ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2011, том 11, № 2 (40)

Институт математики МОН РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 11, № 2 (40), 2011

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),

8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),

факс: 8 (727) 2 72 70 24,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 11 **№ 2 (40)** **2011**

CONTENTS

Volume 11 **No. 2 (40)** **2011**

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 5 — 11*

АКАДЕМИК АН КАЗССР
ОРЫМБЕК АХМЕТБЕКОВИЧ ЖАУТЫКОВ

Орымбек Ахметбекович Жаутыков родился в мае 1911 года в ауле № 2 Коунрадского района Карагандинской области (ныне Актогайский район Карагандинской области). С 1920 по 1930 годы учился сначала в аульной, затем в школах I и II ступеней города Каркаралинска. В 1934 году окончил физико-математический факультет Казахского педагогического института имени Абая и как отличник учебы был оставлен при институте в качестве ассистента. В дальнейшем работал старшим преподавателем, доцентом, заведующим кафедрой, деканом физико-математического факультета и заместителем директора института по научно-учебной части.

Научную деятельность О.А. Жаутыков начал в Ленинграде. В 1939 году он поступил в аспирантуру Ленинградского государственного университета. Его научным руководителем был известный математик, профессор И.П. Натансон. Научные интересы О.А. Жаутыкова формировались под влиянием таких известных ученых-математиков, как В.И. Смирнов, Л.В. Канторович, Н.П. Еругин, Н.А. Артемьев и других. Но начавшаяся 22 июня 1941 г. Великая Отечественная война не позволила продолжить учебу в аспирантуре ЛГУ. С 1941 года началось плодотворное научное сотрудничество О.А. Жаутыкова с приехавшим из Казани в Алма-Ату К.П. Персидским – продолжателем научных идей по теории устойчивости выдающегося русского математика А.М. Ляпунова. Он становится одним из активных участников научного семинара по теории устойчивости, организованного К.П. Персидским, и в 1944 году успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему "Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова", в которой обобщены теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости тривиального решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также получен ряд результатов, развивающих исследования по устойчивости решений присоединенных систем.

В начале 1945 года в составе делегации казахстанских ученых О.А. Жаутыков прибывает в Москву для утверждения структуры и штата Академии наук Казахской ССР на базе существовавшего филиала Академии наук СССР. В этот период в Москве и Ленинграде он встречается с академиками И.М. Виноградовым, В.И. Смирновым, И.Г. Петровским и другими учеными для обсуждения проблем и тематики будущего Сектора математики и механики, открытие которого намечалось в рамках будущей Академии наук Казахской ССР и горячо поддерживалось этими математиками. 1 марта 1945г. Сектор математики и механики был открыт.

Первое время О.А. Жаутыков работает старшим научным сотрудником, а с 1951 года — заведующим Сектором математики и механики. В эти годы он большое внимание уделял подготовке высококвалифицированных научных и педагогических кадров для республики. По его инициативе и активном участии в центральные научно - исследовательские учреждения и ВУЗы были направлены многие молодые выпускники ВУЗов республики, особенно КазГУ им. С.М. Кирова и КазПИ им. Абая. Полученные ими в ведущих научных центрах знания, научные направления явились основой дальнейшего развития казахстанской математики. Многие из них впоследствии стали известными учеными и создали свои научные школы. Научные исследования О. А. Жаутыкова в основном связаны с теорией бесконечных систем дифференциальных систем. В его работах доказано существование периодических решений бесконечных систем дифференциальных уравнений и обобщена классическая теорема Пуанкаре об аналитичности решения по параметру. Развивая классические идеи Пуассона и Гамильтона - Якоби на счетные канонические системы О.А. Жаутыков доказал справедливость принципа наименьшего действия для систем с бесконечным числом степеней свободы. Важный вклад сделал О.А. Жаутыков в теорию дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Им разработан метод, позволяющий получить представление решений в случае счетного числа независимых переменных. Развивая исследования академика И.Г. Петровского, О.А. Жаутыков рассмотрел вопрос о корректности задачи Коши для бесконечных систем уравнений в частных производных первого порядка двух независимых переменных. Им установлены условия существования решения задачи Коши для счетной системы уравнений в частных производных первого порядка конечного числа независимых переменных общего вида. Распространяя принцип усреднения Н.Н. Боголюбова в нелинейной механике на счетную систему дифференциальных уравнений, он доказал обобщенную теорему об интегральной непрерывной зависимости решений от параметра. Докторскую диссертацию на тему "Исследования по теории счетных систем дифференциальных уравнений" О.А. Жаутыков защитил в 1961 году. О.А. Жаутыков в своих трудах большое внимание уделял приближенным методам решения дифференциальных уравнений и их применению в прикладных задачах. Он обосновал применимость метода операционного исчисления для нахождения точного и приближенного решений бесконечных систем дифференциальных уравнений. Его исследования по развитию методов укорочения, малого параметра и усреднения позволили решить задачи теории колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы и многие проблемы бесконечных систем обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Не менее важные результаты получены О.А. Жаутыковым при исследовании устойчивости интегральных многообразий бесконечных систем дифференциальных уравнений. Обобщен принцип сведения Ляпунова и обосновано использование преобразования Лапласа для построения решений счетных систем.

Ряд его работ посвящен применению метода функционального анализа к исследованию задач колебаний распределенных систем. Исследования О.А. Жаутыкова, посвященные колебаниям прямолинейного стержня с учетом рассеяния энергии в материале, используются многими авторами в качестве приложения методов функционального анализа к задачам колебаний упругих систем.

О.А. Жаутыков впервые рассмотрел краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих счетное число параметров. Такие задачи часто возникают в теории управления при переводе управляемого объекта в определенное положение. Особенность управления системами, обладающими бесконечным числом степеней свободы, состоит в том, что для них без дополнительных условий не имеет места принцип экстремальности. Для таких систем О.А. Жаутыковым на основе линеаризации нелинейных систем дифференциальных уравнений получены необходимые условия оптимальности. Это позволило задачу оптимального управления распределенными параметрами свести к задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений.

Им разработан конструктивный метод исследования краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и на его основе проведен всесторонний анализ поведения периодических решений уравнений с малым параметром в критических случаях.

В 1974 году О.А. Жаутыков совместно с К.Г. Валеевым опубликовали монографию "Бесконечные системы дифференциальных уравнений". Ценность этой монографии заключалась в том, что в ней были собраны последние достижения теории бесконечных систем дифференциальных уравнений и многие из них принадлежали авторам. Впервые в монографии были изложены теоремы существования и единственности решений для линейных и нелинейных бесконечных систем дифференциальных уравнений, теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра, о продолжимости решений. Также всесторонне исследовались качественные вопросы бесконечных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Книга получила широкое признание не только в СССР, но и за рубежом. За эту работу О.А. Жаутыков в 1976 году был удостоен звания лауреата Государственной премии Казахской ССР в области науки и техники.

Научные результаты, полученные им при исследовании начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, приводятся в монографиях различных авторов, опубликованных в СССР и за рубежом. Теоремы О.А. Жаутыкова об усреднении и укорочении счетных систем дифференциальных уравнений, а также их приложения к решению задач колебаний упругих систем, описываемых уравнениями в частных производных четвертого порядка, приводятся в монографиях академика Ю.А. Митропольского "Метод усреднения в нелинейной механике"(Киев: Наукова думка, 1971), "Асимптотические методы решения уравнений в частных производных" (Киев: Вища школа, 1979, соавтор Б.И.Мосеенков).

Вклад О.А. Жаутыкова в развитие математической науки в полной мере отражен в сборниках "Математика в СССР за 40 лет", "Математика в СССР за 50 лет", "Механика в СССР за 50 лет", подытоживающих достижения в области математики и механики, в "Истории отечественной математики" с древнейших времен до наших дней в пяти томах, в книге "Биографический словарь деятелей науки в области математики".

За фундаментальные исследования в области теории дифференциальных уравнений и за значительный вклад в развитие математической науки он в 1962 году был избран действительным членом Академии наук Казахской ССР. Академик О.А. Жаутыков был участником многих конгрессов, съездов, конференций, симпозиумов, посвященных обсуждению современных проблем математики и механики, проходивших в Советском Союзе и за рубежом. Признанием научной и практической ценности проведенных О. А. Жаутыковым исследований явилось присвоение ему в 1974 г. звания Заслуженного деятеля науки Казахской ССР.

Наряду с огромной научно-исследовательской деятельностью академик О.А. Жаутыков уделял постоянное внимание подготовке кадров по математике и механике. Под его руководством защищены 15 кандидатских диссертаций. Более пятидесяти лет он непрерывно вел педагогическую работу. Его интересные, глубоко содержательные и мастерски читаемые лекции слушали студенты КазПИ, КазГУ, КазПТИ, КазЖенПИ. Он написал первый учебник по математическому анализу на казахском языке, изданный в 1958 году, который стал важным событием в жизни высшей школы Казахстана. Его опыт создания учебника на казахском языке способствовал появлению аналогичных учебников на национальных языках в ряде союзных республик.

О.А. Жаутыков был крупным специалистом по истории и методологии математики, последовательным популяризатором математических знаний. Так он в 1978 году написал книгу "Математика и научно-технический прогресс", где в доступной форме были изложены математические задачи, оказавшие существенное влияние на научно-технический прогресс. О.А. Жаутыков выпустил на казахском языке первое учебное пособие по обыкновенным дифференциальным уравнениям в двух частях (1950 и 1952 гг.), очерки о выдающихся русских математиках (1956 г.), книги "От устного счета к машинной математике"(1959 г.), "История развития математики с древнейших времен до начала XII века"(1967 г.), учебное пособие для учителей "Введение в высшую математику"(1984 г.).

Академик О.А. Жаутыков был человеком неустанного, плодотворного труда. Им опубликовано около 200 научных, научно-популярных, методических работ, учебников и учебных пособий, журнальных и газетных статей.

Усилия Орымбека Ахметбековича Жаутыкова по развитию математической науки в республике, его неустанная забота о молодых высококвалифицированных кадрах и его высокий авторитет среди ученых-математиков позволил в 1965 году на базе Сектора математики и механики открыть Институт математики и механики Академии наук Казахской ССР.

С 1969 по 1985 годы О.А. Жаутыков возглавлял Отделение физико-математических наук, занимая должность академика-секретаря и являясь членом Президиума АН КазССР. Многие годы он руководил Объединенным ученым советом, а затем специализированным советом по защите кандидатских диссертаций. Был председателем проблемного совета по математике при Отделении физико-математических наук, председателем методологического семинара при Институте математики и механики и председателем научно-методического совета при правлении республиканского общества "Знание" по пропаганде физико-математических знаний.

Он являлся редактором ряда тематических сборников: "Дифференциальные уравнения и их применение", "Функциональный анализ и математическая физика", членом редколлегии, а затем заместителем главного редактора журнала "Известия АН КазССР. Серия физико-математическая", членом редколлегии журнала "Вестник АН КазССР". Под его редакцией выпущен ряд монографий.

Осознавая, что завтра вузовскую аудиторию заполнят сегодняшние школьники, он уделял особое внимание совершенствованию физико-математического образования в школах республики, неоднократно выступал с докладами, лекциями по проблемам преподавания перед учителями г. Алма-Аты и на республиканских совещаниях, курсах повышения квалификации учителей. О.А. Жаутыков приложил немало усилий для организации Республиканской физико-математической школы в г. Алма-Ате, которая теперь носит его имя. Он не раз выступал перед учащимися этой школы с популярными лекциями по элементарной математике. Сегодня немало выпускников этой школы стали известными учеными, занимают ответственные государственные посты и плодотворно трудятся на благо независимого Казахстана.

В свое время по его инициативе в Алматы была организована Малая академия наук для школьников, почетным президентом которой он был долгие годы.

Выдающийся ученый, замечательный педагог, талантливый организатор науки, академик АН КазССР, доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии КазССР Орымбек Ахметбекович Жаутыков 16 мая 1989 г. ушел из жизни.

За большие заслуги в создании и развитии математической науки, подготовке научно-педагогических кадров и в совершенствовании физико-математического образования в Казахстане О.А. Жаутыков награжден Орденом Октябрьской революции, двумя орденами "Знак Почета", многими медалями, грамотами и Почетной грамотой Верховного Совета Казахской ССР.

Совет Министров Казахской ССР принял постановление об увековечении памяти ученого. Имя О.А. Жаутыкова присвоено Республиканской физико-математической школе в г. Алма-Ате и средней школе №1 в г. Каркаралинске. Установлена мемориальная доска на доме, где жил О.А. Жаутыков. В январе 2005 года в стенах Республиканской физико-математической школы имени О.А. Жаутыкова прошла Первая международная жаутыковская олимпиада по математике и физике, в которой участвовали около 200 школьников из 15 стран. В этом году уже состоялась седьмая международная жаутыковская олимпиада по математике, физике и информатике.

В настоящее время научные идеи и направления О.А. Жаутыкова успешно развиваются его учениками и последователями.

В год 100-летнего юбилея академика О.А. Жаутыкова все ярче видна его роль в становлении и развитии казахстанской математической науки и высшего образования.

Список трудов О.А. Жаутыкова

1. Некоторые теоремы устойчивости движения, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и мех, 1947, вып. 1, С. 88 – 100.

2. Задача Коши для счетной системы уравнений с частными производными, Изв. АН КазССР, Сер. матем. и мех., 1949, вып. 3, С. 85 – 90.

3. Жай дифференциалдық теңдеулер. Жоғары оқу орындарына арналған оқулық, I-бөлім, Алматы, 1950, 52 б.

4. Орыс халқының ұлы математигі Александр Михайлович Ляпунов, Алматы, 1950.

5. Математика және оның дамуы, Алматы, 1951.

6. Задача Коши для счетной системы уравнений с частными производными n-го порядка, Изв. АН КазССР, Сер. матем. и мех., 1951, вып. 5, С. 142 – 153.

7. Жай дифференциалдық теңдеулер. Жоғары оқу орындарына арналған оқулық, II-бөлім, Алматы, 1952.

8. Задача Коши в линейном нормированном пространства, Изв. АН КазССР, Сер. астрономии, физики, матем. и мех., 1952, вып. 1, С. 81 – 87.

9. Константин Петрович Персидский (К 50-летию со дня рождения), Успехи математических наук, 1954, Т. 9, вып. 1, С. 151 – 154.

10. Краткий обзор развития теории дифференциальных уравнений с частными производными. К 220-летию со дня появления теории уравнений в частных производных, Вестник АН КазССР, 1955, №7, С. 4 – 19.

11. К вопросу о построении интегралов уравнений с частными производными первого порядка счетного множества независимых переменных, Изв. АН КазССР, Сер. матем. и мех., 1956, вып. 4, С. 48 – 69.

12. Обобщение скобок Пуассона для функций счетного множества переменных, Матем. сборник АН СССР, Новая серия, 1957, Т. 43, вып. 1, С. 29 – 36.

13. По поводу решения одной задачи теории фильтрации, Изв. АН КазССР, Сер. матем. и мех., 1957, вып. 6, С. 46 – 50.

14. Математикалық анализ курсы: Désinstituttardyn — Пединституттардың физика-математика факультеттер3не арналған оқулық, Алматы, 1958.

15. Жай санаудан машиналық математикаға жету (Математиканың даму тарихынан), Алматы, 1959.

16. О счетной системе дифференциальных уравнений, содержащей переменные параметры, Матем. сборник АН СССР, Новая серия, 1959, Т. 49, вып. 3, С. 317 – 330.

17. К построению характеристик уравнений в частных производных первого порядка счетного множества переменных на основе метода редукции, Известия высш. учеб. заведений, Математика, 1960, №3, С. 127 – 142.

18. Решение краевой задачи для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Украинский математический журнал, 1960, Т. 12, №2, С. 157 – 164.

19. О распространении теоремы Гамильтона-Якоби на бесконечную каноническую систему уравнений, Матем. сборник АН СССР, Новая серия, 1961, Т. 53, вып. 1, С. 313 – 328.

20. Некоторые вопросы теории счетных систем дифференциальных уравнений, Differential Equations. Teil Appelications equadiff. Praga, 1962, Vol. 11, P. 72 – 73.

21. К шестидесятилетию Константина Петровича Персидского, Успехи математических наук, 1963, Т. 18, вып. 6, С. 241 (совместно с Г.Н. Багаутдиновым).

22. Принцип усреднения в нелинейной механике применительно к счетным системам уравнений, Украинский математический журнал, 1965, Т. 17, №1, С. 39 – 46.

23. Счетные системы дифференциальных уравнений и их применение, Дифференциальные уравнения, 1965, Т. 1, №2, С. 162 – 170.

24. О применении неявных функций к решению краевых задач для бесконечных систем дифференциальных уравнений, Differential Equations, Teil Appelications equadiff, Bratislawa, 1966, Vol. 11, P. 48 – 50.

25. Математиканың даму тарихы (Ерте заманнан 17 ғасырға дейін), Алматы, 1967.

26. Комплекс сандар және олардың практикалық маңызы, Алматы, 1969.

27. Роль математики в развитии естествознания и техники, Алма-Ата, 1970.

28. Об одной задаче теории фильтрации, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1971, №3, С. 37 – 39 (совместно с А. Булекбаевым).

29. О многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1972, №5, С. 7 – 13 (совместно с В.Г. Бродовским).

30. Развитие физико-математических наук в Казахстане, Вестник АН КазССР, 1973, №1, С. 36 – 43.

31. Бесконечные системы дифференциальных уравнений, Алма-Ата, 1974 (совместно с К.Г. Валеевым).

32. Из истории развития математики в Академии наук, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1974, №3, С. 1 – 7.

33. Ақиқатты танып-білудегі математиканың ролі, Алматы, 1975.

34. Роль математики в познании действительности, Алма-Ата, 1975.

35. О некоторых результатах исследований по теории бесконечных систем дифференциальных уравнений, Applied mathematics, Sofia, 1976, Vol. 11, №1, P. 35 – 42.

36. О разрешимости многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Bulletinal institutului politechnic din, Tasi tomul XXII (XXVI), Fase 3-4, Secjia 1 (Matematica, teoretica Fizica), 1976, P. 75 – 79.

37. О применении метода укорочения к задачам колебаний упругих систем, Annuaire des ecoley Superieures Mechanique technique, Sofia, 1977, Vol. XII, 1-2-eme, P. 9 – 13.

38. Кривые второго порядка, Квант, 1977, №8, С. 22 – 26.

39. Математика и научно-технический прогресс, Алма-Ата, 1978.

40. Непрерывная зависимость от параметра и устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений с последействием, Вестник АН КазССР, 1981, №11, С. 57 – 62.

41. Метод бесконечных систем дифференциальных уравнений в задачах колебаний систем с распределенными параметрами, Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем., 1982, №5, С. 75 – 79.

42. Функционально-аналитический метод в задачах естественно-технических наук, Дифференциальные уравнения и их применение, Руссе, 1982, С. 298 – 309.

43. Об одной задаче для уравнения в частных производных первого порядка, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1983, №3, С. 31 – 34 (совместно с Д.С. Джумабаевым).

44. Опыт работы физико-математического отделения Малой академии наук школьников Казахстана, Алма-Ата, 1983 (совместно В.Г. Грищенко и Г.В. Белянской).

45. Жоғары математикаға кіріспе: Мұғалімдерге көмекші құрал, Алматы, 1984.

46. Математика на службе научно-технического прогресса, Алма-Ата, 1984.

47. Дифференциалдық теңдеулердің қолданылуы туралы әңгіме, Алматы, 1986.

48. Метод бесконечных систем дифференциальных уравнений в задачах колебаний систем с распределенными параметрами, Успехи механики, 1986, Т. 9, №1, С. 65 – 91.

49. Методы математики в естественно-технических науках, Алма-Ата, 1987.

50. Жаутыков О.А., Джумабаев Д.С. Решение краевых задач на основе модификации метода Ньютона-Канторовича, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1987, №5, С. 19 – 29 (совместно с Д.С. Джумабаевым).

51. Жаутыков О.А., Жаркынбаев С., Жуковский В.И. Дифференциальные игры нескольких лиц (с запаздыванием времени), Алма-Ата, 1988 (совместно с С. Жаркынбаевым и В.И. Жуковским).

52. Методы математики в познании действительности. Математизация науки: социокультурные и методологические проблемы, Алма-Ата, 1990, С. 61 – 86.

Д.С. Джумабаев

Институт математики МОН РК,
г. Алматы.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 12 — 16*

ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ АН КАЗССР ЕНГВАН ИНСУГОВИЧ КИМ

В ноябре этого года исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося математика, положившего начало развития теории уравнений с частными производными в Казахстане, член-корреспондента АН Казахской ССР, Заслуженного деятеля науки Казахской ССР, доктора физико-математических наук, профессора Енгвана Инсуговича Кима.

Енгван Инсугович Ким родился 12 ноября 1911 года в селе Усть-Сидими Хасанского района Приморского края в семье железнодорожника. В 1929 г. после окончания семилетней школы он поступил в Никольско-Уссурийский педагогический техникум на математическое отделение. Закончив в 1932 г. техникум, он решил продолжить учебу, и в этом же году Енгван Инсугович едет с Дальнего Востока в Москву, в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, на механико-математический факультет. При поступлении в МГУ он проявил свои незаурядные способности и математическую подготовку, и его зачислили в университет. За короткий промежуток времени он становится одним из лучших студентов университета. Он очень много занимается, посещает научные семинары под руководством А.Н.Тихонова и С.Л.Соболева, знакомится с новыми математическими направлениями, актуальными проблемами теории дифференциальных уравнений.

В 1937 г. Е.И. Ким с отличием заканчивает МГУ. С 1937 г. по 1945 г. работает в Кызыл-Ординском пединституте, занимая различные преподавательские и административные должности. Его первые научные работы посвящены задаче Гильберта в многосвязных областях, предложенной ему С.Л. Соболевым. В 1942 г. он защищает кандидатскую диссертацию по этой теме в Ученом совете Объединенного Украинского университета, находившегося в то время в г. Кызыл-Орде в эвакуации. В 1943 г. он получает ученое звание доцента.

С 1945 г. Е.И.Ким работает в Казахском государственном университете им. С.М. Кирова в г. Алма-Ате в должности заведующего кафедрой геометрии. В 1951 г. переезжает в г. Ростов - на - Дону, где работает заведующим кафедрой геометрии и деканом физико-математического факультета педагогического института.

С 1953 г. по 1956 г. проходит докторантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР в Москве, его научный консультант – И.Н. Векуа. В этот период им разрабатывается теория сингулярных интегральных уравнений Вольтерра – Фредгольма, которая впоследствии находит большое применение при решении начально–краевых задач для параболических уравнений. В 1959 г. Е.И. Ким защищает докторскую диссертацию "Об одном классе сингулярных интегральных уравнений и некоторых задачах для кусочно-однородных сред", в 1960 г. получает ученое звание профессора.

После окончания докторантуры с 1956 г. по 1964 г. Е.И. Ким работает заведующим кафедрой высшей математики Харьковского политехнического института. Там прошли хорошую математическую школу и стали прекрасными специалистами в области уравнений с частными производными молодые специалисты из Казахстана. Среди первых его учеников С.А. Усольцев, Ш.Т. Иркегулов, Л.П. Иванова, С.Н. Харин, В.Х. Ни, Б.Б. Баймуханов, К.К. Кабдыкаиров, М.О. Орынбасаров, Л.Ж. Жумабеков и другие.

В 1962 г. Е.И. Ким избирается член-корреспондентом АН КазССР и в 1964 г. переезжает в г. Алма-Ату, где в полной мере проявляется и реализовывается его замечательный талант. По приезде в Казахстан Е.И. Ким основывает и возглавляет лабораторию уравнений математической физики в Институте математики и механики АН КазССР и кафедру уравнений математической физики в Казахском государственном университете им. С.М. Кирова. Одновременно он организовывает Общегородской научный семинар по уравнениям математической физики.

На протяжении многих лет он читает общие и специальные курсы для студентов, аспирантов в КазГУ. Он был блестящим лектором. На его лекциях всегда было много слушателей, среди которых не только аспиранты, студенты КазГУ, но и преподаватели других вузов г.Алма-Аты, Казахстана, научные работники.

Регулярно в течение каждого учебного года Е.И. Ким проводит Общегородской научный семинар, который сыграл большую роль в становлении и развитии научных исследований по уравнениям с частными производными.

Широка тематика научных исследований Е.И. Кима. Это и сингулярные интегральные уравнения, и начально–краевые задачи для параболических уравнений, для уравнений с разрывными коэффициентами, и нелинейные задачи со свободными границами, и задачи в угловых и вырождающихся областях. Особый интерес у Е.И. Кима всегда вызывали задачи, к которым не применимы общие методы исследования, которые не вкладываются в общую теорию и для решения которых необходимо проявлять изобретательность, применять нестандартные подходы.

Разработанная Е.И. Кимом теория сингулярных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма получила дальнейшее развитие и применение при решении начально-краевых задач для параболических уравнений в его исследованиях с учениками. В частности, совместно с Л.П. Ивановой, К.К. Кабдыкаировым, В.Х. Ни, Л.Ж. Жумабековым, Б.Б. Баймухановым, С.Е. Базарбаевой и другими были исследованы различные начально – краевые задачи для уравнений и систем параболического типа; с Е.М. Хайруллиным, Т.В. Некрасовой были изучены краевые задач с граничными условиями, содержащими производные неизвестных функций высоких порядков; разработаны методы решения задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами, которые эффективно использовались при решении задач сопряжения М.А. Абдрахмановым, Ш.А. Кулахметовой, Ф.Г. Бирюковой. Сингулярные интегральные уравнения, рассматриваемые Е.И. Кимом, естественным образом возникали при решении краевых задач. Особый класс сингулярных интегральных уравнений порождается краевыми задачами в вырождающихся областях с подвижными границами и в угловых областях. В этом направлении Е.И. Кимом и его учениками С.Н. Хариным, М.О. Орынбасаровым, Т.Е. Омаровым, А.А. Кавокиным, Г.И. Бижановой, М.И. Рамазановым, У.К. Койлышовым получен ряд законченных результатов по разрешимости таких задач. Много внимания Е.И. Ким уделял нелинейным задачам, задачам со свободными границами, в частности, задаче Стефана с вырождением области в начальный момент времени, для которых были разработаны асимптотические, аналитические методы решения. В этом направлении с ним работали А.А. Кавокин, Я.А. Краснов, Г.И. Бижанова.

В лаборатории уравнений математической физики Института математики АН КазССР помимо фундаментальных исследований естественно сформировалось другое направление исследований - прикладное, которое зародилось еще в годы работы Е.И. Кима в ХПИ. Возглавил его С.Н. Харин, ныне академик НАН РК. Разработанные Е.И. Кимом методы решения краевых задач для уравнений теплопроводности находят большое применение в прикладных задачах, в частности, в теории электрических контактов. В этом направлении интенсивно работают Д.У.Ким, М.А. Перевертун, С.П. Городничев, А.Т. Кулахметова, Ю.Р. Шпади, С.С. Домалевский и другие ученики Е.И. Кима и С.Н. Харина.

Е.И. Кимом опубликовано около 130 научных статей, многие из которых изданы в центральных математических журналах, одна монография совместно с С.Н. Хариным, В.Т. Омельченко, сделаны доклады на Международных, Всесоюзных, Республиканских конференциях. Под руководством Е.И. Кима защищено 36 кандидатских диссертаций, 7 его учеников защитили докторские диссертации.

Е.И.Ким вел большую общественную работу. Он являлся членом Проблемного совета АН КазССР по физико-математическим наукам, Специализированного совета по защите диссертаций, редакционного совета Всесоюзного "Инженерно-физического журнала", журнала "Известия АН КазССР. Серия физико-математическая".

За большие заслуги в развитии математики в Казахстане, за плодотворную общественно-педагогическую деятельность Е.И. Ким был удостоен почетного звания "Заслуженный деятель науки КазССР", награжден Почетной грамотой Президиума Верховного Совета КазССР, занесен в Золотую книгу почета Казахской ССР.

Е.И. Ким скончался 14 декабря 1994 г. после тяжелой болезни. Он прожил прекрасную жизнь, наполненную работой, творческими исканиями. Профессор Е.И. Ким положил начало развития в Казахстане теории уравнений с частными производными. Дело, которому он служил всю свою жизнь, живет и продолжает развиваться его учениками и последователями.

Список трудов Е.И. Кима

1. Об общий граничной задаче гармонический функции, Прикладная математика и механика, 1952, Т. 16, №2, С. 18 – 24.

2. Об одном классе интегральных уравнений I рода с сингулярным ядром, ДАН СССР, 1953, Т. 16, №2, С. 1014 – 1019.

3. The propagation of heat in two dimensions in an infinite inhomogeneous body, Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat.i Meh., 1953, V. 17, №2, P. 43 – 47.

4. On a heat conduction problem for a system of bodies, Prikl. Mat. i Meh., 1957, V. 21, №5, P. 19 – 25.

5. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР, 1957, Т.113, №2, С. 268 – 271.

Solution of a certain class of singular integral equations with line integrals, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 1957, V. 113, P. 24 – 27.

6. A two-dimensional problem for heat and mass exchange in drying processes, Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tehn. Nauk energet. Avtomat., 1959, №. 3, P. 79 – 85 (with L.P. Ivanova).

7. Об условиях разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1959, Т. 125, №4, С. 723 – 726.

8. The mixed boundary value problem for a certain system of parabolic differential equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1959, V. 126, P. 1183 – 1186 (with L.P. Ivanova).

9. Об условиях разрешимости некоторой граничной задачи для одной параболической системы, Докл. АН СССР, 1961, Т. 139. №4, С. 795 – 798 (совместно с Л.П. Ивановой).

10. The temperature distribution in a piecewise homogeneous semi-infinite plate, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1961, V. 140, №2, P. 333 – 336 (with B.B.Baimuhanov).

11. Решение уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, 1961, Т. 140, С. 451 – 454 (совместно с Б.Б. Баймухановым).

12. Об условиях разрешимости одной граничной задачи уравнения теплопроводности, Докл. АН СССР, 1961,. Т. 140, С. 553-556 (совместно с Б.Б. Баймухановым).

13. Решение уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентом и его приложения к вопросу электрических контактов, ИФЖ, 1963, №6, С. 763 – 768.

14. Об условиях разрешимости общей граничной задачи уравнений. Тепло- и массоперенос, 1964, Т. 5, С. 122 – 126.

15. К вопросу распространения тепла в кусочно-однородных средах в многомерном пространстве, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1965, №3, С. 3 – 18.

16. Решение системы дифференциальных уравнений параболического типа, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1965, №5, С. 3 – 15 (совместно с В.Х. Ни).

17. Решение уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентом, когда начальные данные не согласуются, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1967, №5, С. 3 – 15.

18. Уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентом, когда начальные данные не согласуются, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1967, №5, С. 56 – 61 (совместно с Ф.Г. Бирюковой).

19. Нахождение оригинала одного изображения, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1968, №1, С. 83 – 86 (совместно с Ф.Г. Бирюковой).

20. О некорректности пространственных задач типа Коши-Гурса, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1970, №1, С. 70 – 71 (совместно с В. Ли).

21. О неразрешимости методом последовательных приближений одного класса интегральных уравнений Вольтерра, Тр. ИММ АН КазССР, Алма-Ата, 1971, Т. 2, С. 27 – 35 (совместно с С.Н. Хариным).

22. Первая граничная задача без условий согласования в первой граничной задаче уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентом, когда линия разрыва выходит на границу, Мат. и мех., Алма-Ата, 1972, Вып. 1, С. 51 – 52.

23. Решение задачи теплопроводности с подвижной границей с помощью специальных функций, Мат. и мех., Алма-Ата, 1972, Вып. 1, С. 128 – 130.

24. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений I рода, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1975, №1, С. 39 – 45 (совместно с Р.У. Аргынбаевой и Ф.Г. Бирюковой).

25. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах, Алма-Ата, Наука, 1977 (совместно с В.Т.Омельченко, С.Н.Хариным).

26. Решение в малом задач с нелинейным граничными условиями для уравнения теплопроводности в расширяющейся области, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1977, С.41 – 46 (совместно с А.А. Кавокиным).

27. Решения уравнения параболического типа с переменными и разрывными коэффициентами, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1977, С. 71 – 75 (совместно с Р.У. Аргынбаевой).

28. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах, Изв. вузов, Электромеханика, 1978, №1, С. 5 – 28 (совместно с С.Н. Хариным и др.).

29. Решение одного класса нелинейных краевых задач, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1979, №1, С. 23 – 29 (совместно с Я.А. Красновым, С.Н. Хариным).

30. Об одном интегральном уравнении типа Вольтерра II рода, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1980, №1, С. 42 – 48 (совместно с М.И. Рамазановым).

31. Об одном классе интегродифференциальных уравнений, Вестн. АН КазССР, 1982, №5, С. 38 – 48 (совместно с Г.И. Бижановой).

32. Построение решения одного сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра-Фредгольма, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1983, №3, С. 54 – 58 (совместно с М.О. Орынбасаровым).

33. Решение задачи теории теплопроводности с разрывным коэффициентом и вырождающимися подвижным границами, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1984, №3, С. 35 – 39 (совместно с У.К. Койлышовым).

34. Об одной линейно-неклассической задаче для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1986, №3, С. 18 – 22 (совместно с М.К. Абеновым).

35. Уравнение теплопроводности с разрывным коэффициентом в области, вырождающейся в начальный момент времени, Вестн. АН КазССР, 1986, №9, С. 39 – 45 (совместно с У.К. Койлышовым).

36. О задаче с косой производной для двумерного уравнения теплопроводности в полуполосе, Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1987, №5, С. 17 – 22 (совместно с М.К. Абеновым).

37. Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений, (Часть 1), Изв. АН КазССР, Сер. физ.-мат., 1991, №5, С. 31 – 34.

Г.И. Бижанова

Институт математики МОН РК,
г. Алматы.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 17 — 21*

АКАДЕМИК НАН РК
УМИРЗАК МАХМУТОВИЧ СУЛТАНГАЗИН

Умирзак Махмутович Султангазин родился 4 октября 1936 г. в п. Кара-Оба Урицкого района Кустанайской области. В 1953 г. после успешного окончания школы он поступает на физико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова и в 1958 г. завершает учебу по специальности "математика". С 1958 г. по 1964 г. У.М. Султангазин работал ассистентом, затем старшим преподавателем на кафедрах высшей алгебры, дифференциальных уравнений и вычислительной математики КазГУ. А в 1964-1965 гг. был направлен стажером-исследователем в Вычислительный центр СО АН СССР в г. Новосибирске.

На формирование научных интересов и жизненных позиций У.М. Султангазина оказали влияние известные ученые Г.И. Марчук, С.К. Годунов, М.М. Лаврентьев, Н.Н. Яненко, В.С. Владимиров и др. Под руководством академика Г.И. Марчука Умирзак Махмутович защитил в 1966 г. диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему "Метод расщепления для кинетического уравнения переноса" в Институте математики СО АН СССР по специальности 01.01.07 – вычислительная математика. В 1972 г. У. М. Султангазин защитил докторскую диссертацию на Ученом совете Института математики СО АН СССР на тему "Метод сферических гармоник для нестационарного кинетического уравнения переноса излучения" по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. С 1970 г. по 1978 г. У.М. Султангазин – доцент, профессор и заведующий кафедрой вычислительной математики Казахского государственного университета. Его научные результаты в математической теории переноса стали основой создания эффективных численных методов в кинетической теории переноса, дистанционном зондировании, расчете ядерных реакторов, задачах атмосферной оптики. Созданная им казахстанская научная школа по теории переноса (У.М. Султангазин и его ученики Н. Саханов, С.А. Атанбаев, А.Ш. Акишев, Г.К. Кайшибаева, А.С. Сакабеков, Г.М. Сыдыков, И.Ш. Иркегулов, Т.З. Мулдашев, С. Мика, К. Бобоев и др.) продолжила исследования по теории переноса излучения и дискретным моделям уравнения Больцмана.

В 1975 г. У.М. Султангазин избран член-корреспондентом АН КазССР. С 1978 г. по 1989 г. У.М. Султангазин возглавляет Институт математики и механики АН КазССР. За время руководства институтом им проведена большая работа по совершенствованию научно-организационной деятельности и мобилизации коллектива на решение актуальных задач фундаментального и прикладного направлений по математике и механике В 1983 г. У.М. Султангазин избран действительными членом АН КазССР, с 1985 г. работал академиком-секретарем

Отделения физико-математических наук, далее избран вице-президентом АН КазССР. С 1988 г. по 1994 г. У.М. Султангазин – президент Академии наук Республики Казахстан. Он – организатор и руководитель межинститутского междисциплинарного семинара по Экологическим Проблемам РК. Определены были главные направления совместных исследований с участием многих НИИ и отделений АН Республики, поставлены конкретные задачи математического моделирования экологических систем, проблемы ядерной безопасности, создание космического мониторинга окружающей среды для решения этих глобальных экологических проблем.

У. М. Султангазин избирался депутатом Верховного Совета Казахской ССР (1986-1990 гг.) и народным депутатом Верховного Совета СССР (1989-1991 гг.). Являясь депутатом Верховного Совета Республики, он активно участвовал в работе Комиссии по науке и технике, Комиссии Совета Министров Казахской ССР по научно-техническому прогрессу. Неоднократно выступал на сессиях Верховного Совета Казахской ССР и Совета народных депутатов СССР по вопросам бюджета, о развитии науки и др. Выезжал в США в составе делегации Комитета защиты мира СССР в Китай – в составе делегации Академии наук СССР, в Индию – в составе делегации СССР.

Его научная деятельность получила признание не только в Казахстане, но и за рубежом. Академик У.М. Султангазин приглашался для чтения лекций в ведущие научные зарубежные центры и университеты: Чехии (Карловский университет в Праге), Франции (Парижский Университет), Польши (Международная математическая школа им. Банаха), США (Стэнфордский и Мэрилендский Университеты), Японии (Киотский Университет), а таже в Швейцарию. С 1991 года до конца своей жизни У. М. Султангазин возглавлял Институт космических исследований. Он уделял большое внимание развитию основных научных направлений института, постановке и решению современных задач в области теоретических проблем дистанционного зондирования, космического мониторинга, космического материаловедения. Под его руководством созданы Вычислительный Центр, ставший основой интенсификации применения математических методов в различных отраслях народного хозяйства, Центр приема и обработки космической информации, Центр геоинформационных систем.

Одним из эффективных методов решения кинетического уравнения является метод сферических гармоник. Широкое применение этого метода к решению задач нейтронной физики и атмосферной оптики вызвало необходимость качественно исследовать свойства дифференциальных уравнений, возникающих в методе сферических гармоник, и сходимость их решения. Обоснование этого метода для полного кинетического уравнения дано в работах У.М. Султангазина. Он сформулировал граничное условие для системы уравнений метода сферических гармоник в произвольном приближении и показал что граничные условия являются диссипативными. На основе энергетических оценок доказал существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи для симметрических систем уравнений метода сферических гармоник, а так же сходимость этого метода. Оригинальным вкладом У.М. Султангазина в теорию переноса излучения является также применение и обоснование метода расщепления к системе уравнений метода сферических гармоник. Ряд исследований У.М. Султангазина посвящен дискретным моделям уравнения Больцмана. На дискретных моделях показана связь между кинетическими уравнениями Больцмана и уравнениями гидродинамики. Доказана теорема о существовании и единственности решения начальной задачи для дискретных уравнений Больцмана. Для простейших одномерных уравнений Бродуэлла получена теорема о существовании глобального решения задачи Коши. Изучена структура ударного фронта на кинетической модели и соответствующей модели уравнения Навье-Стокса. Под руководством У.М. Султангазина выполнялись исследования по математическому моделированию явлений теплопроводности с неклассическими граничными условиями, содержащими производную по времени. С помощью таких краевых задач описываются процессы теплопереноса в полупроводниковых структурах интегральных схем при их изготовлении и эксплуатации, в металлах при индукционном нагреве и высокочастотной наплавке в элементах конструкций различных термопреобразователей. При участии У.М Султангазина создан программный комплекс "ТОПАЗ" – системная модель загрязнения г. Алматы, – в котором приводятся основные аспекты моделирования и анализа загрязнения атмосферы города. Кроме того, изучаются различные экономические и экологические задачи прикладного характера (работа в комиссии по социально-экономическому и экологическому сотрудничеству Межгосударственного Совета по проблемам Аральского моря).

За цикл работ по теории переноса У.М. Султангазин удостоен Государственной Премии СССР за 1987 г., в 1989 г. – премии АН СССР и Чехословацкой АН, награжден Орденом Трудового Красного Знамени. За подготовку научной программы полета первого казахстанского космонавта Т.У. Аубакирова академик У.М. Султангазин награжден Орденом Ленина. Под его руководством сформирована и успешно реализована программа "ПОЛЕТ" с космонавтом Т. Мусабаевым.

У.М. Султангазин является ученым широкого профиля. Им опубликовано более 300 научных работ: 6 монографий, учебников, статей на казахском, русском и английском языках. Его монография "Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана" (Алма-Ата, 1985) переведена на английский язык. Большое внимание он уделял подготовке научных кадров по математике и технике. Под его научным руководством подготовлены 6 докторов и 25 кандидатов наук.

Список трудов У.М. Султангазина

1. Спектральная и пространственная атмосферная коррекция данных дистанционного зондирования со спутника "terra/modis" , Оптика атмосферы и океана, 2007, т.20, №3, С. 258 – 261 (совместно с А.Х. Ахмеджановым и др.).

2. Дистанционная диагностика состояния и функционирования зерновых агроценозов в северном Казахстане, Оптика атмосферы и океана, 2005, Т. 618, №12, С. 1088 – 1103 (совместно с А.Г. Тереховым и Н.Р. Муратовой).

3. К вопросу о влиянии запусков космических объектов с космодрома Байконур на состояние растительности сопредельных территорий по данным noaa/avhrr, Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2005, Т. 2, №2, С. 294 – 296 (совместно с Н.Р. Муратовой и А.Г. Тереховым).

4. Диагностика топографии северо-восточного побережья каспийского моря в зоне сгонно-нагонных явлений на базе данных terra/modis, Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2005, Т. 2, №2, С. 297 – 301 (совместно с Н.Р. Муратовой, А.Г. Тереховым и Н.Ю. Цычуевой).

5. Контроль севооборота пахотных земель северного Казахстана по данным terra/modis, Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2005, Т. 2, №2, С. 302 – 307 (совместно с Н.Р. Муратовой и А.Г. Тереховым).

6. Опыт функционирования и перспективы развития системы космического мониторинга чрезвычайных ситуаций в Казахстане, Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2004, Т. 1, №2, С. 90 – 97 (совместно Л.Ф. Спиваком и др.).

7. Оценка санитарного состояния сельскохозяйственных угодий с помощью данных дистанционного зондирования, Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2004, Т. 1, №2, С. 286 – 290 (совместно с Н.Р. Муратовой, Р. Дорайсвами и А.Г. Тереховым).

8. Использование космического мониторинга в планировании и прогнозировании параметров зернового производства, Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2004, Т. 1, №2, С. 291 – 297 (совместно с Н.Р. Муратовой и А.Г. Тереховым).

9. Spherical harmonics method in the problem of radiative transfer in the atmosphere-surface system, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 1999, T. 61, №3, P. 393 – 404 (with T.Z. Muldashev, A.I. Lyapustin).

10. Monitoring of temperature anomalies in the former Semipalatinsk nuclear test site, Comptes rendus de l'Academie des sciences. Serie IIb, mecanique, physique, astronomie, 1998, V. 326, №. 2, P. 135 – 140 (with E.A. Zakarin, L.F. Spivak, O.P. Arkhipkin, N.R. Muratova, A.G. Terehov).

11. Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники, Киев, Наукова Думка, 1992, 296 с (совместно Р.Ж. Ержановым, Ю.М. Матсевитым, В.П. Шерышевым).

12. Асимптотика решения краевой задачи для нестационарной системы уравнений метода сферических гармоник, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989, Т. 29, №2, С. 294 – 298 (совместно с Г.К. Кайшибаевой) (transl. Sultangazin U.M., G. K., Asymptotic behavior of the solution of a boundary value problem for a nonstationary system of equations of the method of spherical harmonics, U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., 1989, V. 29, №. 1, P. 204-207 (with G.K. Kaishibaeva)).

13. Polarization characteristics of light scattering for cloudless atmosphere, Izvestiya Akademii nauk SSSR. Fizika atmosfery i okeana, 1987, V. 23, №. 6, P. 629 – 634 (with G.P. Bazalitskaya, G.Sh. Livshits, T.Z. Muldashev).

14. Метод сферических гармоник для решения задачи переноса излучения в плоскопараллельной атмосфере, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, Т. 26, №6, С. 882 – 893 (совместно Т.З. Мулдашевым).

15. Discrete nonlinear models of the Boltzmann equation, Alma Ata, Nauka, 1985, 191 p.

16. К вопросу математической теории дискретных уравнений Больцмана, УМН, 1985, Т. 40, №4(244), С. 201 – 202.

17. Methods of spherical harmonics and discrete ordinates in problems of kinetic transport theory, Alma Ata, Nauka, 1979, 268 p.

18. A form of notation for equations of the method of spherical harmonics for a kinetic equation, Chisl. Metody Mekh. Sploshn. Sredy, 1978, V. 9, №. 5, P. 140 – 145 (with G.K. Kaishibaeva).

19. О построении разностной схемы для систем уравнений метода сферических гармоник, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, Т. 17, №6, С. 1474 – 1481 (совместно с Г.К. Кайшибаевой).

20. Convergence of the method of spherical harmonics for a multigroup kinetic equation, Chisl. Metody Meh. Sploshn. Sredy, 1975, V. 6, №. 4, P. 69 – 85 (with S Mika).

21. К вопросу о сходимости метода сферических гармоник для нестационарного уравнения переноса, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, Т. 14, №1, С. 166 – 178.

22. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана, УМН, 1971, Т. 26, №3(159), С. 3 – 51 (совместно с С.К. Годуновым).

23. О диссипативности граничных условий В. С. Владимирова для симметрической системы метода сферических гармоник, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, Т. 11, №3, С. 688 – 704 (совместно с С.К. Годуновым).

24. Solution of the transfer equation in the case of an anisotropic scattering by the splitting method, Sibirsk. Mat. Zh., 1967, V. 8, P. 156 – 173. (transl. Siberian Mathematical Journal, 1967, V. 8, №. 1, P. 117 – 130) (with S Mika).

25. К обоснованию метода расщепления для уравнений переноса излучения, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, Т. 5, №5, С. 852 – 863 (совместно с Г.И. Марчуком).

26. Solving the kinetic transfer equation by the separation method, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1965, V. 163, P. 857 – 860 (transl. Soviet Physics Dokl., 1965, V. 10, P. 721 – 724) (with G.I. Marchuk).

27. Convergence of a decoupling method for the radiation transfer equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1965, V. 161, P. 66 – 69 (transl. Soviet Physics Dokl., 1965, V. 10, P. 197 – 199) (with G.I.

Marchuk).

А.С. Сакабеков

Казахстанско-Британский Технический Университет,
г. Алматы.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 22 – 27*

УДК 532.5:519.8

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОРТОПОДОБНОЙ СИСТЕМЕ И НЕРАВЕНСТВЕ РАЗНЫХ МЕТРИК

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им.Е.А. Букетова
470074, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

В настоящей заметке доказаны оценка коэффициентов разложения по ортоподобной системе элементов пространства Лоренца и неравенство разных метрик для полиномов по счетной ортоподобной системе.

Напомним необходимые определения.

Пусть X – σ-конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой ν. Для всякой ν–измеримой функции f через f^* обозначим ее невозрастающую перестановку (см. [1], стр. 15–17). Через $L_{p,\theta}(X), 1 < p < +\infty, 1 \le \theta \le +\infty$, обозначим пространство Лоренца, состоящее из всех ν–измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_{p,\theta} = \left(\int\limits_0^{\nu(X)} (f^*(t))^\theta t^{\frac{\theta}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

В частности, $L_{p,p}(X) = L_p(X)$ – пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad 1 \le p < +\infty.$$

В дальнейшем $C(q, r, p)$ означает положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Т.П.Лукашенко [2,3] ввел определение системы разложения подобной ортогональной с неотрицательной мерой. Будем рассматривать счетную ортоподобную систему $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_2(X)$ ([3], стр. 58), $\hat{f}(n)$ – коэффициенты разложения по ортоподобной системе функции f, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Для тригонометрических полиномов

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ixk}$$

Keywords: *Similar to orthogonal systems, the space Lorentz, an inequality of different metric*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

известно следующее неравенство Джексона-Никольского (см.[4], стр. 133):

$$\|T_n\|_q \le 3n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n\|_p, \quad 1 \le p < q \le +\infty. \tag{1}$$

В настоящее время имеются многочисленные обобщения неравенства (1) (см. библиографию в [4-10]). В частности, неравенство (1) на пространства Лоренца распространено Н.В.Швелидзе [6], Л.А. Шерстневой [7]. Например, в [7] доказано неравенство

$$\|T_n\|_{p,\theta} \le C(p,q,\theta)\,(\ln(1+n))^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q}}\,\|T_n\|_{p,q}, \tag{2}$$

где $0 < \theta < q < +\infty$.

Это неравенство на многопараметрическое пространство Лоренца обобщено К.А. Бекмаганбетовым и Е.Д. Нурсултановым [9].

В этой статье докажем обобщение неравенства (2) для полиномов по счетной ортоподобной системе. Доказательство основано на следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть счетная ортоподобная система* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *при некотором* $r \in (2,+\infty]$ *удовлетворяет условию*

$$\|\varphi_n\|_r \le M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и существует число M_0 *такое, что* $0 < M_0 \le M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{2,q}(X,\nu), 2 < q \le \infty$, *имеет место неравенство*

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}|\hat f(k)|^2\Big]^{1/2} \le C(q,r,M_0)\cdot\Big(\ln(1+\sum_{j=1}^{n}M_j^2)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{2,q}$$

для $n \in N$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{2,q}(X)$. Эту функцию можно представить в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \le f^*(\tau), \\ 0, & \text{если } |f(x)| > f^*(\tau); \end{cases} \quad f_2(x) = f(x) - f_1(x), \quad 0 < \tau < \nu(X).$$

Тогда в силу неравенства Минковского имеем

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}|\hat f(k)|^2\Big]^{1/2} \le \Big[\sum_{k=1}^{n}|\hat f_1(k)|^2\Big]^{1/2} + \Big[\sum_{k=1}^{n}|\hat f_2(k)|^2\Big]^{1/2}. \tag{3}$$

Докажем, что каждая из функций f_1 и f_2 удовлетворяет неравенству

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}|\hat f_i(k)|^2\Big]^{1/2} \le C(q,r)\Big(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{2,q}. \tag{4}$$

В силу равенства Парсеваля для ортоподобной системы (см. [2]) и неравенства Гельдера с показателем $\frac{q}{2} > 1$ для функции f_1 имеем

$$\sum_{k=1}^{n}|\hat f_1(k)|^2 \le \|f_1\|_2^2 \le \int_{\tau}^{\nu(X)} f^{*^2}(t)dt \le \|f\|_{2,q}^2\Big[\ln\frac{\nu(X)}{\tau}\Big]^{1-\frac{2}{q}}. \tag{5}$$

Положим $\tau = \frac{\nu(X)}{\left(1+\sum_{j=1}^{n} M_j^2\right)^{\frac{r}{r-2}}}$. Тогда для функции f_1 из формулы (5) получим:

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_1(k)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{r}{r-2})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\Big(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{2,q}. \tag{6}$$

Для функции $f_2 \in L_{r'}(X)$ по определению коэффициента разложения и неравенству Гельдера $(2 < r < +\infty)$ имеем

$$|\hat{f}_2(k)| = \Big|\int_X f_2(x)\varphi_k(x)d\nu\Big| \leq \|f_2\|_{r'}\|\varphi_k\|_r \leq M_k\|f\|_{r'}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_2(k)|^2 \leq \|f_2\|_{r'}^2 \sum_{k=1}^{n} M_k^2. \tag{7}$$

Так как по условию $q \in (2, +\infty)$, то учитывая, что f^* не возрастает и $t^{\frac{q}{2}-1}$ не убывает, будем иметь

$$\|f\|_{2,q} \geq \Big[\int_{x/2}^{x} f^{*^q}(t)t^{\frac{q}{2}-1}dt\Big]^{1/q} \geq f^*(x)(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}}$$

для любого $x \in (0, \nu(X)]$. Поэтому из оценки (7) с учетом условия $r \in (2, +\infty]$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_2(k)|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Big[\int_0^{\tau} f^{*^{r'}}(t)dt\Big]^{2/r'} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} M_k^2\|f\|_{2,q}^2 \Big[\int_0^{\tau} (\frac{t}{2})^{-\frac{r'}{2}}dt\Big]^{\frac{2}{r'}} = 2(\frac{2}{2-r'})^{\frac{2}{r'}}\|f\|_{2,q}^2 \tau^{2(\frac{1}{r'}-\frac{1}{2})} \sum_{k=1}^{n} M_k^2.$$

Отсюда учитывая, что $\tau = \frac{\nu(X)}{\left(1+\sum_{j=1}^{n} M_j^2\right)^{\frac{r}{r-2}}}$, получим

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_2(k)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(\frac{2}{2-r'})^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{2,q}\Big(\frac{\nu(X)}{\Big(1+\sum\limits_{k=1}^{n} M_k^2\Big)^{\frac{r}{r-2}}}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}\Big[\sum_{k=1}^{n} M_k^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}(\frac{2}{2-r'})^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{2,q}\Big(\nu(X)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}. \tag{8}$$

Так как $\sum_{j=1}^{n} M_j^2 > M_1^2 > 0$, то по свойству логарифмической функции имеем:

$$1 = \log_{1+M_1^2}(1+M_1^2) < \log_{1+M_1^2}(1+\sum_{j=1}^{n} M_j^2) = \frac{\ln(1+\sum_{j=1}^{n} M_j^2)}{\ln(1+M_1^2)}.$$

Поэтому из неравенства (8) для функции f_2 получим

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_2(k)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(\frac{2}{2-r'})^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{2,q}\Big(\frac{\nu(X)}{\Big(1+\sum\limits_{k=1}^{n} M_k^2\Big)^{\frac{r}{r-2}}}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}\Big[\sum_{k=1}^{n} M_k^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}(\frac{2}{2-r'})^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{2,q}\Big(\nu(X)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \leq$$

$$\le \sqrt{2}(\frac{2}{2-r'})^{\frac{1}{r'}}\|f\|_{2,q}\Big(\nu(X)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}\Big(\frac{1}{\ln(1+M_1^2)}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\Big(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Тем самым с учетом (6) неравенство (4) доказано. Теперь из соотношений (3) и (4) следует, что

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}|\hat{f}(k)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le C(q,r,M_1)\|f\|_{2,q}\Big(\ln(1+\sum_{j=1}^{n}M_j^2)\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть счетная ортоподобная система* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условию теоремы 1.*

1) Если $1<p<2$, *то для любого полинома*

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$$

выполняется неравенство

$$\|f_n\|_{2,p}\le C(p)\|f_n\|_2\left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

2) Если $2<p<q<+\infty$, *то*

$$\|f_n\|_{2,p}\le C(p,q)\|f_n\|_{2,q}\left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

3) Если $1<p<2<q<+\infty$, *то*

$$\|f_n\|_{2,p}\le C(p,q)\|f_n\|_{2,q}\left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Для пространства Лоренца известно соотношение

$$\|f\|_{\theta,p}\asymp \sup_{\|g\|_{\theta',p'}}\left|\int_X f(x)\overline{g}(x)d\nu\right|, \tag{9}$$

где $1<p,\theta<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1$.

Применяя неравенство Гельдера и теорему 1, получим

$$\left|\int_X f_n(x)g(x)d\nu\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}c_k\hat{g}(k)\right|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\hat{g}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\|g\|_{2,p'}\left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\|g\|_{2,p'}\left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n}M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь пользуясь равенством Парсеваля и соотношением (9) при $\theta = 2$, отсюда получим

$$\|f_n\|_{2,p} \le C(p)\|f_n\|_2 \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Первый пункт теоремы доказан.

Докажем второй пункт. В пространстве Лоренца $L_{p,\theta}(X)$ справедливо неравенство (см. [11], стр. 491):

$$\|f_n\|_{2,p} \le \|f_n\|_{2,q}^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} \|f_n\|_{2,2}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} \tag{10}$$

при $2 < p < q < +\infty$.

Так как $2 < q < +\infty$ и $L_{2,2}(X) = L_2(X)$, то по теореме 1

$$\|f_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C(p)\|f_n\|_{2,q} \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Поэтому из неравенства (10) получим

$$\|f_n\|_{2,p} \le C(p,q)\|f_n\|_{2,q}^{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} \left\{\|f_n\|_{2,q} \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\right\}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} =$$

$$= C(p,q)\|f_n\|_{2,q} \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

для $2 < p < q < +\infty$. Этим второй пункт теоремы доказан.

Пусть $1 < p < 2 < q < +\infty$. Так как $1 < p < 2$, то в силу пункта 1) будем иметь

$$\|f_n\|_{2,p} \le C(p,q)\|f_n\|_2 \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} =$$

$$= C(p,q) \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

По условию теоремы $2 < q < +\infty$. Поэтому в силу теоремы 1 из (11) получим

$$\|f_n\|_{2,p} \le C(p,q) \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|f_n\|_{2,q} =$$

$$= C(p,q) \left(\ln(1+\sum_{k=1}^{n} M_k^2)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f_n\|_{2,q}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. *Теоремы 1, 2 анонсированы в [12]. Неравенство разных метрик в пространствах Лебега для полиномов по ортонормированной системе* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, при некотором* $r \in (2, +\infty]$ *удовлетворяющей условию*

$$\|\varphi_n\|_r \le M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

доказано в [13].

Цитированная литература

[1]. Берг Й., Лефстрем Й. *Интерполяционные пространства*, М., "Мир", 1980.

[2]. Лукашенко Т. П. *Ортоподобные неотрицательные системы разложения,* Вестник МГУ, серия математика, механика. 1997, №5, С. 27 – 31.

[3]. Лукашенко Т. П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным,* Математический сборник, 1997, Т. 188, №12, С. 57 – 72.

[4]. Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения,* М., "Наука", 1977.

[5]. Аманов Т. И. *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Алма-Ата, "Наука", 1976.

[6]. Швелидзе Н. В. *О теоремах вложения в некоторых функциональных пространствах,* Сообщения Академии Наук Грузинской ССР, 1976, Т. 83, С. 289 – 292.

[7]. Шерстнева Л. А. *Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца,* Вестник МГУ, серия математика, механика, 1984, №4, С. 75 – 79.

[8]. Тазабеков С., Смаилов Е. С. *О некоторых достаточных условиях вложения в пространства Лоренца,* Известия Академии Наук Казахской ССР, серия физико – математическая. 1989, №5, С. 50 – 54.

[9]. Бекмаганбетов К. А., Нурсултанов Е. Д. *Метод многопараметрической интерполяции и теоремы вложения пространств Бесова* $B_{\vec{p}}^{\vec{\alpha}}$, Analysis mathematica, 1998, V. 24, P. 241-263.

[10]. Нурсултанов Е. Д. *Неравенства разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функций из пространства Лоренца*, Труды математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2006, Т. 255, С. 1 – 18.

[11]. Sharpley R. *Spaces* $\Lambda_\alpha(X)$ *and interpolation*, Journal of Functional analysis, 1972, V. 11, P. 479 – 513

[12]. Акишев Г. *О коэффициентах разложения по счетно–ортоподобной системе и неравенство разных метрик,* "Современные проблемы теории функций и их приложения". Материалы 15 – Саратовской зимней школы, Саратов, 2010, С. 5 – 6.

[13]. Мустахаева В. М., Акишев Г. *Неравенство разных метрик для полиномов по ортонормированным системам,* Материалы 2–й Республиканской научно–практической конференции "Молодежь и наука в современном мире", Талдыкорган, 2010, С. 95 – 97.

Статья поступила в редакцию 02.09.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 28 — 36*

УДК 517.956

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Актюбинский Государственый Университет им. К. Жубанова
030000, Актюбинск, ул. Братьев Жубановых, 263

В работе показано, что в цилиндрической области спектральная смешанная задача для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений имеет бесчисленное множество собственных функций.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена [1]. Насколько нам известно их многомерные аналоги исследованы мало [2].

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m,\ t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β – части поверхности Γ, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$. Пусть далее S – общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющее множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим смешанно гиперболо-параболические уравнения

$$\gamma u = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u,\ t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где γ– действительное число, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В качестве многомерной спектральной смешанной задачи рассмотрим следующую

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap$ $\cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Keywords: *Functions, mixed problem, multidimensional equations*
2010 Mathematics Subject Classification: 35E99

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$– система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l = 0, 1, ...,$ – пространства Соболева.

Имеет место [3]

Лемма. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\bar{e}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i\left(r,\theta,t\right)\rho\left(\theta\right)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b\left(r,\theta,t\right)\rho$, $c\left(r,\theta,t\right)\rho$, $d_i\left(r,\theta,t\right)\rho$, $d_i \frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, где H – единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha)$, $d_i(x,t)$, $e(x,t) \in W_2^l(\Omega_\beta) \subset C(\overline{\Omega}_\beta)$, $l \geq m+1$, $i = 1, ..., m$.

Тогда справедлива

Теорема. *Задача 1 для каждого γ имеет бесчисленное множество собственных функций.*

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид:

$$L_1 u = u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = \gamma u, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\right), \; g_1 = 1, \; g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2, \; j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-$ $-2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_α будем искать в виде:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставив (5) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [4-6]

$$\begin{gathered}
\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 - \\
-\gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\
\left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k - \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k\right\} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1, \tag{7}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$
$$= \gamma\rho_1^k\bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), \quad n=1, \quad k=\overline{1,k_1}, \tag{8}$$

$$\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k =$$
$$= \gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k - \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\,\bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \right. \tag{9}$$
$$\left. + \sum_{i=1}^m(\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=2,3,\ldots .$$

Суммируя уравнение (8) от 1 до k_1, затем уравнение (9) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (7), приходим к уравнению (6).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...,$ – решение системы (7)–(9), то оно является решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде:

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k - \gamma\bar{u}_n^k = \overline{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

где $\overline{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), из краевого условия (2) в силу (5) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(1,t)=0,\ \bar{u}_n^k(r,\alpha)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots . \tag{11}$$

В (10), (11) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$, получим

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}u_n^k - \gamma u_n^k = f_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=0, u_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\ f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_{nn}^k(r,t).$$

Решение задачи (12), (13) ищем в виде:

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_S(r)T_S(t), \tag{14}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{S=1}^{\infty} a_s(t)R_S(t). \tag{15}$$

Подставляя (14) в (12), (13), с учетом (15) получим

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0, \ 0 < r < 1, \tag{16}$$

$$R_s(1) = 0, \ |R_s(0)| < \infty, \tag{17}$$

$$T_{stt} + \mu T_s = -a_s(t), \ t > 0, \tag{18}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{19}$$

Ограниченное решение задачи (16), (17) имеет вид [7]:

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_s r), \tag{20}$$

где $\nu = n + \frac{m-2}{2}$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода, μ_s – ее нули, $\mu = \gamma + \mu_s^2$.

Общее решение уравнения (18) представимо в виде [7]:

$$T_S(t) = \begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|} + c_{2s} \operatorname{sh} t\sqrt{|\mu|} + \dfrac{\operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_s(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ - \dfrac{\operatorname{sh} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_s(\xi) \operatorname{ch} \sqrt{|\mu|}\xi d\xi, \ \mu < 0, \\ c_{1s} + c_{2s} t + \int\limits_0^t \xi a_s(\xi) d\xi - t \int\limits_0^t a_s(\xi) d\xi, \ \mu = 0, \\ c_{1s} \cos t\sqrt{|\mu|} + c_{2s} \sin t\sqrt{|\mu|} + \dfrac{\cos t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_s(\xi) \sin \xi\sqrt{|\mu|} d\xi - \\ - \dfrac{\sin t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_s(\xi) \cos \xi\sqrt{|\mu|} d\xi, \ \mu > 0, \end{cases}$$

c_{1s}, c_{2s} – произвольные независимые постоянные, удовлетворив которые условию (19), получим

$$T_S(t) = \begin{cases} c_{2s}(\operatorname{sh} t\sqrt{|\mu|} - th\alpha\sqrt{|\mu|} \operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|}) + \dfrac{\operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} (\int\limits_0^t a_s(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ - \int\limits_0^\alpha a_s(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{|\mu|}\xi d\xi) + \dfrac{\operatorname{tg} \alpha\sqrt{|\mu|} \operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^\alpha a_s(\xi) \operatorname{ch} \sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ - \dfrac{\operatorname{sh} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_s(\xi) \operatorname{ch} \sqrt{|\mu|}\xi d\xi, \ \mu < 0, \\ c_{2s}(t - \alpha) - \int\limits_0^\alpha \xi a_s(\xi) d\xi + \alpha \int\limits_0^\alpha a_s(\xi) d\xi + \int\limits_0^t \xi a_s(\xi) d\xi - t \int\limits_0^t a_s(\xi) d\xi, \ \mu = 0, \\ c_{2s}(\sin t\sqrt{|\mu|} - \operatorname{tg} \alpha\sqrt{\mu} \cos t\sqrt{\mu}) + \dfrac{\cos t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} (\int\limits_0^t a_s(\xi) \sin \sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ - \int\limits_0^\alpha a_s(\xi) \sin \sqrt{|\mu|}\xi d\xi) + \dfrac{\operatorname{tg} \alpha\sqrt{|\mu|} \operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^\alpha a_s(\xi) \cos \xi\sqrt{|\mu|} d\xi - \\ - \dfrac{\sin t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_s(\xi) \cos \xi\sqrt{|\mu|} d\xi, \ \mu > 0. \end{cases} \tag{21}$$

Подставляя (20) в (15), получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s(t) J_\nu(\mu_s r), \ 0 < r < 1. \tag{22}$$

Ряды (22) – разложение в ряд Фурье-Бесселя ([8]), если

$$a_s(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_s \xi) d\xi, \tag{23}$$

$\mu_s, s = 1, 2, ...,$ – положительные нули функций Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (20), (21) получим решение задачи (12), (13) в виде:

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_s(t) J_\nu(\mu_s r), \tag{24}$$

где $a_s(t)$ определяется из (23).

Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) ($n = 0$), а затем (8), (11)($n = 1$) и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t),\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \ldots$.

Итак, в области Ω_α показано, что

$$\int\limits_H \rho(\theta)(L_1 u - \gamma u) dH = 0. \tag{25}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$,$\rho(\theta) \in \in C^\infty(H)$ – плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1,\ V_1-$ плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ – плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ ([9]).

Отсюда и из (25) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} f(r,\theta,t)(L_1 - \gamma) u d\Omega_\alpha = 0$$

и

$$L_1 u = \gamma u,\ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\alpha.$$

Далее из (5), (24) при $t \longrightarrow +0$ будет иметь

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{26}$$

$$\tau_n^k(r) = \sum_{s=0}^{\infty} \sqrt{r} T_s(0) J_\nu(\mu_s r).$$

Таким образом, мы пришли в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$L_2 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t) u = \gamma u, \tag{27}$$

с условиями

$$u\big|_s = \tau(r,\theta),\ u\big|_{\Gamma_\beta} = 0. \tag{28}$$

Решение задачи (27), (28) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (27), будем иметь

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0t}^1+\left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{e}_0^1\bar{u}_0^1-\gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\}+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}d_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\right. \tag{29}$$

$$\left.+\left[\widetilde{e}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{d}_{in-1}^k-nd_n^k)\right]\bar{u}_n^k-\gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\}=0.$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0t}^1+\frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=\gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1, \tag{30}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{1t}^k+\frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k=$$

$$=\gamma\rho_1^k\bar{u}_1^k-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}d_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{e}_0^1\bar{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_1}, \tag{31}$$

$$\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k=\gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k-$$

$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}d_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+[\widetilde{e}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{d}_{in-2}^k-(n-1)d_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \tag{32}$$

$$k=\overline{1,k_n},\ n=2,3,\ldots.$$

Суммируя уравнение (31) от 1 до k_1, затем уравнение (32) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (30), приходим к уравнению (29).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots.-$ решение системы (30)–(32), то оно является решением уравнения (29).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (30)–(32) можно представить в виде:

$$\bar{u}_{nrr}^k-\bar{u}_{nt}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k-\gamma\bar{u}_n^k=\bar{g}_n^k(r,t), \tag{33}$$

где $\overline{g}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{g}_0^1(r,t)\equiv 0$.

В (33) произведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\bar{u}_n^k(r,t)$, получим

$$Lu_n^k\equiv u_{nrr}^k-u_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u_n^k-\gamma u_n^k=g_n^k(r,t), \tag{34}$$

при этом краевое условие (28) с учетом (26) запишется в виде:

$$u_n^k(r,0)=\tau_n^k(r),\quad u_n^k(1,t)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{35}$$

$$g_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{g}_n^k(r,t).$$

Решение задачи (34), (35) ищем в виде:

$$u_n^k(r,t)=u_{1n}^k(r,t)+u_{2n}^k(r,t), \tag{36}$$

где $u_{1n}^k(r,t)$ – решение задачи
$$Lu_{1n}^k = g_n^k(r,t), \tag{37}$$
$$u_{1n}^k(r,0) = 0,\ u_{1n}^k(1,t) = 0,\ 0 < r < 1,\ t < 0, \tag{38}$$
а $u_{2n}^k(r,t)$ – решение задачи
$$Lu_{2n}^k = 0, \tag{39}$$
$$u_{2n}^k(r,0) = \tau_n^k(r),\ u_{2n}^k(1,t) = 0,\ 0 < r < 1,\ t < 0. \tag{40}$$

Решение вышеуказанных задач ищем в виде:
$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)V_s(t), \tag{14$'$}$$
при этом пусть
$$g_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s(t)R_s(r),\ \tau_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s R_s(r). \tag{41}$$

Подставляя (14$'$) в (37), (38), с учетом (41) получим задачу (16),(17) и задачу
$$V_{st} + \mu V_s = -d_s(t),\ V_s(0) = 0,$$
которые имеют соответственно решения (20) и
$$V_S(t) = -\int\limits_0^t d_s(\xi)\exp[-\mu(t-\xi)]d\xi. \tag{42}$$

Далее из (20), (26), (41) получим
$$r^{-\frac{1}{2}} g_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s(t)J_\nu(\mu_s r),\ 0 < r < 1, \tag{43}$$
$$e_s = T_s(0). \tag{44}$$

Ряд (43) – разложение в ряд Фурье -Бесселя, если
$$d_s(t) = \frac{1}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]}^2 \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} g_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_s\xi)d\xi, \tag{45}$$

$\mu_s,\ s = 1, 2, ...,$ – положительные нули, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (20), (42) получим решение задачи (37), (38) в виде:
$$u_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} \left\{ \int\limits_0^t d_s(\xi)\exp[-(\gamma+\mu_s^2)(t-\xi)]d\xi \right\} J_\nu(\mu_s r), \tag{46}$$
где $d_s(t)$ определяется из (45).

Далее, подставляя (14) в (39), (40), будем иметь
$$V_{st} + (\gamma + \mu_s^2)V_s = 0,\ t < 0,$$
решением которого является
$$V_s(t) = \exp(-(\gamma+\mu_s^2)t). \tag{47}$$

Из (20), (47) с учетом (44), получим

$$u_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_s(0)J_\nu(\mu_s r)\exp(-(\gamma+\mu_s^2)t). \tag{48}$$

Следовательно, сначала решив задачу (30), (35) ($n=0$), а затем (31), (35) ($n=1$) и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$ из (36), где $u_{1n}^k(r,t)$, $u_{2n}^k(r,t)$ определяются из (46), (48) $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,\ldots$.

Итак, в области Ω_β имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta)(L_2u-\gamma u)dH=0. \tag{49}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0- плотна в $L_2((0,1))$,$\rho(\theta)\in\in C^\infty(H)-$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1,\ V_1-$ плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1-$ плотна в $L_2(\Omega_\beta)$.

Отсюда и из (49), следует, что $\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)(L_2u-\gamma u)d\Omega_\beta=0$ и $L_2u=\gamma u,\ \forall(r,\theta,t)\in\in\Omega_\beta$.

Таким образом, решением задачи 1 в областях Ω_α и Ω_β являются функции

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty}n^{-\rho}r^{\frac{(2-m)}{2}}T_s(t)J_\nu(\mu_s r)Y_{n,m}^k(\theta),\ t>0,$$

$$\begin{gathered}u(r,\theta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty}n^{-\rho}r^{\frac{(2-m)}{2}}\{T_s(0)\exp(-(\gamma+\mu_s^2)t)-\\ -\int\limits_0^t d_s(\xi)\exp[-(\gamma+\mu_s^2)(t-\xi)]d\xi\}J_\nu(\mu_s r)Y_{n,m}^k(\theta),\ t<0,\end{gathered} \tag{50}$$

где $T_s(t)$ определяются из (21).

Учитывая формулу ([8]) $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, а также оценки [8, 3]

$$|J_\nu(z)|=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu,$$

$$|k_n|\le c_1n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le c_2n^{\frac{m}{2}-1+q},\ c_1,\ c_2=const,\ j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\ldots,$$

$\Gamma(z)-$ гамма-функция, нетрудно показать, что если $p>\frac{3m}{2}$, то задача 1 для каждого γ имеет бесчисленное множество собственных функций вида (50) и принадлежит искомому классу $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$.

Теорема доказана.

Цитированная литература

[1]. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*, М., "Наука", 2006.

[2]. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, Новосибирск, НГУ, 1983.

[3]. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, М., "Физматгиз", 1962.

[4]. Алдашев С. А. *О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения, 1998, Т. 34, № 1, С. 64 – 68.

[5]. Алдашев С. А. *Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений*, Алматы, "Гылым", 1994.

[6]. Алдашев С. А. *Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения*, Орал, ЗКАТУ, 2007.

[7]. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М., "Наука", 1965.

[8]. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*, Т. 2, М., "Наука", 1974.

[9]. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., "Наука", 1976.

Статья поступила в редакцию 10.01.2011г.

УДК 517.925.5:519.216

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ДИФФУЗИЕЙ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ

Г. Т. Ибраева, М. И. Тлеубергенов

Военный институт СВО им. Т. Бегельдинова
463000, Актобе, пр. А. Молдагуловой, 16
Институт Математики МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: marat207@math.kz

Методом разделения получены достаточные условия разрешимости основной по классификации А.С. Галиуллина обратной задачи в классе стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса винеровских процессов и вырождающейся относительно части переменных диффузией.

Введение

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1-7 и др.] для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2-7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ – метод квазиобращения предложен в работе [7], позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости. Но наряду с указанным методом там же предлагаются метод разделения и метод проектирования дающие, вообще говоря, лишь достаточные условия разрешимости обратных задач, но полезные для конкретных прикладных обратных задач.

В работах [8-10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены: 1) **основная обратная задача динамики** – построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) **задача восстановления уравнений**

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equation, integral manyfold*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

движения – построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию; и 3) **задача замыкания уравнений движения** – построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

1. Постановка задачи. Общая задача построения стохастических уравнений

Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(y,z,t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \lambda = \lambda(y,z,t) \in C^{121}_{yzt}. \tag{1}$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y,z,t) \\ \dot{z} = f_2(y,z,t) + \sigma(y,z,t)\dot{\xi} \end{cases} \tag{2}$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (2). Здесь $y \in R^l$, $z \in R^p$, $l + p = n$; $\xi \in R^k$, $\sigma(x,\dot{x},t)$ – матрица размерности $(p \times k)$, $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ – система независимых винеровских процессов.

Будем говорить, что некоторая функция $g(y,z,t)$ из класса K, $g \in K$, если g непрерывна по t и липшицевы по y и z в области

$$U_H(\Lambda) = \{x = (y,z) : \rho(x, \Lambda(t)) < H, \quad H > 0\}. \tag{3}$$

Предполагается, что вектор-функции f_1, f_2 и $(p \times k)$-матрица σ из класса K, что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $\big(y(t)^T, z(t)^T\big)^T$ уравнения (2) с начальным условием $\big(y(t_0)^T, z(t_0)^T\big)^T = (y_0^T, z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [11].

Поставленная задача:
1) в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2-7];
2) обобщает рассмотренную в [8] задачу построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{2'}$$

по заданному множеству

$$\Lambda(t) : \qquad \lambda(x,\dot{x},t) = 0, \text{ где } \lambda \in R^m, \ \lambda = \lambda(x,\dot{x},t) \in C^{121}_{x\dot{x}t} \tag{1'}$$

так, чтобы множество $(1')$ было интегральным многообразием уравнения $(2')$;
3) иным методом, а именно, методом квазиобращения решена в [12].

В данной работе основная обратная задача при наличии случайных возмущений – задача построения стохастического дифференциального уравнения первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения решается методом разделения. В терминах коэффициентов получены достаточные условия существования заданного интегрального многообразия у построенного множества уравнений.

Для решения поставленной задачи построения системы уравнения (2) по заданному интегральному многообразию (1) по правилу Ито дифференцирования сложной функции [11, с.201] $\lambda = \lambda(y,z,t)$ в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z} f_2 + S + \frac{\partial\lambda}{\partial \dot{z}}\sigma\dot{\xi}, \tag{4}$$

где $S = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial z} : \sigma\sigma^T$, а под $\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial z} : D$, следуя [11], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y,z,t)$ вектора $\lambda(y,z,t)$ по компонентам z на матрицу D

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial z} : D = \begin{bmatrix} tr(\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial z\partial z}D) \\ \vdots \\ tr(\frac{\partial^2\lambda_m}{\partial z\partial z}D) \end{bmatrix}$$

и вводятся произвольные типа Н.П.Еругина [1] m- мерная вектор-функция и $(m\times k)$- матрица B, обладающие свойством $A(0,y,z,t)\equiv 0$, $B(0,y,z,t)\equiv 0$:

$$\dot{\lambda} = A(\lambda,y,z,t) + B(\lambda,y,z,t)\dot{\xi}. \tag{5}$$

Сравнивая уравнения (4) и (5), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}f_2 + S = A, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma = B. \end{cases} \tag{6}$$

Следуя методу разделения [7, с.21], предварительно матрицы $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$, σ и вектор-функцию f_2 представим в виде:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = (G_1, G_2), \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} f_2' \\ f_2'' \end{pmatrix},$$

где G_1 есть матрица размерности $(m\times m)$, G_2 – $(m\times(p-m))$-матрица, σ' – $(m\times k)$-матрица, σ'' – $((p-m)\times k)$-матрица, f_2' – m-вектор, f_2'' – $(p-m)$-вектор.

Тогда систему (6) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} G_1f_2' + G_2f_2'' = A - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + S\right), \\ G_1\sigma' + G_2\sigma'' = B. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что $det\ G_1 \neq 0$, тогда решение данной системы (7) можно представить в виде:

$$f_2' = G_1^{-1}\left(A - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + S\right) - G_2f_2''\right), \tag{8}$$

$$\sigma' = G_1^{-1}(B - G_2\sigma''). \tag{9}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы множество (1) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений (2) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *квадратная подматрица G_1 матрицы $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$ была невырожденной $det\ G_1 \neq 0$;*

2) *при произвольно заданных $f_1, f_2'' \in K$ первые m координат f_2' вектора f_2 имели вид (8);*

3) *при произвольно заданных $\sigma'' \in K$ подматрица σ' матрицы σ имела вид (9).*

2. Линейный случай стохастической общей задачи

По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv G_1(t)y + G_2(t)z + l(t) = 0, \quad \lambda \in R^m, \quad y \in R^l, \quad z \in R^p, \tag{10}$$

требуется построить линейную по сносу стохастическую систему уравнений первого порядка с вырожденной по части переменных диффузией вида:

$$\begin{cases} \dot{y} = \Phi_1(t)y + \Psi_1(t)z + b_1(t) \\ \dot{z} = \Phi_2(t)y + \Psi_2(t)z + b_2(t) + T\dot{\xi} \end{cases}, \tag{11}$$

для которой множество (10) являлось бы интегральным многообразием, т.е. по заданным матрицам $G_1(t), G_2(t)$ и m-мерной функции $l(t)$ определить матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и вектор-функции $b_1(t)$ и $b_2(t)$, а также матрицу $T(t)$ так, чтобы для построенной системы уравнений (11) заданные свойства (10) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (4) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda} = \dot{G}_1(t)y + \dot{G}_2(t)z + \dot{l}(t) + G_1(t)\,[\,\Phi_1(t)y + \Psi_1(t)z + b_1(t)\,] \\ &+G_2(t)\,[\Phi_2(t)y + \Psi_2(t)z + b_2(t)] + G_2T\dot{\xi}, \end{aligned} \tag{12}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции $B_1(\lambda, y, z, t)$ со свойством $B_1(0, y, z, t) \equiv 0$ имеем

$$\dot{\lambda} = A_1\lambda + B_1\dot{\xi}. \tag{13}$$

Отсюда из соотношений (12) и (13) следуют равенства

$$\begin{cases} \dot{G}_1(t)y + \dot{G}_2(t)z + \dot{l}(t) + G_1(t)\Phi_1(t)y + G_1(t)\Psi_1(t)z + G_1(t)b_1(t)+ \\ +G_2(t)\Phi_2(t)y + G_2(t)\Psi_2(t)z + G_2(t)b_2(t) = A_1\,[G_1(t)y + G_2(t)z + l(t)], \\ G_2(t)T(t) = B_1, \end{cases}$$

которые преобразуются к виду

$$\begin{cases} G_2(t)\Phi_2(t) = A_1G_1(t) - \dot{G}_1(t) - G_1(t)\Phi_1(t), \\ G_2(t)\Psi_2(t) = A_1G_2(t) - \dot{G}_2(t) - G_1(t)\Psi_1(t), \\ G_2(t)b_2(t) = A_1l(t) - \dot{l}(t) - G_1(t)b_1(t), \\ G_2(t)T(t) = B_1. \end{cases} \tag{14}$$

Для применения метода разделения [3, с.21] предварительно введем обозначения $M_1 = A_1G_1(t) - \dot{G}_1(t) - G_1(t)\Phi_1(t)$, $M_2 = A_1G_2(t) - \dot{G}_2(t) - G_1(t)\Psi_1(t)$, $M_3 = A_1l(t) - \dot{l}(t) - G_1(t)b_1(t)$ и, далее, систему (14) представим в виде:

$$\begin{cases} G_2'\Psi_2' + G_2''\Psi_2'' = M_1, \\ G_2'\Psi_2' + G_2''\Psi_2'' = M_2, \\ G_2'b_2(t)' + G_2''b_3(t)'' = M_3, \\ G_2'T' + G_2''T'' = B_1, \end{cases} \tag{15}$$

где матрицы G_2, Φ_2, Ψ_2, T и вектор-функция $b_2(t)$ разбиты на соответствующие подматрицы:

$$G_2 = (G_2', G_2''), \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \Phi_2' \\ \Phi_2'' \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} \Psi_2' \\ \Psi_2'' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T' \\ T'' \end{pmatrix}, \quad b_2(t) = \begin{pmatrix} b_2'(t) \\ b_2''(t) \end{pmatrix},$$

где G_2' – матрица размерности $(m \times m)$, $G_2''-(m \times (p-m))$, $\Phi_2'-(m \times l)$, $\Phi_2''-((p-m) \times l)$; $\Psi_2'-(m \times p)$, $\Psi_2''-((p-m) \times p)$; $T'-(m \times r)$, $T''-((r-m) \times r)$; $b_2'(t)-$ m – вектор-функция, $b_2''(t)-$ $(p-m)$ – вектор-функция.

Предположим, что $det\ G_2' \neq 0$, тогда из (15) следуют соотношения

$$\begin{cases} \Phi_2' = (G_2')^{-1}(M_1 - G_2''\Phi_2''(t)), \\ \Psi_2' = (G_2')^{-1}(M_2 - G_2''\Psi_2''), \\ b_2'(t) = (G_2')^{-1}(M_3 - G_2''b''(t)), \\ T' = (G_2')^{-1}(B_1 - G_2''T''). \end{cases} \tag{16}$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Для того чтобы линейное множество (10) было интегральным многообразием системы линейных по сносу дифференциальных уравнений (11) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) квадратная подматрица G_2' прямоугольной матрицы G_2 обладала свойством $detG_2' \neq 0$;

2) при произвольно заданных непрерывных матрицах Φ_1, Φ_2'', Ψ_1, Ψ_2'' T'' матрицы Φ_2', Ψ_2', T' и первые m координат b_2' непрерывной вектор-функции b_2 имели вид (16).

Цитированная литература

[1]. Еругин Н. П.*Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую*, ПММ, 1952, Т. 10, вып. 16, С. 659 – 670.

[2]. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д. *Построение систем программного движения*, М., 1971, С. 352.

[3]. Галиуллин А. С. *Построение поля сил по заданному семейству траекторий*, Дифференциальные уравнения, 1981, Т. XYII, № 8, С. 1487 – 1489.

[4]. Галиуллин А. С. *Построение уравнений движения*, Дифференциальные уравнения, 1982, Т. XYIII, № 5, С. 744 – 748.

[5]. Галиуллин А. С. *Методы решения обратных задач динамики*, М., 1986.

[6]. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. *Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения*, Вестник РУДН. Сер. прикл. математика и информатика, 1994, № 1, С. 5 – 21.

[7]. Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. *Уравнения программных движений*, М., 1986.

[8]. Тлеубергенов М. И. *Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений*, Известия МН-АН РК. Серия физ.-мат. Алматы, 1998, №3, С. 55 – 61.

[9]. Тлеубергенов М. И. *Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем*, Дифференциальные уравнения. М., 2001, Т. 37, № 5, С.714 – 716.

[10]. Тлеубергенов М. И. *Об обратной стохастической задаче замыкания*, Доклады МОН–АН РК. Алматы, 1999, №1, С. 53 – 60.

[11]. Пугачев В. С., Синицын И. Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, М., 1990.

[12]. Тлеубергенов М. И. Ибраева Г. Т. *Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией*, Математический журнал, 2004, Т. 4, № 4, С. 86 – 92.

Статья поступила в редакцию 05.10.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 42 – 49*

УДК 517.925

СОПРЯЖЕННОСТЬ И ОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. Е. Кудабаева, Р. Ойнаров

Евразийский национальный университет им Л.Н.Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: rakhimova.salta@mail.ru, o_ryskul@mail.ru

С помощью вариационного метода получены критерии сопряженности и осцилляторности полулинейного дифференциального уравнения $(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0$ на $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 < p < \infty$, где $\rho > 0$ и v - непрерывные функции на I.

1. Введение

Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. На интервале I рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, \tag{1}$$

ρ и v - непрерывные функции на I и $\rho(t) > 0, t \in I$.

Функцию $y : I \to R$ назовем решением уравнения (1), если она вместе с $\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t)$ локально абсолютно непрерывна на I и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду (п.в.) на I.

Точку $t_0 \in I$ назовем нулем решения $y(t)$, если $y(t_0) = 0$.

Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным при $t = b$ $(t = a)$, если оно имеет бесконечное число нулей, сходящихся к b (a).

Уравнение (1) называется осцилляторным при $t = b$ $(t = a)$, если все его нетривиальные решения осцилляторны при $t = b$ $(t = a)$.

Точки t_1, $t_2 \in I$ называются сопряженными точками по отношению к уравнению (1), если они являются нулями некоторого нетривиального решения $y(t)$ уравнения (1).

Пусть $I_0 \subseteq I$ замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал.

Следуя определениям из [1] уравнение (1) назовем сопряженным на I_0, если существует нетривиальное его решение, имеющее по крайне мере два нуля на I_0, в противном случае уравнение (1) называется безсопряженным на I_0.

Качественные свойства уравнения (1), особенно вопросы осцилляторности, достаточно хорошо изучены в случае знакопостоянной функции v; полученные результаты подытожены в книге [1].

Keywords: *Half-linear differential equation,conjugate points, oscillation criteria,variational method*
2010 Mathematics Subject Classification: 39A10

Однако мало исследованы вопросы сопряженности и осцилляторности уравнения (1), когда функция v может быть знакопеременной.

В данной работе на основе вариационного принципа [1,2,3] исследования осцилляционных свойств уравнения (1) даются новые критерии сопряженности и осцилляторности уравнения (1), причем на знак функции v не ставим ограничения.

Отметим, что при $p = 2$ уравнение (1) приводится к линейному уравнению Штурма–Лиувилля

$$\big(\rho(t)y'(t)\big)' + v(t)y(t) = 0. \tag{2}$$

Хотя вопросам сопряженности и осцилляторности уравнения (2) посвящено большое число работ, ниже из основных результатов при $p = 2$ могут быть получены новые признаки сопряженности и осцилляторности для уравнения (2).

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $1 \le p < \infty$ и $\overset{\circ}{AC}_{p,\rho}(I)$ совокупность локально абсолютно непрерывных на I функций f с компактными носителями $supp f \subset I$, для которых $\int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt < \infty$.

Из определения сопряженности и осцилляторности уравнения (1) в силу теоремы Штурма [1] о чередовании нулей решений уравнения (1) легко вытекает

Теорема А. *Уравнение (1) осцилляторно при $t = b$ $(t = a)$ тогда и только тогда, когда для любого $T \in I$ уравнение (1) сопряжено на $[T, b)$ $((a, T])$.*

Из вариационного принципа [1] в качественной теории полулинейных дифференциальных уравнений следует

Лемма А. *Пусть $1 < p < \infty$ и $a \le \alpha < \beta \le b$. Уравнение (1) сопряжено на (α, β) тогда и только тогда, когда существует функция $f_0 \in \overset{\circ}{AC}_{p,\rho}(I)$ такая, что*

$$\int\limits_\alpha^\beta [\rho(t)|f_0'(t)|^p - v(t)|f_0(t)|^p]dt \le 0.$$

3. Основные результаты

Введем следующие обозначения. Для $a \le \alpha < \beta \le b$ и $c, d \in (\alpha, \beta)$ положим

$$\Phi^-(\alpha, c) = \inf_{\alpha<z<c}\left[\left(\int\limits_z^c \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} - \left(\int\limits_z^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_z^c v(t)\left(\int\limits_z^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt\right],$$

$$\Phi^+(d, \beta) = \inf_{d<z<\beta}\left[\left(\int\limits_d^z \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} - \left(\int\limits_d^z \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_d^z v(t)\left(\int\limits_t^z \rho^{1-p'}ds\right)^p dt\right],$$

$$\varphi^-(\alpha, c) = \inf_{\alpha<z<c}\left[\left(\int\limits_z^c \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} + \int\limits_z^c v_-(t)dt\right],$$

$$\varphi^+(d, \beta) = \inf_{d<z<\beta}\left[\left(\int\limits_d^z \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} + \int\limits_d^z v_+(t)dt\right],$$

где $v_{\pm}(t) = \max\{0,\ \pm v(t)\}$.

Теорема 1. *Пусть $a \le \alpha < \beta \le b$. Если существуют точки $c,\ d : \alpha < c < d < \beta$ такие, что*

$$\int\limits_c^d v(t)dt > \Phi^-(\alpha, c) + \Phi^+(d, \beta), \tag{3}$$

то уравнение (1) сопряжено на (α, β).

Следствие 1. *Пусть $a \le \alpha < \beta \le b$. Если существуют точки $c,\ d : \alpha < c < d < \beta$ такие, что*

$$\int\limits_c^d v(t)dt > \varphi^-(\alpha, c) + \varphi^+(d, \beta), \tag{4}$$

то уравнение (1) сопряжено на (α, β).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\alpha < c < d < \beta$ и выполнено (3). Тогда по определению инфимума существуют точки $z^- \in (\alpha, c)$ и $z^+ \in (d, \beta)$ такие, что имеет место неравенство

$$\int\limits_c^d v(t)dt \ge \left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} - \left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-p} \int\limits_{z^-}^c v(t)\left(\int\limits_{z^-}^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt +$$

$$\left(\int\limits_d^{z^+} \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} - \left(\int\limits_d^{z^+} \rho^{1-p'}ds\right)^{-p} \int\limits_d^{z^+} v(t)\left(\int\limits_t^{z^+} \rho^{1-p'}ds\right)^p dt$$

или

$$\left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-p} \int\limits_{z^-}^c v(t)\left(\int\limits_{z^-}^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt + \int\limits_c^d v(t)dt +$$

$$\left(\int\limits_d^{z^+} \rho^{1-p'}ds\right)^{-p} \int\limits_d^{z^+} v(t)\left(\int\limits_t^{z^+} \rho^{1-p'}ds\right)^p dt \ge \left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} + \left(\int\limits_d^{z^+} \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}. \tag{5}$$

Введем функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & a < t < z^-, \\ \left(\int\limits_{z^-}^c \rho^{1-p'}\,ds\right)^{-1} \int\limits_{z^-}^t \rho^{1-p'}\,ds, & z^- \le t \le c, \\ 1, & c < t < d, \\ \left(\int\limits_d^{z^+} \rho^{1-p'}\,ds\right)^{-1} \int\limits_t^{z^+} \rho^{1-p'}\,ds, & d \le t \le z^+, \\ 0, & z^+ < t < \beta. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_0 \in \overset{\circ}{AC}_{p,\rho}(\alpha, \beta)$. Вычислим интегралы $\int\limits_\alpha^\beta \rho(t)|f_0'(t)|^p dt$ и $\int\limits_\alpha^\beta v(t)|f_0(t)|^p dt$:

$$\int\limits_\alpha^\beta \rho(t)|f_0'(t)|^p dt = \int\limits_{z^-}^c \rho(t)|f_0'(t)|^p dt + \int\limits_c^d \rho(t)|f_0'(t)|^p dt + \int\limits_d^{z^+} \rho(t)|f_0'(t)|^p dt =$$

$$\left(\int\limits_{z^-}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{z^-}^{c}\rho(t)\rho^{p(1-p')}(t)dt+\left(\int\limits_{d}^{z^+}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{d}^{z^+}\rho(t)\rho^{p(1-p')}(t)dt=$$

$$\left(\int\limits_{z^-}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}+\left(\int\limits_{d}^{z^+}\rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}v(t)|f_0(t)|^pdt=\int\limits_{z^-}^{c}v(t)|f_0(t)|^pdt+\int\limits_{c}^{d}v(t)|f_0(t)|^pdt+\int\limits_{d}^{z^+}v(t)|f_0(t)|^pdt=$$

$$\left(\int\limits_{z^-}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{z^-}^{c}v(t)\left(\int\limits_{z^-}^{t}\rho^{1-p'}ds\right)^{p}dt+\int\limits_{c}^{d}v(t)dt+$$

$$\left(\int\limits_{d}^{z^+}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{d}^{z^+}v(t)\left(\int\limits_{t}^{z^+}\rho^{1-p'}ds\right)^{p}dt. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) следует, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}v(t)|f_0(t)|^pdt\geq\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho(t)|f_0'(t)|^pdt,$$

то есть

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}[\rho(t)|f_0'(t)|^p-v(t)|f_0(t)|^p]dt\leq 0$$

для $f_0\in \overset{\circ}{AC}_{p,\rho}(\alpha,\beta)$. Поэтому по Лемме А уравнение (1) имеет сопряженные точки на (α,β). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Для любого $z\in(\alpha,c)$ имеем

$$\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}+\int\limits_{z}^{c}v_-(t)dt\geq$$

$$\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}+\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{z}^{c}v_-(t)\left(\int\limits_{z}^{t}\rho^{1-p'}ds\right)^{p}dt\geq$$

$$\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}-\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{z}^{c}v_+(t)\left(\int\limits_{z}^{t}\rho^{1-p'}ds\right)^{p}dt+$$

$$\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int\limits_{z}^{c}v_-(t)\left(\int\limits_{z}^{t}\rho^{1-p'}ds\right)^{p}dt=\left(\int\limits_{z}^{c}\rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}-$$

$$\left(\int_z^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int_z^c (v_+(t)-v_-(t))\left(\int_t^c \rho^{1-p'}ds\right)^p dt =$$

$$\left(\int_z^c \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} - \left(\int_z^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int_z^c v(t)\left(\int_t^c \rho^{1-p'}ds\right)^p dt.$$

Следовательно, $\varphi^-(\alpha,c)\geq\Phi^-(\alpha,c)$, аналогично, $\varphi^+(\alpha,c)\geq\Phi^+(\alpha,c)$. Поэтому из (4) следует (3), тогда по теореме 1 уравнение (1) сопряжено на (α,β). Следствие 1 доказано.

Теперь применяя теорему 1 устанавливаем следующие утверждения, устанавливающие осцилляторность уравнения (1) при $t=b$.

Теорема 2. *Пусть* $\int\limits_d^b \rho^{1-p'}(s)ds<\infty$, $d\in I$, *и существует*

$$\lim_{y\to b}\int_d^y v(t)\left(\int_t^y \rho^{1-p'}(s)ds\right)^p dt = \int_d^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}(s)ds\right)^p dt. \qquad (8)$$

Если для любого $c\in I$

$$\limsup_{d\to b}\left[\left(\int_d^b \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1}\int_c^d v(t)dt+\left(\int_d^b \rho^{1-p'}ds\right)^{-1}\int_d^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}ds\right)^p dt\right]>1, \qquad (9)$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t=b$.

Доказательство. Для $c\in I$ по определению $\limsup$ существует последовательность $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}\subset (c,b)$ сходящаяся к b такая, что при $k\geq k_0\geq 1$

$$\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1}\int_c^{d_k} v(t)dt+\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{-1}\int_{d_k}^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}ds\right)^p dt>1. \qquad (10)$$

Берем k_0 столь большим, чтобы для $\alpha\in(a,c)$ еще выполнялось неравенство

$$\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1}\int_c^{d_k} v(t)dt+\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{-1}\int_{d_k}^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}ds\right)^p dt>$$

$$1+\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1}\Phi^-(\alpha,c)$$

при $k\geq k_0$, так как $\lim\limits_{d\to b}\int\limits_d^b \rho^{1-p'}ds=0$.

Откуда

$$\int_c^{d_k} v(t)dt>\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p}-\left(\int_{d_k}^b \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int_{d_k}^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}ds\right)^p dt+\Phi^-(\alpha,c). \qquad (11)$$

В силу условия $\int\limits_{d_k}^{b} \rho^{1-p'}(s)ds < \infty$ и (8) имеем

$$\left(\int\limits_{d_k}^{b} \rho^{1-p'} ds\right)^{1-p} - \left(\int\limits_{d_k}^{b} \rho^{1-p'} ds\right)^{-p} \int\limits_{d_k}^{b} v(t) \left(\int\limits_{t}^{b} \rho^{1-p'} ds\right)^{p} dt \geq \Phi^{+}(d_k, b).$$

Поэтому из (11) следует $\int\limits_{c}^{d_k} v(t)dt > \Phi^{-}(\alpha, c) + \Phi^{+}(d_k, b)$, $k \geq k_0$.

В силу произвольности $c \in I$ и $\alpha \in (a, c)$ это означает, что уравнение (1) в силу теоремы 1 имеет сопряженные точки на (α, b) для любого $\alpha \in I$, следовательно, по теореме A уравнение осцилляторно при $t = b$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь случай

$$\int\limits_{d}^{b} \rho^{1-p'} ds = \infty, \ d \in I. \tag{12}$$

Положим

$$\lim_{d \to b} \int\limits_{c}^{d} v(t)dt = \int\limits_{c}^{b} v(t)dt, \ c \in I. \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (12), а также существуют и конечны пределы (8) и (13).*

Если

$$\lim_{\alpha \to b} \sup_{b > c > \alpha} \left[\left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{p-1} \int\limits_{c}^{b} v(t)dt + \left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{-1} \int\limits_{\alpha}^{c} v(t) \left(\int\limits_{\alpha}^{t} \rho^{1-p'} ds\right)^{p} dt \right] > 1, \tag{14}$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t = b$.

Доказательство. Из (14) на основании определения предела и супремума следует, что существует $\alpha_0 \in I$.

Для всех $\alpha > \alpha_0$ существует $c \in (\alpha, b)$ такое, что

$$\left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{p-1} \int\limits_{c}^{b} v(t)dt + \left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{-1} \int\limits_{\alpha}^{c} v(t) \left(\int\limits_{\alpha}^{t} \rho^{1-p'} ds\right)^{p} dt > 1.$$

Откуда

$$\int\limits_{c}^{b} v(t)dt > \left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{1-p} - \left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{-p} \int\limits_{\alpha}^{c} v(t) \left(\int\limits_{\alpha}^{t} \rho^{1-p'} ds\right)^{p} dt. \tag{15}$$

Из существования (13) и из (15) следует, что найдется $d \in (c, b)$ такое, что

$$\int\limits_{c}^{d} v(t)dt > \left(\int\limits_{\alpha}^{c} \rho^{1-p'} ds\right)^{1-p} -$$

$$\left(\int_\alpha^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int_\alpha^c v(t)\left(\int_\alpha^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt \geq \Phi^-(\alpha,c). \tag{16}$$

Из (12) с учетом конечности (8) имеем

$$\lim_{y\to b}\left[\left(\int_d^y \rho^{1-p'}ds\right)^{1-p} - \left(\int_d^y \rho^{1-p'}ds\right)^{-p}\int_d^y v(t)\left(\int_t^y \rho^{1-p'}ds\right)^p dt\right] = 0,$$

поэтому $\Phi^+(d,b) \leq 0$. Тогда из (16) следует, что для любой $\alpha \geq \alpha_0$ существует $\alpha < c < d < b$ и $\int_c^d v(t)dt > \Phi^-(\alpha,c) + \Phi^+(d,b)$. Это по теореме 1 означает, что уравнение (1) сопряжено на (α,b) для любого $\alpha \in (\alpha_0,b)$. Следовательно, по теореме A уравнение (1) осцилляторно при $t = b$. Теорема 3 доказана.

Аналогично имеем следующие две теоремы, устанавливающие осцилляторность уравнения (1) при $t = a$.

Теорема 4. *Пусть для $c \in I$ выполнено*

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)ds < \infty$$

и существует предел

$$\lim_{z\to a}\int_y^c v(t)\left(\int_y^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt = \int_a^c v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt < \infty.$$

Если для любого $d \in I$

$$\limsup_{c\to a}\left[\left(\int_a^c \rho^{1-p'}ds\right)\int_c^d v(t)dt + \left(\int_a^c \rho^{1-p'}ds\right)^{-1}\int_a^c v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}ds\right)^p dt\right] > 1,$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t = a$.

Теорема 5. *Пусть для $c \in I$ выполнено условие*

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)ds = \infty$$

и существует предел

$$\lim_{c\to a}\int_c^d v(t)dt = \int_a^d v(t)dt < \infty,\ d \in I.$$

Если

$$\lim_{\beta\to a}\sup_{a<d<\beta}\left[\left(\int_d^\beta \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1}\int_a^d v(t)dt + \left(\int_d^\beta \rho^{1-p'}ds\right)^{-1}\int_d^\beta v(t)\left(\int_t^\beta \rho^{1-p'}ds\right)^p dt\right] > 1,$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t = a$.

Замечание 1. *При условие $v(t) \geq 0$ для достаточно больших значениях t в монографии [1] доказаны две теоремы (Theorem 3.1.4 и Theorem 3.1.6), где соответственно в условиях*

$$\lim_{x\to\infty} \sup \left(\int_x^\infty \rho^{1-p'} ds \right)^{p-1} \int_c^x v(t) dt > 1, \tag{17}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sup \left(\int_x^\infty \rho^{1-p'} ds \right)^{-1} \int_x^\infty v(t) \left(\int_t^\infty \rho^{1-p'} ds \right)^p dt > 1 \tag{18}$$

доказана осцилляторность уравнения (1) при $t = b = \infty$.

Очевидно, каждое из условий (17) и (18) при $v(t) \geq 0$ для больших $t > 0$ влечет условие (9) при $b = \infty$, но обратное, вообще говоря, неверно.

Поэтому утверждение теоремы 2 сильнее, чем утверждения теорем 3.1.4 и 3.1.6 из [1].

Замечание 2. *В условиях теоремы 3 при $b = \infty$ в теоремах 3.1.2 и 3.1.7 из [1] соответственно показано, что если*

$$\lim_{x\to\infty} \sup \left(\int_c^x \rho^{1-p'} ds \right)^{p-1} \int_x^\infty v(t) dt > 1$$

и

$$\left(\int_c^x \rho^{1-p'} ds \right)^{-1} \int_c^x v(t) \left(\int_c^t \rho^{1-p'} ds \right)^p dt \geq 0 \tag{19}$$

для больших $x > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \sup \left(\int_c^x \rho^{1-p'} ds \right)^{-1} \int_c^x v(t) \left(\int_c^t \rho^{1-p'} ds \right)^p dt > 1$$

и

$$\left(\int_c^x \rho^{1-p'} ds \right)^{p-1} \int_x^\infty v(t) dt \geq 0 \tag{20}$$

для больших $x > 0$, то уравнение (1) осцилляторно.

Очевидно, что из каждого условия (19) и (20) вытекает условие (14) теоремы 3. Таким образом, утверждение теоремы 3 широко обобщает утверждения теорем 3.1.2 и 3.1.7 из [1].

Цитированная литература

[1]. Dosly O., Rehak P. *Half-linear differential equations*, North-Holland, Math.studies 202, 2005.

[2]. Oinarov R., Rakhimova S. Y. *Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equation*, Eurasian Math. J., 2010, V.1, №42, P. 99 – 110.

[3]. Oinarov R., Rakhimova S. Y. *Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Hungary, 2010, №49, P. 1 – 15.

Статья поступила в редакцию 15.07.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 50 — 57*

УДК 532.5:519.8

ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ В РАЗРАБОТКЕ НЕФТЯНОГО ОБЪЕКТА

М. Ж. Мукимбеков, К. Б. Шеркешбаева

КазНУ им. аль-Фараби
Атырауский институт нефти и газа
050012, Алматы, ул. Масанчи, 39/47
060002, Атырау, ул. Азаттык, 1, e-mail: bagit@mail.ru

В работе исследуется трехмерная задача неизотермической фильтрации в разработке нефтяного месторождения вторичным методом. Предлагается вычислительный алгоритм для решения данной задачи. Предлагается метод исследования изменения забойного давления и температуры.

В условиях быстрого развития нефтегазовой промышленности остро встает вопрос о качественном анализе эффективности разработки нефтяных объектов с применением современных методов математического моделирования пластовых процессов. Для увеличения нефтеотдачи применяют вторичные методы, которые позволяют улучшить физические, фильтрационно-емкостные характеристики нефтяного пласта [1-6]. К таким методам относятся тепловой метод воздействия, а именно нагнетание воды с регулируемой температурой.

В данной работе рассматривается трехмерная задача моделирования двухфазной неизотермической фильтрации в разработке месторождения нефти с учетом циклического заводнения. Подобные задачи возникают в процессе эксплуатации нефтяных залежей, когда обычное заводнение для них становится малоэффективным и приходится искать дополнительные способы по увеличению нефтеотдачи пласта. Моделируемое месторождение состоит из водной, нефтяной зоны и сети нагнетательных и добывающих скважин соответственно. При расчете технологических показателей данного технологического процесса в разработке нефтяных месторождений используется приближенная методика, основанная на решении нелинейной задачи трехмерной фильтрации в системе скважин. В работе предлагается вычислительная схема для определения полей давлений флюидов, температуры пласта и насыщенностей фаз.

Математическая модель теплового метода воздействия на нефтяной пласт с учетом произвольного расположения фонда нагнетательных и добывающих скважин, основанная на трехмерной неизотермической двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта с учетом капиллярных сил, имеет следующий вид:

$$m\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}+div(\rho\overline{W})=\sum_{i=1}^{N_1}Q_{B,hi}\delta(x-x_{hi},y-y_{hi},z-z_{hi})-\sum_{i=1}^{N_2}Q_{B,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i}),\quad (1)$$

Keywords: *Nonithotermal filtration*
2010 Mathematics Subject Classification: 74H10

$$m\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}+div(\rho\overline{W})=-\sum_{i=1}^{N_2}Q_{Hi}\delta(x-x_{\partial i},C-C_{\partial i},z-z_{\partial i}), \tag{2}$$

$$\overline{W}_B=-k\frac{f_B}{\mu_B}\nabla(p_B+\rho_B gz),\overline{W}_H=-k\frac{f_H}{\mu_H}\nabla(p_H+\rho_H gz), \tag{3}$$

$$p_H-p_B=p_{kap}(s_B,T),\ s_B+s_H=1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(m\,\mathrm{s}_B\mathrm{c}_B\rho_B+m\,\mathrm{s}_H\mathrm{c}_H\rho_H+(1-m)c_{\Pi}\rho_{\Pi})T]+$$

$$+div[(\rho_B c_B\overline{W}_B+\rho_H c_H\overline{W}_H)T]=div[m\ (\mathrm{s}_B\lambda_B+\ \mathrm{s}_B\lambda_\mathrm{H})+(1-m)\lambda_{\Pi})\nabla T]+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_1}Q_{\text{тепло,hi}}\delta(x-x_{hi},y-y_{hi},z-z_{hi})-\sum_{i=1}^{N_2}Q_{\text{тепло},\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i}). \tag{5}$$

Здесь s_B,s_H – насыщенность воды и нефти соответственно; p_B,p_H – давление воды и нефти соответственно; T – температура пласта; k – абсолютная проницаемость пласта; m – пористость пласта; ρ_B,ρ_H – плотность воды и нефти соответственно; f_B,f_H - относительные фазовые проницаемости воды и нефти соответственно; μ_B,μ_H – вязкость воды и нефти соответственно; c_B,c_H,c_{Π} – коэффициент теплоемкости воды, нефти и породы соответственно; λ_B,λ_H,λ_{Π} – коэффициент теплопроводности воды, нефти и породы соответственно; g – ускорение свободного падения; $Q_{B,hi}$,$Q_{B,\partial i}$ – приведенные дебиты воды на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; Q_{Hi} – приведенные дебиты нефти на добывающих скважинах; $Q_{\text{тепло},hi}$, $Q_{\text{тепло},\partial i}$ – приведенные расходы количества тепла на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; (x_{hi},y_{hi},z_{hi}) – координаты i-ой нагнетательной скважины; $(x_{\partial i},y_{\partial i},z_{\partial i})$ – координаты i-ой добывающей скважины; N_1,N_2 – количество нагнетательных скважин и добывающих скважин соответственно.

В качестве начальных условий берутся начальные распределения давления нефти и температуры пласта; осредненные по мощности насыщенности воды, нефти в начальный момент времени:

$$(p_H,T)|_{t=0}=(p_H^0,T^0),(s_B,s_H)|_{t=0}=(s_B^0,s_H^0). \tag{6}$$

На границах области течения задаются следующие условия:

$$(\overline{W_B}\overline{n};\overline{W_H}\overline{n})\big|=0,\ (\frac{\partial T}{\partial n}+\alpha T)\Big|=\alpha T_\infty. \tag{7}$$

Вычислительный алгоритм. Для решения данной задачи преобразуем нашу систему, т.е. приведем уравнения (1) и (2) в вид для удобной численной реализации:

$$m(\frac{\partial\rho}{\partial t}s_B+\rho\frac{\partial s}{\partial t})+div(\rho\overline{W_B})=\sum_{i=1}^{N_1}Q_{B,hi}\delta(x-x_{hi},y-y_{hi},z-z_{hi})-\sum_{i=1}^{N_2}Q_{B,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i}), \tag{8}$$

$$m(\frac{\partial\rho_H}{\partial t}s_H+\rho_H\frac{\partial s_H}{\partial t})+div(\rho_H\overline{W_H})=-\sum_{i=1}^{N_2}Q_{H,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i}), \tag{9}$$

здесь

$$\rho_B = \rho_B^0 e^{(\beta_{PB}(p_B - p^0) - \beta_{TB}(T - T^0))}, \rho_H = \rho_H^0 e^{(\beta_{PH}(p_H - p^0) - \beta_{TH}(T - T^0))},$$

$$p_{kap}(s_B, T) = \gamma(T)\sqrt{\frac{m}{k}} J(s_B), \tag{10}$$

где ρ_B^0, ρ_H^0 – начальная плотность воды и нефти, β_{PB}, β_{PH} – коэффициент сжимаемости воды и нефти, β_{TB}, β_{TH} – коэффициент термического расширения воды и нефти, p^0 – начальное давление пласта, T^0 – начальная температура пласта, γ – коэффициент поверхностного натяжения, J – функция Леверетта.

Здесь m – пористость пласта, k – абсолютная проницаемость пласта, H – толщина пласта.

$$\nabla p_B = \nabla p_H - \frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\nabla s_B - \frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\nabla T, \frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B} < 0, \frac{\partial p_{kap}}{\partial T} < 0 \tag{11}$$

или

$$\frac{1}{\rho_B} m(\frac{\partial \rho_B}{\partial p_B}\frac{\partial p_B}{\partial t} + \frac{\partial \rho_B}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}) s_B + m\frac{\partial s_B}{\partial t} + \frac{1}{\rho_B} div(\rho_B \overline{W_B}) =$$

$$= \frac{1}{\rho_B}\sum_{i=1}^{N_1} Q_{B,hi}\delta(x - x_{hi}, y - y_{=i}, z - z_{hi}) - \frac{1}{\rho_B}\sum_{i=1}^{N_2} Q_{B,\partial i}\delta(x - x_{\partial i}, y - y_{\partial i}, z - z_{\partial i}).$$

$$\frac{1}{\rho_H} m(\frac{\partial \rho_H}{\partial p_H}\frac{\partial p_H}{\partial t} + \frac{\partial \rho_H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}) s_H + m\frac{\partial s_H}{\partial t} + \frac{1}{\rho_H} div(\rho_H \overline{W_H}) =$$

$$= -\frac{1}{\rho_H}\sum_{i=1}^{N_2} Q_{H,\partial i}\delta(x - x_{\partial i}, y - y_{\partial i}, z - z_{\partial i}).$$

Так как $p_H - p_B = p_{kap}(s_B, T)$, используя соотношение $s_B + s_H = 1$ и из (10), (11), раскладывая по компонентам, получаем уравнение для давления нефти:

$$m(\beta_{PB}s_B + \beta_{PH}s_H)\frac{\partial p_H}{\partial t} - m\beta_{PB}s_B\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial t} - m\beta_{PB}s_B\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} - (m\beta_{TB}s_B + m\beta_{TH}s_H)\frac{\partial T}{\partial t} -$$

$$-(\frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial x} + \frac{1}{\rho_H}k\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial \rho_H}{\partial x})\frac{\partial p_H}{\partial x} + \frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial x}\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial x} + \frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial x}\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} -$$

$$-(\frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial y} + \frac{1}{\rho_H}k\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial \rho_H}{\partial y})\frac{\partial p_H}{\partial y} + \frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial y}\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial y} + \frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial y}\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} -$$

$$-(\frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial z} + \frac{1}{\rho_H}k\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial \rho_H}{\partial z})\frac{\partial p_H}{\partial z} + \frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial z}\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial z} + \frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial \rho_B}{\partial z}\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial p_H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial p_H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial p_H}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial y}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z})+$$

$$+\frac{1}{\rho_B}k\frac{f_B}{\mu_B}\rho_B g+\frac{1}{\rho_H}k\frac{f_H}{\mu_H}\rho_H g+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{f_B}{\mu_B}\rho_B g)+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{f_H}{\mu_H}\rho_H g)+$$

$$+\frac{1}{\rho_B}\sum_{i=1}^{N_1}Q_{B,hi}\delta(x-x_{hi},y-y_{hi},z-z_{hi})-\frac{1}{\rho_B}\sum_{i=1}^{N_2}Q_{B,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial p_H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial p_H}{\partial y})-\frac{1}{\rho_H}\sum_{i=1}^{N_2}Q_{H,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i}). \quad (12)$$

В области $0\le x\le l_x$, $0\le y\le l_y$, $0\le y\le l_z$, $0<t\le T$ введем следующую разностную сетку, где $x_{i+1}=x_i+hx$, $y_{j+1}=y_j+hy$, $z_{k+1}=z_k+hz$, $t^0=0$, $t^n=t^{n-1}+\Delta t^n$, $(i=0,...,N_X,\ j=0,...,N_Y,\ k=0,...,N_Z,\ n=0,...,M)$, где $\Delta t^0=\mathrm{const}$ (Δt^0 – задаваемый начальный шаг).

Введем следующие обозначения:

$$a_{2X}=-(\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial x}+\frac{1}{\rho_H}Hk\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial\rho_H}{\partial x}), a_{2Y}=-(\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial y}+\frac{1}{\rho_H}Hk\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial\rho_H}{\partial y}),$$

$$a_{2Z}=-(\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial z}+\frac{1}{\rho_H}Hk\frac{f_H}{\mu_H}\frac{\partial\rho_H}{\partial z}),$$

$$a_{3X}=\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial x}\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}, a_{3Y}=\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial y}\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}, a_{3Z}=\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial z}\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B},$$

$$a_{4X}=\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial x}\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}, a_{4Y}=\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial y}\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}, a_{4Z}=\frac{1}{\rho_B}Hk\frac{f_B}{\mu_B}\frac{\partial\rho_B}{\partial z}\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}.$$

Тогда уравнение для давления запишется следующим образом:

$$m(\beta_{PB}s_B+\beta_{PH}s_H)\frac{\partial p_H}{\partial t}-m\beta_{PB}s_B\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial t}-Hm\beta_{PB}s_B\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}-(Hm\beta_{TB}s_B+Hm\beta_{TH}s_H)\frac{\partial T}{\partial t}+$$

$$a_{2X}\frac{\partial p_H}{\partial x}+a_{2Y}\frac{\partial p_H}{\partial y}+a_{2Z}\frac{\partial p_H}{\partial z}+a_{3X}\frac{\partial s_B}{\partial x}+a_{3Y}\frac{\partial s_B}{\partial y}+a_{3Z}\frac{\partial s_B}{\partial z}+a_{4X}\frac{\partial T}{\partial x}+a_{4Y}\frac{\partial T}{\partial y}+a_{4Z}\frac{\partial T}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H})\frac{\partial p_H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H})\frac{\partial p_H}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H})\frac{\partial p_H}{\partial z})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B}\frac{\partial s_B}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z})+\frac{1}{\rho_A}k\frac{f_B}{\mu_B}\rho_A g+\frac{1}{\rho_H}k\frac{f_H}{\mu_H}\rho_H g+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{f_B}{\mu_B}\rho_B g)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{f_H}{\mu_H}\rho_H g)+\frac{1}{\rho_B}\sum_{i=1}^{N_1}Q_{B,hi}\delta(x-x_{hi},y-y_{hi},z-z_{hi})-\frac{1}{\rho_B}\sum_{i=1}^{N_2}Q_{B,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i},z-z_{\partial i})-$$

$$-\frac{1}{\rho_H}\sum_{i=1}^{N_2}Q_{H,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},C-C_{\partial i},z-z_{\partial i}).$$

Для решения данного уравнения используем схему расщепления по локальным переменным [3].

Схема расщепления для уравнения давления по направлению x будет иметь следующий вид:

$$hxhyhzm_{ijk}(\beta_{PB}s^n_{B\,ijk}+\beta_{PH}s^n_{H\,ijk})\frac{p^{n+1/3}_{H\,ijk}-p^n_{H\,ijk}}{\tau}=$$

$$=hyhz(((k(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H}))^{n+1/3}_{i+1/2jk})\frac{(p^{n+1/3}_{H\,i+1jk})-(p^{n+1/3}_{H\,ijk})}{hx}-((Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H}))^{n+1/3}_{i-1/2jk})\frac{(p^{n+1/3}_{H\,ijk})-(p^{n+1/3}_{H\,i-1jk})}{hx}),$$

по направлению y будет иметь следующий вид:

$$hxhyhzm_{ijk}(\beta_{PB}s^n_{B\,ijk}+\beta_{PH}s^n_{H\,ijk})\frac{p^{n+2/3}_{H\,ijk}-p^{n+1/3}_{H\,ijk}}{\tau}=$$

$$=hxhz((k(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H}))^{n+2/3}_{ij+1/2k}\frac{p^{n+2/3}_{H\,ij+1k}-p^{n+2/3}_{H\,ijk}}{hy}-(Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H}))^{n+2/3}_{ij-1/2k}\frac{p^{n+2/3}_{H\,ijk}-p^{n+2/3}_{H\,ij-1k}}{hy}),$$

по направлению z будет иметь следующий вид:

$$hxhyhzm_{ijk}(\beta_{PB}s^n_{B\,ijk}+\beta_{PH}s^n_{H\,ijk})\frac{p^{n+1}_{H\,ijk}-p^{n+2/3}_{H\,ijk}}{\tau}+hxhyhzm_{ijk}\beta_{PB}s^n_{B\,ijk}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{ijk}\frac{s^{n+1}_{B\,ijk}-s^n_{B\,ijk}}{\tau}+$$

$$+hxhyhzm_{ijk}\beta_{PB}s^n_{B\,ijk}(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{ijk}\frac{T^{n+1}_{ijk}-T^n_{ijk}}{\tau}-hxhyhz(m_{ijk}\beta_{TB}s^n_{B\,ijk}+m_{ijk}\beta_{TH}s^n_{H\,ijk})\frac{T^{n+1}_{ijk}-T^n_{ijk}}{\tau}+$$

$$+hyhxhz(a_{2X})^n_{ijk}(\frac{\partial p_H}{\partial x})^n_{ijk}+hxhyhz(a_{2Y})^n_{ijk}(\frac{\partial p_H}{\partial y})^n_{ijk}+hxhyhz(a_{3X})^n_{ijk}(\frac{\partial s_B}{\partial x})^n_{ijk}+$$

$$+hxhyhz(a_{3Y})^n_{ijk}(\frac{\partial s_B}{\partial y})^n_{ijk}+hxhyhz(a_{4X})^n_{ijk}(\frac{\partial T}{\partial x})^n_{ijk}+hxhyhz(a_{4Y})^n_{ijk}(\frac{\partial T}{\partial y})^n_{ijk}+$$

$$+hxhyhz(a_{2Z})^n_{ijk}(\frac{\partial p_H}{\partial z})^n_{ijk}+hxhyhz(a_{3Z})^n_{ijk}(\frac{\partial s_B}{\partial z})^n_{ijk}+hxhyhz(a_{4Z})^n_{ijk}(\frac{\partial T}{\partial z})^n_{ijk}=$$

$$=hxhy(((Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H}))^{n+1}_{ijk+1/2})\frac{(p^{n+1}_{H\,ijk+1})-(p^{n+1}_{H\,ijk})}{hz}-((Hk(\frac{f_B}{\mu_B}+\frac{f_H}{\mu_H}))^{n+1}_{ijk-1/2})\frac{(p^{n+1}_{H\,ijk})-(p^{n+1}_{H\,ijk-1})}{hz})+$$

$$+hyhz((-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{i+1/2jk}\frac{s^n_{B\,i+1\,jk}-s^n_{B\,ijk}}{hx}-(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{i-1/2jk}\frac{s^n_{B\,ijk}-s^n_{B\,i-1jk}}{hx})+$$

$$+hxhz((-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{ij+1/2k}\frac{s^n_{B\,ij+1k}-s^n_{B\,ijk}}{hy}-(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{ij-1/2k}\frac{s^n_{B\,ijk}-s^n_{B\,ij-1k}}{hy})+$$

$$+hxhy((-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{ijk+1/2}\frac{s^n_{B\,ijk+1}-s^n_{B\,ijk}}{hz}-(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial s_B})^n_{ijk-1/2}\frac{s^n_{B\,ijk}-s^n_{B\,ijk-1}}{hz})+$$

$$+hyhz((-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{i+1/2jk}\frac{T^n_{i+1jk}-T^n_{ijk}}{hx}-(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{i-1/2jk}\frac{T^n_{ijk}-T^n_{i-1jk}}{hx})+$$

$$+hxhz((-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{ij+1/2k}\frac{T^n_{ij+1k}-T^n_{ijk}}{hy}-(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{ij-1/2k}\frac{T^n_{ijk}-T^n_{ij-1k}}{hy})+$$

$$+hxhy((-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{ijk+1/2}\frac{T^n_{ijk+1}-T^n_{ijk}}{hz}-(-\frac{\partial p_{kap}}{\partial T})^n_{ijk-1/2}\frac{T^n_{ijk}-T^n_{ijk-1}}{hz})+$$

$$+\sum_{p=1}^{N_1}(Q_{B,\,hp})^n\omega^{nagn}_{ijk}-\sum_{p=1}^{N_2}((Q_{B,\partial p})^n+(Q_{H,\partial p})^n)\omega^{dob}_{ijk},$$

где $\omega^{nagn}_{ijk}=\begin{cases}1,\ \mathrm{x_i}=x_{nagn},y=y_{nagn},z=z_{nagn}\\0\end{cases}$, $\omega^{dob}_{ijk}=\begin{cases}1,\ \mathrm{x_i}=x_{dob},y=y_{dob},z=z_{dob}\\0\end{cases}$.

Будем решать полученные уравнения последовательным применением метода прогонки с линеаризацией нелинейных членов. Аналогично решаются уравнения для температуры и насыщенности воды. Условия устойчивости и сходимости метода выполняются.

Затем, по вычисленным давлениям, температуре, насыщенности воды, нефти и их плотности находятся интегральные показатели разработки месторождения: нефтеотдача, обводненность, накопленная добыча нефти и другие показатели на задаваемый момент времени разработки.

Численный результат. Для численных расчетов рассматриваются различные варианты разработки месторождений с различными формами залегания углеводородных скоплений на месторождениях Западного Казахстана.

Данные брались в следующем виде: пористость пласта $m=0,65$; теплоемкость: $c_H=3,7$ кДж/кг$\,^0$С – нефти, $c_B=5,1$ кДж/кг$\,^0$С – воды, $c_\Pi=1$ кДж/кг$\,^0$С – породы, теплопроводность: $\lambda_B=0,81$ Вт/м^{0}С – воды, $\lambda_H=0,21$ Вт/м^{0}С – нефти, $\lambda_\Pi=2,43$ Вт/м^{0}С породы, плотность $\rho^0_B=1000$ кг/м^3 – воды, $\rho^0_H=820$ кг/м^3 – нефти, сжимаемость: $\beta_{PB}=0,00046$ 1/МПа – воды, $\beta_{PH}=0,001$ 1/МПа нефти, термическое расширение: $\beta_{TB}=0,00108$ 1/^{0}С – воды, $\beta_{TH}=0,00110$ 1/^{0}С – нефти [3].

Поддерживаемое давление нагнетания на нагнетательной скважине бралось равной 90 атм. или 9 МПа, на добывающей скважине бралось равной 5 МПа. Начальное пластовое давление равно 7 МПа, начальная температура пласта равна $50^0\ C$ градусов по Цельсию. Температуру закачки брали равной $90^0\ C$ градусов по Цельсию.

Относительные фазовые проницаемости для воды и нефти имеют следующий вид:

$$f_B(s)=\begin{cases}0,\ 0\ \le \mathrm{s}\le 0,2,\\(\frac{\mathrm{s}-0,2}{0,8})^3,\ 0,2\ <\mathrm{s}\le 1,\end{cases}\quad f_H(s)=\begin{cases}1,\ 0\ \le \mathrm{s}\le 0,2,\\(\frac{1-\mathrm{s}}{0,8})^3,\ 0,2\ <\mathrm{s}\le 1.\end{cases}$$

Капиллярное давление имеет следующий вид:
$p_{kap}=a(\frac{0.072}{s}-\frac{s}{2}+0.391)$, где $a=3.5\cdot 10^6$.

В начальный момент времени насыщенность воды равна нулю.

Зависимости для вязкостей водной, нефтяной фаз имеют следующий вид:

$$\mu_B = \frac{(970 - T)}{(26,5T + 421)},\ \mu_H = 191989T^{-2,0535}.$$

Зависимости плотности воды и нефти от давления и температуры будем брать в следующем виде:

$$\rho_B = \rho_B^0 \exp[\beta_{PB}(p - p^0) - \beta_{TB}(T - T^0)], \rho_H = \rho_H^0 \exp[\beta_{PH}(p - p^0) - \beta_{PH}(T - T^0)],$$

где β_{PB}, β_{TB} – коэффициенты сжимаемости для воды и нефти соответственно, а β_{PH}, β_{PH} – коэффициенты термического расширения для воды и нефти соответственно.

На рисунках 1, 2 приведены графики давления, водонасыщенности пласта для средней стадии разработки пласта.

Расчеты позволяют находить динамические параметры пласта для произвольного расположения скважин, прогнозировать технологические показатели добычи нефти в произвольной системе скважин для различных фильтрационно-емкостных параметров нефтяного пласта.

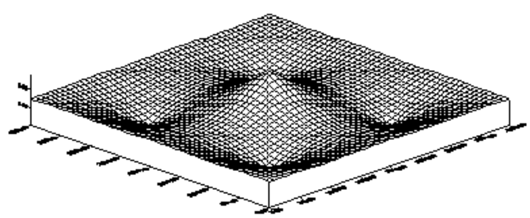

Рис. 1: Распределение давления пласта для средней стадии разработки месторождения (ось $z = 0.5$).

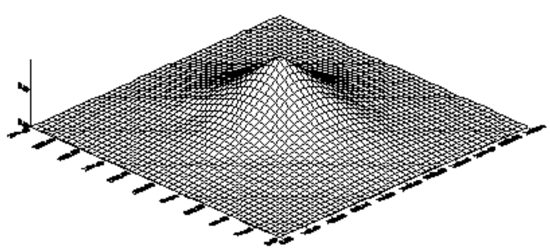

Рис. 2: Распределение водонасыщенности пласта для средней стадии разработки месторождения (ось $z = 0.5$).

Цитированная литература

[1]. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Движение жидкостей и газов в природных пластах*, М., 1984.

[2]. Полубаринова-Кочина П. Я. *Теория движения грунтовых вод*, М., 1977.

[3]. Жумагулов Б. Т., Монахов В. Н., Смагулов Ш. С. *Компьютерное моделирование в процессах нефтедобычи*, Алматы, 2002.

[4]. Мукимбеков М. Ж. *Моделирование плановой задачи в освоении месторождений вторичным методом*, Труды 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара, 2009, Ч. 2, С. 120 – 122.

[5]. Антониади Д. Г. *Научные основы разработки нефтяных месторождений термическими методами*, М., 1995.

[6]. Булыгин В. Я. *Имитация разработки залежей нефти*, М., 1990.

Статья поступила в редакцию 25.03.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 58 — 63*

УДК 004.056.5

СИСТЕМА ЭЛЕКТРОННОЙ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ НА БАЗЕ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

С. Е. Нысанбаева

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: sultasha1@mail.ru

Предлагается модификация схемы электронной цифровой подписи Эль-Гамаля на базе непозиционных полиномиальных систем счисления.

Разработку криптографических средств защиты информации с открытым ключом называют величайшим событием в истории криптографии [1]. Уитфилд Диффи (Whitfeld Diffie) и МартинХеллман (Martin Hellman) в 1976 г. разработали метод, который отличался от всех известных ранее подходов в криптографии [2]. До его появления при создании практически всех криптографических систем применялись подстановки и перестановки [3-7]. Рождение криптографии с открытым ключом серьезно повлияло на дальнейшее развитие средств криптографии, т. к. алгоритмы криптографии с открытым ключом используют математические функции, отличные от подстановок и перестановок, а также являются асимметричными – в них используются два разных ключа при зашифровании и расшифровании. Это отличает их от методов традиционного (симметричного) шифрования, где предполагается только один секретный ключ. В асимметричных криптосистемах один из ключей остается в личном пользовании, а другой открыт для всех. Наличие двух ключей позволяет реализовать три различных вида криптографических схем: 1) зашифрование/расшифрование – отправитель шифрует сообщение с использованием открытого ключа получателя; 2) электронная цифровая подпись (ЭЦП) – отправитель "подписывает" сообщение с помощью своего личного ключа (подпись получают в результате применения криптографического алгоритма к сообщению или к небольшому блоку данных, являющемуся функцией сообщения); 3) обмен ключами – две стороны взаимодействуют, чтобы обменяться сеансовым или секретным ключом (в этом случае могут применяться разные подходы с применением личных ключей одной или обеих сторон). Идея применения методов криптографии с открытым ключом возникла из попыток найти решение двух из наиболее сложных проблем, возникающих при использовании симметричного шифрования [2]. Первая проблема – распределение ключей, которое при симметричном шифровании требует, чтобы обе

Keywords: *Electronic digital signature, public-key cryptography, non-traditional algorithm, non-positional polynomial notation*

2010 Mathematics Subject Classification: 94A60, 11T71, 14G50

участвующие в обмене данными стороны либо уже имели общий ключ, который каким-то образом был им доставлен, либо использовали услуги некоторого центра распределения ключей. У. Диффи считал, что второе из этих требований противоречит самой сущности криптографии – возможности обеспечить полную секретность вашей собственной корреспонденции. Вторая проблема, не связанная с первой – проблема "электронных цифровых подписей". Использование криптографии получило очень широкое распространение не только в области военного дела, но и в области коммерции и частных коммуникаций. В связи с этим возникла необходимость иметь для электронных сообщений и документов подписи, эквивалентные используемым в бумажных документах. С помощью такой цифровой подписи обе стороны могли бы убедиться в том, что цифровое сообщение было отправлено данным конкретным лицом. Именно в сфере управления ключами и приложениях электронной цифровой подписи в настоящее время нашло свое применение шифрование с открытым ключом.

Системы (схемы) ЭЦП включают алгоритм вычисления (формирования) цифровой подписи и алгоритм ее проверки. Выделяют три основные группы разных подходов создания схем ЭЦП на основе: 1) систем шифрования с открытыми ключами, 2) специально разработанных алгоритмов вычисления и проверки подписи, 3) симметричных систем шифрования. В основе известных систем ЭЦП лежат алгоритмы RSA (Rivest-Shamir-Adleman), Эль-Гамаля (ElGamal) и DSA (Digital Signature Algorithm), разработанных на базе криптосистем с открытым ключом. Ко второй группе относятся разработки по созданию алгоритмов шифрования, формирования ЭЦП и открытого распространения секретных ключей на базе непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС), результаты которых выявили возможность построения надежных асимметричных криптографических систем с использованием НПСС [8–10]. (Отметим, алгоритмы и методы, разработанные на базе НПСС, называют нетрадиционными. Синонимы НПСС – системы счисления в остаточных классах с полиномиальными основаниями, модулярная арифметика.) В связи с этим проведено построение нетрадиционной (модифицированной) схемы цифровой подписи Эль-Гамаля, в которой использованы указанные первые два подхода при разработке ЭЦП.

Схема цифровой подписи Эль-Гамаля основана на сложности задачи вычисления дискретных логарифмов. Пусть p – простое число и α – примитивный элемент поля Z_p. Выбирается случайное число a в интервале $1 \leqslant a \leqslant p-2$ и вычисляется значение $\beta = \alpha^a \mod p$. Число a является секретным ключом, а тройка чисел (p, α, β) – открытым ключом.

Алгоритм формирования цифровой подписи для сообщения M состоит в следующем:

1. выбирается случайное целое число r, $1 \leqslant r \leqslant p-2$;
2. вычисляется $\gamma = \alpha^r \mod p$;
3. находится $\delta = (x - a\gamma)r^{-1} \mod (p-1)$, где $x = M$;
4. электронная цифровая подпись определяется парой чисел (γ, δ).

Для выявления подлинности цифровой подписи алгоритм проверки ЭЦП осуществляет:

1. вычисление сравнения $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^x \mod p$;
2. анализ полученного сравнения: если оно оказывается верным, то электронная подпись принимается, если же нет, то ЭЦП отвергается.

Основным достоинством такой схемы ЭЦП является возможность выработки цифровых подписей для большого числа сообщений с использованием одного секретного ключа. При этом попытка компрометации схемы сталкивается с необходимостью решения сложной математической задачи, связанной с нахождением решений показательных уравнений, в частности, с нахождением значения дискретного логарифма в поле Z_p.

На основе системы цифровой подписи Эль-Гамаля построены другие схемы ЭЦП, во многом сходные по своим свойствам с подписью Эль-Гамаля. Суть этих схем ЭЦП заключается в проверке сравнения вида $\alpha^A \beta^B \equiv \gamma^C \mod p$. В этом сравнении тройка чисел (A, B, C) совпадает с одной из перестановок чисел $\pm x$, $\pm\delta$ и $\pm\gamma$ при соответствующем выборе знаков.

Для схемы Эль-Гамаля эта тройка чисел принимает следующие значения: $A = x$, $B = -\gamma$ и $C = \delta$. Аналогично построены стандарты электронной цифровой подписи США и России. В американском стандарте DSS (Digital Signature Standard, 1991 г.) используются следующие значения этих чисел: $A = x$, $B = \gamma$ и $C = \delta$. В российском стандарте ГОСТ Р 34.10-94 тройке (A, B, C) соответствуют их значения $(-x, \delta, \gamma)$. В Республике Казахстан государственным стандартом СТ РК 1073-2007 определены четыре уровня безопасности [11]. В соответствии с установленными в нем требованиями к средствам криптографической защиты информации первого, второго, третьего и четвертого уровня длина ключа ЭЦП должна быть не менее 60, 100, 150 и 200 бит соответственно.

Рассмотрим процедуру построения схемы электронной цифровой подписи длины N_k бит для подписываемого электронного сообщения M длины N бит ($N_k \ll N$) с использованием непозиционной полиномиальной системы счисления.

При разработке нетрадиционного алгоритма формирования ЭЦП на основе схемы Эль-Гамаля вместо электронного сообщения M используется хэш-значение, которое вычисляется в непозиционной системе путем введения избыточности. Предлагаемый алгоритм состоит из трех основных частей: в первых двух производится построение непозиционной полиномиальной системы счисления и вычисление хэш-значения, а в третьей – собственно вычисление ЭЦП с использованием алгоритма цифровой подписи Эль-Гамаля.

Вначале (первый этап) осуществляется формирование НПСС. Для этого выбирается система ее рабочих оснований над полем GF(2) степени $m_1, m_2, \ldots, m_S$ соответственно, которые составляют одну систему рабочих оснований. Основным рабочим диапазоном НПСС является многочлен $P(x) = p_1(x)p_2(x)\ldots p_S(x)$ степени $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_S$. Рабочие основания непозиционной системы выбираются из числа неприводимых многочленов степени не больше N, удовлетворяющих алгебраическому уравнению:

$$k_1 m_1 + k_2 m_2 + \ldots + k_S m_S = N. \tag{1}$$

Из этого уравнения находятся неизвестные коэффициенты k_i, определяющие число выбираемых в качестве оснований неприводимых полиномов степени m_i, $0 \leqslant k_i \leqslant n_i$, n_i – множество всех неприводимых многочленов степени m_i, $1 \leqslant m_i \leqslant N$, $S = k_1 + k_2 + \ldots + k_S$ – количество всех выбранных оснований. Полные системы вычетов по модулям многочленов степени m_i содержат все многочлены с двоичными коэффициентами степени не выше $m_i - 1$, для записи которых необходимо m_i бит. Уравнение (1) определяет количество S оснований, вычеты по которым покрывают длину подписываемого сообщения. Для выполнения Великой китайской теоремы все рабочие основания выбираются различными.

Тогда сообщение M длиной N бит интерпретируется как последовательность остатков $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x), \ldots, \alpha_S(x)$ от деления некоторого многочлена $F(x)$ степени меньше m на рабочие основания $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_S(x)$ соответственно и записывается в непозиционном виде в виде последовательности вычетов:

$$F(x) = (\alpha_1(x)\,, \alpha_2(x)\,, \ldots, \alpha_S(x)), \tag{2}$$

где $F(x) \equiv \alpha_i(x) \mod p_i(x)$, $i = \overline{1, S}$. В выражении (2) важен также и порядок расположения выбранных оснований. Непозиционное представление (2) многочлена $F(x)$ является единственным. В выражении (2) остатки $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_S(x)$ выбираются так, чтобы первым l_1 битам сообщения соответствовали двоичные коэффициенты остатка $\alpha_1(x)$, следующим l_2 битам – двоичные коэффициенты остатка $\alpha_2(x)$ и так далее, последним l_S двоичным разрядам ставятся в соответствие двоичные коэффициенты вычета $\alpha_S(x)$. Вычисление (восстановление) многочлена $F(x)$ в позиционном виде производится по формуле, используемой в случае обработки, хранения и передачи информации:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{S}\alpha_i(x)B_i(x),\quad \text{где}\quad B_i(x)=\frac{P(x)}{p_i(x)}M_i(x)\equiv 1(mod\ p_i(x)),\ \ i=\overline{1,\,S}. \tag{3}$$

Затем (второй этап) производится хэширование (сжатие) сообщения от длины N до длины N_k бит. Для этого НПСС расширяется на избыточные (дополнительные) основания $p_{S+1}(x)$, $p_{S+2}(x),\,\ldots,\,p_{S+U}(x)$. Степени и число неприводимых многочленов, используемых при их выборе, обозначим $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_U$ и $d_1,\,d_2,\,\ldots,\,d_U$ соответственно. Число выбранных избыточных оснований из неприводимых многочленов различных степеней, не превышающих значения N_k, в этом случае определяется из аналога уравнения (1):

$$t_1a_i+t_2a_2+\ldots+t_Ua_U=N_k, \tag{4}$$

где $0\leqslant t_j\leqslant d_j$, $1\leqslant a_j\leqslant N_k$, $j=\overline{1,\,U}$, t_j – число выбранных дополнительных оснований степени a_j. $U=t_1+t_2+\ldots+t_U$ – число выбранных дополнительных оснований системы. Из уравнения (4) находятся U оснований системы, запись вычетов по которым покрывает хэш-значение длиной N_k бит.

Система дополнительных оснований формируется независимо от выбора рабочих оснований $p_1(x),\,p_2(x),\,\ldots,\,p_S(x)$, но в данном алгоритме среди U избыточных оснований могут быть и совпадающие с некоторыми из рабочих. Затем вычисляются избыточные вычеты $\alpha_{S+1}(x),\,\alpha_{S+2}(x),\,\ldots,\,\alpha_{S+U}(x)$ от деления восстановленного многочлена $F(x)$ на дополнительные основания $p_{S+1}(x),\,p_{S+2}(x),\,\ldots,\,p_{S+U}(x)$. Тогда хэш-значение можно интерпретировать как последовательность этих вычетов:

$$h(F(x))=(\alpha_{S+1}(x),\,\alpha_{S+2}(x),\,\ldots,\,\alpha_{S+U}(x)); \tag{5}$$

где $h(F(x))\equiv\alpha_{S+j}(x)(mod\ p_{S+j}(x))$, $j=\overline{1,\,U}$. Из длин всех избыточных вычетов складывается длина хэш-значения (5).

Рабочие и избыточные основания являются закрытыми (секретными) ключами.

Третий этап — вычисление электронной цифровой подписи на базе криптосистем с открытыми ключами с использованием полученного хэш-значения. Для этого формируется непозиционная полиномиальная система счисления для хэш-значения, основаниями которой выбираются неприводимые многочлены степени не выше N_k. Обозначим эти основания $r_1(x),\,r_2(x),\,\ldots,$ $r_W(x)$, а степени и число неприводимых многочленов, используемых при выборе этих оснований, соответственно $b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_W$ и $l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_W$. Выбираются они из условия выполнения следующего уравнения (аналога уравнения (1)):

$$v_1b_1+v_2b_2+\ldots+v_Wb_W=N_k; \tag{6}$$

где $0\leqslant v_j\leqslant l_j$, $j=\overline{1,\,W}$ – неизвестные коэффициенты; v_j – число выбранных оснований степени b_j, $1\leqslant b_j\leqslant N_k$, $W=v_1+v_2+\ldots+v_W$ – количество оснований, используемых при вычислении цифровой подписи. Из уравнения (6) находятся W оснований системы, запись вычетов по которым покрывает хэш-значение длины N_k. Основной диапазон в этой НПСС задается многочленом $R(x)=r_1(x)r_2(x)\cdots r_W(x)$ степени $b=b_1+b_2+\ldots+b_W$.

В построенной непозиционной полиномиальной системе счисления хэш-значение (5) длиной N_k бит интерпретируется как последовательность остатков $h_1(x),\,h_2(x),\,\ldots,\,h_W(x)$ от деления некоторого многочлена $H(x)$ на основания $r_1(x),\,r_2,\,\ldots,\,r_W(x)$ соответственно и представляется в непозиционном виде:

$$H(x)=(h_1(x),\,h_2(x),\,\ldots,\,h_W(x)), \tag{7}$$

где $H(x) \equiv h_j(x)(mod\ r_j(x))$, $j = \overline{1, W}$.

Далее выполняется процедура получения ЭЦП, разработанная на основе цифровой подписи Эль-Гамаля. Для каждого основания $r_j(x)$ выбирается примитивный элемент (многочлен) $\theta_j(x)$ из полной системы вычетов по модулю $r_j(x)$, т. е. степени примитивных многочленов $\theta_j(x)$ меньше b_j, $j = \overline{1, W}$. В соответствии с представлениями (2), (5) и (7) эти примитивные элементы $\theta_j(x)$ также интерпретируются как остатки от деления некоторого многочлена $PR(x)$ на основания $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_W(x)$ соответственно:

$$PR(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_W(x)),$$

где $PR(x) \equiv \theta_j(x)(mod\ r_j(x))$, $j = \overline{1, W}$.

Основания $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_W(x)$ и примитивные элементы $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_W(x)$ – также закрытые ключи.

Для восстановления позиционного вида многочленов находятся базисы НПСС в соответствии с выражением (3). Для этого определяются полиномы $R_j(x) \equiv \dfrac{R(x)}{r_j(x)}(mod\ r_j(x))$, где $j = \overline{1, W}$. Для них находятся инверсные многочлены $R_j^{-1}(x)$: $R_j^{-1}(x) \cdot R_j(x) \equiv 1(mod\ r_j(x))$, где $j = \overline{1, W}$. Тогда базисы определяются по следующим выражениям $B_j(x) \equiv R_j^{-1}\dfrac{R(x)}{r_j(x)}(mod\ r_j(x))$. Многочлены $B_j(x)$ также относятся к закрытой информации.

Затем производится вычисление цифровой подписи.

1. Выбирается случайное секретное число (ключ) g_1 в интервале $1 < g_1 < 2^b$.

2. Находится новый элемент (полином) – открытый ключ $\beta(x)$:

$$\beta(x) = (\beta_1(x), \beta_2, (x) \ldots, \beta_W(x)), \text{ где } \beta_j(x) \equiv \theta_j^{g_1}(x)(mod\ r_j(x)), \ j = \overline{1, W}.$$

3. Определяется другое случайное секретное число (ключ) g_2 в интервале $1 < g_2 < 2^b$.

4. Вычисляется многочлен $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_W(x)), \text{ где } \gamma_j(x) \equiv \theta_j^{g_2}(x)(mod\ r_j(x)), \ j = \overline{1, W}.$$

5. С использованием хэш-значения в виде (7) вычисляется полином $\delta(x)$:

$$\delta(x) = (\delta_1(x), \delta_2(x), \ldots, \delta_W(x)), \text{ где } \delta_j(x) \equiv [h_j(x) - (\gamma_j(x))^{2g_1}](mod\ r_j(x)), \ j = \overline{1, W}.$$

6. Электронной цифровой подписью для сообщения M полагается пара многочленов $(\gamma(x), \delta(x))$.

При проверке подлинности цифровой подписи определяется правильность выражения:

$$(\beta(x))^{g_2}(\gamma(x))^{g_1} + \delta(x) = H(x), \text{ где } (\beta_j(x))^{g_2}(\gamma_j(x))^{g_1} + \delta_j(x) \equiv h_j(x)(mod\ r_j(x)), \ j = \overline{1, W}.$$

Если этого сравнение выполняется, то полученная ЭЦП считается подлинной. В соответствии с операциями непозиционной системы счисления все операции, в том числе и возведения в степень, могут выполняться параллельно по модулям неприводимых полиномов, выбранных в качестве оснований используемых в алгоритме НПСС. Таким образом, разработанный модифицированный алгоритм формирования ЭЦП представляется в виде трех взаимосвязанных блоков (этапов):

1. формирование непозиционной полиномиальной системы счисления для подписываемого сообщения: выбор системы рабочих оснований для сообщения длины N бит и определение порядка их расположения;

2. хэширование подписываемого сообщения длины N бит до длины N_k бит путем введения системы избыточных оснований с учетом их порядка следования;

3. вычисление собственно электронной цифровой подписи на базе криптосистем с открытым ключом с использованием полученного хэш-значения.

Криптостойкость представленного алгоритма формирования ЭЦП характеризуется полным ключом, определяемым процедурами выбора полиномиальных оснований непозиционных систем на каждом из этапов формирования цифровой подписи, примитивных многочленов и случайных секретных чисел.

Цитированная литература

[1]. Столлингс В. *Криптография и защита сетей: принципы и практика*, М., 2001.

[2]. Диффи У., Хеллман М. Э. *Защищенность и имитостойкость: Введение в криптографию*, ТИИЭР – Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1979, Т. 67, № 3, С. 71 – 109.

[3]. Шеннон К. *Математическая теория связи*, Труды по информатике и кибернетике, М., 1963, С. 245 – 332.

[4]. Шеннон К. *Теория связи в секретных системах*, Труды по информатике и кибернетике, М., 1963. С. 333 – 402.

[5]. *Введение в криптографию*, Под общей ред. В.В. Ященко. СПб, 2001.

[6]. Алферов А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С., Черемушкин А. В. *Основы криптографии*, М., 2002.

[7]. Шнайер Б. *Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тесты на языке Си*, М., 2003.

[8]. Амербаев В. М., Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е. *Применение непозиционных систем счисления при криптографической защите*, Известия НАН РК, Серия физ.-матем. наук, 2005, № 3, С. 84 – 89.

[9]. Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е. *Исследование надежности электронной цифровой подписи в непозиционной полиномиальной системе счисления*, Известия НАН РК, Серия физ.-матем. наук, 2006, № 5, С. 56 – 61.

[10]. Капалова Н. А., Нысанбаева С. Е. *Алгоритм открытого распределения ключей на базе непозиционной полиномиальной системы счисления*, Вестник Казахского национального университета, Серия матем., механика, инф-ка, 2007, № 3, С. 82 – 87.

[11]. *СТ РК 1073-2007. Средства криптографической защиты информации. Общие технические требования. Введ.*, 01.01. – Астана, 2009.

Статья поступила в редакцию 29.03.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 64 — 72*

УДК 517.956.223

ЗАДАЧИ ГУРСА И ДАРБУ ДЛЯ ОДНОГО НАГРУЖЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. А. Репин, А. В. Тарасенко

Самарский государственный экономический университет
443090, Самара, ул. Советской Армии, 141, e-mail: Matstat@mail.ru
Самарский государственный архитектурно-строительный университет
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194, e-mail: Tarasenko.A.V@mail.ru

Для вырождающегося интегро-дифференциального уравнения второго порядка в конечной области Ω, ограниченной его характеристиками и отрезком $AB: 0 \leq x \leq 1$, исследованы задача Гурса и вторая задача Дарбу. Для различных значений параметров оператора Эрдейи-Кобера, выполняющего роль нагрузки, доказана однозначная разрешимость этих задач.

1. В последние годы благодаря усилиям А.М. Нахушева и его последователей, а также М.Т. Дженалиева и учеников его научной школы, теория нагруженных уравнений получила дальнейшее развитие. Нагруженным дифференциальным уравнениям посвящены работы В.М. Будака, А.Д. Искендерова [1], А.М. Нахушева [2], М.Х. Шханукова [3], В.М. Казиева [4], А.М. Krall [5], И.С. Ломова [6] и др. В обзорной статье А.М.Нахушева [7] показана практическая и теоретическая важность исследований по нагруженным уравнениям. М.Т. Дженалиев в своей монографии [8] отмечает потребность в изучении нагруженных уравнений:
а) при приближенном решении интегро-дифференциальных уравнений,
б) при исследовании некоторых обратных задач,
в) при линеаризации нелинейных уравнений,
г) при соответствующем преобразовании нелокальных краевых задач,
д) при изучении некоторых задач оптимального управления,
е) при моделировании процессов фильтрации, а также управления и регулирования уровнями грунтовых вод,
ж) при моделировании процессов переноса частиц.

В работах А.М. Нахушева [2] и В.М. Казиева [4] изучались задачи Дарбу и Гурса для нагруженного интегро-дифференциального уравнения, которое содержало дробные производные от следов искомой функции, определяемыми в смысле Римана-Лиувилля, а в наших работах [9], [10] в качестве нагрузки использовался обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго [11].

Keywords: *Problems of Gursa and Darbu, the loaded equation,operator Erdeji-Kobera, the equation of Volterra*
2010 Mathematics Subject Classification: 45J05

В настоящей работе рассмотрены задачи Гурса и Дарбу для нагруженного уравнения Геллерстедта, где роль нагрузки выполняет оператор в смысле Эрдейи-Кобера [12], [13].

2. Пусть Ω – конечная область евклидовой плоскости точек (x, y), ограниченная характеристиками $AC : \xi = 0$, $BC : \eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \tag{1}$$

оператора

$$L(u) = u_{yy} - (-y)^m u_{xx}, \quad m = const > 0 \tag{2}$$

и отрезком $AB : 0 \leq x \leq 1$ прямой $y = 0$. В дальнейшем через I будем обозначать единичный интервал $(0, 1)$, а через $\overline{\Omega}$ замыкание Ω.

В области Ω рассмотрим нагруженное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с оператором Геллерстедта (2) в главной части

$$L(u) - \mu E_{0+}^{a,b} u(x, 0) = f(x, y), \tag{3}$$

где μ – действительная константа, $(E_{0+}^{a,b}\varphi)(x)$ – оператор Эрдейи-Кобера, определяемый формулой

$$(E_{0+}^{a,b}\varphi)(x) = \frac{x^{-a-b}}{\Gamma(a)} \int\limits_0^x (x-t)^{a-1} t^b \varphi(t)\, dt, \quad a > 0. \tag{4}$$

Ниже под регулярным решением уравнения (3) в области Ω будем понимать функцию $u(x, y) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (3) в области Ω.

Задача Гурса. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (3) из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AC} = \varphi_1(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{5}$$

$$u|_{BC} = \varphi_2(x), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{6}$$

причем

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения* $f(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, *а для функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *справедливы равенства*

$$\varphi_1(x) = x^{\delta_1} \overline{\varphi}_1(x), \quad \delta_1 \geq 1 - 2\beta, \tag{7}$$

$$\varphi_2(x) = (1-x)^{\delta_2} \overline{\varphi}_2(x), \quad \delta_2 \geq 1 - 2\beta, \tag{8}$$

где

$$\overline{\varphi}_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \overline{\varphi}_2(x) \in C^1\left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \overline{\varphi}_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{9}$$

$$(2m+4)\beta = m, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}.$$

Тогда задача Гурса (3), (5), (6) разрешима и притом единственным образом, если

$$b > 0, \quad a > \begin{cases} \dfrac{m}{m+2}, & 0 < m \le 4, \\ \dfrac{m+4}{2(m+2)}, & m > 4. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Уравнение (3) и краевые условия (5), (6) в характеристических координатах (1) принимают вид:

$$EV = V_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(V_\xi - V_\eta) = \frac{\gamma_0}{(\eta-\xi)^{4\beta}}\left[\mu(E^{a,b}_{0+}\tau)(\xi) + F(\xi,\eta)\right], \quad V(\xi,\xi) = \tau(\xi); \tag{11}$$

$$V(0,\eta) = \varphi_1\left(\frac{\eta}{2}\right) = f_1(\eta), \quad \eta \in \overline{I}, \tag{12}$$

$$V(\xi,1) = \varphi_2\left(\frac{1+\xi}{2}\right) = f_2(\xi), \quad \xi \in \overline{I}, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} f_1(1) = f_2(0) = 0, \quad V(\xi,\eta) = u\left[\frac{\xi+\eta}{2}, -(\frac{\eta-\xi}{2-4\beta})^{1-2\beta}\right], \\ F(\xi,\eta) = f\left[\frac{\xi+\eta}{2}, -(\frac{m+2}{4})^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right], \quad \gamma_0 = -\frac{1}{4}(2-4\beta)^{4\beta}. \end{gathered} \tag{14}$$

Опираясь на известные свойства функции Римана (см., например, [14])

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = (\eta_1-\xi_1)^{2\beta}\left[(\eta-\xi_1)(\eta_1-\xi)\right]^{-\beta} F\left(\beta,\beta;1;\frac{(\xi-\xi_1)(\eta_1-\eta)}{(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)}\right) \tag{15}$$

для уравнения $EV = 0$, нетрудно усмотреть, что любое решение $V(\xi,\eta)$ задачи Гурса (12), (13) для уравнения (11) с учетом $f_1(1) = 0$ представимо в виде:

$$V(\xi,\eta) = \Phi(\xi,\eta) + \int\limits_0^\xi \left[f_2'(t) - \frac{\beta f_2(t)}{1-t}\right] R(t,1;\xi,\eta)\, dt - \int\limits_\eta^1 \left[f_1'(t) + \frac{\beta f_1(t)}{t}\right] R(0,t;\xi,\eta)\, dt,$$

где

$$\Phi(\xi,\eta) = \gamma_0\left[\mu\int\limits_0^\xi E^{a,b}_{0+}\tau(t)\, dt \int\limits_1^\eta \frac{R(t,s;\xi,\eta)}{(s-t)^{4\beta}}\, ds + \int\limits_0^\xi dt \int\limits_1^\eta \frac{F(t,s)R(t,s;\xi,\eta)}{(s-t)^{4\beta}}\, ds\right],$$

(ξ,η) – произвольная точка области $\Delta = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$ – образа области Ω при преобразовании $(x,y) \to (\xi,\eta)$.

Принимая во внимание (15), переходя к пределу при $\eta \to \xi$, учитывая, что $F(\beta,\beta,1;1) = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, получим уравнение относительно неизвестной функции $\tau(\xi)$

$$\tau(\xi) + \lambda\int\limits_0^\xi \frac{E^{a,b}_{0+}(\tau)dt}{(\xi-t)^\beta}\int\limits_\xi^1 \frac{ds}{(s-t)^{2\beta}(s-\xi)^\beta} = g(\xi), \tag{16}$$

где

$$\lambda = \gamma_0\mu\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

$$g(\xi)=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\left[\int\limits_0^\xi \frac{f_2'(t)(1-t)-\beta f_2(t)}{(1-t)^{1-2\beta}(1-\xi)^\beta(\xi-t)^\beta}\,dt+\right.$$
$$\left.+\int\limits_1^\xi \frac{f_1'(t)t+\beta f_1(t)}{t^{1-2\beta}\xi^\beta(t-\xi)^\beta}\,dt+\gamma_0\int\limits_0^\xi dt\int\limits_1^\xi \frac{F(t,s)(s-t)^{-2\beta}}{[(\xi-t)(s-t)]^\beta}\,ds\right]. \tag{17}$$

Рассмотрим интегро-дифференциальный оператор

$$L\tau(\xi)=\int\limits_0^\xi \frac{E_{0+}^{a,b}(\tau)dt}{(\xi-t)^\beta}\int\limits_\xi^1 \frac{ds}{(s-t)^{2\beta}(s-\xi)^\beta}.$$

Покажем, что

$$L\tau(\xi)=\int\limits_0^\xi \tau(s)G(\xi,s)\,ds \tag{18}$$

и имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $b>0$, то справедлива оценка*

$$|G(\xi,s)|\le\begin{cases}\dfrac{const\cdot(1-\xi)^{1-3\beta}}{\xi^a(\xi-s)^{\beta-a}}, \quad \beta<\dfrac{1}{3}(m<4), \quad a>2\beta,\\ \dfrac{const}{\xi^a(\xi-s)^{\frac{1}{3}-a}}\left[(\xi-s)^\varepsilon(1-\xi)^{-\varepsilon}+1\right], \beta=\dfrac{1}{3}(m=4), a>\dfrac{2}{3}, 0<\varepsilon<1,\\ \dfrac{const}{\xi^a(\xi-s)^{4\beta-1-a}}, \quad \beta>\dfrac{1}{3}(m>4), \quad a>1-\beta.\end{cases} \tag{19}$$

Осуществляя замену переменной $s=1-(1-\xi)z$, используя формулу интегрального представления гипергеометрической функции [15]

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt,$$
$$Re c>Re a>0, \quad |arg(1-z)|<\pi, \tag{20}$$

после замены порядка интегрирования получим, что выражение $L\tau(\xi)$ представимо в виде (18), а функция $G(\xi,s)$ определяется формулой

$$G(\xi,s)=\frac{(1-\xi)^\beta}{(\beta-1)\Gamma(a)}\int\limits_s^\xi t^{-a-b}(\xi-t)^{-\beta}(1-t)^{-2\beta}(t-s)^{a-1}s^bF(2\beta,1;2-\beta;\frac{1-\xi}{1-t})\,dt. \tag{21}$$

Пусть

$$\beta<\frac{1}{3}(m<4), \quad b>0, \quad a>2\beta. \tag{22}$$

Тогда из равенства (21) после замены переменной $t=\xi-(\xi-s)z$ получим оценку

$$|G(\xi,s)|\le\frac{M_1}{(1-\beta)\Gamma(a)}\xi^{-a-b}(1-\xi)^{1-3\beta}(\xi-s)^{a-\beta}\times$$

$$\times \int_0^1 z^{-\beta}(1-z)^{a-1}\left(1-\frac{\xi-s}{\xi}z\right)^{-a-b}\left(1-\frac{s-\xi}{1-\xi}z\right)^{-2\beta}dz =$$

$$= \frac{M_1\Gamma(1-\beta)}{(1-\beta)\Gamma(a+1-\beta)}\xi^{-a-b}(1-\xi)^{1-3\beta}(\xi-s)^{a-\beta}\times$$

$$\times F_1(1-\beta, a+b, 2\beta; a+1-\beta; \frac{\xi-s}{\xi}; \frac{s-\xi}{1-\xi}),$$

где

$$M_1 = \sup_{0\le\xi\le1} F(2\beta, 1; 2-\beta; \frac{1-\xi}{1-t}),$$

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m m!}x^m F(\alpha+m,\beta';\gamma+m;y)$$

– гипергеометрический ряд Аппеля [15].

В силу условий (22), свойств функции Аппеля и формулы автотрансформации для гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z), \quad |arg(1-z)| < \pi, \tag{23}$$

получаем окончательную оценку

$$|G(\xi,s)| \le \frac{const\cdot(1-\xi)^{1-3\beta}}{\xi^a(\xi-s)^{\beta-a}},$$

где $const$ зависит только от β, a и b.

Пусть теперь $\frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2}(m>4)$, $b>0$, $a>1-\beta$.

На основании формулы (23) можно записать

$$F(2\beta,1;2-\beta;\frac{1-\xi}{1-t}) = \left(\frac{\xi-t}{1-t}\right)^{1-3\beta}F(2-3\beta,1-\beta;2-\beta;\frac{1-\xi}{1-t}).$$

Пусть $M_2 = \sup\limits_{0\le\xi\le1} F(2-3\beta,1-\beta;2-\beta;\frac{1-\xi}{1-t})$.

Поступая далее совершенно аналогично случаю $\beta < \frac{1}{3}$, нетрудно убедиться в справедливости оценки для $G(\xi,s)$.

Рассмотрим оставшийся случай, когда $\beta = \frac{1}{3}(m=4)$.

Воспользовавшись известной формулой (см., например, [15], [16])

$$F(a_1,b_1;a_1+b_1;z) = \frac{\Gamma(a_1+b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)}F(a_1,b_1;1;1-z)\ln\frac{1}{1-z} + 0(1) =$$

$$= -\frac{1}{B(a_1,b_1)}\ln(1-z)\left[1+0\left(\frac{1}{\ln(1-z)}\right)\right],$$

где $|arg(1-z)| < \pi$, $z\to1$, $a_1,b_1 \ne 0,1,2,\cdots$, $0(1)$ – ограниченная в $\overline{I}\times\overline{I}$ величина, будем иметь

$$F(\frac{2}{3},1;\frac{5}{3};\frac{1-\xi}{1-t}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{-\frac{2}{3}}\ln\frac{1-t}{\xi-t} + 0(1). \tag{24}$$

Так как в окрестности $z=0$ справедливо неравенство

$$|\ln z| < z^{-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1, \tag{25}$$

то, опираясь на формулу (21), с учетом соотношений (24), (25) и формулы (23) при $b>0$ и $a>\frac{2}{3}$ убеждаемся в справедливости оценки (19) для функции $G(\xi,s)$ при $\beta=\frac{1}{3}$.

Вернемся к правой части $g(\xi)$ уравнения (16), определяемой формулой (17). Поскольку по условиям теоремы 1 $f(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^3(\Omega)$ и выполняются соотношения (7)–(8), то можно утверждать, что $g(\xi)\in C(\overline{I})\cap C^2(I)$.

Принимая во внимание представление (18) и оценку (19) для функции $G(\xi,s)$, заключаем, что уравнение (16) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре, которое однозначно и безусловно разрешимо в пространстве $C(\overline{I})$ и его решение $\tau(\xi)\in C^2(I)$. Теорема 1 доказана.

Задача Дарбу. Определить в области Ω решение уравнения (3) из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup I)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=v(x), \quad x\in I; \quad u|_{AC}=\varphi(\eta), \quad \eta\in\overline{I}. \tag{26}$$

Будем предполагать, что

$$f(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^3(\Omega), \quad \varphi(\eta)\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I), \quad D_{0x}^{2\beta-1}v(x)\in C(\overline{I})\cap C^2(I), \tag{27}$$

где $D_{0x}^{2\beta-1}f$ – оператор дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля [13].

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняются условия $m>0$, $a>4\beta-2$, $b>0$. Тогда задача Дарбу всегда разрешима и притом единственным образом.*

Доказательство. Уравнение (3) в координатах (ξ,η) принимает вид (11), а краевые условия (26) перепишем следующим образом:

$$\Big[(\eta-\xi)^{2\beta}(V_\eta-V_\xi)\Big]_{\eta=\xi}=-\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}v(\xi), \quad \xi\in I, \tag{28}$$

$$V|_{\xi=0}=\varphi(\eta), \quad \eta\in\overline{I}. \tag{29}$$

Пусть существует решение $V(\xi,\eta)$ задачи Дарбу (28), (29) для интегро-дифференциального уравнения (11) в области $\Delta=\{(\xi,\eta):0<\xi<\eta<1\}$, являющейся образом области Ω при преобразованиях (1).

Тогда оно удовлетворяет уравнению

$$V(\xi,\eta)+\gamma_0\mu\int\limits_0^\xi d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^\eta \frac{E_{0+}^{a,b}(\tau)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\eta_1=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\int\limits_0^\xi v(\xi_1)\left[(\xi-\xi_1)(\eta-\xi_1)\right]^{-\beta}d\xi_1+$$

$$+\int\limits_0^\eta\left[\varphi^{'}(\eta_1)+\beta\frac{\varphi(\eta_1)}{\eta_1}\right]H(0,\eta_1;\xi,\eta)\,d\eta_1+\gamma_0\int\limits_0^\xi d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^\eta\frac{F(\xi_1,\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\eta_1,$$

где $H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$ – функция Грина-Адамара (по терминологии Геллерстедта) или Римана-Адамара задачи (28), (29) для оператора EV, определяемая формулой [17]

$$H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=\left\{\begin{array}{l}(\eta_1-\xi_1)^{\beta}(\eta-\xi)^{-\beta}F(\beta,1-\beta;1;\sigma),\quad \eta_1\geq\xi,\\ \gamma(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}(\xi-\xi_1)^{-\beta}(\eta-\eta_1)^{-\beta}F(\beta,\beta;2\beta;\frac{1}{\sigma}),\quad \eta_1\leq\xi,\end{array}\right.$$

$$\sigma=\frac{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)(\eta-\xi)},\quad \gamma=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}.$$

Переходя к пределу при $\eta\to\xi$, $0<\xi<1$, и принимая во внимание, что $V(\xi,\xi)=\tau(\xi)$, будем иметь

$$\tau(\xi)+\gamma_1\int\limits_0^{\xi}\frac{(E_{0+}^{a,b}\tau)}{(\xi-\xi_1)^{4\beta-1}}\,d\xi_1=\Psi(\xi), \tag{30}$$

где

$$\gamma_1=\gamma_0\mu\gamma B(1-2\beta,1-\beta),$$

$$\Psi(\xi)=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\int\limits_0^{\xi}v(\xi_1)(\xi-\xi_1)^{-2\beta}\,d\xi_1+$$

$$+\gamma_0\gamma\int\limits_0^{\xi}(\xi-\xi_1)^{-\beta}\,d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^{\xi}F(\xi_1,\eta_1)(\eta_1-\xi_1)^{-2\beta}(\xi-\eta_1)^{-\beta}\,d\eta_1+$$

$$+\gamma\xi^{-\beta}\int\limits_0^{\xi}\left[\varphi'(\eta_1)+\beta\frac{\varphi(\eta_1)}{\eta_1}\right](\xi-\eta_1)^{-\beta}\eta_1^{2\beta}\,d\eta_1.$$

В силу условий (27) функция

$$\Psi(\xi)\in C(\overline{I})\cap C^2(I).$$

Рассмотрим оператор

$$(T\tau)(x)=\gamma_1\int\limits_0^{x}(x-t)^{1-4\beta}E_{0+}^{a,b}\tau(s)\,dt.$$

На основании формулы (4) имеем

$$(T\tau)(x)=\frac{\gamma_1}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{x}(x-t)^{1-4\beta}t^{-a-b}\,dt\int\limits_0^{s}s^b(t-s)^{a-1}\tau(s)\,ds.$$

Применяя формулу перестановки Дирихле и соотношение (19), после стандартных вычислений получим

$$(T\tau)(x)=\gamma_1\frac{\Gamma(2-4\beta)}{\Gamma(a+2-4\beta)}\int\limits_0^{x}\tau(s)K(x,s)\,ds,$$

где

$$K(x,s)=x^{-a-b}s^b(x-s)^{a+1-4\beta}F(a+b,2-4\beta;a+2-4\beta;\frac{x-s}{x}).$$

Так как $b > 0$, то формула (23) дает нам право записать $K(x, s)$ в виде:

$$K(x,s) = x^{-a}(x-s)^{a+1-4\beta}F(2-4\beta-b, a; a+2-4\beta; \frac{x-s}{x}).$$

Таким образом, в силу условий теоремы 2 заключаем, что оператор $(T\tau)(x)$ является оператором Вольтерра в пространстве $C(\overline{I})$ функций $\tau(x)$ с нормой $||\tau(x)|| = \max\limits_{x\in\overline{I}} \tau(x)$.

Следовательно, уравнение (30) имеет единственное решение $\tau(x) \in C(\overline{I})$ и его можно найти методом последовательных приближений. Можно также показать, что $\tau(x) \in C^2(I)$.

Итак, задача Дарбу эквивалентно редуцируется к задаче Коши

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}, \quad u_y(x,0) = v(x), \quad x \in I,$$

для уравнения

$$L(u) = f(x,y) + \mu\left(E^{a,b}_{0+}\tau\right)(x).$$

Как известно [14], функция Римана позволяет в квадратурах выписать решение этой задачи

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](t-t^2)^{\beta-1}\,dt +$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int\limits_0^1 v\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](t-t^2)^{-\beta}\,dt +$$

$$+\gamma_0\int\limits_\xi^\eta d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^{\eta_1}\frac{R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}\left[\mu E^{a,b}_{0+}(\tau) + F(\xi_1,\eta_1)\right]\,d\eta_1.$$

Авторы глубоко благодарны рецензенту за ценные замечания и полезные советы.

Цитированная литература

[1]. Будак В. М., Искендеров А. Д. *Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами*, Докл. АН СССР, 1967, Т. 176, № 1, С. 20 – 23.

[2]. Нахушев А. М. *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка*, Дифференц. уравнения, 1976, Т. 12, № 1, С. 103 – 108.

[3]. Шхануков М. Х. *Разностный метод решения одного нагруженного уравнения параболического типа*, Дифференц. уравнения, 1977, Т. 13, № 1, С. 163 – 167.

[4]. Казиев В. М. *Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения, 1981, Т. 17, № 2, С. 313 – 319.

[5]. Krall A. M. *The development of general differetial and general differential boundary systems*, Rocky Mountains I.Math., 1975, V. 5, № 4, P. 493 – 542.

[6]. Ломов И. С. *Свойства базистности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале*, Дифференц. уравнения, 1991, Т. 27, № 1, С. 80 – 93.

[7]. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их приложения*, Дифференц. уравнения, 1983, Т. 19, № 1, С. 86 – 94.

[8]. Дженалиев М. Т. *К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений*, Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.

[9]. Вирченко Н. А., Репин О. А. *О задаче Дарбу для нагруженного уравнения Геллерстедта*, Докл. НАН Украины, 1996, № 7, С. 21 – 25.

[10]. Репин О. А. *О задаче Гурса для нагруженного уравнения Геллерстедта*, Труды второго межд. семинара "Дифференциальные уравнения и их приложения", Самара, 1998, С. 133 – 139.

[11]. Saigo M. A. *A certain boundary value problem for the Euler–Poisson–Darboux equation*, Math. Japan, 1979, V. 24, № 4, С. 377 – 385.

[12]. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск, "Наука и техника", 1987.

[13]. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*, М.: "Высш. шк.", 1995.

[14]. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*, М., "Наука", 1981.

[15]. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т.1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра*, М., "Наука", 1973.

[16]. Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А. *Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами*, Самара, Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2008.

[17]. Gellerstedt S. *Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte*, Arciv Mat., Astr. och. fisik, 1937, 25A, P. 1 – 23.

Статья поступила в редакцию 25.03.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 73 — 85*

УДК 517.51

BOUNDEDNESS AND COMPACTNESS CRITERIA OF A CERTAIN CLASS OF MATRIX OPERATORS

Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova

The L.N. Gumilyov Eurasian National University
010008, Astana, Munaitpasov st., 5, e-mail: zhanara.t.a@gmail.com, ainura-t@yandex.ru

Necessary and sufficient conditions for the boundedness and the compactness of matrix operator $(Af)_j := \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i, \ \ a_{i,j} \geq 0$ from weighted space $l_{p,v}$ into weighted space $l_{q,u}$, in the case $1 < p \leq q < \infty$ are obtained.

1. Introduction

Let $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ be sequences of positive real numbers, which in the sequel we shall call weight sequences. Let $l_{p,v}$ denote the space of sequences $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ of real numbers such that

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Moreover, let $(a_{i,j})$ be a non-negative triangular matrix with entries $a_{i,j} \geq 0$ for $i \geq j \geq 1$ and $a_{i,j} = 0$ for $i < j$.

We consider the estimate of the following form

$$\|Af\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p,v}, \qquad \forall f \in l_{p,v}, \tag{1}$$

with a positive finite constant C independent of f; here the matrix operator A is defined by

$$(Af)_i := \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j, \qquad i \geq 1, \tag{2}$$

or

$$(Af)_j := \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i, \qquad j \geq 1. \tag{3}$$

Keywords: *Inequalities, discrete Hardy-type inequalities, weights, matrix operators*
2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 47B37

When one of parameters p or q is equal to 1 or ∞, necessary and sufficient conditions of the validity (1) with the exact value of the best constant $C > 0$ were obtained in [1]. When $1 < p, q < \infty$, general estimates of the type (1) are not established yet. Estimates of the type (1) are studied under some assumptions on entries of the matrix.

When $a_{i,j} = 1$, $i \geq j \geq 1$, operators (2), (3) coincide with the discrete Hardy operators of the forms $(A_0 f)_i := \sum\limits_{j=1}^{i} f_j$, $(A_0 f)_j := \sum\limits_{i=j}^{\infty} f_i$, respectively, and information about generalization of the original forms of the discrete and continuous Hardy inequalities can be found in a member of books, see e.g. [2].

In [3], [4] necessary and sufficient conditions for the validity (1) were obtained for $1 < p, q < \infty$ under the following assumption: there exists $d \geq 1$ such that the inequalities

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + a_{k,j}) \leq a_{i,j} \leq d(a_{i,k} + a_{k,j}), \qquad i \geq k \geq j \geq 1 \tag{4}$$

hold.

A sequence $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ is called almost non-decreasing (non-increasing), if there exists $c > 0$ such that $ca_i \geq a_k$ $(a_k \leq ca_j)$ for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

In [5] estimate (1) was studied under the assumption that there exist $d \geq 1$, a sequence of positive numbers $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ and a non-negative matrix $(b_{i,j})$, whose entries $b_{i,j}$ are almost non-decreasing in i and almost non-increasing in j such that

$$\frac{1}{d}(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}) \leq a_{i,j} \leq d(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}), \tag{5}$$

for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

In this paper we consider inequality (1) under the following assumption:

Assumption A. *There exist $d \geq 1$, a sequence of positive numbers $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ and a non-negative matrix $(b_{i,j})$, where $b_{i,j}$ is almost non-decreasing in i and almost non-increasing in j such that the inequalities*

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i) \leq a_{i,j} \leq d(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i), \tag{6}$$

hold for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

Let $a_{i,j} = (b_i - d_j)^{\alpha}$, $\alpha > 0$, if $i \geq j \geq 1$, where the sequences $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ such that $b_i \geq d_j$, if $i \geq j \geq 1$. If, in addition, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a non-decreasing sequence, then the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy condition (5). That means $a_{i,j} \approx (b_i - b_k)^{\alpha} + a_{k,j}$, $i \geq k \geq j \geq 1$. But in general, the entries $a_{i,j}$ do not satisfy condition (6). If $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a non-decreasing sequence and $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ is an arbitrary sequence, then the entries $a_{i,j}$ satisfy the condition (6), but in general, for the entries of the matrix $(a_{i,j})$ the condition (5) does not hold.

Thus, conditions (5), (6) include the condition (4) and complement each other.

We also note that from (6) it easily follows that

$$da_{i,j} \geq a_{i,k}, \tag{7}$$

$$da_{i,j} \geq b_{k,j}\omega_i, \tag{8}$$

for $i \geq k \geq j \geq 1$.

A continuous analogue of (5)-(6) was considered by R.Oinarov in [6].

Convention: The symbol $M \ll K$ means that $M \leq cK$, where C is positive and depends only on unessential parameters. If $M \ll K \ll M$, then we write $M \approx K$.

For the proof of our main theorem we will need the following well-known result for the discrete weighted Hardy inequality (see [2], [7]) and the criteria of precompactness of sets in l_p(see [8], p.32). For better presentation let us state these results here:

Theorem A. *Let $1 < p \leq q < \infty$. Then the inequality*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty}\omega_i f_i\right)^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 \leq f \in l_{p,v}, \tag{9}$$

holds if and only if

$$H_1 := \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Moreover, $H_1 \approx C$, where C is the best constant in (9).

Theorem B. *Let T be a set from l_p, $1 \leq p < \infty$. The set T is compact if and only if T is bounded and for all $\varepsilon > 0$ there exists $N = N(\varepsilon)$ such that for all $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in T$ the inequality*

$$\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p < \varepsilon$$

holds.

2. Main results

2.1. Boundedness of the matrix operators

Theorem 1. *Let $1 < p \leq q < \infty$ and the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy Assumption A. Then estimate (1) for the operator defined by (3) holds if and only if $B = \max\{B_1,\ B_2\} < \infty$, where*

$$B_1 = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

and

$$B_2 = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k} b_{k,j}^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Moreover, $B \approx C$, where C is the best constant in (1).

Proof. Necessity. Let us assume that (1) holds for a finite constant C. Let $1 \leq r < K < \infty$ and take a test sequence $\widetilde{f} = \{\widetilde{f}_s\}_{s=1}^{\infty}$ such that $\widetilde{f}_s = \omega_s^{p'-1} v_s^{-p'}$ for $r \leq s \leq K$ and $\widetilde{f}_s = 0$ for $s < r$ or $s > K$.

Applying to the test sequence the right hand side of (1), we have

$$\|\widetilde{f}\|_{p,v} = \left(\sum_{s=1}^{\infty}|v_s\widetilde{f}_s|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=r}^{K}\omega_s^{p'} v_s^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

On the other hand, substituting $\widetilde{f}$ in the left hand side of inequality (1) and using (8) we have

$$\|A\widetilde{f}\|_{q,u} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=j}^{\infty} a_{s,j}\widetilde{f}_s\right)^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \tag{11}$$

$$\geq \left(\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{s=r}^{K} a_{s,j}\omega_s^{p'-1}v_s^{-p'}\right)^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{d}\left(\sum_{j=1}^{r} b_{r,j}^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{s=r}^{K}\omega_s^{p'}v_s^{-p'}\right).$$

From (1), (10) and (11) it follows that

$$\left(\sum_{j=1}^{r} b_{r,j}^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{s=r}^{K}\omega_s^{p'}v_s^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \ll C$$

for all $r \geq 1$. Since $r \geq 1$ is arbitrary, passing to the limit as $K \to \infty$ we obtain

$$B_2 \ll C. \tag{12}$$

Now for $1 \leq r < M < \infty$ we assume that $\widehat{f} = \{\widehat{f}_s\}_{s=1}^{\infty}$, where $\widehat{f}_s = a_{s,r}^{p'-1}v_s^{-p'}$ for $r \leq s \leq M$, and $\widehat{f}_s = 0$ for $s < r$ or $s > M$. Substituting $\widehat{f}$ in the left hand side of inequality (1) and using (7) we find that

$$\|A\widehat{f}\|_{q,u} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=j}^{\infty} a_{s,j}\widehat{f}_s\right)^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \gg \left(\sum_{j=1}^{r} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{s=r}^{M} a_{s,r}^{p'}v_s^{-p'}\right). \tag{13}$$

For the right hand side of (1) it yields that

$$\|\widehat{f}\|_{p,v} = \left(\sum_{s=1}^{\infty}|v_s\widehat{f}_s|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{s=r}^{M} a_{s,r}^{p'}v_s^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

According to (1), (13), (14) and since $r \geq 1$ is arbitrary, passing to the limit as $M \to \infty$ we have $B_1 \ll C$, which together with (12) gives that

$$B = \max\{B_1,\ B_2\} \ll C. \tag{15}$$

The proof of the necessity is complete.
Sufficiency. Let $B < \infty$ and $0 \leq f \in l_{p,v}$.

For all $j \geq 1$ we define the following set:

$$T_j = \{k \in \mathbb{Z} : (d+1)^{-k} \leq (Af)_j\},$$

where d is the constant from (6) and $\mathbb{Z}$ is the set of integers. We assume that $\inf T_j = \infty$, if $T_j = \emptyset$ and $k_j = \inf T_j$, if $T_j \neq \emptyset$. For the avoidance of the trivial case we suppose that $(Af)_1 \neq 0$. Without loss of generality we may assume that $a_{i,j}$ is non-increasing in j, otherwise we take $a_{i,j} \approx \widetilde{a}_{i,j} = \sup\limits_{j \leq k \leq i} a_{i,k}$. Therefore $k_j < k_{j+1}$. If $k_j < \infty$, then

$$(d+1)^{-k_j} \leq (Af)_j < (d+1)^{-(k_j-1)}, \qquad j \geq 1. \tag{16}$$

Let $m_1 = 0$, $k_1 = k_{m_1+1}$ and $M_1 = \{j \in \mathbb{N} : k_j = k_1 = k_{m_1+1}\}$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers. Suppose that m_2 is such that $\sup M_1 = m_2$. Obviously $m_2 > m_1$ and if the set M_1 is upper bounded, then $m_2 < \infty$ and $m_2 = \max M_1$. Let us inductively define numbers $0 = m_1 < m_2 < \ldots < m_s < \infty$, $s \geq 1$. To define m_{s+1} we assume that $m_{s+1} = \sup M_s$, where $M_s = \{j \in \mathbb{N} : k_j = k_{m_s+1}\}$.

Let $N_0 = \{s \in \mathbb{N} : m_s < \infty\}$. Further, we assume that $k_{m_{s+1}} = n_{s+1},\ s \in N_0$. From the definition of m_s and from (16) it follows that, for $s \in N_0$,

$$(d+1)^{-n_{s+1}} \leq (Af)_j < (d+1)^{-n_{s+1}+1}, \quad m_s + 1 \leq j \leq m_{s+1}, \tag{17}$$

and

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s \in N_0} [m_s + 1, m_{s+1}), \quad \text{where } [m_s + 1, m_{s+1}) \cap [m_l + 1, m_{l+1}) = \emptyset,\ s \neq l.$$

Therefore

$$\|Af\|_{q,u}^q = \sum_{s \in N_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (Af)_j^q\, u_j^q. \tag{18}$$

We assume that $\sum\limits_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} = 0$, if $m_s = \infty$.

There are two possible cases: $N_0 = \mathbb{N}$ and $N_0 \neq \mathbb{N}$.

1. If $N_0 = \mathbb{N}$, then we estimate the left hand side of (1) in the following way:

At first, for $s \in \mathbb{N}$, by using (17), (6) and the inequality $-n_{s+3} + 1 \leq -n_{s+1} - 1$, which follows from $n_{s+1} < n_{s+2} < n_{s+3}$, we can estimate the value $(d+1)^{-n_{s+1}-1}$ as follows:

$$(d+1)^{-n_{s+1}-1} = (d+1)^{-n_{s+1}} - d(d+1)^{-n_{s+1}-1} \leq \tag{19}$$

$$\leq (d+1)^{-n_{s+1}} - d(d+1)^{-n_{s+3}+1} < (Af)_{m_{s+1}} - d\,(Af)_{m_{s+3}} =$$

$$= \sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}} f_i - d \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a_{i,m_{s+3}} f_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} [a_{i,m_{s+1}} - d a_{i,m_{s+3}}] f_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} [d(a_{i,m_{s+3}} + b_{m_{s+3},m_{s+1}}\omega_i) - d a_{i,m_{s+3}}] f_i =$$

$$= \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + d b_{m_{s+3},m_{s+1}} \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i.$$

Now by using (17) and (19), we can estimate the sum on the left hand side in (1) in the following way:

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (Af)_j^q\, u_j^q < \sum_{s \in \mathbb{N}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (d+1)^{(-n_{s+1}+1)q} u_j^q \tag{20}$$

$$= (d+1)^{2q} \sum_{s \in \mathbb{N}} (d+1)^{(-n_{s+1}-1)q} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$

$$\ll \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + d b_{m_{s+3},m_{s+1}} \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q$$

$$\times \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \ll \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$

$$+ \sum_{s\in\mathbb{N}} b^q_{m_{s+3},m_{s+1}} \left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q := S_1 + S_2,$$

where

$$S_1 = \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$

and

$$S_2 = \sum_{s\in\mathbb{N}} b^q_{m_{s+3},m_{s+1}} \left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q.$$

To estimate S_1 we apply Hölder's and Jensen's inequalities and find that

$$S_1 \le \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a^{p'}_{i,m_{s+1}} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |f_i v_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \tag{21}$$

$$\le \left[\sup_{k\ge1} \left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a^{p'}_{i,k} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^q \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |f_i v_i|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\le B_1^q \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |f_i v_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \ll B_1^q \|f\|^q_{p,v}.$$

We introduce the sequence $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ such that $\Delta_j = b^q_{m_{s+3},m_{s+1}} \sum\limits_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} u_i^q$, $j = m_{s+3}$ and $\Delta_j = 0$, $j \ne m_{s+3}$, $s \in \mathbb{N}$. Hence, we can rewrite S_2 in the following form:

$$S_2 = \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q b^q_{m_{s+3},m_{s+1}} \sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} u_i^q = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \Delta_j. \tag{22}$$

Thus, by Theorem A, we have

$$S_2 \ll \widetilde{H}_1^q \|f\|^q_{p,v}, \tag{23}$$

where

$$\widetilde{H}_1 = \sup_{k\ge1} \left(\sum_{j=1}^{k} \Delta_j \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{24}$$

Since, by Assumption A, $b_{i,j}$ is almost non-decreasing in i and almost non-increasing in j, we find that

$$\sum_{j=1}^{k}\Delta_j=\sum_{m_{s+3}\le k} b^q_{m_{s+3},m_{s+1}}\sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} u_i^q \ll \tag{25}$$

$$\ll \sum_{m_{s+3}\le k}\sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} b^q_{k,i}u_i^q \le \sum_{i=1}^{k} b^q_{k,i}u_i^q.$$

By combining (23), (24) and (25), we obtain that

$$S_2\ll B_2^q\|f\|^q_{p,v}. \tag{26}$$

Thus, from (20), (21) and (26) it follows that

$$\|Af\|_{q,u}\ll B\|f\|_{p,v}, \qquad f\ge 0, \tag{27}$$

i.e inequality (1) is valid and we see that the best constant in (1) $C\ll B$.

2. Let now $N_0\ne\mathbb{N}$, i.e. $\max N_0<\infty$ and $N_0=\{1,2,...,s_0\}$, $s_0\ge 1$. Therefore, $m_{s_0}<\infty$ and $m_{s_0+1}=\infty$. We assume that $\sum\limits_{s=k}^{n}=0$, if $k>n$ and $\sum\limits_{s=k}^{n}=\sum\limits_{s=1}^{n}$, if $k\le 0$. We have two possible cases: $n_{s_0+1}<\infty$ and $n_{s_0+1}=\infty$. We consider these cases separately:

1) If $n_{s_0+1}<\infty$, then from (18) it follows that

$$\|Af\|^q_{q,u}=\sum_{s\in N_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}(Af)_j^q\,u_j^q=\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}(Af)_j^q\,u_j^q= \tag{28}$$

$$=\sum_{s=1}^{s_0-3}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}(Af)_j^q\,u_j^q+\sum_{s=s_0-2}^{s_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}(Af)_j^q\,u_j^q=I_1+I_2.$$

If $I_1\ne 0$ then we estimate I_1 using (19) and the previous proof for the case $N_0=N$. Hence we get

$$I_1\ll B^q\|f\|^q_{p,v}. \tag{29}$$

By using (17) and applying Hölder's and Jensen's inequalities, we obtain the following estimate

$$I_2=\sum_{s=s_0-2}^{s_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}(Af)_j^q\,u_j^q<\sum_{s=s_0-2}^{s_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}(d+1)^{(-n_{s+1}+1)q}u_j^q= \tag{30}$$

$$=(d+1)^q\sum_{s=s_0-2}^{s_0}(d+1)^{-n_{s+1}q}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}u_j^q\ll\sum_{s=s_0-2}^{s_0}(Af)^q_{m_{s+1}}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}u_j^q$$

$$=\sum_{s=s_0-2}^{s_0}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty}a_{i,m_{s+1}}f_i\right)^q\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}u_j^q\le$$

$$\le\sum_{s=s_0-2}^{s_0}\left[\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty}a^{p'}_{i,m_{s+1}}v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q\left(\sum_{j=m_{s+1}}^{\infty}|v_if_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \left[\sup_{k\geq 1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^q \left(\sum_{s=s_0-2}^{s_0} \sum_{j=m_{s+1}}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\ll B_1^q \|f\|_{p,v}^q.$$

From (28), (29) and (30) we have (27).

2) If $n_{s_0+1} = \infty$, which means that $k_{m_{s_0}+1} = \infty$, then we have $k_j = \infty$ and $T_j = \emptyset$ for $j \geq m_{s_0}+1$, i.e. $(Af)_j = 0$, if $j \geq m_{s_0+1}$ and $(Af)_j = \sum\limits_{i=j}^{m_{s_0}} a_{i,j} f_i$, $1 \leq j \leq m_{s_0}$. Therefore, $m_2 < \infty$ and $s_0 \geq 2$. Then from (18) we have

$$\|Af\|_{q,u}^q = \sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (Af)_j^q u_j^q = \sum_{s=1}^{s_0-1} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (Af)_j^q u_j^q. \tag{31}$$

In the similar way from (31) we obtain (27), which together with (15) gives $C \approx B$.
The proof is complete.

Inequality (1) holds if and only if the following dual inequality

$$\|A^* g\|_{p',v^{-1}} \leq C \|g\|_{q',u^{-1}}, \qquad g \in l_{q',u^{-1}}, \tag{32}$$

holds for the conjugate operator A^*, which coincides with operator defined by (2). Moreover, the best constants in (1) and (32) coincide.

Therefore by using Theorem 1 with p', q', v^{-1} and u^{-1} replaced by q, p, u and v, respectively, we obtain the following dual version of Theorem 1:

Theorem 2. *Let $1 < p \leq q < \infty$ and the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy Assumption A. Then the estimate (1) for the operator defined by (2) holds if and only if $B^* = \max\{B_1^*,\ B_2^*\} < \infty$, where*

$$B_1^* = \sup_{n\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

and

$$B_2^* = \sup_{n\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{n,j}^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \omega_i^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Moreover $B^* \approx C$, where C is the best constant in (1).

2.2. Compactness of the matrix operators

Now we state our compactness result for the operator (2) acting from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$.

Theorem 3. *Let $1 < p \leq q < \infty$ and the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy Assumption A. Then the operator defined by (2) is compact from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$ if and only if*

$$\lim_{r\to\infty} (B_1^*)_r = 0, \tag{33}$$

$$\lim_{r\to\infty} (B_2^*)_r = 0, \tag{34}$$

where

$$(B_1^*)_r = \left(\sum_{j=1}^{r} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=r}^{\infty} a_{i,r}^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(B_2^*)_r = \left(\sum_{j=1}^{r} b_{r,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=r}^{\infty} \omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof. Necessity. Let the operator (2) be compact from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$. For all $r \geq 1$ we introduce the following sequence:

$$g_r = \{g_{r,j}\}_{j=1}^{\infty}: \quad g_{r,j} = \frac{f_{r,j}}{\|f_r\|_{p,v}},$$

where $f_r = \{f_{r,j}\}_{j=1}^{\infty}$: $\quad f_{r,j} = \begin{cases} v_j^{-p'}, & 1 \leq j \leq r, \\ 0, & j > r. \end{cases}$

It is obvious that $\|g_r\|_{p,v} = 1$. Since the operator (2) is compact from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$, it yields that the set $\{uAg, \|g\|_{p,v} = 1\}$ is precompact in l_q. Hence from criteria on precompactness of the sets in l_p (see Theorem B) we conclude that

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\|g\|_{p,v}=1} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q (Ag)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{35}$$

Moreover, by using (7) we have that

$$\sup_{\|g\|_{p,v}=1} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q (Ag)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q (Ag_r)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \tag{36}$$

$$= \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \frac{f_{r,j}}{\|f_r\|_{p,v}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{r} a_{i,j} \frac{f_{r,j}}{\|f_r\|_{p,v}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{d} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{r} a_{i,r} v_j^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{r} v_j^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{d} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q a_{i,r}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{r} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \frac{1}{d}(B_1^*)_r.$$

Obviously, (33) follows from (35) and (36).

To prove (34) for all $r \geq 1$ we introduce the following sequence

$$\widetilde{g}_r = \{\widetilde{g}_{r,j}\}_{j=1}^{\infty}: \quad \widetilde{g}_{r,j} = \frac{\widetilde{f}_{r,j}}{\|\widetilde{f}_r\|_{p,v}},$$

where $\widetilde{f}_r = \{\widetilde{f}_{r,j}\}_{j=1}^{\infty}$: $\quad \widetilde{f}_{r,j} = \begin{cases} b_{r,j}^{p'-1} v_j^{-p'}, & 1 \leq j \leq r, \\ 0, & j > r. \end{cases}$

Using (8) in (35) we find that

$$\sup_{\|g\|_{p,v}=1}\left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q\,(Ag)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}\frac{\widetilde{f}_{r,j}}{\|\widetilde{f}_r\|_{p,v}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \tag{37}$$

$$\geq \left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=1}^{r}a_{i,j}\frac{\widetilde{f}_{r,j}}{\|\widetilde{f}_r\|_{p,v}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{d}\left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=1}^{r}b_{r,j}\omega_i\widetilde{f}_{r,j}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{r}b_{r,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\sum_{i=r}^{\infty}\omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{r}b_{r,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \frac{1}{d}(B_2^*)_r.$$

According to (35) and (37) we obtain (34) and the proof of necessity is complete.

Sufficiency. Assume that (33) and (34) hold. Then, by Theorem 2, the operator (2) is bounded from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$. Consequently, the set $\{uAf,\ \|f\|_{p,v} \leq 1\}$ is bounded in l_q. Let us show that this set is precompact in l_q. By the criterion of precompactness of the sets in l_q (see Theorem B), the bounded set $\{uAf,\ \|f\|_{p,v} \leq 1\}$ is compact in l_q, if

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\|f\|_{p,v}\leq 1}\left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q|\,(Af)_i\,|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{38}$$

For all $r > 1$ we assume that $\widetilde{u} = \{\widetilde{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$: $\quad \widetilde{u}_i = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq r-1, \\ u_i, & r \leq i. \end{cases}$.

Then, by Theorem 2 we have that

$$\sup_{\|f\|_{p,v}\leq 1}\left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q|\,(Af)_i\,|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\|f\|_{p,v}\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{u}_i^q|(Af)_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \ll \widetilde{B}^*(r), \tag{39}$$

where

$$\widetilde{B}^*(r) = \max\{\widetilde{B_1}^*(r), \widetilde{B_2}^*(r)\},$$

$$\widetilde{B_1}^*(r) = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{n}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}a_{i,n}^q\widetilde{u}_j^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\widetilde{B_2}^*(r) = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{n,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\omega_i^q\widetilde{u}_j^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Since $\widetilde{u}_i = 0$ when $1 \leq i \leq r-1$ we have

$$\widetilde{B_1}(r)^* = \sup_{n\geq r}\left(\sum_{j=1}^{n}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}a_{i,n}^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{n\geq r}\,(B_1^*)_n\,, \tag{40}$$

$$\widetilde{B_2}^*(r) = \sup_{n\geq r}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{n,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{n\geq r}\left(B_2^*\right)_n. \tag{41}$$

From (33), (34), (40) and (41) we find that

$$\lim_{r\to\infty}\widetilde{B_1}^*(r) = \lim_{r\to\infty}\sup_{n\geq r}\left(B_1^*\right)_n = \lim_{r\to\infty}\left(B_1^*\right)_r = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\widetilde{B_2^*}(r) = \lim_{r\to\infty}\sup_{n\geq r}\left(B_2^*\right)_n = \lim_{r\to\infty}\left(B_2^*\right)_r = 0.$$

Hence, by using (39) we obtain (38) and the proof is complete.

Since the compactness of the operator (2) from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$ is equivalent to the compactness of the operator (3) from $l_{q',u^{-1}}$ into $l_{p',v^{-1}}$, then if we replace q' by p, p' by q, u^{-1} by v, and v^{-1} by u from Theorem 3 we have the following statement of the compactness of the operator (3) from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$:

Theorem 4. *Let $1 < p \leq q < \infty$ and the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy Assumption A. Then operator (3) is compact from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$ if and only if*

$$\lim_{r\to\infty}\left(B_1\right)_r = 0, \tag{42}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(B_2\right)_r = 0, \tag{43}$$

where

$$\left(B_1\right)_r = \left(\sum_{j=1}^{r} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=r}^{\infty} a_{i,r}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\left(B_2\right)_r = \left(\sum_{j=1}^{r} b_{r,j}^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=r}^{\infty}\omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

3. Application of the main results

Our main results can be used to derive other inequalities. We consider an additive estimate of the form

$$\|Af\|_{q,u} \leq C\left(\|f\|_{p,v} + \|A_0 f\|_{p,\rho}\right), \qquad \forall f \geq 0, \tag{44}$$

where the matrix operator A is defined by (2) and the Hardy operator A_0 is defined by $(A_0 f)_i := \sum\limits_{j=1}^{i} f_j, \quad i \geq 1.$

We assume that the weight sequences v and ρ satisfy the following conditions

$$v_k > 0, k \geq 1, \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k < \infty.$$

We denote by $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ and for $n \geq 1$ we define

$$\varphi_n = \left\{ \min_{1\leq k\leq n} \left[\left(\sum_{i=k}^{n} v_i^{-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{i=k}^{\infty} \rho_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}^{-1}, \ \varphi_0 = 0.$$

In [9] the following statement was proved, in which the equivalence of three-weighted inequality (44) and inequality (1) was established:

Theorem C. *Let $1 < p, q < \infty$ and the entries of the matrix $(a_{k,i})$ of the operator A are non-negative and non-increasing in i, i.e. $a_{k,i+1} \leq a_{k,i}$, if $k \geq 1$, $i \geq 1$. Then inequality (44) holds if and only if the inequality*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^q \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \widetilde{C} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p \left(\varphi_k^{p'} - \varphi_{k-1}^{p'} \right)^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \geq 0, \tag{45}$$

holds. Moreover, $C \approx \widetilde{C}$, where C and $\widetilde{C}$ are the best constants in (44) and (45), respectively.

By Theorem C, we obtain the following statement:

Theorem 5. Let $1 < p \leq q < \infty$ and the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy Assumption A. Then inequality (44) holds if and only if $D = \max\{D_1, \ D_2\} < \infty$, where

$$D_1 = \sup_{k\geq 1} \varphi_k \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

and

$$D_2 = \sup_{k\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{k,j}^{p'} \Delta\varphi_j^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \omega_i^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Moreover $D \approx C$, where C is the best constant in (44).

Proof. We denote $\sup\limits_{j\leq k\leq i} a_{i,k} = \widetilde{a}_{i,j}$. Obviously

$$a_{i,j} \leq \widetilde{a}_{i,j}. \tag{46}$$

According to (7) we have

$$d a_{i,j} \geq \sup_{j\leq k\leq i} a_{i,k} = \widetilde{a}_{i,j}. \tag{47}$$

From (46) and (47) it follows that $a_{i,j} \approx \widetilde{a}_{i,j}$. We consider the following matrix operator $\left(\widetilde{A}f\right)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \widetilde{a}_{i,j} f_j$, $i \geq 1$, which is equivalent to the operator A, i.e. $(Af)_i \leq \left(\widetilde{A}f\right)_i \leq d\,(Af)_i$ or $(Af)_i \approx \left(\widetilde{A}f\right)_i$ for all $f \geq 0$, $i \geq 1$. Then inequality (44) is equivalent to

$$\|\widetilde{A}f\|_{q,u} \leq C_1 \left(\|f\|_{p,v} + \|A_0 f\|_{p,\rho} \right), \qquad \forall f \geq 0. \tag{48}$$

Moreover, $C \approx C_1$, where C and C_1 are the best constants in (44) and (48), respectively. It is easy to see that the entries of the matrix $(\widetilde{a}_{i,j})$ satisfy the condition $\widetilde{a}_{i,j} \geq \widetilde{a}_{i,k}$, $i \geq k \geq j \geq 1$. Then according to Theorem C inequality (48) holds if and only if the inequality

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=1}^{k} \widetilde{a}_{k,i} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p \left(\Delta\varphi_k^{p'} \right)^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \geq 0, \tag{49}$$

holds. Moreover, $C_1 \approx C_2$, where C_2 is the best constant in (49).

Since (48) is equivalent to inequality (44), (49) is equivalent to inequality (44). By Theorem 2, inequality (49) (and, thus, (48) and (44)) holds if and only if $D = \max\{D_1,\ D_2\} < \infty$.

The proof is complete.

Acknowledgement. *The authors thank Professor Ryskul Oinarov for discussion of the presented results and for generous pieces of advice, which have improved the final version of this paper.*

Цитированная литература

[1]. Stieglitz M., Tietz H., *Matrix transformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht,* Math. Z., 1977, V. 154, P. 1 – 16.

[2]. Kufner A., Maligranda L., Persson L-E., *The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results,* Vydavatelsky Servis Publishing House, Pilsen, 2007, 162 p.

[3]. Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E., *Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$,* Math. Inequal. Appl., 2007, V. 10, P. 843 – 861.

[4]. Oinarov R., Shalgynbaeva S.Kh., *Weighted additive estimate of a class of matrix operators,* Izvestiya NAN RK, 2004, V.1, P. 39 – 49.

[5]. Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M., *Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \leq q$,* Math. Inequal. Appl., 2009, V. 12, P. 891 – 903.

[6]. Ойнаров Р., *Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтерровского типа,* Сибирский математический журнал, 2007, Т. 48, N 5, С. 1103 – 1118.

[7]. Okpoti C.A., Persson L-E., Wedestig A., *Scales of weight characterizations for the discrete Hardy and Carleman type inequalities,* In: Proc. FSDONA 2004, Math. Inst. Acad. Sci. Chech Republic, 2005, P. 236 – 258.

[8]. Krein S.G., *Reference book Mathematical Library. Functional Analysis,* Nauka, 1972.

[9]. Oinarov R., *A dual inequality of the additive estimate of matrix operator,* Proc. Intern.Conf. Achievement and development of mathematics in framework of program – Kazakhstan in third millenium, 2000, P. 111 – 115.

Received: June 19, 2011.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 2 (40) . С. 86 – 94*

УДК 517.956

УСЛОВНО КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ АКУСТИКИ И ТЕПЛО – И МАССОПЕРЕНОСА

С. Е. Темирболат

КазНУ им. аль-Фараби
050012, Алматы, ул. Масанчи, 39/47, e-mail: Saya.abil@list.ru

К анализу краевых задач применяется новый подход, в основе которого лежат интегральные преобразования Фурье-Лапласа и неклассические решения вырожденной системы линейных алгебраических уравнений. Путем анализа граничного условия выделяются некорректные варианты постановки, затем доказывается их условная корректность, исследование завершается получением решения последних. Решаются задачи тепло – и массопереноса и акустики.

1. О методе

Метод составлен из двух ходов – прямого и обратного, и каждый ход, в свою очередь, состоит из задач трех уровней. Первый уровень прямого хода – это исходная задача. Она после применения интегральных преобразований Лапласа-Фурье становится задачей второго уровня – краевой задачей для параметризованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а последняя переходит к третьему уровню – к исследованию однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.).

Задача считается корректной, если с.л.а.у однозначно разрешима, она так же корректна, когда определитель системы равен нулю, но если при этом реальная часть параметра p – преобразования Лапласа ограничена сверху ($\mathrm{Re}\, p \le a_0,\ a_0 > 0$), поскольку в данном случае применимо обратное преобразование Лапласа, а если иначе ($\mathrm{Re}\, p \gg 1$ – сколь угодно большая), то нарушается однозначная разрешимость, т.е. задача некорректна.

Решение вырожденной с.л.а.у. – первый уровень обратного хода, с его помощью определится решение задачи для ОДУ, после чего путем обращения (применения обратных преобразований) последнего находится решение исходной задачи. Заметим, что обращение не всегда осуществляется обычным образом, поэтому предложен нестандартный путь вычисления: со свободными параметрами производятся соответствующие обратные преобразования, а когда параметры преобразования несвободные используются интегралы прямых преобразований.

Таким образом, в статье исследуются смешанные задачи в области $D = (t > 0,\ x > 0,\ y \in R)$ с постоянными коэффициентами. Ищется регулярное решение, у которого существуют все

Keywords: *Conditionally correct boundary value problems*
2010 Mathematics Subject Classification: 35E99, 35K20, 35L50

производные, необходимые для подстановки в систему уравнений и граничные данные, кроме того, требуется применимость интегральных преобразований Фурье по y и Лапласа по t к решению и правым частям начальных и граничных данных.

Кроме конструктивности, преимущество метода еще и в том, что явно записываются условия разрешимости и вид решений. Из последнего непосредственно можно получить оценку устойчивости решения.

Цель работы – путем анализа граничных условий двумерных краевых задач тепло-и массо переноса и акустики с помощью изложенной методики указать некорректно поставленные варианты задач, а затем доказать их условную корректность. При этом будут присутствовать такие элементы:

• Множество P_0, состоящее из нулей детерминанта граничных с.л.а.у., для которых имеет место основное требование некорректности ($Rep >> 1$).

Из множества P_0 следуют:

• Область некорректности O.

• Условие некорректности H с определенными типами.

2. Задача тепло – и массопереноса

Рассмотрим в области $D = (t > 0,\ x > 0,\ y \in R)$ систему тепло – и массопереноса, заданную в одной из своих канонических форм:

$$u_t = a\Delta u + \Delta\vartheta, \qquad \vartheta_t = a\Delta\vartheta, \ \ a > 0. \tag{1}$$

Найти вектор-функцию $(u, \vartheta) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющую системе (1) в D, однородному начальному условию

$$u(0,x,y) = 0, \quad \vartheta(0,x,y) = 0, \quad t = 0,\ x > 0,\ y \in R, \tag{2}$$

и неоднородному граничному условию

$$\alpha_0 u_x + \alpha_1 \vartheta_x = \varphi_1(t,y),\ \beta_0 u + \beta_1 \vartheta = \varphi_2(t,y),\ t > 0,\ x = 0,\ y \in R. \tag{3}$$

При этом требуются выполнение условия гладкости

$$\varphi_1 \in C(\bar{D}), \quad \varphi_2 \in C^1(\bar{D}),$$

применимость к решению (u, ϑ) и функциям (φ_1, φ_2) интегральных преобразований Фурье по y и Лапласа по t, условие невырожденности (линейная независимость) граничных данных:

$$rank \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} = 2. \tag{4}$$

После применения интегральных преобразовании Фурье-Лапласа из задачи (1)–(3) придем к краевой задаче для ОДУ:

$$p\tilde{u} = a(\tilde{u}'' - \omega^2\tilde{u}) + \tilde{\vartheta}'' - \omega^2\tilde{\vartheta}, \quad p\tilde{\vartheta} = a(\tilde{\vartheta}'' - \omega^2\tilde{\vartheta}),\ x > 0, \tag{5}$$

$$\alpha_0\tilde{u}' + \alpha_1\tilde{\vartheta}' = \tilde{\varphi}_1(p,\omega), \ \ \beta_0\tilde{u} + \beta_1\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}_2(p,\omega) \ \text{ при } \ x = 0. \tag{6}$$

Общее решение системы (5)

$$\tilde{u} = \left(C_1 + \frac{px}{2a^2\lambda}C_2\right)e^{-\lambda x}, \ \ \tilde{\vartheta} = C_2 e^{-\lambda x}, \ \ \lambda = \sqrt{\frac{p}{a} + \omega^2}, \tag{7}$$

подставив в граничные равенства (6), придем к с.л.а.у

$$\alpha_0\lambda C_1+\left(\alpha_1\lambda-\frac{\alpha_0 p}{2a^2\lambda}\right)C_2=\tilde{\varphi}_1,\qquad \beta_0C_1+\beta_1C_2=\tilde{\varphi}_2. \tag{8}$$

Приравняем детерминант к нулю

$$p(\chi-\delta)=a\delta\omega^2, \tag{9}$$

где $\chi=\frac{\alpha_0\beta_0}{2a}$, $\delta=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1$.

Определим (p,ω) корни равенства (9):

1) пусть $\chi=0$ и $\delta=0$, тогда p и ω – любые;
2) $p=\gamma^2\omega^2$, $\omega\neq 0$, где $\gamma^2=\frac{a\delta}{(\chi-\delta)}$;
3) если, $\chi=\delta\neq 0$ то p – любая и $\omega=0$.

Отсюда сделаем следующее заключение:

- Случай 1) $(\delta=\chi=0)$ противоречит требованию (4).
- Областью некорректности O является угол $\chi\geq\delta>0$ на плоскости коэффициентов (χ,δ).
- Множество нулей такое:

$$P_0=\begin{cases} p=\gamma^2\omega^2, \quad \text{при этом } \omega \text{ свободна и } \ \chi>\delta>0;\\ p- \ \text{любая и } \omega=0, \quad \text{когда } \ \chi=\delta\neq 0.\end{cases}$$

- Присутствуют два типа некорректности:

$$H=\begin{cases} \text{корневое}: \quad p=\gamma^2\omega^2, \ \ \gamma\neq 0, \ \ \omega-\text{свободна};\\ \text{коэффициентно–корневое}: \quad \chi=\delta\neq 0, \ \ p-\text{любая} \ \ \omega=0.\end{cases}$$

2.1. Решение некорректных задач

Решаем задачу (1)–(3), когда имеет место условие H в области O. Поскольку у вырожденной с.л.а.у. определяется нормальное решение, то соответствующие ему решения задач из других уровней так же назовем нормальными.

Теорема 1. *Нормальное решение задачи* (1)–(3) *удовлетворяет системе, начальному условию, граничные равенства имеют другие правые части, при этом требуется выполнение условий разрешимости.*

Решение задачи на луче $\delta=\chi$.

- При условии разрешимости

$$\beta_0\tilde{\varphi}_1(p,\ 0)=-\alpha_0\sqrt{\frac{p}{a}}\tilde{\varphi}_2(p,\ 0), \tag{10}$$

определим нормальное решение с.л.а.у. (8)

$$C^H=\frac{(\beta_0,\beta_1)}{\beta^2}\tilde{\varphi}_2(p,\ 0),\ \ \beta^2=\beta_0^2+\beta_1^2.$$

- Решение задачи (5), (6) для ОДУ восстановим по формуле (7) с учетом коэффициентов C^H. Оно удовлетворяет системе (5), а граничные равенства (6) выполняются на луче $\delta = \chi$, когда имеет место условие разрешимости (10).

- Решение исходной задачи (1)–(3).

  Вычислим оригинал условия разрешимости

$$\beta_0\varphi_1(t,y) = -\frac{\alpha_0}{\sqrt{a}}\partial_t^{\frac{1}{2}}[\varphi_2(t,y)] \text{ или } \alpha_0\varphi_2(t,y) = -\beta_0\sqrt{a}J^{\frac{1}{2}}(\varphi_1), \tag{10'}$$

  где $\partial_t^{1/2}$ и $J^{1/2}$ – дробные дифференцирование и интегрирование;

- $\tilde{\varphi}_2(p,\ 0)e^{-\lambda x} \Rightarrow -2a\partial_x \int_0^t \varphi_2^0(\tau)E_a(t-\tau,x)d\tau \equiv P(t,x,y)$,

  здесь и далее

  $\varphi_2^0(t) = \int_R \varphi_2(t,y)dy$, $E_a(t,x)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности $u_t = au_{xx}$;

- $p[\tilde{\varphi}_2(p,\ 0)e^{-\lambda x}\cdot\frac{1}{\lambda}] \Rightarrow \int_0^t d\tau \int_R P'_\tau(\tau,x,z)E_a(t-\tau,z-y)dz \equiv Q(t,x,y)$.

Напишем "решение" задачи (1)–(3)

$$u_H = \frac{1}{\beta^2}[\beta_0 P(t,x,y) + \frac{\beta_1 x}{2a^2}Q(t,x,y)],\ \ \vartheta_H = \frac{\beta_1}{\beta_2}P(t,x,y). \tag{11}$$

Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что вектор (11) удовлетворяет системе (1), нулевому начальному условию (2).

Определив значения функции при $x = 0$

$$P(t,\ 0,y) = \varphi_2^0(t),\ \ P_t(t,\ 0,y) = \partial_t\varphi_2^0(t),\ \ P_x(t,\ 0,y) = \frac{-1}{\sqrt{a}}\partial_t^{\frac{1}{2}}[\varphi_2^0(t)],\quad Q(t,\ 0,y) = \varphi_2^o(t),$$

вычислим граничные равенства:

$$\begin{cases} \beta_0 u_H + \beta_0\vartheta_H = P(t,0,y) = \int_0^t \varphi_2(x,y)dy, \\ \alpha_0\partial_x u_H + \alpha_1\partial_x\vartheta_H = v\varphi_1(t,y) + \mu J^{\frac{1}{2}}[\varphi_0^1(t)], \end{cases}$$

где $v = \frac{(\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1)}{\alpha_0\beta^2}$, $\mu = \frac{-\beta_0\beta_1}{2\beta^2 a^{\frac{3}{2}}}$, между коэффициентами существует соотношение

$$\alpha_0\beta_0 = 2a(\alpha_1\beta_0 - \alpha_1\beta_1).$$

Решение задачи в угле $\chi > \delta > 0$ $(p = \gamma^2\omega^2, \omega \neq 0)$.

Теперь нормальное решение с.л.а.у. (8)

$$C^H = \frac{(\beta_0,\beta_1)}{\beta^2}\tilde{\varphi}_2(\gamma^2\omega^2,\ \omega) \tag{12}$$

определяется при условии разрешимости

$$\alpha_0\tilde{\varphi}_2(\gamma^2\omega^2,\omega) = -\frac{\beta_0\sqrt{a}}{\sqrt{\gamma^2+a}}\frac{\tilde{\varphi}_1(\gamma^2\omega^2,\omega)}{\omega}.$$

Займемся переводом

- $\tilde{\varphi}_2(p,\omega)|_{p=\gamma^2\omega^2} \overset{\Phi^-_\omega(y)}{\Rightarrow} \bar{\varphi}_2(\gamma^2\omega^2,y) \underset{Л^+_t(p)}{\overset{\Delta}{\equiv}} \int_0^\infty \varphi_2(t,y)e^{-(\gamma\omega)^2 t}dt \Rightarrow$
  $\Rightarrow \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi_2(t,y)E_{\gamma^2}(t,y)dt = \varphi_2^1(y),$

  так как $\Phi^-_\omega[e^{-\gamma^2 t\cdot\omega^2}] = E_{\gamma^2}(t,y)$.

- $\tilde{\varphi}_2(\gamma^2\omega^2,\omega)\cdot\frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \bar{\varphi}_1(\gamma^2\omega^2,y-z)dz = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_1(t,y-z)e^{-(\gamma\omega)^2t}dtdz.$

  Напишем оригинал условия разрешимости

$$\partial_y\varphi_2(t,y) = -\frac{\pi\sqrt{a}}{2\alpha_0\sqrt{\gamma^2+a}}\varphi_1(t,y). \tag{13}$$

Далее,

- $\tilde{\varphi}_2(\gamma^2\omega^2,\omega)\cdot e^{-\lambda x} \Rightarrow -2a\partial_x\int_0^\infty d\tau\int_R \varphi_2^1(z)E_a(t-\tau,x,y-z)dz \equiv P_1(t,x,y).$

- $p[\tilde{\varphi}_2(\gamma^2\omega^2,\omega)\cdot e^{-\lambda x}\cdot\frac{1}{\lambda}] \Rightarrow \partial_t[P_1(t,x,y)*E_a(t,y)] =$
  $= \int_R P_1(\tau,x,z)E_a(t,y-z)dz \equiv Q_1(t,x,y).$

Очевидно, что $P_1(0,\ x,y)=0,\ Q_1(0,\ x,y)=0,\ P_1(t,\ 0,y)=\varphi_2^1(y)$.
Решение задачи (1)–(3) определим по формуле (11) путем замены P и Q на P_1 и Q_1.

Вычислим

$$Q_1(t,\ 0,y) = \int_R \varphi_2^1(z)E_a(t,y-z)dz,$$

$$\begin{aligned}\partial_x P_1 &= -2a\int_R\varphi_2^1(z)dz\int_0^t\partial_x^2E_a(t-\tau,x,y-z)d\tau = \\ &= -2\int_R\varphi_2^1(z)dz\int_0^t(\partial_t-a\partial_y^2)E_a(t-\tau,x,y-z)d\tau = \\ &= -2\int_R\varphi_2^1(z)E_a(t-\tau,x,y-z)d\tau + 2a\int_0^t d\tau\int_R\partial_z^2\varphi_2^1(z)E_a(t-\tau,x,y-z)d\tau.\end{aligned}$$

$$\partial_xP_1(t,\ 0,y) = -2a\int_R\varphi_2^1(z)E_a(t,\ 0,y-z)dz + 2a\int_0^t\partial_x^2\varphi_2^1(z)dz\int_0^tE_a(t-\tau,\ 0,y-z)d\tau = \\ = -2\int_R\varphi_2^1(z)E_a(t,\ 0,y-z)dz.$$

Опять достаточно проверить граничные равенства

$$\begin{cases}\beta_0u_H+\beta_1\vartheta_H = \varphi_2^1(y) = \int_0^t\varphi_2(t,y)E_\gamma(t,y)dy, \\ \alpha_0\partial_xu_H+\alpha_1\partial_x\vartheta_H = \delta_1\partial_xP_1(t,\ 0,y)+\mu_1Q_1(t,\ 0,y),\end{cases}$$

здесь константы

$$\delta_1 = \frac{\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1}{\beta^2},\ \ \mu_1 = \frac{\alpha_1\beta_1}{2a\beta^2}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Задача двумерной акустики

Возьмем систему, описывающую в двумерном случае распространение звуковых волн в покоящейся среде,

$$\left(\rho m^2\right)^{-1}d_t+u_x+v_y=0, \rho u_t+d_x=0, \rho v_t+d_y=0,\ \ (t>0,\ x>0,\ y\in R)=D. \tag{14}$$

У вектора $U=(d,u,v)$ компоненты u, v – скорости возмущенной среды; d – давление в данной среде; ρ – ее плотность, m – ее сжимаемость; константы ρ, $m>0$.
Задача: *Ищется решение $u\in C^1(D)\bigcap C(\bar{D})$ системы (14) с заданным начальным данным на плоскости $t=0,\ x\geq0,\ \ y\in R$,*

$$U(0,x,y) = f(x,y) \tag{15}$$

и с граничным равенством при $x = 0,\ t \geq 0,\ \ y \in R$,

$$\ell U = d + a\rho u + b\rho v = \varphi\left(t, y\right), \quad ab \neq 0. \tag{16}$$

Естественно, дополнительно требуется применимость интегральных преобразований Фурье-Лапласа к вектору $U(t,x,y)$ и к функциям $f(x,y)$ и $\varphi(t,y)$ из пространства $C(\bar{D})$.

Данная задача эквивалентна следующей смешанной задаче в D для волнового уравнения [1]:

$$\Box W \equiv (\partial_t^2 - m^2\Delta)W(t,x,y), \quad W(0,x,y) = f_0(x,y), \quad W_t(0,x,y) = f(x,y), \tag{0}$$
$$(W_t - aW_x - bW_y) = \varphi(t,y) \quad \text{при } \ x = 0.$$

Задача (0) изучена многими авторами под разным углом зрения, но ни один из них не совпадает с нашим подходом и нашей целью. В работе [2] получено коэффициентное условие некорректности, или, то же самое, описана область некорректности O на плоскости коэффициентов (a,b):

$$O = \begin{cases} a + m = 0 & -\text{ прямая,} \\ (a^2 + b^2 < m^2,\ \ a < 0) & -\text{полукруг } \equiv d_m \end{cases}$$

и одновременно доказано, что задача вне O корректна.

Теорема 2. *На прямой* $a + m = 0$ *нормальное решение задачи* (14)–(16) *удовлетворяет системе, начальному условию, граничное равенство имеет иную правую часть, при этом требуется выполнение условия разрешимости.*

3.1. Метод редукции

Действуя интегральными преобразованиями, имеем ОДУ

$$\dot{W}\left(x\right) = A\left(p, \omega\right) W\left(x\right) + \Phi\left(x, \omega\right), \qquad x > 0, \tag{17}$$

с граничным равенством при $x = 0$

$$\ell W(0) \equiv \left(1 - \frac{i\omega b}{p}\right) w_1\left(0\right) + a\rho w_2\left(0\right) = \tilde{\varphi}\left(p, \omega\right) - \frac{b\rho}{p}\bar{f}_3\left(0, \omega\right), \tag{18}$$

при этом третья компонента выражается явно

$$w_3 = \tilde{v}\left(x\right) = -\frac{i\omega}{\rho p} w_1\left(x\right) + \frac{1}{p}\bar{f}_3\left(x, \omega\right), \quad \mathrm{x} \geq 0. \tag{19}$$

Здесь и всюду воспользуемся обозначениями

$$\Phi(x,\omega) = \begin{bmatrix} \rho\overline{f}_2 \\ \frac{\overline{f}_1}{\rho m^2} - \frac{i\omega}{\rho}\overline{f}_3 \end{bmatrix}, \ A\left(p,\omega\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\rho p \\ -\frac{r}{m}R & 0 \end{bmatrix}, r^2 = p^2 + \omega^2 m^2,\ \ \mathrm{Re}\, r > 0,\ \ R = \frac{r}{\rho m p},$$

$$\overline{f}_j = \overline{f}_j(x,\omega) = \int_R f_j(x,y)e^{i\omega y}dy \overset{\Delta}{=} \Phi_y^+(\omega) f_j(x,y), \quad j = 1,2,3.$$

Вычислив у матрицы $A\left(p,\omega\right)$ собственные числа $\lambda^{\pm} = \pm\frac{r}{m}$ и отвечающие им собственные векторы $z^{\pm} = (1, \pm R)$, напишем решение однородной системы

$$W^0\left(x\right) = \tilde{C}\left(p,\omega\right) z^- e^{\lambda^- x}, \tag{20}$$

где коэффициент $\tilde{C}\left(p,\omega\right)$ определяется из алгебраического уравнения

$$F\left(p,\omega\right)\tilde{C}\left(p,\omega\right) = \tilde{\varphi}\left(p,\omega\right) - \frac{b\rho}{p}\bar{f}_3\left(0,\omega\right), \quad F\left(p,\omega\right) = 1 - \frac{i\omega b}{p} + \frac{ar}{mp}. \tag{21}$$

Изучив нули функции $F(p,\omega)$, заключим:

Лемма 1.

- *область некорректности совпадает с вышеуказанной O;*
- *множество нулей следующее:*

$$P_0 = \begin{cases} p - \text{любое и } \ \omega = 0, & \text{на прямой } \ a = -m < 0; \\ p = \alpha\omega, \ \ \omega \neq 0, & \text{в полукруге } d_m, \end{cases}$$

где $\alpha = \delta\theta + i\varepsilon, \ \ \theta = \operatorname{sign}\omega$.

- *H определено двумя типами:*

  корневое – параметры p и ω завязаны: $p = \delta\,|\omega| + \omega i\varepsilon$.

  коэффициентно-корневое: $a = -m, \ \omega = 0, \ p$ *– любое.*

3.2. Решение некорректной задачи (обратный ход)

Займемся задачей с условием $P_0 = (a + m = 0 \ \text{ и } \ \omega = 0)$.

Лемма 2. *Нормальное решение алгебраического уравнения* (21) *при условии разрешимости*

$$p\tilde{\varphi}(p,\ 0) = b\rho\overline{f_3}(0,\ 0) \tag{22}$$

определятся в виде

$$\tilde{C}(p) = \frac{ip}{b}\partial_\omega\tilde{\varphi}(p,\ 0) - \rho\, i\partial_\omega\overline{f_3}(0,\ 0), \ \ \omega = 0. \tag{23}$$

Формально из (21) находим

$$\tilde{C}\,(p,\omega) = \frac{p\tilde{\varphi}\,(p,\omega) - b\rho\bar{f}_3\,(0,\omega)}{pF\,(p,\omega)}.$$

Ясно, что дробь имеет смысл только тогда, когда ее числитель на множестве P_0 обращается в нуль. Это требование и есть искомое условие разрешимости (22). Раскрыв полученную неопределенность по правилу Лопиталя по переменной ω, получим значение (23).

Лемма 3. *Нормальное решение $W_H(x)$ краевой задачи для ОДУ удовлетворяет системе* (17), *а граничное равенство* (18) *имеет место там, где определен коэффициент $\tilde{C}(p)$.*

Решение задачи для ОДУ ищем в виде:

$$W_H(x) = W_H^0(x) + W^1(x), \tag{24}$$

где

$$W_H^0(x) = \tilde{C}(p)z^{-e^{\lambda^- x}} \tag{21'}$$

– общее решение однородной системы, а ее частное решение $W^1(x)$ найдем с помощью матрицы Грина [3, с. 67]

$$W^1\,(x) = \int_R \Phi(s,\omega)G(x-s)ds. \tag{25}$$

Тогда, слагаемые из (24) являются решениями задач

$$\dot{W}^0\,(x) = AW^0\,(x)\,, \ \ \ell W^0\,(0) = \tilde{\varphi}\,(p,\omega) - \frac{b\rho}{p}\bar{f}_3\,(0,\omega)\,. \tag{26}$$

$$\dot{W}^1\,(x) = AW^1\,(x) + \Phi\,(x,\omega)\,, \ \ \ell W^1\,(0) = 0. \tag{27}$$

3.3. Решение исходной задачи

Восстановим образы $\tilde{u}_j$ по формулам (19), (21′), (25)

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \tilde{C}\left(p\right) e^{\frac{-rx}{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{r}{\rho m p} \\ -\frac{i\omega}{\rho p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^1\left(x\right) \\ w_2^1\left(x\right) \\ -\frac{i\omega}{\rho p}\tilde{d}\left(x\right) + \frac{\bar{f}_3(x,\omega)}{p} \end{bmatrix} = \tilde{U}^0 + \tilde{U}_1.$$

Лемма 4. *Вектор* U^0 *удовлетворяет системе* (14), *нулевому начальному условию* ($f \equiv 0$) (15) *при любой функции* $C(t)$.

Вычисление вектора $U^0 = \left(d^0, u^0,\, v^0\right) = \iint C(\tau) q_j(t-\tau, x, y-z)dzd\tau$, где

$$\tilde{q}_1\left(p,x,\omega\right) = e^{-rx/m} = -m\partial_x \tilde{q}_0\left(p,x,\omega\right),$$

$$\tilde{q}_2\left(p,x,\omega\right) = \frac{1}{\rho m}\left(\frac{r}{p}e^{-rx/m}\right) = \frac{m}{\rho}\partial_x^2\left(\tilde{q}_0/p\right),$$

$$\tilde{q}_3\left(p,x,\omega\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{i\omega}{p}e^{-rx/m}\right) = \frac{i\omega m}{\rho}\partial_x\left(\tilde{q}_0/p\right),$$

здесь $\tilde{q}_0\left(p,x,\omega\right) = \frac{e^{-\frac{rx}{m}}}{r} \Rightarrow q_0\left(t,x,y\right) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{m^2t^2-x^2-y^2}}, & \text{когда } mt < \sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$

Носитель функции q_0 обозначим буквой

$$K = \left\{x^2+y^2 < m^2t^2,\;\; t>0\right\}.$$

Напишем величины q_j

$$q_1\left(t,x,y\right) = -m\partial_x q_0\left(t,x,y\right),\;\; q_2 = \frac{m}{\rho}\partial_x^2\int_0^t q_0\left(\tau,x,y\right)d\tau,\;\; q_3 = \frac{m}{\rho}\partial_{xy}^2\int_0^t q_0\left(\tau,x,y\right)d\tau$$

и компоненты u_j^0

$$d^0 = -m\partial_x Q,\;\; u^0 = \frac{m}{\rho}\partial_x^2\int_0^t Q\left(\tau,x,y\right)d\tau, v^0 = \frac{m}{\rho}\partial_{xy}^2\int_0^t Q\left(\tau,x,y\right)d\tau,$$

где $Q\left(t,x,y\right) = \iint_K C\left(\tau,z\right)q_0\left(t-\tau,x,y-z\right)dzd\tau$.

Сравнивая их, находим

$$u_t^0 = -\frac{1}{\rho}d_x^0 \;\text{ и }\; v_t^0 = -\frac{1}{\rho}d_y^0.$$

Тем самым, для вектора $U^0 = \left(d^0, u^{0‘}, v^0\right)$ справедливы два уравнения системы (14), а третье сводится к волновому уравнению относительно d^0.

В работе [4] показано, что функция $Q(t,x,y)$ будет решением задачи излучения для волнового уравнения

$$\Box Q = 0,\quad Q(0,x,y) = \partial_t Q(0,x,y) = 0,\;\; \partial_x Q(t,0,y) = -C(t,y).$$

Итак, справедлива лемма 4.

Займемся граничным условием

- $\Lambda_p^-\Phi_\omega^-[i\, p\partial_\omega\tilde{\varphi}(p,\,0)] = C_0 + \partial_t\int_R y\varphi(t,y)dy = C_0 + \psi'(t)$, где $\psi(t) = \int_R y\varphi(t,y)dy,\;\psi(0) = C_0$.

- $\partial_\omega \overline{f_3}(0,\ 0) \Rightarrow \int_R y f_3(0,y)dy = C_3.$

Оригинал условия разрешимости: (22) будет таким

$$\int_R [\varphi(0,\ y) + \varphi'_t(t,y)]dy = b\rho \int_R f_3(0,y)dy. \tag{23'}$$

Условию, в частности, удовлетворяют нечетные по y функции

$$\Phi(t,y) = \varphi'_t(t,y) + \varphi(0,y) - b\rho\ f_3(0,y)$$

из пространства $L(R)$. Значит множество разрешимости непустое.

Напишем оригинал коэффициента $\tilde{C}\,(p)$:

$$C\,(t) = \frac{C_0 + \psi'\,(t)}{b} - \rho C_3 \neq 0,$$

и функцию

$$Q\,(t,x,y) = (t - \frac{x}{m}) + \varphi(t - \frac{x}{m}) - C_0, \text{ при } x < mt.$$

Определив компоненты

$$d^0 = \frac{1}{b}\left(C_0 + \psi'\left(t - \frac{x}{m}\right)\right) - \rho C_3, \quad u^0 = \frac{\psi'(t - \frac{x}{m})}{b\rho m}, \ \ \vartheta^0 = 0,$$

вычислим граничное условие

$$d^0 - m\rho u^0 + b\rho\vartheta^0 = \frac{1}{b}\int_R [\varphi'_t\,(t,y) - \varphi(0,y) + y\varphi(0,y)]dy.$$

Лемма 5. *Для вектора* U^1 *выполняются система* (14)*, неоднородные начальные данные* (15) *и однородное граничное условие* ($\varphi \equiv 0$)(16)*.*

Доказательство следует из формулы (25) и задачи (27), так как при переходе от W^1 к U^1 применяются обратные преобразования в стандартном виде.

Объединив лемму 4 с леммой 5 придем к доказательству теоремы 2.

Цитированная литература

[1]. Годунов С. К. *Уравнения математической физики*, М., 1971.

[2]. Годунов С. К., Гордиенко В. М. *Смешанная задача для волнового уравнения*, Труды семинара академика С.Л. Соболева, 1977, Р. 5–31.

[3]. Годунов С. К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Краевые задачи*, Новосибирск, 1994.

[4]. Темирбулатов С. Е. *Задача с наклонной производной для волнового уравнения,* Сибирский матем. журнал, 1980, Т. 21, № 5, Р. 78 – 87.

Статья поступила в редакцию 16.02.2011г.

РЕФЕРАТТАР — REVIEWS

УДК: 517.518 2010 MSC: 42A10

Ақышев Ғ. **Ортогоналдыққа ұқсас жүйе бойынша жіктеу коэффициенттері және әртүлі метрикадағы теңсіздіктер** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 22 – 27.

Мақалада функцияларды ортогональ жүйеге ұқсас жүйе бойынша жіктеу коэффициенттерімен оның Лоренц кеңістігінің мөлшерінің арасындағы байланыс және саналымды ортогональ жүйеге ұқсас жүйе бойынша көпмүше үшін әртүлі метрикадағы теңсіздіктер дәлелденген.
Әдебиеттер тізімі – 13.

Akishev G. **On coefficients of expansions with respect to systems similar to orthogonal systems and an inequality of different metric** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 22 – 27.

In the paper the estimate of the coefficients of expansions with respect to systems similar to orthogonal systems elements in Lorentz space and an inequality of the different metrics for polynomials with respect a countable system similar to orthogonal one are proved.
References – 13.

УДК: 517.956 2010 MSC: 35E99

Алдашев С.А. **Көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулердің бір класы үшін спектрлық аралас есептің меншікті функциялары** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 28 – 36.

Жұмыста көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулердің бір класы үшін цилиндрлік аймақта спектрлық аралас есептің меншікті функциялары шексіз көп екендігі көрсетілген.
Әдебиеттер тізімі – 9.

Aldashev S.A. **Eigenfunctions of the spectral mixed problem for one class of the multidimensional giperbolo-parabolic equations**
// Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 28 – 36.

In a paper it is shown that a spectral mixed problem for a class of the multidimensional giperbolo-parabolic equations has an uncountable set of eigenfunctions.
References – 9.

УДК: 517.925.5:519.216 2010 MSC: 34K29,60H10

Ибраева Г.Т., Тілеубергенов М.Ы. **Азғындалатын диффузиясы дифференциалдық жүйелердің негізгі кері есебінің шешімі туралы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 37 – 41.

Винер үрдістері класында кездейсоқ түрткілі және азғындалатын диффузиясы бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық жүйелерінің класында А.С. Галиуллин классификациясы бойынша негізгі кері есептің шешілімдігінің жеткілікті шарттары бөлу әдісімен алынды.

Әдебиеттер тізімі – 12.

Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. **On the solving of basic inverse problem of differential systems with degenerated diffusion by the division's method** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 37 – 41.

With the help of a division method there are obtained the sufficient conditions of a solvability of basic (according to A.S. Galiullin classification) inverse problem in the class of Ito stochastic differential systems of first order with random disturbances from Wiener class and which is degenerating with respect on concerning a part variables diffusion.

References – 12.

УДК: 517.925 2010 MSC: 39A10

Құдабаева С.Е., Ойнаров Р. **Жартылай сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеудің түйіндестілігі мен тербелімділігі** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 42 – 49.

Вариациялық әдісті қолдана отырып жартылай сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеудің $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 < p < \infty$,

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0,$$

түйіндестілігі мен тербелімділігінің шарттары алынған, мұндағы $\rho > 0$ және v – I-де үзіліссіз функциялар.

Әдебиеттер тізімі – 3.

Kudabaeva S.Y., Oinarov R. **Conjugacy and oscillation of half-linear second-order differential equations** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 42 – 49.

With the help of the variational method there are obtained the necessary and sufficient conditions of the conjugacy and oscillation for the half-linear differencial equation

$$(-1)^n(\rho(t)|y^{(n)}|^{p-2}y^{(n)})^{(n)} - v(t)|y|^{p-2}y = 0$$

on $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 < p < \infty$, where ρ and v are continuous functions.

References – 3.

УДК: 532.5:519.8 2010 MSC: 74H10

Мукимбеков М.Ж., Шеркешбаева Б.К. **Мұнай кең орнын өңдеуде циклмен су жіберу есебі** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 50 – 57.

Берілген жұмыста мұнай кенорындағы екінші әдіспен өңдеудің изотермиялық емес фильтрациясының үш өлшемді есебі зерттеледі. Қойылған есепті шығару негізінде сандық алгоритм құрылды. Ұңғыма түбіндегі қысым мен температура өзгерісін зерттеу әдісі ұсынылған.

Әдебиеттер тізімі – 6.

Mukimbekov M.Zh., Sherkeshbaeva B.K. **On a three–dimensional problem arizing in working out of oil deposit** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 50 – 57.

In this work the three–dimensional problem of nonithotermal filtration in oil field elaboration by secondary method is considered. Numerical algorithm for solving of this task is offered. The is offered the method of research of change bottomhole pressure and temperature.

References – 6.

УДК: 004.056.5 2010 MSC: 94A60, 11T71, 14G50

Нысанбаева С.Е. **Модулярлық арифметика негізіндегі ашық кілтті электронды сандық қолтаңба жүйесі** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 58 – 63.

Позициялы емес полиномды санау жүйесі негізінде Эль-Гамаль электронды сандық қолтаңбасының сүлбесін модификациялау ұсынылады.

Әдебиеттер тізімі – 11.

Nyssanbayeva С.Е. **Public-Key Electronic Digital Signature System Based on Modular Arithmetic** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 58 – 63.

Modification of El–Gamal electronic digital signature scheme on the base of non-positional polynomial notations is offered.

References – 11.

УДК: 517.956.223 2010 MSC: 45J05

Репин О.А., Тарасенко А.В. **Екінші ретті жүктелген интегро-дифференциалдық теңдеу үшін Гурса және Дарбу есептері** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 64 – 72.

Ақырлы Ω аймағында екінші ретті өзгеше интегро-дифференциалдық теңдеу үшін, оның сипаттамасымен және AB кесіндісімен: $0 \le x \le 1$ шектелген, Гурса есебі және екінші есеп Дарбу есебі зерттелген. Жүктелгеннің ролін орындайтын Эрдейи-Кобер операторының әртүрлі мәндері үшін, осы есептердің бірмәнді шешімділігі дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі – 17.

Repin O.A., Tarasenko A.V. **The Goursat and Darboux problems investigated for a loaded integro-differential equation of the second order** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 64 – 72.

The Goursat and the second Darboux problems for a loaded integro-differential equation of second order in a finite domain Ω, bounded by its characteristics and the segment $AB : 0 \le x \le 1$ are investigated. Unique solvability of these problems has been proved for various values of the parameters of the operator Erdelyi-Kober acting as its load.

References – 17.

УДК: 517.51 2010 MSC: 26D15, 47B37

Таспаганбетова Ж.А., Темірханова А.М. **Матрицалық операторлардың бір классының шенелген және компакты болу критерийлері** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 73 – 85.

Салмақты $l_{p,v}$ кеңістігінен салмақты $l_{q,u}$ кеңістігіне әсер ететін $(Af)_i := \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j$ және $(Af)_j := \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i$, $a_{i,j} \ge 0$ матрицалық операторларының $1 < p \le q < \infty$ болған жағдайда шенелген және компакты болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Әдебиеттер тізімі – 9.

Таспаганбетова Ж.А., Темирханова А.М. **Критерии ограниченности и компактности одного класса матричных операторов** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 73 – 85.

Получены критерии ограниченности и компактности матричных операторов $(Af)_i := \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j}f_j$ и $(Af)_j := \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j}f_i$, $a_{i,j} \geq 0$ из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$, в случае когда $1 < p \leq q < \infty$.
References – 9.

УДК: 517.956 2010 MSC: 35E99, 35K20, 35L50

Темирболат С.Е. **Шартты қисынды екі өлшемді акустика және жылу мен масса тасымалдау есептері** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 2 (40). Б. 86 – 94.

Фурье-Лаплас интегралдық түрлендірулері мен нұқсанды сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімдерін табу әдістерінің негізінде құрастырылған жаңа әдіс қолданылып шекаралық есептер зерттеледі. Шекаралалық шарттар талданылып қисынсыз есептер көрсетіледі, олардың шартты қисындылығы дәлелденіп шешімдері жазылады. Жылу мен масса тасымалдау және акустика есептері шығарылған.
Әдебиеттер тізімі – 4.

Temirbolat S.E. **Conditionally well-posed two-dimensional acoustics, heat and mass transfer problems** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 2 (40). P. 86 – 94.

A new approach to an analysis of boundary value problems is applied, which is based on the Fourier-Laplace integral transformations and non-classical solutions of a degenerate system of linear algebraic equations. Ill-posed cases of the statements of the problems are extacted by an analyzing of boundary condition, then conditionally well-posedness of them is proved. Studying is completed with finding solution of the problem. Problems of acoustics, heat and mass transfer are solved.
References – 4.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНИТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Цитированная литература

[1]. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О., *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*, М., "Наука", 1988. (для монографий)

[2]. Женсыкбаев А. А., *Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы*, Успехи матем.наук, 1981, Т. 36, вып. (или №) 4, С. 107 – 159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":

Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 11, №2 (40), 2011

Адрес редакции:
Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),
8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: http://www.math.kz

Подписано в печать 22.11.2011г.
Тираж 300 экз. Объем 100 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г. Алматы
пр. Достык, 85а, офис 510
Тел./факс: 8 (727) 2 91 55 24, 2 72 03 88
e-mail: la_creation@inbox.ru