)}(n)$ ($k+m=3, \dots, 2L, k \neq m$) как решения линейных РДС:

$$X^{(km)}(n+1)e^{i(k-m)\varphi} - X^{(km)}(n) + \gamma^{(km)}(n) = 0, \quad (*)$$

($k+m=3, \dots, 2L-1, k+m=2L, k \neq m$), при этом $\alpha^{(km)}(n)$ будут ограниченными тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$|e^{in(m-k)\varphi} \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma^{(km)}(\nu)| < Q, \quad (5)$$

здесь Q – некоторое достаточно большое положительное число; $\gamma^{(km)}(n) = C^{(km)}(n)e^{-i\varphi} + \bar{C}^{(km)}(n)e^{i\varphi}$ при $k+m=3$.

Пусть существует действительное число $G \neq 0$, определяемое отношением:

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma^{(LL)}(\nu). \quad (6)$$

Тогда справедливы следующие теоремы

Теорема 1. Если коэффициенты $C^{(km)}, \bar{C}^{(km)}$ ($2 \leq k+m \leq M$) РДС (1) таковы, что выполняются (5) и (6) и

$$G < 0, \quad (7)$$

то нулевое решение (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выполнение неравенств (5) обеспечивает существование таких ограниченных решений линейной РДС (*) при $k+m \leq 2L-1$ и при $k+m \leq L$. Когда $k \neq m$ функцию $b^{(LL)}(n)$ полагаем тождественно равной нулю. Следуя первой разности V_n , в силу РДС (1) записывается следующим образом:

$$\Delta V_n = \gamma^{(LL)}(n)(z_n, \bar{z}_n)^L + F(n, z_n, \bar{z}_n).$$

Можно показать, что функцию $\alpha^{(km)}(n)$ можно выбрать такой, что

$$\alpha^{(km)}(n) = \bar{\alpha}^{(km)}(n). \quad (8)$$

Поэтому, считаем в дальнейшем (8) выполненными. Это позволяет, переходя от z_n, \bar{z}_n к x_n, y_n , привести функции V_n и ΔV_n к виду:

$$V_n = x_n^2 + y_n^2 + \sum_{k+m=3}^{2L} \alpha^{(km)}(n) x_n^k y_n^m, \quad (9)$$

$$\Delta V_n = \gamma^{(LL)}(n)(x_n^2 + y_n^2)^L + F(n, x_n, y_n), \quad (10)$$

где $\alpha^{(km)}(n)$, $\gamma^{(LL)}(n)$ – известные действительные, ограниченные, непрерывные функции, F – вещественная, ограниченная по n функция, имеющая порядок малости по x_n и y_n больший чем $2L$.

Обозначим $\gamma^{(LL)}(n) = G + \delta(n)$, где функция $\delta(n)$ в силу соотношения (6) обладает свойством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \delta(\nu) = 0. \quad (11)$$

Подставив $x_n^2 + y_n^2$ из равенства (9) в равенство (10), получим:

$$\Delta V_n = [G + \delta(n)] [V_n - \sum_{k+m=3}^{2L} B^{(km)}(n) x_n^k y_n^m]^L + \Phi_*(n, x_n, y_n).$$

Учитывая ограниченность функций $\delta(n)$ и $B^{(km)}(n)$ ($3 \leq k + m \leq 2L$) заключаем, что в области (2), где h – достаточно мало, имеет место неравенство:

$$\Delta V_n \leq [\frac{1}{2}G + \delta(n)] V_n^L. \quad (12)$$

Считаем h настолько малым, что функция V_n в области (2) допускает оценку:

$$\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2) \leq V_n \leq \frac{3}{2}(x_n^2 + y_n^2). \quad (13)$$

Покажем теперь, что найдется $n_0 > 0$, что для любого n ($n > n_0$) справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] \leq 0. \quad (14)$$

Предположим противное, т.е. для любого n_0 ($n_0 > 0$) существует n ($n > n_0$) такое, что выполняется неравенство:

$$\sum_{\nu=n_0}^{n-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] > 0. \quad (15)$$

Предположим что $n - n_0$ сколь угодно большое. Тогда из непрерывности функции $\delta(i)$ найдется не более чем счетная последовательность $\{\tau_k^i\}$ такая, что:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k^i = i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(\tau_k^i) = \delta(i), \quad i = \overline{n_0, n-1},$$

где выражение $[\frac{1}{2}G + \delta(i)]$ положительно. Если таких последовательностей нет или $n - n_0$ – ограничено, то доказательство (14) очевидно. Докажем его в случае, когда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k^i) = \infty.$$

Пусть n_0 – фиксированное число. По предположению существует i_0 такое, что выполняется соотношение (15). Следовательно,

$$\sum_{\nu=n_0}^{\tau_k^{i_0}-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] > 0.$$

Аналогично доказывается, что существуют последовательности τ_k^{ij} такие, что выполняются неравенства:

$$\sum_{\nu=\tau_k^{i_0}}^{\tau_k^{i_1}-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] > 0, \sum_{\nu=\tau_k^{i_1}}^{\tau_k^{i_2}-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] > 0, \dots, \sum_{\nu=\tau_k^{i_{l+1}-1}}^{\tau_k^{i_{l+1}}-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] > 0, \dots$$

Т.е. приходим к выводу, что

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] = \sum_{\nu=n_0}^{\tau_k^{i_0}-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] + \sum_{l=n_0}^{\infty} \sum_{\nu=\tau_k^{i_l}}^{\tau_k^{i_{l+1}}-1} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] > 0.$$

Это противоречит соотношениям (7), (11), так как при выполнении последних имеем:

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty} [\frac{1}{2}G + \delta(\nu)] = -\infty.$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость неравенства (14).

Покажем, что решение $x_n = y_n = 0$ РДС (1) устойчиво по Ляпунову. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число, n_0 такое, что при $n > n_0$ справедливо неравенство (14). В силу (13)

$$V_n \geq \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad x_n^2 + y_n^2 = \varepsilon^2. \tag{16}$$

Пусть $x = x_n, y = y_n$ являются решениями РДС (1). Предположим, что

$$x_{n_0}^2 + y_{n_0}^2 < \delta^2, \tag{17}$$

где δ – настолько малое число, что

$$V_{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon^2. \tag{18}$$

Так как V_n в силу оценки (13) допускает бесконечно малый высший предел, то, очевидно, такой выбор числа δ возможен. Считаем, что число δ во всяком случае меньше чем ε . Покажем, что для $\forall n (n > n_0)$ справедливо неравенство:

$$x_n^2 + y_n^2 < \varepsilon^2. \tag{19}$$

Предположим противное, т.е. существует такое число n_1 , что неравенство (19) переходит в равенство $x_{n_1}^2 + y_{n_1}^2 = \varepsilon^2$. Тогда, в силу условия (16)

$$V_{n_1} \geq \frac{1}{2}\varepsilon^2. \tag{20}$$

С другой стороны, из оценки (12) следует неравенство:

$$\sum_{V_k=V_0}^{V_n} \frac{\Delta V_k}{V^L_k} \leq \sum_{k=n_0}^n [\frac{1}{2}G + \delta(k)],$$

которое с учетом неравенства (14) позволяет сделать вывод, что $V_n \leq V_{n_0}$ при $n > n_0$, а это на основании условия (18) противоречит соотношению (20). Т.о. неравенство (19) выполняется при $\forall n (n > n_0)$, откуда следует устойчивость тривиального решения РДС (1).

Покажем, что при выполнении условий теоремы, все решения РДС (1) с начальными значениями из (17) удовлетворяют условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + y_n^2) = 0. \quad (21)$$

Действительно, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=n_0}^n \left[\frac{1}{2}G + \delta(\nu) \right] = -\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{V_k=V_0}^{V_n} \frac{\Delta V_k}{V_k} = -\infty,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0. \quad (22)$$

А так как $V_n \geq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$, то из условия (22) следует (21), что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если коэффициенты $C^{(k,m)}(n)$, $\bar{C}^{(k,m)}(n)$ ($2 \leq k + m \leq M$) РДС (1) таковы, что выполняются условия (5), (6), то при $G > 0$ нулевое решение РДС (1) неустойчиво.

Доказательство. Рассмотрим функции V_n и ΔV_n , задаваемые формулами (9), (10) соответственно. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, можно показать, что в области (2) ΔV_n допускает оценку:

$$\Delta V_n \geq \left[\frac{1}{2}G + \delta(n) \right] V_n^L, \quad (23)$$

где $\delta(n)$ удовлетворяет соотношению (11).

Обозначим n_0 такое, что для всех n ($n > n_0$) справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=n_0}^n \left[\frac{1}{2}G + \delta(\nu) \right] \geq 0. \quad (24)$$

Существование такого n_0 можно определить точно так же, как при доказательстве неравенства (14) Теоремы 1.

Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, покажем, что существуют начальные значения x_{n_0} , y_{n_0} решения РДС (1) такие, что при $x_{n_0}^2 + y_{n_0}^2 < \delta^2$ оно достигает ε – сферы. Пусть $x = x_n$, $y = y_n$ решения РДС (1), начинающиеся из точки (x_{n_0}, y_{n_0}) и удовлетворяющие условиям (17) и условию $V_{n_0} = V_0 > 0$. Из (23) следует неравенство:

$$\sum_{V_k=V_0}^{V_n} \frac{\Delta V_k}{V_k^L} \geq \sum_{k=n_0}^n \left[\frac{1}{2}G + \delta(k) \right],$$

из которого на основании условия (24) можно сделать вывод, что при $n > n_0$ x_n , y_n находятся в области $V_n > V_0$. Покажем, что в некоторый момент n неравенство (19) нарушается.

Предположим противное, т.е. считаем что решение не покидает ε – окрестности нуля. Согласно условию (13) в области $x_n^2 + y_n^2 < \varepsilon^2$ функция V_n допускает оценку $V_n \leq \frac{3}{2}\varepsilon^2$. Следовательно, при изменении V_n от V_0 до $\frac{3}{2}\varepsilon^2$ функция $\frac{1}{V_n^L}$ – ограничена. Из условий (11), (13) следует, что

$$\sum_{V_k=V_0}^{V_n} \frac{\Delta V_k}{V_k^L} = \infty,$$

откуда имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty,$$

что противоречит ограниченности функции V_n в ε - окрестности нуля. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Цитированная литература

1. **F. Raubellat**, **C. Mira** //C.r. Acad sci. 1968. № 21. P. 1006–1009.
2. **Mira C.** //C.r. Acad. Sci Paris. 1969. P. 129.
3. **Mira C., Lucas Pun.** //Comptes rendus. 1971. Serie A. Vol. 270, № 7. P. 865–870.
4. **Бопаев К.Б., Гольцер Я.М.** //Тезисы докладов 4-ой Казахстанской межвузовской научной конференций по математике и механике. Часть 1. Математика. Алматы, 1971.
5. **Бопаев К.Б.** //Препринт № 3. КазГУ и НГУ Алматы-Новосибирск, 1995.

Поступила в редакцию 13.10.2009г.

УДК 519.7

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК В МОДЕЛЯХ ЭНЕРГЕТИКИ

В.И. ЗОРКАЛЬЦЕВ, Д.С. МЕДВЕЖОНКОВ, С.М. ПЕРЖАБИНСКИЙ

Институт систем энергетики им Л.А. Мелентьева СО РАН
Россия Иркутск zork@isem.sei.irk.ru, dmitry@isem.sei.irk.ru, sergey_per85@mail.ru

Рассматриваются алгоритмы решения задач линейного программирования, осуществляющие итеративное улучшение по внутренним относительно ограничений неравенств точкам. Вспомогательная задача поиска направления улучшения решения в этих алгоритмах представляется в виде проблемы минимизации квадратичной выпуклой функции при линейных ограничениях-равенствах.

При решении исследуемых задач, за счет использования изменяемых по итерациям составляющих в минимизируемой функции вспомогательной задачи учитывается потенциальная степень активности отдельных ограничений–неравенств исходной задачи. Штрафной коэффициент при составляющих минимизируемой функции, представляющий каждое из ограничений–неравенств, возрастает к бесконечности при приближении численного значения данного неравенства к равенству. Соответственно обратные к штрафным коэффициентам величины, которые будем называть весовыми коэффициентами, сходятся к нулю при приближении по итерациям значения ограничения–неравенства к равенству.

В частности, весовые коэффициенты могут быть равны квадрату значения линейной функции, от которой по ограничениям исходной задачи требуется выполнение условия неотрицательности. Такой вариант обсуждаемых здесь алгоритмов внутренних точек наиболее широко известен и получил в зарубежной литературе название *affine scaling method*.

Уместно отметить, что длительное время с конца 60-х – начала 70-х прошлого столетия алгоритмы внутренних точек разрабатывались и исследовались только в работах российских математиков – в Институте математики СО АН СССР, в Сибирском энергетическом институте СО АН СССР, в Вычислительном центре АН СССР. В работах И.И. Дикина, С.М. Анциза, Ю.Г. Евтушенко, В.Г. Жадана, В.И. Зоркальцева [1–5] были получены пионерские результаты в экспериментальном и теоретическом исследовании этих алгоритмов, их непрерывных аналогов. Уже с 70-х годов прошлого столетия эти алгоритмы эффективно используются при реализации ряда моделей энергетики. На основе экспериментальных и теоретических исследований был выявлен ряд интересных свойств алгоритмов. В частности, было показано, что данные алгоритмы в случае неединственности оптимальных решений имеют тенденцию вырабатывать

Keywords: *A linear programming, minimization, a square-law convex function*

2000 Mathematics Subject Classification: 03E75, 47N70, 68W40

© В.И. Зоркальцев, Д.С. Медвежонков, С.М. Пержабинский , 2009.

относительно внутреннюю точку множества оптимальных решений, имеющую минимальный набор активных ограничений по сравнению с другими оптимальными решениями. Это свойство алгоритмов эффективно использовалось, в частности, в моделях анализа надежности электроэнергетических систем [3].

С середины 80-х годов к данным алгоритмам внутренних точек проявился повышенный интерес в мире. Причем многие из опубликованных первоначально работ по этим алгоритмам за рубежом (например, [6–8]) были по сути переоткрытием сделанного ранее в России. В результате ряда независимых исследований было установлено, что алгоритмы внутренних точек являются не менее эффективным (и даже по результатам сопоставления ряда авторов — более эффективным) способом решения задач линейного программирования, чем алгоритмы симплекс-метода. При этом на базе метода внутренних точек относительно просто можно реализовывать алгоритмы решения многих типов задач нелинейного программирования.

С 70-х годов прошлого столетия алгоритмы метода внутренних точек активно используются при реализации ряда моделей энергетики. В том числе в программном комплексе расчета режимов электроэнергетических систем; комплексах программ анализа надежности энергосистем; в модельно-программном комплексе оптимизации ремонтных работ в энергосистемах; в моделях расчета термодинамического равновесия и др. При этом наряду с теоретическими исследованиями осуществляются экспериментальные исследования алгоритмов внутренних точек в целях выбора наилучших схем реализации различных моделей. В данной работе планируется рассмотреть, в том числе, новые результаты экспериментальных исследований, связанных с тремя обсуждаемыми далее приложениями алгоритмов метода внутренних точек в моделях энергетики.

Определение допустимых режимов электроэнергетических систем. Для эффективного управления электроэнергетическими системами (ЭЭС) важно уметь оперативно рассчитывать допустимые и оптимальные режимы их функционирования в изменяющихся ситуациях. Исходные модели ЭЭС, подробно описанные в [9–11], являются нелинейными и в общем случае задача поиска допустимого режима сводится к нахождению точки, удовлетворяющей ограничениям–равенствам (здесь главную роль играют уравнения баланса узловых мощностей) и ограничениям–неравенствам (сюда, в первую очередь, относятся ограничения на потоки активной и реактивной мощности) следующего вида:

$$W(x, y) = 0, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{y} \leq y \leq \bar{y}. \quad (1)$$

Здесь \bar{x} , \underline{x} и \bar{y} , \underline{y} – заданные векторы размерности n и m соответственно, причем $\underline{x}_j < \bar{x}_j$, $j = 1, \dots, n$, $\underline{y}_i < \bar{y}_i$, $i = 1, \dots, m$, $W(x, y)$ – m -мерная нелинейная вектор-функция.

Поиск допустимой точки осуществляется на основе метода приведенного градиента [12]. При применении итеративной линеаризации задача сводится к решению системы линейных уравнений и неравенств относительно векторов $x \in R^n$, $y \in R^m$:

$$Ax - y = 0, \bar{x} > x > \underline{x}, \bar{y} > y > \underline{y}. \quad (2)$$

Заданы матрица A размера $m \times n$ и векторы \bar{x} , $\underline{x} \in R^n$, \bar{y} , $\underline{y} \in R^m$.

Одним из результатов проведенного в [9] исследования явилось решение проблемы быстрой идентификации случая несовместности ограничений – проблемы, не нашедшей эффективного решения в алгоритмах, используемых на практике. Для выявления несовместности требовался, как правило, большой объем вычислений, сопоставимый с объемом, необходимым для получения допустимой точки в случае совместности ограничений. Результатом же проведенного исследования явилась техника, основанная на критерии (варианте теоремы об альтернативах Фаркаша), с помощью которого проблема практически снимается, так как несовместность идентифицируется на самых первых итерациях.

Кроме того, в [9] приведен ряд новых алгоритмов внутренних точек (прямой алгоритм В, двойственные С и D, а также прямо-двойственный Е), относящихся к аффинно-масштабирующим методам. Они, как показало экспериментальное исследование, проведенное как на совместных, так и на несовместных задачах, сопоставимы, а иногда даже более предпочтительны по скоростным характеристикам, чем применяющийся сейчас исходный вариант метода внутренних точек [3], обозначенный как алгоритм А.

Все предложенные алгоритмы были протестированы на совместных и несовместных задачах, полученных из моделей электроэнергетических систем, а также на тестовых примерах (размером 19×19 и 201×201):

Поскольку все алгоритмы имеют примерно одинаковый объем вычислений на итерации при решении одной и той же задачи, то характеристикой объема вычислений можно считать число итераций, за которое алгоритм находит допустимый режим либо выявляет, что предложенная задача несовместна.

Таблица на рисунке 1 демонстрирует, что, во-первых, очень эффективно проявляет себя критерий несовместности – несовместность практически всегда идентифицируется на самой первой итерации. Особенно хорошо здесь зарекомендовали себя двойственные и прямо-двойственный алгоритмы. Кроме того, можно отметить, что новые алгоритмы работают не хуже, а подчас лучше, чем применяющиеся на практике и на совместных задачах.

Алгоритм	Число итераций на задачах				
	несовместных		совместных		
	6*7	40*80	2*7	19*19	201*201
А	1	10	7	23	116
В	1	15	6	24	107
С	1	1	16	13	28
Д	1	1	5	5	8
Е	1	4	26	24	88

Рис. 1: Число итераций, необходимое для решения задач разными методами.

А, В – прямые алгоритмы, С, D – двойственные алгоритмы, Е – самосопряженный алгоритм.

Реальные расчеты с начала 80-х годов ведутся на основе алгоритма А. В частности, именно он реализован в разработанном в ИСЭМ СО РАН программно-вычислительном комплексе СДО (Стационарные, Допустимые, Оптимальные). Новый алгоритм В более устойчив к погрешностям вычислений, что особенно актуально на заключительном этапе вычислительного процесса. Поскольку переход от алгоритма А к В тривиален, выполнив несколько итераций в соответствии с алгоритмом А (как показали эксперименты, на первых итерациях он чаще сходится быстрее), можно сменить правила вычисления весовых коэффициентов на новые, используя преимущества алгоритма В.

Еще с 70-х годов XX века было подмечено, что у алгоритмов внутренних точек двойственные переменные сходятся быстрее, чем исходные. Недавно этот факт удалось обосновать теоретически [13]. Представленные результаты подтверждают гипотезу: чтобы быстрее найти решение "исходной" задачи, лучше воспользоваться двойственным методом внутренних точек.

п.1. Оценка возможности устранения дефицита поставок энергоресурса потребителям за счет увеличения пропускной способности узких мест газотранспортных систем. При анализе работы транспортных составляющих отраслевых систем газоснабжения, в том числе в условиях крупномасштабных возмущений в работе системы, важную роль играет задача своевременного определения и устранения узких мест, ограничивающих возможности

системы по удовлетворению потребителей требуемым количеством ресурса. В [14] рассматривается сетевая транспортная модель, предназначенная для исследования этой проблемы. Модель представлена в оптимизационной постановке с нелинейной кусочно-заданной целевой функцией. Модель является дальнейшим развитием моделей [15], используемых в отделе "Живучести и безопасности систем энергетики" ИСЭМ СО РАН.

Модель подразумевает, что поток по каждой ветви может быть в двух режимах: в нормальном, когда зависимость издержек от объема передачи линейна (отражает только траты на транспортировку), и в режиме повышенной нагрузки (т.е. в экстремальном режиме), когда эта зависимость нелинейна (отражает высокую стоимость ремонта в случае поломки). Переключение между режимами происходит, когда объем передачи начинает превышать или становится меньше определенного на каждой ветви значения.

Требуется определить потоки и объемы поставок из сети потребителям и из источников в сеть, при которых издержки на транспорт минимальны и минимален дефицит требуемого ресурса у потребителей, с учетом того, что для разных узлов удельные ущербы от дефицита могут быть различной.

Модель описывает задача оптимизации с переменными $x \in R^n$ и $b \in R^m$:

$$\sum_{j=1}^n \left(\tilde{F}_j(x_j) + s_j x_j \right) + \sum_{i \in IC} g_i (\bar{b}_i - b_i) \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$Ax - b = 0, \quad (4)$$

$$x \geq \underline{x}, \quad (5)$$

$$\underline{b}_i \leq b_i \leq 0, i \in IS, \quad (6)$$

$$0 \leq b_i \leq \bar{b}_i, i \in IC. \quad (7)$$

Здесь n – число ветвей сети, m – число узлов, $x \in R^n$ – искомый вектор потоков по ветвям, $b \in R^m$ – искомый вектор объемов поставки в сеть или из сети в узлах (в сеть, если $b_i < 0$, из сети, если $b_i > 0$), IS – множество номеров узлов-источников (для которых $\underline{b}_i < 0$), I – множество номеров узлов-потребителей (для которых $\bar{b}_i > 0$), A – матрица инцидентий узлов и ветвей, g – вектор удельных ущербов от дефицитов требуемого продукта в узлах, s – вектор коэффициентов линейной части функции издержек, $\tilde{F}_j(x_j)$ – нелинейная кусочно-заданная часть функции издержек, $\tilde{F}_j(x_j) = 0$, если $\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j$, или $\tilde{F}_j(x_j) = F_j(x_j - \bar{x}_j)$, если $x_j > \bar{x}_j$, где $\underline{x}_j \geq 0$, $\bar{x}_j > \underline{x}_j$, а F_j – функция из множества Z , где Z – множество непрерывно дифференцируемых функций вещественного аргумента, равных нулю в нуле, производные которых монотонно возрастают и равны нулю в нуле.

Если в результате решения задачи (3)–(7) выполняется неравенство $x_j > \bar{x}_j$ для некоторого j , то на ветви j – узкое место, поскольку удовлетворение пользователей невозможно без перехода этой ветви в экстремальный режим. Чтобы устранить узкое место необходимо повысить пропускную способность этой ветви на величину $x_j - \bar{x}_j$.

В [14] дается описание алгоритма внутренних точек, специализированного для решения задачи оптимизации (3)–(7). С использованием этого алгоритма, реализованного на языке программирования $C++$, было проведено несколько серий расчетов на тестовых и реальных задачах заданного размера. Результаты вычислений для рассчитанных серий задач приведены в таблице на рисунке 2. Для формирования исходных данных тестовых задач использовалась

специальная разработанная программная среда. В серии задач, помеченных в таблице на рисунке 2 звездочкой, входят реальные примеры задач оценки возможности устранения дефицита поставок энергоресурса газотранспортной сети.

Число узлов и число ветвей в серии задач	Общее число переменных в серии задач	Количество решенных однотипных задач	Среднее количество итераций метода внутренних точек	Среднее время, затрачиваемое на расчеты, сек	Средняя по серии максимальная невязка ограничений равенств	Средняя по серии максимальная невязка условий оптимальности
(7, 10)	17	11	14,00	0,02	6,308E-10	0,00505
(21,28)*	49	15	34,87	0,11	1,492E-06	0,00424
(50, 67)	117	17	42,00	0,44	1,856E-07	0,00538
(75, 109)	184	16	59,44	0,21	3,390E-07	0,00507
(100, 116)	216	16	67,88	0,46	2,569E-07	0,00522
(150,186)	336	16	81,44	1,71	3,924E-07	0,00701
(200, 218)	418	17	85,59	3,57	9,329E-07	0,00424
(200, 240)	440	20	87,80	3,71	1,928E-06	0,00396
(337, 589)*	926	21	119,19	21,26	2,936E-06	0,00514
(360,618)	978	23	121,00	24,73	2,697E-06	0,00431

Рис. 2: Результаты вычислений для рассчитанных серий задач.

По данным результатам можно построить два графика, которые представлены на рисунке 3 и рисунке 4. Расчеты велись на ПЭВМ (процессор Intel Pentium 4, 2000 MHz, Кэш L1 8 Кб, Кэш L2 512 Кб, оперативная память DDR SDRAM 1024 Мб PC3200, чипсет системной платы Intel Brookdale-G i845G).

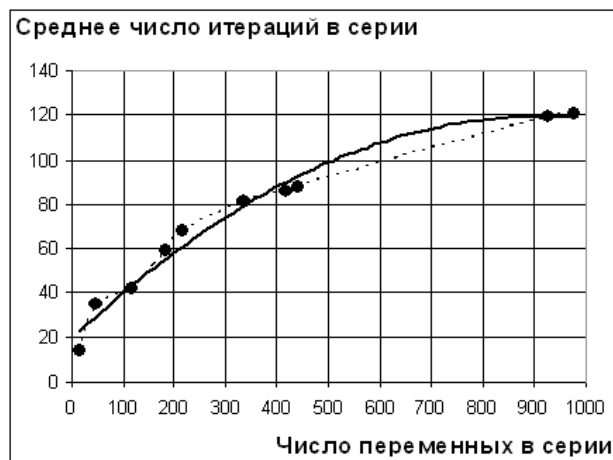


Рис. 3: Зависимость числа итераций алгоритма внутренних точек от числа переменных задачи.



Рис. 4: Зависимость времени счета алгоритма внутренних точек от числа переменных задачи.

Проведенные расчеты показали, что увеличение числа итераций метода внутренних точек и увеличение времени счета с ростом размера задачи имеет полиномиальный характер. Увеличение числа итераций, очевидно, можно представить в виде корня квадратного от числа переменных задачи. Увеличение времени счета можно аппроксимировать зависимостью $\alpha n^{3.5}$, где α – некоторая константа, n – число переменных задачи.

п.2. Модель оценки дефицита мощности электроэнергетических систем. Центральное место в методике анализа надежности электроэнергетических систем (ЭЭС) [16], разработанной в Сибирском энергетическом институте, занимает модель оценки дефицита мощности. В модели требуется найти такое значение переменных (используемой мощности, покрываемой нагрузки, потоков мощности между узлами сети), при которых суммарный дефицит мощности по всем узлам сети был бы минимальным. К модели оценки дефицита мощности ЭЭС предъявляются особые требования. Она должна быть агрегированной, максимально адекватной действительности, легко реализуемой, решаемой за короткое время. Чем меньше время оптимизации, тем большее количество случайных ситуаций можно "проиграть" и, тем самым, увеличить объем накапливаемой информации для ее дальнейшей статистической обработки. Одним из направлений повышения адекватности модели оценки дефицита мощности ЭЭС является учет потерь мощности при ее передаче по межузловым связям. При таком подходе становится более однозначным распределение дефицитов мощности между узлами. Причем узлы, покрытие потребности которых связано с большими потерями, возникающими при передаче электроэнергии, становятся в первую очередь дефицитными. Модель оценки дефицита мощности ЭЭС с квадратичными потерями мощности в линиях электропередач была предложена Г.Ф. Ковалевым [17].

Рассматривается схема электроэнергетической системы, состоящая из m узлов и n связей между ними. Задана располагаемая мощность \bar{x}_i , максимальная нагрузка \bar{y}_i в i -ом узле ЭЭС, $i = 1, \dots, m$, границы интервала пропускных способностей j -ой линии электропередач \bar{z}_j и z_j , коэффициент, используемый при описании потерь мощности на j -ой связи, α_j , $j = 1, \dots, n$. Считаем, что $\bar{x}_i \geq 0$, $\bar{y}_i \geq 0$, $\bar{z}_j \geq 0$, $z_j \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Переменными задачи являются: x_j – используемая мощность в узле i , y_i – покрываемая нагрузка в узле $i = 1, \dots, m$, z_j – поток мощности по связи $j = 1, \dots, n$.

Рассматривается задача минимизации суммарного дефицита мощности

$$\sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - y_i) \rightarrow \min, \quad (8)$$

учитывая балансовые ограничения

$$x_i - y_i + \sum_{j=1}^n t_{ij} z_j - \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}(z_j) (z_j)^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

и линейные двусторонние ограничения–неравенства на переменные

$$0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$\underline{z}_j \leq z_j \leq \bar{z}_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Здесь t_{ij} – элементы матрицы связи размера $m \times n$, которые принимают следующие значения: -1 (если узел i – начало связи j), 1 (если узел i – конец связи j), 0 (если узел i не прилегает к связи j), $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Функции $\tilde{\alpha}_{ij}$ определяются следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_{ij}(z_j) = \begin{cases} \alpha_j, & t_{ij} z_j > 0, \\ 0, & t_{ij} z_j \leq 0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. В качестве \underline{z}_j обычно используют величину $-\bar{z}_j, j = 1, \dots, n$. Т.е. пропускная способность ЛЭП в обоих направлениях считается одинаковой.

Для нахождения суммарного дефицита мощности в задаче (8)–(12) предлагается применять метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации [18]. Особенность этого алгоритма состоит в том, что в целевую функцию добавляются квадратичные составляющие функций-ограничений с весами, равными приближениям к множителям Лагранжа этих ограничений.

Далее представлены результаты расчета тестовой схемы по 50 заданным режимам двумя алгоритмами: методом внутренних точек, учитывающим квадратичные аппроксимации, и методом внутренних точек, базирующимся на линеаризации [3]. В экспериментальных расчетах использовалась схема ЭЭС, состоящая из семи узлов и семи связей между ними [19], режимы формировались при помощи датчика случайных чисел. На таблицах рисунков 5 и 6 указаны минимальное, максимальное и среднее число итераций, потребовавшееся для решения всех тестовых задач при заданных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, используемых в условиях останова алгоритмов.

Метод	Точность	Число итераций		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	$\varepsilon_1 = 0,05,$	14	49	19,62
	$\varepsilon_2 = 0,05$			
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	$\varepsilon_1 = 0,05,$	14	83	24,22
	$\varepsilon_2 = 0,05$			

Рис. 5: Результаты расчетов тестовой схемы ЭЭС по заданным режимам.

Метод	Точность	Число итераций		
		Минимальное	Максимальное	Среднее
Метод внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации	$\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,01$	16	74	23,2
Метод внутренних точек, базирующийся на линеаризации	$\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,01$	16	147	40,22

Рис. 6: Результаты расчетов тестовой схемы ЭЭС по заданным режимам.

Результаты расчета показали, что методом внутренних точек, использующим квадратичные аппроксимации, решение получается в среднем за 1,2 – 1,7 раза меньшее количество итераций, чем методом, базирующимся на линеаризации. Причем, с уменьшением значений ε_1 , ε_2 различие в скорости вычислений увеличилось. Сопоставление работы двух алгоритмов по количеству итераций справедливо, поскольку на каждой итерации в сравниваемых методах требуется примерно один и тот же объем вычислений при решении одной и той же задачи.

Цитированная литература

1. Дикин И.И. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 4. С. 747–748.
2. Анцыз С.М., Дикин И.И. // Управляемые системы. Новосибирск, 1969. Вып. 3. С. 54–56.
3. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. Новосибирск. Сиб. отд-ние, 1980. С. 144.
4. Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г. // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1977. Т. 17, № 4. С. 890–904.
5. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982.
6. Vanderbey R.J., Mecheton M.S., Freedman B.A. Modification of Karmarkar's Linear Programming Algorithm *Algorithmica*, 1 (1985).
7. Barnes E.R. A variation on Karmarkar's Algorithm for solving linear programming problems. *Mathematical Programming*, 36 (1986).
8. Wei Zi-Luan. // *Journ. Comput. Mathematics*, Vol. 5, №4. P. 342–350.
9. Войтов О. Н., Зоркальцев В. И., Филатов А. Ю. // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2000. Т. III, № 1(12). С. 57–65.
10. Войтов О. Н. // *Анализ и управление установившимися состояниями ЭЭС*. Новосибирск, 1987. С. 55–122.
11. Войтов О. Н. // *Методы решения задач реального времени в электроэнергетике*. Новосибирск, 1990. С. 243–258
12. Гамм А. З., Крумм Л. А., Мурашко Н. А., Тришечкин А. М. // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*. 1970. № 3. С. 21–33.
13. Зоркальцев В. И. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т.49, № 12. С. 1–18.

14. **Медвежонков Д. С.** //Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск, 2009. (в печати)
15. **Еделев А. В.** Разработка специализированной инструментальной среды для исследования проблем живучести больших трубопроводных систем: Дисс. . . канд. техн. наук: 05.13.18. Иркутск, 2001. С. 107.
16. **Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б.** Надежность и резервирование в электроэнергетических системах. Новосибирск, 1974.
17. **Зоркальцев В.И., Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М.** // Препринт. Иркутск, 2000. С. 17–22.
18. **Пержабинский С.М.** //Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск, 2008. № 3. С. 97–101.
19. **Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М.** // Препринт. Иркутск, 2000. С. 32–39.

Поступила в редакцию 04.12.2009 г.

УДК 519.624

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ И КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ж. М. КАДИРБАЕВА

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави
161200 Туркестан ул.Саттарханова, университетский городок apelman86pm@mail.ru

Методом параметризации с разными шагами разбиения интервала исследуется двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

На отрезке $[0, T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=0}^m M_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad \|x\| = \max_{k=1, n} |x_k|, \quad (2)$$

где матрицы $A(t)$, $M_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, m$, размерности $(n \times n)$ и n вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, B , C – $(n \times n)$ – матрицы.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0, T]$ функции $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$.

Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1–4]. В [5] с помощью метода параметризации [6] с разными шагами интервала предложен алгоритм нахождения решения задачи (1), (2). Установлены достаточные условия сходимости алгоритма и однозначной разрешимости задачи (1), (2). Целью данной статьи является нахождение необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1), (2) при разных шагах разбиения.

Keywords: *loaded ordinary differential equation, parametrization method, two-point boundary value problem, unique solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

© Ж. М. Кадирбаева, 2009.

Пусть $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$, $\|M_j(t)\| \leq \beta_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, m$, и функции $\alpha(t)$, $\beta_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, m$, непрерывны на $[0, T]$. Возьмем число $a > 0$ и произведем разбиение интервала $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = \overline{1, m}$, следующим образом.

За $\theta_{i-1,0}$ возьмем θ_{i-1} и $\theta_{i-1,1} \in [\theta_{i-1,0}, \theta_i)$ выберем удовлетворяющим неравенству $\int_{\theta_{i-1,0}}^{\theta_{i-1,1}} \alpha(\tau) d\tau \leq a$. Следующую точку $\theta_{i-1,2} \in [\theta_{i-1,1}, \theta_i)$ также выберем удовлетворяющим неравенству $\int_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_{i-1,2}} \alpha(\tau) d\tau \leq a$. Через k_{i-1} обозначим натуральное число, при котором

$$\int_{\theta_{i-1, k_{i-1}-1}}^{\theta_i} \alpha(\tau) d\tau \leq a.$$

Введем следующие обозначения $p_0 = 1$, $p_1 = k_0 + 1$, $p_2 = k_0 + k_1 + 1, \dots, p_m = k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1} + 1$, $p_{m+1} = k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1} + k_m$. Тогда $[0, T] = \bigcup_{r=1}^{p_{m+1}} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_1 = \theta_{0,1}$, $t_2 = \theta_{0,2}, \dots, t_{p_1-1} = \theta_1$, $t_{p_1} = \theta_{1,1}, \dots, t_{p_2-1} = \theta_2, \dots, t_{p_{m+1}} = T$.

Сужение функции $x(t)$ на r -ый интервал $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, обозначим через $x_r(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$. Введя дополнительные параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, и на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, получим краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + \sum_{j=0}^m M_j(t)\lambda_{p_j} + f(t), \quad (3)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \quad (4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{p_{m+1}} + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_{p_{m+1}}(t) = d, \quad (5)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \quad (6)$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{m+1}})' \in R^{np_{m+1}}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{p_{m+1}}(t))'$ – решение задачи (3)–(6), то функция $x(t)$, определяемая равенствами $x(t) = \lambda_r + u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, $x(T) = \lambda_{p_{m+1}} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{p_{m+1}}(t)$ является решением задачи (1), (2). И

наоборот, если $\tilde{x}(t)$ решение задачи (1), (2), то пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(0), \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$ будет решением задачи (3)–(6).

Появление начальных условий $u_r(t_{r-1}) = 0$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, позволяет при фиксированных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{m+1}})$ определить функции $u_r(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, из интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r] d\tau + \int_{t_{r-1}}^t \sum_{j=0}^m M_j(\tau)\lambda_{p_j} d\tau + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}. \quad (7)$$

В уравнении (7) вместо $u_r(\tau)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим представление функции $u_r(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, вида:

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t)\lambda_r + \sum_{j=0}^m H_{\nu r}^j(t)\lambda_{p_j} + F_{\nu r}(t) + G_{\nu r}(u, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{\nu r}(t) &= \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \\
 H_{\nu r}^j(t) &= \int_{t_{r-1}}^t M_j(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} M_j(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \quad j = \overline{0, m}, \\
 F_{\nu r}(t) &= \int_{t_{r-1}}^t f(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \\
 G_{\nu r}(u, t) &= \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, p_{m+1}}.
 \end{aligned}$$

Переходя в правой части (8) к пределу при $t \rightarrow t_r - 0$ и подставив соответствующие им выражения в условия (5), (6) и умножив (5) на $(T - t_{p_{m+1}-1})$, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{m+1}})'$:

$$\begin{aligned}
 (T - t_{p_{m+1}-1})B\lambda_1 + (T - t_{p_{m+1}-1})C \left[I + D_{\nu p_{m+1}}(T) \right] \lambda_{p_{m+1}} + (T - t_{p_{m+1}-1})C \times \\
 \times \sum_{j=0}^m H_{\nu p_{m+1}}^j(T) \lambda_{p_j} = (T - t_{p_{m+1}-1})d - (T - t_{p_{m+1}-1})CF_{\nu p_{m+1}}(T) - \\
 - (T - t_{p_{m+1}-1})CG_{\nu p_{m+1}}(u_{p_{m+1}}, T), \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\left[I + D_{\nu s}(t_s) \right] \lambda_s + \sum_{j=0}^m H_{\nu s}^j(t_s) \lambda_{p_j} - \lambda_{s+1} = -F_{\nu s}(t_s) - G_{\nu s}(u_s, t_s), \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}, \tag{10}$$

где I – единичная матрица размерности $(n \times n)$. Обозначив через $Q_\nu(a)$ матрицу, соответствующую левой части системы (9), (10), и введя векторы

$$F_\nu(a) = \left((T - t_{p_{m+1}-1})d + (T - t_{p_{m+1}-1})CF_{\nu p_{m+1}}(T), F_{\nu 1}(t_1), \dots, F_{\nu p_{m+1}-1}(t_{p_{m+1}-1}) \right)',$$

$$G_\nu(u, a) = \left((T - t_{p_{m+1}-1})CG_{\nu p_{m+1}}(u_{p_{m+1}}, T), G_{\nu 1}(u_1, t_1), \dots, G_{\nu p_{m+1}-1}(u_{p_{m+1}-1}, t_{p_{m+1}-1}) \right)',$$

запишем ее в виде:

$$Q_\nu(a)\lambda = -F_\nu(a) - G_\nu(u, a), \quad \lambda \in R^{np_{m+1}}. \tag{11}$$

Таким образом, для нахождения неизвестной пары $(\lambda, u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (7), (11). Пара $(\lambda, u[t])$ – решение задачи (3)–(6), находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранных $a \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(a)$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^{(0)})' \in R^{np_{m+1}}$ определим из уравнения $Q_\nu(a)\lambda = -F_\nu(a)$, т.е. $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(a)]^{-1}F_\nu(a)$. б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)} \in R^{np_{m+1}}$ и решая задачу Коши (3),(4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, $\lambda_{p_j} = \lambda_{p_j}^{(0)}$, $j = \overline{0, m}$, на интервалах $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, находим функции $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$.

1-шаг. а). Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, в правую часть (11), из уравнения

$$Q_\nu(a)\lambda = -F_\nu(a) - G_\nu(u^{(0)}, a)$$

определим $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^{(1)})' \in R^{np_{m+1}}$. б) На отрезках $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, решая задачу Коши (3), (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $\lambda_{p_j} = \lambda_{p_j}^{(1)}$, $j = \overline{0, m}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$. И т.д.

Продолжая процесс, на k -ом шаге получаем систему пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра λ_r , $r = \overline{1, p_{m+1}}$, решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$.

Следующая теорема дает достаточные условия сходимости алгоритма, существования единственного решения задачи (1), (2) и его оценку:

Теорема 1. [5, с. 67] Пусть при некоторых $a \in \mathbb{R}_+$ и $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(a) : R^{np_{m+1}} \rightarrow R^{np_{m+1}}$ обратима и выполняются неравенства:

$$\| [Q_\nu(a)]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(a), \quad (12)$$

$$q_\nu(a) = \gamma_\nu(a) \max [1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\|] \left\{ e^a - 1 - a - \dots - \frac{a^\nu}{\nu!} + \right. \\ \left. + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left[e^a - 1 - a - \dots - \frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] \right\} < 1. \quad (13)$$

Тогда двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка:

$$\|x^*\|_1 \leq K_\nu(a) \max(\|f\|_1, \|d\|), \quad (14)$$

где

$$K_\nu(a) = \left\{ e^a \|f\|_1 \max_{r=1, p_{m+1}} (t_r - t_{r-1}) + [e^a - 1 + e^a \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau] \times \right. \\ \left. \times \gamma_\nu(a) \max \left[1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max_{r=1, p_{m+1}} (t_r - t_{r-1}) \right\} \times \\ \times \left\{ \left[e^a + e^a \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \right] \frac{1}{1 - q_\nu(a)} \gamma_\nu(a) \max [1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\|] \frac{a^\nu}{\nu!} + 1 \right\} + \\ + \gamma_\nu(a) \max \left[1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max_{r=1, p_{m+1}} (t_r - t_{r-1}).$$

Следующее утверждение устанавливает систему уравнений, которой удовлетворяет параметр, составленный из значений решений задачи (1), (2) в точках разбиения интервала $[0, T]$.

Лемма 1. Если функция $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^*) \in R^{np_{m+1}}$ с компонентами $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, удовлетворяет системе уравнений

$$\tilde{P}^{-1} Q_*(a)\lambda = -F_*(f, d, a), \quad \lambda \in R^{np_{m+1}}, \quad (15)$$

где

$$Q_*(a) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu(a), \quad F_*(f, d, a) = \tilde{P}^{-1} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(a),$$

$$\tilde{P} = \text{diag} \left[(T - \theta_{m,k_m-1})I, \underbrace{(\theta_{0,1} - \theta_{0,0})I, (\theta_{0,2} - \theta_{0,1})I, \dots, (\theta_1 - \theta_{0,k_0-1})I}_{k_0}, \right. \\ \left. \underbrace{(\theta_{1,1} - \theta_1)I, \dots, (\theta_2 - \theta_{1,k_1-1})I}_{k_1}, \dots, \underbrace{(\theta_{m,1} - \theta_{m,0})I, (\theta_{m,2} - \theta_{m,1})I, \dots, (\theta_{m,k_m-1} - \theta_{m,k_m-2})I}_{k_m-1} \right].$$

И наоборот, если вектор $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{p_{m+1}})'$ удовлетворяет уравнению (15), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{p_{m+1}} + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_{p_{m+1}}(t)$, где $\tilde{u}[t]$ – решение задачи Коши (3), (4) при $\lambda = \tilde{\lambda}$, будет решением задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда в силу эквивалентности задач (1), (2) и (3)–(6) система пар $(\lambda^*, u^*[t])$, где $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $u_r^* = x^*(t) - x^*(t_{r-1})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, будет решением задачи с параметрами (3)–(6). Поэтому для любого $\nu \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$Q_\nu(a)\lambda^* = -F_\nu(a) - G_\nu(u^*, a). \tag{16}$$

Так как последовательность функциональных матриц $D_{\nu r}(t)$, $H_{\nu r}^i(t)$ и вектор-функции $F_{\nu r}(t)$ при $\nu \rightarrow \infty$ сходятся к $D_{*r}(t)$, $H_{*r}^i(t)$, $F_{*r}(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, соответственно и $G_{\nu r}(u^*, a)$ стремится к нулю в силу оценки

$$\|G_\nu(u^*, a)\| \leq \max \left[1, (T - t_{p_{m+1}-1})\|C\| \right] \frac{a^\nu}{\nu!} \|u^*\|_2, \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \tag{17}$$

то в (16) переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ и умножая обе части на \tilde{P}^{-1} , получим, что вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^*)'$ удовлетворяет уравнению (15).

Теперь, пусть $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{p_{m+1}})' \in R^{np_{m+1}}$ – решение системы уравнений (15), т.е.

$$B\tilde{\lambda}_1 + C\tilde{\lambda}_{p_{m+1}} + CD_{*p_{m+1}}(T)\tilde{\lambda}_{p_{m+1}} + C \sum_{j=0}^m H_{*p_{m+1}}^j(T)\tilde{\lambda}_{p_j} = d - CF_{*p_{m+1}}(T), \tag{18}$$

$$\frac{1}{t_s - t_{s-1}} [I + D_{*s}(t_s)]\tilde{\lambda}_s + \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \sum_{j=0}^m H_{*s}^j(t_s)\tilde{\lambda}_{p_j} - \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \tilde{\lambda}_{s+1} = \\ = -\frac{1}{t_s - t_{s-1}} F_{*s}(t_s), \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \tag{19}$$

Так как функция $\tilde{u}[t]$ – решение задачи Коши (3),(4) при $\lambda = \tilde{\lambda}$, то при любом ν имеет место представление (8). Вновь используя (17) и в (8) переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$, установим:

$$\tilde{u}_r(t) = D_{*r}(t)\tilde{\lambda}_r + \sum_{j=0}^m H_{*r}^j(t)\tilde{\lambda}_{p_j} + F_{*r}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}. \tag{20}$$

Покажем, что система пар $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ – решение задачи (3)–(6). Так как функции $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_{p_{m+1}}(t))'$ удовлетворяют (3), (4) при $\lambda = \tilde{\lambda}$, то достаточно доказать выполнение условий (5), (6). Умножив (19) на $t_s - t_{s-1}$, $s = \overline{1, p_{m+1} - 1}$, перепишем (18),(19) в следующем виде:

$$B\tilde{\lambda}_1 + C\tilde{\lambda}_{p_{m+1}} + C \left[D_{*p_{m+1}}(T)\tilde{\lambda}_{p_{m+1}} + \sum_{j=0}^m H_{*p_{m+1}}^j(T)\tilde{\lambda}_{p_j} + F_{*p_{m+1}}(T) \right] = d,$$

$$\tilde{\lambda}_s + \left[D_{*s}(t_s)\tilde{\lambda}_s + \sum_{j=0}^m H_{*s}^j(t_s)\tilde{\lambda}_{p_j} + F_{*s}(t_s) \right] = \tilde{\lambda}_{s+1}, \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}.$$

Отсюда, в силу равенства (20) выражения, стоящие в квадратных скобках, равны $\lim_{t \rightarrow t_r - 0} \tilde{u}_r(t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$. Поэтому пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ также удовлетворяет условиям (5), (6).

Лемма 1 доказана.

Определение 1. Краевая задача (1), (2) называется однозначно разрешимой, если для любых $f(t)$, d существует единственное решение задачи (1), (2).

Следующее утверждение устанавливает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 2. Краевая задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbb{R}_+$ существует $\nu = \nu(a) \in \mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(a) : \mathbb{R}^{np_{m+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{np_{m+1}}$ обратима и выполняются неравенства (12), (13) теоремы 1.

Доказательство. Достаточность условий теоремы следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть задача (1), (2) однозначно разрешима. Возьмем $a \in \mathbb{R}_+$ и покажем обратимость матрицы $Q_*(a)$. Для этого достаточно установить, что уравнение $Q_*(a)\lambda = 0$ имеет только нулевое решение. Допустим противное и предположим, что найдется ненулевой вектор $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{p_{m+1}})' \in \mathbb{R}^{np_{m+1}}$ и $Q_*(a)\tilde{\lambda} = 0$. Тогда, согласно лемме 1 система пар $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{u}[t]$ – система решений задач Коши (3), (4) при $\lambda = \tilde{\lambda}$, является ненулевым решением однородной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений с параметрами (3)–(6) и в силу эквивалентности задач (1), (2) и (3)–(6) однородная краевая задача (1), (2) имеет ненулевое решение. Отсюда учитывая, что задача (1), (2) при $f(t) = 0$, $d = 0$ имеет также тривиальное решение, приходим к противоречию с однозначной разрешимостью задачи (1), (2). Поэтому матрица $Q_*(a)$ обратима и существует число $\gamma_*(a)$, ограничивающее сверху $\| [Q_*(a)]^{-1} \|$. Так как

$$\| Q_*(a) - Q_\nu(a) \| \leq \max \left[1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \| C \| \right] \left\{ e^a - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{a^i}{i!} + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left(e^a - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right) \right\}$$

и правая часть неравенства стремится к нулю при $\nu \rightarrow \infty$, то найдется $\bar{\nu} = \bar{\nu}(a)$, при котором

$$\gamma_*(a) \max \left[1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \| C \| \right] \left\{ e^a - \sum_{i=0}^{\bar{\nu}} \frac{a^i}{i!} + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left(e^a - \sum_{i=0}^{\bar{\nu}-1} \frac{a^i}{i!} \right) \right\} < \frac{1}{2}.$$

Тогда, по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов матрица $Q_{\bar{\nu}}(a)$ будет обратимой и выполняются соотношения:

$$\| [Q_{\bar{\nu}}(a)]^{-1} \| \leq \frac{\gamma_*(a)}{1 - \gamma_*(a) \| Q_*(a) - Q_{\bar{\nu}}(a) \|} \leq \frac{\gamma_*(a)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\gamma_*(a) = \gamma_{\bar{\nu}}(a),$$

$$q_{\bar{\nu}}(a) = \gamma_{\bar{\nu}}(a) \max \left[1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \| C \| \right] \left\{ e^a - \sum_{i=0}^{\bar{\nu}} \frac{a^i}{i!} + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left(e^a - \sum_{i=0}^{\bar{\nu}-1} \frac{a^i}{i!} \right) \right\} < 1,$$

т.е. выполнены условия (12), (13) теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Введем определение корректной разрешимости краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.

Определение 2. Краевая задача (1), (2) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t)$, d существует единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка:

$$\|x^*\|_1 \leq K \max(\|f\|_1, \|d\|),$$

где K – константа, независящая от $f(t)$, d .

Число K называется константой корректной разрешимости задачи (1), (2).

Из оценки (14) следует, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K = K_\nu(a)$ для выбранных a и ν . По теореме 2, если задача (1), (2) однозначно разрешима, то для любого $a > 0$ существует $\nu = \nu(a)$ такое, что при этих a , ν выполняются условия теоремы 1. Отсюда и из теоремы 1 следует эквивалентность однозначной и корректной разрешимости задачи (1), (2).

Лемма 2. Пусть на $[0, h]$ задана непрерывная $(n \times n)$ -матрица $A(t)$, $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$ и $\int_0^h \alpha(t)dt \leq a$. Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $a > 0$, удовлетворяющих соотношению

$$e^a - 1 \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon/2)(1 + \varepsilon)},$$

для всех $b \in \mathbb{R}^n$, существует функция $f_b(t) \in C([0, h], \mathbb{R}^n)$, обладающая следующими свойствами:

$$f_b(0) = 0, \quad f_b(h) = 0,$$

$$\max_{t \in [0, h]} \|f_b(t)\| \leq (1 + \varepsilon)\|b\|,$$

$$F(A, f_b) \equiv \frac{1}{h} \int_0^h f_b(t)dt + \frac{1}{h} \int_0^h A(t) \int_0^t f_b(\tau)d\tau dt + \frac{1}{h} \int_0^h A(t) \int_0^t A(\tau) \int_0^\tau f_b(\tau_1)d\tau_1 d\tau dt + \dots = b.$$

Доказательство леммы 2 проводится аналогично схеме доказательства леммы из [6].

Теорема 3. Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $a = a(\nu)$, при котором матрица $Q_\nu(a) : R^{np_{m+1}} \rightarrow R^{np_{m+1}}$ обратима и выполняются неравенства (12), (13) теоремы 1.

Доказательство. Достаточность условий для корректной разрешимости (1), (2) следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима с константой K . Тогда, как было установлено при доказательстве теоремы 2, матрица $Q_*(a)$ обратима при любых $a \in \mathbb{R}_+$ и $\|[Q_*(a)]^{-1}\| \leq \gamma_*(a)$. Покажем, что существует a_0 , при котором для всех $a \in (0, a_0)$ справедлива оценка:

$$\|[\tilde{P}^{-1}Q_*(a)]^{-1}\| \leq \gamma, \tag{21}$$

где γ – константа, независящая от a . Для этого по выбранному a произведем разбиение интервала $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{p_{m+1}} [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, по вышеизложенной схеме и рассмотрим уравнение:

$$\tilde{P}^{-1}Q_*(a)\lambda = c, \quad \lambda, c \in R^{np_{m+1}}. \tag{22}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$, а $a_0 = a_0(\varepsilon)$ выберем, удовлетворяющим неравенству:

$$e^{a_0} - 1 \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon/2)(1 + \varepsilon)}.$$

Тогда, согласно лемме 2 для любых $a \in (0, a_0]$ и $c = (c_1, c_2, \dots, c_{p_{m+1}}) \in R^{np_{m+1}}$ можно построить непрерывную на $[0, T]$ вектор-функцию $f_c(t)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_s - t_{s-1}} F_{*s}(f_c, t_s) &\equiv \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} f_c(t) dt + \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int_{t_{s-1}}^t f_c(\tau) d\tau dt + \\ &+ \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int_{t_{s-1}}^t A(\tau) \int_{t_{s-1}}^{\tau} f_c(\tau_1) d\tau_1 d\tau dt + \dots = -c_{s+1}, \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}, \\ \|f_c\|_1 &\leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \|c\|. \end{aligned}$$

Для этого по c_{s+1} , $s = \overline{1, p_{m+1} - 1}$, на основе леммы 2 нужно построить непрерывные на $[t_{s-1}, t_s]$, $s = \overline{1, p_{m+1} - 1}$ функции $f_{s+1}(t)$ такие, что $f_{s+1}(t_{s-1}) = f_{s+1}(t_s) = 0$, $\max_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \|f_{s+1}(t)\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \|c_{s+1}\|$, $\frac{1}{t_s - t_{s-1}} F_{*s}(f_c, t_s) = -c_{s+1}$ и определить функцию $f_c(t)$ равенствами:

$$\begin{aligned} f_c(t) &= f_{s+1}(t), \quad t \in [t_{s-1}, t_s], \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}, \\ f_c(t) &= 0, \quad t \in [T - t_{p_{m+1}-1}, T]. \end{aligned}$$

Взяв $d_c = -c_1$, имеем $-F_*(f_c, d_c, a) = c$. Тогда, согласно лемме 1 вектор $\lambda_c = (\lambda_1^c, \lambda_2^c, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^c)$ с координатами $\lambda_r^c = x_c(t_{r-1})$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, где $x_c(t)$ – решение задачи (1), (2) при $f(t) = f_c(t)$, $d = d_c$, будет единственным решением систем уравнений (15) и имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \|[\tilde{P}^{-1} Q_*(a)]^{-1} F_*(d_c, f_c, a)\| &= \|\lambda_c\| = \\ &= \max_{r=1, p_{m+1}} \|x_c(t_{r-1})\| \leq \|x_c\|_1 \leq K \max(\|f_c\|_1, \|d_c\|). \end{aligned} \quad (23)$$

В последнем неравенстве (23) используем корректную разрешимость задачи (1), (2). Учитывая, что по построению функции $f_c(t)$ и выбору вектора d_c имеет место неравенство:

$$\max(\|f_c\|_1, \|d_c\|) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \|c\|,$$

из (23) получим оценку:

$$\|[\tilde{P}^{-1} Q_*(a)]^{-1} c\| \leq K(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \|c\|.$$

Отсюда ввиду произвольности $c \in R^{np_{m+1}}$ получаем, что для всех $a \in (0, a_0(\varepsilon))$ справедлива оценка:

$$\|[\tilde{P}^{-1} Q_*(a)]^{-1}\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) K,$$

где K – константа корректной разрешимости задачи (1),(2), независящая от a , т.е. оценка (21) справедлива с $\gamma = (1 + \varepsilon/2)K$.

Далее, используя оценку:

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}^{-1} Q_*(a) - \tilde{P}^{-1} Q_\nu(a)\| &\leq \|\tilde{P}^{-1}\| \cdot \|Q_*(a) - Q_\nu(a)\| \leq \max_{s=1, p_{m+1}-1} \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \times \\ &\times \max \left[1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \left\{ e^a - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{a^i}{i!} + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left(e^a - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right) \right\}, \end{aligned}$$

при выборе $0 < a_1 < a_0$, удовлетворяющим неравенству

$$K(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \max_{s=1, p_{m+1}-1} \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \max [1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\|] \left\{ e^a - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{a^i}{i!} + \right. \\ \left. + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left(e^a - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right) \right\} < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим обратимость матрицы $Q_\nu(a)$ для всех $a \in (0, a_1]$ и

$$\|[\tilde{P}^{-1}Q_\nu(a)]^{-1}\| \leq K(1 + \varepsilon),$$

$$q_\nu(a) = K(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \max_{s=1, p_{m+1}-1} \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \max [1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\|] \left\{ e^a - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{a^i}{i!} + \right. \\ \left. + \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left(e^a - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right) \right\} < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} < 1.$$

Отсюда, используя соотношение

$$\|[Q_\nu(a)]^{-1}\| = \|[\tilde{P}^{-1}Q_\nu(a)]^{-1}\tilde{P}^{-1}\| \leq \|[\tilde{P}^{-1}Q_\nu(a)]^{-1}\| \cdot \|\tilde{P}^{-1}\|,$$

получим неравенства $\|[Q_\nu(a)]^{-1}\| \leq \frac{\max_{s=1, p_{m+1}-1} \frac{1}{t_s - t_{s-1}} K(1 + \varepsilon)}{1 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}} = \gamma_\nu(a)$ и $q_\nu(a) < 1$, т.е. выполнение условий (12), (13) теоремы 1.

Теорема 3 доказана.

Цитированная литература

1. Нахушев А. М. // Дифф. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96 – 105.
2. Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1585 – 1595.
3. Бакирова Э. А. // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2005. № 3. С. 95 – 102.
4. Бакирова Э. А. // Математический журнал. 2005. Т. 5, № 3. С. 25-34.
5. Кадирбаева Ж. М. // Математический журнал. 2009. Т. 9, № 2. С. 64-70.
6. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

Поступила в редакцию 15.06.2009 г.

УДК 519.7

АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ОДНОПРОДУКТОВОГО РАССРЕДОТОЧЕННОГО РЫНКА

А.Г. КОВАЛЕНКО

Казахстанско-Британский технический университет
Алматы Казахстан alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru

В работе приводятся результаты анализа поведения экономической системы, описываемые математической моделью рассредоточенного рынка, описываемые с помощью математического аппарата теории графов.

Введение. Проблема равновесия, устойчивости, существования устойчивого равновесия является ключевой при анализе различного вида систем и, в частности, самоорганизующихся систем. Для децентрализованной экономики, включающей в себя большое число индивидуумов и товаров, эта проблема одним из первых была сформулирована Вальрасом. С его позиции вопрос о работоспособности децентрализованной экономической системы сводится к вопросу о существовании конкурентного равновесия. Такой подход привел к постановке соответствующей математической задачи, которая оставалась нерешенной вплоть до 50-х годов. Вклад в ее решение внесли Вальд, Эрроу и Дебре, Маккензи, Гейл, Никайдо [1]. В этих работах, исходя из различных предположений, достаточно разумных с экономической точки зрения, решается вопрос о существовании конкурентного равновесия.

В данной работе приводятся результаты анализа поведения экономической системы, описываемые математической моделью рассредоточенного рынка [2].

1. Определения и обозначения. Для описания моделей воспользуемся основными определениями и обозначениями теории графов. Пусть $G=(E,V,H)$ – связный конечный ориентированный граф, E – множество вершин графа, V – множество дуг, H – отображение $H:V \rightarrow E \times E$. Каждой дуге $v \in V$ отображение H ставит в соответствие упорядоченную пару $(h1(v), h2(v))$ вершин из E : $h1(v)$ – начало дуги v , $h2(v)$ – конец. Будем говорить, что из вершины i выходит дуга v , если $i=h1(v)$ и входит в вершину j , если $j=h2(v)$. Множество дуг, входящих в вершину i , обозначим через $V^+(i)$, множество дуг, выходящих из вершины i , обозначим через $V^-(i)$.

2. Математическая модель однопродуктового рассредоточенного рынка, как задача потокораспределения теории гидравлических сетей. Вершины $i \in E$ интерпретируем как пункты – локальные рынки купли – продажи некоторого однородного продукта.

Keywords: *A counts, stability, equilibrium condition*

2000 Mathematics Subject Classification: 03E75, 47N70, 68W40

© А.Г. Коваленко , 2009.

Субъектами рынков являются: конечные потребители этого продукта; предприятия, производящие его; агенты, осуществляющие экспортно-импортные операции за пределы моделируемой системы; арбитражеры, которые покупают продукт в вершинах с меньшей ценой и продают в вершинах с большей ценой.

Каждой вершине $i \in E$ в соответствие поставим переменные P_i, z_i, η_i, ξ_i , интерпретируемые как цена, объем экспортно-импортного сальдо, производства и потребления этого продукта соответственно. Модели поведения субъектов рынка опишем в виде функций предложения предприятий $\eta_i(P_i)$, функций спроса конечных потребителей $\xi_i(P_i)$, кривой экспортно-импортного сальдо $z_i(P_i)$, которые выводятся из соответствующих экстремальных задач при их взаимодействии в условиях равновесия конкурентного рынка. Описание функционирования арбитражеров приведем далее.

Дуги $v \in V$ интерпретируем как торгово-транспортные коммуникации (системы), по которым арбитражеры осуществляют транспорт потока. Обозначим через y_ν величину потока, идущего по дуге $v \in V$, направление дуги указывает положительное направление потока. Объем транспорта y_ν по дуге v зависит от разности цен между инцидентными пунктами и в равновесном состоянии описывается зависимостью:

$$y_\nu = \phi_\nu(P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)}), \nu \in V, \tag{1}$$

причем, если $P_{h2(\nu)} > P_{h1(\nu)}$, то $y_\nu > 0$, y_ν возрастает с ростом $(P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)})$, если $P_{h2(\nu)} < P_{h1(\nu)}$, то $y_\nu < 0$. Эта зависимость описывает модель арбитражера и фактически отражает конкурентное предложение пункта $h1(\nu)$ пункту $h2(\nu)$ при разности цен $(P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)}) \geq 0$, и наоборот, предложение пункта $h2(\nu)$ пункту $h1(\nu)$ при разности цен $(P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)}) < 0$. Перепишем зависимость (1) в виде:

$$P_{h2(\nu)} = P_{h1(\nu)} + \phi_\nu^{-1}(y_\nu), \nu \in V, \tag{2}$$

т.е. цена $P_{h2(\nu)}$ продукта в конце дуги v равна цене продукта в начале дуги v плюс цена, добавленная при его транспортировке $\phi_\nu^{-1}(y_\nu)$, где ϕ_ν^{-1} – функция, обратная для ϕ_ν . Соотношения (1), (2) в дальнейшем будем называть замыкающими соотношениями.

Граничные условия. Разобьем множество вершин E на три непересекающиеся части E^1, E^2 и E^3 . В вершинах из E^1 зафиксированы цены, (вершины с фиксированными ценами P_i^* и свободным (искомым) отбором (внешнеторговым сальдо) B_i):

$$P_i = P_i^*, i \in E^1. \tag{3}$$

В вершинах из E^2 задана величина внешнеторгового сальдо (вершины с фиксированным отбором B_i^* и свободной (искомой) ценой :

$$z_i = B_i^*, i \in E^2. \tag{4}$$

В вершинах из E^3 объем внешнеторгового сальдо z_i связан с ценой P_i зависимостью:

$$z_i = z_i(P_i), i \in E^3, \tag{5}$$

(вершины с подвижными ценами и отбором).

Условия продуктового баланса. В условиях равновесия объемы внешнеторгового сальдо, производства и потребления, ввоза-вывоза арбитражерами этого продукта сбалансированы, поэтому

$$\sum \{y_\nu : \nu \in V^+(i)\} - \sum \{y_\nu : \nu \in V^-(i)\} + \eta_i - \xi_i = z_i, i \in E. \tag{6}$$

В теории гидравлических сетей это равенство называют Первым правилом Кирхгофа. Задача отыскания значений переменных $P_i, \eta_i, \xi_i, z_i, i \in E, y_\nu, \nu \in V$, удовлетворяющих уравнениям (2)–(6), является задачей потокораспределения в гидравлической сети с нефиксированными отборами. Значения $P_i, i \in E$, являющиеся решением этой задачи, будем называть равновесными ценами, $y_\nu, \nu \in V, \eta_i, \xi_i, z_i, i \in E$, равновесными потоками.

В случае, когда функции $z_i(P_i) = const, \eta_i(P_i) = const, \xi_i(P_i) = const$ задачу называют задачей с фиксированными отборами. Задача с нефиксированными отборами легко сводится к задаче с фиксированными отборами. Следуя теории гидравлических сетей [3], легко показать, что в модели ОРР с фиксированными отборами для граничных условий множество вершин с фиксированной ценой и свободным отбором $E^1 \neq \emptyset$.

Таким образом, модель ОРР в равновесном состоянии может быть представлена в виде замыкающих соотношений (1), граничных условий (3), (4), балансовых соотношений (6).

3. Анализ устойчивости, существования состояния равновесия и равновесных цен. Алгоритмы поузловой увязки для отыскания равновесного состояния однопродуктового рассредоточенного рынка. Подставим (1) в (6), модель ОРР примет вид:

$$\sum \{\phi_\nu(P_i - P_{h1(\nu)}) : \nu \in V^+(i)\} - \sum \{\phi_\nu(P_{h2(\nu)} - P_i) : \nu \in V^-(i)\} - B_i^* = 0, \quad i \in E^2, \quad (7)$$

$$P_i = P_i^*, \quad i \in E^1, \quad (8)$$

Пусть $P_i, i \in E^2$, – произвольные числа, обозначим

$$\begin{aligned} NB_i &= NB_i(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i)) = \\ &= \sum \{\phi_\nu(P_i - P_{h1(\nu)}) : \nu \in V^+(i)\} - \sum \{\phi_\nu(P_{h2(\nu)} - P_i) : \nu \in V^-(i)\} - B_i^*, \end{aligned}$$

эту функцию будут называть функцией избыточного предложения вершины i ($-NB_i$ функция избыточного спроса). Величина $|NB_i|$ (ее будем называть небалансом) является мерой его нарушения, $i \in E^2$. Тогда (7) можно записать $NB_i(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i)) = 0$. Будем говорить, что состояние локально рынка вершины улучшается при уменьшении $|NB_i|$, в противном случае ее состояние ухудшается. Обозначим через

$$ASN B = ASN B(P_i, i \in E^2) = \sum \{|NB_i|(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i))| : i \in E^2\},$$

$$MNB = MNB(P_i, i \in E^2) = \max\{|NB_i|(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i))| : i \in E^2\}.$$

Значения $ASN B$ (абсолютный суммарный небаланс) и MNB (максимальный небаланс) являются показателями, характеризующими степень нарушения состояния равновесия во всей системе. Если при некоторой системе цен $ASN B=0$ (это равносильно тому, что $MNB=0$, и наоборот), то система в целом находится в равновесном состоянии. Будем говорить, что состояние системы улучшается при уменьшении $ASN B$, в противном случае ее состояние ухудшается. Аналогично, для вершин $i \in E^1$ положим

$$NB_i = NB_i(P_i^*; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i)) =$$

$$\sum \{\phi_\nu(P_i^* - P_{h1(\nu)}) : \nu \in V^+(i)\} - \sum \{\phi_\nu(P_{h2(\nu)} - P_i^*) : \nu \in V^-(i)\}.$$

NB_i характеризует величину потока, поступающего в (выходящего из) вершину (вершины) при заданной цене $P_i = P_i^*$.

Рассмотрим случай, когда функции $\phi_\nu(\Delta P_\nu) = \phi_\nu(P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)})$ строго возрастающие по переменной $\Delta P_\nu = (P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)})$, тогда функции $NB_i(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i))$ являются строго возрастающими по переменной P_i . Обозначим также $E_{окр}(i) = \{j \in E : j=h1(v), v \in V^+(i), j=h2(v), v \in V^-(i)\}$.

Основная лемма однопродуктового рассредоточенного рынка. Если при изменении цен P_i избыточное предложение $NB_i(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i))$ вершины i убывает, то для всех вершин $j \in E_{окр}(i)$ избыточное предложение $NB_j(P_j; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(j); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(j))$ возрастает, причем $\Delta NB_i = \sum\{-\Delta NB_j : j \in E_{окр}(i)\}$, где $\Delta NB_i, \Delta NB_j, j \in E_{окр}(i)$, соответствующие изменения NB_i, NB_j . Если при изменении цен P_i $NB_i(P_i; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(i))$ возрастает, то для всех $j \in E_{окр}(i)$ $NB_j(P_j; P_{h1(\nu)}, \nu \in V^+(j); P_{h2(\nu)}, \nu \in V^-(j))$ убывает, причем $\Delta NB_i = \sum\{-\Delta NB_j : j \in E_{окр}(i)\}$.

Замечание 1. Легко показать, что при возрастании цены P_i в вершине $i \in E^2$ избыточное предложение NB_i возрастает. Величины потоков y_ν по входящим дугам также возрастают, т.е. для них $\Delta y_\nu > 0$. По выходящим дугам убывают, т.е. для них $\Delta y_\nu < 0$. При этом если вершина j связана с вершиной i дугой $\nu \in V^+(i)$, то $\Delta NB_j = -\Delta y_\nu$, если вершина j связана с вершиной i дугой $\nu \in V^-(i)$, то $\Delta NB_j = \Delta y_\nu$.

В дальнейшем нас будут интересовать изменения цены P_i , которые, если $|NB_i| \neq 0$, приводят к $NB_i = 0$, т.е. если $NB_i > 0$, то NB_i убывает до нулевого значения (убывание цены P_i), если $NB_i < 0$, то NB_i возрастает до нулевого значения (возрастание цены P_i). Эти изменения цен соответствуют переходу вершины в состояние равновесия. В ряде случаев, соответствующих конкурентному взаимодействию субъектов, такой переход в сосредоточенном рынке может происходить автоматически. Рассмотрим, что будет происходить с рассредоточенным рынком в целом.

Следствие 1. Если в основной лемме $E_{окр}(i) \subset E^2$ и $NB_i, NB_j, j \in E_{окр}(i)$, - одного знака, то при изменении $|NB_i|$ до нулевого значения, величина $ASN B$ остается неизменной.

Замечание 2. В рассмотренной ситуации для $j \in E_{окр}(i)$ величина $|NB_j|$ возрастает, и если раньше некоторые из этих j были в состоянии равновесия, то оно будет нарушено.

Следствие 2. Если в основной лемме $E_{окр}(i) \cap E^1 \neq \emptyset$, то при убывании $|NB_i|$ до нулевого значения величина $ASN B$ также убывает.

Следствие 3. Если в основной лемме среди $j \in E_{окр}(i) \subset E^2$, то существуют такие, что $NB_j \neq 0$ имеет знак, противоположный знаку $|NB_i|$, то при изменении $|NB_i|$ до нулевого значения, величина $ASN B$ не возрастает.

Провести более полный анализ невозможно без некоторых предположений относительно функций, входящих в описание модели. Будем предполагать, что функции $\phi_\nu(\Delta P_\nu) = \phi_\nu(P_{h2(\nu)} - P_{h1(\nu)})$, $\nu \in V$, удовлетворяют следующим свойствам: 1) непрерывны; 2) строго возрастающие по ΔP_ν ; 3) при изменении ΔP_ν в пределах области определения ϕ_ν изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; 4) для всех $v \in V$ существуют числа $l_\nu, L_\nu (L_\nu \geq l_\nu > 0)$ такие, что при любых ΔP_ν и $\Delta P'_\nu$ выполняется неравенство:

$$l_\nu |\Delta P'_\nu - \Delta P_\nu| \leq |\phi_\nu(\Delta P'_\nu) - \phi_\nu(\Delta P_\nu)| \leq L_\nu |\Delta P'_\nu - \Delta P_\nu|.$$

Будем считать, что состояние рынка изменяется дискретно (параметр изменения $\tilde{n} = 0, 1, 2, \dots$) соответствии с алгоритмом, который описывается далее. Прежде чем приводить этот алгоритм, отметим, что вырабатываемые в нем последовательности $\{NA_i^{\tilde{n}}, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$, $i \in E^2$, j - вспомогательные. Они необходимы для доказательства сходимости вырабатываемых в нем последовательностей избыточных предложений $\{NB_i^{\tilde{n}}, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$ в вершинах, $i \in E^2$.

Алгоритм вытеснения избыточных предложений

Шаг 0. Для $i \in E^1$ полагаем $P_i^{(0)} = P_i^*$, для $i \in E^2$ $P_i^{(0)}$ задаем произвольными, для всех $i \in E$ полагаем $NB_i^0 = NB_i$, $NA_i^0 = |NB_i^{(0)}|$. Полагаем $\tilde{n} = 1$. Переходим к выполнению следующего шага 1.

Шаг t ($t=1,2,3,\dots$). Находим вершину $i0$, для которой $A_{i0}^{\tilde{n}-1} = \max\{NA_i^{\tilde{n}-1} : i \in E^2\}$, находим кратчайшую цепь $i0, v0, i1, v1, i2, v2, \dots, in=r$, связывающую вершину $i0$ с одной из вершин $r \in E^1$, где $\{i0, i1, i2, \dots, in\}$ – множество вершин цепи; $\{v0, v1, v2, \dots, v(n-1)\}$ – множество дуг. Последовательно для $k=0,1,2, \dots, (n-1)$ выполняем следующее:

1. Для $i \in E$ ($E_{\text{ОКР}}(ik) \cup \{ik\}$) полагаем: $P_i^{\tilde{n}} = P_i^{\tilde{n}-1}$, $NB_i^{\tilde{n}} = NB_i^{\tilde{n}-1}$.
2. Определяем $P_{ik}^{\tilde{n}}$ такое, что $NB_{ik}^{\tilde{n}} = NB_{ik}(P_{ik}^{\tilde{n}}, P_{h1(\nu)}^{\tilde{n}}, \nu \in V^+(i); P_{h2(\nu)}^{\tilde{n}}, \nu \in V^-(i)) = 0$.
3. Если $NB_{ik}^{\tilde{n}-1} \neq 0$, то для всех $i \in E_{\text{ОКР}}$ определяем:

$$NB_i^{\tilde{n}} = NB_i(P_i^{\tilde{n}}; P_{h1(\nu)}^{\tilde{n}}, \nu \in V^+(i);$$

$$P_{h2(\nu)}^{\tilde{n}}, \nu \in V^-(i)), \Delta B_i = NB_i^{\tilde{n}} - NB_i(P_i^{\tilde{n}-1}, \alpha_i^{\tilde{n}} = \Delta B_i NB_{ik}^{\tilde{n}-1},$$

иначе для всех $i \in E_{\text{ОКР}}(ik) \setminus \{i(k+1)\}$ полагаем: $NB_i^{(\tilde{n})} = NB_i^{(\tilde{n}-1)}$, $P_i^{(\tilde{n})} = P_i^{(\tilde{n})}$, $\alpha_i^{(\tilde{n})} = 0$; $\alpha_{ik}^{(\tilde{n})} = 1$, $NB_{i(k+1)}^{(\tilde{n})} = NB_{i(k+1)}^{(\tilde{n}-1)}$, $P_{i(k+1)}^{(\tilde{n})} = P_{i(k+1)}^{(\tilde{n})}$

4. Полагаем $NA_{ik}^{(\tilde{n})} = 0$.

5. Для $i \in E_{\text{ОКР}}(ik)$ полагаем $NA_i^{(\tilde{n})} = NA_i^{(\tilde{n}-1)} + \Delta A_i$, где $\Delta A_i = \alpha_i^{(\tilde{n})} NA_{ik}^{(\tilde{n}-1)}$.

6. Для $i \in E$ ($E_{\text{ОКР}}(ik) \setminus \{i(k+1)\}$) полагаем $NA_i^{(\tilde{n})} = NA_i^{(\tilde{n}-1)}$.

7. Полагаем $\tilde{n} = \tilde{n} + 1$.

Переходим к выполнению следующего шага.

Описанный алгоритм является одной из модификаций алгоритма поузлового невязки теории гидравлических сетей. В результате его работы вырабатываются последовательности избыточных предложений вершин $\{NB_i^{(\tilde{n})}, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$ и вспомогательные $\{NA_i^{(\tilde{n})}, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$ к ним $i \in E^2$. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Вспомогательные последовательности $\{NA_i^{(\tilde{n})}, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$, $i \in E^2$, мажорируют последовательности небалансов $\{|NB_i^{(\tilde{n})}|, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$, $i \in E^2$, т.е. $|NB_i^{(\tilde{n})}| \leq NA_i^{(\tilde{n})}$, $i \in E^2$, $\tilde{n} = 0, 1, 2, \dots$*

Теорема 2. *Для всех $i \in E^2$, $NA_i^{(\tilde{n})} \rightarrow 0$ при $\tilde{n} \rightarrow \infty$.*

Теорема 3. *Для всех $i \in E^2$, $NB_i^{(\tilde{n})} \rightarrow 0$ при $\tilde{n} \rightarrow \infty$.*

В результате работы алгоритма вырабатываются также последовательности цен в вершинах $\{P_i^{(\tilde{n})}, \tilde{n} = 0, 1, 2, \dots\}$, $i \in E^2$, которые сходятся к равновесным ценам, $P_i^{(\tilde{n})} \rightarrow \bar{P}_i$, $i \in E^2$, при $\tilde{n} \rightarrow \infty$, и для \bar{P}_i , $i \in E$, выполняются следующие равенства:

$$\sum \{\phi_\nu(\bar{P}_i - \bar{P}_{h1(\nu)}) : \nu \in V^+(i)\} - \sum \{\phi_\nu(\bar{P}_{h2(\nu)} - \bar{P}_i) : \nu \in V^-(i)\} - B_i = 0, i \in E^2;$$

$$\bar{P}_i - P_i^* = 0, i \in E^1.$$

4. Из основной леммы и теорем вытекают некоторые заключения о функционировании экономических систем, описываемых математической моделью рассредоточенного рынка.

А) О распространении неравновесных состояний. Распространение небалансов осуществляется некоторым подобием волновых процессов. Не смотря на то, что эти процессы приводят систему к состоянию равновесия, возможны скачки значений избыточных предложений в вершинах, порой превосходящие первоначальные и даже максимальные значения.

Б) Роль субъектов рынков в процессе перехода к состоянию равновесия. Проведенный анализ позволяет сделать заключение о том, что распространению неравновесных состояний способствуют арбитражеры экономической системы, которые переносят небаланс в вершинах с фиксированной ценой.

В) Об управлении в целях стабилизации экономической системой. Для управления экономической системы важным является вопрос и об ускорении процесса перехода системы в состояние равновесия. Становится ясным, что введение фиксированного отбора и свободной цены в одном или нескольких пунктах (вершине сети) не приводит к ускорению стабилизации состояния равновесия. Этому способствует введение фиксированной цены и свободного отбора в них. Однако следует помнить, что в этом случае субъекты пунктов, в которых цена фиксирована, должны обладать мощностью, способной компенсировать изменения спроса и потребления на рынке.

Цитированная литература

1. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М., 1972.
2. **Коваленко А.Г.** // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 108–115.
3. **Меренков А.П., Хасилев В.Я.** Теория гидравлических цепей. М., 1985.

Поступила в редакцию 04.12.2009 г.

УДК 511

ШИНЦЕЛЕВО УРАВНЕНИЕ $x_1x_2\dots x_n = t^k$

С.Ш. КОЖЕГЕЛЬДИНОВ

Семипалатинский государственный педагогический институт им. Шакарима
kozhegeldinov@mail.ru

Получена общая формула, описывающая все целые положительные решения заданного уравнения $x_1x_2\dots x_n = t^k$. Каждое такое решение представляется в виде функции n параметров.

1. В.Серпинский в [1] пишет: "А.Шинцель указал формулы, дающие все решения уравнения $x_1x_2\dots x_n = t^k$ в натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_n, t , где $n \geq 2$ и k – данные натуральные числа. Эти формулы содержат

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

произвольных параметров" [2,3].

Через 20 лет после А.Шинцеля это уравнение решил Gupta Hansraj [4]. В их работах ([2],[4]) число произвольных параметров одинаково и равно s , т.е. числу сочетаний из $n+k-1$ элементов по k (без повторений) [3].

А.Шинцель написал свою работу [2], когда ему было 17 лет. Она была представлена В.Серпинским в Бюллетень Польской АН 17 ноября 1954 года и опубликована в 1955 году.

Поэтому диофантово уравнение

$$x_1x_2\dots x_n = t^k, \tag{1}$$

где

$$x_1, x_2, \dots, x_n, t \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \tag{2}$$

назовем шинцелевым уравнением.

Решением частных случаев шинцелева уравнения (1) с условием (2) в разное время занимались Е.Т. Белл, Ю. Бровкин, В. Серпинский и другие. Г. Бровкин поставил вопрос о получении для данных натуральных чисел n и k всех решений уравнения (1) в натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_n, t . Е.Т. Белл дал (без доказательства) формулы, представляющие общее решение уравнения $x_1x_2\dots x_n = t^2$ в натуральных числах, содержащие $n(n+1)/2$ произвольных параметров [5].

Keywords: *diophant's equations*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70, 35B10

© С.Ш. Кожегельдинов, 2009.

Целью настоящей работы является уменьшение числа s произвольных параметров до n . Это обуславливает ее актуальность. Поэтому вполне естественной является постановка и решение следующей задачи.

2. Постановка задачи. Пусть $\{\langle x_1, x_2, \dots, x_n; t \rangle | (1) \wedge (2)\}$ – множество всех решений шинцелова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало n .

Для решения поставленной задачи используются идеи, методы и результаты работ [6–8], в том числе, арифметические функции более сложной природы, введенные в [7].

3. Теорема 1. *Каждая из следующих n эквивалентных формул:*

$$x_1 = \frac{a_1^k (a_2 \dots a_n)^{k-1}}{\Delta_1^k}, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} = a_{n-1}, \quad x_n = a_n, \quad t = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_1}, \quad (*_1)$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_1 = ((a_2 \dots a_n)^{k-1})_{\text{deg } k}, \quad (*_1^1)$$

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = \frac{b_2^k (b_1 b_n \dots b_3)^{k-1}}{\Delta_2^k}, \quad x_3 = b_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} = b_{n-1}, \quad x_n = b_n, \quad t = \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{\Delta_2}, \quad (*_2)$$

где

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_2 = ((b_1 b_n \dots b_3)^{k-1})_{\text{deg } k}, \quad (*_2^1)$$

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = \frac{a_3^k (a_4 \dots a_n a_1 a_2)^{k-1}}{\Delta_3^k}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = a_{n-1}, \quad x_n = a_n, \quad t = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_3}, \quad (*_3)$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_3 = ((a_4 \dots a_n a_1 a_2)^{k-1})_{\text{deg } k}, \quad (*_3^1)$$

.....

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{a_{n-1}^k (a_n a_1 \dots a_{n-2})^{k-1}}{\Delta_{n-1}^k}, \quad x_n = a_n, \quad t = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (*_{n-1})$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_{n-1} = ((a_n a_1 \dots a_{n-2})^{k-1})_{\text{deg } k}, \quad (*_{n-1}^1)$$

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} = b_{n-1}, \quad x_n = \frac{b_n^k (b_1 \dots b_{n-1})^{k-1}}{\Delta_n^k}, \quad t = \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{\Delta_n}, \quad (*_n)$$

где

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_n = ((b_1 \dots b_{n-1})^{k-1})_{\text{deg } k}, \quad (*_n^1)$$

является общей формулой, описывающей все решения шинцелова уравнения (1) с условием (2).

Здесь в общей формуле $(*_i)$ с условием $(*_i^1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) числа x_i и t , как и числа $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, являются целыми положительными. Число целых параметров, входящих в каждую такую общую формулу, не превышает n .

4. Если в шинцеловом уравнении (1) с условием (2) положим, что $n = 2$, $k = 2$, то получим задачу, которая решена В.Серпинским в [1], а именно:

$$x_1 x_2 = t^2, \quad (3)$$

где

$$x_1, x_2, t \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Все решения диофантова уравнения (3) с условием (4) содержатся в формуле:

$$x_1 = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\Delta^2}, \quad x_2 = \lambda_2, \quad t = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta}, \quad (5)$$

где

$$\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (\lambda_2)_{\deg 2}, \quad (6)$$

которая получается из формулы $(*)$ с условием $(*_1^1)$ при $n = 2$, $k = 2$, $a_1 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2$.

При $\lambda_1 = a(c)_{\deg 2}$, $\lambda_2 = b^2 c$, где $a, b, c \in \mathbb{N}$, получаем, что $\Delta = b(c)_{\deg 2}$. Поэтому из (5) с условием (6) имеем, что $x_1 = a^2 c$, $x_2 = b^2 c$, $t = abc$, где a, b, c – любые натуральные числа, причем можно предполагать, что числа a и b являются взаимно простыми [1].

5. Если же в шинцелевом уравнении (1) с условием (2) положим, что $n = 2$, $k = 3$, то получим задачу, которую поставил Ю. Бровкин, а именно:

$$x_1 x_2 = t^3, \quad (7)$$

где

$$x_1, x_2, t \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Все решения диофантова уравнения (7) с условием (8) содержатся в формуле:

$$x_1 = \frac{\lambda_1^3 \lambda_2^2}{\Delta^3}, \quad x_2 = \lambda_2, \quad t = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta}, \quad (9)$$

где

$$\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (\lambda_2^2)_{\deg 3}, \quad (10)$$

которая получается из формулы $(*)$ с условием $(*_1^1)$ при $n = 2$, $k = 3$, $a_1 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2$.

При $\lambda_1 = z(uv^2)_{\deg 3}$, $\lambda_2 = u^2 v w^3$, где $z, u, v, w \in \mathbb{N}$, получаем, что $\Delta = uw^2(uv^2)_{\deg 3}$. Поэтому из (9) с условием (10) имеем, что $x_1 = uv^2 z^3$, $x_2 = u^2 v w^3$, $t = uvzw$, где u, v, z, w – произвольные натуральные числа [1]. Диофантово уравнение (7) с условием (8) решил В. Серпинский [2].

6. Если в шинцелевом уравнении (1) с условием (2) положим, что $n = 4$, $k = 2$, то получим задачу, которой занимался Е.Т. Белл в 1947 году, а именно:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = t^2, \quad (11)$$

где

$$x_1, x_2, x_3, x_4, t \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Все решения диофантова уравнения (11) с условием (12) содержатся в формуле:

$$x_1 = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{\Delta^2}, \quad x_2 = \lambda_2, \quad x_3 = \lambda_3, \quad x_4 = \lambda_4, \quad t = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{\Delta}, \quad (13)$$

где

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{N}, \quad \Delta = (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)_{\deg 2}, \quad (14)$$

которая получается из формулы $(*)$ с условием $(*_1^1)$ при $n = 4$, $k = 2$, $a_1 = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_2$, $a_3 = \lambda_3$, $a_4 = \lambda_4$.

При $\lambda_1 = a_1(a_5^1 a_6 a_7)_{\deg 2}$, $\lambda_2 = a_2^2 a_5^1 a_8 a_9$, $\lambda_3 = a_3^2 a_6 a_8 a_{10}^1$, $\lambda_4 = a_4^2 a_7 a_9 a_{10}^1$, где $a_5^1 = a_5 a_{11}$, $a_{10}^1 = a_{10} a_{11}$, a_1, a_2, \dots, a_{11} – любые натуральные числа, получаем, что

$\Delta = a_2 a_3 a_4 a_8 a_9 a_{10}^1 (a_5^1 a_6 a_7)_{\deg 2}$. Поэтому из (13) с условием (14) имеем, что $x_1 = a_1^2 a_5^1 a_6 a_7$, $x_2 = a_2^2 a_5^1 a_8 a_9$, $x_3 = a_3^2 a_6 a_8 a_{10}^1$, $x_4 = a_4^2 a_7 a_9 a_{10}^1$, $t = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5^1 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}^1$, где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5^1, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}^1$ – любые натуральные числа [1].

7. Если $a_1 = \lambda_1, a_2 = \lambda_2, \dots, a_n = \lambda_n$, то формула $(*_1)$ с условием $(*_1^1)$ примет вид:

$$x_1 = \frac{\lambda_1^k (\lambda_2 \dots \lambda_n)^{k-1}}{\Delta_1^k}, \quad x_2 = \lambda_2, \quad \dots, \quad x_n = \lambda_n, \quad t = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{\Delta_1}, \quad (15)$$

где

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_1 = ((\lambda_2 \dots \lambda_n)^{k-1})_{\deg k}, \quad (16)$$

которая, как и формула $(*_1)$ с условием $(*_1^1)$, является общей формулой, описывающей все решения шинцелёва уравнения (1) с условием (2). Формулой (15) с условием (16) мы воспользуемся в дальнейшем.

8. А.Шинцель в [2] доказал, что все решения в натуральных числах x_1, x_2, \dots, x_n, t уравнения (1) и только эти решения заключаются в формулах

$$x_i = a_1^{\alpha_{1i}} a_2^{\alpha_{2i}} \dots a_s^{\alpha_{si}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n, s = \binom{n+k-1}{k}), \quad t = a_1 a_2 \dots a_s, \quad (17)$$

где a_1, a_2, \dots, a_s – произвольные, n, k – данные натуральные числа и

$$\alpha_{j1} + \dots + \alpha_{jn} = k, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (18)$$

все разложения числа k на n целых неотрицательных слагаемых (где разложения, отличающиеся порядком, считаются различными).

9. Оказывается, формулы (17) с условием (18) можно получить из общей формулы (15) с условием (16). В самом деле, при

$$\lambda_1 = (a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{21}} \dots a_s^{\alpha_{s1}})_{\deg k}, \quad \lambda_2 = a_1^{\alpha_{12}} a_2^{\alpha_{22}} \dots a_s^{\alpha_{s2}}, \quad \dots, \quad \lambda_n = a_1^{\alpha_{1n}} a_2^{\alpha_{2n}} \dots a_s^{\alpha_{sn}}$$

получаем, что

$$(\lambda_2 \dots \lambda_n)^{k-1} = (a_1^{k-\alpha_{11}-1} a_2^{k-\alpha_{21}-1} \dots a_s^{k-\alpha_{s1}-1})^k a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{21}} \dots a_s^{\alpha_{s1}},$$

и, следовательно $\Delta_1 = a_1^{k-\alpha_{11}-1} a_2^{k-\alpha_{21}-1} \dots a_s^{k-\alpha_{s1}-1} (a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{21}} \dots a_s^{\alpha_{s1}})_{\deg k}$, где a_1, a_2, \dots, a_s – любые натуральные числа. Поэтому из общей формулы (15) с условием (16) получаем формулы (17) с условием (18). Эти формулы, как известно, дают все решения шинцелёва уравнения (1) с условием (2).

Очевидно, формулы Шинцеля, т.е. формулы (17) с условием (18) можно получить воспользовавшись любой из n эквивалентных общих формул $(*_1) - (*_n)$ с условием $(*_1^1) - (*_n^1)$ соответственно.

10. **Доказательство теоремы 1.** Воспользуемся методом автора этих строк и положим, что в шинцелёвом уравнении (1) с условием (2)

$$x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n, \quad t = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_1}, \quad (19)$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_1 = ((a_2 \dots a_n)^{k-1})_{\deg k}. \quad (20)$$

Из (1) с условием (2) в силу (19) с условием (20) следует формула $(*_1)$ с условием $(*_1^1)$, которая является общей формулой всех решений шинцелёва уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значения x_1, x_2, \dots, x_n, t из формулы $(*_1)$ с условием $(*_1^1)$ действительно удовлетворяют шинцелёву уравнению (1) с условием (2). Этим

первая часть теоремы 1 доказана. Теперь докажем эквивалентность формул $(*) - (*_n)$. Схема доказательства такова: $(*) \Rightarrow (*_2) \Rightarrow (*_3) \Rightarrow \dots \Rightarrow (*_{n-1}) \Rightarrow (*_n) \Rightarrow (*)$.

Формула $(*_2)$ следует из формулы $(*)$ при $a_1 = (b_1)_{\deg k}$,

$$a_2 = \frac{b_2^k (b_3 \dots b_n b_1)^{k-1}}{\Delta_2^k}, \quad a_3 = b_3, \quad \dots, \quad a_{n-1} = b_{n-1}, \quad a_n = b_n,$$

$$\Delta_1 = \frac{b_n^{k-1} \dots b_2^{k-1} b_1^{k-2} (b_1)_{\deg k}}{\Delta_2^{k-1}},$$

где

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_2 = ((b_3 \dots b_n b_1)^{k-1})_{\deg k}.$$

Здесь и в дальнейшем очевидные преобразования опускаем.

Формула $(*_3)$ следует из формулы $(*_2)$ при $b_1 = a_1$, $b_2 = (a_1)_{\deg k}$,

$$b_3 = \frac{a_3^k (a_4 \dots a_n a_1 a_2)^{k-1}}{\Delta_3^k}, \quad b_4 = a_4, \quad \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1}, \quad b_n = a_n,$$

$$\Delta_2 = \frac{a_3^{k-1} a_4^{k-1} \dots a_n^{k-1} a_1^{k-1} a_2^{k-2} (a_2)_{\deg k}}{\Delta_3^{k-1}},$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_3 = ((a_4 \dots a_n a_1 a_2)^{k-1})_{\deg k}.$$

Продолжив этот процесс, получим формулу $(*_{n-1})$.

Формула $(*_n)$ следует из формулы $(*_{n-1})$ при $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, \dots , $a_{n-2} = b_{n-2}$,

$$a_{n-1} = (b_{n-1})_{\deg 2}, \quad a_n = \frac{b_n^k (b_{n-1} \dots b_1)^{k-1}}{\Delta_n^k}, \quad a_{n-1} = \frac{b_n^{k-1} b_1^{k-1} \dots b_{n-2}^{k-1} b_{n-1}^{k-2} (b_{n-1})_{\deg k}}{\Delta_n^{k-1}},$$

где

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_n = ((b_1 \dots b_{n-1})^{k-1})_{\deg k}.$$

Формула $(*)$ следует из формулы $(*_n)$ при

$$b_1 = \frac{a_1^k (a_2 \dots a_n)^{k-1}}{\Delta_1^k}, \quad b_2 = a_2, \quad \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1}, \quad b_n = (a_n)_{\deg k},$$

$$\Delta_n = \frac{a_1^{k-1} a_2^{k-1} \dots a_{n-1}^{k-1} a_n^{k-2} (a_n)_{\deg k}}{\Delta_1^{k-1}},$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad n, k - \text{данные натуральные числа}, \quad \Delta_1 = ((a_2 \dots a_n)^{k-1})_{\deg k}.$$

Таким образом, при выполнении условий $(*_1^1) - (*_n^1)$ общие формулы $(*) - (*_n)$ всех решений шинцелова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны. Теорема 1 доказана полностью.

11. Шинцелово уравнение (1) с условием (2) является частным случаем диофантова уравнения

$$\beta x_1 x_2 \dots x_n = \alpha t^k, \quad (21)$$

где

$$x_1, x_2, \dots, x_n, t \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, n, k - \text{данные натуральные числа}. \quad (22)$$

В самом деле, шинцелово уравнение (1) с условием (2) получается из диофантова уравнения (21) с условием (22) при $\alpha = \beta = 1$.

Как теорема 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Каждая из следующих n эквивалентных формул:*

$$x_1 = \frac{\alpha a_1^k (\beta a_2 \dots a_n)^{k-1}}{\Delta_1^k}, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n, \quad t = \frac{\beta a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_1}, \quad (1.*)$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, n, k - \text{данные натуральные числа}, \\ \Delta_1 = ((\beta a_2 \dots a_n)^{k-1} (\alpha, \beta a_2 \dots a_n))_{\text{deg } k}, \quad (1.*^1)$$

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = \frac{\alpha b_2^k (\beta b_1 b_n \dots b_3)^{k-1}}{\Delta_2^k}, \quad x_3 = b_3, \quad \dots, \quad x_n = b_n, \quad t = \frac{\beta b_1 b_2 \dots b_n}{\Delta_2}, \quad (2.*)$$

где

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, n, k - \text{данные натуральные числа}, \\ \Delta_2 = ((\beta b_1 b_n \dots b_3)^{k-1} (\alpha, \beta b_1 b_n \dots b_3))_{\text{deg } k}, \quad (2.*^1)$$

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = \frac{\alpha a_3^k (a_4 \dots a_n a_1 a_2)^{k-1}}{\Delta_3^k}, \quad x_4 = a_4, \quad \dots, \quad x_n = a_n, \\ t = \frac{\beta a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_3}, \quad (3.*)$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, n, k - \text{данные натуральные числа}, \\ \Delta_3 = ((\beta a_4 \dots a_n a_1 a_2)^{k-1} (\alpha, \beta a_4 \dots a_n a_1 a_2))_{\text{deg } k}, \quad (3.*^1)$$

.....

$$x_1 = a_1, \quad \dots, \quad x_{n-2} = a_{n-2}, \quad x_{n-1} = \frac{\alpha a_{n-1}^k (\beta a_n a_1 \dots a_{n-2})^{k-1}}{\Delta_{n-1}^k}, \quad x_n = a_n, \\ t = \frac{\beta a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (n-1.*)$$

где

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, n, k - \text{данные натуральные числа}, \\ \Delta_{n-1} = ((\beta a_n a_1 \dots a_{n-2})^{k-1} (\alpha, \beta a_n a_1 \dots a_{n-2}))_{\text{deg } k}, \quad (n-1.*^1)$$

$$x_1 = b_1, \quad \dots, \quad x_{n-1} = b_{n-1}, \quad x_n = \frac{\alpha b_n^k (b_1 \dots b_{n-1})^{k-1}}{\Delta_n^k}, \quad t = \frac{\beta b_1 b_2 \dots b_n}{\Delta_n}, \quad (n.*)$$

где

$$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta, n, k - \text{данные натуральные числа}, \\ \Delta_n = ((\beta b_1 \dots b_{n-1})^{k-1} (\alpha, \beta b_1 \dots b_{n-1}))_{\text{deg } k}, \quad (n.*^1)$$

является общей формулой, описывающей все решения диофантова уравнения (21) с условием (22).

Здесь в общей формуле ($i.*$) с условием ($i.*^1$) ($i = 1, 2, \dots, n$) числа x_i и t , как и числа $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, являются целыми положительными. Число целых параметров, входящих в каждую такую общую формулу, не превышает n .

12. Нетрудно заметить, что если условия $(1.*^1) - (n.*^1)$ и $(*_1^1) - (*_n^1)$ выполнены, то при $\alpha = \beta = 1$ из формул $(1.*) - (n.*)$ (теорема 2) получаются формулы $(*_1) - (*_n)$ (теорема 1) соответственно.

Заметим еще, что в получении общей формулы, описывающей все (симметричные) решения диофантова уравнения (21) с условием (22) и, конечно шинцелова уравнения (1) с условием (2), доминирующую роль играют, как следует из сказанного выше, арифметические функции более сложной природы.

И нет сомнения в том, что такие функции будут играть значительную роль и при исследовании большого количества других, более сложных, диофантовых уравнений высших степеней со многими переменными.

Цитированная литература

1. **Серпинский В. О** решении уравнений в целых числах М., 1961.
2. **Шинцель А.** //Бюллетень Польской АН, 1955. отд. 3,3. №1. С. 17–19.
3. **Netto E.** Lehrbuch der Kombinatorik. Leipzig, 1901.
4. **Gupta Hansraj** //Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. ifiz. 1974 (1975).
5. **Bell E.T.** //Annals of Mathematics. 1947. Vol. 48, № 1. P. 43–50.
6. **Кожегельдинов С.Ш.** Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. //В 5-ти томах. Т. 1. Новосибирск, 2002. 72 с.; Т. 2. Алматы, 2004. 176 с.; Т. 3. Алматы, 2006. 244 с.; Т. 4. Семей, 2008. 100 с.; Т. 5. Семей, 2008. 100 с.
7. **Кожегельдинов С.Ш.** //Матем. журнал. Алматы, 2008. Т. 8, №4(30). С. 73–77.
8. **Кожегельдинов С.Ш.** //Материалы V Междунар. научн. конф. "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". Актобе. АГУ им. К. Жубанова, 2009. С. 338–340.

Поступила в редакцию 11.12.2009 г.

УДК 517.946.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Ж. Н. КУТУНАЕВ

Институт автоматки и информационных технологий
720071 Бишкек пр. Чуй, д. 265-а avtomatika_nankr@mail.ru

Рассматривается задача моделирования колебаний полуограниченной струны, которая представлена решением граничной задачи для волнового уравнения.

Введение. Известно, что физический смысл процессов, встречающихся в различных областях науки и техники, может быть различным. Однако анализ изучаемых процессов показывает, что между ними есть много общего. Это приводит к тому, что при создании математических моделей изучаемых процессов получаем одни и те же вполне определенные дифференциальные, функционально-дифференциальные уравнения в совокупности с соответствующими краевыми и начальными условиями. Общность уравнений для различных физических процессов позволяет изучать их с единой точки зрения. Смешанные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и системы таких уравнений возникают в качестве математических моделей реальных физических процессов, решение которых позволяет описать физические процессы с высокой степенью точности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x, t < \infty, \quad (1)$$

$$a_1 u_{tt}(0, t) + a_2 u_x(0, t) + a_3 u(0, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (3)$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные величины, $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции.

Задача. Найти представление классического решения граничной задачи (1)–(3).

2. Общее представление решения задачи (1)–(3). Используя метод суперпозиции $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, вместо $u(x, t)$ будем искать две функции $v(x, t)$ и $w(x, t)$, которые удовлетворяют граничным задачам:

$$v_{tt} = v_{xx}, \quad 0 < x, t < \infty, \quad (4)$$

Keywords: *model, wave equation, boundary value problem, solution*

2000 Mathematics Subject Classification: 35D05, 35L20

© Ж. Н. Кутунаев, 2009.

$$a_1 v_{tt}(0, t) + a_2 v_x(0, t) + a_3 v(0, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad (5)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < \infty; \quad (6)$$

$$w_{tt} = w_{xx}, \quad 0 < x, t < \infty, \quad (7)$$

$$a_1 w_{tt}(0, t) + a_2 w_x(0, t) + a_3 w(0, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad (8)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (9)$$

Сначала решим задачу (4)–(6). Начальное условие $v(x, 0) = 0$ позволяет искать частное решение уравнения (4) в виде:

$$v(x, t) = \varphi(x - t) - \varphi(x + t), \quad (10)$$

где $\varphi(z)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Подставляя функцию (10) в (5), имеем:

$$a_1 \varphi''(t) + a_2 \varphi'(t) + a_3 \varphi(t) - a_1 \varphi''(-t) - a_2 \varphi'(-t) - a_3 \varphi(-t) = 0. \quad (11)$$

Решение полученного функционально-дифференциального уравнения (11) будем искать в виде:

$$\varphi(z) = e^{mz} + ke^{nz}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), убеждаемся, что функция (12) удовлетворяет уравнению (11), если

$$n = -m, \quad k = \frac{a_1 m^2 + a_2 m + a_3}{a_1 m^2 - a_2 m + a_3},$$

где m – произвольное число. Чтобы получить искомое решение задачи (1)–(3) в виде интеграла Фурье, положим $m = i\lambda$, где λ – произвольное вещественное число. Найдем функцию, соответствующую значению λ :

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = e^{i\lambda z} + \frac{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 - (a_2 \lambda)^2 + i 2a_2 \lambda (a_3 - a_1 \lambda^2)}{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 + (a_2 \lambda)^2} e^{-i\lambda z}. \quad (13)$$

Так как

$$\left(\frac{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 - (a_2 \lambda)^2}{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 + (a_2 \lambda)^2} \right)^2 + \left(\frac{2a_2 \lambda (a_3 - a_1 \lambda^2)}{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 + (a_2 \lambda)^2} \right)^2 = 1, \quad (14)$$

то можно положить

$$\cos(\theta\lambda) = \frac{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 - (a_2 \lambda)^2}{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 + (a_2 \lambda)^2}, \quad \sin(\theta\lambda) = \frac{2a_2 \lambda (a_3 - a_1 \lambda^2)}{(a_3 - a_1 \lambda^2)^2 + (a_2 \lambda)^2}.$$

Используя (13)–(14), функцию $\varphi^{(\lambda)}(z)$ можно представить так:

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = e^{\frac{1}{2}\theta\lambda} \cos\left(\lambda z - \frac{1}{2}\theta\lambda\right), \quad (15)$$

где $\theta\lambda$ – выражение, независящее от z . Построим теперь частное решение задачи (4)–(5):

$$v^{(\lambda)}(x, t) = \varphi^{(\lambda)}(x - t) - \varphi^{(\lambda)}(x + t) = 2e^{\frac{1}{2}\theta\lambda} \sin\left(\lambda x - \frac{1}{2}\theta\lambda\right) \sin \lambda t. \quad (16)$$

Таким образом, функция

$$v^{(\lambda)}(x, t) = A \sin\left(\lambda x - \frac{1}{2}\theta\lambda\right) \sin \lambda t \quad (17)$$

удовлетворяет уравнению (4), граничному условию (5) и начальному условию $v^{(\lambda)}(x, 0) = 0$, где $\theta\lambda$ – произвольное вещественное число, определяется системой (13)–(14), A – произвольная постоянная.

Совершенно аналогично убеждаемся, что функции

$$w^{(\lambda)}(x, t) = B \sin \left(\lambda x - \frac{1}{2}\theta(\lambda) \right) \cos \lambda t \tag{18}$$

удовлетворяют уравнению (7), граничному условию (8) и начальному условию $w_t^{(\lambda)}(x, 0) = 0$.

Составим функцию

$$u^{(\lambda)}(x, t) = \sin \left(\lambda x - \frac{1}{2}\theta(\lambda) \right) [A \sin \lambda t + B \cos \lambda t], \tag{19}$$

где A и B – произвольные постоянные. Здесь нет оснований считать, что параметр принимает только дискретные значения, так как все значения параметра являются допустимыми. Вместо суммирования по дискретным значениям, в рассматриваемом случае мы должны применить интегрирование по параметру λ , считая постоянные A и B зависящими от λ . Таким образом, из (19) получим:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left(\lambda x - \frac{1}{2}\theta(\lambda) \right) [A(\lambda) \sin \lambda t + B(\lambda) \cos \lambda t] d\lambda. \tag{20}$$

Теорема 1. *Общее представление классического решения начально-граничной задачи (1)–(3) имеет вид (20).*

3. Частные случаи. Сначала рассмотрим частные случаи равенства (20). Прежде всего отметим [1], что если какая-то функция представима интегралом Фурье, то имеет место формула:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \cos \beta s ds \right) \cos \beta z d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \sin \beta s ds \right) \sin \beta z d\beta. \tag{21}$$

Если при этом функция $\psi(z)$ – четная, то формула (21) примет вид:

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \psi(s) \cos \beta s ds \right) \cos \beta z d\beta. \tag{22}$$

Если же $\psi(z)$ – нечетная функция, то

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \psi(s) \sin \beta s ds \right) \sin \beta z d\beta. \tag{23}$$

Случай 1. Пусть конец $x = 0$ жестко закреплен, т.е. $a_1 = a_2 = 0$. Тогда система (14) дает $\sin \theta\lambda = 0$, $\cos \theta\lambda = 1$ и, следовательно, $\theta\lambda = 2\pi k$, где k – целое число. В этом случае формула (20) принимает вид:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda x [A(\lambda) \sin(\lambda t) + B(\lambda) \cos(\lambda t)] d\lambda. \tag{24}$$

Искомое решение задачи (1)–(3), как известно, можно построить с применением интеграла Фурье. Функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны определяться из начальных условий (3). Тогда имеем:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

Сравнивая эти формулы с формулой Фурье (23) для нечетной функции, определяем:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi\lambda} \int_0^{\infty} g(z) \sin \lambda z dz, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(z) \sin \lambda z dz. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20), получим решение задачи (1)–(3):

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda} g(z) \sin \lambda t + f(z) \cos \lambda t \right] \sin \lambda z \sin \lambda x dz \right\} d\lambda \quad (26)$$

или, принимая во внимание четность подынтегральной функции, как функции от λ :

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda} g(z) \sin \lambda t + f(z) \cos \lambda t \right] \sin \lambda z dz \right\} \sin \lambda x d\lambda. \quad (27)$$

Теорема 2. Пусть конец $x = 0$ жестко закреплен, т.е. $a_1 = a_2 = 0$. Тогда классическое решение начально-граничной задачи (1)–(3) имеет представление (27).

Случай 2. Пусть теперь конец $x = 0$ свободен, т.е. $a_1 = a_3 = 0$. Тогда из системы (14) получаем $\sin \theta \lambda = 0$, $\cos \theta \lambda = -1$ и, следовательно, $\theta \lambda = \pi(2k + 1)$. В этом случае формула (20) принимает вид:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda x [A(\lambda) \sin \lambda t + B(\lambda) \cos \lambda t] d\lambda. \quad (28)$$

Функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны определяться из начальных условий (3):

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

Сравнивая эти формулы с формулой (22) для четной функции, определяем

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi\lambda} \int_0^{\infty} g(z) \cos \lambda z dz, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(z) \cos \lambda z dz. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), получим решение задачи (1)–(3) в виде:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda} g(z) \sin \lambda t + f(z) \cos \lambda t \right] \cos \lambda z dz \right\} \cos \lambda x d\lambda. \quad (30)$$

Теорема 3. Пусть конец $x = 0$ свободен, т.е. $a_1 = a_3 = 0$. Тогда классическое решение начально-граничной задачи (1)–(3) имеет представление (30).

Заключение. Сформулирована начально-граничная задача для уравнения колебаний полуограниченной струны. Особенностью постановки задачи является то, что в краевых условиях присутствует вторая производная по времени от искомой функции на левом конце струны. Используется метод Даламбера для представления решения волнового уравнения. Строится вспомогательное обыкновенное функционально-дифференциальное уравнение. Это позволяет получить в явном виде представление решения исходной начально-граничной задачи для волнового уравнения.

Цитированная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
2. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М., 2003.
3. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск, 1972.

Поступила в редакцию 10.02.2009г.

УДК 519.968.72

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НАГРУЖЕНИЯМИ

К. И. УСМАНОВ

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави
161200 Туркестан ул.Саттарханова, университетский городок y_kairat@mail.ru

Установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагрузками.

На отрезке $[0, T]$ рассматривается двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагрузками:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t, s)x(s)ds + \sum_{j=0}^m K_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < T,$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где $(n \times n)$ – матрицы $A(t)$, $K_j(t)$, n – вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $(n \times n)$ – матрица $K(t, s)$ непрерывна на $[0, T] \times [0, T]$, $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$.

В [1] был предложен метод исследования и решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений, основанный на введении дополнительных параметров [2] и рассмотрении специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений.

В настоящей работе этот метод применяется к краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагрузками.

Берется число $l \in \mathbb{N}$ и по нему производится разбиение $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{(m+1)l} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_{il} = \theta_i$, $i = \overline{1, m}$, $t_{(m+1)l} = T$, $h_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = \overline{1, m}$, $h_{m+1} = T - \theta_m$.

Keywords: *system of integro-differential equations with loadings, two-point boundary value problem, the unique solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 45J05

© К. И. Усманов, 2009.

Обозначим сужение функции $x(t)$ на r -й интервал $[t_{r-1}, t_r)$ через $x_r(t)$ и задачу (1), (2) сведем к эквивалентной многоточечной краевой задаче:

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, s)x_i(s)ds + \sum_{j=0}^m K_j(t)x_{j+1}(t_{jl}) + f(t), \quad (3)$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, (m+1)l},$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \rightarrow T-0} x_{(m+1)l}(t) = d, \quad d \in R^n, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = \overline{1, (m+1)l-1}, \quad (5)$$

где (5) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения $[0, T]$.

Обозначим $x_r(t_{r-1})$ через λ_r и на каждом r -ом интервале проведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. При этом получим эквивалентную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, s)[u_i(s) + \lambda_i]ds + \sum_{j=0}^m K_j(t)\lambda_{j+1} + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad (6)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, (m+1)l}, \quad (7)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{(m+1)l} + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_{(m+1)l}(t) = d, \quad d \in R^n, \quad (8)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, (m+1)l-1}. \quad (9)$$

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, где $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $u_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t) - \lambda_r^*$ на r -ый интервал, будет решением задачи (6)–(9). Наоборот, если система пар $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, – решение задачи (6)–(9), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами: $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{(m+1)l} + \lim_{t \in T-0} \tilde{u}_{(m+1)l}(t)$ является решением задачи (1), (2).

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ на отрезке $[0, T]$. Тогда при фиксированных значениях введенных параметров специальная задача Коши (6), (7) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$u_r(t) = X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1 \lambda_r + X(t) \int_{t_{r-1}}^t \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} X^{-1}(\tau_1)K(\tau_1, s)[u_i(s) + \lambda_i]dsd\tau_1 + \\ + X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=0}^m K_j(\tau_1)d\tau_1 \lambda_{j+1} + X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1. \quad (10)$$

Нетрудно установить оценки:

$$\|X(t) \int_{t_{r-1}}^t \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} X^{-1}(\tau_1)K(\tau_1, s)u_i(s)dsd\tau_1\| \leq \beta T \frac{\bar{h}}{l} e^{\alpha \bar{h}/l} \max_{i=\overline{1, (m+1)l}} \sup_{s \in [t_{i-1}, t_i]} \|u_i(s)\|, \quad (11)$$

где $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, $\beta = \max_{(t, \tau) \in [0, T] \times [0, T]} \|K(t, \tau)\|$, $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$,

$\bar{h} = \max_{i=\overline{1, m+1}} \|h_i\|$. Из оценки (11) следует, что если выбрать $l_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось

неравенство $q(l_0) \equiv \beta T \frac{\bar{h}}{l_0} e^{\alpha \bar{h}/l_0} < 1$, то для любого $l \geq l_0$ система интегральных уравнений (10) имеет единственное решение.

В (10) полагая $t = \tau$, умножив обе части на $K(t, \tau)$, интегрируя по τ на $[t_{r-1}, t_r]$ и складывая правые и левые части, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{(m+1)l} \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, \tau) u_r(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{r=1}^{(m+1)l} \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau_1, s) u_i(s) ds d\tau_1 d\tau + \\ & \quad + \sum_{r=1}^{(m+1)l} \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \{A(\tau_1) \lambda_r + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau_1, s) ds \lambda_i + \sum_{j=0}^m K_j(\tau_1) \lambda_{j+l+1} + f(\tau_1)\} d\tau_1 d\tau, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_l(t) &= \sum_{r=1}^{(m+1)l} \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, s) u_r(s) ds, \\ M_r(l, t) &= \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) A(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(\tau_1, s) ds d\tau_1 d\tau, \\ P_j(l, t) &= \sum_{r=1}^{(m+1)l} \int_{t_{r-1}}^{t_r} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) K_j(\tau_1) d\tau_1 d\tau, \\ F(l, t) &= \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (12) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_l(t) &= \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \Phi_l(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \sum_{r=1}^{(m+1)l} M_r(l, t) \lambda_r + \\ & \quad + \sum_{j=0}^m P_j(l, t) \lambda_{j+l+1} + F(l, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как

$$\left\| \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \Phi_l(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right\| \leq \beta T \frac{\bar{h}}{l} e^{\alpha \bar{h}/l} \max_{t \in [0, T]} \|\Phi_l(t)\|$$

при всех $t \in [0, T]$, то для $l \geq l_0$ уравнение (13) имеет единственное решение. Далее, мы будем предполагать, что $l \geq l_0$ и равенствами

$$M_r^{(0)}(l, t) = M_r(l, t),$$

$$M_r^{(k)}(l, t) = \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) M_r^{(k-1)}(l, \tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$P_j^{(0)}(l, t) = P_j(l, t),$$

$$P_j^{(k)}(l, t) = \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) P_j^{(k-1)}(l, \tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$F^{(0)}(l, t) = F(l, t),$$

$$F^{(k)}(l, t) = \sum_{i=1}^{(m+1)l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) X(\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) F^{(k-1)}(l, \tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

определяем последовательности матриц и векторов, зависящих от $t \in [0, T]$. Применяя метод последовательных приближений, единственное решение уравнения (13) найдем в виде:

$$\Phi_l(t) = \sum_{r=1}^{(m+1)l} D_r(l, t) \lambda_r + \sum_{j=0}^m G_j(l, t) \lambda_{j+1} + F_l(t), \tag{14}$$

где $D_r(l, t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_r^{(k)}(l, t)$, $G_j(l, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_j^{(k)}(l, t)$, $F_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(l, t)$.

Подставим (14) в правую часть (10):

$$\begin{aligned} u_r(t) = & X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + \sum_{i=1}^{(m+1)l} X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau) \left[D_i(l, \tau) + \int_{t_{i-1}}^{\tau} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_i + \\ & + \sum_{j=0}^m X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau) [G_j(l, \tau) + K_j(\tau)] d\tau \lambda_{j+1} + X(t) \int_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_l(\tau)] d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Переходя к пределу $\lim_{t \rightarrow T-0} u_{(m+1)l}(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t)$ в (15) и подставляя полученные выражения в краевые условия (8) и условия склеивания (9), а также умножая обе части (8) на $\frac{h_{m+1}}{l}$, получим систему линейных уравнений относительно введенных параметров λ_r , $r = \overline{1, (m+1)l}$:

$$\frac{h_{m+1}}{l} \left\{ B + C X(T) \int_{T-h_{m+1}}^T X^{-1}(\tau) \left[D_1(l, \tau) + \int_0^{h_1} K(\tau, s) ds + G_0(\tau) + K_0(\tau) \right] d\tau \right\} \lambda_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h_{m+1}}{l} C \sum_{i=2}^{(m+1)l-1} X(T) \int_{T-h_{m+1}}^T X^{-1}(\tau) \left[D_i(l, \tau) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_i + \\
& + \frac{h_{m+1}}{l} C \sum_{j=1}^m X(T) \int_{T-h_{m+1}}^T X^{-1}(\tau) [G_j(l, \tau) + K_j(\tau)] d\tau \lambda_{j+1} + \\
& + \frac{h_{m+1}}{l} C \left\{ I + X(T) \int_{T-h_{m+1}}^T X^{-1}(\tau) \left[A(\tau) + D_{(m+1)l}(l, \tau) + \int_{T-h_{m+1}}^T K(\tau, s) ds \right] d\tau \right\} \lambda_{(m+1)l} = \\
& = \frac{h_{m+1}}{l} d - \frac{h_{m+1}}{l} C X(T) \int_{T-h_{m+1}}^T X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_l(\tau)] d\tau. \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[I + X(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \right] \lambda_r - \lambda_{r+1} + \\
& + \sum_{i=1}^{(m+1)l} X(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau) \left[D_i(l, \tau) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_i + \sum_{j=0}^m X(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau) [G_j(l, \tau) + \\
& + K_j(\tau)] d\tau \lambda_{j+1} = -X(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_l(\tau)] d\tau, \quad r = \overline{1, (m+1)l-1}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Матрицу соответствующей левой части систем линейных уравнений (16), (17) обозначим через $Q_{*,*}(l)$ и систему (16), (17) запишем в виде:

$$Q_{*,*}(l)\lambda = -F_*(l, d, f), \tag{18}$$

где

$$F_*(l, d, f) = \left(-\frac{h_{m+1}}{l} d + \frac{h_{m+1}}{l} C X(T) \int_{T-h_{m+1}}^T X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_l(\tau)] d\tau, \right.$$

$$\left. X(t_1) \int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_l(\tau)] d\tau, \dots, X(t_{(m+1)l-1}) \int_{t_{(m+1)l-2}}^{t_{(m+1)l-1}} X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_l(\tau)] d\tau \right)'$$

Очевидно, что если система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, – решение задачи с параметрами (6)–(9), то вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{(m+1)l}^*) \in R^{(m+1)ln}$ удовлетворяет системе (18). Нетрудно убедиться и в обратном. Если $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{(m+1)l})$ – решение уравнения (18), то система пар $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, где $\tilde{u}_r(t)$ – решение специальной задачи Коши (6), (7) при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, будет решением задачи (6)–(9).

Определение. Задача (1), (2) называется однозначно разрешимой, если для любой пары $(f(t), d)$, где $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$, она имеет единственное решение.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо чтобы матрица $Q_{*,*}(l)$ была обратимой для всех $l \geq l_0$ и достаточно, чтобы она была обратимой при некотором $l = l^* \geq l_0$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим однородную краевую задачу (1), (2) с $f(t) = 0$, $d = 0$. Для этой задачи система уравнений (18) имеет вид $Q_{*,*}(l)\lambda = 0$. Предположим, что при некотором $\tilde{l} \geq l_0$ матрица $Q_{*,*}(\tilde{l})$ необратима. Тогда однородная система линейных уравнений $Q_{*,*}(\tilde{l})\lambda = 0$ имеет ненулевое решение $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{(m+1)\tilde{l}}) \in R^{n(m+1)\tilde{l}}$.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (10) с $f(t) = 0$, $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, (m+1)\tilde{l}}$. Так как $\tilde{l} \geq l_0$, то эта система имеет единственное решение $(\tilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1, (m+1)\tilde{l}}$. Тогда ввиду эквивалентности задач (1), (2) и (4)–(7) функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, (m+1)\tilde{l}}, \quad \tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{(m+1)\tilde{l}} + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_{(m+1)\tilde{l}}(t),$$

будет ненулевым решением однородной краевой задачи (1), (2), что противоречит однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Достаточность. Пусть матрица $Q_{*,*}(l^*)$ обратима при некотором $l^* \geq l_0$. Для любой пары $(f(t), d)$ составим систему $n(m+1)l^*$ линейных уравнений относительно параметров (16), (17). Используя обратимость матрицы $Q_{*,*}(l^*)$ и решая систему линейных уравнений, найдем значения $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{(m+1)l^*}^*)$. Решая систему интегральных уравнений (10) при полученных значениях параметра λ^* , находим систему функций $(u_r^*(t))$, $r = \overline{1, (m+1)l^*}$. Тогда функция $x^*(t)$, определяемая равенствами:

$$x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, (m+1)l^*}, \quad x^*(T) = \lambda_{(m+1)l^*}^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{(m+1)l^*}^*(t),$$

будет решением задачи (1), (2).

Единственность решения доказывается методом от противного. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Джумабаев Д.С. //Математический журнал. 2008. Т.8, № 2 (28). С. 44 – 48.
2. Джумабаев Д.С. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т.29, № 1. С. 50 – 66.

Поступила в редакцию 27.10.2009г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H10

Alexeyeva L.A., Girnis S.R., Ukrainets V.N. **Dynamic behavior of the trilaminar casing in elastic space by moving loads action** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 5 – 13.

The analytical solution of the problem on effect of moving load on trilaminar casing in elastic space is constructed. In its base the critical velocities of the load and the stress-strain state of the casing and surrounding media are researched. Dynamic behavior of construction is investigated by different contact conditions in the media boundaries.

References – 4.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H10

Алексеева Л.А., Гирнис С.Р., Украинец В.Н. **Қозғалмалы жүктеме әсері бар кезде серпімді кеңістіктегі үш қабатты қабықшаның динамикалық жүріс-тұрысы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 5 – 13.

Серпімді кеңістіктегі үш қабатты қабықшаға жылжымалы жүктеменің әсері туралы есептің аналитикалық шешімдерінің негізінде жүктеменің кризистік жылдамдықтары, сонымен бірге қабықшаның және қоршаған массивтың шиеленісті өзгертілген күйі қарастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 517.968.7

2000 MSC: 35R12, 35L20, 34B37

Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. **About correct solvability of semi-periodical boundary value problem with impulsive effect for systems of hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 14 – 19.

A semi-periodical boundary value problem with impulsive effect for systems of hyperbolic equations by means of the method of introduction of functional parameters is researched. The necessary and sufficient conditions of correct solvability considering problem in the terms of initial data are established.

References – 9.

УДК: 517.968.7

2000 MSC: 35R12, 35L20, 34B37

Асанова А.Т., Жұмабаев Д.С. **Гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін импульстік әсері бар жартылай периодты шеттік есептің корректілі шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 14 – 19.

Гиперболалық тектес теңдеулер жүйелері үшін импульстік әсері бар жартылай периодты шеттік есеп функционалдық параметрлер енгізу әдісімен зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің корректілі шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған.

Әдебиеттер тізімі – 9.

УДК: 681.5

2000 MSC: 49J15, 49N35

Ashyrova E.T., Mamytov Dzh., Sharshenaliev Zh. **About stabilization problem of the linear stationary governed systems** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 20 – 25.

The problem of stabilizations of the system with scalar modal management is considered. The algorithm of the own digits of the positional closed managerial system is offered. It is realized the syntheses, providing stabilization, at account characteristics of gain factor in the form of not only one of matrix, but series of matrixes of an n -order.

References – 5.

УДК: 681.5

2000 MSC: 49J15, 49N35

Ашырова Ә.Т., Мамытов Дж., Шаршеналиев Ж. **Сызықты стационарлы басқарылу жүйелерді стабилизациялау туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 20 – 25.

Скалярлы модальды басқарылатын жүйені стабилизациялау есебі қарастырылады. Позициялы тұйықталған басқару жүйесінің меншікті мәндерін орналастыру алгоритмы ұсынылған. Бір емес бірнеше n ретті матрицалар арқылы ұйымдастырылатын күшейту коэффициенті қасиеттерін пайдаланып стабилизацияны қамтамасыз ететін синтез құрастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 5.

УДК: 517.956, 517.977.1, 517.977.5

2000 MSC: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

Ayazbayeva A.M., Jenaliyev M.T., Imanberdiyev K.B. **On the optimization method for a solution of Cauchy-Dirichlet problem for the Poisson equation** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 26 – 34.

In the bounded two-dimensional rectangular region the Cauchy-Dirichlet problem for the Poisson equation is considered. The studied incorrect boundary value problem is reduced to an optimal control problem. In terms of the solution of the adjoint boundary value problem the optimality conditions are established. It is found a criterium of the strongly solvability of the incorrect boundary value problem.

References – 9.

УДК: 517.956, 517.977.1, 517.977.5

2000 MSC: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

Аязбаева Ә.М., Жиенәлиев М.Т., Иманбердиев Қ.Б. **Пуассон теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебін шешетін тиімділік әдісі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 26 – 34.

Шектелген екі-өлшемді облыста Пуассон теңдеуі үшін Коши-Дирихле есебі қарастырылады. Зерттелген корректі емес шекаралық есеп тиімді басқару есебіне сәйкестеледі. Түйіндес шекаралық есептің шешімі арқылы тиімділік шарттары табылған. Корректі емес шекаралық есеп үшін әлді шешілетіндігінің критеріі табылған.

Әдебиеттер тізімі – 9.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L40

Baldybek Zh.A., Otelbaev M.O. **The problems of parallelization** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 35 – 42.

Problems of parallelization dealing with necessity of differential problems solving are considered. Cauchy problem and multiply point's problem for the linear ordinary differential equation are solved by parallelization. Parallelization of nonlinear equations by means of linearization of equations is considered.

References – 2.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L40

Балдыбек Ж.А., Отелбаев М.Ө. **Тармақталу есептері** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 35 – 42.

Жұмыста дифференциалдық есептерді шешуде пайда болатын тармақталу есептері қарастырылған. Тармақталу есептері арқылы жәй сызықты дифференциалдық теңдеу үшін Коши және көпнүктелік есептер шығарылған. Сызықты емес теңдеулер үшін сызықты түрге келтіру варианты қарастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 517.9

2000 MSC: 74H10

Borpaev K.B., Junusova A.T. **About stability difference dynamical system for part variables in critical case one root to equal unit** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 43 – 47.

In this article it is considered is stability of difference dynamical system for relatively particle variable in critical case, when among the roots characteristic equation, of the first approach it has a root equal to one. In has been received criterion of stability and unstability of particle variable.

References – 4.

УДК: 517.9

2000 MSC: 74H10

Бопаев Қ.Б., Жүнүсова А.Т. **Түбірі 1-ге тең дүдәмәл жағдайындағы айырымдық динамикалық жүйенің айнымалылар бөлігіне қатысты орнықтылығы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 43 – 47.

Ұсынылып отырған жұмыста айырымдық динамикалық жүйенің бірінші жуықша мінезде-мелік теңдеуінің түбірлерінің ішінде бір түбірі 1-ге тең болған дүдәмәл жағдайдағы жүйенің дербес айнымалылар бойынша орнықтылық және орнықсыздық шарттары алынды.

Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 517.962

2000 MSC: 42A10

Borpaeva S.K. **About stability non-stationary RDS in a critical case** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 48 – 53.

In present paper the problem of stability non-stationary RDS in a critical case when roots of the characteristic equation of the first approach have pairs in a conjugate complex roots on the module equal to unit is investigated.

References – 5.

УДК: 517.962

2000 MSC: 42A10

Бопаева С.К. **Стационар емес айырымдық динамикалық жүйенің қиын-қыстау жағдайдағы орнықтылығы туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 48 – 53.

Берілген жұмыста бірінші жуытудың характеристикалық теңдеуінің модулі бойынша бірге тең комплексті түйіндес түбірлері болған кезде стационар емес айырымдық динамикалық жүйенің қиын-қыстау жағдайдағы орнықтылығы қарастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 5.

УДК: 519.7

2000 MSC: 03E75, 47N70, 68W40

Zorkaltsev V. I, Medvezhonkov D.S., Perzhabinskij S.M. **Experience of use of algorithms of internal points in power models** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 54 – 62.

In the paper algorithms of the decision of problems of the linear programming, carrying out iterative improvement on internal concerning restrictions of inequalities to points are considered. The auxiliary problem of search of a direction of improvement of the decision in these algorithms is represented in the form of a problem of minimisation of square-law convex function at linear restrictions-equalities.

References – 19.

УДК: 519.7

2000 MSC: 03E75, 47N70, 68W40

Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С., Пержабинский С.М. **Энергетика модельдерінде ішкі нүктелерді пайдалану тәжірибелері** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 54 – 62.

Бұл мақалада теңсіздіктерге қатысты шектемелерде болатын ішкі нүктелер үшін шешімі итеративті жақсартылатын сызықты бағдарламалау есебінің шешімі қарастырылған. Бұл алгоритмдерде шешімін жақсарту бағытын іздеу сызықты теңсіздіктер шектемесінде квадратты дөңес функцияны минимизациялау мәселесіне келтірілген.

Әдебиеттер тізімі – 19.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B37

Kadirbayeva J.M. **About unique and correct solvability of two linear points boundary value problem for the loaded differential equations** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 63 – 71.

Two points boundary value problem for the loaded differential equations by method of parametrization with decomposition of interval by different paces is investigated. The necessary and sufficient conditions of unique and correct solvability of considering problem are obtained.

References – 6.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B37

Қадырбаева Ж.М. **Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің бірімәнді және корректті шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 63 – 71.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есеп интервалды әр түрлі қадамдармен бөлуімен параметрлеу әдісі арқылы зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің бірімәнді және корректті шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Әдебиеттер тізімі – 6.

УДК: 519.7

2000 MSC: 03E75, 47N70, 68W40

Kovalenko A.G. **The analysis of existence and stability of the equilibrium condition of the one-grocery dispersed market** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 72 – 77.

In the paper results of the analysis of behaviors of the economic system, described by mathematical model of the dispersed market, theories of counts described by means of a mathematical apparatus are resulted.

References – 3.

УДК: 519.7

2000 MSC: 03E75, 47N70, 68W40

Коваленко А.Г. **Таратылымды нарықтың қалпының тепе-теңдік күйі бар болуы және орнықтылығы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 72 – 77.

Мақалада таратылымды нарықтың математикалық моделімен сипатталған экономикалық жүйенің тәртібін талдау нәтижелері қарастырылған. Зерттеу құралы ретінде графтар теориясының математикалық аппараты алынған.

Әдебиеттер тізімі – 3.

УДК: 511

2000 MSC: 35L20, 3570, 35B10

Kozhegeldinov S.Sh. **Shincell's equation $x_1x_2\dots x_n = t^k$** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 78 – 84.

The general formula describing all the whole integer positive solution of given equations $x_1x_2\dots x_n = t^k$ is received. Each such solution is represented in the form of function of n parameters.

References – 8.

УДК: 511

2000 MSC: 35L20, 3570, 35B10

Қожегельдинов С.Ш. **$x_1x_2\dots x_n = t^k$ Шинцель теңдеуі** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 78 – 84.

Берілген $x_1x_2\dots x_n = t^k$ теңдеудің барлық бүтін оң шешімдерін сипаттайтын жалпы формула алынды. Осындай әрбір шешімі n параметрге тәуелді функция түрінде көрсетіледі.

Әдебиеттер тізімі – 8.

УДК: 517.946.9

2000 MSC: 35D05, 35L20

Kutunayev Zh.N. **The modelling problem of an oscillations of the semi-infinite string** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 85 – 89.

It is considered the modelling problem of an oscillations of the semi-infinite string which is presented by the solution of the boundary value problem for the wave equation.

References – 3.

УДК: 517.946.9

2000 MSC: 35D05, 35L20

Кутунаев Ж.Н. **Жартылай шексіз ішектің тербелістерін моделдеу** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 85 – 89.

Жартылай шексіз ішектің тербелістерін моделдеу есебі қарастырылған. Нәтиже толқындық теңдеуінің шекаралық есебінің шешімімен беріледі.

Әдебиеттер тізімі – 3.

УДК: 519.968.72

2000 MSC: 34K06, 34K10, 45J05

Usmanov K.I. **On unique solvability of the linear boundary value problem for systems of integro-differential equations with loadings** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 4 (34). P. 90 – 95.

The necessary and sufficient conditions of unique solvability of the linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations with loadings are established.

References – 2.

УДК: 519.968.72

2000 MSC: 34K06, 34K10, 45J05

Усманов К.И. **Жүктері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықты шеттік есептің бірімәнді шешілімдігі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 4 (34). Б. 90 – 95.

Жүктері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің бірімәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалған.

Әдебиеттер тізімі – 2.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту. Необходимо указать организацию, от которой направлена статья, адрес и e-mail (при наличии).
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в **Л^AT_EX**-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в **Л^AT_EX**) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами.
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: **Ф.И.О.** (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 4 (34) 2009

Главный редактор:

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяткин,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304

тел.: 8(727)2-72-01-66, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 22.12.2009г.

Тираж 300 экз. Объем 103 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы

ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81

Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50

e-mail: print_express@bk.ru