

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2007 том 7 № 3 (25)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 3 (25) 2007

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, В.П.Добрица,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2007г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 7, № 3 (25), 2007

Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации <i>Л.А.Алексеева, И.Ш.Дильдабаева</i>	5
Пространства функций переменной смешанной гладкости. II <i>Д. Б. Базарханов</i>	16
Многоуровневый контроль доступа в корпоративной сети космической инфраструктуры <i>Е.В. Горковенко</i>	28
Об оптимизационно-обратной задаче для дифференциальных уравнений. I <i>М. Т. Джесалиев, К. С. Шарипов</i>	35
Солитонные решения $(2+1)$ -мерного нелинейного уравнения Шредингера <i>К. Р. Есмаханова</i>	41
О разрешимости Лагранжевой двумерной сплайн-интерполяции, построенной на основе ядра Пеано на нерегулярной сетке <i>Е. Н. Иванова</i>	45
Численное моделирование двухфазных течений при наличии динамического и теплового взаимодействия <i>Г. А. Камалова</i>	55
Фундаментальные решения системы уравнений Максвелла для анизотропных сред <i>И. А. Канымгазиева, С. С. Саутбеков</i>	62
Краевые задачи теории упругости неоднородной среды, как краевые задачи обобщенного аналитического вектора <i>Н. И. Мартынов</i>	69
О системе первого порядка с переменными коэффициентами <i>К. Н. Оспанов</i>	78
Характеристики затухания упругих волн с шероховатой границей раздела и волновые поля <i>Е. И. Уразаков</i>	82

ХРОНИКА

Бижанова Галина Иржановна 92

Женсыкбаев Александр Алипканович 97

Сакабеков Аужан 100

Письмо в редакцию 106

Рефераты 107

УДК 539.3

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ СРЕДЫ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Л.А.АЛЕКСЕЕВА, И.Ш.ДИЛЬДАБАЕВА

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 alexeeva@math.kz, dindira@list.ru

Развивается метод обобщенных функций для решения задачи динамики упругой среды с криволинейной трещиной в условиях плоской деформации, на поверхности которой имеется нестационарный скачок напряжений и перемещений. Построены формулы для перемещений среды, исследованы ядра интегральных представлений, их свойства. Получены предельные сингулярные интегральные соотношения для перемещений на трещине.

Важное практическое значение задач прочности, выяснение причин таких явлений, как разрушение и потеря несущей способности конструкции, усовершенствование материалов требует изучения процессов разрушения и сопровождающих их динамических явлений в телах и средах. Задачи статики и динамики прямолинейных и плоских трещин в упругих и упругопластических средах исследовались в работах Б.Н.Кострова, Д. Райса, Л.И.Слепяна и др. [1–3]. Однако поверхность трещины может иметь сложную геометрию, поэтому актуальной является задача математического моделирования трещин со сложной геометрией поверхности и исследования динамических процессов, сопровождающих их появление и развитие. Отметим, что число работ в этом направлении весьма ограничено.

Здесь рассматривается изотропная упругая среда в условиях плоской деформации с криволинейной трещиной для разных моделей контактного взаимодействия берегов. С использованием фундаментальных решений построены формулы для перемещений среды. Исследованы ядра интегральных представлений, их свойства. Получены предельные сингулярные интегральные соотношения для определения перемещений на трещине.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неразвивающуюся трещину в упругой среде, которую будем моделировать поверхностью Ляпунова S в R^N с краем ($N=2$ при плоской деформации, $N=3$ – в пространственном случае). Запишем закон Гука и уравнение движения для упругой среды:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} u_{k,l}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

Keywords: *Generalized solution, dynamic equation, elastic medium, curvilinear crack, plane deformation*

2000 Mathematics Subject Classification: 74H35

© Л.А.Алексеева, И.Ш.Дильдабаева, 2007.

$$C_{ij}^{kl} u_{k,lj} + \rho F_i = \rho u_{i,tt}, \quad (2)$$

где ρ – плотность среды, F – массовая сила, σ_{ij} – тензор напряжений, u_i – компоненты вектора перемещений, C_{ij}^{kl} – симметричный тензор упругих постоянных ($C_{ij}^{kl} = C_{ji}^{kl} = C_{ij}^{lk} = C_{kl}^{ij}$), (x_1, \dots, x_N) – лагранжевы декартовы координаты точки x упругой среды. Дифференцирование по x_j обозначаем индексами после запятой ($u_{k,j}$), по повторяющимся индексам i, j, k, l в произведении всюду подразумевается суммирование от 1 до N .

В изотропном случае тензор упругих констант и закон Гука имеют вид:

$$C_{ij}^{kl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, тензор деформации $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$, λ, μ – константы Ламе.

До начального момента времени $t = 0$ среда находилась в статическом напряженном состоянии

$$\sigma_{ij,j}^0 + \rho G_i(x) = 0, \quad x \in R^N. \quad (5)$$

В момент $t = +0$ в среде возникает трещина. При этом на ее поверхности S происходит подвижка берегов и сброс напряжений. Условия возникновения трещины здесь не обсуждаются. Однако ясно, что для однородной среды в зоне трещины квазистатические напряжения должны достигать пределов прочности пород на растяжение или сдвиг, что вызывает возникновение трещин и скачок напряжений и деформаций на ее берегах

Здесь рассматриваем нераскрывающуюся трещину. Обозначим через $n(x)$ единичную нормаль к ее поверхности в соответствующей точке; далее $f^+(x)$ – значение разрывной функции на ее верхнем берегу со стороны нормали n , $f^-(x)$ – на нижнем берегу с противоположной стороны, $[f]_S = f^+(x) - f^-(x)$. Поскольку рассматривается нераскрывающаяся трещина, необходимо, чтобы при любом типе контактного взаимодействия берегов выполнялось условие $u_i^+ n_i = u_i^- n_i$, т.е.

$$n_j [u_j]_S = 0. \quad (6)$$

В зависимости от условий контакта на берегах трещины можно рассмотреть различные случаи: для $x \in S$, $t > 0$

(свободные берега)

$$\sigma_{ij}^\pm n_j = 0; \quad (7)$$

(скользящие берега)

$$n_j \left(\sigma_{kj}^\pm - \sigma_{ij}^\pm n_i n_k \right) = 0; \quad (8)$$

(вязкое контактное взаимодействие)

$$n_j [\sigma_{kj} - \sigma_{ij} n_i n_k]_S = -\gamma ([\dot{u}_k]_S - n_k [\dot{u}_i n_i]_S), \quad (9)$$

где γ – коэффициент вязкости. Представим напряженно - деформированное состояние среды в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^d, \quad u_i = u_i^0 + u_i^d, \quad t > 0, \quad (10)$$

где индексом d помечена динамическая часть напряжений и перемещений, возникающих вследствие сброса напряжений на трещине и распространения в среде упругих волн. Для них уравнения движения принимают вид:

$$C_{ij}^{kl} u_{k,lj}^d - \rho u_{i,tt}^d = 0, \quad x \in R^N - S. \quad (11)$$

Известно, что система уравнений (11) гиперболическая, допускает разрывные по производным решения – ударные волны, которые являются характеристическими поверхностями

уравнений. Нормаль $(\nu, \nu_t) \equiv (\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_t)$ к такой поверхности (F) в пространстве R^{N+1} удовлетворяет уравнению

$$\det \left\{ C_{ij}^{kl} \nu_l \nu_j - \rho \nu_t \nu_t \delta_i^k \right\} = 0.$$

В пространстве R^N им соответствуют подвижные волновые фронты (F_t) – ударные волны. На фронтах ударных волн удовлетворяются следующие соотношения на скачки [4]:

$$[u]_{F_t} = 0, \quad [n_j \sigma_{ij} + c \rho u_{i,t}]_{F_t} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Здесь c – скорость распространения фронта волны, которая, вообще говоря, зависит от направления распространения волны. В изотропном случае, который здесь будет рассмотрен, она постоянна и равна скорости распространения продольных (c_1) или поперечных (c_2) волн; n – волновой вектор, перпендикулярный к фронту волны в R^N и направленный в сторону ее распространения: $n = \nu / \sqrt{\nu_k \nu_k}$. Первое условие – условие сплошности среды, второе – закон сохранения импульса на фронте волны.

Будем называть решения уравнений (14), непрерывные и дважды дифференцируемые всюду, кроме конечного или счетного числа волновых фронтов, на которых выполняются условия (13), (14), *классическими*.

Таким образом, требуется определить u_i^d, σ_{ij}^d , как решение уравнения (12), удовлетворяющее начальным условиям

$$u^d(x, 0) = 0, \quad x \in R^N; \quad \dot{u}^d(x, 0) = 0, \quad x \in R^N - S, \quad (13)$$

и одному типу из рассмотренных граничных условий на берегах трещины. Кроме того, в силу конечности скорости распространения возмущений в упругой среде, должны удовлетворяться условия излучения: $\exists R(t) > 0 : u^d(x, t) = 0$ для $\|x\| > R(t)$. Для моделирования процесса подвижки трещины, предположим, что на трещине известен скачок скоростей:

$$\left[\frac{\partial u^d}{\partial t} \right]_S = v_S(x, t), \quad x \in S, \quad t > 0. \quad (14)$$

Поскольку рассматривается нераскрывающаяся трещина, для всех моделей контактного взаимодействия берегов трещины нет скачка нормальной составляющей перемещений к ее поверхности: $([\dot{u}(x, t)]_S, n(x)) = 0$.

Далее при определении динамической части напряжений и перемещений индекс d опускаем.

2. Постановка и решение задачи в пространстве обобщенных функций. Для решения поставленной задачи воспользуемся аппаратом теории обобщенных функций. Введем пространство обобщенных вектор-функций $D'_N(R^{N+1}) = \{ \hat{f}(x, t) = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_N) \}$ – непрерывных линейных функционалов, определенных на пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $D_N(R^{N+1}) = \{ \varphi(x, t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \}$; $\hat{f}_k \in D'(R^N)$, $\varphi_k(x, t) \in D(R^N) : (\hat{f}, \varphi) = \sum_{k=1}^N (f_k, \varphi_k)$. Если регулярная дифференцируемая всюду, кроме поверхности F , вектор-функция f имеет конечный разрыв на F , то ее обобщенная производная равна [5]

$$\partial_j \hat{f} = f_{,j} + [f]_F \nu_j \delta_F(x, t), \quad j = 1, \dots, N, t. \quad (15)$$

Здесь первое слагаемое справа – классическая производная по x_j или t , $\|(\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_t)\| = 1$ в R^{N+1} , $\delta_F(x, t)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на F , плотность которого определяется через скачок

$$[f]_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon \nu, t + \varepsilon \nu_t) - f(x - \varepsilon \nu, t - \varepsilon \nu_t)), \quad (16)$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$. В силу непрерывности f вне соответствующего фронта волны F_t

$$[f]_{F_t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon m, t) - f(x - \varepsilon m, t)) = f^+(x, t) - f^-(x, t) = [f]_F, \quad (17)$$

$m \in R^N$, $\|m\| = 1$.

Пусть u – классическое решение (11), $H(t)$ – функция Хевисайда. Введем обобщенные функции:

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t)H(t), \quad \hat{F}_i(x, t) = F_i(x, t)H(t).$$

В среде с трещиной S $\hat{u}(x, t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$C_{ij}^{kl} u_{k,lj} + C_{ij}^{kl} [u_{k,l}]_S n_j \delta_S(x) + C_{ij}^{kl} \frac{\partial}{\partial x_j} ([u_k]_S n_l \delta_S) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho \hat{F}_i = 0. \quad (18)$$

Здесь появляются сингулярные обобщенные функции – простые $([u_{k,l}]_S n_j \delta_S)$ и двойные $\frac{\partial}{\partial x_j} ([u_k]_S n_l \delta_S)$ слои на S с плотностями, зависящими от скачка напряжений и перемещений на трещине. Кроме того мы учли условия на фронтах (12), которые обращают в нуль плотности соответствующих слоев.

Для построения обобщенного решения полученного уравнения воспользуемся его фундаментальным решением $U_i^j(x, t)$ – тензором Грина, который удовлетворяет матричному уравнению с единичной матрицей δ_i^k и δ – функцией в правой части

$$\rho^{-1} C_{ij}^{ml} U_{m,lj}^k - \hat{U}_{i,tt} = \delta_i^k \delta(x, t), \quad (19)$$

а также условиям излучения

$$\hat{U}_i^j(x, t) = 0 \quad \text{при } \|x\| > c_1 t > 0 \quad \text{и} \quad t < 0. \quad (20)$$

Согласно его свойству решение (12) можно представить в виде свертки:

$$-u_m = \hat{U}_m^i * \hat{F}_i + \hat{U}_m^i * \rho^{-1} C_{ij}^{kl} [u_{k,l}]_S n_j \delta_S + \rho^{-1} C_{ij}^{kl} \hat{U}_{m,j}^i * [u_k]_S n_l \delta_S H(t) \quad (21)$$

и оно единственно в классе функций, допускающих свертку с \hat{U} . В силу особенностей фундаментальных решений и их производных на фронтах для того, чтобы записать свертку в интегральном виде, преобразуем её, используя первообразную по t тензора Грина \hat{W} :

$$\hat{W}_i^j(x, t) = \hat{U}_i^j(x, t) * \delta(x)H(t) \equiv \hat{U}_i^j(x, t) * \hat{H}(t), \quad \hat{W}_{,t} = \hat{U}. \quad (22)$$

Столбец j этой матрицы описывает перемещения среды при действии постоянной силы с компонентами $F_i = \delta_{ij}^j \delta(x)H(t)$, сосредоточенной в начале координат, направленной вдоль оси X_j , приложенной в момент $t = 0$.

Из уравнений (19) имеем следующие свойства симметрии этих тензоров:

$$\hat{U}_i^j(x, t) = \hat{U}_j^i(-x, t) = \hat{U}_j^i(x, t), \quad \hat{W}_i^j(x, t) = \hat{W}_j^i(-x, t) = \hat{W}_j^i(x, t). \quad (23)$$

Соответствующий \hat{U}_i^j тензор напряжений, описывающий напряжения в среде, порождаемые импульсной сосредоточенной силой, действующей в направлении оси X_k , имеет вид: $\Sigma_{ij}^k = C_{ij}^{ml} U_{m,l}^k(x, t)$. Введем тензоры фундаментальных напряжений:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_i^k(x, t, n) &= \Sigma_{ij}^k(x, t) n_j, & \hat{T}_i^k(x, t, n) &= -\hat{\Gamma}_k^i(x, t, n), \\ \hat{H}_m^k(x, t, n) &= \hat{T}_m^k(x, t, n) * \hat{H}(t) = -\rho^{-1} n_l C_{ij}^{kl} \hat{W}_{m,j}^i(x, t). \end{aligned} \quad (24)$$

Тензоры \hat{T}, \hat{H} также являются фундаментальными решениями уравнений (12), но уже для сосредоточенных источников мультипольного типа [6].

Далее обозначаем $U_m^k(x, y, t) = \hat{U}_m^k(x - y, t), H_m^k(x, y, t, n) = \hat{H}_m^k(x - y, t, n)$. В силу (23) имеем

$$\begin{aligned} U_m^k(x, y, t) &= U_m^k(y, x, t) = U_k^m(y, x, t), \\ H_m^k(x, y, t, n) &= -H_m^k(y, x, t, n) = -H_m^k(x, y, t, -n). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя \hat{W} и свойства дифференцирования свертки, из (21) получим

$$\begin{aligned} -u_m &= \hat{U}_m^i * \hat{F}_i + \rho^{-1} \hat{U}_m^i * C_{ij}^{kl} [u_{k,l}]_S n_j \delta_S + \rho^{-1} C_{ij}^{kl} \hat{W}_{m,j}^i * ([\dot{u}_k]_S n_l \delta_S(x) H(t) + \\ &+ [u_k(x, +0)]_S n_l \delta_S(x) \delta(t)). \end{aligned} \quad (26)$$

Компоненты напряжений на площадке с нормалью n определяются формулой: $P_i(x, n) = \sigma_{ij} n_j = C_{ij}^{kl} u_{k,l} n_j$, а $[u_k(x, 0)]_S = 0$. С учетом этих соотношений, (13) и (25), из (26) получим интегральное представление перемещений в следующем виде:

$$\begin{aligned} -u_m(x, t) H(t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^3} U_m^i(y, x, \tau) F_i(y, t - \tau) dV(y) + \\ &+ \rho^{-1} \int_0^t d\tau \int_S U_m^k(y, x, \tau) [P_k(y, t - \tau)]_S dS(y) - \\ &- \int_0^t d\tau \int_S H_m^k(y, x, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y). \end{aligned} \quad (27)$$

Формула выражает перемещения в среде при известных скачках напряжений и скорости относительного смещения берегов трещины. Подставляя (27) в соотношения Коши и закон Гука, определяем соответствующие деформации и напряжения.

Вид входящих в (27) тензоров зависит от размерности задачи. Далее исследуем представление решения (27) в случае плоской деформации ($N=2$) для упругой изотропной среды.

3. Фундаментальные решения и их свойства ($N=2$). Тензоры $U(x, y, t), W(x, y, t)$ и $H(x, y, t, n)$ являются фундаментальными решениями уравнений (11) при действии сосредоточенного источника в точке y . Для изотропной упругой среды в случае плоской деформации U и W имеют следующий вид [6,8]:

$$\begin{aligned} U_i^j(y, x, t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{t^2}{r^2} (2r_{,i} r_{,j} - \delta_i^j) \left(\frac{c_1 H(c_1 t - r)}{\sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} - \frac{c_2 H(c_2 t - r)}{\sqrt{c_2^2 t^2 - r^2}} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{H(c_1 t - r) (\delta_i^j - r_{,i} r_{,j})}{c_1 \sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} + \frac{H(c_2 t - r) r_{,i} r_{,j}}{c_2 \sqrt{c_2^2 t^2 - r^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} W_i^k(y, x, t) &= \frac{H(c_1 t - r)}{2\pi c_1^2} \delta_i^k \ln \frac{(c_1 t + \sqrt{c_1^2 t^2 - r^2})}{r} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{H(c_j t - r)}{c_j^2} \left\{ \left(\frac{c_j t}{r} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c_j t} \right)^2} (2r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $r_{,i} = \frac{y_i - x_i}{r}$, $r = \|x - y\|$. Носителем этих функций (при фиксированном x) является внутренность двух пространственно-временных конусов $K_j = \{(y, t) : \|y - x\| = c_j t\}$, $j = 1, 2$. Внутри конуса K_2 деформации содержат как объемную, так и сдвиговую составляющие, между конусами деформация только объемная, вне их среда покоится. На поверхности конуса K_j тензор U имеет слабую особенность типа $(c_j^2 t^2 - r^2)^{-1/2}$, а тензор W непрерывен и компоненты его равны 0. В пространстве R^2 им соответствуют расширяющиеся со скоростью c_j окружности – фронты ударных волн. Производные тензора U имеют сильную особенность на фронтах типа $(c_j^2 t^2 - r^2)^{-3/2}$, что не дает возможность представить свертку (21) в интегральном виде, т.к. она содержит расходящиеся интегралы. Поэтому в (26) используем тензор W , производные которого имеют слабые особенности на фронтах типа $(c_j^2 t^2 - r^2)^{-1/2}$, что позволяет построить интегральное представление решения задачи в виде (27).

Представим W в виде: $W_i^k(x, t) = W_i^{k(d)} + W_i^{k(s)}$, где последнее слагаемое имеет слабую логарифмическую особенность при $y = x$ ($r = 0$):

$$W_i^{k(s)} = -\frac{H(c_1 t - r)}{2\pi c_1^2} \delta_i^k \ln r.$$

В плоском случае тензор H имеет следующий вид:

$$H_k^i(y, x, t, n) = \lambda n_i \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial y_k} + \mu \left(n_k \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial y_i} + \delta_{ik} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial n} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_k} (c_1^2 \Phi_{31} - c_2^2 \Phi_{32}), \quad (30)$$

$$\Phi_{1j} = \frac{H_j}{2\pi c_j^2} \ln \left(\frac{c_j t + \sqrt{c_j^2 t^2 - r^2}}{r} \right), \quad H_j = H(c_j t - r),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_{3j}(r, t) = \frac{1}{4c_j^2} \left\{ (2r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) \frac{ct \sqrt{c_j^2 t^2 - r^2}}{\pi c_j^2 r^2} + 2\delta_{ik} \Phi_{1j}(r, t) \right\}.$$

Поскольку тензор H получен, действием оператора Гука на W , его тоже можно разложить аналогичным образом:

$$H_m^k(y, x, t, n) = \rho^{-1} n_l C_{ij}^{kl} \left\{ W_{m,j}^{i(s)}(x, y, t) + W_{m,j}^{i(d)}(x, y, t) \right\} = H(c_1 t - r) H_m^{k(s)} + H_m^{k(d)}, \quad (31)$$

где

$$H_m^{k(s)} = -C_{mj}^{kl} \left\{ \frac{n_l r_{,j}}{2\pi \rho c_1^2 r} \right\}. \quad (32)$$

Составляющая тензора $H_m^{k(d)}(y, x, t, n)$ имеет слабые особенности на фронтах типа $(c_j^2 t^2 - r^2)^{-1/2}$, а $H_m^{k(s)}(y, x, n)$ – сильную особенность порядка r^{-1} при $y = x$. Верна следующая

Лемма 1. Тензор H удовлетворяет равенству

$$V.P. \int_L H_k^i(y, x, t, n(y)) dS(y) - \partial_t \int_{L^-} U_k^i(y, x, t) dV(x) = \delta_k^i H_L^-(x) H(t).$$

где L – произвольный замкнутый ляпуновский контур, ограничивающий область $L^- \subset R^2$, $H_L^-(x)$ – характеристическая функция множества L^- , равная 0,5 на L .

Для $x \notin L$ интегралы регулярные, а для $x \in L$ первый интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

Доказательство. Свернем (19) с $H(t)\delta(x)$, получим

$$\rho^{-1}C_{ij}^{ml}W_{m,lj}^k - \hat{U}_{i,t} = \delta_i^k \delta(x)H(t).$$

А теперь свернем это уравнение с $H_L^-(x)$ и используем свойство дифференцирования свертки. В результате получим аналог формулы Гаусса:

$$-\rho^{-1}C_{ij}^{ml}W_{m,l}^k * n_j \delta_L(x) - \frac{\partial U_i^k}{\partial t} * H_L^-(x) = \delta_i^k H_L^-(x)H(t).$$

Если перейдем к интегральной записи этих сверток с учетом введенных тензоров, то получим

$$\int_L H_k^i(y, x, t, n(y))dS(y) - \frac{\partial}{\partial t} \int_{L^-} U_k^i(y, x, t)dV(x) = \delta_k^i H_L^-(x)H(t). \quad (33)$$

В силу свойств фундаментальных тензоров для $x \notin L$ интегралы регулярные.

Для доказательства формулы при $x \in L$ введем следующие обозначения. Обозначим ε -окрестность точки x ($\varepsilon \ll ct, t > 0$) через $\Pi_\varepsilon(x) = \{y : r < \varepsilon\}$, $L_\varepsilon^-(x) = L^- - \Pi_\varepsilon(x)$, $L_\varepsilon^+(x) = L^+ - \Pi_\varepsilon(x)$, $L^+ = R^2 - (L + L^-)$, $O_\varepsilon(x) = \{y \in L : r \leq \varepsilon\}$, $L_\varepsilon = L - O_\varepsilon$, $O_\varepsilon^- = L^- \cap \Pi_\varepsilon$, $O_\varepsilon^+ = L^+ \cap O_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon^\pm(x) = \{y \in L^\pm : r = \varepsilon\}$, $r = \|y - x\|$, $r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial n(y)} = r_{,j} n_j(y)$.

Трансформируем контур L в окрестности точки x , обходя ее по ε -полуокружности в L^- ($\varepsilon \ll ct, t > 0$) и запишем динамический аналог формулы Грина для контуров $L_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-$ и $L_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+$:

$$\int_{L_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} H_k^i(x, y, t, n(y))dS(y) - \int_{L^- + \Pi_\varepsilon^+} \hat{U}_{k,t}^i(y, x, t)dV(x) = \delta_k^i H(t),$$

$$\int_{L_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} H_k^i(y, x, t, n(y))dS(y) - \int_{L^- - \Pi_\varepsilon^-} \hat{U}_{k,t}^i(y, x, t)dV(x) = 0.$$

Сложим эти два равенства и, используя свойства антисимметрии тензора H (25) и его разложение (30), переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, поделив на 2 и используя свойства непрерывности соответствующих интегралов от суммируемых функций, получим формулу леммы для граничных точек:

$$V.P. \int_L \theta(ct - r^-) H_k^{i(s)}(y, x, n(y))dS(y) + \int_L H_k^{i(d)}(y, x, t, n(y))dS(y) -$$

$$-\partial_t \int_{L^-} U_k^i(y, x, t)dV(x) = 0, 5\delta_k^i H(t).$$

Легко доказывается

Лемма 2. Пусть $L_\delta(x^*)$ – окружность радиуса δ – с центром в точке x^* , а $L_\delta^\pm(x^*)$ – любая полуокружность на $L_\delta(x^*)$, тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{L_\delta(x^*)} H_k^i(y, x^*, t, n(y))dS(y) = \delta_k^i H(t),$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{L_\delta^\pm(x^*)} H_k^i(y, x^*, t, n(y))dS(y) = 0, 5\delta_k^i H(t). \quad (34)$$

Доказательство. Действительно, первая формула следует из формулы леммы 1, поскольку находится внутри окружности и второй интеграл по кругу стремится к нулю. А так как для противоположных точек окружности $y^\pm = x^* \pm \varepsilon n(y^\pm)$, имеем $n(y^-) = -n(y^+) = (y^+ - x^*)/\varepsilon$, поэтому в силу (25) $H_k^i(x^+, y^+, n(y^+), t) = H_k^i(x^*, y^-, n(y^-), t)$. Отсюда следует вторая формула леммы.

4. Предельные соотношения на трещине. Для определения связи между скачками перемещений и напряжений на S исследуем формулы на основе предельного перехода по x к поверхности трещины.

Лемма 3. Для $x^* \in S$, принадлежащих концам трещины, справедлива формула

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_S \theta(c_1 t - r^\pm) H_k^{i(s)}(y, x^* \pm \varepsilon n(x^*), n(y)) dS(y) = \\ = V.P. \int_{S_t(x^*)} H_k^{i(s)}(y, x^*, n(y)) dS(y) \mp 0, 5 \delta_k^i H(t), \end{aligned}$$

где $S_t(x^*) = \{y \in S : \|y - x^*\| < c_1 t\}$.

Доказательство. Замкнем контур S гладкой кривой, т.е. представим, что S – часть гладкого ляпуновского контура L , ограничивающего область L^- , $n(x)$ – внешняя нормаль к этой области на части контура S . Ясно, что

$$\begin{aligned} \lim_{x^- \rightarrow x^*} \int_L H_k^i(y, x^-, t, n(y)) dS(y) = \\ = \lim_{x^- \rightarrow x^*} \int_S H_k^i(y, x^-, t, n(y)) dS(y) + \int_{L-S} H_k^i(y, x^-, t, n(y)) dS(y). \end{aligned} \quad (35)$$

Согласно лемме 1

$$\int_L H_k^i(y, x^-, t, n(y)) dS(y) - \rho \partial_t \int_{L^-} U_k^i(y, x^-, t) dV(x) = \rho \delta_k^i H(t),$$

следовательно, с учетом непрерывности второго интеграла

$$\lim_{x^- \rightarrow x^*} \int_L H_k^i(x, y^-, t, n(y)) dS(y) - \partial_t \int_{L^-} U_k^i(y, x^*, t) dV(x) = \delta_k^i H(t). \quad (36)$$

Но поскольку

$$V.P. \int_S H_k^i(y, x^*, t, n(y)) dS(y) + \int_{L-S} H_k^i(y, x^*, t, n(y)) dS(y) - \partial_t \int_{L^-} U_k^i(y, x^*, t) dV(x) = 0, 5 \delta_k^i H(t),$$

вычитая это равенство из (35), с учетом (34) и существования несобственного интеграла от U получим формулу леммы для нижнего знака. Аналогичные рассуждения можно провести для верхнего знака и воспользоваться свойствами симметрии тензора H (25). Лемма доказана.

А теперь исследуем предельные свойства интегралов в формуле (27).

Теорема. *Перемещения в упругой среде с закрытой трещиной (при $x \notin S$) определяются выражением*

$$-u_m(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R^3} U_m^i(y, x, t - \tau) F_l(y, \tau) dV(y) + \\ + \int_0^t d\tau \int_S (\rho^{-1} U_m^k(y, x, \tau) [P_k(y, t - \tau)]_S - H_m^k(y, x, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S) dS(y)$$

при любых интегрируемых на S $[P(x, t)]_S, [\dot{u}(x, t)]_S$. Перемещения на берегах трещины (при $x^* \in S$) определяются формулой

$$-u_m(x_\pm^*, t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_m(x^* \pm \varepsilon n(x^*), t) = \int_0^t d\tau \int_{S^-} U_m^i(y, x^*, t - \tau) F_l(y, \tau) dV(y) + \\ + \int_0^t d\tau \int_S (\rho^{-1} U_m^k(y, x^*, \tau) [P_k(y, t - \tau)]_S - H_m^{k(d)}(y, x^*, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S) dS(y) + \\ + V.P. \int_S \theta(c_1 t - r^*) H_m^{k(s)}(y, x^*, n(y)) [u_k(y, t - r^*/c_1)]_S dS(y) \pm 0,5 [u_m(x^*, t)]_S.$$

Доказательство. Первая формула теоремы следует из (26), т.к. при $x \notin S$ все интегралы регулярные. Из нее следует, что

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_m(x^\pm, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t d\tau \int_{S^-} U_m^i(y, x^\pm, t - \tau) F_l(y, \tau) dV(y) + \\ + \frac{1}{\rho} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t d\tau \int_S U_m^k(y, x^\pm, \tau) [P_k(y, t - \tau)]_S dS(y) - \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t d\tau \int_S H_m^k(y, x^\pm, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y) \quad (37)$$

соответственно верхнему и нижнему знакам. Здесь $x^\pm = x^* \pm \varepsilon n(x^*), x^* \in S$.

Преобразуем последнее слагаемое (обозначим его (I_H^\pm)), используя разложение для H (30). В частности,

$$I_H^- = - \int_0^t d\tau \int_S \theta(c_1 t - r^-) H_m^{k(s)}(y, x^-, t, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y) - \\ - \int_0^t d\tau \int_S H_m^{k(d)}(y, x^-, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y). \quad (38)$$

Меняя порядок интегрирования в первом интеграле, получим

$$\begin{aligned} & - \int_S \theta(c_1 t - r^-) H_m^{k(s)}(y, x^-, n(y)) dS(y) \int_{r^-/c_1}^t [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S d\tau - \\ & - \int_0^t d\tau \int_S H_m^{k(d)}(y, x^-, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y) = \\ & = \int_S \theta(c_1 t - r^-) H_m^{k(s)}(y, x^-, n(y)) ([u_k(y, t - r^-/c_1)]_S - [u_k(y, 0)]_S) dS(y) - \\ & - \int_0^t d\tau \int_S H_m^{k(d)}(y, x^-, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y). \end{aligned}$$

Такие же действия проводим для I_H^+ . При $t = 0$ в силу (13) имеем (соответственно знакам)

$$\begin{aligned} I_H^\pm & = \int_S \theta(c_1 t - r^\pm) H_m^{k(s)}(y, x^\pm, n(y)) [u_k(y, t - r^\pm/c_1)]_S dS(y) - \\ & - \int_0^t d\tau \int_S H_m^{k(d)}(y, x^\pm, \tau, n(y)) [\dot{u}_k(y, t - \tau)]_S dS(y). \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл (I_{1H}^\pm) соответственно, например, верхнему знаку. Преобразуем его к виду, используя лемму 3:

$$\begin{aligned} I_{1H}^+ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S \left\{ \theta(c_1 t - r^+) H_m^{k(s)}(y, x^+, n(y)) [u_k(y, t - r^+/c_1) - u_k(x^*, t)]_S \right\} dS(y) + \\ & + [u_k(x^*, t)] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S \theta(c_1 t - r^+) H_m^{k(s)}(y, x^+, n(y)) dS(y) = \\ & = V.P. \int_S \theta(c_1 t - r^*) H_m^{k(s)}(y, x^*, n(y)) [u_k(y, t - r^*/c)]_S dS(y) - 0,5 [u_k(x^*, t)]_S. \quad (39) \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$I_{1H}^- = V.P. \int_S \left\{ \theta(c_1 t - r^*) H_m^{k(s)}(y, x^*, n(y)) [u_k(y, t - r^*/c_1)]_S \right\} dS(y) + 0,5 [u_k(x^*, t)]. \quad (40)$$

А теперь найдем пределы в формуле (36) с учетом этих соотношений и интегрируемости тензора U по площади и по кривой. Первые два интеграла справа непрерывны по x , а третий интеграл представим в виде (37), где второе слагаемое непрерывно в силу непрерывности динамического тензора $H_m^{k(d)}(x, t, n)$ при $x = 0$. Отсюда с учетом (39), (40) получаем вторую формулу теоремы. Теорема доказана.

Первая формула теоремы выражает перемещения в среде через скачки напряжений, перемещений и скоростей перемещений на трещине. Таким образом, для решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния среды при возникновении трещины или при сбросе напряжений на трещине, необходимо знать $[P_k(x, t)]_S$ ($k = 1, 2$) и $[\dot{u}_k(x, t)]_S$ или

$[u_k(x, t)]_S$, т.к. они определяются друг через друга: $[u_k(x, t)]_S = \int_0^t [\dot{u}_k(x, \tau)]_S d\tau$. Скачок скорости перемещений задан соотношением (14). Определение скачка напряжений зависит от модели контакта берегов. В случае контактных условий (7),(8) необходимо исследование напряжений на трещине, что приводит к гиперсингулярным интегралам. Здесь пока на этом вопросе останавливаться не будем. При вязком контактном взаимодействии (9) имеем

$$[P(x, t)]_S = -\gamma ([\dot{u}_k]_S - n_k [\dot{u}_i n_i]_S). \quad (41)$$

Далее, используя формулы теоремы 1, можно определить перемещения в среде. Подставляя их в закон Гука, находим напряжения в среде.

Цитированная литература

1. **Костров Б.В.** Механика очага тектонического землетрясения. М., 1979.
2. **Райс Дж.** Математические методы в механике разрушения. М. 1973.
3. **Слепян Л.И.** Механика трещин. Ленинград, 1981.
4. **Петрашень Г.И.** Основы математической теории распространения упругих волн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., Т.18. 1978.
5. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М., 1978.
6. **Алексеева Л.А.** // ПММ. 1991. Т.55, № 2. С.298 – 308.
7. **Кеч В., Теодореску П.** Введение в теорию обобщенных функций с приложением в технике. М., 1978.
8. **Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.М., Жанбырбаев Н.Б.** Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата, 1992.

Поступила в редакцию 05.07.2007г.

УДК 517.5

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕННОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ. II

Д. Б. БАЗАРХАНОВ

Институт математики МО и Н РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

Эта статья является продолжением работы [1]. Здесь приводится доказательство теоремы 1 из [1], а также доказываются теорема вложения и теорема продолжения для функциональных пространств типа Никольского-Бесова $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ и Лизоркина-Трибеля $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$.

4. Доказательство теоремы о ретракции. Напомним формулировку теоремы о ретракции для пространств $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ и $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ из [1].

Теорема 1. *Пространство $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ при $p \in [1, \infty]^d, q \in [1, \infty]^n, s \in S(G; m', m)$ является ретрактом пространства $l_q(L_{p,s_k}(G))$.*

Пространство $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ при $p \in (1, \infty)^d, q \in (1, \infty)^n, s \in S(G; m', m)$ является ретрактом пространства $L_p(G, l_{q,s})$.

При этом операторы \mathcal{S} (коретракция) и \mathcal{R} (ретракция) задаются формулами

$$(\mathcal{S}f)_k(x) = f_k(x), \quad k \in \mathbb{N}_0^n, \quad x \in G, \quad (8)$$

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} (\Omega_k^+ * h_k)(x), \quad x \in G. \quad (9)$$

Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы 1 работы [2]. В его основе (так же как и доказательств теорем 3 (вложения) и 4 (продолжения) ниже) лежат следующие две ключевые леммы. (Будем использовать без пояснений определения, обозначения из [1]; нумерация формул здесь продолжает нумерацию из [1].)

Keywords: *function space, variable smoothness, mixed smoothness, (co)retraction, equivalent norms*

2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

© Д. Б. Базарханов, 2007.

Лемма 1. Пусть $s = s(x) = \{s_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} \in \mathcal{S}(G; m', m)$, $p, r \in [1, \infty]^d$, $p_j \leq r_j, j \in \epsilon_d$, $q \in [1, \infty]^n$, $N \in \mathbb{N}^n, \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где

$$\gamma_\nu := \min \left\{ m'_\nu - \sum_{j \in \epsilon^\nu} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right), N_\nu - m_\nu + \sum_{j \in \epsilon^\nu} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right) \right\},$$

$$t(x) = \{t_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}, \text{ где } t_k(x) = s_k(x) \cdot \prod_{\nu \in \epsilon_n} 2^{-k_\nu \sum_{j \in \epsilon^\nu} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right)}, k \in \mathbb{N}_0^n.$$

Тогда

$$\mathcal{S} : MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G) \rightarrow l_q(L_{r,t_k}(G)) \tag{17}$$

и при $\gamma > 0 (\Leftrightarrow \gamma_\nu > 0, \nu \in \epsilon_n)$

$$\mathcal{R} : l_q(L_{p,s_k}(G)) \rightarrow MB_{r,q}^{t,\epsilon}(G), \tag{18}$$

причем норма в $MB_{r,q}^{t,\epsilon}(G)$ построена с помощью смешанных разностей порядка N .

Замечание 1. Как обычно, мы используем обозначение $T : X \rightarrow Y$ для ограниченного линейного оператора T из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y .

Доказательство. ради простоты обозначений проведем для $G = \mathbb{R}^d$, т.е. $G_i = \mathbb{R}^{d_i}, i \in \epsilon_n$.

Сначала докажем (17), т.е. ограниченность \mathcal{S} как оператора из $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ в $l_q(L_{p,t_k}(G))$. Пусть $f(x) \in MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$. Предварительно оценим норму

$$\|f_k | L_{r,t_k}\| = \|t_k f_k | L_r\|, k \in \mathbb{N}_0^n. \tag{19}$$

Если $k = 0$, то с помощью неравенства Юнга для сверток (в случае векторных норм, см. [3, §2, формула (18)]), принимая во внимание свойство 2) определения 1 (с учетом гладкости ядра Ω_0 и компактности его носителя), имеем

$$\|f_0 | L_{r,t_0}\| = \|t_0 f_0 | L_r\| = \|s_0 f_0 | L_r\| \leq C_1 \|s_0 f | L_p\| = C_1 \|f | L_{p,s_0}\|. \tag{20}$$

Пусть теперь $k \in \mathbb{N}_0^n, k \neq 0$; считаем для простоты записи, что $k_i \geq 1, i \in \epsilon = \{\nu, \dots, n\}, k_i = 0, i \in \bar{\epsilon} (1 \leq \nu \leq n)$.

Для $g(\mathbf{x}_i) \in L(G_i, loc)$ верно интегральное представление ($k_i \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} g_{k_i}(\mathbf{x}_i) &\equiv (\Omega_{k_i}^i - \Omega_{k_i-1}^i) * g(\mathbf{x}_i) = \\ &= \int_{2^{-k_i}}^{2^{-k_i+1}} \frac{d\tau_i}{\tau_i^{1+2d_i}} \int \int K_i\left(\frac{\mathbf{y}_i}{\tau_i}, \frac{\mathbf{z}_i}{\tau_i}\right) \Delta^{M_i}(\delta_i \mathbf{z}_i) g(\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i + \mathbf{z}_i) d\mathbf{y}_i d\mathbf{z}_i, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$K_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i) = 2\mathcal{K}_i \sum_{j \in \epsilon^{(i)}} y_j \omega_i(\mathbf{y}_i) \partial_j \tilde{\Omega}_i^i(\mathbf{z}_i),$$

$$|K_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)| \leq 2\mathcal{K}_i \bar{\omega}_i(\mathbf{z}_i) \bar{\Omega}_i(\mathbf{y}_i), \quad \bar{\omega}_i(\mathbf{z}_i) = |\mathbf{z}_i| |\omega_i(\mathbf{z}_i)|,$$

$$\bar{\Omega}_i(\mathbf{y}_i) = \sum_{j \in \epsilon^{(i)}} |\partial_j \tilde{\Omega}_i^i(\mathbf{y}_i)|,$$

подробный вывод которого приведен в [2, формула (9)] (он также намечен в [3, §3, формула (80)]). Применяя формулу (21) по \mathbf{x}_i , $i \in \epsilon$, получим следующее представление f_k :

$$f_k(\mathbf{x}) = \int_{2^{-k\nu}}^{2^{-k\nu+1}} \frac{d\tau_\nu}{\tau_\nu^{1+2d_\nu}} \cdots \int_{2^{-k_n}}^{2^{-k_n+1}} \frac{d\tau_n}{\tau_n^{1+2d_n}} \int \int \cdots \int \int$$

$$\left(\prod_{i \in \epsilon} K_i\left(\frac{\mathbf{y}_i}{\tau_i}, \frac{\mathbf{z}_i}{\tau_i}\right) \right) \Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n)$$

$$\left[\left(\prod_{i \in \bar{\epsilon}} \Omega_0^i(\mathbf{x}_i) \right) * f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{x}_\nu + \mathbf{y}_\nu + \mathbf{z}_\nu, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n) \right] d\mathbf{y}(\epsilon) d\mathbf{z}(\epsilon) =$$

$$= \int_{2^{-k\nu}}^{2^{-k\nu+1}} \frac{d\tau_\nu}{\tau_\nu^{1+2d_\nu}} \cdots \int_{2^{-k_n}}^{2^{-k_n+1}} \frac{d\tau_n}{\tau_n^{1+2d_n}} \int \int \cdots \int \int$$

$$\left(\prod_{i \in \epsilon} K_i\left(\frac{\mathbf{y}_i}{\tau_i}, \frac{\mathbf{z}_i}{\tau_i}\right) \right) \left[\left(\prod_{i \in \bar{\epsilon}} \Omega_0^i(\mathbf{x}_i) \right) * \right.$$

$$\left. \left(\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{x}_\nu + \mathbf{y}_\nu + \mathbf{z}_\nu, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n) \right) \right] d\mathbf{y}(\epsilon) d\mathbf{z}(\epsilon). \quad (22)$$

Последовательно внося $t_k(x)$ под знак интеграла в (21), оценивая $t_k(x)$ по свойству 2) определения 1 (здесь мы принимаем во внимание вид ядра $K_i(\cdot, \cdot)$, $i \in \epsilon$) следующим образом:

$$t_k(x) = s_k(x) \prod_{i \in \epsilon} 2^{-k_i \sum_{j \in \epsilon_i} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}\right)} \leq C_2 s_k(x + y(\epsilon) + z(\epsilon)) \prod_{i \in \epsilon} 2^{-k_i \sum_{j \in \epsilon_i} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}\right)},$$

затем подставляя полученное выражение в правую часть (19), применяя обобщенное неравенство Минковского (в случае векторных норм, см. [3, §2, формулы (12), (13)]) к интегралам по τ_i и по \mathbf{z}_i , $i \in \epsilon$, неравенство Юнга для свертки ([3, §2, формула (18)]) с $\left(\prod_{i \in \epsilon} K_i\left(\frac{\mathbf{y}_i}{\tau_i}, \frac{\mathbf{z}_i}{\tau_i}\right) \right) \left(\prod_{i \in \bar{\epsilon}} \Omega_0^i(\mathbf{x}_i) \right)$ и делая элементарные замены переменных в интегралах по $\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$, затем по τ_i , $i \in \epsilon$, получим

$$\|f_k | L_{r,t_k}\| \leq C_3 \sup_{|\mathbf{z}_i| \leq 1, i \in \epsilon} \|s_k \Delta_\nu^M(2^{-k\nu} \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta_n^M(2^{-k_n} \mathbf{z}_n) f | L_p\|.$$

Отсюда и из (20) следует (17)¹:

$$\|\mathcal{S}f | l_q(L_{r,t_k}(G))\| \leq \|f_0 | L_{r,t_0}(G)\| + \sum_{\emptyset \neq \epsilon} \left\| \left\{ \|f_{k(\epsilon)} | L_{r,t_{k(\epsilon)}}(G)\| \right\}_{k(\epsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}} \right\| l_q(\epsilon) \leq$$

¹В [1] в формулах (2), (3) определения 2 имеется опечатка: следует убрать знак " $\sum_{k(\epsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}}$ "

$$C_4 \left(\|s_0 f_0\|_{L_p(G)} + \sum_{\varepsilon \neq \emptyset} \left\| \left\{ \sup_{|z_i| \leq 1, i \in \varepsilon} \|s_{k(\varepsilon)} \Delta^{M(\varepsilon)}(2^{-k(\varepsilon)} z(\varepsilon), G) f\|_{L_p(G)} \right\}_{k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\varepsilon|}} \right\|_{l_q(\varepsilon)} \right) \equiv C_4 \|f\|_{MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)}.$$

Теперь установим (18) при условии, что $\gamma > 0$ ($\Leftrightarrow \gamma_\nu > 0, \nu \in \varepsilon_n$), т.е. ограниченность \mathcal{R} как оператора из $l_q(L_{p,s_k}(G))$ в $MB_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)$. Пусть $h(x) = \{h_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} \in l_q(L_{p,s_k}(G))$.

Последовательно используя свойства 3)²⁾ и 2) определения 1 (мы учитываем вид носителя ядра Ω_k^+), неравенство Юнга для свертки ([3, §2, формула (18)]) (при этом, очевидно, $\|\Omega_k^+\|_{L_v} \leq C_v(\tilde{\Omega}^1, \dots, \tilde{\Omega}^n) \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{k_i(d_i - \sum_{j \in \varepsilon_i} \frac{1}{v_j})} = C(v, \tilde{\Omega}^1, \dots, \tilde{\Omega}^n) \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{k_i \sum_{j \in \varepsilon_i} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j})}$; здесь и ниже $v \in [1, \infty]^d : \frac{1}{v_j} = 1 - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{r_j}, j \in \varepsilon_d$) и неравенство Гельдера для рядов (в случае векторных норм), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}h\|_{L_{r,t_0}} &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \Omega_k^+ * h_k \right\|_{L_{r,t_0}} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \|\Omega_k^+ * h_k\|_{L_{r,t_0}} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \|s_0 \cdot (\Omega_k^+ * h_k)\|_{L_r} \leq C_5 \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \|s_k(\Omega_k^+ * h_k)\|_{L_r} \cdot 2^{-(k, m')} \leq \\ &= C_6 \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \|\Omega_k^+ * (s_k h_k)\|_{L_r} \cdot 2^{-(k, m')} \leq C_7 \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \|s_k h_k\|_{L_p} \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{k_i (\sum_{j \in \varepsilon_i} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}) - m'_i)} \leq \\ &= C_7 \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} 2^{-(k, \gamma)} \|s_k h_k\|_{L_p} \leq C_8 \|h_k\|_{l_q(L_{p,s_k}(G))}. \end{aligned} \tag{23}$$

Оценим теперь при $\varepsilon \neq \emptyset$ величину

$$B_\varepsilon = \left\| \left\{ \sup_{|z_i| \leq 1, i \in \varepsilon} \|t_{l(\varepsilon)} \Delta^{N(\varepsilon)}(2^{-l(\varepsilon)} z(\varepsilon)) \mathcal{R}h\|_{L_r} \right\} \right\|_{l_q(\varepsilon)}.$$

Снова для простоты считаем, что $\varepsilon = \{\nu, \dots, n\}$ ($1 \leq \nu \leq n$). Положим $h_k^* = \Omega_k^+ * h_k, k \in \mathbb{N}_0^n$. Ясно, что

$$B_\varepsilon \leq \left\| \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \sup_{|z_i| \leq 1, i \in \varepsilon} \|t_{l(\varepsilon)} \Delta^{N(\varepsilon)}(2^{-l(\varepsilon)} z(\varepsilon)) h_k^*\|_{L_r} \right\} \right\|_{l_q(\varepsilon)}. \tag{24}$$

Покажем, что

$$\sup_{|z_i| \leq 1, i \in \varepsilon} \|t_{l(\varepsilon)} \Delta^{N(\varepsilon)}(2^{-l(\varepsilon)} z(\varepsilon)) h_k^*\|_{L_r} \leq C_9 \cdot \prod_{i \in \varepsilon} 2^{-k_i \gamma_i} \prod_{i \in \varepsilon} 2^{-|l_i - k_i| \gamma_i} \|s_k h_k\|_{L_p}, \quad k \in \mathbb{N}_0^n. \tag{25}$$

Пусть $k_i < l_i$ при $i \in \varepsilon'$ и $k_i \geq l_i$ при $i \in \bar{\varepsilon}'$, ясно, что $\varepsilon' \subset \varepsilon$; положим $\varepsilon'' = \bar{\varepsilon}' \cap \varepsilon$. Хорошо известно (см., например, [4, гл. III, §3, формула(4)]), что для (достаточно гладкой) функции

²⁾По недосмотру автора в работе [1] свойство 3) определения 1 дано в неполном виде; правильная формулировка следующая: 3) существует такое число $c > 0$, что

$$\frac{s_l(x)}{s_k(x)} \leq c \prod_{l_\nu \geq k_\nu} 2^{(l_\nu - k_\nu) m_\nu} \prod_{l_\nu < k_\nu} 2^{(l_\nu - k_\nu) m'_\nu}, \quad \text{при } x \in G, k, l \in \mathbb{N}_0^n$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ верно следующее представление ее N -й разности ($N \in \mathbb{N}$)

$$\Delta^N(y)g(x) = \int_0^y du_1 \dots \int_0^y du_N g^{(N)}(x + u_1 + \dots + u_N) \equiv \int_{[0,y]^N} g^{(N)}(x + u_1 + \dots + u_N) d\mathbf{u}. \quad (26)$$

Применяя формулу (26) к разностям $\Delta^{N_i}(2^{-l_i}z_i)$ при $i \in \varepsilon'$, с учетом свойств 2) и 3) определения 1, а затем обобщенное неравенство Минковского и неравенство Юнга для свертки, получим (здесь $|z_i| \leq 1$, $i \in \varepsilon$)

$$\begin{aligned} & \|t_{l(\varepsilon)}(\mathbf{x})\Delta^{N(\varepsilon)}(2^{-l(\varepsilon)}\mathbf{z}(\varepsilon))h_k^*(\mathbf{x})\|_{L_r} \leq C_{10} \sum_{0 \leq b_i \leq N_i, i \in \varepsilon''} \prod_{i \in \varepsilon'} 2^{(k_i - l_i)N_i}. \\ & \prod_{i \in \varepsilon} 2^{-l_i \sum_{j \in \varepsilon(i)} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j})} \cdot \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{k_i d_i} \left\| \int_{\prod_{i \in \varepsilon'} [0,1]^{N_i}} \prod_{i \in \varepsilon'} d\mathbf{u}^{(i)} \int \frac{s_{l(\varepsilon)}(\mathbf{x})}{s_k(\mathbf{x})} \cdot \frac{s_k(\mathbf{x})}{s_k(\mathbf{y})} \right. \\ & \left. \prod_{k_i \geq 1} \left[\partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-2^{k_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i + b_i 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'') + (u_1^i + \dots + u_{N_i}^i) 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'))) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-2^{k_i-1}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i + b_i 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'') + (u_1^i + \dots + u_{N_i}^i) 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'))) \right] \right. \\ & \left. \cdot \prod_{k_i=0} \partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i + b_i 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'') + (u_1^i + \dots + u_{N_i}^i) 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'))) s_k(\mathbf{y}) h_k(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_{L_r} \leq \\ & C_{11} \prod_{i \in \varepsilon'} 2^{(k_i - l_i)N_i} \cdot \prod_{i \in \varepsilon} 2^{-l_i \sum_{j \in \varepsilon(i)} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j})} \cdot \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{k_i d_i} \prod_{i \in \varepsilon'} 2^{(l_i - k_i)m_i} \prod_{i \in \bar{\varepsilon}'} 2^{(l_i - k_i)m'_i} \\ & \int_{\prod_{i \in \varepsilon'} [0,1]^{N_i}} \prod_{i \in \varepsilon'} d\mathbf{u}^{(i)} \left\| \prod_{k_i \geq 1} |\partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-2^{k_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i + b_i 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'') + (u_1^i + \dots + u_{N_i}^i) 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'))) + \right. \\ & \left. + \partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-2^{k_i-1}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i + b_i 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'') + (u_1^i + \dots + u_{N_i}^i) 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'))) \right| \cdot \\ & \left. \prod_{k_i=0} |\partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i + b_i 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'') + (u_1^i + \dots + u_{N_i}^i) 2^{-l_i} \mathbf{z}_i(\varepsilon'))) \right| \cdot |s_k(\mathbf{y}) h_k(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right\|_{L_r} \leq \\ & \leq C_{12} \prod_{i \in \varepsilon'} 2^{(k_i - l_i)N_i} \cdot \prod_{i \in \varepsilon} 2^{-l_i \sum_{j \in \varepsilon(i)} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j})} \cdot \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{k_i d_i} \prod_{i \in \varepsilon'} 2^{(l_i - k_i)m_i} \prod_{i \in \bar{\varepsilon}'} 2^{(l_i - k_i)m'_i} \\ & \left\| \prod_{k_i \geq 1} |\partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-2^{k_i} \cdot) + \partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(-2^{k_i-1} \cdot)| \cdot \prod_{k_i=0} |\partial^{\alpha_i(\varepsilon')} \tilde{\Omega}^i(\cdot)| \right\|_{L_v} \cdot \|s_k h_k\|_{L_p} \leq \\ & C_9 \prod_{i \in \varepsilon'} 2^{|k_i - l_i|(N_i - m_i + \sum_{j \in \varepsilon(i)} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}))} \cdot \prod_{i \in \bar{\varepsilon}'} 2^{-|k_i - l_i|(m'_i - \sum_{j \in \varepsilon(i)} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}))} \|s_k h_k\|_{L_p} \leq \\ & C_9 \prod_{i \in \varepsilon} 2^{|k_i - l_i| \gamma_i} \prod_{i \in \bar{\varepsilon}} 2^{-k_i \gamma_i} \|s_k h_k\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (25). Из (25) и (24) следует, что (для произвольного $\varepsilon \neq \emptyset$)

$$B_\varepsilon \leq C_9 \left\| \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{|k_i - l_i| \gamma_i} \|s_k h_k\|_{L_p} \right\}_{l \in \mathbb{N}_0^n} \right\| l_q,$$

применяя теперь неравенство Юнга для свертки рядов (см., например, [5, теорема 276]), имеем далее

$$B_\varepsilon \leq C_{10} \left\| \left\{ \|s_k h_k\|_{L_p} \right\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} \right\| l_q \equiv C_{10} \|h\|_{l_q(L_{p, s_k}(G))}.$$

Итак, из (23) и последнего неравенства находим, что

$$\|\mathcal{R}h\|_{MB_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)} \leq C_{14} \|h\|_{l_q(L_{p, s_k}(G))},$$

тем самым доказательство (18), а вместе с ним и леммы 1, завершено.

Лемма 2. Пусть $s = s(x) = \{s_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} \in \mathcal{S}(G; m', m)$, $p, r \in (1, \infty)^d$, $p_j \leq r_j, j \in \varepsilon_d$, $q \in (1, \infty)^n$, $t(x) = \{t_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$, $t_k(x) = s_k(x) \cdot \prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{-k_i \sum_{j \in \varepsilon^i} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j})}$, $k \in \mathbb{N}_0^n$. Тогда

$$\mathcal{S} : MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G) \rightarrow L_r(G, l_{q,t}) \tag{27}$$

и

$$\mathcal{R} : L_p(G, l_{q,s}) \rightarrow MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G). \tag{28}$$

Доказательство. ради простоты записи проведем при $G = \mathbb{R}^d$ ($G_i = \mathbb{R}^{d_i}, i \in \varepsilon_n$).

Сначала докажем (27). Пусть $f \in MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)$. Мы уже установили, что (см. (20))

$$\|f_0\|_{L_{r,t_0}} \leq C_1 \|f\|_{L_{p,s_0}}. \tag{29}$$

Пусть теперь $k \in \mathbb{N}_0^n$, $k \neq 0$; считаем для простоты, что $k_i \geq 1, i \in \varepsilon = \{\nu, \dots, n\}$, $k_i = 0, i \in \bar{\varepsilon}$ ($1 \leq \nu \leq n$). Используя интегральное представление (22) с учетом оценок ядер из (21), получим следующую поточечную оценку для $f_k(\mathbf{x})$:

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq C_{15} \prod_{i \in \varepsilon} 2^{k_i d_i} \int \int \left(\prod_{i \in \varepsilon} \bar{\Omega}^i(2^{k_i} \mathbf{y}_i) \bar{\omega}^i(2^{k_i} \mathbf{z}_i) \right) |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\mathbf{x} + \mathbf{y}(\varepsilon))| d\mathbf{y}(\varepsilon) d\mathbf{z}(\varepsilon),$$

где $\bar{\Omega}^i, \bar{\omega}^i$ — некоторые неотрицательные непрерывные финитные функции. Считая $\delta_i \in (0, 1), i \in \varepsilon$, достаточно малыми, отсюда имеем

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq C_{16} \prod_{i \in \varepsilon} 2^{k_i d_i} \int \left(\prod_{i \in \varepsilon} \bar{\Omega}^i(2^{k_i} \mathbf{y}_i) \right) d\mathbf{y}(\varepsilon) \int_{|\mathbf{z}_\nu| \leq 1} \dots \int_{|\mathbf{z}_n| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\mathbf{x} + \mathbf{y}(\varepsilon))| d\mathbf{z}(\varepsilon).$$

Далее, используя свойство 2) определения 1 (с учетом компактности носителя $\bar{\Omega}^i, i \in \varepsilon$), получаем

$$t_k(\mathbf{x}) |f_k(\mathbf{x})| \leq C_{17} \prod_{i \in \varepsilon} 2^{k_i(d_i - \sum_{j \in \varepsilon^i} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}))} \int \left(\prod_{i \in \varepsilon} \bar{\Omega}^i(2^{k_i} \mathbf{y}_i) \right) \tag{30}$$

$$\left[s_k(\mathbf{x} + \mathbf{y}(\varepsilon)) \int_{|\mathbf{z}_\nu| \leq 1} \dots \int_{|\mathbf{z}_n| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\mathbf{x} + \mathbf{y}(\varepsilon))| d\mathbf{z}(\varepsilon) \right] d\mathbf{y}(\varepsilon)$$

Заметим, что если $\text{supp } \bar{\Omega}^i \subset [-\rho_i, \rho_i]^{d_i}$, то $\bar{\Omega}^i(2^{k_i} \mathbf{y}_i) = 0$ при $2^{k_i} |y_j| \geq \rho_i, j \in \epsilon^{(i)}$. Следовательно,

$$2^{k_i(d_i - \sum_{j \in \epsilon^{(i)}} (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}))} \bar{\Omega}^i(2^{k_i} \mathbf{y}_i) \leq C_{18} \prod_{j \in \epsilon^{(i)} \cap \tilde{\epsilon}} \frac{1}{|y_j|^{1-1/p_j+1/r_j}} \prod_{j \in \epsilon^{(i)} \setminus \tilde{\epsilon}} \frac{\chi_{[-\rho_i 2^{-k_i}, \rho_i 2^{-k_i}]}(y_j)}{|[-\rho_i 2^{-k_i}, \rho_i 2^{-k_i}]|}, \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{d_i},$$

здесь χ_A — характеристическая функция множества A , $\tilde{\epsilon} = \{j \in \epsilon_d : p_j < r_j\}$; положим еще $\hat{\epsilon} = (\cup_{i \in \epsilon^{(i)}} \setminus \tilde{\epsilon})$. Поэтому из (30) находим

$$t_k(\mathbf{x}) |f_k(\mathbf{x})| \leq C_{19} \int_{\mathbb{R}^{|\hat{\epsilon}|}} \left(\prod_{i \in \hat{\epsilon}} \frac{1}{|y_j|^{1-1/p_j+1/r_j}} \right)$$

$$\mathcal{M}_{\hat{\epsilon}} \left[s_k(\cdot) \int_{|\mathbf{z}_\nu| \leq 1} \dots \int_{|\mathbf{z}_n| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\cdot)| d\mathbf{z}(\varepsilon) \right] (\mathbf{x} + \mathbf{y}(\tilde{\epsilon})) d\mathbf{y}(\tilde{\epsilon}).$$

Здесь $\mathcal{M}_{\hat{\epsilon}} g(\mathbf{x})$ — сильная максимальная функция для функции g по переменным $x_j, j \in \hat{\epsilon}$. (Напомним, что для функции $f \in L(\mathbb{R}, \text{loc})$ $\mathcal{M}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x+y)| dy$ — максимальная функция Харди-Литтлвуда; для $g \in L(\mathbb{R}^d, \text{loc}), \epsilon \in \epsilon_d$ $\mathcal{M}_\epsilon g(\mathbf{x}) = (\prod_{j \in \epsilon} \mathcal{M}_j)g(\mathbf{x})$, где \mathcal{M}_j — это оператор \mathcal{M} , действующий на $g(\mathbf{x})$ по j -й переменной.) Отсюда по обобщенному неравенству Минковского находим

$$\| t_k(\mathbf{x}) |f_k(\mathbf{x})| \|_{l_{q(\varepsilon)}} \leq C_{19} \int_{\mathbb{R}^{|\hat{\epsilon}|}} \left(\prod_{i \in \hat{\epsilon}} \frac{1}{|y_j|^{1-1/p_j+1/r_j}} \right)$$

$$\| \mathcal{M}_{\hat{\epsilon}} \left[s_k(\cdot) \int_{|\mathbf{z}_\nu| \leq 1} \dots \int_{|\mathbf{z}_n| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\cdot)| d\mathbf{z}(\varepsilon) \right] (\mathbf{x} + \mathbf{y}(\tilde{\epsilon})) \|_{l_{q(\varepsilon)}} \| d\mathbf{y}(\tilde{\epsilon}).$$

Наконец, применяя теорему Харди-Литтлвуда (см., например, [3, §2, формула (32)]) по переменным $x_j, j \in \epsilon$, и обобщенное неравенство Минковского по остальным переменным, а затем вариант максимального неравенства Бэбби [6] (сформулированный в [7, лемма 4]), обобщающего известное максимальное неравенство Феффермана-Стейна [8] (см. также [9, теорема 1.2.3]), имеем отсюда

$$\begin{aligned} & \| \{ t_k(\mathbf{x}) |f_k(\mathbf{x})| \}_{k=k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}} \|_{L_r(G, l_{q(\varepsilon)})} \leq \\ C_{20} & \| \mathcal{M}_{\hat{\epsilon}} \left[s_k(\cdot) \int_{|\mathbf{z}_\nu| \leq 1} \dots \int_{|\mathbf{z}_n| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\cdot)| d\mathbf{z}(\varepsilon) \right] (\mathbf{x}) \}_{k=k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}} \|_{L_p(G, l_{q(\varepsilon)})} \leq \\ & \leq C_{21} \| \{ s_k(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{z}_\nu| \leq 1} \dots \int_{|\mathbf{z}_n| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(\delta_\nu \mathbf{z}_\nu) \dots \Delta^{M_n}(\delta_n \mathbf{z}_n) f(\mathbf{x})| d\mathbf{z}(\varepsilon) \}_{k=k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}} \|_{L_p(G, l_{q(\varepsilon)})}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (29) получаем

$$\| \{ f_k(\mathbf{x}) \}_{k=k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}} \|_{L_r(G, l_{q,t})} \leq \| t_0(\mathbf{x}) f_0(\mathbf{x}) \|_{L_r(G)} +$$

$$\sum_{\varepsilon \neq \emptyset} \|\{t_{k(\varepsilon)}|f_{k(\varepsilon)}(\mathbf{x})|\}_{k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\varepsilon|}} \|L_r(G, l_{q(\varepsilon)})\| \leq C_{22} \|f\| MF_{p,q}^{s,\varepsilon};$$

тем самым (27) доказано.

Теперь докажем (28). Пусть $h(\mathbf{x}) = \{h_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} \in L_p(G, l_{q,s})$. Имеем

$$\begin{aligned} \|s_o \mathcal{R}h\|_{L_p} &\leq C_{23} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} 2^{(k,m')} s_k(\cdot) |\Omega_k^+| * |h_k|(\cdot) \right\|_{L_p} \leq \\ C_{24} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} 2^{(k,m')} |\Omega_k^+| * |s_k h_k|(\cdot) \right\|_{L_p} &\leq C_{25} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} 2^{(k,m')} \mathcal{M}_{\varepsilon_d}[s_k h_k](\cdot) \right\|_{L_p} \leq \\ C_{26} \|\{\mathcal{M}_{\varepsilon_d}[s_k h_k](\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}\|_{L_p(l_q)} &\leq C_{27} \|h\|_{L_p(G, l_{q,s})} \end{aligned} \quad (31)$$

Далее, оценим при $\varepsilon \neq \emptyset$ величину

$$F_\varepsilon := \|\{s_{l(\varepsilon)}(\mathbf{x}) \int_{|z_i| \leq 1, i \in \varepsilon} |\Delta^{M(\varepsilon)}(2^{-l(\varepsilon)} z(\varepsilon)) \mathcal{R}h(\mathbf{x})| dz(\varepsilon)\}_{l(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\varepsilon|}}\|_{L_p(G, l_{q(\varepsilon)})}.$$

Как выше считаем, что $\varepsilon = \{\nu, \dots, n\}$, $1 \leq \nu \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{l(\varepsilon)}(\mathbf{x}) \int_{|z_i| \leq 1} \dots \int_{|z_i| \leq 1} |\Delta^{M_\nu}(2^{-l_\nu} z_\nu) \dots \Delta^{M_n}(2^{-l_n} z_n) \mathcal{R}h(\mathbf{x})| dz(\varepsilon) &\leq \\ \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} s_{l(\varepsilon)}(\mathbf{x}) \left(\prod_{i \in \varepsilon, |z_i| \leq 1} |\Delta^{M_i}(2^{-l_i} z_i) \Omega_{k_i}^+(\mathbf{x}_i)| dz_i \right) * |h_k(\mathbf{x})| &\leq \\ C_{28} \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} s_{l(\varepsilon)}(\mathbf{x}) \left(\prod_{i \in \varepsilon, l_i > k_i} 2^{(k_i - l_i) M_i} 2^{k_i d_i} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i \mathbf{x}_i) \cdot \right. \\ \left. \prod_{i \in \varepsilon, l_i \leq k_i} \left[\sum_{b_i=0}^{M_i} 2^{k_i d_i} \int_{|z_i| \leq 1} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i(\mathbf{x}_i + 2^{-l_i} b_i \mathbf{z}_i)) dz_i \right] \right) * |h_k(\mathbf{x})| &\leq \\ |\tilde{k}_i = k_i, k_i \leq l_i; \tilde{k}_i = l_i, k_i > l_i, i \in \varepsilon| \leq C_{29} \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \left(2^{(l(\varepsilon) - k(\varepsilon), m'(\varepsilon))} \prod_{i \in \varepsilon, k_i \leq l_i} 2^{-(k_i - l_i) m_i} \right) s_{(k(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon))}(\mathbf{x}) & \\ \left(\prod_{i \in \varepsilon, k_i < l_i} 2^{(k_i - l_i) M_i} 2^{k_i d_i} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i \mathbf{x}_i) \cdot \prod_{i \in \varepsilon, k_i \geq l_i} \left[\sum_{b_i=0}^{M_i} 2^{k_i d_i} \int_{|z_i| \leq 1} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i(\mathbf{x}_i + 2^{-l_i} b_i \mathbf{z}_i)) dz_i \right] \right) * |h_k(\mathbf{x})| &\leq \\ C_{30} \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \left(2^{(l(\varepsilon) - k(\varepsilon), m'(\varepsilon))} \prod_{i \in \varepsilon, k_i \leq l_i} 2^{(k_i - l_i)(M_i - m_i)} \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon, k_i < l_i} 2^{k_i d_i} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i \mathbf{x}_i) \cdot \right. \\ \left. \prod_{i \in \varepsilon, k_i \geq l_i} \left[\sum_{b_i=0}^{M_i} 2^{k_i d_i} \int_{|z_i| \leq 1} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i(\mathbf{x}_i + 2^{-l_i} b_i \mathbf{z}_i)) dz_i \right] \right) * |s_{(k(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon))}(\mathbf{x}) h_k(\mathbf{x})| &\leq \\ C_{31} \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \left(2^{(l(\varepsilon) - k(\varepsilon), m'(\varepsilon))} \prod_{i \in \varepsilon, k_i \geq l_i} 2^{(k_i - l_i)(M_i - m_i)} \prod_{i \in \varepsilon, k_i > l_i} 2^{(l_i - k_i) m'_i} \right) & \end{aligned}$$

$$\left(\prod_{i \in \varepsilon, k_i < l_i} 2^{k_i d_i} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i \mathbf{x}_i) \cdot \prod_{i \in \varepsilon, k_i \geq l_i} \left[\sum_{b_i=0}^{M_i} 2^{k_i d_i} \int_{|z_i| \leq 1} \chi^{(i)}(2^{k_i} \theta_i (\mathbf{x}_i + 2^{-l_i} b_i \mathbf{z}_i)) dz_i \right] \right) * |s_k(\mathbf{x}) h_k(\mathbf{x})| \leq$$

$$|\tilde{\gamma}_i = \min(m'_i, M_i - m_i), i \in \varepsilon_n| \leq C_{32} \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \left(\prod_{i \in \varepsilon_n} 2^{-|l_i - k_i| \tilde{\gamma}_i} \right) \mathcal{M}_{\varepsilon_d}[s_k f_k](\mathbf{x}),$$

здесь $\chi^{(i)}$ — характеристическая функция единичного шара из \mathbb{R}^{d_i} , а $\theta_i \in (0, 1)$ — некоторые числа, зависящие от $\tilde{\Omega}^{(i)}$.

Отсюда с помощью неравенства Юнга для свертки рядов и использованного уже варианта максимального неравенства Бэбби получаем неравенство

$$F_\varepsilon \leq C_{33} \|\{s_k(\mathbf{x}) h_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}\|_{L_p(G, l_q)} = C_{33} \|h\|_{L_p(G, l_q)},$$

которое вместе с (31) влечет (28):

$$\|\mathcal{R}h\|_{MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)} \leq C_{34} \|h\|_{L_p(G, l_q)}.$$

Лемма 2 доказана.

Теперь теорема 1 следует из леммы 1 (с $r = p$), леммы 2 и представления (6) (из [1]).

5. Теорема вложения.

Теорема 3. Пусть $s = s(x) = \{s_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} \in \mathcal{S}(G; m', m)$, $p, r \in [1, \infty]^d$, $p_j \leq r_j, j \in \varepsilon_d$, $q \in [1, \infty]^n$, $N \in \mathbb{N}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, где

$$\gamma_\nu := \min \left\{ m'_\nu - \sum_{j \in \varepsilon^\nu} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right), N_\nu - m_\nu + \sum_{j \in \varepsilon^\nu} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right) \right\},$$

$$t(x) = \{t_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}, \text{ где } t_k(x) = s_k(x) \cdot \prod_{\nu \in \varepsilon_n} 2^{-k_\nu \sum_{j \in \varepsilon^\nu} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right)}, k \in \mathbb{N}_0^n.$$

Тогда справедливо вложение

$$MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G) \subset MB_{r,q}^{t,\varepsilon}(G). \quad (32)$$

Если, кроме того, $p, r \in (1, \infty)^d$, то

$$MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G) \subset MF_{r,q}^{t,\varepsilon}(G). \quad (33)$$

При этом нормы в $MB_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)$, $MF_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)$ определяются с помощью смешанных разностей порядка N .

Доказательство. Пусть $f \in MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)(MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G))$. Воспользуемся представлением (6), которое по теореме 1 можно записать в виде

$$f = \mathcal{R}Sf.$$

Теперь утверждения теоремы следуют соответственно из лемм 1 и 2: если $f \in MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)(MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G))$, то в силу (17) ((27)) $Sf \in l_q(L_{r,t_k}(G)(L_r(G, l_{q,t})))$, а в силу (18) ((28)) $f \equiv \mathcal{R}Sf \in MB_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)(MF_{r,q}^{t,\varepsilon}(G))$, причем $\|f\|_{MB_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)} \ll \|f\|_{MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)} (\|f\|_{MF_{r,q}^{t,\varepsilon}(G)} \ll \|f\|_{MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)})$. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Теорема 3 обобщает, с одной стороны, на случай смешанной гладкости ($n \geq 2$) теорему 3 из [2], а с другой, на случай переменной смешанной гладкости хорошо известные теоремы вложения для классических функциональных пространств смешанной гладкости (см., в частности, монографии [10, гл. 3, §3; гл. 8, §4], [11, chap. 2, sect. 2.4]).

6. Теорема продолжения.

Перейдем к вопросу о продолжении определенных на G функций пространств $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$, $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$, где $G = G_1 \times \dots \times G_n$, а область $G_i = \{\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}'_i, x_{j_i}) \in \mathbb{R}^{d_i} : \mathbf{x}'_i \in \mathbb{R}^{d_i-1}, x_{j_i} > \phi_i(\mathbf{x}'_i)\}$, а функция ϕ_i удовлетворяет условию (1), на \mathbb{R}^d с сохранением гладкости. Такое G есть декартово произведение специальных липшицевых областей. В случае переменной гладкости функцию $s(x) = \{s_k(x)\}_{k=0}^\infty$, $x \in G$ следует сначала доопределить на $\mathbb{R}^d \setminus G$. Положим $\epsilon_* = \{j_i, i \in \epsilon_n\}$.

Итак, пусть сначала $G_i, i \in \epsilon_n$, совпадает с полупространством

$$G_i = \mathbb{R}_+^{d_i} = \{\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}'_i, x_{j_i}) : \mathbf{x}'_i \in \mathbb{R}^{d_i-1}, x_{j_i} > 0\},$$

а для s выполнены условия 1) - 3) определения 1. Будем считать, что s_k непрерывны на $\overline{G} = \overline{\mathbb{R}_+^{d_1}} \times \dots \times \overline{\mathbb{R}_+^{d_n}}$.

Пусть функция $\lambda_i : (-\infty, 0] \rightarrow (0, \infty)$ непрерывна, убывает, $\lambda_i(0) = 1$ и при некотором $c_0 > 0$

$$\lambda_i(t') \leq c_0 \lambda_i(t''), \text{ если } t', t'' \leq 0, |t' - t''| \leq 1.$$

Можно взять, например, $\lambda_i(t) = e^{-R_i t}$ при любом $R_i \geq 0$.

Продолжим функции $s_k : \overline{G} \rightarrow (0, \infty)$ до $\tilde{s}_k : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty)$, положив

$$\tilde{s}_k(\mathbf{x}) = \tilde{s}_k(\mathbf{x}(\epsilon_d \setminus \epsilon_*^-), 0(\epsilon_*^-)) \prod_{j_i \in \epsilon_*^-} \lambda_i(\mathbf{x}_{j_i}), \tag{34}$$

где $\epsilon_*^+ = \epsilon_*^+(\mathbf{x}) = \{j \in \epsilon_* : x_j \geq 0\}$, $\epsilon_*^- = \epsilon_*^-(\mathbf{x}) = \epsilon_* \setminus \epsilon_*^+$. Тогда, как легко видеть, свойства 1) - 3) определения 1 выполнены для $\tilde{s} = \{\tilde{s}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ на \mathbb{R}^d .

Пусть теперь G — декартово произведение специальных липшицевых областей. Рассмотрим отображение $\mathcal{F} : G \rightarrow \mathbb{R}_+^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{d_n}$, имеющее вид $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = (\mathcal{F}_1(\mathbf{x}_1), \dots, \mathcal{F}_n(\mathbf{x}_n))$, где $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}_i) = (\mathbf{x}'_i, x_{j_i} - \phi_i(\mathbf{x}'_i))$. Координаты \mathcal{F}_i отображения \mathcal{F} и им обратные являются, очевидно, липшицевыми, так что при некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$

$$0 < c_1 \leq \frac{|\mathcal{F}_i(\mathbf{x}_i^{(1)}) - \mathcal{F}_i(\mathbf{x}_i^{(2)})|}{|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(2)}|} \leq c_2 \quad \forall \mathbf{x}_i^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)} \in G, \mathbf{x}_i^{(1)} \neq \mathbf{x}_i^{(2)}. \tag{35}$$

Пусть гладкость s удовлетворяет условиям 1) - 3) определения 1 на G . Тогда с учетом (35) ясно, что гладкость $s^* = s \circ \mathcal{F}^{-1}$ удовлетворяет этим условиям на $\prod_{i \in \epsilon_n} \mathbb{R}_+^{d_i}$, а ее продолжение \tilde{s}^* по формуле (34) — на \mathbb{R}^d . Положим

$$\tilde{s} = \tilde{s}^* \circ \mathcal{F}. \tag{36}$$

Тогда \tilde{s} является продолжением s с G на \mathbb{R}^d и удовлетворяет условиям 1) - 3) определения 1 на \mathbb{R}^d .

Теорема 4. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^d$ есть декартово произведение специальных липшицевых областей, гладкость s удовлетворяет на G условиям 1) - 3) определения 1, гладкость \tilde{s} определена на \mathbb{R}^d формулой (36).

Тогда существует линейный ограниченный оператор продолжения \mathcal{E} ,

$$\mathcal{E} : MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G) \rightarrow MB_{p,q}^{\tilde{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d),$$

$$\mathcal{E} : MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G) \rightarrow MF_{p,q}^{\tilde{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d).$$

Доказательство. Для пространств $MB_{p,q}^{s,\epsilon}$ и $MF_{p,q}^{s,\epsilon}$ доказательства аналогичны, поэтому рассмотрим лишь первое из них. Пусть оператор

$$\mathcal{S} : MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G) \rightarrow l_q(L_{p,s_k}(G))$$

задан с помощью коретракции \mathcal{S} из теоремы 1, оператор

$$\mathcal{E}_0 : l_q(L_{p,s_k}(G)) \rightarrow l_q(L_{p,\tilde{s}_k}(\mathbb{R}^d))$$

определен как оператор продолжения нулем с G на \mathbb{R}^d , а оператор

$$\mathcal{R} : l_q(L_{p,\tilde{s}_k}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow MB_{p,q}^{\tilde{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$$

задан с помощью ретракции $\mathcal{R} : \mathcal{R}h(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} (\Omega_k^+ * h_k)(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G$. Тогда оператор

$$\mathcal{E} := \mathcal{R}\mathcal{E}_0\mathcal{S} : MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G) \rightarrow MB_{p,q}^{\tilde{s},\epsilon}(\mathbb{R}^n)$$

согласно лемме 1 является ограниченным оператором продолжения пространства $MB_{p,q}^{s,\epsilon}$ с G на \mathbb{R}^d . Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Теорема 4 обобщает на случай смешанной гладкости ($n \geq 2$) теорему 4 из [2].

Цитированная литература

1. Базарханов Д. Б. // Математический журнал Алматы. 2006. Т.6. № 4 (22). С. 32 – 39.
2. Бесов О. В. // Труды МИ им. В.А.Стеклова РАН. 2005. Т. 248. С. 52 – 63.
3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1996.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
5. Харди Дж. Г., Литтлвуд Дж. Э., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
6. Bagby R. G. // Proc.Amer.Math.Soc. 1975. V. 48. P. 419 – 422.

7. **Базарханов Д. Б.** // Труды МИ им. В.А.Стеклова РАН. 2005. Т. 248. С. 24 – 37.
8. **Fefferman C., Stein E. M.** // Amer.J.Math. 1971. V. 93. P. 107 – 115.
9. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств. М., 1986.
10. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата, 1976.
11. **Schmeisser H.-J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987.

Поступила в редакцию 1.09.2007г.

УДК 004.056.52; 681.3.07

МНОГОУРОВНЕВЫЙ КОНТРОЛЬ ДОСТУПА В КОРПОРАТИВНОЙ СЕТИ КОСМИЧЕСКОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

Е.В. Горковенко

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 gev@ipic.kz

В статье освещаются материалы исследований по вопросам обеспечения многоуровневого разграничения доступа к информационным ресурсам в создаваемой в Республике Казахстан спутниковой информационно-телекоммуникационной системе. Выделены объекты и субъекты защиты, приведены рекомендации по спецификации характера и способов представления защищаемой информации. Предлагается организовать информационную безопасность в корпоративной сети космической инфраструктуры путем реализации многоуровневого контроля доступа к тематическим базам данных с учетом степени секретности информации и категорий допуска пользователей.

Введение

В результате реализации Государственной программы "Развитие космической деятельности в Республике Казахстан на 2005–2007 годы" создается корпоративная спутниковая информационно-телекоммуникационная система (СИТС), в рамках которой уже действуют центры приема данных дистанционного зондирования в Астане, Алматы, Атырау и Приозерске. Специальное программное обеспечение (пакеты IRSTools, RADARSAT Tools, IMAPP, ScanEx Image Processor и т.д.) позволяет обрабатывать данные, переданные со спутников при сканировании поверхности территории Казахстана. Затем полученные тематические продукты накапливаются, хранятся и передаются заинтересованным организациям на оптических носителях. Инфраструктура СИТС предусматривает два крупных коммутационных узла: в г. Астане в ГП "Аэрокосмический комитет" и в г. Алматы в НК "КазКосмос". Обмен информацией между ними предполагается осуществлять через использование беспроводной связи, создание защищенного оптоволоконного канала и передачу информации на съемных дисках.

В НК "КазКосмос" предполагается организовать базу метаданных (БмД), содержащую описание каталогизированной информации по тематическим БД, территориально расположенным в организациях, занимающихся космическими исследованиями в рамках государственных программ: астрофизический институт (АФИ), Институт космических исследований (ИКИ), Институт ионосферы (ИИ) и пр. [1]. Встроенные средства защиты ОС и СУБД от НСД не могут

Keywords: *multilevel access control, security access monitor*

2000 Mathematics Subject Classification: 94A60

© Е.В. Горковенко, 2007.

охватить весь спектр средств обеспечения информационной безопасности и, как следствие, закрыть все каналы утечки информации и противодействовать потенциальным атакам. Предлагаемая организация информационной безопасности в корпоративной сети космической инфраструктуры предусматривает защиту информации путем реализации многоуровневого контроля доступа к БД, криптографического закрытия конфиденциальной информации, проверки целостности передаваемых сообщений и обеспечения авторизации абонентов СИТС. Многоуровневая защита СИТС рассматривается как свойство самой системы хранить и обрабатывать данные различного уровня и категорий пользования при наличии персонала с различными категориями допуска таким образом, чтобы исключить доступ к информации или ее модификацию лицами, чей допуск не отвечает уровню секретности информации.

1. Основные компоненты системы мандатного разграничения доступа

Основным объектом защиты является информация, хранимая и передаваемая по проводным и беспроводным каналам. Корпоративные информационные ресурсы организовываются в виде распределенных тематических БД, при работе с которыми обязательно учитываются особенности защиты информации от несанкционированного доступа (НСД). Тематические БД накапливают достаточно большой объем интегрированной информации (топографические карты, графики, аналитические справки, диаграммы, документы) различного уровня конфиденциальности по различным тематическим направлениям, предназначенной для различных пользователей и распределенной по различным устройствам или узлам сети [2].

Системообразующие базы данных (СБД) содержат рабочую информацию и тематическую информацию, выдаваемую по запросам пользователей. На этапах проектирования, создания и эксплуатации СИТС доступ к метаописаниям СБД должен быть строго ограничен. Информация, содержащаяся в тематических и рабочих БД, структурируется в зависимости от степени важности (секретности) и доступ к ней организуется в соответствии с уровнем полномочий пользователей. Классификация информационных ресурсов по категориям важности необходима для определения относительной ценности и разработки механизмов контроля, сохраняющих данную ценность. Хранящаяся (на жестких или съемных дисках) информация в СБД с высокой меткой чувствительности подвергается шифрованию.

При работе с информационными ресурсами, организованными в распределенные БД, обязательно учитываются следующие особенности защиты информации от НСД:

- в БД может накапливаться большой объем интегрированной информации по различным тематическим направлениям, предназначенной для различных пользователей;
- БД могут быть физически распределены по различным устройствам и узлам сети;
- БД могут включать информацию различного уровня конфиденциальности.

Интегрированная информация, хранящаяся в базах данных по различным тематическим направлениям и предназначенная для различных пользовательских групп должна иметь многоуровневую систему мандатного (нормативного) разграничения доступа, которая обеспечит класс необходимой защищенности. Ядром системы многоуровневой защиты является монитор обработки запросов, который проверяет каждое обращение пользователя к данным или программам на предмет согласованности со списком действий, допустимых для пользователя (рис.1). Монитор связан с базой данных многоуровневой защиты, специфицирующей объекты и субъекты защиты, правила и условия контроля доступа. Основными компонентами системы нормативного разграничения доступа являются две подсистемы, одна из которых направлена на выполнение запросов пользователей к информационным ресурсам, а другая – на поддержку работы администратора безопасности без нарушения правил доступа по разрешению запросов к информации различного уровня секретности. Для эффективного и безопасного информационного обмена между компонентами СИТС определяются функциональные требования по каждой подсистеме:

- к типу представления информации в спутниковом сигнале (графическая, текстовая, цифровая);
- к видам обработки информации;
- к структуре и способам организации данных в криптосистеме;
- к режиму формирования и рассылки ключей при фиксации попытки НСД;
- по организации защиты данных при авариях и сбоях;
- по организации процедуры хранения, обновления и восстановления данных;
- по использованию классификаторов и СУБД.

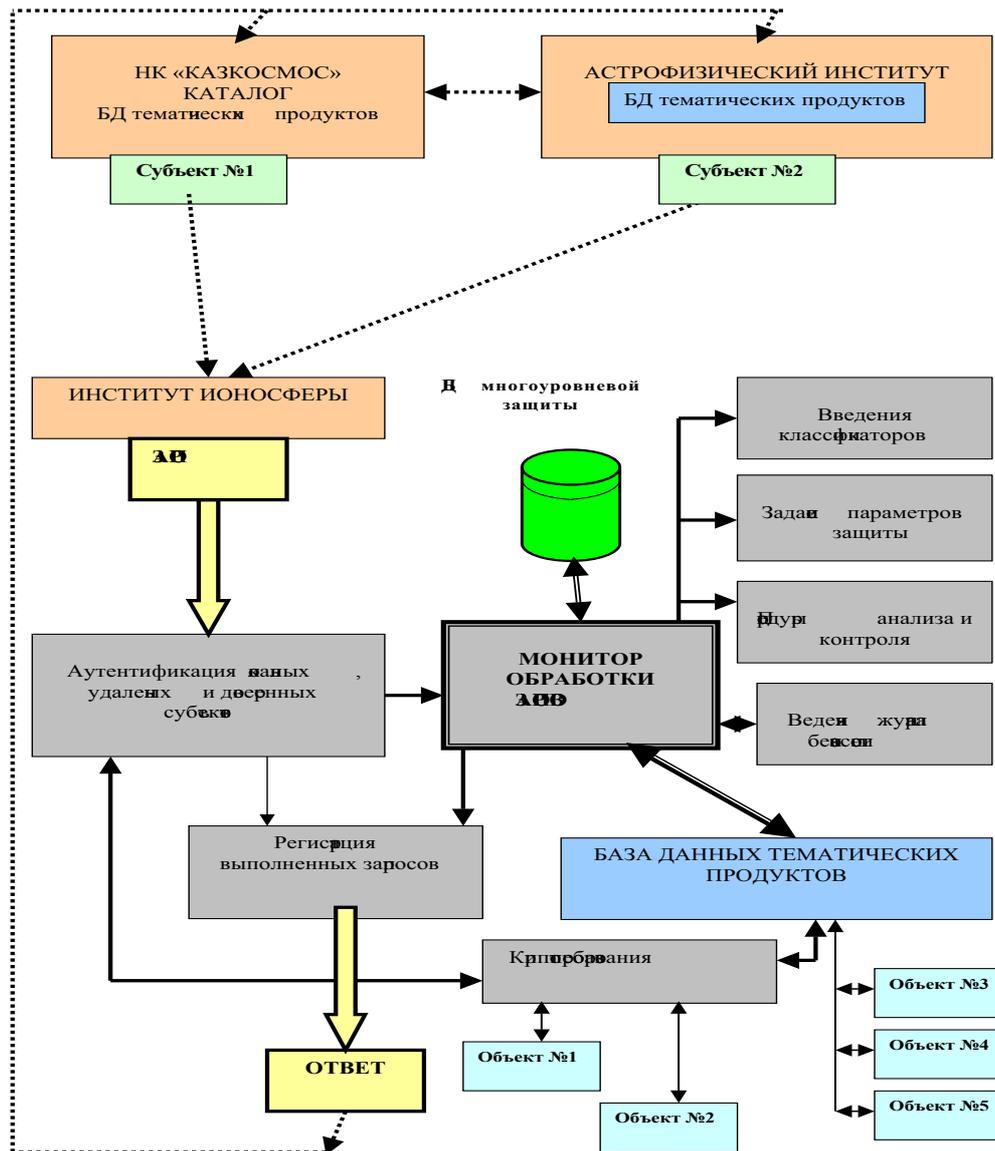


Рис.1: Структура многоуровневой системы разграничения доступа в корпоративной сети космической инфраструктуры

По каждой подсистеме определяется перечень задач, временной регламент реализации каждой задачи, форма представления выходной информации. В соответствии с выбранной моделью разграничения доступа выделяются субъекты и объекты защиты, определяются правила доступа (по чтению, редактированию, записи и т.д.) и условия контроля правами доступа (передача

прав, лишение прав, порождение объектов, изменение уровня секретности и т.п.) [3]. Субъекты, как активные носители информации, могут перемещать или изменять содержимое объектов. Объекты, как пассивные носители информации, могут хранить ее содержимое (файлы, директории, базы данных) или быть измененными (сообщения, программы, процедуры, запросы). Классификация информационных ресурсов производится по категориям ценности или ведомственной принадлежности. Вся информация, создаваемая пользователем, может иметь одну из следующих категорий: "конфиденциальная", "для служебного пользования", "свободно доступная", "секретная", "совершенно секретная", "особой важности", "персональные данные" или типов: "правительственная", "ведомственная", "институтская", "индивидуальная" и т.д. Чем выше степень доверия (категория допуска) субъекта, тем к более секретной информации он имеет доступ. Примеры категорий допуска субъектов: 1-я форма допуска, 2-я форма допуска, 3-я форма допуска.

Основное назначение полномочной политики безопасности, базирующейся на многоуровневой мандатной модели разграничения доступа, заключается в регулировании доступа субъектов системы к объектам с различным уровнем критичности и предотвращении утечки информации с верхних уровней должностной иерархии на нижние, а также блокировании возможного проникновения с нижних уровней на верхние. Полномочное управление доступом подразумевает, что

- все субъекты и объекты системы, подлежащие защите, должны быть однозначно идентифицированы с возможностью их последующей аутентификации;
- каждому объекту системы присвоена метка критичности, определяющая ценность содержащейся в нем информации;
- каждому субъекту системы присвоен уровень прозрачности, определяющий максимальное значение метки критичности объектов, к которым субъект имеет доступ.

Пусть множества $S = \{s_1, \dots, s_j, \dots, s_J\}$, $j = \overline{1, J}$ и $O = \{o_1, \dots, o_i, \dots, o_I\}$, $i = \overline{1, I}$, – соответственно конечные линейно упорядоченные множества субъектов и объектов доступа к корпоративным ресурсам космической инфраструктуры. Каждому субъекту s_j приписывается определенный уровень защиты $J(s_j)$, $j = \overline{1, J}$, остающийся неизменным все время функционирования системы и сохранения статуса субъекта и который соответствует категории допуска μ_j (уровню прозрачности) субъекта. Каждый субъект $s_j \in S$ представляется парой $\{\lambda(s_j), \mu(s_j)\}$, где $\{\lambda_j\}$ – конечное множество классификаций статуса субъектов, $\{\mu_j\}$ – конечное множество категорий допуска. Каждому объекту $o_i \in O$ присваивается уровень защиты объекта $J(o_i)$, который соответствует уровню секретности (метки критичности) информации $\ell_n \in L$, хранящейся в объекте o_i (файл) или к которой обращается объект o_n (программа). Каждый объект $o_i \in O$ определяется парой $\{s_j, \ell(o_i)\}$, где $\{s_j\}$ – множество субъектов – владельцев объектов o_i , $\{\ell_i\}$ – множество степеней секретности.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k, \dots, a_K\}$ – множество видов доступа субъектов к объектам, где a_k ($k = \overline{1, K}$) определяется следующими значениями: R – чтение; G – перезапись информации из объекта в объект; D – добавление информации в объект, без предварительного чтения; W – запись, после предварительного чтения; E – исполнение команды; O – отказ в выполнении запроса; C – создание объекта, U – уничтожение объекта, L – лишения прав на доступ, P – право передачи прав между субъектами, PV – наделение правом владения объектом, I – изменение уровня защиты, PR – право порождение объекта, CP – копирование, KL – право классификации объектов, Y – разрешение на реализацию запроса.

Контроль доступа, реализующий базовые требования к мандатному механизму защиты, можно представить в виде матрицы прав доступа $M = \|m_{ij}\|$ ($i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$), которая содержит список видов доступа a_k субъекта $s_j \in S$ к объектам из множества O , на которые он может претендовать и которые ему в данный момент разрешены. Доступ к информации организован таким образом, что каждый субъект имеет право обратиться к объекту только

с тем видом доступа, который имеется в списке. Для всех запросов обязательным является соблюдение основного условия отношения доступов: уровень доступа субъекта должен быть не меньше уровня защиты объекта. Тогда текущий запрос субъекта s_j к информационным ресурсам представляется в виде $b_t = (s_j, o_i, a_k)$, $a_k \in A$, $b_t \in B$ и выполняется, если затребованный вид доступа субъектов к объектам является разрешенный в данный момент и это разрешение к настоящему моменту не отменено, т.е. право "реализация запроса" активно. Разрешение действует до тех пор, пока субъект не обратится с запросом об отказе от доступа. В основу алгоритма обработки текущих запросов заложены условия [4]:

1. условие, не позволяющее субъекту получить информацию от субъекта $J(s_{j1}) > J(s_{j2})$ или объекта с более высоким уровнем защиты $J(s_j) \geq J(o_i)$;

2. условие, не позволяющее субъекту получить информацию от объекта при отсутствии права допуска на реализации текущего запроса $a_k = "Y"$.

Основные условия задания правил доступа в дальнейшем определяют контроль и анализ заполнения матрицы прав доступа. Рассмотрим несколько случаев, когда доступ должен быть разрешен субъекту s_{j1} , чей уровень защиты выше уровня защиты s_{j2} , т.е. $J(s_{j1}) > J(s_{j2})$.

Случай 1. $\lambda_{j1} = \lambda_{j2}$, $\mu_{j1} > \mu_{j2}$. Субъекты относятся к одному классу, например, "научный руководитель проекта", но имеют разные уровни допуска: $\mu(s_{j1}) = "3\text{-я форма допуска}"$ и $\mu(s_{j2}) = "2\text{-я форма допуска}"$.

Случай 2. $\lambda_{j1} > \lambda_{j2}$, $\mu_{j1} = \mu_{j2}$. У субъектов категория допуска одинаковая, однако субъект s_{j1} относится к классу "научный руководитель проекта", а s_{j2} имеет класс "ответственный исполнитель проекта".

Случай 3. $\lambda_{j1} > \lambda_{j2}$, $\mu_{j1} > \mu_{j2}$. Субъект s_{j1} безусловно имеет больше прав доступа, чем s_{j2} , так как имеет большую категорию допуска и относится к более высокому классу.

Случай 4. $\lambda_{j1} < \lambda_{j2}$, $\mu_{j1} > \mu_{j2}$. Это особый случай. Несмотря на то, что субъект s_{j1} может относиться к классу "ответственный исполнитель проекта" с категорией допуска "1-я форма допуска", а субъект s_{j2} относится к классу "руководитель проекта" с категорией допуска "2-я форма допуска", доступ s_{j1} будет разрешен.

Уровни защиты субъектов будут равны, т.е. $J(s_{j1}) = J(s_{j2})$, если $\lambda_{j1} = \lambda_{j2}$, $\mu_{j1} = \mu_{j2}$. Это может иметь место лишь для различных ветвей дерева субъектов, когда субъекты находятся на одной горизонтали, при этом субъекты s_{j1} , $s_{j2} \in S$ будут относиться к одной подгруппе пользователей с одинаковыми правами доступа.

Рассмотрим работу основных компонент системы мандатного разграничения доступа.

Аутентификация субъектов. Применение методов идентификации и аутентификации в целях защиты информации при ее обмене предполагает конфиденциальность образов и имен объектов. При сетевом или беспроводном удаленном обмене информацией необходимо предусмотреть взаимную проверку подлинности полномочий объекта или субъекта. Выделено несколько типов пользователей: локальные, удаленные и доверенные абоненты (типа администратор). Их аутентификация осуществляется через функцию подтверждения подлинности на основе пароля. Пароль возможно хранить в зашифрованном виде, что существенно снижает риск его раскрытия. Файл, хранящий пароль, должен быть сам защищен от попыток НСД, также как и информация о грифе секретности объектов и уровне допуска субъектов системы.

Задание параметров многоуровневой защиты. Политика разграничения доступа организации должна быть описана в форме высокоуровневых спецификаций разграничения доступа, где необходимо определить параметры безопасности, которые определяют свойства субъектов и объектов защиты организации, а также разрешенные операции субъектов системы над объектами. В спецификацию субъекта защиты входят параметры, идентифицирующие субъект и определяющие его категорию допуска, классификацию субъектов (куратор, руководитель, исполнитель, гость и пр.), право владения объектами защиты, право порождения субъектов и объектов ("отец" – "сын"), правила выбора и защиты идентификатора субъекта. В специ-

фикацию объекта защиты входят параметры, идентифицирующие объект и определяющие его тип группы (файл, директория, процедура), степень секретности информации, идентификатор субъекта-владельца, место и способ хранения информации, статус объекта (первичный, вторичный, порожденный). В матрице задания прав доступа отслеживаются большое количество зависимостей между значениями определенных кортежей пары "субъект - объект" с определением разрешенных видов доступа и правом на реализацию затребованного вида доступа [3].

Ведение классификаторов. Классификаторы: "Типы конфиденциальности", "Виды управления доступом", "Классификация объектов", "Классификация субъектов", "Виды доступа", "Типы НСД" и т.д. позволяют эффективнее заполнять спецификации и матрицу доступа.

Процедуры анализа и контроля. Анализ подразумевает проверку полноты заполнения спецификаций субъектов и объектов защиты, формирование процедур задания правил и условий разграничения доступа и автоматизированное заполнение матрицы доступа в диалоговом режиме. Контроль полномочий доступа, подразумевающий передачу полномочий доступа между субъектами, имеет характерные особенности в соответствии с принятыми в нашей стране процедурами работы с информацией ограниченного пользования. Это накладывает ряд ограничений при формировании правил разграничения доступа и управлении матрицей прав доступа. Изменение состояния вычислительной системы при разрешении запроса должно приводить к защищенному состоянию, если исходное состояние также было защищено. Для этого необходимо строго выполнять решающие правила по разрешению запросов и изменению состояний системы. Монитор обработки запросов выполняет ряд контрольных функций, главными из которых являются:

1. Проверка реализации права владения и права порождения с учетом иерархии субъектов и объектов защиты;
2. Контроль выполнения текущего запроса с учетом выполнения основного правила доступа, не позволяющее субъекту получить или записать информацию от субъекта или объекта с более высоким уровнем защиты и не позволяющее субъекту получить информацию от объекта при отсутствии разрешения на реализацию текущего запроса;
3. Защиты матрицы прав доступа от попыток несанкционированной модификации;
4. Блокировка обращений неавторизованных пользователей в процессе выполнения процедуры аутентификации субъектов защиты и анализа журнала безопасности.

Регистрация выполненных запросов и попыток НСД. Если уровень допуска субъекта противоречит правилам доступа выбранной модели многоуровневой защиты или субъект не имеет права на реализацию подобного запроса, то субъекту будет отказано в доступе, а в журнале подобный запрос регистрируется как попытка НСД. Если доступ разрешен, то субъект работает в диалоговом окне с выбранной информацией в соответствии с разрешенным видом доступа, а в журнале регистрируется: субъект, объекты к которым он обращался, виды доступа, время и способы передачи информации по выбранным каналам связи.

Ведение журнала безопасности. В журнале регистрируется шифр субъекта, шифр объекта, все действия, время обращения и работы с базой данных тематических продуктов. Администратор безопасности должен иметь возможность просмотра журнала с установкой фильтра просмотра по дате, по типу транзакций, по имени файла, реакции монитора на попытки НСД неавторизованных пользователей. Анализ журнала безопасности по попыткам нарушения прав доступа авторизованных субъектов защиты должен предусматривать организационные санкции в отношении недобросовестных пользователей.

Способы организации интерфейсов пользователей и диалогов внутри системы, реализующей многоуровневую защиту в корпоративной спутниковой информационно-телекоммуникационной системе, должны ориентироваться на работу с конечными пользователями (идентификация абонента, формирование текущего запроса к информационным ресурсам, работа в диалоговом окне с выбранной информацией) и на выполнение функций администраторов без

опасности (аутентификация, управление матрицей доступа, контроль обработки всех видов запросов, аудит системы безопасности).

2. Предложения

Разработка Национальной системы космического мониторинга территории Республики Казахстан направлена на оперативное предоставление государственным органам управления всех уровней достоверной информации о состоянии и использовании природных ресурсов. Естественно, что обеспечение безопасности данных и защиту цифровых космических изображений от несанкционированного доступа или модификации целесообразно осуществлять с применением новейших достижений в области криптографии и моделирования многоуровневых систем управления доступом не ниже класса *B*.

Многоуровневый контроль доступа, реализованный в корпоративной СИТС через механизмы мандатной модели разграничения доступа, позволит реализовать методы формирования иерархических зависимостей внутри выделенных множеств субъектов и объектов защиты. Контроль полномочий доступа, подразумевающий передачу полномочий доступа между субъектами, имеет характерные особенности в соответствии с принятыми в нашей стране процедурами работы с информацией ограниченного пользования. Это накладывает ряд ограничений при формировании правил разграничения доступа и управлении матрицей прав доступа. Формирование процедур, поддерживающих мониторинг обработки запросов, базируется на модели мандатного разграничения доступа, в которой реализованы расширенный список прав доступа и управление доступом с учетом права реализации [3,4]. Там же выделены условия наделения субъектов защиты "правом владения" объектами защиты и управления, "правом реализации запроса", которые отражают реальные ситуации при работе с информацией ограниченного пользования.

Применение криптографических средств в информационных системах с мандатной (нормативной) политикой управления доступом является обязательным условием обработки информации различной степени секретности. В рассматриваемом многоуровневом контроле доступа в корпоративной сети космической инфраструктуры использование криптографических средств может быть реализовано в виде подсистемы криптопреобразований, которая выполняет следующие функции:

- шифрование паролей субъектов защиты и подтверждение их целостности при попытке несанкционированной модификации;
- шифрование хранимой или передаваемой по открытым каналам связи информации повышенной степени секретности.

Цитированная литература

1. Горковенко Е.В. // Информационные технологии в образовании. КазНУ, 2005. Т.2, №4. С.70 – 77.
2. Горковенко Е.В. // Материалы III межд. научно-практ. конф. "Бизнес и образование: вектор развития". Алматы, 2003. Т.II. С.44 – 49.
3. Горковенко Е.В. // "Известия ТРТУ": тематический выпуск материалов 8-й межд. научно-практ. конф. "Информационная безопасность". Россия, Таганрог, 2006. №7(62). С.87 – 91.
4. Горковенко Е.В. // Известия НАН РК. 2006. №3. С.79 – 85.

Поступила в редакцию 01.09.2007г.

УДК 517.927, 517.97

ОБ ОПТИМИЗАЦИОННО-ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. I

М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, К. С. ШАРИПОВ

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

Рассматриваются вопросы разрешимости одной оптимизационно-обратной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1). В отличие от ранее известных постановок, когда дополнительная информация задается в виде конкретных функционалов от искомого решения дифференциальных уравнений, в данной работе дополнительная информация задается в форме принадлежности искомым величин к некоторым заданным множествам (2). Приведен пример, иллюстрирующий предлагаемую постановку оптимизационно-обратной задачи. Установлено достаточное условие оптимальности.

В первой части работы с помощью обобщенных множителей — функционалов Лагранжа установлено достаточное условие оптимальности, на основе которого предлагается общий подход к решению поставленной оптимизационно-обратной задачи. Во второй части работы будут представлены конкретные пути реализации общего подхода, связанные с методами определения обобщенных множителей — функционалов Лагранжа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t), \beta), & t \in (t_0, t_1), \\ y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1, \end{cases} \quad (1)$$

где подлежащие определению векторные параметры $\{\beta, y_0, y_1\} \in \mathbb{R}^{r+2n}$ и вектор-функция $y(t) \in \mathbb{R}^n$ — решение краевой задачи (1) — подчинены ограничениям

$$\begin{cases} \beta \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m, \{y_0, y_1\} \in \mathcal{Y}_0 \subset \{\mathcal{Y}_0 \times \mathcal{Y}_1\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \\ \{y(t) : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n\} \in \{\mathcal{Y}(t), t \in (t_0, t_1)\} \subset \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, будем предполагать, что вектор-функция $F(t, y, \beta)$ является непрерывной по всем своим аргументам, и удовлетворяет условиям Липшица по переменным y, β . Это обеспечивает существование единственного абсолютно-непрерывного решения задачи Коши из (1) при отсутствии условий при $t = t_1$.

Keywords: *inverse problem, optimal control, sufficient optimality condition*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K55, 49K15

© М. Т. Дженалиев, К. С. Шарипов, 2007.

Здесь множества

$$\mathcal{B}, \mathcal{Y}_{01}, \mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1, \{\mathcal{Y}(t), t \in (t_0, t_1)\},$$

считаются заданными.

Замечание 1. Задача (1)–(2) является обратной задачей теории дифференциальных уравнений. Однако, в отличие от ранее известных постановок, когда дополнительная информация задается в виде конкретных функционалов от искомого решения дифференциальных уравнений, в данной ситуации дополнительная информация задается в форме принадлежности искомым величинам к некоторым заданным множествам (2). И вследствие этого обратная задача (1)–(2) может иметь много решений.

Замечание 2. Если в (1) уравнение понимать как абстрактное обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $y(t)$ со значениями в соответствующем банаховом пространстве функций, то мы будем иметь краевую задачу для системы уравнений в частных производных [1–6]. Поэтому утверждения, полученные ниже (при некоторых дополнительных условиях), справедливы и для оптимизационно-обратных задач, описываемых уравнениями в частных производных.

Будем считать, что ограничения (1) и (2) соответственно могут быть записаны в виде

$$\varphi_j[\beta, y_0, y_1, y(t)] = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\varphi_j[\beta, y_0, y_1, y(t)] \leq 0, \quad j = n + 1, \dots, n + m, \quad (4)$$

где $\varphi_j[\beta, y_0, y_1, y(t)]$, $j = 1, \dots, n + m$, — заданные функционалы. Это требование, как правило, не является существенным ограничением и в большинстве прикладных задач оно выполняется.

Определение 1. Каждую четверку элементов $v = \{\beta, y_0, y_1, y(t)\}$, удовлетворяющих условиям (3) и (4), назовем допустимой, и всю совокупность таких четверок обозначим через \mathcal{D} .

Заметим, что обычно делается предположение о том, что множество допустимых элементов непусто, т.е. $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Этот факт часто оказывается следствием физического смысла задачи (1)–(2). Хотя в общем случае математически строго показать это не всегда бывает просто. В простейших, но важных для приложений случаях имеются соответствующие теоремы о непустоте (внутренности) множества допустимых элементов [3, 5, 7, 8, 10].

Пусть на множестве \mathcal{D} задан функционал

$$I[v] : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1. \quad (5)$$

Ставится следующая

Задача. Найти допустимую четверку элементов $\bar{v} = \{\bar{\beta}, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}(t)\} \in \mathcal{D}$, доставляющую наименьшее значение функционалу (5), т.е.

$$I[\bar{v}] = I[\bar{\beta}, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}(t)] = \min_{v \in \mathcal{D}} I[v], \quad (6')$$

либо последовательность допустимых четверок элементов $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} = \{\beta_s, y_{0s}, y_{1s}, y(t)_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$, на которой значение функционала $I[v]$ стремится к своему минимальному значению, т.е.

$$I[v_s] \rightarrow \min_{v \in \mathcal{D}} I[v], \quad s \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Очевидно, что задача (6) содержит в себе, как частный случай, задачу (6').

Отметим, что существование содержательных постановок задач вида (3)–(6) прикладного значения из различных областей науки и техники, очевидно, не вызывает никаких сомнений. В частности, функционал $I[v]$ (6) может иметь вид

$$I[v] = \alpha_1 |\beta - \beta_0|^2 + \alpha_2 |y_0 - y_{00}|^2 + \alpha_3 |y_1 - y_{10}|^2 + \alpha_4 \int_{t_0}^{t_1} |y(t) - y_0(t)|^2 dt,$$

где $\beta_0 \in \mathcal{B}$, $y_{00} \in \mathcal{Y}_0$, $y_{10} \in \mathcal{Y}_1$, $y_0(t) \in \mathcal{Y}(t) \forall t \in (t_0, t_1)$, — в соответствии с ограничениями (2) заданные элементы; числа α_j , $j = 1, \dots, 4$, также являются заданными и определяют приоритеты элементов $\{\beta, y_0, y_1, y(t)\}$ при обеспечении их близости к заданным элементам $\{\beta_0, y_{00}, y_{10}, y(t)_0\}$.

2. Пример. Рассмотрим следующий пример, который может быть сформулирован в виде задачи оптимизации (6). Пусть краевая задача (1) имеет вид

$$\begin{cases} y'(t) + q(t)y(t) = \beta \cdot f(t), & t \in (t_0, t_1), \\ y(t_0) = y_0, & y(t_1) = y_1, \end{cases} \quad (7)$$

где, для простоты, $q(t)$, $f(t)$ являются заданными непрерывными скалярными функциями на интервале (t_0, t_1) ; y_0, y_1, β являются искомыми скалярными величинами.

В этом случае справедливо следующее положение: если четверка $\{\beta, y_0, y_1, y(t)\}$ будет удовлетворять краевой задаче (7), то отсюда будет следовать выполнение равенства

$$\varphi_0(\beta, y_0, y_1, y(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta \cdot \int_{t_0}^{t_1} f(\theta) \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} q(\tau) d\tau\right) d\theta + y_0 - y_1 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} q(\tau) d\tau\right) = 0. \quad (8)$$

Обозначение $\stackrel{\text{def}}{=}$ здесь и всюду в дальнейшем означает, что имеет место равенство по определению.

Заметим, что в данном примере функционал φ_0 непосредственно не зависит от функции $y(t)$. Покажем, что функционал (5) можно выбрать так, чтобы равенство (8) выполнялось для всех допустимых троек $\{\beta, y_0, y_1\}$.

Для этого введем обозначение

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(t) \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} q(\tau) d\tau\right) d\theta$$

и рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть заданные функции $f(t)$, $q(t)$ таковы, что $\Delta = 0$. Тогда имеем

$$y_0 - y_1 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} q(\tau) d\tau\right) = 0 \quad \forall \beta. \quad (9)$$

В этом случае, очевидно, что равенство (8) эквивалентно (9).

б) Пусть заданные функции $f(t)$, $q(t)$ таковы, что $\Delta \neq 0$. Тогда из равенства (8) следует

$$\beta(y_0, y_1) = -\frac{1}{\Delta} y_0 + \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} q(\tau) d\tau\right)}{\Delta} y_1. \quad (10)$$

Таким образом, в случае б) равенство (8) будет иметь место для любых $v \in \mathcal{D}$, если в качестве функционала (5) выступает параметр β (10):

$$I(v) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(y_0, y_1). \quad (11)$$

Если теперь в ограничениях (4) φ_j , $j = 1, \dots, m$, не зависит от β , $y(t)$, то задача оптимизации (3)–(6) запишется в виде

$$\begin{cases} I(v) = \beta(y_0, y_1) \rightarrow \min_{\{y_0, y_1\}}, \\ \varphi_j(y_0, y_1) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, для нашего примера задача минимизации функционала (11) при условиях (7), (4) и при тех дополнительных предположениях, которые были сделаны выше, свелась к задаче математического программирования (12) с линейным критерием качества (10). Известно, что для решения задачи оптимизации (12) существуют достаточно эффективные алгоритмы. Однако, общая задача оптимизации (3)–(6), сформулированная выше, ранее не рассматривалась и является предметом изучения данной работы.

3. Достаточное условие оптимальности. Для получения достаточного условия оптимальности в задаче (3)–(6) используется идея принципа расширения задачи оптимизации [3, 5, 7, 9–12]. Суть этого принципа заключается в следующем. Если первоначальную задачу минимизации (3)–(6) обозначить через $\langle I, \mathcal{D} \rangle$, то ей сопоставляется задача минимизации функционала L на множестве \mathcal{E} , т.е. $\langle L, \mathcal{E} \rangle$, где

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}; \quad I[v] \geq L[v] \quad \forall v \in \mathcal{D}; \quad \text{в частности,} \quad I[v] = L[v] \quad \forall v \in \mathcal{D}.$$

Определение 2. Задачу оптимизации $\langle L, \mathcal{E} \rangle$ называют расширением задачи $\langle I, \mathcal{D} \rangle$.

Далее, решая задачу $\langle L, \mathcal{E} \rangle$, получают информацию о решении первоначальной задачи $\langle I, \mathcal{D} \rangle$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [3, 8, 11]. Пусть задача минимизации $\langle L, \mathcal{E} \rangle$ является расширением задачи $\langle I, \mathcal{D} \rangle$. Тогда

$$I[v] \geq l \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{v \in \mathcal{E}} L[v].$$

Если, кроме того, существует последовательность $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} I[v_s] = l$, то последовательность $\{v_s\}_{s=1}^{\infty}$ является минимизирующей в задаче $\langle I, \mathcal{D} \rangle$ и любая минимизирующая последовательность для задачи $\langle I, \mathcal{D} \rangle$ удовлетворяет условию $\lim_{s \rightarrow \infty} I[v_s] = l$.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{v = \{\beta, y_0, y_1, y(t)\} \mid \text{при отсутствии ограничений (3)–(4)}\} \quad (13)$$

(очевидно, что $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$), а также обобщенные множители (функционалы) Лагранжа [2–4, 6, 8–12]

$$\lambda_j[\beta, y_0, y_1, y(t)] : \mathcal{E} \subseteq \{\mathbb{R}^{r+2n} \times C([t_0, t_1])\} \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad j = 1, \dots, n + m, \quad (14)$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \lambda_j[\beta, y_0, y_1, y(t)] \geq 0, \quad j = n+1, \dots, n+m, \quad \forall v \in \mathcal{E}; \\ \lambda_j[v] \cdot \varphi_j[v] = 0 \quad \forall j = \overline{n+1, n+m}, \quad \forall v = \{\beta, y_0, y_1, y(t)\} \in \mathcal{D}. \end{cases} \quad (15)$$

Теперь мы можем ввести функционал $L[v]$:

$$L[v] \stackrel{\text{def}}{=} I[v] + \sum_{j=1}^{n+m} \lambda_j[v] \cdot \varphi_j[v], \quad \forall v = \{\beta, y_0, y_1, y(t)\} \in \mathcal{E}, \quad (16)$$

а также число l :

$$l \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{v \in \mathcal{E}} L[v]. \quad (17)$$

Очевидно, что пара $\langle L, \mathcal{E} \rangle$, определяемая (13) и (16), является задачей расширения для задачи минимизации $\langle I, \mathcal{D} \rangle$. Класс функционалов $\lambda_j[v]$, $j = 0, 1, \dots, m$, (14), для которых определены конструкции (15), (16) и (17), обозначим через Λ . Справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть существуют функционалы $\lambda_j[v]$, $j = 0, 1, \dots, m$, из класса Λ и последовательность $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$, такие, что выполнено условие

$$L[v_s] \rightarrow l. \quad (18)$$

Тогда последовательность $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ является минимизирующей, и любая минимизирующая последовательность для функционала $I[v]$ на множестве \mathcal{D} удовлетворяет условию (18).

Доказательство. Зададимся функционалами $\lambda_j[v]$, $j = 0, 1, \dots, m$, из класса Λ , и с их помощью построим функционал $L[v]$, который для любых функционалов $\lambda_j[v]$, $j = 0, 1, \dots, m$, из класса Λ будет определен на \mathcal{D} . Для всех $v \in \mathcal{D}$, очевидно, имеет место неравенство $L[v_s] \geq l$. Для рассматриваемого класса Λ на множестве \mathcal{D} : $L[v] \equiv I[v]$.

Далее, условие (18) необходимо и достаточно для того, чтобы $I[v_s] \rightarrow l$ на соответствующей последовательности $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$. В самом деле, достаточность очевидна. Покажем необходимость. Пусть $I[v_s] \rightarrow l$. Предположим, что условие (18) не выполняется. Тогда по определению числа l (17) существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех v_s выполняется соотношение $L[v_s] \geq l + \varepsilon$. Но это противоречит условию: на множестве \mathcal{D} $L[v] \equiv I[v]$. Дальнейшее непосредственно следует из леммы 1. Теорема доказана.

Выделим в виде отдельной теоремы следствие теоремы 1 для случая, когда речь идет о минимизирующих последовательностях частного вида $v_s = \bar{v}$ при всех s , т.е. о минималях (элементах, доставляющих минимальное значение в задаче $\langle I, \mathcal{D} \rangle$).

Теорема 2. Пусть существуют функционалы $\lambda_j[v]$, $j = 0, 1, \dots, m$, из класса Λ и элемент $\bar{v} \in \mathcal{D}$, такие, что выполнено условие

$$L[\bar{v}] = l. \quad (19)$$

Тогда $\bar{v} \in \mathcal{D}$ есть минималь, и любая минималь для функционала $I[v]$ на множестве \mathcal{D} удовлетворяет условию (19).

4. Принцип оптимальности. Опираясь на условия оптимальности, представленные в предыдущем пункте, можно предложить следующий подход к решению поставленной в п.1 оптимизационно-обратной задачи (3)–(6), который назовем принципом оптимальности, суть

которого применительно к теореме 2 заключается в следующем: вместо непосредственного поиска элемента \bar{v} , минимизирующего функционал $I[v]$, отыскиваются $\{\bar{v}, \lambda_j[v], j = 0, 1, \dots, m, \}$ такие, чтобы было выполнено условие (19) теоремы 2. Согласно теореме 2 элемент \bar{v} будет минималью в задаче $\langle I, \mathcal{D} \rangle$ и, более того, любая другая минималь при тех же функционалах $\lambda_j[v], j = 0, 1, \dots, m$, из класса Λ должна обеспечивать выполнение условия (19).

Условия теорем 1 и 2 оставляют известный произвол в выборе функционалов $\lambda_j[v], j = 0, 1, \dots, m$. Задавая способ отыскания этих функционалов, по существу, мы задаем метод решения оптимизационно-обратной задачи (3)–(6).

Заключение. В данной части работы установлено достаточное условие оптимальности (п.2, теоремы 1 и 2) и сформулирован принцип оптимальности (п.4), предлагающий общий подход к решению поставленной в п.1 оптимизационно-обратной задачи (3)–(6). Что касается вопросов конкретных реализаций предлагаемого общего подхода, в том числе и для уравнений в частных производных, то их авторы намерены рассмотреть во второй части работы.

Цитированная литература

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
2. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
3. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.
4. **Лионс Ж.-Л.** Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987.
5. **Дженалиев М.Т., Сматов К.С.** Математическое моделирование оптимальных процессов управления. Алматы, 1997.
6. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
7. **Young L.C.** Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Philadelphia, W.B.Saunders. 1969.
8. **Флеминг У., Ришел Р.** Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М., 1978.
9. **Кротов В.Ф., Гурман В.И.** Методы и задачи оптимального управления. М., 1973.
10. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М., 1974.
11. **Гурман В.И.** Принцип расширения в задачах управления. М., 1985.
12. **Krotov V.F.** Global Methods in Optimal Control Theory. New York–Basel–Hong Kong, Marcel Dekker. 1996.

Поступила в редакцию 16.09.2007г.

УДК 517.958:530.145.6

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ (2+1)-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

К. Р. ЕСМАХАНОВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 myrzakul@ Rambler.ru

Найдены N -солитонные решения (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера, используя метод нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы.

С середины прошлого века началось интенсивное исследование интегрируемых нелинейных уравнений. В работах Абловица М., Захарова В.Е., Крускала Д., Коупа Д., Лакса П.Д., Фадеева Л.Д., Манакова С.В., Ньюэлла А и др. были предложены различные методы нахождения их точных решений. По мере развития теории солитонов совершенствуются и различные методы построения и исследования интегрируемых нелинейных уравнений.

Одним из эффективных методов теории солитонов является метод нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы [1-3]. Этот метод позволяет одновременно построить нелинейное уравнение, его представление Лакса и точные решения. Адаптация метода $\bar{\partial}$ -проблемы к конкретным уравнениям представляет собой одну из актуальных задач, стоящих перед нелинейной математической физикой. В данной работе, используя этот метод, мы построим N -солитонные решения системы (2+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера. Для решения системы, используя метод $\bar{\partial}$ -проблемы, мы перешли к решению интегральных матричных уравнений типа Фредгольма второго рода с сингулярными вырожденными ядрами (11), позволило в тему построить N -солитонные решения. В частности, из них можно получить одно- и двухсолитонные решения.

1. Постановка задачи. Метод $\bar{\partial}$ -проблемы. Рассматривается система уравнений вида

$$iq_t + q_{yy} + vq = 0, \quad (1a)$$

$$ip_t - p_{yy} - vp = 0, \quad (1b)$$

$$2v_x + v_y = -2(pq)_y, \quad (1c)$$

где q , p и v являются комплексными функциями. Решение системы (1) удовлетворяет граничным условиям: $q \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$ при $x, y \rightarrow \pm\infty$. Как принято в теории солитонов,

Keywords: *nonlinear equation, Schrodinger's equation, method of $\bar{\partial}$ - problem, integral matrix equation, dimension*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

© К. Р. Есмаханова, 2007.

в дальнейшем мы будем называть систему уравнений просто уравнением. Для построения решений (1), следуя методике, предложенной в [1], необходимо решить матричную $\bar{\partial}$ – проблему вида

$$\frac{\partial W(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \lambda} = \iint_G W(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu} + W'(\lambda, \bar{\lambda}), \quad (2)$$

где W, W' и R являются матричнозначными функциями, определенными на ограниченной области G . Здесь $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, где λ_R – действительная и λ_I – мнимая части λ . Мы обозначим ограниченную область G , а её кусочно гладкую и с положительной ориентацией границу обозначим через $\partial G = \Gamma$. Полную комплексную плоскость обозначим через E . Интегральное матричное уравнение, соответствующее уравнению (2), имеет вид

$$W(\lambda, \bar{\lambda}) = V(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{\lambda' - \lambda} \iint_G W(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (3)$$

где $d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}' = -2id\lambda'_R \cdot d\lambda'_I$, символ \wedge означает внешнее произведение и $W' = \frac{\partial V}{\partial \lambda}$. Следуя методике [1], нужно построить матричную функцию W и ядро R , удовлетворяющие (3). Рассмотрим (3) в следующих классах:

$$V(\lambda, \bar{\lambda}) \in L_q(G), \quad q \geq \frac{p}{p-1}, \quad p > 2, \quad R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') \in L_p(G), \quad p > 2$$

по $\mu, \bar{\mu}$ и $L_1(G)$ по $\lambda, \bar{\lambda}$ $1 \leq q < 2$, $W \in L_q(G)$, $q \geq \frac{p}{p-1} \Rightarrow 1 \leq q < 2$.

А теперь рассмотрим решения уравнения (3) с дополнительным условием: $W \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и W разлагается в асимптотический ряд:

$$W = 1 + \lambda^{-1}W_{-1} + \lambda^{-2}W_{-2} + \lambda^{-3}W_{-3} + \dots \quad (4)$$

Связи между решениями (2+1) – мерного нелинейного уравнения Шредингера (1) и интегрального уравнения (3) задаются формулами следующей теоремы, которая доказана в работе [4]:

$$q = -2i(W_{-1})_{12}, \quad p = 2i(W_{-1})_{21}, \quad v = i(C_2 - C_1), \quad (5)$$

где

$$C_1 = i(W_{-1})_{11}, \quad C_2 = i(W_{-1})_{22}.$$

2. Решение проблемы. Солитонные решения. Возьмем ядро в формуле (3) в виде вырожденного сингулярного ядра

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}; x, y, t) = e^{F(\mu, x, y, t)} \sum_1^N f_{0k} \delta(\mu - \mu_k) g_{0k} \delta(\lambda - \lambda_k) e^{-F(\lambda, x, y, t)}, \quad (6)$$

где $\delta(\mu - \mu_k)$ является δ –функцией Дирака и $f_{0k}, g_{0k}, \mu_k, \lambda_k$ – произвольные постоянные. Здесь

$$F(\mu, x, y, t) = i\mu Ix + \frac{2i\mu}{\alpha} H_2 y - 4i\mu^2 H_2 t, \quad (7)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Теперь сформулируем теорему.

Теорема. Если ядро R определяется формулой (5), то N -солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) имеют вид

$$q(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k,l=1}^N (\xi_k (I - A)_{kl}^{-1} \eta_l)_{12}, \tag{9a}$$

$$p(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k,l=1}^N (\xi_k (I - A)_{kl}^{-1} \eta_l)_{21}, \tag{9b}$$

$$C(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=1}^N (\xi_k (I - A)_{kl}^{-1} \eta_l)_{diag}, \tag{9d}$$

где

$$\xi_k = -2ie^{i\lambda_k Ix + \frac{2i\lambda_k}{\alpha} H_2 y - 4i\lambda_k^2 H_2 t} f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{10a}$$

$$\eta_l = -2ig_l e^{-i\lambda'_l Ix - \frac{2i\lambda'_l}{\alpha} H_2 y + 4i\lambda_l'^2 H_2 t}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \tag{10b}$$

$$A_{lk} = \frac{2i g_l e^{i(\mu_k - \lambda_l)Ix + \frac{2i}{\alpha}(\mu_k - \lambda_l)H_2 y - 4i(\mu_k^2 - \lambda_l^2)H_2 t} f_k}{\pi (\lambda_l - \mu_k)}, \quad k, l = 1, 2, \dots, N. \tag{10c}$$

Доказательство. Зададим N дискретных точек на комплексной плоскости: $\mu_k \in G$, $\lambda_k \in G$, $\mu_k \neq \lambda_k \quad \forall j, k$. Пусть R задается соответствующей им формулой (6). Подставляя формулу (6) в (3), получим

$$W(\lambda, \bar{\lambda}) = V(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{\lambda' - \lambda} \times \\ \times \iint_G W(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu, x, y, t)} \sum_{k=1}^N [f_{0k} \delta(\mu - \mu_k) g_{0k} \delta(\lambda' - \lambda_k)] e^{F(-\lambda', x, y, t)} d\mu \wedge d\bar{\mu}. \tag{11}$$

Введем обозначение, используя формулу $-\frac{1}{2i} \iint_G \delta(\mu - \mu_1) W(\mu, \bar{\mu}) d\mu \wedge d\bar{\mu} = W(\mu_1, \bar{\mu}_1)$,

$$W(\lambda, \bar{\lambda}) = V(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{h_l}{2\pi i} \iint_G \frac{1}{\lambda' - \lambda} \sum_{l=1}^N g_{0l} \delta(\lambda' - \lambda_l) e^{-F(\lambda', x, y, t)} d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}' = \\ = V(\lambda, \bar{\lambda}) - \frac{h_l}{\pi} \sum_{l=1}^N g_{0l} \frac{e^{-F(\lambda_l, x, y, t)}}{\lambda_l - \lambda}, \tag{12}$$

где

$$h_k = \iint_G W(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu, x, y, t)} f_{0k} \delta(\mu - \mu_k) d\mu \wedge d\bar{\mu} = W(\mu_k, \bar{\mu}_k) e^{F(\mu_k, x, y, t)} f_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \tag{13}$$

Таким образом, нахождение $W(\lambda, \bar{\lambda})$ сводится к вычислению всех h_k . При $W' = 0$ и $V = 1$ для h_k после некоторых вычислений получаем следующие линейные алгебраические системы:

$$h_k = \xi_k + \sum_{l=1}^N h_l A_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{14}$$

где

$$\xi_k = -2ie^{i\lambda_k Ix + \frac{2i\lambda_k}{\alpha} H_2 y - 4i\lambda_k^2 H_2 t} f_{0k}, \tag{15a}$$

$$A_{lk} = \frac{2i g_{0l} e^{i(\mu_k - \lambda_l)Ix + \frac{2i}{\alpha}(\mu_k - \lambda_l)H_2y - 4i(\mu_k^2 - \lambda_l^2)H_2t} f_{0k}}{\pi (\lambda_l - \mu_k)}. \quad (15b)$$

Здесь $k, l = 1, \dots, N$ и $\lambda_l - \mu_k \neq 0$.

Таким образом, интегральное матричное уравнение (3) с сингулярным вырожденным ядром (6) сводится к линейной алгебраической системе (14). Предполагая, что $\det(I - A_{lk}) \neq 0 \forall x, y, t$, из системы (14), находим h_k . Тогда с учетом выражения для h_k решение интегрального уравнения (3) примет вид

$$W(\lambda, \bar{\lambda}) = V(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{1}{2\pi i} \iint_G \frac{\sum_{k,l=1}^N \xi_k (I - A)_{kl}^{-1} g_{0l} \delta(\lambda' - \lambda_l) e^{-F(\lambda', x, y, t)}}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'. \quad (16)$$

Из уравнения (16) получим решение уравнения (3) в виде

$$W(\lambda, \bar{\lambda}) = V(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{\sum_{k,l=1}^N \xi_k (I - A)_{kl}^{-1} g_{0l} e^{-F(\lambda_k, x, y, t)}}{\pi(\lambda_l - \lambda)}. \quad (17)$$

Отсюда, подставляя формулу (4) в формулу (17), приравнявая коэффициенты при степенях λ^{-n} в правой и левой частях и используя (5), получим N -солитонные решения в виде формулы (9). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Захаров В. Е., Манакон С. В. // Фун. ан. и его прил. 1985. Т.19, № 2. С. 11 – 25.
2. Bogdanov L. V., Manakov S. V. // Jour. Phys. A: Math. Gen. 1988. V. 21, P. 537 – 545.
3. Fokas A. S., Zakharov V. E. // Journal of Nonlinear Sciences. 1992. V. 2. P. 109 – 119.
4. Блиев Н. К., Есмаханова К. Р. // Известия МОН и НАН РК. Сер. физ.-матем. 2007. № 5. С. 43 – 48.

Поступила в редакцию 29.08. 2007 г.

УДК 517.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛАГРАНЖЕВОЙ ДВУМЕРНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ПОСТРОЕННОЙ НА ОСНОВЕ ЯДРА ПЕАНО НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

Е.Н. ИВАНОВА

КазНУ имени аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 genremi@yandex.ru

Рассмотрена задача разрешимости сплайн-интерполяции по хаотичным данным в случае, когда двумерный интерполяционный сплайн построен на основе ядра Пеано и лагранжевой информации.

1. Постановка задачи.

Пусть $\{\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_m(x, y)\}$ – система линейно независимых на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}_2$ функций, $\Phi_m = \text{span}\{\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_m(x, y)\}$, $\Phi_0 = \{0\}$.

Через $F_{m,p}(\alpha, \beta)$ обозначим следующий класс истокообразных функций двух переменных, заданных на множестве G :

$$F_{m,p}(\alpha, \beta) := \left\{ f(x, y) : f(x, y) = \varphi_f(x, y) + \int \int_{\Omega} f_{\Omega}(u, v)(u-x)_{+}^{\alpha}(v-y)_{+}^{\beta} du dv \right\},$$

где $\varphi_f(x, y) \in \Phi_m$, $\varphi_f(x, y) = \sum_{i=1}^m a_i(f)\varphi_i(x, y)$ ($a_i(f) \in \mathbb{R}$, $i = 1 : m$), $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ – прямоугольник из \mathbb{R}_2 , исток $f_{\Omega}(u, v) \in L_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$); $\alpha, \beta \in Z_+$, $t_+^l := t^l$, если $t \geq 0$; $t_+^l := 0$, если $t < 0$.

Зафиксируем некоторый набор попарно различных точек $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset G$. На множестве $F_{m,p}(\alpha, \beta)$ определим лагранжевый оператор информации

$$\mathbb{I}_n : F_{m,p}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}_n, \quad \mathbb{I}_n(f) = \{f(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Рассмотрим систему m векторов из пространства \mathbb{R}_n $\{V_i\}_{i=1}^m$, порожденных при воздействии оператора \mathbb{I}_n на систему $\{\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_m(x, y)\}$

$$V_i := (\varphi_i(x_1, y_1), \dots, \varphi_i(x_n, y_n)), \quad i = 1 : m.$$

Пусть

$$\dim \text{span}\{V_1, \dots, V_m\} = r \quad (r \leq \min(m, n)).$$

Keywords: *Lagrange information, scattered data, spline, interpolation, Peano kernel*

2000 Mathematics Subject Classification: 41A05, 41A15

© Е.Н. Иванова, 2007.

Для определенности предположим, что система векторов $\{V_1, \dots, V_r\}$ линейно независима в \mathbb{R}_n .

Отметим, что в случае, когда $\Phi_m = \text{span}\{x^i y^j, 0 \leq i+j \leq \gamma; i, j, \gamma \in Z_+\}$, $m = \frac{(\gamma+1) \cdot (\gamma+2)}{2}$; \mathbb{I}_n – лагранжевый, эрмитовый, либо биргофовый оператор информации, условия, накладываемые на выбор подсистемы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ из Φ_m , а также на геометрические характеристики оператора \mathbb{I}_n (точнее множества $\overline{X_r}$), гарантирующие однозначную разрешимость соответствующей интерполяционной задачи, приводятся в многочисленных работах по многомерной полиномиальной интерполяции (см., к примеру, [1] – [8]).

Далее на Ω рассмотрим систему n функций, которая порождается при воздействии оператора \mathbb{I}_n на ядро Пеано $(u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta$:

$$\mathcal{U} := \{(u-x_i)_+^\alpha (v-y_i)^\beta\}_{i=1}^n.$$

Для фиксированного $z \in \mathbb{R}_n$ зададим множество

$$F_{mp}[z] = \{f \in F_{mp}(\alpha, \beta) : \mathbb{I}_n(f) = z\}$$

и функционал $\mathcal{J} : F_{mp}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}_+$, который сопоставляет каждой функции $f(x, y) \in F_{mp}(\alpha, \beta)$ $L_p(\Omega)$ -норму её истока

$$\mathcal{J}(f) = \|f\Omega\|_p := \left(\int_{\Omega} |f\Omega(u, v)|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Решением задачи минимизации функционала \mathcal{J} относительно оператора информации \mathbb{I}_n

$$\mathcal{J}(f) \mapsto \min, f \in F_{mp}[z]$$

является элемент $s_z(x, y) \in F_{rp}[z]$ вида

$$s_z(x, y) = \sum_{i=1}^r a_i(s_z) \varphi_i(x, y) + \int \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n c_j(s_z) (u-x_j)_+^\alpha (v-y_j)^\beta \right|^{q-1} \text{sgn} \left(\sum_{j=1}^n c_j(s_z) \times \right. \\ \left. \times (u-x_j)_+^\alpha (v-y_j)^\beta \right) (u-x)_+^\alpha (v-y)^\beta dudv, \quad (1/p + 1/q = 1),$$

удовлетворяющий требованиям

$$\sum_{j=1}^n c_j(s_z) \varphi_i(x_j, y_j) = 0 \quad (i = 1 : r) \quad (c_j(s_z), a_i(s_z) \in \mathbb{R}, j = 1 : n, i = 1 : r).$$

Элемент $s_f(x, y) \in F_{rp}(\alpha, \beta)$, для которого выполняются условия

$$\begin{cases} s_f(x_i, y_i) = f(x_i, y_i), & (i = 1 : n), \\ \sum_{j=1}^n c_j(s_f) \varphi_i(x_j, y_j) = 0, & (i = 1 : r), \end{cases} \quad (1)$$

назовем интерполяционным сплайном для функции $f(x, y)$ относительно лагранжевого оператора информации \mathbb{I}_n .

Отметим, что обобщением интерполяционных полиномиальных сплайнов нечетной степени являются информационно-ядерные сплайны для классов функций, допускающих интегральные представления достаточно общего вида, которые были предложены А.А. Женсыкбаевым в 1993 – 1995 гг. как аппарат (нелинейного) приближения для решения задач оптимального

восстановления. Тогда же им были доказаны существование, единственность (в случае, если значения ядра образуют линейно независимую систему функций на Ω), а также экстремальные свойства (минимальной (полу)-нормы, наилучшего восстановления и др.) этих сплайнов (см. [9], гл4). Впоследствии им были даны более общие результаты по разрешимости данной сплайн-интерполяции (когда значения ядра образуют, вообще говоря, линейно зависимую систему функций на Ω) (см. [10]).

Целью данной работы является исследование разрешимости сплайн-интерполяции.

2. О линейной независимости системы \mathcal{U} на Ω .

Разобьем G на непересекающиеся подмножества G_i ($G = \cup_{i=1}^5 G_i$):

$$G_1 := \{(x, y) \in G : x \in (a, b), y \in (c, d)\},$$

$$G_2 := \{(x, y) \in G : x \leq a, y \in (c, d)\},$$

$$G_3 := \{(x, y) \in G : x \in (a, b), y \leq c\},$$

$$G_4 := \{(x, y) \in G : x \leq a, y \leq c\},$$

$$G_5 := \{(x, y) \in G : x \geq b, \text{ или } y \geq d\},$$

Согласно этому множество узлов интерполяции X разбивается на подмножества X_i ($i = 1 : 5$):

$$X = \bigcup_{i=1}^5 X_i, \quad \text{где } X_i := \{(x_{ij}, y_{ij})\}_{j=1}^{l_i} \subset G_i, \quad i = 1 : 5, \quad \sum_{i=1}^5 l_i = n.$$

Далее в множествах X_i , ($i = 2 : 4$) произведем разбиение на более мелкие подмножества:

$$X_2 = \bigcup_{i=1}^{k_2} X_{2i}, \quad \text{где } X_{2i} := \{(x_{21}^{(i)}, y_{21}^{(i)}), \dots, (x_{2l_2^{(i)}}^{(i)}, y_{2l_2^{(i)}}^{(i)}) : y_{21}^{(i)} = \dots = y_{2l_2^{(i)}}^{(i)}\}, \quad i = 1 : k_2,$$

$$\sum_{i=1}^{k_2} l_2^{(i)} = l_2; \quad l_2^{(k_2)} \leq \dots \leq l_2^{(2)} \leq l_2^{(1)};$$

$$X_3 = \bigcup_{i=1}^{k_3} X_{3i}, \quad \text{где } X_{3i} := \{(x_{31}^{(i)}, y_{31}^{(i)}), \dots, (x_{3l_3^{(i)}}^{(i)}, y_{3l_3^{(i)}}^{(i)}) : x_{31}^{(i)} = \dots = x_{3l_3^{(i)}}^{(i)}\}, \quad i = 1 : k_3,$$

$$\sum_{i=1}^{k_3} l_3^{(i)} = l_3; \quad l_3^{(k_3)} \leq \dots \leq l_3^{(2)} \leq l_3^{(1)};$$

$$X_4 = \bigcup_{i=1}^{\bar{k}_4} \bar{X}_{4i}, \quad \text{где } \bar{X}_{4i} := \{(x_{41}^{(i)}, y_{41}^{(i)}), \dots, (x_{4\bar{l}_4^{(i)}}^{(i)}, y_{4\bar{l}_4^{(i)}}^{(i)}) : x_{41}^{(i)} = \dots = x_{4\bar{l}_4^{(i)}}^{(i)}\}, \quad i = 1 : \bar{k}_4,$$

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}_4} \bar{l}_4^{(i)} = l_4; \quad \bar{l}_4^{(\bar{k}_4)} \leq \dots \leq \bar{l}_4^{(2)} \leq \bar{l}_4^{(1)};$$

$$\text{либо } X_4 = \bigcup_{i=1}^{\tilde{k}_4} \tilde{X}_{4i}, \quad \text{где } \tilde{X}_{4i} := \{(x_{41}^{(i)}, y_{41}^{(i)}), \dots, (x_{4\tilde{l}_4^{(i)}}^{(i)}, y_{4\tilde{l}_4^{(i)}}^{(i)}) : y_{41}^{(i)} = \dots = y_{4\tilde{l}_4^{(i)}}^{(i)}\}, \quad i = 1 : \tilde{k}_4,$$

$$\sum_{i=1}^{\tilde{k}_4} \tilde{l}_4^{(i)} = l_4; \quad \tilde{l}_4^{(\tilde{k}_4)} \leq \dots \leq \tilde{l}_4^{(2)} \leq \tilde{l}_4^{(1)}.$$

Введем следующие подмножества области Ω , которые порождены ядром Пеано $(u-x)_+^0(v-y)_+^0$ и соответствующим узлом интерполяции:

$$\Omega_{1i} := \{(u, v) \in \Omega : u > x_{1i}, v > y_{1i}\}, i = 1 : l_1,$$

$$\Omega_{ij} := \{(u, v) \in \Omega : u > \bar{x}, v > \bar{y}, \text{ где } (\bar{x}, \bar{y}) \in X_{ij}\}, i = 2, 3; j = 1 : k_i,$$

$$\Omega_{41} := \{(u, v) \in \Omega : u > \bar{x}, v > \bar{y}, \text{ где } (\bar{x}, \bar{y}) \in X_4\} \equiv \Omega \text{ п.в.},$$

$$\Omega_{51} := \{(u, v) \in \Omega : u > \bar{x}, v > \bar{y}, \text{ где } (\bar{x}, \bar{y}) \in X_5\} \equiv \emptyset.$$

Очевидно, что если $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, то $\Omega_{i_1 j_1} \neq \Omega_{i_2 j_2}$.

Далее рассмотрим систему \mathcal{U} , которую мы разобьем на подсистемы в соответствии с разбиением множества X

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i=1,4,5} \mathcal{U}_i \right) \cup \left(\bigcup_{\nu=2}^3 \bigcup_{i=1}^{k_\nu} \mathcal{U}_{\nu i} \right), \text{ где}$$

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ \mathcal{K}_{1i} := (u - x_{1i})_+^\alpha (v - y_{1i})_+^\beta, i = 1 : l_1 \right\} \stackrel{\text{на}\Omega}{\equiv} \left\{ (u - x_{1i})^\alpha (v - y_{1i})^\beta \chi_{\Omega_{1i}}, i = 1 : l_1 \right\},$$

$$\mathcal{U}_4 := \left\{ \mathcal{K}_{4i} := (u - x_{4i})_+^\alpha (v - y_{4i})_+^\beta, i = 1 : l_4 \right\} \stackrel{\text{на}\Omega}{\equiv} \left\{ (u - x_{4i})^\alpha (v - y_{4i})^\beta \chi_{\Omega_{41}}, i = 1 : l_4 \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_5 &:= \left\{ \mathcal{K}_{5i} := (u - x_{5i})_+^\alpha (v - y_{5i})_+^\beta, i = 1 : l_5 \right\} \stackrel{\text{на}\Omega}{\equiv} \left\{ (u - x_{5i})^\alpha (v - y_{5i})^\beta \chi_{\Omega_{51}}, i = 1 : l_5 \right\} \equiv \\ &\equiv \{0, \dots, 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\nu i} &:= \left\{ \mathcal{K}_{\nu j}^{(i)} := (u - x_{\nu j}^{(i)})_+^\alpha (v - y_{\nu j}^{(i)})_+^\beta, i = 1 : l_\nu^{(i)} \right\} \stackrel{\text{на}\Omega}{\equiv} \left\{ (u - x_{\nu j}^{(i)})^\alpha (v - y_{\nu j}^{(i)})^\beta \chi_{\Omega_{\nu i}}, \right. \\ &\quad \left. j = 1 : l_\nu^{(i)} \right\}, i = 1 : k_\nu, \nu = 2, 3, \end{aligned}$$

при этом χ_A – характеристическая функция множества A .

Справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы система \mathcal{U} была линейно независимой на Ω необходимо и достаточно, чтобы выполнялись ограничения:*

$$(1) l_5 = 0,$$

$$(2) 0 \leq l_2^{(i)} \leq \alpha + 1, i = 1 : k_2,$$

$$(3) 0 \leq l_3^{(i)} \leq \beta + 1, i = 1 : k_3,$$

$$(4) 0 \leq l_4 = r_{X_4} \leq (\alpha + 1)(\beta + 1),$$

где $r_{X_4} := \text{rank } \mathcal{A}$; $\mathcal{A} := \{\widehat{\mathbb{I}}_{l_4}(\psi_i)\}_{i=1}^{(\alpha+1)(\beta+1)}$, $\widehat{\mathbb{I}}_{l_4}(\psi) = \{\psi|_{X_4}\}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{(\alpha+1)(\beta+1)} = \{x^{\delta_1} y^{\delta_2} : 0 \leq \delta_1 \leq \alpha, 0 \leq \delta_2 \leq \beta; \delta_1, \delta_2 \in Z_+\}$. При этом условие $l_4 = r_{X_4}$ равносильно выполнению одного из требований:

$$(4.1) \bar{l}_4^{(i)} \leq \beta + 1 (i = 1 : \bar{k}_4), \quad \bar{k}_4 \leq \alpha + 1,$$

$$(4.2) \bar{l}_4^{(i)} \leq \beta + 1 (i = 1 : \bar{k}_4), \quad \bar{k}_4 > \alpha + 1, \quad \text{rank } \bar{B} = \sum_{i=\alpha+2}^{\bar{k}_4} \bar{l}_4^{(i)},$$

$$(4.3) \tilde{l}_4^{(i)} \leq \alpha + 1 (i = 1 : \tilde{k}_4), \quad \tilde{k}_4 \leq \beta + 1,$$

$$(4.4) \quad \tilde{l}_4^{(i)} \leq \alpha + 1 \quad (i = 1 : \tilde{k}_4), \quad \tilde{k}_4 > \beta + 1, \quad \text{rank } \tilde{B} = \sum_{i=\beta+2}^{\tilde{k}_4} \tilde{l}_4^{(i)},$$

где \bar{B}, \tilde{B} – матрицы следующего вида

$$\bar{B} := \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\alpha+1} (x_{41}^{(\nu)} - x_{41}^{(j)}) \prod_{j=1}^{\tilde{l}_4^{(i)}} (y_{4k}^{(\nu)} - y_{4j}^{(i)}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_{4k}^{(\nu)} \\ \vdots \\ (y_{4k}^{(\nu)})^{\beta - \tilde{l}_4^{(i)}} \end{pmatrix}, k = 1 : \tilde{l}_4^{(\nu)} \right\}_{\substack{i=1: \alpha+1, \\ \nu=\alpha+2: \tilde{k}_4}} -$$

матрица размера $[(\alpha + 1)(\beta + 1) - \sum_{i=1}^{\alpha+1} \min(\tilde{l}_4^{(i)}, \beta + 1)] \times [l_4 - \sum_{i=1}^{\alpha+1} \tilde{l}_4^{(i)}]$,

$$\tilde{B} := \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\beta+1} (y_{41}^{(\nu)} - y_{41}^{(j)}) \prod_{j=1}^{\tilde{l}_4^{(i)}} (x_{4k}^{(\nu)} - x_{4j}^{(i)}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_{4k}^{(\nu)} \\ \vdots \\ (x_{4k}^{(\nu)})^{\alpha - \tilde{l}_4^{(i)}} \end{pmatrix}, k = 1 : \tilde{l}_4^{(\nu)} \right\}_{\substack{i=1: \beta+1, \\ \nu=\beta+2: \tilde{k}_4}} -$$

матрица размера $[(\alpha + 1)(\beta + 1) - \sum_{i=1}^{\beta+1} \min(\tilde{l}_4^{(i)}, \alpha + 1)] \times [l_4 - \sum_{i=1}^{\beta+1} \tilde{l}_4^{(i)}]$.

Доказательство. При доказательстве теоремы используются следующие вспомогательные утверждения, доказательства которых не требует особых усилий.

Лемма 1. Пусть $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^k$ – набор точек из \mathbb{R}_2 , $\Omega_\nu := \{(u, v) \in \Omega : u > u_\nu, v > v_\nu\}$ – подмножества множества Ω с ненулевой мерой ($|\Omega_\nu| \neq 0, \nu = 1 : k$). Если $\Omega_i \neq \Omega_j$ ($i \neq j; i, j = 1 : k$), то система $\{(u - u_i)_+^\alpha (v - v_i)_+^\beta\}_{i=1}^k$ является линейно независимой на Ω .

Лемма 2. Пусть $\{w_i\}_{i=1}^k$ – набор различных точек из \mathbb{R} такой, что $w_i \leq \theta_1 < \theta_2$ ($i = 1 : k$), $\delta \in \mathbb{Z}_+$. Если $k \leq \delta + 1$, то система $\{(w - w_i)^\delta\}_{i=1}^k$ является линейно независимой на $[\theta_1, \theta_2]$.

Лемма 3. Пусть оператор $\hat{\mathbb{I}}_{l_4}$ упорядочен на основе разбиения множества X_4 на \bar{X}_{4i} ($i = 1 : \bar{k}_4$), либо на \tilde{X}_{4i} ($i = 1 : \tilde{k}_4$). Тогда матрицу A можно путем элементарных преобразований Гаусса свести к матрице \bar{A} (соответственно \tilde{A}) вида:

$$\bar{A} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \bar{E} & O & O \\ O & O & \bar{B} \\ \bar{E} & O \\ O & O \end{pmatrix}, & \text{если } \bar{k}_4 > \alpha + 1, \\ \begin{pmatrix} \bar{E} & O \\ O & O \end{pmatrix}, & \text{если } \bar{k}_4 \leq \alpha + 1, \end{cases} \quad \tilde{A} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{E} & O & O \\ O & O & \tilde{B} \\ \tilde{E} & O \\ O & O \end{pmatrix}, & \text{если } \tilde{k}_4 > \beta + 1, \\ \begin{pmatrix} \tilde{E} & O \\ O & O \end{pmatrix}, & \text{если } \tilde{k}_4 \leq \beta + 1, \end{cases}$$

где \bar{E} – единичная матрица $\sum_{i=1}^{\min(\alpha+1, \bar{k}_4)} \min(\tilde{l}_4^{(i)}, \beta + 1)$ порядка; \tilde{E} – единичная матрица $\sum_{i=1}^{\min(\beta+1, \tilde{k}_4)} \min(\tilde{l}_4^{(i)}, \alpha + 1)$ порядка.

Линейная независимость системы \mathcal{U} на Ω равносильна линейной независимости всех её подсистем на Ω . Мы разбили множество X на подмножества X_i ($i = 1 : 5$) таким образом, что линейная независимость системы \mathcal{U} на Ω эквивалентна линейной независимости подсистем \mathcal{U}_i ($i = 1, 4, 5$), $\mathcal{U}_{\nu i}$ ($\nu = 2, 3; i = 1 : k_\nu$) на Ω (используется лемма 1, т.к. $\Omega_{ij} \neq \Omega_{kl}, (i, j) \neq (k, l)$). Так как множество \mathcal{U}_5 состоит из нулевых элементов, то первое условие теоремы влечет, что $\mathcal{U}_5 = \emptyset$. Из лемм 1 – 2 вытекают ограничения (2), (3) теоремы. Требование 4 (расширенное) является следствием лемм 1,3. Теорема 1 доказана.

Далее из системы \mathcal{U} выделим максимальную линейно независимую подсистему $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$. Полагая, для простоты записи, что первые m_j ($j = 1, 4, 5$), $m_\nu^{(i)}$ ($\nu = 2, 3; i = 1 : k_\nu$) элементов в системах \mathcal{U}_j ($j = 1, 4, 5$), $\mathcal{U}_{\nu i}$ ($\nu = 2, 3; i = 1 : k_\nu$) образуют максимальные линейно независимые подсистемы, которые мы обозначим через $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_j$ ($j = 1, 4, 5$), $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\nu i}$ ($\nu = 2, 3; i = 1 : k_\nu$)

соответственно, получим

$$\mathring{\mathcal{U}} = \left(\bigcup_{i=1,4,5} \mathring{\mathcal{U}}_i \right) \cup \left(\bigcup_{\nu=2}^3 \bigcup_{i=1}^{k_\nu} \mathring{\mathcal{U}}_{\nu i} \right).$$

В силу теоремы 1 $m_1 = l_1$, $m_4 = r_{X_4}$, $m_5 = 0$, $m_2^{(i)} = \min(l_2^{(i)}, \alpha + 1)$, $m_3^{(i)} = \min(l_3^{(i)}, \beta + 1)$ ($i = 1 : k_3$). При этом $\exists \mu_\nu \in \{1, \dots, k_\nu\}$ ($\nu = 2, 3$) такие, что $l_2^{(i)} > m_2^{(i)} = \alpha + 1$ ($i = 1 : \mu_2$), $l_2^{(i)} = m_2^{(i)}$ ($i = \mu_2 + 1 : k_2$), $l_3^{(i)} > m_3^{(i)} = \beta + 1$ ($i = 1 : \mu_3$), $l_3^{(i)} = m_3^{(i)}$ ($i = \mu_3 + 1 : k_3$) (то есть в первых μ_ν множествах $\mathcal{U}_{\nu i}$ ($\nu = 2, 3$; $i = 1 : \mu_\nu$) найдутся линейно зависимые элементы).

Запишем каждый $\mathcal{K}_{\rho i}$ ($\rho = 1, 4, 5$; $i = 1 : l_\rho$), $\mathcal{K}_{\rho\omega}^{(i)}$ ($\rho = 2, 3$; $i = 1 : k_\rho$; $\omega = 1 : l_\rho^{(i)}$) через его разложение по системе $\mathring{\mathcal{U}}$:

$$\mathcal{K}_{\rho i} = \sum_{\mu=1,4} m_\mu \sum_{j=1}^{m_\mu} \alpha_{\mu j}^{(\rho,i)} \mathcal{K}_{\mu j} + \sum_{\mu=2,3} k_\mu \sum_{\nu=1}^{m_\mu^{(\nu)}} \alpha_{\mu j(\nu)}^{(\rho,i)} \mathcal{K}_{\mu j}^{(\nu)} = \quad (2)$$

$$= \begin{cases} \mathcal{K}_{\rho i}, & \text{если } \rho = 1, 4; i = 1 : m_\rho, \\ \sum_{j=1}^{m_4} \alpha_{4j}^{(\rho,i)} \mathcal{K}_{4j}, & \text{если } \rho = 4; i = m_4 + 1 : l_4, \\ 0, & \text{если } \rho = 5, i = 1 : l_5. \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathcal{K}_{\rho\omega}^{(i)} = \sum_{\mu=1,4} m_\mu \sum_{j=1}^{m_\mu} \alpha_{\mu j}^{(\rho,\omega)(i)} \mathcal{K}_{\mu j} + \sum_{\mu=2,3} k_\mu \sum_{\nu=1}^{m_\mu^{(\nu)}} \alpha_{\mu j(\nu)}^{(\rho,\omega)(i)} \mathcal{K}_{\mu j}^{(\nu)} = \quad (4)$$

$$= \begin{cases} \mathcal{K}_{\rho\omega}^{(i)}, & \text{если } \rho = 2, 3; i = 1 : k_\rho; \omega = 1 : m_\rho^{(i)}, \\ \sum_{j=1}^{m_\rho^{(i)}} \alpha_{\rho j(i)}^{(\rho,\omega)(i)} \mathcal{K}_{\rho j}^{(i)}, & \text{если } \rho = 2, 3; i = 1 : k_\rho; \omega = m_\rho^{(i)} + 1 : l_\rho^{(i)}. \end{cases} \quad (5)$$

3. Разрешимость сплайн-интерполяции. Проанализируем возможность разрешимости интерполяционной задачи (1), которая является линейной системой относительно коэффициентов a_i ($i = 1 : r$), c_j ($j = 1 : n$), когда $p = 2$, и нелинейной – в противном случае. Рассмотрим однородную систему (1). Если $f(x_i, y_i) = 0$ ($i = 1 : n$), то мы должны получить, что $s_f(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in G$. Это эквивалентно следующей линейной системе

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j (u - x_j)_+^\alpha (v - y_j)_+^\beta \equiv 0 & (\forall (u, v) \in \Omega), \\ \sum_{j=1}^n c_j \varphi_i(x_j, y_j) = 0 & (i = 1 : r), \\ \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i(x_j, y_j) & (j = 1 : n). \end{cases} \quad (6)$$

Согласно разбиению множества X на подмножества коэффициенты c_i ($i = 1 : n$) перенумеруются следующим образом:

$$\{c_i, i = 1 : n\} = \{c_{ij} (i = 1, 4, 5; j = 1 : l_i); c_{\nu j}^{(i)} (\nu = 2, 3; i = 1 : k_\nu; j = 1 : l_\nu^{(i)})\}.$$

Учитывая это, а также равенства (2), (4) и линейную независимость системы $\mathring{\mathcal{U}}$ на Ω , (6)

примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\rho=1,4,5} \sum_{i=1}^{l_\rho} c_{\rho i} \alpha_{\mu j}^{(\rho,i)} + \sum_{\rho=2,3} \sum_{i=1}^{k_\rho} \sum_{\omega=1}^{l_\rho^{(i)}} c_{\rho\omega}^{(i)} \alpha_{\mu j}^{(\rho,\omega)(i)} = 0 \quad (\mu = 1, 4; j = 1 : m_\mu), \\ \sum_{\rho=1,4,5} \sum_{i=1}^{l_\rho} c_{\rho i} \alpha_{\mu j(\nu)}^{(\rho,i)} + \sum_{\rho=2,3} \sum_{i=1}^{k_\rho} \sum_{\omega=1}^{l_\rho^{(i)}} c_{\rho\omega}^{(i)} \alpha_{\mu j(\nu)}^{(\rho,\omega)(i)} = 0 \quad (\mu = 2, 3; \nu = 1 : k_\mu; j = 1 : m_\mu^{(\nu)}), \\ \sum_{\rho=1,4,5} \sum_{i=1}^{l_\rho} c_{\rho i} \varphi_\nu(x_{\rho i}, y_{\rho i}) + \sum_{\rho=2,3} \sum_{i=1}^{k_\rho} \sum_{\omega=1}^{l_\rho^{(i)}} c_{\rho\omega}^{(i)} \varphi_\nu(x_{\rho\omega}^{(i)}, y_{\rho\omega}^{(i)}) = 0 \quad (\nu = 1 : r), \\ \sum_{\mu=1}^r a_\mu \varphi_\mu(x_{\rho i}, y_{\rho i}) = 0 \quad (\rho = 1, 4, 5; i = 1 : l_\rho), \\ \sum_{\mu=1}^r a_\mu \varphi_\mu(x_{\rho\omega}^{(i)}, y_{\rho\omega}^{(i)}) = 0 \quad (\rho = 2, 3; \omega = 1 : l_\rho^{(i)}; i = 1 : k_\rho). \end{array} \right.$$

Запишем эту систему в матричном виде

$$M\bar{C} = O,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} B & O \\ \Phi & O \\ O & \Phi^T \end{pmatrix} - \text{матрица размера } \left(\sum_{i=1}^4 m_i + r + n \right) \times (n + r),$$

$$(m_\nu := \sum_{i=1}^{k_\nu} m_\nu^{(i)}, \nu = 2, 3);$$

$$\bar{C} = \left(C[l_1], C[l_\nu^{(i)}] (\nu = 2, 3; i = 1 : k_\nu), C[l_4], C[l_5], a_1, \dots, a_r \right)^T - \text{вектор-столбец размера } (n+r) \times 1,$$

$$C[l_i^{(k)}] := \left(c_{i1}^{(k)}, \dots, c_{i l_i^{(k)}}^{(k)} \right)^T,$$

$$B = \left(B(i, j) : i = m_1, m_2^{(1)}, \dots, m_2^{(k_2)}, m_3^{(1)}, \dots, m_3^{(k_3)}, m_4; j = l_1, l_2^{(1)}, \dots, l_2^{(k_2)}, l_3^{(1)}, \dots, l_3^{(k_3)}, l_4, l_5 \right),$$

$$B(m_i^{(k)}, l_j^{(\nu)}) := \begin{pmatrix} \alpha_{i1}^{(j,1)(\nu)} & \dots & \alpha_{i1}^{(j,l_j^{(\nu)})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i m_i^{(k)}}^{(j,1)(\nu)} & \dots & \alpha_{i m_i^{(k)}}^{(j,l_j^{(\nu)})} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \left(\Phi(r, i) : i = l_1, l_2^{(1)}, \dots, l_2^{(k_2)}, l_3^{(1)}, \dots, l_3^{(k_3)}, l_4, l_5 \right),$$

$$\Phi(r, l_j^{(k)}) := \begin{pmatrix} \varphi_1^{(j,1)(k)} & \dots & \varphi_1^{(j,l_j^{(k)})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_r^{(j,1)(k)} & \dots & \varphi_r^{(j,l_j^{(k)})} \end{pmatrix}, \quad \varphi_i^{(j,\nu)(k)} := \varphi_i(x_{j\nu}^{(k)}, y_{j\nu}^{(k)}).$$

Здесь и в дальнейшем при отсутствии верхних индексов k , либо ν в обозначениях $C[l_i^{(k)}]$, $B(m_i^{(k)}, l_j^{(\nu)})$, $\Phi(r, l_j^{(k)})$ соответствующие индексы в представлении матрицы опускаются. В силу (3), (5) матрица B является диагональной блочной матрицей,

$$B = \text{diag} \left(B(m_1, l_1), B(m_2^{(1)}, l_2^{(1)}), \dots, B(m_2^{(k_2)}, l_2^{(k_2)}), B(m_3^{(1)}, l_3^{(1)}), \dots, \dots, B(m_3^{(k_3)}, l_3^{(k_3)}), B(m_4, l_4) \right),$$

где $B(m_1, l_1)$, $B(m_i^{(\nu)}, l_i^{(\nu)})$ ($i = 2, 3; \nu = \mu_i + 1 : k_i$) – единичные матрицы; $B(m_4, l_4)$, $B(m_i^{(\nu)}, l_i^{(\nu)})$ ($i = 2, 3; \nu = 1 : \mu_i$) – матрицы вида

$$B(m_i^{(\nu)}, l_i^{(\nu)}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \alpha_{i1}^{(i, m_i^{(\nu)}+1)(\nu)} & \cdots & \alpha_{i1}^{(i, l_i^{(\nu)})(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha_{im_i}^{(i, m_i^{(\nu)}+1)(\nu)} & \cdots & \alpha_{im_i}^{(i, l_i^{(\nu)})(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Далее, проведя элементарные преобразования со столбцами подматрицы $\begin{pmatrix} B \\ \Phi \\ O \end{pmatrix}$ в матрице M , получим матрицу M' вида

$$M' = \begin{pmatrix} E & O & O \\ \tilde{\Phi} & \bar{\Phi} & O \\ O & O & \Phi^T \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица $\sum_{i=1}^4 m_i$ порядка,

$$\tilde{\Phi} = \left(\Phi(r, i) : i = m_1, m_2^{(1)}, \dots, m_2^{(k_2)}, m_3^{(1)}, \dots, m_3^{(k_3)}, m_4 \right),$$

$$\bar{\Phi} = \left(\bar{\Phi}(r; m_2^{(1)} + 1 : l_2^{(1)}), \dots, \bar{\Phi}(r; m_2^{(\mu_2)} + 1 : l_2^{(\mu_2)}), \bar{\Phi}(r; m_3^{(1)} + 1 : l_3^{(1)}), \dots, \right.$$

$$\left. \bar{\Phi}(r; m_3^{(\mu_3)} + 1 : l_3^{(\mu_3)}), \bar{\Phi}(r; m_4 + 1 : l_4), \Phi(r, l_5) \right) – \text{матрица размера } r \times l_0,$$

$l_0 := \sum_{i=1}^4 (l_i - m_i) + l_5 = n - \sum_{i=1}^4 m_i$ – количество линейно независимых элементов в системе \mathcal{U} .

$$\bar{\Phi}(r; m_i^{(j)} + 1 : l_i^{(j)}) := \begin{pmatrix} \overline{(\varphi_1)}^{(i, m_i^{(j)}+1)(j)} & \cdots & \overline{(\varphi_1)}^{(i, l_i^{(j)})(j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{(\varphi_r)}^{(i, m_i^{(j)}+1)(j)} & \cdots & \overline{(\varphi_r)}^{(i, l_i^{(j)})(j)} \end{pmatrix} \quad (i = 2, 3, 4; j = 1 : \mu_i),$$

$$\overline{(\cdot)}^{(i, \nu)(j)} := (\cdot)^{(i, \nu)(j)} - \sum_{k=1}^{m_i^{(j)}} \alpha_{ik}^{(i, \nu)(j)} (\cdot)^{(i, k)(j)} \quad (i = 2 : 4; j = 1 : \mu_i; \nu = m_i^{(j)} + 1 : l_i^{(j)})$$

(в случае $i = 4$ индекс j опускается).

Нетрудно получить, что для операторов $\overline{(\cdot)}^{(i, \nu)(j)}$ справедливы соотношения:

$$\overline{(\varphi)}^{(2, \nu)(j)} = 0 \quad (j = 1 : \mu_2; \nu = m_2^{(j)} + 1 : l_2^{(j)}) \quad \forall \varphi \in \text{span}\{x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} : \gamma_1, \gamma_2 \in Z_+, \gamma_1 \leq \alpha\}, \quad (7)$$

$$\overline{(\varphi)}^{(3, \nu)(j)} = 0 \quad (j = 1 : \mu_3; \nu = m_3^{(j)} + 1 : l_3^{(j)}) \quad \forall \varphi \in \text{span}\{x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} : \gamma_1, \gamma_2 \in Z_+, \gamma_2 \leq \beta\}, \quad (8)$$

$$\overline{(\varphi)}^{(4, \nu)} = 0 \quad (\nu = m_4 + 1 : l_4) \quad \forall \varphi \in \text{span}\{x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} : \gamma_1, \gamma_2 \in Z_+, \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta\}. \quad (9)$$

В силу структуры матрицы M' получим, что

$$\text{rank} M' = \text{rank} \begin{pmatrix} E \\ \tilde{\Phi} \\ O \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} O \\ O \\ \Phi^T \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} O \\ \bar{\Phi} \\ O \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 m_i + r + \text{rank} \bar{\Phi}.$$

В [10] показано, что для $f(x, y) \in F_{mp}[z]$ в случае $\text{rank} \bar{\Phi} < l_0$ вытекает, что $(l_0 - \text{rank} \bar{\Phi})$ значений в операторе информации являются линейными функциями остальных значений. То есть оператор информации \mathbb{I}_n имеет избыточную информацию, от которой можно безболезненно избавиться.

Итак, если мы интерполируем значение $z \in \mathbb{R}_n$, где $z = \mathbb{I}_n(f)$, $f \in F_{mp}(\alpha, \beta)$, то проблем с существованием и единственностью интерполянта s_f нет. В случае же произвольно заданного

$z \in \mathbb{R}_n$ для существования и единственности интерполянта s_z требуется, чтобы M' имела максимальный ранг, что сводится к выполнению условия $\text{rank} \bar{\Phi} = l_0$. Из структуры матрицы $\bar{\Phi}$, а также соотношений (7) – (9) сразу вытекают необходимые условия линейной независимости столбцов в $\bar{\Phi}$, а именно:

$$l_0 \leq r; \quad \sum_{i=1}^{\mu_\nu} (l_\nu^{(i)} - m_\nu^{(i)}) \leq r - \rho_\nu \quad (\nu = 2, 3); \quad l_4 - m_4 \leq r - \rho_4; \quad l_5 \leq r, \quad (10)$$

где ρ_i ($i = 2, 3, 4$) – количество элементов, содержащихся в соответствующих множествах,

$$\begin{aligned} \rho_2 &:= \left| \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \cap \{x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} : \gamma_1, \gamma_2 \in Z_+, \gamma_1 \leq \alpha\} \right|, \\ \rho_3 &:= \left| \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \cap \{x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} : \gamma_1, \gamma_2 \in Z_+, \gamma_2 \leq \beta\} \right|, \\ \rho_4 &:= \left| \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \cap \{x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} : \gamma_1, \gamma_2 \in Z_+, \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta\} \right|. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к выбору подсистемы $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_r}\}$ из системы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$. Будем выбирать индексы $i_j \in \{1, \dots, m\}$ ($j = 1 : r$) таким образом, чтобы выполнялись необходимые условия (10). Если такой набор индексов не найдется, то автоматически будет следовать неразрешимость интерполяционной задачи. Если таких наборов более одного, то ищется тот набор индексов, при котором $\text{rank} \bar{\Phi} = l_0$.

Воспользовавшись методикой, приведенной в [9] (см. также [10]), использование алгебраической степени отображения можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Для любого $z \in \mathbb{R}_n$ при выполнении условия $\text{rank} \bar{\Phi} = l_0$ существует единственный элемент $s_z(x, y) \in F_{rp}[z]$, удовлетворяющий требованиям

$$\sum_{j=1}^n c_j(s_z) \varphi_i(x_j, y_j) = 0 \quad (i = 1, \dots, r).$$

Как частный случай теоремы 2 справедлива

Теорема 3. Пусть $G = \Omega, \Phi_r^{(1)} := \text{span}\{x^i y^j : 0 \leq i \leq \delta_1, 0 \leq j \leq \delta_2; i, j, \delta_1, \delta_2 \in Z_+\}, \Phi_r^{(2)} := \text{span}\{x^i y^j : 0 \leq i + j \leq \delta; i, j, \delta \in Z_+\}, l_5, \bar{l}_5$ – количество элементов, содержащихся в множествах $\{(x, y) \in X : x = b, \text{ либо } y = d\}$ и $\{(x, y) \in X : x = b\}$ соответственно. Тогда для того, чтобы для любого $z \in \mathbb{R}_n$ существовал единственный элемент $s_z(x, y) \in F_{rp}[z]$, удовлетворяющий требованиям

$$\sum_{j=1}^n c_j(s_z) \varphi_i(x_j, y_j) = 0 \quad (i = 1, \dots, r).$$

необходимо и достаточно выполнение требований

- (1) $l_5 \leq \delta_1 + \delta_2 + 1; \bar{l}_5 \leq \delta_2 + 1; l_5 - \bar{l}_5 \leq \delta_1 + 1$ (если $\Phi_r = \Phi_r^{(1)}$),
- (2) $l_5 \leq 2\delta + 1; \bar{l}_5 \leq \delta + 1$ (если $\Phi_r = \Phi_r^{(2)}$).

Цитированная литература

1. Gasca M., Sauer T. // Adv.Comput.Math. 2000. V.12, № 4, P. 377 – 410.

2. **Gasca M., Sauer T.** // J.Comput.Appl.Math. 2000. 122, P. 23 – 35.
3. **Мысовских И.П.** Интерполяционные квадратурные формулы. М., 1981.
4. **Radon J.** // Monatshefte der Math. Physik. 1948. 52. P. 286 – 300.
5. **C.de Boor, A.Ron** // Constr.Approx. 1998. 6. P. 287 – 302.
6. **C.de Boor, A.Ron** // Math.Z. 1992. 210. P. 347 – 378.
7. **C.de Boor, A.Ron** // Math.Comp. 1992. 58. P. 705 – 727.
8. **Sauer T.** // Numer. Math. 1997. 78. P. 59 – 85.
9. **Женсыкбаев А.А.** Проблемы восстановления операторов. RCD. М.-И., 2003.
10. **Zhensykbaev A.A.** // East J.on Approx. 2004. V.10, № 1-2, P. 57 – 65.

Поступила в редакцию 25.05.2007 г.

УДК 662.92

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДИНАМИЧЕСКОГО И ТЕПЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Г. А. КАМАЛОВА

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

Предлагается численная модель турбулентного течения двухфазной среды при наличии динамического и теплового взаимодействий. Для моделирования процесса газовой фазы используется осредненная по Рейнольдсу система уравнений Навье-Стокса, замыкаемая $k - \epsilon$ моделью турбулентности. Нахождение параметров несущей фазы осуществляется на основе эйлера подхода, а параметров дисперсной фазы – лагранжева. Приведены численные результаты для поля течения, распределения частиц и концентраций компонентов.

Во многих современных процессах металлургии и теплоэнергетики используются двухфазные системы, в связи с чем возрастает необходимость решения задач турбулентного течения двухфазной среды. Математическое моделирование многофазных потоков на основе уравнений многокомпонентных газовых смесей позволяет глубже понять исследуемые процессы [1-4].

В данной работе предлагается численная модель двухфазных течений, тепло- массопереноса и поведения твердых частиц (угля) в используемых устройствах.

Постановка задачи. В устройство через специальное отверстие инжектируется аэросмесь, состоящая из угольных частиц и первичного воздуха (рис.1). Помимо этого через отдельные сопла подается вторичный воздух.

Основные допущения, используемые в математической формулировке задачи:

- течение является турбулентным, двухфазным, нестационарным;
- дисперсная фаза состоит из угольных частиц сферической формы радиуса r_p ;
- коагуляция и дробление угольных частиц, а также соударения между ними не учитываются;
- поступающие в устройство сухие частицы нагреваются за счет конвективного теплообмена, после чего начинается выход летучих (CH_4, CO, C_2H_2);
- процесс выделения летучих осуществляется согласно схеме

$$Coal \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 (CH_4 + CO) + (1 - \alpha_1) char, & \text{при } T \leq 1200K, \\ \alpha_2 (C_2H_2) + (1 - \alpha_2) char, & \text{при } T > 1200K, \end{cases}$$

Keywords: *two-phase flow, pressure, turbulence layer, subsonic flow*

2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

© Г. А. Камалова, 2007.

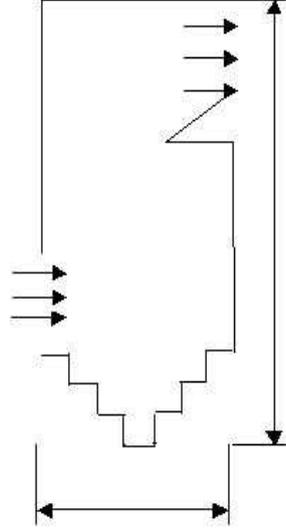


Рис. 1: Схема течения

- в процессе выхода летучих радиус угольной частицы не меняется, масса меняется;
- химическое реагирование летучих не учитывается.

При данных допущениях математическая постановка задачи турбулентного течения двухфазной среды примет следующий вид: для газовой фазы исходной является система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \dot{\rho}^{dev}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{u}) = \nabla \cdot \left[\rho D \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}_m^{dev} + \dot{\rho}_m^{ch}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \nabla \cdot \sigma(\vec{u}) - \nabla P - \nabla \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \rho \vec{g} + \dot{F}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\rho I)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} I) = \nabla \cdot \vec{J} - P \nabla \cdot \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \nabla k \right] - \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \vec{u} + \sigma : \nabla \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{W}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - \left(\frac{2}{3} c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\varepsilon}{k} \left[c_{\varepsilon 1} \sigma : \nabla \vec{u} - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W} \right], \quad (6)$$

$$P = R_0 T \sum_m \left(\frac{\rho_m}{W_m} \right), \quad (7)$$

$$I(T) = \sum_m \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) I_m(T), \quad I_m(T) = h_m(T) - \frac{R_0 T}{W_m}, \quad (8)$$

где

$$\sigma(\vec{u}) = \mu \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \vec{E}, \quad \vec{J} = -K \nabla T - \rho D \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right),$$

$$\mu = \mu_{air} + \mu_t, \quad \mu_{air} = A_1 T^{3/2} / (A_2 + T), \quad \mu_t = \rho c_\mu k^2 / \varepsilon,$$

$$K = \frac{\mu c_p}{Pr}, \quad D = \frac{\mu}{\rho S c}, \quad c_p(T) = \sum_m \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) c_{pm}(T),$$

$\dot{\rho}_m^c$, \dot{Q}^c – приток массы и тепла за счет химической реакций.

Для дисперсной фазы движения частиц описываются на основе лагранжева подхода:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_p = \vec{u}_p, \quad (9)$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \dot{M}_p^{dev} + \dot{M}_p^{ch}, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_p = D_p (\vec{u}_g + \vec{u}'_g - \vec{u}_p) + \vec{g}, \quad (11)$$

$$m_p c_p \frac{dT_p}{dt} = 2\pi r_p K_{conv} (T - T_p) Nu_p + q^{ch}, \quad (12)$$

Здесь \vec{g} – сила тяжести, действующая на частицу, $\rho_p = \frac{m_p}{\frac{4}{3}\pi r_p^3}$ – плотность угольной частицы, $m_p c_p = \sum_k m_{pk} c_{pk}$, k – сырой уголь, кокс и зола, $K_{conv} = \frac{\mu c_p}{Pr_p}$ – коэффициент конвективного

теплообмена между частицей и газом при выделении летучих, $Pr_p = \frac{\mu_{air}(\hat{T}) c_p(\hat{T})}{K_{air}(\hat{T})}$ – число

Прандтля для угольных частиц, $K_{air} = \frac{K_1 \hat{T}^{3/2}}{\hat{T} + K_2}$, $\hat{T} = \frac{T + 2T_p}{3}$, \dot{M}_p^{ch} , q^{ch} – изменение массы и температуры за счет горения коксового остатка.

Изменения массы вследствие выхода летучих выражается следующим образом:

$$\dot{M}_p^{dev} = -m_{coal} \left\{ A_1 e^{-E_1/RT_p} + A_2 e^{-E_2/RT_p} \right\}.$$

где m_{coal} – масса сырого угля, A_1, A_2 – предэкспоненциальные множители, E_1, E_2 – энергии активации, R – универсальная газовая постоянная.

Сила сопротивления, действующая со стороны газа на частицу радиусом r_p , описывается в виде [5]

$$D_p = \frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{|\vec{u}_g + \vec{u}'_g - \vec{u}_p|}{r_p} C_D(Re_p).$$

Коэффициент сопротивления, характеризующий течение, представляется

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{1}{6 Re_p^{2/3}} \right), & Re_p \leq 1000 \\ 0,424, & Re_p > 1000 \end{cases},$$

где $Re_p = \frac{2\rho |\vec{u}_g + \vec{u}'_g - \vec{u}_p| r_p}{\mu_{air}(\hat{T})}$ – число Рейнольдса, построенное по радиусу частицы.

Для вычисления числа Нуссельта используется зависимость [6]: $Nu_p = 2.0 + 0.6 Re_p^{1/2} Pr_p^{1/3}$.

Турбулентные характеристики двухфазного потока рассчитываются с использованием двухпараметрической $k - \varepsilon$ модели турбулентности и эмпирических констант, которые заданы в работе [7].

Таким образом, системы уравнений для несущей фазы (1)-(8) и дисперсной (9)-(12) записаны с учетом обмена импульсом между частицами и газом. Следовательно, в данной модели динамическое и тепловое взаимодействия между фазами определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= - \int f \dot{m}_p \left((\vec{F} - \vec{g}) + 3\vec{v} \right) d\vec{v} dm dT_d, \\ \dot{Q} &= - \int f \left\{ \dot{m}_p \left[\alpha_n T_p + \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{u})^2 \right] - m_p \left[c_p \dot{T}_p - (\vec{F} - \vec{g}) \cdot (\vec{v} - \vec{u} - \vec{v}') \right] \right\} d\vec{v} dm dT_d, \\ \dot{W} &= - \int f \dot{m}_p (\vec{F} - \vec{g}) \vec{v}' d\vec{v} dm dT_d, \end{aligned} \quad (13)$$

где f – функция вероятности распределения, которая определяется эквивалентно дискретной функции распределения согласно [8].

Начальные и граничные условия. В начальный момент газ находится в состоянии покоя, задаются плотности компонент, распределение температуры постоянно, кинетическая энергия турбулентности и масштаб турбулентности ($l = k^{3/2}/\varepsilon$) также постоянны:

$$u = w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_0, \quad T_g = T_p = T_0, \quad k = k_0, \quad l = l_0. \quad (14)$$

На входе: внутри сопла – аэросмесь (частицы + первичный воздух)

$$\begin{aligned} u = u_g, \quad w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_g, \quad T = T_g, \quad k = k_0, \quad l = l_0, \\ u_p = u_{p0}, \quad w_p = 0, \quad \rho_p = \rho_{p0}, \quad T_p = T_{p0}, \end{aligned} \quad (15)$$

на внешней части сопла – вторичный воздух (O_2, N_2)

$$u = u_{air}, \quad w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_{air}, \quad T = T_{air}, \quad k = k_0, \quad l = l_0.$$

На стенках: для поля скоростей задается турбулентный закон стенки, тангенциальная компонента скоростей которого определяется приближенным соотношением, полученным с помощью логарифмического профиля и степенного закона, аналогично [9]:

$$\frac{u}{u_*} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln \left(c_{lw} \left(\frac{\rho y u}{\mu_{air}(T)} \right)^{7/8} \right) + B, & \frac{\rho y u}{\mu_{air}(T)} > R_c, \\ \left(\frac{\rho y u}{\mu_{air}(T)} \right)^{1/2}, & \frac{\rho y u}{\mu_{air}(T)} \leq R_c, \end{cases} \quad (16)$$

где $B = R_c^{1/2} - 1/\kappa \ln(c_{lw} R_c^{7/8})$, $c_{lw} = 0.15$, $R_c = 122$ – число Рейнольдса определяет границу между логарифмической областью и ламинарным подслоем, κ – константа Кармана, y – расстояние от твердой стенки до ближайшего узла, u_* – динамическая скорость.

И для поля температуры [9]

$$\frac{J_w}{\rho u_* c_p (T - T_w)} = \begin{cases} 1 / \left(\text{Pr}_l \frac{u}{u_*} \right), & \frac{\rho y u}{\mu_{air}(T)} \leq R_c, \\ 1 / \left\{ \text{Pr} \left[\frac{u}{u_*} + \left(\frac{\text{Pr}_l}{\text{Pr}} - 1 \right) R_c^{1/2} \right] \right\}, & \frac{\rho y u}{\mu_{air}(T)} > R_c, \end{cases} \quad (17)$$

где T_w – температура стенки, Pr – число Прандтля, Pr_l – число Прандтля ламинарного подслоя.

Для кинетической энергии турбулентности, концентраций компонент газа выполняется условие отсутствия потока через стенку:

$$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \rho_m}{\partial \vec{n}} = 0.$$

Связь между кинетической энергией турбулентности и скоростью ее диссипации задается в форме

$$\varepsilon = c_{\mu\varepsilon} \frac{k^{3/2}}{y}, \quad c_{\mu\varepsilon} = \left[\frac{c_{\mu}}{\text{Pr}_{\varepsilon} (c_{\varepsilon_2} - c_{\varepsilon_1})} \right]^{1/2}.$$

Для угольных частиц задается условие прилипания $u_p = w_p = 0$.

На выходе: для газовой фазы задаются мягкие граничные условия: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $f = (\vec{u}, \rho_m, k, l)$. Частицы вблизи открытой границы покидают рассматриваемую область.

Метод решения. Дискретизация исходных дифференциальных уравнений газовой фазы осуществляется методом контрольного объема. Конечно-разностные уравнения, полученные при дискретизации, решаются трехэтапной схемой расщепления по физическим процессам. На первом этапе учитывается влияние дисперсной среды на газовую фазу. Также на данном этапе решаются системы уравнений угольных частиц методом Эйлера явным образом. На втором этапе для определения промежуточных значений векторов скоростей, температуры и давления с учетом диффузии используется итерационный метод, подобный алгоритму SIMPLE, предложенный в работе [10], и метод сопряженных разностей. На третьем этапе вычисляется конвективный перенос рассматриваемых величин с использованием схемы донорной ячейки [11].

Анализ результатов. Поставленная задача решается на сетке 60×100 с шагами $\Delta x = 0.025$, $\Delta z = 0.0465$. Численное исследование проводится при следующих значениях исходных параметров. Расход угольного топлива через горелку размером $0,105$ составляет $0,05$ кг/сек, избыток воздуха в топке $\alpha_{air} = 1,25$. Пылеугольная аэрозоль инжeksiруется в топку со скоростью 10 м/сек, температурой 900 К. Через окно подачи вторичного воздуха размером $0,105$ поступает воздух со скоростью 10 м/сек, имеющий температуру 298 К. Апробация численного метода газодинамических процессов осуществлена на примере решения задачи вдува многокомпонентной газовой смеси с $u_g = 10$ м/сек, $T_g = 700$ К. Получено удовлетворительное количественное согласование с численными результатами [12,13].

На рис. 2 приведена картина поля векторов скоростей. В зонах ниже и выше, ближе к внутренней стенке входного сопла имеются два вихря, образованные в результате перемешивания аэрозоли с воздухом. Один из вихрей имеет почасовое направление движения вследствие того, что часть потока воздуха непосредственно вблизи внешней стенки, проходя ее, поворачивает вниз к холодной воронке (ниже входного сопла) и втекает в межструйное пространство. При этом вихрь, расположенный в верхней части устройства выше входного сопла ближе к внутренней стенке, движется против часовой стрелки, что согласуется с результатами численных исследований [13].

Как следует из рис. 3, частицы, попадая в устройство, взаимодействуют с газовым потоком [6] и нагреваются за счет конвективного теплообмена.

После этого начинается выход летучих компонент метана CH_4 и окиси углерода CO , массовые концентрации которых приведены на рисунках 4а-б. Как видно из рис. 4а, на начальном участке, т.е. вблизи отверстия появляется метан с максимумом $Y_{CH_4} = 0.06$ кг/кг, тогда как CO (рис.4б) концентрируется в центре и ближе на внешней стенке устройства с максимальным значением $Y_{CO} = 0.08$ кг/кг.

На основании проведенных численных экспериментов можно сделать вывод, что разработанная численная модель вдува аэрозоли, состоящая из угольных частиц и воздуха.

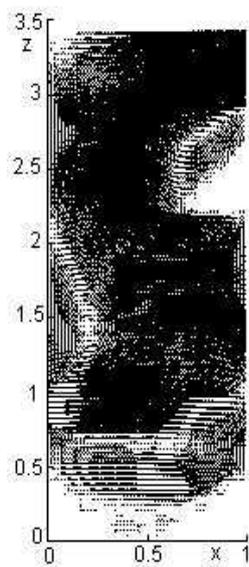


Рис. 2: Поле векторов скоростей

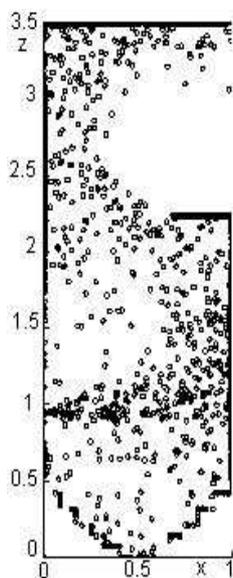
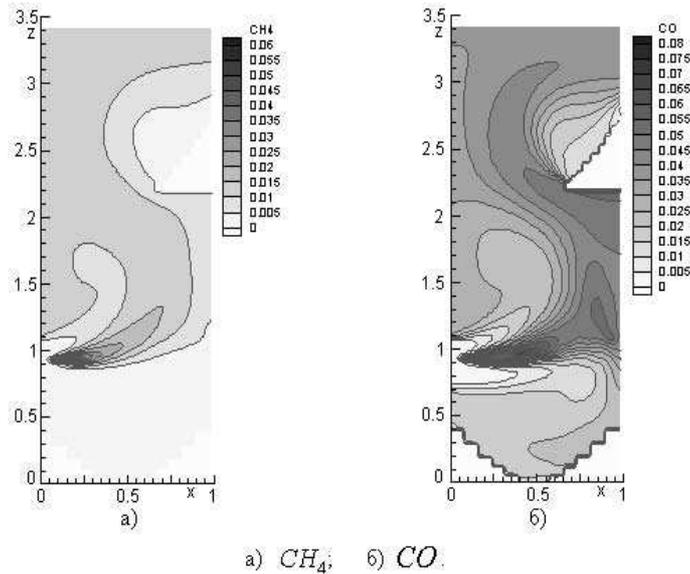


Рис. 3: Распределение твердых частиц

Рис. 4: Выход летучих компонент CH_4, CO

Цитированная литература

1. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М. 1978.
2. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. 1987.
3. Старченко А.В., Саломатов В.В., Красильников С.В. // Горение и плазмохимия. 2006. Т.4, №4. С. 239 – 246.
4. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. 1974.
5. Камалова Г.А., Найманова А.Ж. // Математический журнал. 2005. №1. С. 52 – 66.
6. Zhou H., Flamant G., Gauthier D., Lu J. // Int. journal of multiphase flow. 2002. V. 28. P. 1801 – 1821.
7. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М. 1980.
8. Dukowicz. J.K. // Journal of Computational Physics, 1980. V. 35, №2. P. 229 – 253.
9. Amsden A.A., O'Rourke. P.J., Butler T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos National Laboratory report, 1989.
10. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости, М. 1984.
11. Виноградова И.А., Зубков В.Г. // Математическое моделирование. 2002. Т.14, №6. С. 3 – 24.
12. Устименко Б.П., Джакупов К.Б., Кроть В.О. Численное моделирование аэродинамики и горения в топочных и технологических устройствах, Алма-Ата. 1986.
13. Fan J.R., Zha X.D., Sun P., Cen K.F. // Fuel. 2001. V. 80. P. 645 – 654.

Поступила в редакцию 10.08.2007г.

УДК 519.6

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

И.А.КАНЫМГАЗИЕВА, С.С.САУТБЕКОВ

ЕНУ им. Л.Н.Гумилёва
Астана ул.Мунайтпасова, 4 sautbek@mail.ru

С помощью метода обобщенных функций в векторном виде получены точные аналитические формулы электромагнитного поля при действии распределенных токов в безграничной анизотропной среде. Приведены диаграммы направленности электрического диполя.

Среды с анизотропными свойствами широко используются в современной радиоэлектронике, астрофизике, физике плазмы. В последнее время особенно актуальны искусственные анизотропные материалы с заданными киральными свойствами, которые используются в антенно-фидерных системах, а также в технологиях изготовления объемных интегральных схем. Математический аппарат получения аналитических решений, например, для гиротропных сред или плазмы почти тот же самый, как и для кристаллов, поэтому распространение волн в анизотропных средах представляет интерес как в теоретической, так и математической физике.

Необходимо отметить, что ранее полученные аналитические результаты для анизотропных сред, как правило, применительны для плоских волн, поскольку решение в общем случае имеет сложный тензорный вид. Поэтому актуально получить обобщенное решение для безграничных анизотропных сред, которое позволяет описывать полную физическую картину электромагнитных процессов и необходимо для составления интегральных уравнений краевых задач.

Поскольку напряженности электромагнитного поля являются векторными величинами, решение уравнений Максвелла для анизотропных сред целесообразно получить в векторной форме, ибо она обеспечивает компактную запись решения и возможность перехода в любую систему координат в зависимости от симметрии задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений Максвелла для стационарных процессов:

$$\begin{cases} i\omega D + \operatorname{rot} H = j, \\ \operatorname{rot} E - i\omega B = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Keywords: *fundamental solution, Maxwell equation, anisotropic medium*

2000 Mathematics Subject Classification: 83A50

© И.А.Канымгазиева, С.С.Саутбеков, 2007.

которую можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{J}, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} i\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\omega\mathbf{I} & \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_0 & -i\mu_0\mu\omega\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\omega = const$, \mathbf{M} – оператор Максвелла, \mathbf{I} – единичная матрица 3×3 , \mathbf{E}, \mathbf{H} – напряжённости электрического и магнитного полей, μ – коэффициент магнитной проницаемости, \mathbf{j} – вектор плотности тока. В анизотропной диэлектрической среде линейная связь между индукцией и напряжённостью электрического поля имеет вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E},$$

а вектор магнитной индукции:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}.$$

Если выбрать систему координат, совпадающую с главными осями тензора диэлектрической проницаемости, материальные уравнения запишутся в виде:

$$D_x = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_x, \quad D_y = \varepsilon_0\varepsilon E_y, \quad D_z = \varepsilon_0\varepsilon E_z.$$

Элементы тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ соответствуют одноосному кристаллу, причём ось кристалла направлена вдоль оси x .

Требуется определить напряжённости электромагнитного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} в пространстве обобщённых функций.

II. Решение задачи

Для решения матричного уравнения (2) используем обобщённый метод преобразования Фурье [1]:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = \mathbf{F}[\mathbf{E}(\mathbf{r})] = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) dV,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})] = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

где

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z, \quad dV = dx dy dz, \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

С помощью прямого преобразования Фурье систему уравнений (1) запишем в виде:

$$\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{J}}.$$

Далее задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно фурье-компонент полей, где $\tilde{\mathbf{U}}$ определяется с помощью обратной матрицы $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}.$$

Введя следующие обозначения функций:

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}, \quad \tilde{\Psi}_1 = \frac{1}{k_n^2 - (\varepsilon_1/\varepsilon)k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}, \quad \tilde{\Psi}_2 = (\varepsilon_1/\varepsilon - 1)\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_0,$$

получим компоненты электромагнитного поля в пространстве изображений:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(k_0^2\tilde{j}_x - k_x(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}))\tilde{\Psi}_1, \\ \tilde{E}_y &= -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(k_0^2\tilde{j}_y\tilde{\Psi}_0 - k_y(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}})\tilde{\Psi}_1 - k_0^2k_y(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp)\tilde{\Psi}_2), \\ \tilde{E}_z &= -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(k_0^2\tilde{j}_z\tilde{\Psi}_0 - k_z(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}})\tilde{\Psi}_1 - k_0^2k_z(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp)\tilde{\Psi}_2), \\ \tilde{H}_x &= -i[\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}]_x\tilde{\Psi}_0, \\ \tilde{H}_y &= -i(k_z\tilde{j}_x\tilde{\Psi}_1 - k_xk_z(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp)\tilde{\Psi}_2 + k_x\tilde{j}_z\tilde{\Psi}_0), \\ \tilde{H}_z &= -i(k_x\tilde{j}_y\tilde{\Psi}_0 + k_y\tilde{j}_x\tilde{\Psi}_1 + k_xk_y(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp)\tilde{\Psi}_2). \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}} &= \tilde{\mathbf{j}}_\perp + \tilde{\mathbf{j}}_0, \quad \tilde{\mathbf{j}}_0 = (\tilde{j}_x, 0, 0), \quad \tilde{\mathbf{j}}_\perp = (0, \tilde{j}_y, \tilde{j}_z), \\ k_0^2 &= \omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu, \quad k_n^2 = (\varepsilon_1/\varepsilon)k_0^2. \end{aligned}$$

Фурье-трансформанту напряженностей электромагнитного поля удобно представить в векторном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \left(k_0^2\{\tilde{\mathbf{j}}_\perp\tilde{\Psi}_0 + \tilde{\mathbf{j}}_0\tilde{\Psi}_1 + (\mathbf{k}_x(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp))\tilde{\Psi}_2\} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp)\tilde{\Psi}_1 \right), \\ \tilde{\mathbf{H}} &= -i \left[\mathbf{k}, \left(\tilde{\mathbf{j}}_\perp\tilde{\Psi}_0 + \tilde{\mathbf{j}}_0\tilde{\Psi}_1 + \mathbf{k}_x(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}_\perp)\tilde{\Psi}_2 \right) \right], \quad \mathbf{k}_x = \mathbf{i}(\mathbf{i}\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Теперь для обратного преобразования Фурье воспользуемся тождеством:

$$\mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{J}}] = \mathbf{M}^{-1} * \mathbf{J},$$

где символ "*" обозначает свёртку по координатам x, y, z .

Учитывая при этом:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{M}}^{-1}], \quad \mathbf{J} = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{J}}],$$

получим явное решение уравнений Максвелла (2) в виде:

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1} * \mathbf{J}.$$

Полученное решение можно представить в виде двух независимых решений:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2.$$

Первое из них определяется одной функцией Грина Ψ_1 и плотностью тока \mathbf{j}_0 , действующей вдоль оси кристалла:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = -\frac{i}{\varepsilon_0\varepsilon\omega} (\text{graddiv} + k_0^2) (\Psi_1 * \mathbf{j}_0), \\ \mathbf{H}_1 = -\text{rot}(\Psi_1 * \mathbf{j}_0), \end{cases} \quad (3)$$

где фурье-обращение функции $\tilde{\Psi}_0$ приводится к виду:

$$\Psi_1 = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}} \frac{\exp(ik_n r')}{r'}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}, \quad x' = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_1}x.$$

Второе решение выражается с помощью перпендикулярной составляющей плотности тока \mathbf{j}_\perp :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2 = -\frac{i}{\varepsilon_0\varepsilon\omega} (k_0^2 \mathbf{j}_\perp * \Psi_0 + \text{graddiv} \mathbf{j}_\perp * \Psi_1 + k_0^2 (\text{grad} - \mathbf{i}\partial/\partial x) \text{div} \mathbf{j}_\perp * \Psi_2) \\ \mathbf{H}_2 = -\text{rot}(\mathbf{j}_\perp * \Psi_0 - \mathbf{i}(\partial/\partial x) \text{div} \mathbf{j}_\perp * \Psi_2), \end{cases} \quad (4)$$

и функциями Грина:

$$\Psi_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 r)}{r}, \quad \Psi_2 = (\varepsilon_1/\varepsilon - 1)\Psi_0 * \Psi_1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Функция Ψ_0 является фундаментальным решением оператора Гельмгольца для изотропной среды. Можно заметить, что Ψ_1 соответствует функцию Ψ_0 для деформированного пространства вдоль оси кристалла.

Так как справедливы следующие тождественные преобразования:

$$F^{-1}[\tilde{\Psi}_0(k_0^2 - k_x^2)^{-1}] = \Psi_0 * F^{-1}[(k_0^2 - k_x^2)^{-1}] = -\frac{i}{8\pi k_0} (\exp(ik_0 x)(\text{Ci}(k_0(r-x)) + \text{isi}(k_0(r-x))) + \exp(-ik_0 x)(\text{Ci}(k_0(r+x)) + \text{isi}(k_0(r+x))))),$$

$$F^{-1}[\tilde{\Psi}_1(k_0^2 - k_x^2)^{-1}] = \Psi_1 * F^{-1}[(k_0^2 - k_x^2)^{-1}] = -\frac{i}{8\pi k_0} (\exp(ik_0 x)(\text{Ci}(k_n r' - k_0 x) + \text{isi}(k_n r' - k_0 x)) + \exp(-ik_0 x)(\text{Ci}(k_n r' + k_0 x) + \text{isi}(k_n r' + k_0 x))),$$

$$F^{-1}[\tilde{\Psi}_2] = F^{-1}[\tilde{\Psi}_0] * F^{-1}[(k_0^2 - k_x^2)^{-1}] - F^{-1}[\tilde{\Psi}_1] * F^{-1}[(k_0^2 - k_x^2)^{-1}],$$

легко выразить функцию Ψ_2 через специальные функции:

$$\begin{aligned} \Psi_2 = \frac{1}{8i\pi k_0} & [\exp(ik_0 x)(\text{Ci}(k_0(r-x)) + \text{isi}(k_0(r-x))) + \exp(-ik_0 x)(\text{Ci}(k_0(r+x)) + \\ & + \text{isi}(k_0(r+x))) - \exp(ik_0 x)(\text{Ci}(k_n r' - k_0 x) + \text{isi}(k_n r' - k_0 x)) - \\ & - \exp(-ik_0 x)(\text{Ci}(k_n r' + k_0 x) + \text{isi}(k_n r' + k_0 x))], \end{aligned}$$

где интегральные косинус и синус определяются как:

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln(z) + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt, \quad \text{si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2},$$

$\gamma = 0.5772$ – число Эйлера.

Полученные решения (5) и (6) также можно представить с помощью векторных потенциалов $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\omega} (k_0^2(\mathbf{A}_0 + \mathbf{i}(\mathbf{i}\mathbf{A}_1) + (\text{grad} - \mathbf{i}\partial/\partial x)\text{div}\mathbf{A}_2) + \text{graddiv}\mathbf{A}_1) \\ \mathbf{H} = (\mu_0\mu)^{-1}\text{rot}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{i}(\mathbf{i}\mathbf{A}_1) - \mathbf{i}(\partial/\partial x)\text{div}\mathbf{A}_2), \end{cases} \quad (5)$$

которые должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}(\Delta + k_0^2)\mathbf{A}_0 &= -\mu_0\mu\mathbf{j}_\perp, & (\Delta' + k_n^2)\mathbf{A}_1 &= -\mu_0\mu\mathbf{j}, \\(k_0^2 + \Delta)(k_n^2 + \Delta')\mathbf{A}_2 &= -\mu_0\mu(\varepsilon_1/\varepsilon - 1)\mathbf{j}_\perp,\end{aligned}$$

Очевидно, решениями вышеприведённых уравнений являются:

$$\mathbf{A}_0 = -\mu_0\mu\mathbf{j}_\perp * \Psi_0, \quad \mathbf{A}_1 = -\mu_0\mu\mathbf{j} * \Psi_1, \quad \mathbf{A}_2 = -\mu_0\mu\mathbf{j}_\perp * \Psi_2 \quad (6)$$

III. Диаграммы направленности электрического излучателя Герца в анизотропных средах

На основании полученных результатов рассмотрим излучение диполя Герца в одноосном кристалле. Для точечного излучателя с дипольным моментом

$$\mathbf{p} = n p_m \exp(-i\omega t) \quad (p_m = \text{const}),$$

плотность электрического тока определяется с помощью дельта-функции Дирака:

$$\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}).$$

Данная формула следует из выражения для объёмной плотности электрического заряда точечного диполя:

$$\rho = -(\mathbf{p}\nabla)\delta(\mathbf{r})$$

и закона сохранения заряда

$$\text{div}\mathbf{j} - i\omega\rho = 0.$$

Уравнение электромагнитного поля электрического излучателя при направлении дипольного момента параллельно оси кристалла x примет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = -(\varepsilon_0\varepsilon)^{-1} (\text{grad div} + k_0^2) (\Psi_1\mathbf{p}_0), \\ \mathbf{H}_1 = i\omega\text{rot}(\Psi_1\mathbf{p}_0) \quad (\mathbf{p} = \mathbf{p}_0), \end{cases} \quad (7)$$

а при направлении дипольного момента перпендикулярно оси x , получим:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2 = -(\varepsilon_0\varepsilon)^{-1} (k_0^2(\mathbf{p}_\perp\Psi_0 + (\text{grad} - \mathbf{i}\partial/\partial x)\text{div}(\mathbf{p}_\perp\Psi_2)) + \text{grad div}(\mathbf{p}_\perp\Psi_1)), \\ \mathbf{H}_2 = i\omega\text{rot}(\mathbf{p}_\perp\Psi_0 - \mathbf{i}(\partial/\partial x)\text{div}(\mathbf{p}_\perp\Psi_2)) \quad (\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp, \quad \mathbf{p}_0 \perp \mathbf{p}_\perp). \end{cases} \quad (8)$$

Чтобы посчитать поток энергии через поверхность сферы, который не зависит от радиуса сферы, необходимо вычислить вектор Умова-Пойнтинга:

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}]$$

и проинтегрировать составляющую вектора по поверхности сферы:

$$\Phi = \int_S \langle \Pi_r \rangle dS,$$

где $\bar{\mathbf{H}}$ – комплексное сопряженное напряженности магнитного поля.

Численные расчёты показывают, форма ДН диполя, направленного по оси x , остаётся неизменной при изменении расстояния (рис.1). Она нарушается, если дипольный момент расположен перпендикулярно оси x (рис. 2, 3 а)).

IV. Обсуждение

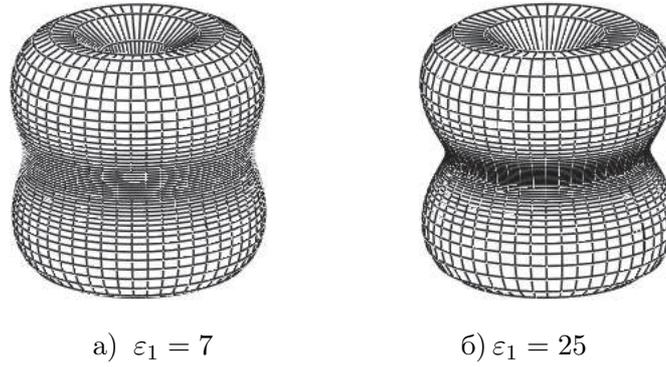


Рис. 1: ДН. Ось диполя параллельна оси кристалла.

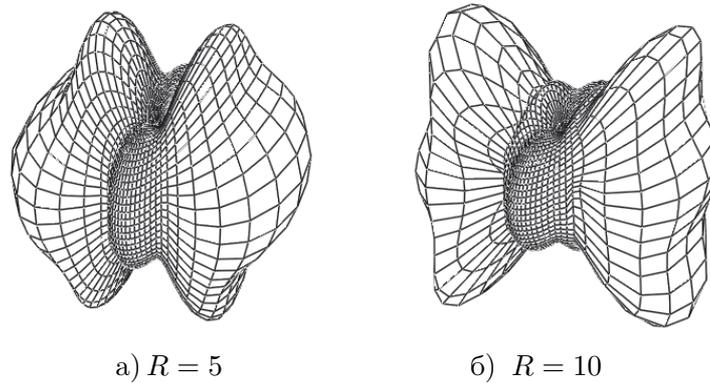


Рис. 2: ДН. Ось диполя перпендикулярна оси кристалла, $\epsilon_1/\epsilon = 7$.

Достоверность полученных формул проверялась на сохранение потока энергии через сферические поверхности.

Независимые решения (4) и (5) определяют соответствующую поляризацию электромагнитных волн.

При предельном переходе $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon$ потенциал Ψ_2 обращается в нуль и из формул (4) и (5) следуют известные выражения напряжённостей электромагнитного поля для изотропной среды:

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \omega} (\text{grad div} + k_0^2) \mathbf{A},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot} \mathbf{A},$$

где известный векторный потенциал электромагнитного поля в изотропной среде определяется из (6) как:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \mathbf{j} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV.$$

Полученные обобщённые решения системы уравнений Максвелла справедливы при любых значениях ϵ_1 и ϵ и для источников электромагнитных волн, описываемых также разрывными и сингулярными функциями. Диаграмма направленности при предельном переходе в изотропную среду приведена на рис. 3 б), сама диаграмма направленности обладает симметрией вращения относительно оси.

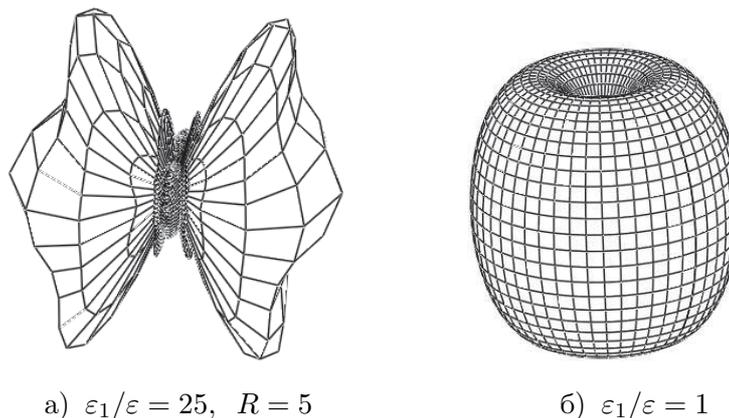


Рис. 3: ДН. Ось диполя перпендикулярна оси кристалла.

Цитированная литература

1. Саутбеков С.С., Алексеева Л.А. Дифференц. уравнения. 1999. С.125 – 127.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1988.
3. Владимирова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., 1979.
4. Саутбеков С.С., Канымгазиева И.А. Обобщенные решения уравнений Максвелла для одноосного кристалла . Астана. Вестник, 2006. - 156 с. 113.

Поступила в редакцию 13.07.2007г.

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ, КАК КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

Н. И. МАРТЫНОВ

Институт механики и машиноведения им.У.А. Джолдасбекова МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 nikmar50@mail.ru

Основные статические краевые задачи теории упругости неоднородной анизотропной среды сводятся к краевым задачам обобщенного аналитического вектора. Обсуждаются перспективы такого подхода.

Хорошо известно, что теория обобщенного аналитического вектора есть теория решения общих эллиптических систем первого порядка на плоскости. Она достаточно полно разработана, но не нашла достаточно широкого применения в теории упругости неоднородных сред.

Здесь основные плоские краевые задачи статики неоднородной анизотропной упругой среды приведены к краевым задачам для обобщенного аналитического вектора; обсуждается идейная сторона подхода [1-4].

В декартовой системе координат Ox_1x_2 в поле объемных сил $\vec{f} = (f_1, f_2)$ рассмотрим равновесие анизотропного неоднородного линейно-упругого тела, занимающего область D с границей Γ . Уравнения равновесия и закон Гука имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + f_1 = 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + f_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{1,1} = \beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{12}\sigma_{22} + \beta_{16}\sigma_{12}, \\ \varepsilon_{22} = u_{2,2} = \beta_{12}\sigma_{11} + \beta_{22}\sigma_{22} + \beta_{26}\sigma_{12}, \\ 2\varepsilon_{12} = (u_{1,2} + u_{2,1}) = \beta_{16}\sigma_{11} + \beta_{26}\sigma_{22} + \beta_{66}\sigma_{12}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma_{i,j}(i, j = 1, 2)$ – компоненты тензора напряжений, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ – вектор перемещений, $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(x_1, x_2)$, $(i, j = 1, 2, 6)$ – приведенные упругие параметры, зависящие от координат x_1, x_2 . Они связаны с упругими модулями соотношениями [5]:

$$\beta_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad (2a)$$

Keywords: *Generalized analytical vector, non-homogeneous medium*

2000 Mathematics Subject Classification: 74J05

© Н. И. Мартынов, 2007.

а компонента тензора напряжений σ_{33} , определяется как

$$\sigma_{33} = -(a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{36}\sigma_{12})/a_{33}, \quad (2b)$$

Введем "след" от объемных сил

$$\theta_1 = \int_0^{x_1} f_1(x_1, x_2) dx_1, \theta_2 = \int_0^{x_2} f_2(x_1, x_2) dx_2 \quad (3)$$

и функцию напряжений $U(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{11} = U_{22} - \theta_1, \sigma_{22} = U_{11} - \theta_2, \sigma_{12} = -U_{12}, \quad U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (4)$$

Тогда система уравнений (1) удовлетворяется автоматически. Перейдем к комплексным переменным с помощью соотношений:

$$z = x_1 + ix_2, \bar{z} \equiv s = x_1 - ix_2, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (5)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Введем комплексное перемещение W , среднее напряжение σ и комплексное сдвиговое напряжение τ :

$$\begin{cases} W = u_1 + iu_2, \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \tau = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2i\sigma_{12}. \end{cases} \quad (6)$$

В новых переменных уравнения равновесия в напряжениях (1) и закон Гука примут вид:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - F_2^0 \right) z - \left(\frac{\tau}{4} - F_1^0 \right) s = 0, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{W}_z = -bU_{ZZ} - dU_{SS} - cU_{ZS} + F_1, W_s = -bU_{SS} - \bar{d}U_{ZZ} - \bar{c}U_{ZS} + \bar{F}_1, \\ (W_z + \bar{W}_s) = \bar{c}U_{ZZ} + cU_{SS} + 4aU_{ZS} - F_0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_1^0 &= \frac{1}{4}(\theta_1 - \theta_2), F_2^0 = \frac{1}{4}(\theta_1 + \theta_2), a = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} + 2\beta_{12}), \\ b &= \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{66}), c = (\beta_{22} - \beta_{11}) + i(\beta_{16} + \beta_{26}), \\ d &= \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12} - \beta_{66}) + i(\beta_{26} - \beta_{16}), F_0 = (\beta_{11} + \beta_{12})\theta_1 + (\beta_{22} + \beta_{12})\theta_2, \\ F_1 &= \frac{1}{2}\{((\beta_{12} - \beta_{11}) + i\beta_{16})\theta_1 + ((\beta_{22} - \beta_{12}) + i\beta_{26})\theta_2\}, \end{aligned} \quad (8a)$$

Исключая из (8) перемещения, получим уравнение совместности деформаций в "терминах" функции напряжений:

$$\begin{aligned} &(\bar{c}U_{ZZ} + cU_{SS} + 4aU_{ZS})_{ZS} + (bU_{ZZ} + dU_{SS} + cU_{ZS})_{SS} + \\ &+ (bU_{SS} + \bar{d}U_{ZZ} + \bar{c}U_{ZS})_{ZZ} = (F_0ZS + F_1SS + \bar{F}_1ZZ). \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая из (8) функцию напряжений, получим уравнение равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}(W_z + \bar{W}_s) - \alpha_{12}W_s - \bar{\alpha}_{12}\bar{W}_z + F_1^*)_s - \\ &-(\bar{\alpha}_{12}(W_z + \bar{W}_s) - \alpha_{13}W_s - \alpha_{14}\bar{W}_z + F_2^*)_z = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\alpha_{11} = (|d|^2 - b^2)/\Delta, \alpha_{12} = (cb - d\bar{c})/\Delta, \alpha_{13} = (4ad - c^2)/\Delta, \alpha_{14} = (|c|^2 - 4ab)/\Delta, \\ F_1^* = \alpha_{11}F_0 - \alpha_{12}\bar{F}_1 - \alpha_{13}F_1, F_2^* = \alpha_{12}F_0 - \alpha_{13}\bar{F}_1 - \alpha_{14}F_1, \Delta = 2b(|c|^2 - 2ab) + 4a|d|^2 - (\bar{d}c^2 + d\bar{c}^2). \quad (10a)$$

Таким образом, если рассматривается задача в напряжениях, то используется уравнение совместности деформаций (8), если в перемещениях, то уравнение равновесия (10).

Соотношения (8), как нетрудно видеть, являются полными интегралами уравнений (9), (10). Система уравнений (8) представляет собой систему уравнений первого порядка относительно W, \bar{W}, U_S, U_Z с дополнительным условием $U_{SZ} = U_{ZS}$. Ее решение эквивалентно решению систем (9) или (10) [2].

Систему уравнений (8) приведем к каноническому (по И.Г. Петровскому) виду. Сначала рассмотрим неоднородное изотропное тело. Тогда

$$\beta_{16} = \beta_{26} = c = d = 0, \beta_{66} = b = \frac{1}{\mu}, \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{1 - \nu^2}{E}, \beta_{12} = -\frac{\nu(1 + \nu)}{E}, a = \frac{1}{2(\lambda + \mu)}, \\ F_0 = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2(\lambda + \mu)}, F_1 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{4\mu}, \quad (11)$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, λ, μ – параметры Ламе. С помощью замены переменных [1]:

$$\begin{cases} W = A_0u - B_0\bar{v}, \bar{W} = A_0\bar{u} - B_0\nu, \\ U_S = \frac{m}{2}(u + \bar{v}), U_Z = \frac{m}{2}(\bar{u} + \nu), \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\delta = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, m = \sqrt{\mu\delta}, B_0 = \frac{m}{2\mu}, A_0 = \frac{m}{2\mu} + \frac{m}{2(\lambda + \mu)}, \quad (12a)$$

систему уравнений (8) приведем к виду:

$$\vec{\chi}_S - \Omega \vec{\chi}_Z = A \vec{\chi} + B \vec{\bar{\chi}} + \vec{F}_*, \quad (13)$$

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \vec{F}_* = \begin{pmatrix} F_{*1} \\ F_{*2} \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), (i, j = 1, 2),$$

$$a_{11} = -a_{12} = (1 - \delta)a_s^0 + b_s^0, a_{12} = 0, a_{21} = -[(1 - \delta)a_z^0 + b_z^0],$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = -a_s^0\delta, b_{21} = -[2b_s^0 + (2 - \delta)a_s^0], b_{22} = a_z^0\delta,$$

$$F_{*1} = F_1^0 \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}, F_{*2} = -\frac{2F_2^0 \sqrt{\mu}}{\sqrt{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}}, a^0 = \ln \sqrt{\mu}, b^0 = \ln \sqrt{\delta}. \quad (13a)$$

То есть система уравнений (8) свелась к системе эллиптических уравнений для обобщенного аналитического вектора [7-11]. Для несжимаемого материала $\delta = 1, \lambda \rightarrow \infty$.

Краевая задача Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора (в упрощенной постановке) формулируется следующим образом: определить обобщенный аналитический вектор, непрерывный в смысле Гельдера в $D + \Gamma$ и удовлетворяющий граничному условию

$$Re[\bar{G} \cdot \vec{\chi}(t)] = \vec{g}(t), \quad (14)$$

где $G(t)$ – заданная и непрерывная по Гельдеру на Γ матрица $\det G(t) \neq 0$ и $\vec{g}(t)$ – заданный и непрерывный по Гельдеру действительный вектор. (Условия на $G(t), \vec{g}(t)$ можно ослабить).

Для первой краевой задачи теории упругости (на Γ заданы усилия) согласно (12) – (14) имеем

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \det G_1 = -2i, g_1 = \operatorname{Re}\left(\frac{2U_S}{m}\right), g_2 = \operatorname{Im}\left(\frac{2U_S}{m}\right) \quad (14a)$$

Для второй краевой задачи (на Γ заданы перемещения)

$$G_2 = \begin{pmatrix} A_0 & -B_0 \\ iA_0 & iB_0 \end{pmatrix}, \det G_2 = 2iA_0B_0 \neq 0, g_1 = \operatorname{Re}W, g_2 = \operatorname{Im}W \quad (14b)$$

Для третьей (смешанной) краевой задачи матрица G_3 принимает соответственно значения G_1 или G_2 и терпит разрыв на множестве меры нуль [1].

Таким образом, решение основных краевых задач плоской теории упругости изотропного неоднородного тела сводится к краевой задаче Римана-Гильберта для обобщенно-аналитического вектора. В случае постоянных упругих параметров из (12) – (13a) следует представление общего решения через две аналитические функции Колосова-Мусхелишвили [1]. Рассмотрим трансверсально-изотропное неоднородное тело. Тогда в главных осях анизотропии имеем [5]

$$\beta_{16} = \beta_{26} = c = d = 0, \beta_{66} = b = \frac{1}{\mu}, \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{1}{E} - \frac{\nu'^2}{E'}, \beta_{12} = -\left(\frac{\nu}{E} + \frac{\nu'^2}{E'}\right), a = \frac{1 - \nu}{E} - \frac{\nu'^2}{E'},$$

$$F_0 = \frac{a(\theta_1 + \theta_2)}{4}, F_1 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{4\mu}, E = 2\mu(1 + \nu), \quad (15)$$

где ν, ν' – соответствующие коэффициенты Пуассона, а E, E' – модули Юнга. Если сравнить (15) с (11), то нетрудно заметить, что соотношения (11) переходят в (15), если заменить $(\lambda + \mu)^{-1}$ на $2a$. Поэтому в соотношениях (12)-(14b) для трансверсально-изотропного тела необходимо заменить $(\lambda + \mu)^{-1}$ на $2a$. Физически это означает, что трансверсально-изотропное тело при плоской деформации ведет себя как изотропное тело, что является хорошо известным фактом [5].

Теперь рассмотрим общий случай ($d \neq 0$). Соотношения (8) можно представить в виде:

$$\vec{\chi}_S = q\vec{\chi}_Z + \vec{g}, \quad (16)$$

где

$$\vec{\chi} = \begin{bmatrix} W \\ \bar{L} \\ \bar{W} \\ L \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 - \frac{b}{d}F_1 \\ \frac{F_1}{d} \\ \frac{cF_1}{d} - F_0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = U_Z, \bar{L} = U_S, q = (q_{ij}), (i, j = 1 : 4),$$

$$q_{11} = q_{21} = q_{41} = q_{43} = q_{44} = 0, q_{31} = -1, q_{42} = 1, q_{12} = -q_{34} = (bc - \bar{c}d)/d, q_{13} = -q_{24} = b/d,$$

$$q_{14} = (b^2 - \bar{d}d)/d, q_{22} = q_{33} = -c/d, q_{32} = (4ad - c^2)/d, q_{23} = -1/d. \quad (16a)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение $|q - \lambda E| = 0$. Оно имеет вид

$$e(\lambda) \equiv \lambda^4 + \frac{2c}{d}\lambda^3 + \frac{2(2a + b)}{d}\lambda^2 + \frac{2\bar{c}}{d}\lambda + \frac{\bar{d}}{d} = 0. \quad (17)$$

Структура корней уравнения (17) в общем случае следующая:

$$(\lambda_1, \lambda_2, 1/\bar{\lambda}_1, 1/\bar{\lambda}_2, |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1).$$

Для ортотропного тела $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, при наличии одной плоскости упругой симметрии $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Корни характеристического уравнения (17) всегда простые и симметричны относительно

единичной окружности. Они легко вычисляются в радикалах способом Феррари [2]. Заметим, что для изотропного и трансверсально-изотропных тел корни соответствующих характеристических уравнений в действительных переменных двукратные и чисто мнимые: $\pm i$.

Пусть система координат $Ox'_1x'_2$ получается поворотом системы координат Ox_1x_2 на угол φ . Используя результаты [5] (формулы (6.1, с.42) и соотношения (8a), нетрудно получить выражения приведенных упругих параметров в новой системе координат через старые:

$$a' = a - \zeta, b' = b + \zeta, c' = ce^{2i\varphi}, d' = (d + \zeta e^{-4i\varphi})e^{4i\varphi}, \zeta = 0, 5(\beta_{26} - \beta_{16}) \sin 4\varphi = \frac{1}{4i}(d - \bar{d}) \sin 4\varphi. \quad (18)$$

Для трансверсально-изотропного тела, как это следует из (18), $a' = a, b' = b, c' = d' = 0$. Тогда в любой системе координат корни двукратные и равны $\pm i$. Для ортотропного тела в главных осях анизотропии $Im(d) = Im(c) = 0$. Тогда $a' = a, b' = b$. Нетрудно показать, что корни характеристических уравнений в системах координат $Ox'_1x'_2$ и Ox_1x_2 связаны соотношением

$$\lambda' = \lambda e^{-2i\varphi}, |\lambda'| = |\lambda|, \quad (19)$$

т.е. их структура сохраняется в любой системе координат. Для плоскости упругой симметрии изменяются как модули, так и направления собственных значений, но структура их сохраняется.

Таким образом, при плоской деформации в любой системе координат имеет место следующая структура корней:

$$\begin{cases} \text{изотропное тело} \Leftrightarrow (\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i, 2\beta_{11} = \beta_{66} + 2\beta_{12}), \\ \text{трансверсально-изотропное тело} \Leftrightarrow (\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i), \\ \text{ортотропное тело} \Leftrightarrow (|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| = |\lambda_4| > 1, \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4 = 0), \\ \text{плоскость упругой симметрии} \Leftrightarrow (\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, \lambda_2, \frac{1}{\lambda_2}, |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1). \end{cases} \quad (20)$$

Следовательно, структура корней однозначно отражает внутреннюю симметрию анизотропного упругого материала. Это утверждение весьма полезно при обработке экспериментальных упругих параметров, которое позволяет достаточно просто установить вид анизотропии упругого тела. Введем матрицы $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, T, S$:

$$\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_1 \end{bmatrix}, S = T^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\text{где } T_1 = \begin{bmatrix} -1 & \omega_2(\lambda_1) \\ 1 & \omega_2(\lambda_2) \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \frac{\bar{\omega}_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \\ -\lambda_2 & -\frac{\bar{\omega}_1(\lambda_2)}{\lambda_2} \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{\omega}_1(\lambda_1)}{\Omega_1} & \frac{\bar{\omega}_2(\lambda_2)}{\Omega_2} \\ \frac{\lambda_1^2}{\Omega_1} & -\frac{\lambda_2^2}{\Omega_2} \end{bmatrix}, \bar{S}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1\omega_2(\lambda_1)}{\Omega_1} & \frac{\lambda_2\omega_1(\lambda_2)}{\Omega_2} \\ \frac{\lambda_1}{\Omega_1} & -\frac{\lambda_2}{\Omega_2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \omega_1(\xi) &= b\xi^2 + c\xi + d, \omega_2(\xi) = d\xi^2 + c\xi + b, -\lambda_1 de'_\lambda(\lambda_1) = \Omega_1 = 2(\bar{\omega}_1(\lambda_1) - \lambda_1^2\omega_2(\lambda_1)), \\ -\lambda_2 de'_\lambda(\lambda_2) &= \Omega_2 = 2(\bar{\omega}_1(\lambda_2) - \lambda_2^2\omega_2(\lambda_2)), \end{aligned} \quad (22)$$

и сделаем замену переменных

$$\vec{Y} = T\vec{X}, \vec{Y} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{y} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Тогда система уравнений (16) приводится к виду:

$$y_s = \tilde{q}_1 y_z + A_1 y + B_1 \bar{y} + (T_1 f_1 + T_2 f_2), \quad (24a)$$

$$\bar{y}_s = \tilde{q}_2 \bar{y}_z + A_2 y + B_2 \bar{y} + (\bar{T}_2 f_1 + \bar{T}_1 f_2), \quad (24b)$$

$$A_1 = (T_{1S} - \tilde{q}_1 T_{1Z}) S_1 + (T_{2S} - \tilde{q}_1 T_{2Z}) \bar{S}_2, B_1 = (T_{1S} - \tilde{q}_1 T_{1Z}) S_2 + (T_{2S} - \tilde{q}_1 T_{2Z}) \bar{S}_1, \quad (24)$$

$$A_2 = -\tilde{q}_2 \bar{B}_1, B_2 = -\tilde{q}_2 \bar{A}_1.$$

Уравнение, комплексно-сопряженное к (24b), есть уравнение (24a) [2]. Заметим, что $\Omega_1, \Omega_2 \neq 0$, т.к. корни характеристического уравнения простые.

Для первой краевой задачи имеем

$$G_1 = \begin{bmatrix} \bar{S}_{21} + S_{23} & \bar{S}_{22} + S_{24} \\ i(\bar{S}_{21} - S_{23}) & i(\bar{S}_{21} - S_{24}) \end{bmatrix}, \det |G_1| = \frac{2i\bar{\lambda}_1\lambda_2}{\Omega_1\Omega_2} (1 - \bar{\lambda}_1\lambda_2) \neq 0, g_1 = Re\left(\frac{2U_S}{m}\right), g_2 = Im\left(\frac{2U_S}{m}\right). \quad (25)$$

Для второй краевой задачи

$$G_2 = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} + S_{13} & \bar{S}_{12} + S_{14} \\ i(\bar{S}_{11} - S_{13}) & i(\bar{S}_{12} - S_{14}) \end{bmatrix},$$

$$\det |G_2| = \frac{2i}{\Omega_1\Omega_2} (\bar{\lambda}_1\lambda_2\omega_2(\lambda_2)\bar{\omega}_2(\bar{\lambda}_1) - \omega_1(\bar{\lambda}_1)\bar{\omega}_1(\lambda_2)) \neq 0, g_1 = ReW, g_2 = ImW. \quad (26)$$

Таким образом, как для ортотропного тела, так и для плоскости упругой симметрии краевые задачи статики сводятся к задаче Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора [2]. В случае постоянных приведенных упругих параметров и отсутствия массовых сил с учетом (22) – (24) получаем представление общего решения типа С.Г. Лехницкого:

$$U = 2Re(\Phi_1(\eta_1) + \Phi_2(\eta_2)),$$

$$-W = \frac{\bar{\omega}_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \Phi_1' + \bar{\omega}_2(\lambda_1) \bar{\Phi}_1' + \frac{\bar{\omega}_1(\lambda_2)}{\lambda_1} \Phi_2' + \bar{\omega}_2(1/\bar{\lambda}_2) \bar{\Phi}_2', \quad (27)$$

где $\Phi_1(\eta_1), \Phi_2(\eta_2)$ – аналитические функции комплексных аргументов,

$$\eta_1 = \lambda_1 s + z, \eta_2 = \lambda_2 s + z \quad (27a)$$

Система уравнений (8) приводится к каноническому виду и в переменных дивергенция-вихрь (предварительно упругий потенциал записывается в главных осях), а соответствующие краевые задачи также сводятся к задаче Римана-Гильберта. Такое представление очень важно для задач механики сплошной среды.

Подобный подход переносится и на задачи о чистом кручении и изгибе призматического неоднородного анизотропного бруса. Рассмотрим, например, задачу о чистом кручении [13], которая описывается системой уравнений:

$$\sigma_{13x} + \sigma_{23y} = 0, \quad (28)$$

$$a_{45}\sigma_{23} + a_{55}\sigma_{13} = \vartheta(\varphi_x - y),$$

$$a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{13} = \vartheta(\varphi_y + x), \quad (29)$$

где σ_{13}, σ_{23} – компоненты тензора напряжений, $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $(i, j = 4, 5)$ – упругие параметры (коэффициенты деформации), $\varphi = \varphi(x, y)$ – функция кручения, $\vartheta = const$ – относительный угол закручивания. При этом предполагается, что один конец бруса закреплен, а на другом, свободном, действуют усилия, приводящие к скручивающему моменту M . Кроме того, в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к образующей бруса. Плоскость

свободного торца принимается за плоскость Oxy , а ось Oz' направлена параллельно образующей [6].

Для простоты будем рассматривать односвязную область сечения D с границей Γ . Введем функцию напряжений:

$$\sigma_{13} = -\vartheta\psi_y, \sigma_{23} = \vartheta\psi_x. \quad (30)$$

Тогда (28) удовлетворяется автоматически, а (29) принимает вид:

$$-\varphi_y + a_{44}\psi_x - a_{45}\psi_y = x, \varphi_x - a_{45}\psi_x + a_{55}\psi_y = y. \quad (31)$$

Обычно задачу о чистом кручении решают либо в напряжениях, либо в перемещениях. В первом случае исключают функцию кручения φ :

$$(a_{44}\psi_x - a_{45}\psi_y)_x + (a_{55}\psi_y - a_{45}\psi_x)_y = 2, \quad (32)$$

во втором - функцию напряжений ψ :

$$\{A_{45}(\varphi_y + x) + A_{55}(\varphi_x - y)\}_x + \{A_{44}(\varphi_y + x) + A_{45}(\varphi_x - y)\}_y = 0. \quad (33)$$

Здесь A_{ij} ($i, j = 4, 5$) - модули упругости, связанные с коэффициентами деформации соотношениями:

$$A_{44} = \frac{a_{55}}{\Delta}, A_{45} = -\frac{a_{45}}{\Delta}, A_{55} = \frac{a_{44}}{\Delta}, \Delta = a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0.$$

К уравнениям (32) или (33) добавляют соответствующие граничные условия и необходимые соотношения для определения остальных неизвестных параметров [6].

Обратимся теперь к соотношениям (31). Они выражают закон Гука, записанный через функции напряжений и кручения. Нетрудно видеть, что (31) представляют собой полные интегралы уравнений (32) и (33). Действительно, если ψ - решение (32), то общее решение (32) есть (31) и, наоборот. То же самое справедливо и для уравнения (33). Поэтому решение краевых задач о кручении эквивалентно решению системы (31) - эллиптических уравнений первого порядка относительно ψ, φ с соответствующими краевыми условиями. Вводя комплексную переменную

$$W = \psi + i\varphi,$$

систему уравнений (31) запишем в виде

$$(p+1)W_S + (p-1)\overline{W}_S + q(W_z + \overline{W}_z) = z, \quad (34)$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a_{44} + a_{55}), q = -\frac{1}{2}((a_{55} - a_{44}) + 2ia_{45}). \quad (34a)$$

Рассмотрим общий случай: плоскость упругой симметрии. Пусть $q \neq 0$ при $z \in \overline{D}$ ($\overline{D} = D \cup \Gamma$). Рассмотрим уравнение (34) и его комплексно сопряженное уравнение. Из этой системы уравнений определим W_S, \overline{W}_S :

$$\vec{\chi}_S = C\vec{\chi}_Z + \vec{F}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\chi} &= \begin{pmatrix} W \\ \overline{W} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \\ C_{11} &= \frac{1}{2\bar{q}} [(p-1)^2 - |q|^2], C_{12} = \frac{1}{2\bar{q}} [(p-1)^2 - |q|^2], C_{22} = -\frac{1}{2\bar{q}} [(p+1)^2 - |q|^2], \\ f_1 &= \frac{1}{2\bar{q}} [\bar{q}z - (p-1)s], f_2 = -\frac{1}{2\bar{q}} [\bar{q}z - (p+1)s]. \end{aligned} \quad (35a)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее матрице C , имеет вид: $|C - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица. Или в развернутой форме:

$$\lambda^2 + \frac{2p}{q}\lambda + \frac{q}{q} = 0. \quad (36)$$

Его корни

$$\lambda_1 = \lambda = -\frac{q}{p + \sqrt{\Delta}}, \lambda_2 = \frac{1}{\bar{\lambda}} = -\frac{q}{p - \sqrt{\Delta}}. \quad (37)$$

То есть $\lambda_1, \bar{\lambda}_2$ симметричны относительно единичной окружности, при этом $|\lambda| < 1$. Обозначая через T, \tilde{C} матрицы:

$$T = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (38)$$

где

$$a = \operatorname{ch} \omega = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{\Delta} + \sqrt[4]{-\Delta}), b = \operatorname{sh} \omega = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{-\Delta} - \sqrt[4]{\Delta}),$$

и, сделав замену переменных

$$\vec{U} = T\vec{\chi}, \vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

систему уравнений (35) приведем к виду

$$u_S - \lambda u_Z = (\lambda \omega_Z - \omega_S) \bar{u} + (a f_1 - b f_2), \quad (39a)$$

$$\bar{u}_S - \frac{1}{\lambda} \bar{u}_Z = \left(\frac{1}{\lambda} a \omega_Z - \omega_S\right) u + (a f_2 - b f_1). \quad (39b)$$

Уравнение, комплексно-сопряженное к (39б), есть уравнение (39а). На границе Γ области D граничное условие для уравнения (39а) запишется в виде

$$\operatorname{Re} u = (a - b) \psi = \sqrt[4]{\Delta} \psi = 0. \quad (39c)$$

Таким образом, задача о кручении анизотропного неоднородного призматического бруса свелась к задаче Римана-Гильберта (39а), (39с) для обобщенного аналитического вектора.

В случае постоянных упругих параметров, с учетом (37) – (39а) получаем представление общего решения типа С.Г.Лехницкого [6]:

$$\psi = \operatorname{Re} \Phi(\eta) + \frac{(p + \sqrt{\Delta})^2}{4\Delta} |\eta|^2, \varphi = \sqrt{\Delta} \operatorname{Im} \Phi(\eta),$$

где $\Phi(\eta)$ – аналитическая функция аргумента $\eta = \lambda s + z$. В силу (39с) на границе области известна действительная часть аналитической функции $\Phi(\eta)$. Тогда решение задачи о кручении можно записать в замкнутом виде, используя интеграл Шварца [10].

Структура корней характеристического уравнения при повороте системы координат не изменяется [3]. Решения задач о кручении призматического бруса с различным видом анизотропии подробно рассмотрены в [3] и часто могут быть получены в замкнутом виде.

Для того, чтобы не накладывать дополнительных условий на гладкость упругих параметров, уравнение (34) исследуют непосредственно. Коэффициенты $a_{i,j}$ ($i, j = 4, 5$) предполагаются ограниченными измеримыми функциями, удовлетворяющими условию эллиптичности. Для реальных упругих неоднородных анизотропных сред эти условия выполняются автоматически. Исключая из уравнения (34) и его комплексно-сопряженного уравнения \bar{W}_Z , получим уравнение

$$W_S - q_1 W_Z - q_2 \bar{W}_S = \frac{(p+1)z - qs}{\Delta_*}, \quad (40)$$

где $\Delta_* = 1 + \Delta + (a_{44} + a_{55})$, $q_1 = \frac{(a_{55} - a_{44}) + 2ia_{45}}{\Delta_*}$, $q_2 = \frac{1 - \Delta}{\Delta_*}$, $|q_1| + |q_2| < q_0 < 1$.

Аппарат решений уравнения (40) при различных граничных условиях достаточно полно разработан и осуществляется с помощью интегральных уравнений по области (см. [7-11] и там же библиографию по этому вопросу). Таким образом крайевые задачи плоской неоднородной теории упругости сводятся к крайевым задачам Римана-Гильберта обобщенного аналитического вектора. При решении конкретных задач необходимо воспользоваться результатами теории обобщенного аналитического вектора. С помощью основного гомеоморфизма строится фундаментальное решение системы (16) (для изотропного тела оно записывается в явном виде), затем общее решение [9]. Теорема существования и единственности следует из общих результатов теории обобщенного аналитического вектора, а для решения конкретных задач применим метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). В случае аналитических коэффициентов система уравнений (8) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений или к интегральным уравнениям Фредгольма в зависимости от вида анизотропии. Кроме того, основные крайевые задачи теории упругости неоднородных сред могут быть сведены к задаче сопряжения (поскольку известно общее решение). Но все это нуждается в детальной проработке. Чтобы не накладывать дополнительных условий на "гладкость" упругих параметров, систему уравнений (8) необходимо исследовать непосредственно, сведя ее к системе интегральных уравнений с помощью интегральных операторов по области [9]. Это позволяет сформулировать новый класс задач с изменяющейся по области анизотропией и унифицировать класс контактных задач из составных материалов. Последнее окажет решающее влияние на прикладные и инженерные дисциплины по оптимальному проектированию современных материалов с заданными свойствами, повысит надежность и стойкость конструкций, сэкономит материальные затраты.

Изложенный в настоящей статье подход переносится непосредственно на криволинейную анизотропию. Он может быть применен для решения задачи Сомильяно о совместном действии плоской деформации, кручении и изгибе призматического неоднородного бруса с общим видом анизотропии, к задаче Фойгта об обобщенном изгибе анизотропной консоли [5] и др.

Цитированная литература

1. **Н.И. Мартынов** // Межд. научная конф. "Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития...", посв. 70-летию акад. У.М. Султангазина. 2006. С. 62 – 65.
2. **Н.И. Мартынов** // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007. №1(251). С. 52 – 59.
3. **Н.И. Мартынов, И.О. Федоров**. // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2007. №3. С. 48 – 53.
4. **Н.И. Мартынов** // Тезисы докл. межд. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посв. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа. Н-ск. 2007 г. С. 518 – 519.
5. **С.Г. Лехницкий** Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
6. **С.Г. Лехницкий** Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., 1971.
7. **И.Н. Векуа** Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
8. **И.Н. Векуа** Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л., 1948.
9. **Б.В. Боярский**. Annales Polonici Mathematici. 1966. V.17. P. 281 – 320.
10. **Ф.Д. Гахов** Краевые задачи. М., 1977.
11. **Г.Н. Положий** Теория и применение p -аналитических и (p,q) -аналитических функций. К. 1973.

Поступила в редакцию 23.09.2007г.

УДК 517.956.3

О СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Н.ОСПАНОВ

Академия государственного управления при Президенте Республики Казахстан
010000 Астана ул. Жумабаева, д.12-10 ospanov_k@mail.ru

Получены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения одной системы двух вещественных уравнений первого порядка с неограниченными коэффициентами.

На плоскости R^2 рассмотрим систему двух вещественных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} k_1(x, y)u_x - v_y + a_1(x, y)u = f(x, y), \\ u_y + k_2(x, y)v_x - a_2(x, y)v = g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $f, g \in L_2(R^2)$.

Эллиптические системы двух вещественных уравнений первого порядка, заданные на плоскости, возникают в связи с рядом прикладных задач, например, геометрии и квантовой механики. Когда младшие коэффициенты по модулю убывают на бесконечности с определенной скоростью, краевые задачи изучались в [1]. Когда младшие коэффициенты системы отделены от нуля и $k_j(x, y) = 1$ ($j = 1, 2$), система (1) изучалась в работах [2 – 4], где для случаев полосы и всей плоскости установлены достаточные условия однозначной разрешимости этой системы, получены нелокальные весовые оценки решения и его производных первого порядка, а также изучались некоторые спектральные свойства соответствующего системе (1) сингулярного дифференциального оператора. В работе [5] путем сведения вопроса к исследованию одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами на R исследован более общий случай $k_j(x, y) = \rho(y) \geq 0$ ($j = 1, 2$).

В рассматриваемом нами случае системы (1) методы работ [1 – 5] неприменимы. Ниже получены достаточные условия существования и единственности решения системы (1).

Полагая $\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} - i \frac{\partial \omega}{\partial y}$, $\omega_z = \frac{\partial \omega}{\partial x} + i \frac{\partial \omega}{\partial y}$ ($z = x + iy$), систему (1) можно представить в комплексной форме

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)\omega_z + A(z)\omega + B(z)\bar{\omega} = \Phi(z). \quad (2)$$

Keywords: *closed operator, generalized solution, first-order system*

2000 Mathematics Subject Classification: 35F05, 35J45

© К.Н.Оспанов, 2007.

На всей плоскости уравнение (2) было исследовано в [1] при условии $|q(z)| \leq q_0 < 1$. Когда один из коэффициентов $k_1(x, t)$, $k_2(x, t)$ системы (1) может неограниченно расти на бесконечности, данное неравенство не имеет места, хотя система (1) остается эллиптической.

Обозначим через L минимальный замкнутый в L_2 оператор, порожденный системой (1), через $D(L)$ – область определения L . Пусть $F = (f, g)$. Решением системы (1) назовем функцию $w = (u, v) \in D(L)$, которая удовлетворяет уравнению $Lw = F$.

Лемма 1. Если функции $k_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) непрерывно дифференцируемы, $a_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) непрерывны и выполнены условия $2a_j(x, y) - |(k_j)_x(x, y)| \geq \delta_0 > 0$ ($j = 1, 2$), то для каждой функции w из области определения $D(L)$ оператора L имеет место оценка

$$\|w\|_2 \leq C\|Lw\|_2. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $w = (u, v)$ – непрерывно дифференцируемая, финитная функция и $\tilde{w} = (u, -v)$. Интегрируя по частям, имеем

$$(L_0w, \tilde{w}) = \int_{R^2} \left[\left(a_1(x, y) - \frac{(k_1)_x(x, y)}{2} \right) u^2 - \left(a_2(x, y) - \frac{(k_2)_x(x, y)}{2} \right) v^2 \right] dx dy, \quad (4)$$

откуда с учетом условия леммы следует неравенство

$$(L_0w, \tilde{w}) \geq \delta_0\|w\|_2^2. \quad (5)$$

Из (5), применяя неравенство Шварца, получим оценку (3), которая в силу замкнутости оператора L остается справедливой и для всех w из $D(L)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $k_j(x, y) \geq \delta_1 > 0$ ($j = 1, 2$) непрерывно дифференцируемы, $a_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) непрерывны и

$$2a_j(x, y) - |(k_j)_x(x, y)| - 2k_j(x, y) \geq \delta_2 > 0 \quad (j = 1, 2) \quad (6)$$

Тогда для каждой правой части $F \in L_2$ система (1) имеет решение, притом единственное.

Доказательство. В наших условиях выполнены все требования леммы 1. Поэтому в силу оценки (3) решение системы (1), как элемент множества $D(L)$, единственно. Докажем существование решения, что эквивалентно факту совпадения области значения $R(L)$ оператора L со всем пространством L_2 . Предположим противное, пусть $R(L) \neq L_2$. Тогда найдется элемент $U = (s, p)$ из L_2 , ортогональный $R(L)$, т.е. $0 = (Lw, U) = (w, L^*U)$, $w \in D(L)$, L^* – сопряженный с L оператор. Отсюда, т.к. множество $D(L)$ плотно в L_2 , вытекает, что функция $U = (s, p)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*U = 0. \quad (7)$$

Интегрированием по частям убеждаемся в том, что равенство (7) в развернутом виде записывается так

$$\begin{cases} -k_1(x, y)s_x - p_y + [a_1(x, y) - (k_1)_x(x, y)]s = 0, \\ s_y - k_2(x, y)p_x - [a_2(x, y) - (k_2)_x(x, y)]p = 0. \end{cases} \quad (8)$$

По условию теоремы система (8) эллиптическая, а ее коэффициенты непрерывны, поэтому (см. [1], гл. 3) частные производные s_x , p_y , s_y , p_x компонент решения U принадлежат пространству $L_{2,loc}(R^2)$, таким образом, U является элементом пространства $W_{2,loc}^1(R^2, R^2)$.

Возьмем непрерывно дифференцируемую и финитную функцию $\theta = \theta(x, y) \geq 0$. Произведение θU принадлежит классу $W_2^1(R^2, R^2)$ и финитно, поэтому является элементом и $D(L)$, и

$D(L^*)$. Кроме того, т.к. $U \in Ker\{L^*\}$, имеем $L^*(\theta U) = (-k_1\theta_x s - \theta_y p, \theta_y s - k_2\theta_x p)$. Поэтому, учитывая финитность функций θU , получим

$$(L^*(\theta U), \theta \tilde{U}) = \int_{R^2} [-(k_1 s^2 - k_2 p^2)\theta_x \theta - 2\theta_y \theta s p] dx dy, \quad (9)$$

где $\theta \tilde{U} = (\theta s, -\theta p)$, с другой стороны, для произвольной непрерывно дифференцируемой и финитной функции $U = (s, p)$, интегрируя по частям, имеем ($\tilde{U} = (s, -p)$)

$$\begin{aligned} (L^*(\theta U), \theta \tilde{U}) &= \int_{R^2} \left[\left(a_1 - \frac{k_{1x}}{2} \right) (\theta s)^2 + \left(a_2 - \frac{k_{2x}}{2} \right) (\theta p)^2 \right] dx dy \geq \\ &\geq \frac{\delta_0}{2} \int_{R^2} \theta^2(x, y) |U(x, y)|^2 dx dy, \end{aligned} \quad (10)$$

Оценка (10) без изменения распространяется на все функции U из $D(L^*)$, в частности, на любую функцию из $Ker L^*$. Сравнивая (9) и (10), получим

$$\frac{\delta_0}{2} \|\theta U\|_2^2 \leq \int_{R^2} [(|k_1|s^2 + |k_2|p^2) |\theta| |\theta_x| + |\theta| |\theta_y| (s^2 + p^2)] dx dy. \quad (11)$$

Согласно (4) конечен интеграл

$$\int_{R^2} \left[\left(a_1 - \frac{k_{1x}}{2} \right) u^2 - \left(a_2 - \frac{k_{2x}}{2} \right) v^2 \right] dx dy, \quad u, v \in D(L). \quad (12)$$

Поэтому с учетом условия (6) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{R^2} [k_1(\sqrt{\theta}s)^2 + k_2(\sqrt{\theta}p)^2] |\theta_x| dx dy \leq \\ &\leq \sup_{x \in R} |\theta_x| \int_{R^2} \left[\left(a_1 - \frac{k_{1x}}{2} \right) (\sqrt{\theta}s)^2 - \left(a_2 - \frac{k_{2x}}{2} \right) (\sqrt{\theta}p)^2 \right] dx dy < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $U \in L_{2,loc}$, интеграл в правой части неравенства (11) конечен. Выберем теперь функцию $\theta(x, y)$ так

$$\theta_r(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0, & x^2 + y^2 \geq (r+1)^2, \end{cases} \quad 0 \leq \theta_r(x, y) \in C^1(R), r \geq 1.$$

Пусть $\Omega_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ – шар радиуса r , а $H\Omega_r = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq (r+1)^2\}$ – кольцо. Тогда из неравенства (11) имеем

$$\frac{\delta_0}{2} \int_{\Omega_{r+1}} \theta_r^2 (s^2 + p^2) dx dy \leq \int_{H\Omega_r} |\theta_r| |(\theta_r)_y| (s^2 + p^2) dx dy + \int_{H\Omega_r} [k_1 |(\sqrt{\theta}s)^2 + k_2 |(\sqrt{\theta}p)^2] |\theta_x| dx dy.$$

Переходим в этом неравенстве к пределу, устремляя r к $+\infty$. Тогда с учетом неравенства (13) и включения $\sqrt{\theta_r}s, \sqrt{\theta_r}p \in L_2$ получим

$$\frac{\delta_0}{2} \int_{R^2} (s^2 + p^2) dx dy = 0,$$

откуда $U = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Цитированная литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
2. Оспанов К.Н., Сегизбаева Р.У. // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. 1989. № 5. С. 24 – 27.
3. Оспанов К.Н. // Украинский математический журнал. 1996. № 11. С. 1564 – 1569.
4. Оспанов К.Н. // Сибирский математический журнал. 1997. № 2. С. 365 – 371.
5. Оспанов К.Н. // Известия МН-АН РК. Серия физ.-мат. 1998. № 5. С. 35 – 42.

Поступила в редакцию 25.09.2007 г.

УДК 539.3

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАНИЯ УПРУГИХ ВОЛН С ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА И ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Е.И.УРАЗАКОВ

Институт математики, информатики и механики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125 erlik@list.ru

Решается задача о распространении упругих волн от осесимметрического источника волн, находящегося в жидкости. Граница раздела жидкости с твердым полупространством предполагается слабошероховатой. В этом приближении находятся характеристики затухания амплитуд волн при различных соотношениях между средними характеристиками таких неровных поверхностей и парциальной длиной падающих волн, которая для получаемых оценок выбиралась в области полного внутреннего отражения, а именно, соответствующей возбуждению Рэлеевских волн. Для определенных частот падающих волн и средних характеристик неровных поверхностей построены волновые поля в некоторой окрестности источника волн.

Задача о рассеянии различных волн неровной поверхностью рассматривалась в большом количестве работ (см., например, [1,2]). В [3] описано отражение звука от неровной поверхности твердого тела. В этой работе тело считалось абсолютно твердым, поэтому влияние любых распространяющихся в нем волн оказалось неучтенным. Однако обсуждаемый вопрос представляет большой практический интерес [4], в частности, как один из методов неразрушающего контроля.

На рис. 1 приведена взятая из работы Роллинза [4] экспериментальная зависимость коэффициента отражения ультразвука, падающего из жидкости на поверхность твердого тела в зависимости от угла падения. Кривая построена по формуле (1), точки - экспериментальные данные по [4] для границы раздела вода и алюминий и частоты 5 МГц. В области полного отражения, когда в твердом теле объемные звуковые волны не могут распространяться, у кривой существует минимум, положение и форма которого зависят от свойств граничной поверхности. Естественно связать происхождение этого минимума с возбуждением поверхностных волн. Эти волны схожи с рэлеевскими, распространяющимися по границе твердого тела, граничащего с вакуумом. В данном случае, когда твердое тело граничит с жидкостью, поверхностные волны являются затухающими благодаря излучению в жидкость. Несмотря на это излучение, для идеально ровной границы раздела коэффициент отражения обращается в единицу и в той области,

Keywords: *reflection of elastic waves, statistically rough boundary, relational impedance*

2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

© Е.И.Уразаков, 2007.

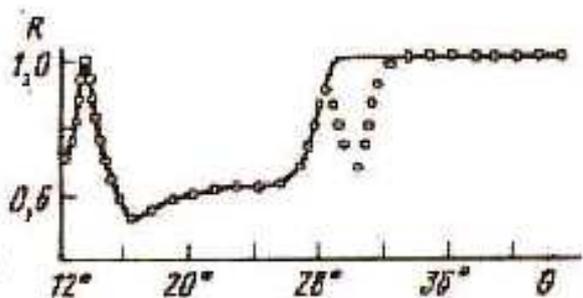


Рис. 1: Зависимость коэффициента отражения R от угла падения θ .

где возможно возбуждение поверхностных волн. В самом деле, амплитуда волны, отраженной от идеально ровной поверхности, дается известным выражением [1]:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\Delta(k) - i\gamma(k) \omega^4 / c_t^4}{\Delta(k) + i\gamma(k) \omega^4 / c_t^4}, \quad (1)$$

где $\Delta(k) = (k_t^2 - k^2)^2 + 4k_l k_t k^2$ – рэлеевский детерминант; $\gamma(k) = \frac{\rho k_l}{\rho_T i k_1}$ – относительный импеданс жидкости к твердому телу;

$$k_{t,l} = \left(\omega^2 / c_{t,l}^2 - k^2 \right)^{1/2}; \quad k_1 = \left(\omega^2 / c^2 - k^2 \right)^{1/2},$$

где ω – частота звука, k параллельная поверхности компонента волнового вектора; c_t , c_l и c – скорости поперечных, продольных волн в твердом теле и жидкости соответственно; ρ и ρ_T – плотности жидкости и твердого тела.

Из формулы (1) видно, что коэффициент отражения $R = \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2$ обращается в единицу в области полного внутреннего отражения, когда k_l и k_t чисто мнимы. Вместе с тем в этой же области при некотором значении угла падения обращается в нуль величина рэлеевского детерминанта. Данное условие определяет спектр поверхностных рэлеевских волн. При этом величина

$$\gamma = \frac{\rho c}{\rho_T c_R} \left(\frac{1 - c_R^2 / c_l^2}{1 - c^2 / c_R^2} \right)^{1/2}$$

и представляет собой по порядку величины отношение звуковых импедансов жидкости к твердому телу; c_R – скорость рэлеевских волн. Величина γ обычно мала, благодаря чему ослабление возбуждаемых поверхностных волн вследствие излучения оказывается малым. Если отражающая поверхность не является идеально ровной, то излучение в жидкость происходит под углами, отличными от угла падения, что должно привести к появлению минимума у коэффициента отражения при условии возбуждения поверхностных волн. В данном разделе рассмотрено отражение звука, падающего от цилиндрического осесимметричного источника волн, заглубленного в жидкости на некотором среднем расстоянии от границы раздела жидкость – твердое тело, что представляет собой случайную неровную поверхность. В среднем поверхность предполагается плоской, а средняя амплитуда неровностей считается малой как по сравнению с нормальной (по отношению к поверхности) компонентой длины волны звука, так и по сравнению с

расстоянием вдоль поверхности, на котором неровность заметно меняется. Сформулированные условия позволяют разлагать граничные условия в ряд по отклонению поверхности от идеально ровной, что обычно делается в известном методе малых возмущений (см. например [2]). Отличие от других рассмотренных ранее подобных задач связано с тем, что благодаря наличию другого малого параметра влияние геометрии поверхности является здесь существенным и необходимо провести суммирование главных членов ряда теории возмущений. 1. Рассмотрим звуковую волну падающего от цилиндрического осесимметричного источника волн, находящегося на глубине h под поверхностью раздела жидкость - твердое тело:

$$u_0 = \text{grad } H_0^1(\alpha r) e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{h^2 + z^2}$, $\alpha = \omega/c_1$. Далее для решения задачи воспользуемся разложением цилиндрической волны на плоские волны [5]:

$$H_0^1(\alpha r) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\eta z + x' \sqrt{\eta^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} d\eta,$$

$$\text{Re} \sqrt{\eta^2 - \alpha^2} \geq 0, \text{Im} \sqrt{\eta^2 - \alpha^2} \leq 0,$$

$x' = x + h$ Преобразуем (2) к удобному для дальнейших выкладок виду:

$$H_0^1(\alpha r) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ih \sqrt{\alpha^2 - \eta^2})}{\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} \exp(i(\eta z + x \sqrt{\alpha^2 - \eta^2})) d\eta, \quad (3)$$

$$\text{Re} \sqrt{\alpha^2 - \eta^2} \geq 0, \text{Im} \sqrt{\alpha^2 - \eta^2} \geq 0. \quad (4)$$

Уравнение разделяющей поверхности запишем в виде

$$x = \xi(\mathbf{s}),$$

где \mathbf{s} - двумерный вектор (y, z) , лежащий в координатной плоскости. Граничащую поверхность будем считать плоской в среднем, так что среднее $\langle \xi(\mathbf{s}) \rangle = 0$ - совпадающей с координатной плоскостью $x = 0$. Усреднение здесь подразумевается по некоторому ансамблю случайных функций ξ . Поскольку ограничиваемся случаем, когда величина мала по сравнению с квадратом нормальной компоненты длины волны, то результат вычислений будет выражаться через бинарную корреляционную функцию

$$W(\mathbf{s} - \mathbf{s}') = \langle \xi(\mathbf{s}) \xi(\mathbf{s}') \rangle. \quad (5)$$

Этот коррелятор является в рассматриваемом приближении единственной характеристикой поверхности, и мы будем считать его известным. Для оценок будем задавать двумя параметрами: значением $W(0) = \langle \xi^2 \rangle = a^2$ при $\mathbf{s} = 0$, а также радиусом d области, в которой $W(\mathbf{s})$ в основном отлична от нуля. Представим решение задачи в виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{s}) d^2k. \quad (6)$$

Смещение упругой среды $\mathbf{u}(\mathbf{r}, k)$, разложенное в интеграл Фурье по координате, представим в виде суммы по колебаниям с определенной поляризацией:

$$u_\alpha(x, \mathbf{k}, h) = \sum u_\alpha^{(\gamma)}(x, \mathbf{k}) A_\gamma(\mathbf{k}) e^{ik_\gamma(x+h)}. \quad (7)$$

Суммирование в (7) проводится по трем значениям, соответствующим двум поперечным, A_2, A_3 , и одной продольной, A_4 поляризациям. Для жидкости рассмотрим две волны. Падающая волна, согласно (3), имеет вид:

$$u_0(x, z, k) = \frac{\exp(ih\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{\pi\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - k^2} \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \exp(i(kz + x\sqrt{\alpha^2 - k^2})). \quad (8)$$

Введем обозначения для (6):

$$u_0(x, y, k) = A_0(k) \begin{pmatrix} k_1(k) \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \exp(i(k_1x + kz)). \quad (9)$$

Если граница идеально ровная, то отраженная волна может быть представлена в виде:

$$u_1(x, y, k) = A_1(k) \begin{pmatrix} -k_1(k) \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \exp(i(-k_1x + kz)). \quad (10)$$

В отличие от вектора \mathbf{k} частота ω сохраняется при рассеянии на статических шероховатостях, и мы ее не пишем в качестве аргумента A . В соотношении (7) $u_\alpha^{(\gamma)}(x, \mathbf{k})$ является матрицей – решением системы линейных дифференциальных уравнений для твердого тела, в которое превращается уравнение движения в частных производных после разложения всех величин, зависящих от тангенциальной координаты \mathbf{s} , в интеграл Фурье. В матричной форме уравнение движения упругой среды имеет вид:

$$Q_{\alpha\beta}U_\beta(\mathbf{r}) = 0, \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (11)$$

$$Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\omega^2}{c_t^2} + \partial_l \partial_l \right) + (\sigma^2 - 1) \partial_\alpha \partial_\beta, \quad \sigma = \frac{c_l}{c_t}.$$

И это решение для твердого тела в пространстве Фурье представлено в виде:

$$u_\alpha^\gamma(x, \mathbf{k}, h) = \begin{pmatrix} k_l e^{ik_l(h+x)} & k_y e^{ik_t(h+x)} & k_z e^{ik_t(h+x)} \\ k_y e^{ik_l(h+x)} & -k_t e^{ik_t(h+x)} & 0 \\ k_z e^{ik_l(h+x)} & 0 & -k_t e^{ik_t(h+x)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Далее для определения четырех неизвестных амплитуд используем условия на поверхности контакта жидкости и твердого тела, заключающиеся в непрерывности напряжений и (в пренебрежении вязкостью жидкости) нормальных компонент смещения. Первые три условия можно записать как условие непрерывности напряжений:

$$n_\beta \sigma_{\alpha\beta} = \rho c_t^2 n_\beta \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial r_\alpha} \right) + \rho (c_l^2 - 2c_t^2) n_\beta \frac{\partial U_\alpha}{\partial r_\beta}, \quad (13)$$

где $\mathbf{n} \approx \left(1, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, -\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$ – вектор нормали к поверхности (4). Граничные условия выполнены на неровной поверхности (4). В принятом нами приближении разложим их в ряд по ξ . Полученные таким образом условия должны удовлетворяться при $x = 0$. Разлагая в ряд интеграл Фурье по \mathbf{s} величину $u(r)$ и используя (7), запишем граничные условия с точностью до членов первого порядка по ξ :

$$H_{ij}(\mathbf{k}, h) A_j^*(\mathbf{k}) + \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \xi^*(\mathbf{k} - \mathbf{q}) V_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, h) A_j^*(\mathbf{q}) =$$

$$H_{i0}(\mathbf{k}, h) A_0^*(\mathbf{k}) + \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \xi^*(\mathbf{k} - \mathbf{q}) V_{i0}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, h) A_0^*(\mathbf{q}), \quad (14)$$

где $\xi^*(\mathbf{k})$ – фурье-компонента функции $\xi(\mathbf{s})$, \mathbf{q} – переменная Фурье. В левой части (14) мы оставили слагаемые с отраженной и прошедшими волнами, что отражено суммированием по индексу j . Матрицы H и V имеют следующий вид:

$$H_{ij}(k, h) = \begin{pmatrix} k_l e^{ik_l h} & k_y e^{ik_t h} & k_z e^{ik_t h} & k_1 e^{-ik_1 h} \\ (k_t^2 - k^2) e^{ik_l h} & 2k_y k_t e^{ik_t h} & 2k_z k_t e^{ik_t h} & -\delta e^{-ik_1 h} \\ 2k_y k_l e^{ik_l h} & (k_y^2 - k_t^2) e^{ik_t h} & k_y k_z e^{ik_t h} & 0 \\ 2k_z k_l e^{ik_l h} & k_y k_z e^{ik_t h} & (k_z^2 - k_t^2) e^{ik_t h} & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\delta = \frac{\rho\omega^2}{\rho_T c_T^2}$,

$V_{ij}(k, q, h) = i \cdot$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - \mathbf{kq}\right) e^{ik_l h} & k_y q_t e^{ik_t h} & k_z q_t e^{ik_t h} & \left(\mathbf{kq} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{-ik_1 h} \\ q_l \alpha e^{ik_l h} & (q_y (\alpha + kq) + k_y q_t^2) e^{ik_t h} & (q_z (\alpha + kq) + k_z q_t^2) e^{ik_t h} & q_1 \delta e^{-ik_1 h} \\ (q_y \alpha - k_y \beta) e^{ik_l h} & -q_t (\alpha + k_z q_z) e^{ik_t h} & k_z q_y q_t e^{ik_t h} & (k_y - q_y) \delta e^{-ik_1 h} \\ (q_z \alpha - k_z \beta) e^{ik_l h} & k_y q_z q_t e^{ik_t h} & -q_t (\alpha + k_y q_y) e^{ik_t h} & (k_z - q_z) \delta e^{-ik_1 h} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\alpha = \frac{\omega^2}{c_t^2} - 2\mathbf{kq}$; $\beta = \frac{\omega^2}{c_t^2} - 2\frac{\omega^2}{c_l^2}$.

Столбцы $H_{i0}(k, h)$ и $V_{i0}(k, q, h)$ имеют вид:

$$H_{i0}(k, h) = \begin{pmatrix} k_1 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 h}; \quad V_{i0}(k, q, h) = i \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{kq} \\ \delta q_1 \\ (q_y - k_y) \\ (q_z - k_z) \end{pmatrix} e^{iq_1 h}. \quad (17)$$

Определим амплитуду отраженной и преломленных волн, используя -уравнения (14), которые являются системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным суммируемым ядром. Ее решение можно получить. Для этого уравнение (14) будем решать итерациями по ξ , проводя на каждом этапе усреднение. В нулевом приближении по ξ появляется выражение (1). Получаемое в первом приближении по ξ решение обращается при усреднении в нуль благодаря условию $\langle \xi \rangle = 0$. Во втором порядке возникает среднее $\langle \xi(q) \xi(q') \rangle$, которое в силу однородности поверхности в среднем можно привести к виду:

$$\langle \xi(q) \xi(q') \rangle = (2\pi)^2 \delta(q + q') w(q),$$

где $w(q)$ – фурье-компонента функции $W(s)$ (4). Членом второго порядка ограничиться, однако, нельзя, поскольку малый множитель ω имеет лишний по сравнению с членом нулевого порядка малый знаменатель, пропорциональный детерминанту матрицы $H_{ij}(k, h)$ и равный знаменателю дроби (1). Суммирование главных слагаемых осуществляется подобно тому, как это делается в теории сплавов [6] и применительно к похожей задаче о ослаблении амплитуд рэлеевских волн, описано в [7]. Условие, необходимое для выделения существенных слагаемых, заключается в малости затухания возбуждаемой поверхностной волны, т. е. величины γ . Некоторое дополнительное усложнение обусловлено тем, что вблизи чисто рэлеевского спектра ($\Delta(k) = 0$) мал и числитель дроби (1). Это приводит к необходимости учитывать слагаемые с ξ в правой части формулы (10). В результате описанных вычислений получаем:

$$\frac{\langle A_1(k) \rangle}{A_0(k, h)} = \left[H(k, h) - \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} W^*(k - q) V(k, q, h) H^{-1}(q, h) V(q, k, h) \right]_{1i}^{-1},$$

$$\left[H_{i0}(k, h) - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} W^*(k-q) V_{ij}(k, q, h) H_{jl}^{-1}(q, h) V_{l0}(q, k, h) \right]. \quad (18)$$

В (14) появляются интегралы типа:

$$I(k, h) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{W^*(k-q) f(k, q, h)}{\Delta(q) + i\gamma(q) \omega^4/c_t^4}. \quad (19)$$

Нас интересует окрестность минимума (см. рис. 1), где $\Delta(k) = 0$. Корни этого уравнения – спектр рэлеевских волн запишем в виде $\omega = c_R k$. Как известно [1], $c_R = c_t \xi$, где число ξ , зависит от модулей упругости, лежит в интервале 0,87-0,96. Вещественная часть интеграла (19) определяет пропорциональное шероховатости малое смещение минимума из положения, соответствующего плоской поверхности:

$$\omega/c_R = k = (\omega/c) \sin \theta,$$

т.е. $c/c_R = \sin \theta$, где θ – угол падения. Наиболее интересна ширина минимума, зависящая от мнимой части интеграла (19). При достаточно острой функции $W^*(k-q)$ мнимая часть появляется лишь от обхода полюса в (19). Полюсный вклад учитывает возбуждение поверхностных волн. При увеличении радиуса d^{-1} круга, в котором отлична от нуля $\omega(k-q)$, мнимая часть возникает и от областей, где становятся вещественными q_l или q_t (см., например, $\Delta(q)$ в (1)). Это дает слагаемое, отвечающее за возбуждение в твердом теле объемных волн. В линейном приближении по $(ka)^2$, γ и $\Delta(k)$ вклад шероховатости в числитель и знаменатель дроби (14) одинаков. Таким образом, находим среднюю амплитуду отраженной волны:

$$\langle A_1 \rangle = [\Delta(k) + i(\tau - \gamma) \omega^4/c_t^4] [\Delta + i(\tau + \gamma) \omega^4/c_t^4]^{-1} (\pi k_1 h)^{-1}, \quad (20)$$

где $\tau = -\text{Im} I(k)$. Функция $f(k, q)$, определяющая интеграл, $I(k)$ (19), в общем случае имеет весьма громоздкий вид. Однако на спектре рэлеевских волн, т. е. при $q = k = \omega/c_R$

$$c_R f(k, q) = -k_t^2 \left[k^2 - k_t^2 + \frac{kq}{k^2} \left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - 2kq \right) \right]^2. \quad (21)$$

При $|k-q| \ll k$ это выражение еще упрощается

$$f(k, q) = (\mathbf{kq} - k^2)^2 k^2 (1 - \xi^2) (4 - \xi^2). \quad (22)$$

Оценим τ , используя (18), (21) и введенные ранее параметры a , d , h . Оценка зависит от соотношения между длиной волны $2\pi/k$ возбуждаемых волн, длиной их затухания $(\gamma k)^{-1}$, обусловленного излучением в жидкость, и масштабом шероховатости d , определяющим изменение $|\mathbf{q} - \mathbf{k}| \sim d^{-1}$ волнового вектора у возбуждаемых на шероховатостях волн. Для предельно пологих шероховатостей ($kd \gg 1$) вклад в τ вносят лишь поверхностные волны:

$$\tau \sim (ak)^2 \gamma^{-1} (kd)^{-2}, \quad (23)$$

при $(kd)^{-1} \ll \gamma/2 \ll 1$,

$$\tau \sim (ak)^2 \max \left\{ \gamma, (kd)^{-3} \right\}, \quad (24)$$

при $\gamma/2 \ll (kd)^{-1} \ll 1$.

Наконец, для достаточно ребристой поверхности ($kd \ll 1$), когда вклады поверхностных и объемных волн имеют одинаковый порядок, получаем

$$\tau \sim (adk^2)^2 \quad (25)$$

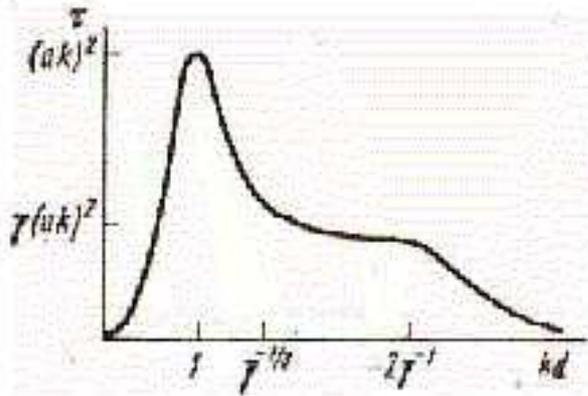


Рис. 2: Зависимость τ от масштаба шероховатости d

График τ (23) – (25) приведен на рис. 2. Отметим еще раз, что наряду с условиями, определяющими области применимости формул (19) – (25), мы предполагали, что выполнены неравенства

$ak_1 = a\omega/c_1 \cos\theta \ll 1$, $a \ll d$, $d \ll h$, необходимые для разложения граничных условий в ряд.

О влиянии размеров шероховатостей на коэффициент отражения.

Из формулы (20) видно, что коэффициент отражения:

$$R = \left| \frac{\langle A_1(k, h) \rangle}{A_0(k, h)} \right|^2 = \frac{\Delta^2(k) + (\tau - \gamma)^2 \omega^8 / c_t^8}{\Delta^2(k) + (\tau + \gamma)^2 \omega^8 / c_t^8} \quad (26)$$

может существенно отличаться от единицы:

$$R_{\min} = \frac{(\tau - \gamma)^2}{(\tau + \gamma)^2},$$

при малых шероховатостях $\tau \sim \gamma$. Рис. 1 соответствует $\tau \sim 0,1\gamma$, и по данным Роллинза [4] часто наблюдается весьма глубокий минимум. Интересно, что при условии $\gamma kd/2 \ll 1$ минимум является наиболее глубоким при определенном значении частоты, как это вытекает из соотношений (24) – (25). Этот вывод соответствует эксперименту [4]. В области $\gamma kd/2 \ll 1$ ширина минимума не зависит от частоты (23). Тот факт, что влияние неровностей оказывается наибольшим при определенном соотношении между ее параметрами a , d и относительным импедансом γ , имеет простой физический смысл. Понятно, что с уменьшением шероховатости коэффициент отражения (26) должен приближаться к единице в области полного внутреннего отражения. С другой стороны, по мере уменьшения плотности жидкости стремится к единице независимо от качества обработки поверхности просто из-за большого различия звуковых импедансов жидкой и твердой сред. В заключение приведем графическую иллюстрацию векторных волновых полей, имеющих место в жидкости в окрестности источника волн.

Картина жидкостных волновых полей получена для сред, в качестве которых был выбран известняк и морская вода. Вычисления для всех изображенных векторных полей осуществлялось для трех дискретных частот в 25, 50 и 100 гц. Так для рисунков 3 и 5 использовалась частота в 100гц, для рисунков 4 и 6 – 50 гц, а для рисунка 7 – 25 гц. Далее волновые поля для

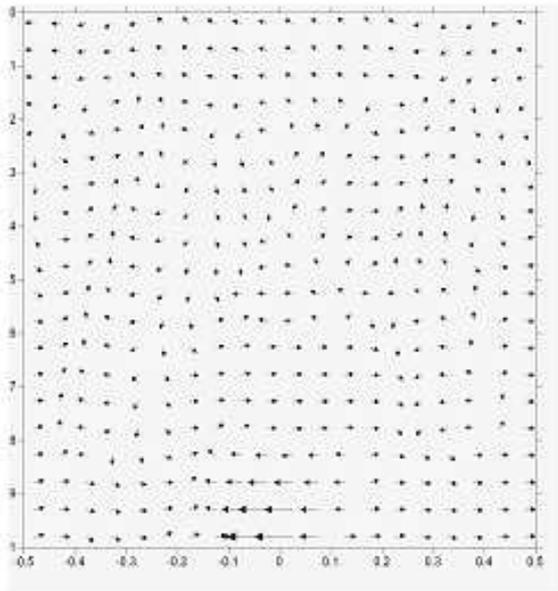


Рис. 3:

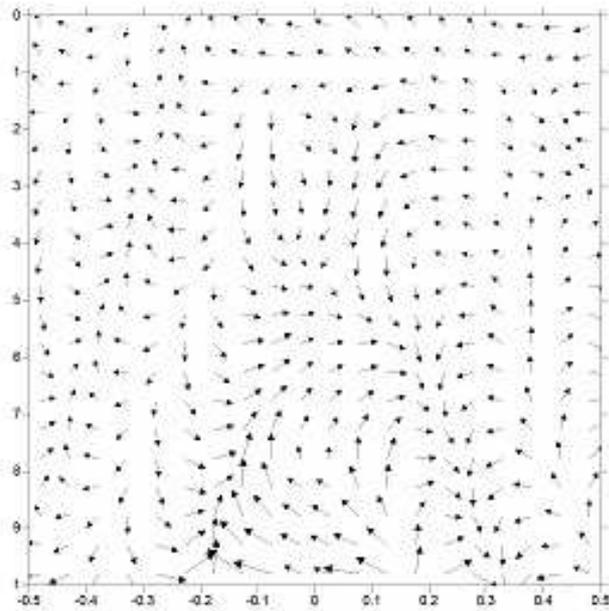


Рис. 4:

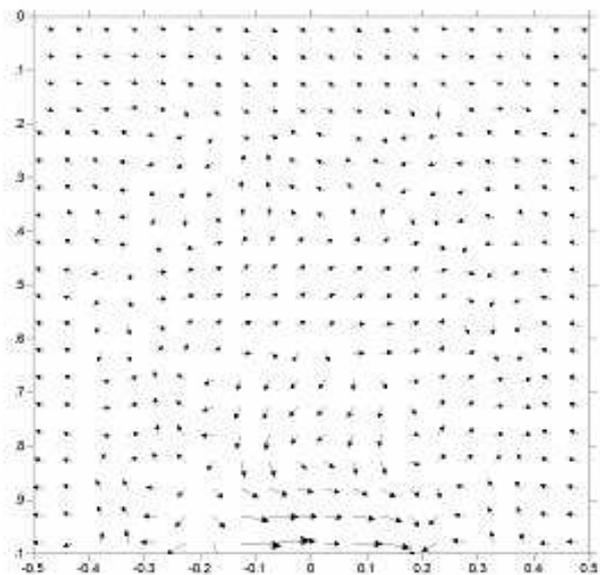


Рис. 5:

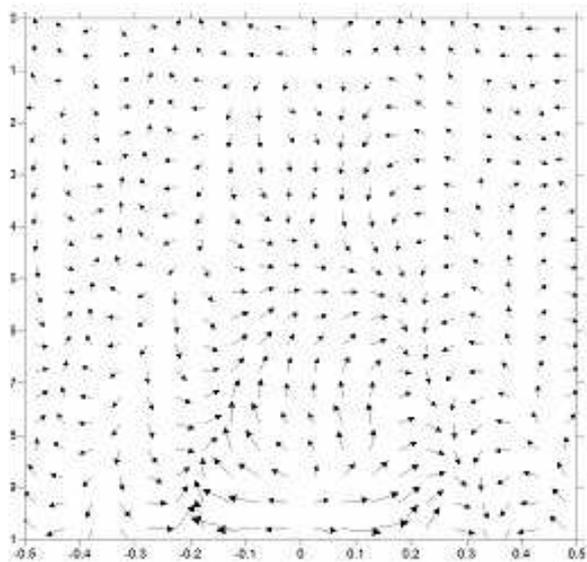


Рис. 6:

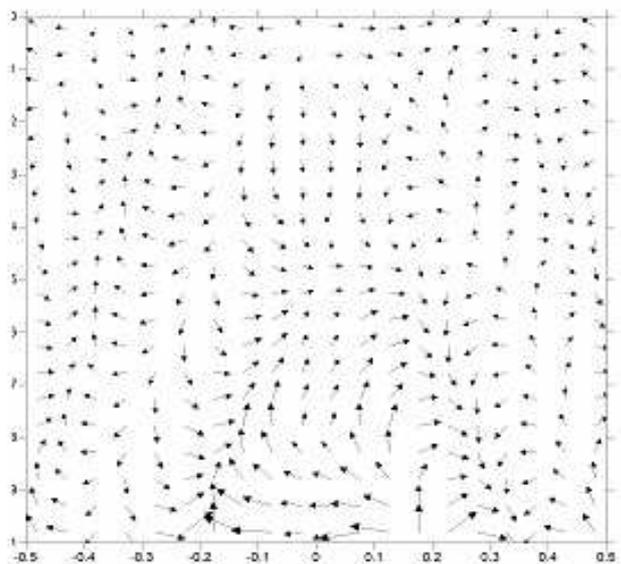


Рис. 7:

рисунков 3 и 4 вычислялись в предположении идеально-ровной границы раздела сред, а волновые поля рисунков 5 и 6 в предположении двух видов возможных шероховатостей, а именно, для рисунка 5 выбиралась шероховатость со следующими средне-статистическими значениями: $a=0.005(16.7\text{м})$, $d=0.04(130\text{м})$, $d1 = 0.028(94\text{м})$ (В скобках указаны их реальные значения). Для рисунка 6 эти параметры были следующими: $a=0.001(3.3\text{м})$, $d=0.04(130\text{м})$, $d1 = 0.056(188\text{м})$. Для рисунка 7 выбирался средне-статистический случай, характеризуемый, так называемой, ребристой поверхностью раздела с параметрами: $a=0.005(16.7\text{м})$, $d=0.01(35\text{м})$, $d1=0.112(376\text{м})$. Использование этих параметров диктовалось выбором соответствующего случая, определяемого формулами (22), (23) и (25).

Цитированная литература

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1973, С. 108.
2. Лысанов Ю. П. Акустич. ж., 1969. Т.15, №3, С. 393.
3. M. S. Howe Proc. Roy. Soc. Lond., A337, 413, 1974.
4. F. R. Rollins Mat. Eval., 24, 683, 1966.
5. Ержанов Ж.С, Айталиев Ш.М, Алексеева Л.А Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, Наука, 1989. С. 101.
6. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский Методы квантовой теории поля в статистической физике. 1962. С. 421.
7. Е. И. Уразаков, Л. А. Фальковский ЖЭТФ, 63, 2297, 1972.

Поступила в редакцию 17.09.2007г.

ХРОНИКА

ГАЛИНА ИРЖАНОВНА БИЖАНОВА



Исполнилось 60 лет Галине Иржановне Бижановой – первой женщине в Казахстане, получившей ученую степень доктора наук и звание профессора по математике.

Г.И.Бижанова родилась 30 сентября 1947 г. в г. Алма – Ате в семье хирурга Иржана Бримжаровича Бижанова и инженера – металлурга Гульзады Идрисовны Купербаевой. В 1948 г. она вместе с родителями переезжает в г. Лениногорск (г.Риддер) Восточно – Казахстанской области, там проходят ее детские, школьные годы. В 1955 г. Г.И.Бижанова идет в первый класс средней школы № 8 им.С.М.Кирова. Занимается спортом, заканчивает музыкальную школу по классу фортепиано.

В 1966 г. по окончании школы № 8 с золотой медалью Г.И.Бижанова поступает в Казахский государственный университет им. С.М.Кирова на математическое отделение механико – математического факультета, специализируется на кафедре уравнений математической физики. Дипломную работу она выполняет под руководством С.Н. Харина. В 1971 г. заканчивает с отличием университет, получает специальность математика. Работает в Казахском политехническом институте им.В.И.Ленина.

В 1974 г. Г.И.Бижанова переходит в Институт математики и механики Академии наук КазССР (ИММ АН КазССР), в лабораторию уравнений математической физики, заведующим которой был член–корр. АН КазССР Е.И. Ким. С 1973 по 1977 г.г. обучается в заочной аспирантуре КазГУ им.С.М. Кирова, в 1982 г. защищает в ИММ АН КазССР кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02 – дифференциальные и интегральные уравнения на тему "Исследование второй граничной задачи Стефана с непостоянной температурой на свободной границе", научный руководитель Е.И.Ким, оппоненты: акад. АН УкрССР И.И.Данилюк, проф. К.Ж.Наурызбаев, ведущая организация Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, кафедра дифференциальных уравнений. В 1986 г. получает ученое звание старшего научного сотрудника.

Г.И.Бижанова участвует в общественной жизни института. Является ученым секретарем Городского научного семинара по уравнениям математической физики, руководитель член–корр.АН КазССР Е.И.Ким; Методологического семинара высшего звена, руководитель акад. АН КазССР О. А. Жаутыков.

В 1989 – 1990 г.г. и 1993 – 1994 г.г. проходит научную стажировку под руководством проф. В.А.Солонникова в Санкт – Петербургском отделении Математического института им.В.А. Стеклова РАН, в лаборатории математической физики, заведующей которой была акад. РАН О.А. Ладыженская. В 1994 г. Г.И.Бижанова защищает в Институте математики НАН РК диссертацию на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения на тему "Многомерные задачи Стефана

и Флорина в весовых гильдеровских пространствах функций", научный консультант проф. В.А.Солонников, оппоненты: акад.НАН Киргизии, член-корр. РАН М.И.Иманалиев, член-корр. РАН П.И.Плотников, доктор физ.-мат. наук, проф. Ш.С.Смагулов, ведущая организация Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра математической физики. В 1997г. получает ученое звание профессора математики.

В Институте математики Г.И.Бижанова занимает должности от инженера до главного научного сотрудника. Работает преподавателем математики в КазПТИ им.В.И.Ленина, КазГУ им.аль-Фараби по совместительству.

В 1998 г. Г.И.Бижанова переходит на работу в Алматинский государственный университет им.Абая на должность заведующей кафедрой математического анализа. Она читает лекции по основным курсам: математический анализ, уравнения с частными производными, функциональный анализ, теория функций действительной переменной студентам – математикам и краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений, избранные главы анализа, – магистрантам, а также различные специальные курсы магистрантам. Вместе с сотрудниками кафедры составляет рабочие программы по всем основным и специальным курсам для студентов – математиков, студентов отделения информатики и магистрантов; семестровые задания для студентов; тестовые задания для студентов факультета; выпускает по шести основным дисциплинам кафедры типовые программы, которые утверждаются в Министерстве образования и науки РК; руководит научным семинаром по уравнениям с частными производными; привлекает к работе на кафедре ведущих математиков Казахстана.

Продолжая заниматься научной работой, Г.И.Бижанова открывает научно – исследовательскую тему Программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки РК по нелинейным краевым задачам в Институте математики МОН РК и в 2003 г. возвращается в институт на должность главного научного сотрудника, а с 2005 г. назначается заведующей лабораторией функционального анализа, где работает по настоящее время.

Г.И.Бижанова занимается исследованием линейных и нелинейных краевых задач для параболических и эллиптических уравнений, в частности, нелинейных задач со свободными (неизвестными) границами.

Ею изучены для одномерных параболических уравнений нерегулярные нелинейные двухфазные задачи Стефана в вырождающихся в начальный момент времени областях, с рассогласованием начальных и краевых данных локально по времени, исследованы стабилизация и асимптотическое поведение решений для больших и малых времен. Доказаны существование, единственность и получены оценки решений задач Стефана, Флорина, Веригина в весовых и классических пространствах Гильдера для малых времен, построены автомодельные решения задач со свободными границами. Для многомерных задач в весовых и классических пространствах Гильдера установлены существование, единственность и оценки решений задач с производной по времени в граничном условии и условии сопряжения для параболических уравнений, нелинейных многомерных задач со свободными границами Стефана, Флорина, Веригина, нерегулярной задачи Г.Аманна для системы уравнений параболо-эллиптической структуры. Изучены задачи со свободными границами для систем параболических уравнений и задачи с малым параметром. Исследованы свойства введенных В.С.Белоносовым весовых пространств Гильдера с весом в виде степени времени t . Построены точные решения краевых модельных задач для эллиптических уравнений в неограниченных областях, установлено асимптотическое поведение решений на бесконечности.

Г.И.Бижанова имеет более 80 научных работ. Результаты исследований публикуются ею в журналах "Алгебра и анализ", "Записки научных семинаров ЛОМИ", "Advances in Differential Equations", Доклады НАН РК, "Известия НАН РК", "Математический журнал" и др. Выступает с докладами на конференциях, в частности, на таких, как Международный конгресс математиков, 1994 г., г. Цюрих, Швейцария; Европейский конгресс математиков, 1996, г. Буда-

пешт, Венгрия; Конференция им.И.Г.Петровского, 1994, 2004, МГУ, г. Москва; Международные конференции "Nonlinear Partial Differential Equations", 1983, 1985, 1987, 1989, 1994, 2003, 2007, Украина; "Directions on partial differential equations", 2003, Ferrara, Italy; "Differential and Functional-Differential Equations", 2005, МИ РАН, г. Москва; "Parabolic and Navie-Stocks equations", 2006, Banach Center, Bedlevo, Poland; "Nonlinear systems: modeling, simulation and application", 2006, Nanded, India; "Equazioni alle derivate parziali, dinamica dei fluidi e leggi di conservazione", 2007, Pisa, Italy и др.

Г.И.Бижанова имеет научные гранты Сороса, INTAS, Научной программы НАТО. Проводит совместные научные исследования в Институте прикладной математики и механики АН Украины в 1980–е годы, г.Донецк; в Цюрихском университете в 1997 г., 1999 г., Швейцария; в университете г.Феррары в 2007 г., Италия; в Математическом институте им.В.А. Стеклова РАН с 1989 г., г.Санкт–Петербург, Россия; в Лиссабонском университете с 1999 г., г.Лиссабон, Португалия. Ею подготовлены 3 кандидата физико–математических наук, работает с аспирантами и научными работниками, руководит научным семинаром по нелинейному анализу.

Г.И.Бижанова была членом Экспертного совета по математике и информатике ВАК РК (1995–1999 г.г.), членом Секции физико–математических наук Комиссии по Государственным премиям Республики Казахстан (1999 г., 2001 г.). Является членом Диссертационного совета по защите докторских диссертаций в Институте математики МОН РК, членом редколлегии "Математического журнала", рецензентом американского математического журнала "Mathematical Reviews", членом Оргкомитетов конференций. Рецензирует научные проекты, отчеты, докторские и кандидатские диссертации, статьи.

В работе Галину Иржановну отличают преданность математике, трудолюбие, принципиальность, честность, доброжелательность. Она пользуется большим авторитетом и уважением в коллективе института, среди коллег.

Друзья и коллеги искренне поздравляют Галину Иржановну с юбилеем и от всей души желают ей дальнейших успехов в работе, творческого вдохновения, крепкого здоровья, счастья, благополучия.

Л.А.Алексеева, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев, М.Т.Дженалиев,
Д.С.Джумабаев, А.А.Женсыкбаев, И.Т.Пак, М.И.Рахимбердиев

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Г.И.БИЖАНОВОЙ

1. Об одном преобразовании функции Грина // В кн. *Теоретические и прикладные задачи математики и механики*. Алма-ата, 1979, вып.2. С. 56 – 62.
2. Об одной задаче сопряжения для уравнения теплопроводности в шаровой области // В кн. *Теоретические и прикладные задачи математики и механики*. Алма-ата, 1979, вып.2. С. 63 – 69.
3. Стабилизация решения второй граничной задачи Стефана // *Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат.* 1980, №5. С. 12 – 17.
4. Исследование второй граничной задачи Стефана при малых значениях времени // *Вестник АН КазССР*. 1981, №6. С. 76 – 86 (соавтор Е.И.Ким).
5. Об одном классе интегродифференциальных уравнений // *Вестник АН КазССР*. 1982, №5. С. 38 – 48 (соавтор Е.И.Ким).
6. Исследование второй граничной задачи Стефана с непостоянной температурой на свободной границе. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. Алма-Ата, 1982, 16 С.
7. Исследование разрешимости второй граничной задачи Стефана с тепловыми источниками // В кн. *Краевые задаца для дифференциальных уравнений и их приложения в механике и технике*. Алма-Ата, 1983. С.67 – 73 (соавтор Е.И.Ким).

8. Об асимптотическом решении задачи Стефана при малых значениях времени // *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.* 1984, №5. С.40 – 43 (соавторы Е.И.Ким, С.Н.Харин).
9. Непостоянная температура плавления в задаче Стефана // В кн. *Уравнения с разрывными коэффициентами.* Алма-Ата, 1985. С.12 – 18.
10. Заседания городского научного семинара по уравнениям математической физики // *Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.* 1987, №3; 1988, №3; 1989, №3.
11. Об одной нерегулярной задаче Стефана // *Доклады АН УССР. Сер.А.* 1987, №9. С.3 – 7 (соавтор И.И.Данилюк).
12. Об асимптотическом поведении классических решений одномерных однофазных задач Стефана // *Математическая физика и нелинейная механика.* 1989, №12. С.38 – 42.
13. Решение одной n -мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в гильбертовом пространстве функций // *Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат.* 1991, №5. С.21 – 27.
14. Оценки решения n -мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гильбертовских нормах. I, II // *Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат.* 1992, №5. С.7 – 13; 1993, №1. С.11-17.
15. О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии // *Алгебра и анализ.* Т.5, 1993, №1. С. 109-142 (English transl. *St-Petersburg Math.J.* V.5, 1994, №1. P. 97 – 124) (соавтор В.А.Солонников).
16. Об одной задаче для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в условии сопряжения в весовом гильбертовском пространстве функций // *Доклады НАН РК.* 1993, №3. С. 14 – 19.
17. Решение в весовом пространстве Гельдера начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в условии сопряжения // *Алгебра и анализ.* 1994, Т.6, №1. С. 62-92 (English transl. *St-Petersburg Math.J.* V.6, 1995, №1. P. 51 – 75).
18. Исследование разрешимости в весовом гильбертовском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка // *Записки научных семинаров ЛОМИ,* 1994, Т.213. С. 14 – 47 (English transl. *J. Math.Sci.* 84 (1), 1997. P. 823 – 844).
19. Многомерные задачи Стефана и Флорина в весовых гильбертовских пространствах функций. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико – математических наук. Алма-Ата, 1994. 29 С.
20. О некоторых модельных задачах для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в краевых условиях. // *Алгебра и анализ.* Т.6, 1994, №6. С. 30 – 50 (English transl. *St-Petersburg Math.J.* V.6, 1995, №6. P. 1151 – 1166) (соавтор В.А.Солонников).
21. О некоторых свойствах функций из весового пространства Гельдера // *Известия НАН РК. Сер. физ.-мат.* 1994, №3. С. 9 – 16.
22. О классической разрешимости многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка // *Доклады НАН РК.* 1994, №5. С. 21 – 30.
23. Решение в весовом гильбертовском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области // *Алгебра и анализ.* Т.7, 1995, №2. С. 46 – 76 (English transl. *St-Petersburg Math.J.* V.7, 1996, №2, P. 217 – 241).
24. Уравнения математической физики. // В кн. *Институт теоретической и прикладной математики – 30 лет.* Алматы, 1995. С. 68-77 (соавтор С.Н.Харин).
25. О разрешимости многомерных однофазных задач со свободными границами. // *Известия МН-АН РК. Сер.физ.-мат.* 1996, №5. С. 28 – 39.
26. О классической разрешимости одномерных однофазных задач Флорина, Маскета-Веригина и Стефана // *Записки научных семинаров ПОМИ.* 1997, т.243. С. 30 – 60 (English transl. *J. Math.Sci.*)
27. Применение интегральных преобразований к решению краевых задач для параболических уравнений // *Методическое пособие.* Алматы, 1997. 51 С.
28. Оценки тепловых потенциалов в пространствах Соболева-Слободецкого // *Методическое пособие.* Алматы, 1997. 51 С.
29. О решении задачи Коши для одного класса параболических уравнений // В Межвуз. сб. научн.трудов *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.* Алматы, АГУ им.Абая, 1998. С. 14 – 18.
30. Об одной задаче со свободными границами // *Вестник КазГУ. Серия мат., мех., инф.* 1999, №2(16). С. 54 – 64 (соавтор М.А.Сахауева).

31. Об одной задаче сопряжения для эллиптических уравнений // *Известия МОН РК. Сер. физ.-мат.* 2000, №1. С. 25 – 36.
32. О задачах со свободными границами для параболических уравнений // *Алгебра и анализ.* 2000, т. 12, №6. С. 3 – 45 (English transl. *St-Petersburg Math.J.* 2001, v.12, №6. P. 949 – 981) (соавтор В.А.Солонников).
33. О свободных границах в задачах для параболических уравнений // *Вестник Кырг.ГНУ. Естеств.-техн.науки.* 2001, №6. С. 41 – 43.
34. Об одной многомерной задаче фильтрации со свободными границами // *Известия МОН РК. Сер. физ.-мат..* 2001, № 1. С. 3 – 18 (соавтор М.А.Сахауева).
35. Е.И.Ким // *Математический журнал.* №2, 2001. С. 113; *Известия МОН РК. Серия физ.-мат.* 2002, №1. С. 93 – 95 (соавтор У.М.Султангазин).
36. О задачах со свободными границами, учитывающих эффект переохлаждения // *Математический журнал.* 2002, Т.2, №3. С. 26 – 35 (соавтор А.С. Сарсекеева).
37. О разрешимости задачи Г.Аманна в пространствах Гельдера. *Записки научн.семина. ПОМИ (ЛОМИ).* 2003, Т. 295. С. 18 – 56 (English transl. *J. Math.Sci.* 2005, V.127, №2. P. 1828 – 1848).
38. Об асимптотических решениях краевых задач для эллиптических уравнений в полупространстве, I, II // *Математический журнал.* 2004, Т.4, №1. С. 21 – 32; 2004, Т.4, №2. С. 35 – 46.
39. On the solvability of free boundary problems with supercooling // *Far East Journal of Applied Mathematics.* 2004, V.15, №2. P. 223 – 243 (соавтор A.S.Sarsekeeva).
40. On the solvability of the nonlinear problem for elliptic-parabolic system of the equations in Holder spaces // *Нелинейные граничные задачи.* 2004, №14. С. 16 – 25.
41. О точных решениях одномерных двухфазных задач со свободными границами для параболических уравнений // *Записки науч. семинаров ПОМИ (ЛОМИ).* 2004, Т.318. С. 42 – 59 (English transl. *J. Math.Sci.* 2006, V. 136, №2. P. 3672 – 3681).
42. Uniform estimates of the solution to the linear two-phase Stefan problem with a small parameter // *Математический журнал.* 2005, №1. С. 19 – 28.
43. О задачах со свободными границами теории фильтрации // В кн. *Роль физико-математических наук в современном образовательном пространстве.* Атырау, 2005. С. 6 – 8.
44. *Институт математики-40 лет.* Алматы, 2005. 1) Институт математики сегодня. С. 48 – 54 (соавтор А.А.Женсыкбаев); 2) Уравнения математической физики. С. 160 – 169; 3) О жизненном и творческом пути профессора Е.И.Кима. С. 342 – 348.
45. Classical solutions to parabolic systems with free boundary of Stefan type // *Advances in Differential Equations.* 2005, №12. P. 1345 – 1388 (соавтор J.F.Rodrigues).
46. О развитии математики и информатики в Казахстане // *Математический журнал.* 2006, Т. 6, №1. С. 5-15; №2. С. 5 – 13 (соавторы М.З. Арсланов, Р.Г.Бияшев, М.Т.Дженалиев, В.П.Добрица, А.А.Женсыкбаев, М.И.Рахимбердиев); 2006, Т. 6, №3. С. 5 – 13. (соавторы М.Б.Айдарханов, М.З. Арсланов, Р.Г.Бияшев, М.Т.Дженалиев, В.П.Добрица, А.А.Женсыкбаев, М.И.Рахимбердиев).
47. Об одной задаче со свободной границей // В сб. *Таймановские чтения.* 2007. С. 71 – 75.
48. On the Stefan problem with a small parameter // *Banach Center Publ.* 23 P. (to appear).

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



21 августа исполнилось 60 лет академику НАН РК Александру Алипхановичу Женсыкбаеву. Он родился в 1947 году в г. Бургасе (Болгария) в семье военнослужащего. В связи с частыми переездами во время учебы он сменил семь школ в Азербайджане, России, Украине. Среднюю школу окончил с золотой медалью и в 1965г. стал студентом Днепропетровского государственного университета. В 1970г. там же поступил в аспирантуру и, досрочно завершив работу над диссертацией, успешно защитил ее в 1973 году по специальности 01.01.01 – теория функций и функциональный анализ. В диссертации были получены точные оценки приближения классов непрерывных и дифференцируемых функций интерполяционными сплайнами минимального дефекта.

С 1973г. Женсыкбаев А.А. работает ассистентом кафедры математического анализа ДГУ, а с 1974г. – старшим преподавателем и затем доцентом кафедры математического анализа Казахского государственного университета им. С.М.Кирова.

Докторскую диссертацию на тему "Экстремальные свойства моносплайнов и наилучшие квадратурные формулы" защитил в 1980г. в Математическом институте им. В.А.Стеклова АН СССР по специальности 01.01.01. – математический анализ. В ней была решена широко известная задача о наилучшей квадратурной формуле для соболевских классов функций. Методы ее решения оказались применимыми для решения многих других задач в теории интерполяции, теории поперечников, теории квадратур и получили дальнейшее развитие в работах многих математиков.

Ученое звание профессора получил в 1982г. С 1981г. по 2000г. заведовал кафедрой математического анализа КазГУ им. аль-Фараби.

С 1994г. по 1997г. Женсыкбаев А.А. работает заместителем по науке начальника Алматинского Высшего технического училища, где организует адъюнктуру по подготовке специалистов высшей квалификации. С 1998г. по 2000г. – председатель ВАК РК. С 2000г. по 2007г. – директор Института математики.

Женсыкбаев А.А. – признанный в мире специалист в области теории функций и функционального анализа. В 1995г. избран член-корреспондентом НАН РК, а в 2003г. – академиком НАН РК. С 1999г. – действительный член Международной Академии Наук Высшей Школы.

После завершения исследований, составивших предмет докторской диссертации, Женсыкбаев А.А. продолжает научную работу и решает известные задачи о нулях моносплайнов произвольной кратности и о наилучших гауссовых квадратурных формулах для слабых чебышевских систем. В дальнейшем его интересы переключаются в область теории функций многих переменных, где он получил ряд новых весомых результатов. В частности, им были разработаны новые оптимальные методы восстановления операторов на классах функций многих переменных, новые многомерные интерполяционные аппараты.

Женсыкбаев А.А. имеет около 90 научных публикаций, 3 монографии и 2 учебных пособия, изданных в Казахстане и России. Под его руководством защищено 10 кандидатских диссертаций.

С 1983г. по 1992г. А.А. Женсыкбаев был членом специализированного совета по защите докторских диссертаций при Институте Математики СО АН СССР.

Он также был экспертом ИНТАС (Брюссель 1994г., Алматы 1996г.) и научным руководителем международной программы ИНТАС, объединявших ученых Германии, Франции, Испании, России, Казахстана.

Он в разные годы по приглашениям читал лекции в вузах США, Франции, Испании, Польши, Пакистана.

Женсыкбаев А.А. является главным редактором "Математического журнала" и членом редколлегии международного журнала "East Journal on Approximation", издаваемого в Болгарии, членом Американского математического общества.

Научные труды Женсыкбаева А.А. опубликованы в ведущих международных журналах, таких как "Доклады АН СССР", "Доклады РАН", "Успехи математических наук", "Известия АН СССР", "Analysis Mathematica", "Journal of Approximation", "East J. on Approximation" и др. Он выступал с научными докладами на математических конгрессах (Москва, Варшава, Цюрих) и многих международных конференциях (Казахстан, Россия, США, Франция, Испания, Югославия, Польша, Венгрия, Болгария, Индия и др.).

За научные достижения в 1978г. Женсыкбаев А.А. удостоен премии Ленинского Комсомола в области науки и техники (СССР), в 1984г. награжден орденом "Знак Почета" (СССР), в 1999г. стал лауреатом международной премии им. Хорезми (Иран). В 2000г. избран почетным членом американской ассоциации научных советников. В 2001г. награжден юбилейной медалью, посвященной 10-летию независимости Республики Казахстан.

Редакционная коллегия

ИЗБРАННЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ЖЕНСЫКБАЕВА А.А.

1. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами n -го порядка, Математические заметки, 13, №2, 1973, С. 217 – 228.
2. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению, Математические заметки, 15, 1974, С. 569 – 575.
3. Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций интерполяционными сплайнами по равномерному разбиению, Математические заметки, 15, №6, 1974, С. 955 – 966.
4. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^r L_p$, Доклады АН СССР, 227, №2, 1976, С. 277 – 279.
5. Best quadrature formula for the class $W^r L_2$, Analysis Mathematica, 3, №1, 1977, С. 83 – 93.

6. О наилучших квадратурных формулах для некоторых функций, Доклады АН СССР, 236, №3, 1977, С. 531 – 534.
7. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических функций, Известия АН СССР, Серия матем., 41, №5, 1977, С. 1110 – 1124.
8. Характеристические свойства наилучших квадратурных формул, Сибирский математический журнал, 20, №1, 1979, С. 49 – 68.
9. Моносплайны, наименее уклоняющиеся от нуля, и наилучшие квадратурные формулы, Доклады АН СССР, 249, №2, 1979, С. 278 – 281.
10. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы, Успехи математ. наук, 36, №4, (220), 1981, С.107 – 159.
11. Optimal recovery methods for the integral on classes of differentiable functions, Analysis Mathematica, 7, 1981, С. 303 – 318.
12. Экстремальные свойства моносплайнов и наилучшие квадратурные формулы, Математические заметки, 31, №2, 1982, С. 281 – 298.
13. Об экстремальности моносплайнов минимального дефекта, Известия АН СССР, Серия матем., 46, №6, 1982, С. 1175 – 1198.
14. Extremal properties of certain sets of splines and their applications, Constructive theory of functions, Proc. inter. conf., Varna, Sofia, 1984, С. 917 – 927.
15. Monosplines with nonnegative coefficients, Proc. University of Oregon, Eugene, 1986, С. 1 – 18.
16. The fundamental theorem of algebra for monosplines with multiple nodes. J.Approx.Theory 56, №2, 1989, С. 121 – 133.
17. Сплайн-аппроксимация и оптимальное восстановление операторов, Математический сборник, Т. 184, №12, 1993, С.3 – 22.
18. Информационно-ядерные сплайны в задачах восстановления, Доклады РАН, 328, №3, 1993, С. 285 – 288.
19. Нелинейная интерполяция и минимизация нормы, Математические заметки, 58, №4, 1995, С. 512 – 524.
20. Recovery of operators on classes of multivariate functions. East J. on Approx. 1, №2, 1995, С. 197 – 220.
21. Linear recovery methods of operators, Analysis Mathematica, v. 23, №2, 1997, С. 149 – 157.
22. Optimal recovery methods of operators and approximations multivariate functions. Inter. cong. on analysis, application. computers ISAAC. Newark, DE, USA, May, 1997, 147
23. Approximation methods of multivariate functions. Internat. conf. on Func. Analysis and Approximation, Moscow, 1998, 78.
24. Производные чебышевских систем и интерполяция, Математический журнал, Т.1, №1, 2001, С. 41 – 51.
25. Interpolation and Smoothing of multivariate functions, Bulletin of Marathwada Mathematical Society, 6, 2007, С.78 – 94.

Монографии, учебные пособия

1. Сплайны в задачах восстановления, Каз.Гос.ИНТИ, Алматы, 2001, 352 сс.
2. Проблемы восстановления операторов, Regular and Chaotic Dynamics Press, Москва-Ижевск, 2003, 414 сс.
3. Теория последовательностей. Учебное пособие, Алматы, Каз.НУ, 2005, 46 сс.
4. Дифференциальные формы на многообразиях, Каз.НУ, Алматы, 2003, 114 сс.
5. Дифференциальные формы и многообразия, Regular and Chaotic Dynamics Press, Москва-Ижевск, 2007, 136 сс.

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Сакабекову Аужану, известному специалисту в области теории переноса излучения, уравнения Больцмана и его приложений. Он родился 4 июля 1947 года в с. Шалкоде Нарынкольского района Алматинской области.

В 1965 году, окончив с золотой медалью среднюю школу, поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета. Закончил КазГУ по специальности "математика" в 1970 году.

В том же году был направлен в Карагандинский политехнический институт, где начал свою трудовую деятельность ассистентом кафедры "Высшая математика". Откуда в 1971 году был призван в вооруженные силы СССР.

В 1971 – 73 годах служил в рядах Советской Армии командиром зенитно-артиллерийского взвода зенитной ракетно - артиллерийской батареи 25 мотострелкового полка 11 мотострелковой дивизии Забайкальского военного округа.

В 1973 – 78 годах работал преподавателем кафедры высшей математика Казахского политехнического института.

Научные интересы А. Сакабекова формировались под влиянием крупного ученого, д.ф.-м.н., академика АН РК У.М. Султангазина.

В 1978 – 81 годах Сакабеков проходил очную аспирантуру на кафедре вычислительной математики КазГУ под руководством д.ф.-м.н., академика АН РК У. М. Султангазина, являющегося основоположником теории переноса излучения в Казахстане. В трудах У. М. Султангазина получены основополагающие результаты в решении смешанной задачи для нестационарного уравнения переноса излучения методом сферических гармоник и в развитии теории уравнения Больцмана в дискретных скоростях. Исследования А. Сакабекова в области кинетической теории переноса легли в основу кандидатской диссертации "Краевые задачи для односкоростного стационарного уравнения переноса излучения в P_{2N+1} - приближении" успешно защищенной им в 1982 году по специальности 01.01.02. - дифференциальные уравнения и математическая физика.

А. Сакабекову удалось создать теорию краевых задач для стационарных систем уравнений метода сферических гармоник в двумерной области.

При этом его научные интересы пересекались с теорией эллиптических и В-эллиптических краевых задач в области с негладкой границей и разрывными коэффициентами. Исследованы дифференциальные свойства решений односкоростного стационарного уравнения переноса излучения в P^{2N+1} - приближении в двумерной области с негладкой границей и негладкими коэффициентами. В окрестностях угловых точек, точках пересечения линий разрывов, а также в точках стыка линии разрыва и границы получены разложения решения на особенную и гладкую части [4 – 8]. Кроме того, дано обоснование вариационного принципа краевой задачи для системы уравнений метода сферических гармоник при общих предположениях относительно индикатрисы рассеяния и источника излучения [1 – 3, 6, 8].

Он установил тесные научные контакты с профессорами: В.А. Кондратьевым (МГУ им. М. В. Ломоносова), И. А. Киприяновым (Воронежский государственный университет), Т. А. Гермогеновой (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, г. Москва).

В 1988 – 1989 г. А.Сакабеков переведен на должность старшего научного сотрудника и прикомандирован в Математический институт им. В.А.Стеклова в отдел академика АН СССР В.С.Владимирова.

В 1993 г. он защитил докторскую диссертацию на тему "Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана" по специальности 01.01.03 – математическая физика. В названной работе была построена теория системы моментных уравнений Больцмана. Моментные уравнения Больцмана – промежуточные между больцмановским (кинетическая теория) и гидродинамическими уровнями описания состояния разряженного газа и образуют ранее неизученный класс нелинейных уравнений в частных производных. Полученные результаты были высоко оценены известными учеными в области теории уравнения Больцмана: У. М. Султангазиным, Рональд ди Перна (США), Пьер Лионсом (Франция), Kawashima S. (Япония), Бобылевым А. В., Веденяпиным А. В. (Россия).

Такие результаты, как

- получение системы моментных уравнений Больцмана [13];
- приведение постановки как внешних, так и внутренних граничных условий для моментных уравнений Больцмана [9, 12, 14, 18, 19];
- изучение вопросов корректности полученных начально – краевых и краевых задач для системы моментных уравнений Больцмана [10 – 12];
- доказательство сходимости решения начально - краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана к решению соответствующей задачи для самого нелинейного уравнения Больцмана [16, 22, 24, 27];
- доказательство существования единственного глобального по времени решения начально - краевой задачи для линеаризованного уравнения Больцмана и локального по времени решения начально - краевой задачи для нелинейного уравнения Больцмана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате [15, 17, 20, 21, 23, 26];
- доказательство существования глобального по времени решения начально - краевой задачи для нелинейного уравнения Больцмана и одномерной дискретной модели уравнения Больцмана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых по пространственным и скоростным переменным, исходя из законов сохранения массы, импульса, энергии, а также Н - теоремы Больцмана [21, 25, 28, 29, 32, 35, 36];
- доказательство выполнения аналогов закона сохранения массы и Н - теоремы Больцмана для одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана [33, 34, 35, 37] являются весомым вкладом в теорию и приложения уравнения Больцмана.

Полученные результаты были опубликованы в ДАН СССР, Математическом сборнике, Сибирском математическом журнале, журнале "Дифференциальные уравнения" Известия АН РК, Доклады АН РК, Вестниках Каз.НТУ, Каз. ГУ, КБТУ, Математическом журнале, а также в научных журналах США, Германии и доложены на Международных симпозиумах и

конференциях. В 1993 году А.Сакабеков стал обладателем гранта фонда Сороса.

Кроме того, по результатам научных исследований опубликована монография "Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана" выпущенная в Алматы издательством "Гылым" в 2002 году объемом 276 стр.

Плодотворную научную работу профессор А.Сакабеков всегда сочетал с педагогической работой. В 1982 – 87 годах он работал старшим преподавателем, доцентом кафедры "Высшая математика" Казахского политехнического института. Читал и проводил практические занятия по курсу высшей математики студентам горного факультета и факультета автоматике и систем управления. После успешной защиты докторской диссертации вновь вернулся в Казахский политехнический институт, где в 1990 – 1994 годах работал в должности доцента кафедры высшей математики, а затем в 1995 году избран заведующим вновь организованной кафедры "Прикладная математика". Большое внимание профессор А. Сакабеков уделял методике преподавания в техническом вузе. Принимал непосредственное участие в разработке типовых и рабочих учебных программ по курсу высшей математики для различных специальностей Казахского национального технического университета им. К. И. Сатпаева. По инициативе Сакабекова А. впервые в Казахстане в Казахском национальном университете им. К. И. Сатпаева кафедра стала готовить специалистов по специальности "Междисциплинарная прикладная математика". Были составлены учебные планы специальности, типовые и рабочие программы дисциплины. А. Сакабеков осуществлял руководство по созданию государственного стандарта "Междисциплинарная прикладная математика".

С января 2002 года Сакабеков работает в Казахстанско-Британском техническом университете в должностях проректора по учебной работе, руководителя учебно-методической службы, заведующего кафедрой высшей и прикладной математики.

А.Сакабеков внес весомый вклад в создание и становление молодого технического вуза страны. При непосредственном его участии были открыты факультеты энергетики, нефти и газа, информационных технологий и финансово-экономический факультет. Проведен тщательный отбор профессорско-преподавательского состава университета, организованы междисциплинарные научные семинары и курсы повышения квалификации преподавателей.

По инициативе А. Сакабекова в КБТУ внедрена методика опорных конспектов. Особое внимание он уделяет совершенствованию учебного процесса, модернизации учебных планов специальностей и учебных программ дисциплин.

Профессор Сакабеков А. пользуется авторитетом среди студенческой молодежи, о чем свидетельствует присуждение диплома независимой ассоциации вузов РК "Альянс студентов Казахстана" в 2006 году по номинации "Әділ ұстаз".

Об авторитете А. Сакабекова, как педагога, свидетельствует и тот факт, что его неоднократно приглашали председателем ГЭК по математике на механико-математический факультет КазНУ им. Аль Фараби. В 2007 году А. Сакабеков назван Министерством образования и науки Казахстана "Лучшим преподавателем года".

В последние годы научная деятельность А. Сакабекова тесно связана с Институтом математики, где в 1996 – 2001 годах он заведовал лабораторией "Математические проблемы теории переноса излучения" и Институтом космических исследований АН РК.

А. Сакабеков осуществляет подготовку научных и научно-педагогических кадров для Республики Казахстан. Под руководством А. Сакабекова защищены несколько кандидатских диссертаций. В настоящее время он ведет руководство научными работами докторантов, аспирантов и соискателей, является членом диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций. Многие годы А. Сакабеков являлся членом физико-математического отделения АН РК, членом экспертного совета по математике ВАК РК, членом экспертной комиссии по отбору научных работ, представленных на соискание государственной премии РК.

А. Сакабекову присущи порядочность, скромность, ответственность, компетентность и ува-

жительное отношение к людям. Его организаторские способности вносят весомый вклад в создание атмосферы деловитости и творчества, формирование целостной личности и повышение качества обучения будущих специалистов.

Друзья и коллеги искренне поздравляют Аужана Сакабековича с замечательным юбилеем и от всей души желают ему успехов в работе, творческого вдохновения, крепкого здоровья, счастья и благополучия.

Дженалиев М.Т., Джумабаев Д.С., Кабанихин С.И.,
Кальменов Т.Ш., Мынбаев К.Т., Рахимбердиев М.И., Харин С.Н..

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ДОКТОРА ФИЗ.-МАТ. НАУК, ПРОФЕССОРА
САКАБЕКОВА А.**

1. Обоснование вариационного принципа для системы уравнений МСГ в x -у-геометрии // Известия АН Каз. ССР Серия физ.-мат. 1980. № 5. С. 78 – 81.
2. К обоснованию вариационного разностного метода для решения системы уравнений метода сферических гармоник // Вариационные разностные методы в математической физике, г. Новосибирск, 1981 (совм. с У.М. Султангазиным). С. 113 – 124.
3. Вариационные принципы для системы уравнений МСГ в P^{2N+1} приближений (RZ - геомет.) // Известия АН Каз. ССР, Серия физ.-мат. 1981. № 5. С. 51 – 56.
4. Краевая задача для односкоростного уравнения переноса в P^{2N+1} - приближении (RZ - геометрия) // Известия АН Каз.ССР, Серия физ.-мат. 1982. № 1. С. 39 – 45.
5. О дифференциальных свойствах решения краевой задачи для системы уравнений МСГ в P^{2N+1} -приближений Известия АН Каз.ССР, Серия физ.-мат. 1982. № 3. С. 30 – 35.
6. Краевые задачи для стационарного односкоростного уравнения переноса излучения в произвольном приближении Автореферат канд. дисс. Алма-Ата, 1982.
7. Особенности слабых решений диффузионного приближения кинетического уравнения замедления в x -у-геометрии // Известия АН Каз.ССР, Серия физ.-мат. 1984. № 3 (совм. с У.М. Султангазиным, Я.М. Краснов). С. 49 – 53.
8. Математические проблемы кинетической теории переноса (монография) // "Наука"Каз.ССР, Алма-Ата, 1986 г. (совм. с У.М. Султангазиным и др.).
9. Постановка граничных условий для системы моментных уравнения Больцмана в двумерной области // Известия АН Каз.ССР, Серия физ.-мат. 1989. № 3. С. 36 – 40.
10. О разрешимости системы моментных уравнений Больцмана в двумерной области // Известия АН Каз. ССР, Серия физ.-мат. 1989. № 5. С. 27 – 30.
11. Разрешимость системы моментных уравнений Больцмана в первом приближении. // Доклады АН СССР. 1989. Т. 307, № 5. С. 1096 – 1099.

12. Краевые задачи для стационарной системы моментных уравнений Больцмана // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309, № 4. С. 860 – 863
13. Вывод системы моментных уравнений Больцмана // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. 1990. № 3, 1670-В 90 Деп. В ВИНТИ
14. О граничных условиях для системы моментных уравнений Больцмана // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. 1990. № 3. С. 30 – 35.
15. Начальная задача для системы моментных уравнений Больцмана // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. 1991. № 1. С. 57 – 61.
16. Моментный метод для нелинейного уравнения Больцмана // Доклады АН СССР. 1991. Т. 316, № 4. С. 890 – 893.
17. Моментный метод для линеаризованного уравнения Больцмана // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32, № 3. С. 132 – 140.
18. Диссипативность внешних и внутренних граничных условий для нестационарной системы моментных уравнений Больцмана // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. 1991. № 3. С. 49 – 53.
19. Выбор граничных условий для моментных уравнений Больцмана // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. 1991. № 5. С. 52 – 56.
20. Начально-краевая задача для одномерной системы моментных уравнений Больцмана в нечетном приближении // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32, № 5. С. 187 – 192
21. О существовании глобального решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана // Доклады АН СССР. 1991. Т. 321, № 1. С. 75 – 78.
22. Слабая сходимость решений системы моментных уравнений Больцмана // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33, № 1. С. 105 – 114
23. Смешанная задача для одномерной системы моментных уравнений Больцмана в нечетном приближении // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 892 – 900.
24. Начально-краевая задача для одномерной системы моментных уравнений Больцмана в произвольном приближении // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 9. С. 67 – 88
25. О существовании глобального решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 1. С. 145 – 156.
26. Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана. // Автореферат докторской диссертации. Алматы. 1993.
27. Initial-boundary value problems for the Boltzmann system of moment equations in an arbitrary approximation American Mathematical Society, 1994, Russian, Acad. Sci. Sb. Math. Vol. 77(1994), № 1. P. 57 – 76.
28. On the existence of global solution of the initial -boundary value problem for Boltzmann equation Sibir. mathem. journ, 1994, № 3, P. 31 – 44.
29. The moment method for nonlinear Boltzmann equation American Math. Society, 1994, Russian, Report Acad. Sci. Vol. 61 (1994), P. 71 – 76.

-
30. Начальная задача для дискретной модели уравнения Больцмана // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. 1995. № 1. С. 41 – 46(совм. с У.М. Султангазиным).
 31. Initial value problem for the one dimensional model of Broadwell and the discrete model of the Boltzmann equation // ДАН РК. 1997, № 5. С. 29 – 39.
 32. Начально-краевые задачи для одномерной модели Бродвелла и дискретной модели уравнения Больцмана // ДАН РК. 2000. № 3. С. 9 – 16 (совм. с У.М. Султангазиным).
 33. Начально-краевые задачи для трехмерных дискретных моделей уравнения Больцмана // Известия АН РК. Серия физ.-мат. 2001. № 5. С. 44 – 49(совм. с У.М. Султангазиным).
 34. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для неоднородной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана // Математический журнал. 2002. Т.2. № 3. С. 68 – 73.
 35. Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана (монография) Алматы, НИЦ "Гылым". 2002, С. 276.
 36. Смешанная задача для одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана во втором приближении // Математический журнал. Алматы. 2004. Т.4, № 4(14). С. 81 – 85
 37. Особенности решения начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений метода сферических гармоник в P1-приближений // Математический журнал. Алматы, 2006, Т 6, № 4(22). С. 96 – 101.

Письмо в редакцию

В тексте нашей работы "О некоторых задачах теории приближений вышедшей в Математическом журнале, Т.6, №4, С. 86 – 95, не пропечаталась команда "sgn". (По-видимому, это связано с несовершенной версией пакета Tex, используемой редакцией.) Поэтому вторая снизу формула на С. 89 должна иметь вид

$$T_{2^m}(f) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k_i \geq 0}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j + \text{sgn} k_j)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right);$$

на страницах 90 – 91 формулы под номерами (7), (9) и Теорема 3 должны быть соответственно:

$$\Lambda_m(f; x) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k_i \geq \nu_i^0}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j - 1) \text{sgn}(k_j - \nu_j^0)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right). \quad (7)$$

$$T_U(f) = \sum_{k \in U, k_i \geq \nu_i^0} \frac{1}{2^{k_1+\dots+k_n}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{i=1}^n (r_i+1) \text{sgn}(k_i - \nu_i^0)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right), \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$, $G = \{(2^{k_1-1}(2r_1 + \text{sgn}(k_1 - \nu_1^0)), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + \text{sgn}(k_n - \nu_n^0))) : k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus U, k_i \geq \nu_i^0, r \in \mathbb{Z}^n\}$, χ_G – индикаторная функция множества G , тогда

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1} |T_{2^m}(f; x) - \hat{f}(0)| = \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\chi_G(k)}{\varphi(k)} \right)^{p_1'} \right)^{\frac{p_2'}{p_1'}} \dots \right)^{\frac{1}{p_n'}}, \quad (11)$$

в частности, при $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$

$$\begin{aligned} & \sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1} |T_{2^m}(f; x) - \hat{f}(0)| = \\ & = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus U, k_i \geq \nu_i^0} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{\varphi(2^{k_1-1}(2r_1 + \text{sgn}(k_1 - \nu_1^0)), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + \text{sgn}(k_n - \nu_n^0)))} \right)^{p'} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

В тексте статьи в этих формулах и в теореме 3 было пропущено слово sgn.

С уважением, Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H35

Alexeyeva L. A., Dildabaeva I. Sh. **Generalized solution of dynamic equation of elastic medium with a curvilinear crack by plane deformation** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.5 – 15.

Generalized function method is developed for solving the problem of dynamics of elastic medium with a curvilinear crack in conditions of plane deformation, on which surfaces nonstationary jump of stresses and displacement take place. Formulas are built for displacements. Properties of kernels of integral presentations are explored. A singular integral for displacements on the crack is received.

References - 8.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H35

Алексеева Л. А., Дильдабаева И. Ш. **Жазық деформация әсер еткендегі қисық сызықты сызаты бар серпімді ортаның динамика теңдеулерінің жалпыланған шешімі.** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.5 – 15.

Жазық деформация әсер еткендегі қисық сызықты сызаты бар бетінде стационар емес кернеу мен орын ауыстыру секірмесі бар серпімді ортаның динамика есебін шешуінің жалпыланған функциялар әдісі жетілдірілген. Ортаның орын ауыстыруы үшін формулалары қарастырылды, интегралдық түрі үшін ядросы, олардың қасиеттері зерттелген. Сызаттағы орын ауыстырулары үшін шектік сингулярлы интегралды қатынастар алынды.

Библ. – 8.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45, 26B40

Bazarkhanov D. B. **Function spaces with variable mixed smoothness. II** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.16 – 27.

This article is the continuation of the article [1]. Here the proof of the theorem 1 from [1] is given as well as the imbedding theorem and the continuation theorem for the function spaces of Nikol'skii-Besov type $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ and of Lizorkin-Triebel type $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ are established.

References – 11.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45, 26B40

Базарханов Д. Б. **Айнымалы аралас тегістікті функциялар кеңістіктері. II** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.16 – 27.

Бұл мақала — [1] мақаланың жалғасы. Осында [1] мақаланың 1 теоремасының дәлелі берілген және айнымалы аралас тегістікті Никольский-Бесов текті $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ және Лизоркин-Трибель текті $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ функциялар кеңістіктері үшін еңгізу туралы және жалғастыру теоремалары дәлелденген.

Библ. – 11.

УДК: 004.056.52; 681.3.07

2000 MSC: 94A60

Gorkovenko E. V. **Multilevel control of access in corporative network of space infrastructure** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.28 – 34.

A problem of providing multilevel access to information recourses of satellite information and telecommunication system creating in the Republic of Kazakhstan are under consideration. Objects and subjects of protection are chosen and recommendations to specify the character and presentation ways of protected information are offered. Information security in corporative network of space infrastructure by realization of multilevel control of access to different theme data bases considering degrees of information secrecy and categories of users admit are formed.

References – 4.

УДК: 004.056.52; 681.3.07

2000 MSC: 94A60

Горковенко Е. В. **Ғарыштық инфрақұрылымның бірлесен желісінде көп-дәрежелі қатынауды бақылау** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.28 – 34.

Мақалада Қазақстан Республикасында құрылып жатқан спутникалық ақпараттық – телекоммуникациялық жүйедегі ақпараттық ресурстарға көпдәрежелі қолжеткізуді шектеуді қамтамасыз ету сұрақтары бойынша зерттеу материалдары баяндалады. Қорғалатын ақпараттардың көрсетілу жолдары мен ерекшелік сипаттамалары бойынша ұсыныстар келтірілген және қорғау объектілері мен субъектілерге жіктелген. Ғарыштық инфрақұрылымның бірлесен желісінде ақпараттық қауіпсіздікті тақырыптық мәліметтер қорына көпдәрежелі қатынауға бақылауды ақпараттың құпиялық дәрежесімен қолданушының ұрысат категориясын есепке ала отырып жүзеге асыру арқылы ұйымдастыру ұсынылады.

Библ. – 4.

УДК: 517.927, 517.97

2000 MSC: 34A55, 49K15

Dzhenaliev M. T., Sharipov K. S. **On optimizing-inverse problem for differential equations. I** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.35 – 40.

It are considered a solvability questions of optimizing-inverse problem for system of ordinary differential equations. It is stated a sufficient optimality condition for investigating problem.

References – 12.

УДК: 517.927, 517.97

2000 MSC: 34A55, 49K15

Жиенәлиев М. Т., Шәріпов К. С. **Дифференциалдық теңдеулердің тиімдікері есебі туралы. I** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.35 – 40.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін тиімді-кері есебінің шешілетіндігі туралы мәселелер қарастырылған. Зерттелген есеп үшін тиімділіктің жеткілікті шарты алынған.

Библ. – 12.

УДК: 517.958:530.145.6

2000 MSC: 35L20

Y e s m a k h a n o v a K . R . **Soliton solutions of (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.41 – 44.

Using a method of nonlocal $\bar{\partial}$ -problem soliton solutions of (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation are obtained.

References – 4.

УДК: 517.958:530.145.6

2000 MSC: 35L20

Е с м а х а н о в а Қ . Р . **(2+1)-өлшемді сызықты емес Шредингер теңдеуінің солитондық шешімдері** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.41 – 44.

Локалдық емес $\bar{\partial}$ -проблема әдісін пайдаланып (2+1)-өлшемді сызықты емес Шредингер теңдеуінің N -солитондық шешімдері табылды.

Библ. – 4.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A05,41A15

I v a n o v a E . N . **On solvability of Lagrange two-dimensional spline-interpolation on scattered data generated by Peano kernel** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.45 – 54.

A two-dimensional spline is built by using Peano kernel and Lagrange information. The problem of solvability of the spline-interpolation on scattered data is considered.

References – 10.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A05,41A15

И в а н о в а Е . Н . **Былыққан торда Пеано ядросыны негізінде құрылған Лагранжды екі айнымалы сплайн-интерполяциясыны шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.45 – 54.

Екі айнымалы интерполяциялық сплайн Пеано ядросымен Лагранж ақпараты кезінде құрылған былыққан тор бойынша сплайн-интерполяциясыны шешілімділігің есебі қарастырылған.

Библ. – 10.

УДК: 662.92

2000 MSC: 76F40

K a m a l o v a G . A . **Numerical modelling of two-phase flow with dynamic and thermal interactions** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P. 55 – 61.

Numerical model of turbulent of two-phase flows with dynamic and thermal interactions is proposed. Numerical results for fields of flow, solid particles and concentration of species are given.

References – 13.

УДК: 662.92

2000 MSC: 76F40

К а м а л о в а Г . А . **Динамика және жылу өзараәсерлерімен берілген екі фазалы турбулентті ағынды сандық модельдеу** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.55 – 61.

Динамика және жылу өзараәсерлерімен берілген екі фазалы ортада турбулентті ағынды сандық модельдеу ұсынылады. Газ фазасының процессін модельдеу үшін $k-\varepsilon$ турбуленттік модельмен туйықталған Рейнольдс бойынша орташаландырылған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі

пайдаланылады. Газ фазасының параметрлері Эйлер әдісі, дисперсілік фазаның параметрлері Лагранж әдісі негізінде жүзеге асырылады. Ағыс өрісі, қатты түйіршіктердің таралуы және газ компоненттері концентрациясының сандық нәтижелері келтірілген.

Белгілеу сөздері: екі фазалы ағын, қысым, турбуленттік қабат, дыбыс жылдамдығынан төмен ағыс.

Библ. – 13.

УДК: 519.6

2000 MSC: 83A50

Kanimgazieva I. A., Sautbekov S. S. The fundamental solution of Maxwell's equation for anisotropic medium // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P. 62 – 68.

With the help of method of generalized function in vector type, have been received the analytical formulas of vectors definition for electrical and magnetic intensities provided actions of current distribution in boundless anisotropic medium. Here are diagrams of electric dipole direction.

References – 4.

УДК: 519.6

2000 MSC: 83A50

Канымгазиева И. А. Сауытбеков С. С. Анизотропиялық орталар үшін Максвелл теңдеулерінің фундаменталды шешімі // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б.62 – 68.

Жалпылама функциясының көмегімен шексіз анизотропиялық ортада таралған токтардың әсерінен болатын электромагниттік өрістердің нақты аналитикалық формулалары векторлық түрде алынған. Электр диполінің бағытталу диаграммасы көрсетілген.

Библ. – 4.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74J05

Martynov N. I. Boundary problems of elasticity theory of the non-homogeneous medium as boundary problems of generalized analytical vector // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P. 69 – 77.

The basic static boundary problems of elasticity theory of non-homogeneous anisotropic medium are reduced to boundary problems of generalized analytical vector. Prospects of such approach are discussed.

References – 11.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74J05

Мартынов Н. И. Бір текті емес ортаның шымырлылық теориясының шекаралық есептері - жалпыланған аналитикалық вектордың шекаралық есебі ретінде // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б. 69 – 77.

Бір текті емес анизотропты ортаның шымырлылық теориясының негізгі статистикалық шекаралық есептері жалпыланған аналитикалық вектордың шекаралық есептеріне келтірілді. Осындай әдістеменің перспективалары талқыланады.

Библ. – 11.

УДК: 517.956.3

2000 MSC: 35F05, 35J45

Оспанов К. Н. **On the first order system with variable coefficients** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.78 – 81.

One-valued solvability of the first order PDE's system are proved.
References – 5.

УДК: 517.956.3

2000 MSC: 35F05, 35J45

Оспанов М. Н. **Айнымалы коэффициентті бірінші ретті жүйе туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б. 78 – 81.

Бірінші ретті дербес туындылардағы жүйенің бірімәнді шешілетіні дәлелденген.
Библ. – 5.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H10

Уразаков Е. И. **Characteristics of elastic waves damping in half-space with rugged boundary and wave fields** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 3 (25). P.82 – 91.

The problem of elastic wave propagation from the axisymmetrical source is solved for fluid. It is supposed that solid-liquid interface is weak-rugged. The estimates of characteristics of wave amplitude damping are in this approximation for various relations between average characteristics of rugged surfaces and a partial length of incident waves. The partial length of incident waves for these estimates was selected in the domain of internal reflectance, similar to excitation of the Rayleigh waves. The vector fields were constructed in some neighbourhood of wave source for some frequencies of incident waves and average characteristics of rugged surfaces.

References – 7.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H10

Оразаков Е. Е. **Кеңістіктегі кедір-бұдырлы шекарада орналасқан серпінді толқындардың өшу мінездемелері және толқындық өрістер** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 3 (25). Б. 82 – 91.

Сұйықтық ішінде өске симметриялы орналасқан толқындар бастауынан таралатын серпінді толқындардың таралу есебі қарастырылады.

Қатты дене мен сұйықтықтың арасындағы шекара аз кедір-бұдырлы болып есептелінеді.

Орташа мінездемелі тегіс емес беттер мен парциалды ұзындықтағы құламалы толқындардың арасындағы әр түрлі қатынастағы толқын амплитудаларының өшуінің мінездемелері осы жуықтауда орналасқан. Олар ізделінді бағалаулар үшін беттік толқындардың өршуіне сәйкес іштей толық шағылысу аймағында таңдалынып алынды.

Құламалы толқындардың жиіліктері мен тегіс емес беттердің орташа мінездемелері үшін толқындар бастауының аймағында толқындық өртер құрастырылған.

Библ. – 7.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 3 (25) 2007

Главный редактор:

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, В.П.Добрица,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетягкин, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
И.Н.Панкратова (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304

тел.: 8(3272)-91-20-03, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 04.10.2007г.

Тираж 300 экз. Объем 113 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: print_express@bk.ru