ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2005 том 5 № 1 (15)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 5 № 1 (15) 2005

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 5, № 1 (15), 2005

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С. 5 – 15*

УДК 517.51

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ ПОЛИНОМАМИ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Г.А.Акишев

Карагандинский государственный университет им.Е.А.Букетова
akishev@kargu.krg.kz

Пусть $\bar{x} = (x_1, ..., x_d) \in [0,1]^d \equiv I^d$ – d-мерный единичный куб и даны числа $\theta_j \in (0, +\infty)$, $j = 1, ..., d$, $\bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_d)$, Φ-функции $\psi_j(x_j)$, $x_j \in [0,1]$, $j = 1, ..., d$; $\bar{\psi} = (\psi_1, ..., \psi_d)$.

Через $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}} = \left\{ \int_0^1 \psi_d(t_d) \left[\cdots \left[\int_0^1 \left(\psi_1(t_1) \cdot f^{*_1,...,*_d}(t_1, ..., t_d)\right)^{\theta_1} \frac{dt_1}{t_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots \right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}} \frac{dt_d}{t_d} \right\}^{\frac{1}{\theta_d}}$$

конечна, где $f^{*_1,...,*_d}(t_1, ..., t_d) \equiv f^{*_1,...,*_d}(\bar{t})$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных.

Для функций $\psi_j(t) = t^{\frac{1}{q_j}}$, $j = 1, ..., d$, пространства $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$ рассмотрены в [1], [2]. В этом случае будем пользоваться обозначениями $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^d)$, и вместо $\|\cdot\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}$ соответственно будем писать $\|\cdot\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}$.

Через $C(q, p, r, ...)$ обозначим положительные постоянные, зависящие от указанных параметров.

Запись $A \asymp B$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 A \le B \le c_2 A$.

Рассмотрим обобщенную систему Хаара, определенную на отрезке $[0,1]$. Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел $p_n \ge 2$ для всех $n = 1, 2, ...$ Обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\} = \{\chi_n(t)\}$ определяется следующим образом (см. [3], [4]): положим $\chi_1(t) \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$. Заданное натуральное число $n \ge 2$ представляется в виде $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s$, где $m_k = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$; $\quad k = 1, 2, ...;\quad r = 0, 1, ..., m_k - 1;\quad s = 1, 2, ..., p_{k+1} - 1$.

Через A обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на отрезке [0,1]. Тогда, если $t \in B \equiv [0,1] \setminus A$, то разложение $t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{m_k}$, $\quad \alpha_k(t) = 0, 1, ..., p_k - 1$ единственно. Далее определим функцию

Keywords: *Lorentz space, Haar system, approximation*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A30

$\chi_n(t) \equiv \chi^s_{k,r}(t)$ следующим образом:

$$\chi_n(t) = \chi^s_{k,r}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_k} exp\left\{\frac{2\pi i s \alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}}\right\}, & t \in \left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right) \cap B, \\ 0, & t \notin \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right]. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что множество B всюду плотно на [0,1], функцию $\chi_m(t)$ по непрерывности продолжим на интервал $\left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right)$. Затем в точках разрыва эту функцию положим равной полусумме её предельных значений справа и слева, а на концах отрезка [0,1] – её предельным значениям изнутри отрезка. Таким образом определенная система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 (см. [3], [4]). Далее будем считать, что $m_{-1} = 0$ $m_0 = 1$.

Пусть даны $\{p^{(j)}_{n_j}\}$ – последовательности натуральных чисел $p^{(j)}_{n_j} \geq 2; \quad n_j = 1, 2, ...;$ $j = 1, 2, ..., d$ и $m^{(j)}_{n_j} = p^{(j)}_1 \cdot ... \cdot p^{(j)}_{n_j}$. Через $\{\chi_{\bar n}(\bar x)\} = \left\{\prod\limits_{j=1}^{d} \chi_{n_j}(x_j)\right\}$ обозначим кратную обобщенную систему Хаара; $a_{\bar n}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^d)$ по этой системе.

Пусть

$$T_{\bar n}(\bar x) = \sum_{k_1=1}^{n_1} ... \sum_{k_d=1}^{n_d} a_{k_1,...,k_d} \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j) = \sum_{\bar 1 \leq \bar k \leq \bar n} a_{\bar k} \chi_{\bar k}(\bar x)$$

– полином по обобщенной системе Хаара порядка n_j по переменной x_j. Здесь неравенство $\bar k \leq \bar n$ понимается в том смысле, что $k_j \leq n_j$ для всех $j = 1, ..., d$.

Положим

$$\delta_{\bar\nu}(f, \bar x) = \sum_{k_1 = m^{(1)}_{\nu_1 - 1}+1}^{m^{(1)}_{\nu_1}} ... \sum_{k_d = m^{(d)}_{\nu_d - 1}+1}^{m^{(d)}_{\nu_d}} a_{\bar k}(f) \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

$$S^{\bar\gamma}_n(f, \bar x) = \sum_{<\bar s, \bar\gamma> < n} \delta_{\bar s}(f, \bar x),$$

где $< \bar s, \bar\gamma >= \sum\limits_{j=1}^{d} s_j \gamma_j$.

$$U_{\bar n}(f, \bar x) = \sum_{e \subset \{1,...,d\}} \sum_{\bar s \in G_e(\bar n)} \delta_{\bar s}(f, \bar x),$$

здесь и в дальнейшем

$$G_e(\bar n) = \{\bar s = (s_1, ..., s_d) \in \mathbb{Z}^d_+ : \quad s_j \leq n_j, j \in e, \quad s_j > n_j, j \notin e\}.$$

Через $\tilde H^{\bar r}_{\bar\varphi, \bar\theta}$, обозначим множество всех функций $f \in L^*_{\bar\varphi, \bar\theta}(I^d)$, для которых

$$\|\delta_{\bar\nu}(f)\|_{\bar\varphi, \bar\theta} \leq \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{m^{(j)}_{\nu_j}}\right)^{r_j}, \quad 0 < r_j \leq 1, \quad j = 1, ..., d.$$

Порядок приближения класса H^r_p по норме пространства Лебега $L_q(I^d)$ полиномами по кратной системе Хаара с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов исследованы А.В.Андриановым в [5], П.Освальдом в [6], а пространстве Лоренца с анизотропной нормой – в [7].

В предлагаемой статье доказаны неравенства разных метрик для полиномов по кратной обобщенной системе Хаара, достаточное условие принадлежности функции $f \in L^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}(I^d)$ в пространство $L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$ и установлена оценка порядка приближения класса$\tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}$ частичными суммами $S_n^{(\bar{\gamma})}(f,\bar{x})$.

Л е м м а А [9]. *Пусть* $0 < \theta < +\infty$, *даны положительные числа* a_k, $b_k, k = 0,1,2,\dots$.

a) Если $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \le C \cdot a_n$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k \Big)^\theta \le C \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n^\theta$.

b) Если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \le C \cdot a_n$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \Big)^\theta \le C \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n^\theta$.

Л е м м а Б[10]. *Если* $1 < \alpha_\psi, \beta_\psi < 2$ *для Ф-функции* $\psi(x), x \in [0,1]$, *то при любом* $q > 0$ *выполняются соотношения*

$$\int\limits_0^x \frac{\psi^q(t)}{t} dt = O(\psi^q(x)), x \to +0,$$

$$\int\limits_x^1 [t\psi^q(t)]^{-1} dt = O(\psi^{-q}(x)), x \to +0.$$

Л е м м а В [10]. *Пусть даны Ф-функции* $\varphi(x), \psi(x), x \in [0,1]$. *Если* $\alpha_\varphi > \beta_\psi > 1$, *то для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, & \text{если } x \in (0,1], \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

существует Ф-функция $\theta_1(x)$ *такая, что* $\theta(x) \asymp \theta_1(x), x \in [0,1]$ *и* $\alpha_{\theta_1} > 1$.

Л е м м а 1. *Пусть* $1 \le \theta_j < +\infty$ *и даны Ф-функций* φ_j, *удовлетворяющие условиям:* $1 < \alpha_{\varphi_j} \le \beta_{\varphi_j} < 2, j = 1,2,...,d$. *Тогда для любого полинома*

$$T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x}) = \sum_{k_d=1}^{m_{n_d}^{(d)}} \dots \sum_{k_1=1}^{m_{n_1}^{(1)}} a_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in I^d,$$

имеет место неравенство

$$\|T_{\bar{m}_{n_d}}\|_\infty \le C(\theta,d) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})} \|T_{\bar{m}_{n_d}}\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}.$$

Доказательство леммы 1 следует из равенства

$$T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{x}) = \int_{I^d} T_{\bar{m}_{n_d}}(\bar{y}) \prod_{j=1}^{d} D_{m_{n_j}^{(j)}}(y_j - x_j) d\bar{y},$$

неравенства Гёльдера и оценки нормы ядра Дирихле $D_n(t)$ *(см. [11], лемма 1).*

З а м е ч а н и е 1. *В случае* $d = 1$ *из леммы 1 следуют результаты [11],[12].*

Л е м м а 2. *Пусть* Ф*-функция* $g(t)$ *удовлетворяет условию* $\alpha_g > 1$ *и* $0 < \theta < \infty$, $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$*-возрастающая последовательность положительных чисел* ν_s *и* $\nu_0 = 1$, $\nu_{s+1} \ge 2 \cdot \nu_s$, $s = 0,1,\dots$. *Тогда для* $\{b_s\}$ *– последовательности неотрицательных чисел имеет место неравенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} b_s \right)^\theta \int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}} g^{-\theta}(t) \frac{dt}{t} \le C(\theta) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} g^{-\theta}(\nu_s^{-1}) \cdot b_s^\theta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$\sum_{s=1}^{\infty} g^{-\theta}(\nu_s^{-1}) \cdot b_s^{\theta} = +\infty,$$

то утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} g^{-\theta}(\nu_s^{-1}) \cdot b_s^{\theta} < +\infty. \tag{1}$$

Так как $\alpha_g > 1$, то существует число p_0 такое, что $1 < 2^{\frac{1}{p_0}} < \alpha_g$. Рассмотрим функцию

$$G(t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{\gamma(t)}, & t \in (0,1], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

где $\gamma(t) = t^{\frac{1}{p_0}}$.

В силу леммы В существует Ф-функция $G_1(t)$ такая, что $G(t) \asymp G_1(t)$ и $\alpha_{G_1} > 1$.

Поэтому согласно лемме Б

$$\int_x^1 G_1^{-\theta}(t)\frac{dt}{t} = O(G_1^{-\theta}(x)). \tag{2}$$

Отметим,что в силу того, что $\frac{1}{G_1(t)} \downarrow$, из (1) следует

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\nu_s^{\frac{1}{p_0}} b_s)^{\theta} < +\infty.$$

Пусть $1 < \theta < +\infty$, тогда применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, получим

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} b_s \leq C(\theta)\nu_{n+1}^{-\frac{1}{p_0}} \left[\sum_{s=n+1}^{\infty} (\nu_s^{\frac{1}{p_0}} b_s)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Учитывая это неравенство и меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} b_s\right)^{\theta} \int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}} g^{-\theta}(t)\frac{dt}{t} \leq C(\theta) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left(\nu_s^{\frac{1}{p_0}} b_s\right)^{\theta} \sum_{n=1}^{s-1} \nu_{n+1}^{-\frac{\theta}{p_0}} \int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}} g^{-\theta}(t)\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Неравенство (2) влечет неравенство

$$\sum_{n=1}^{s-1} \nu_{n+1}^{-\frac{\theta}{p_0}} \int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}} g^{-\theta}(t)\frac{dt}{t} \leq C(\theta) \cdot \frac{\nu_s^{-\frac{\theta}{p_0}}}{g^{\theta}(\nu_s^{-1})}.$$

Поэтому из (3) следует утверждение леммы в случае $1 < \theta < +\infty$.

Если $0 < \theta \leq 1$, то применяя неравенство Иенсена и лемму В, можно убедиться в справедливости утверждения леммы.

Л е м м а 3. *Пусть $0 < \theta < +\infty$, $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$ – возрастающая последовательность положительных чисел ν_s и $\nu_0 = 1$, $2 \cdot \nu_s \leq \nu_{s+1}$, $s = 0, 1, ...$; Ф-функция $\psi(t)$, $t \in [0,1]$, удовлетворяет* *условию $1 < \alpha_\psi \le \beta_\psi < 2$. Тогда для любой последовательности $\{b_s\}$ неотрицательных чисел выполняется неравенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} b_s\right)^{\theta}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t} \le C(\theta)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\psi^{\theta}(\nu_n^{-1})\cdot b_n^{\theta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\psi(t)\uparrow$, то

$$\psi^{\theta}(\nu_{s+1}^{-1}) \le (\ln 2)^{-1}\int_{\nu_{s+1}^{-1}}^{\nu_s^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}.$$

Поэтому в силу леммы Б справедлива оценка

$$\sum_{s=n}^{\infty}\int_{\nu_{s+1}^{-1}}^{\nu_s^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t} \le \int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t} + C(\theta)\psi^{\theta}(\nu_{n+1}^{-1}) \le C(\theta)\cdot\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t}.$$

Теперь, пользуясь леммами А и Б, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} b_s\right)^{\theta}\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t} \le C(\theta)\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\theta}\cdot\int_{\nu_{n+1}^{-1}}^{\nu_n^{-1}}\psi^{\theta}(t)\frac{dt}{t} \le$$

$$\le C(\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\psi^{\theta}(\nu_n^{-1})\cdot b_n^{\theta}.$$

Лемма доказана.

Пусть даны числа $\theta_j \in [1,+\infty), j = 1,...,d$. Через $l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)$ обозначают пространство всех числовых последовательностей $\{a_{\bar s}\}_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^d}$, для которых

$$\|\{a_{\bar s}\}\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)} = \left\{\sum_{s_d=0}^{\infty}\left[...\left\{\sum_{s_1=0}^{\infty}|a_{\bar s}|^{\theta_1}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}} < +\infty.$$

Положим $Y^d(n,\bar\gamma) = \{\bar s = (s_1,...,s_d)\in\mathbb{Z}_+^d :\ <\bar s,\bar\gamma>\ \ge n\}$, где $\bar\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_d)$.

Л е м м а 4. *Пусть $\bar\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_d)$, $\bar\gamma' = (\gamma_1',...,\gamma_d')$ такие, что $\gamma_1 = ... = \gamma_\nu = \gamma_1' = ... = \gamma_\nu' = 1 < \gamma_j' < \gamma_j$ $\forall j = \nu+1,...,d$; $b_{\bar s}(n,\bar\gamma,\bar\gamma') = p^{-\alpha<\bar s,\bar\gamma>}$, если $\bar s\in Y^d(n,\bar\gamma')$ и $b_{\bar s}(n,\bar\gamma,\bar\gamma') = 0$ $\bar s\notin Y^d(n,\bar\gamma')$, $\alpha > 0$, $p\ge 2$.*

Тогда имеет место следующее неравенство

$$\left\|\{b_{\bar s}(n,\bar\gamma,\bar\gamma')\}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)} \le C(\theta,\gamma,\gamma')\cdot p^{-n\alpha}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Эта лемма доказывается методом математической индукции по размерности d.

З а м е ч а н и е 2. *При $\theta_1 = ... = \theta_d$ лемма 4 ранее доказана В.Н.Темляковым [13].*

Положим

$$\bar f(\bar t) = \sup_{|E_m|\ge t_m}\frac{1}{|E_m|}\int_{E_m}...\sup_{|E_1|\ge t_1}\frac{1}{|E_1|}\int_{E_1}|f(x_1,...,x_m)|dx_1...dx_m,$$

где $|E_j|$ — – мера Лебега множества $E_j\subset[0,1]$.

Нижним и верхним индексами Ф-функции $\psi(t), t\in[0,1]$, называются соответственно числа

$$\alpha_\psi = \underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}, \qquad \beta_\psi = \overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $1 \le \theta_j < +\infty$ и даны Φ-функций $\bar\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_d)$ удовлетворяющие условиям $1 < \alpha_{\varphi_j} \le \beta_{\varphi_j} < 2$, $j = 1, ..., d$. Тогда для любой функции $f \in L^*_{\bar\varphi,\bar\theta}(I^d)$ справедливо неравенство*

$$\bar f(\bar t) \le C(\theta, d)\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}...\sum_{s_1=n_1+1}^{\infty}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{e\subset\{1,...,d\}}\prod_{j\notin e}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\prod_{j\in e}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{s_j})^{-1})}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}\right\}$$

для $\bar t = (t_1, ..., t_d) \in (\frac{1}{m^{(j)}_{n_1+1}}, \frac{1}{m^{(j)}_{n_1}}] \times ... \times (\frac{1}{m^{(d)}_{n_d+1}}, \frac{1}{m^{(d)}_{n_d}}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Пусть $E_j \subset [0, 1]$ – измеримые по Лебегу множества. Тогда по свойству интеграла имеем*

$$\int_{E_d}...\int_{E_1}|f(x_1, ..., x_d)|dx_1...dx_d \le \int_{E_d}...\int_{E_1}|f(\bar x) - U_{\bar n}(f, \bar x)|d\bar x+$$

$$+\int_{E_d}...\int_{E_1}|U_{\bar n}(f, \bar x)|d\bar x. \tag{4}$$

Применяя неравенсто Гёльдера, получим

$$\int_{E_d}...\int_{E_1}|f(\bar x) - U_{\bar n}(f, \bar x)|d\bar x \le C\cdot\prod_{j=1}^{d}\frac{|E_j|}{\varphi_j(|E_j|)}\|f - U_{\bar n}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}. \tag{5}$$

Пусть $e = \{1, ..., i\} \subset \{1, ..., d\}$. Тогда по переменным $x_1, ..., x_i$ применяя неравенство разных метрик (см. лемму 1), а по остальным переменным – неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\int_{E_d}...\int_{E_1}\left|\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\delta_{\bar s}(f, \bar x)\right|d\bar x \le$$

$$\le C(d)\cdot\prod_{j\in e}|E_j|\cdot\prod_{j\notin e}\frac{|E_j|}{\varphi_j(|E_j|)}\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\prod_{j\in e}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{s_j})^{-1})}\|\delta_{\bar s}\|_{\bar\varphi,\bar\theta}. \tag{6}$$

Для остальных множеств $e \subset \{1, ..., d\}$ неравенство (6) доказывается аналогично.

Далее учитывая неравенство $|E_j| \ge t_j$ и свойства функции φ_j, из неравенств (4)-(6) получим

$$\prod_{j=1}^{d}|E_j|^{-1}\int_{E_d}...\int_{E_1}|f(\bar x)|d\bar x \le C\cdot\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}...\sum_{s_1=n_1+1}^{\infty}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{e\subset\{1,...,d\}}\prod_{j\notin e}\frac{1}{\varphi_j(t_j)}\sum_{\bar s\in G_e(\bar n)}\prod_{j\in e}\frac{1}{\varphi_j((m^{(j)}_{s_j})^{-1})}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}\right\}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $1 < \alpha_{\psi_j} \leq \beta_{\psi_j} < \alpha_{\varphi_j} \leq \beta_{\varphi_j} < 2$, $1 \leq \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., d$. *Если* $f \in L^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}(I^d)$ *и*

$$\left\{\prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \in l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d_+,)$$

то $f \in L^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}}(I^d)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}} \leq C \cdot \left\| \left\{\prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Для краткости записи обозначим*

$$\mu_{n_j} = \int\limits_{(m_{n_j+1}^{(j)})^{-1}}^{(m_{n_j}^{(j)})^{-1}} \left(\frac{\psi_j(t)}{\varphi_j(t)}\right)^{\theta_j} \frac{dt}{t}, \quad \beta_{n_j} = \int\limits_{(m_{n_j+1}^{(j)})^{-1}}^{(m_{n_j}^{(j)})^{-1}} \psi_j^{\theta_j}(t)\frac{dt}{t}.$$

В силу леммы 2 [1] имеет место неравенство

$$f^{*_1,...,*_d}(t_1, ..., t_d) \leq \bar{f}(t_1, ..., t_d).$$

Поэтому пользуясь теоремой 1, имеем

$$\|f\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}} \leq C \cdot \|\bar{f}\|^*_{\bar{\psi},\bar{\theta}} \leq C \left[\left\{\sum_{n_d=0}^{\infty} \mu_{n_d} [... \right.\right.$$

$$\left.\left. ... \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_{n_1} \cdot \left(\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty} ... \sum_{s_1=n_1+1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} ...\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}} +$$

$$+ \sum_{e\subset\{1,...,d\}} \left\{\sum_{n_d=0}^{\infty} \int\limits_{(m_{n_d+1}^{(d)})^{-1}}^{(m_{n_d}^{(d)})^{-1}} \psi_d^{\theta_d}(t_d) \cdot t_d^{-1} \left[... \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \int\limits_{(m_{n_1+1}^{(1)})^{-1}}^{(m_{n_1}^{(1)})^{-1}} \psi_1^{\theta_1}(t_1) \cdot t_1^{-1} \times \right.\right.\right.$$

$$\times \left(\prod_{j\notin e} \frac{1}{\varphi_j(t_j)} \sum_{\bar{s}\in G_e(\bar{n})} \prod_{j\in e} \frac{1}{\varphi_j((m_{n_{s_j}}^{(j)})^{-1})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1} dt_1\Bigg]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} ...$$

$$\left. ... \,]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}} dt_d\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}\Bigg] = C \cdot \left[J_1 + \sum_{e\subset\{1,...,d\}} J_e\right]. \tag{7}$$

Пусть $e = \{1, 2, ..., i\}$, $i \leq d$. *Тогда*

$$J_e = C \cdot \left\{\sum_{n_d=0}^{\infty} \mu_{n_d} \left[... \left[\sum_{n_{i+1}=0}^{\infty} \mu_{n_{i+1}} \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} \beta_{n_i} \left[... \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \beta_{n_1} \times \right.\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\times\left(\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\dots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=0}^{n_i}\dots\sum_{s_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\times\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}\right)^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\dots\right]^{\frac{\theta_i}{\theta_{i-1}}}\right]^{\frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}}\dots\right]^{\frac{\theta_d}{\theta_{d-1}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}.$$

По свойству нормы и в силу лемм 2 и 3 имеем

$$J_e\leq C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=i+1}^{d}\mu_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\prod_{j=1}^{i}\beta_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\dots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=0}^{n_i}\dots\sum_{s_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^d)}\leq$$

$$\leq\left\{\sum_{n_d=0}^{\infty}\mu_{n_d}\left[\sum_{s_d=n_d+1}^{\infty}\left\|\left\{\prod_{j=i+1}^{d-1}\mu_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\times\prod_{j=1}^{i}\beta_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\sum_{s_{d-1}=n_{d-1}+1}^{\infty}\dots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=0}^{n_i}\dots\sum_{s_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j}^{(j)})^{-1})}\times$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar{\theta}_{d-1}}(\mathbb{Z}^{d-1})}\right]^{\theta_d}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}\leq$$

$$\leq C\cdot\left\{\sum_{n_d=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})}{\varphi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})}\right)^{\theta_d}\left\|\left\{\prod_{j=i+1}^{d-1}\mu_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\times\right.\right.\right.$$

$$\times\prod_{j=1}^{i}\beta_{n_j}^{\frac{1}{\theta_j}}\sum_{s_{d-1}=n_{d-1}+1}^{\infty}\dots\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty}\sum_{s_i=0}^{n_i}\dots\sum_{s_1=0}^{n_1}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{\varphi_j((m_{s_j+1}^{(j)})^{-1})}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}\right\|_{l_{\bar{\theta}_{d-1}}(\mathbb{Z}^{d-1})}^{\theta_d}\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}\leq\dots$$

$$\dots\leq C(\theta,d)\left\{\sum_{n_d=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})}{\varphi_d((m_{n_d}^{(d)})^{-1})}\right)^{\theta_d}\left\{\dots\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1((m_{n_1}^{(1)})^{-1})}{\varphi_1((m_{n_1}^{(1)})^{-1})}\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}\right)^{\theta_1}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\dots\right\}^{\frac{1}{\theta_d}}=$$

$$=C(\theta,q,d)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{\varphi},\bar{\theta}}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^d)}.$$

Таким образом, для $e=\{1,...,i\}$, $i\le d$, доказано неравенство

$$J_e \le C(\theta,d)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar n}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)}. \tag{8}$$

Для остальных множеств e неравенство (8) доказывается аналогично.

Для оценки J_1, d-раз применяя лемму 2, имеем

$$J_1 \le C(\theta,d)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar n}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)}. \tag{9}$$

Теперь из неравенств (7), (8), (9) получим

$$\|f\|_{\bar\psi,\bar\theta} \le C(\theta,d)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}\frac{\psi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}{\varphi_j((m_{n_j}^{(j)})^{-1})}\|\delta_{\bar n}(f)\|_{\bar\varphi,\bar\theta}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)}.$$

Теорема доказана.

Далее рассмотрим пространства $L_{\bar\psi,\bar\theta}^{*}(I^d)$, $L_{\bar\varphi,\bar\theta}^{*}(I^d)$ в случае $\psi_j(t)=t^{\frac{1}{q_j}}$, $\varphi_j(t)=t^{\frac{1}{p_j}}$, $j=1,...,d$, и сохраним обозначение (см.стр.1).

Т е о р е м а 3. *Пусть $1<q_j<\tau_j<+\infty$, $1<\theta_j<+\infty$, $j=1,...,d$. Тогда для функции $f\in L_{\bar q,\bar\theta}^{*}(I^d)$ имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\bar q,\bar\theta}^{*} \ge C(q,\theta,d,\tau)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{(\frac{1}{\tau_j}-\frac{1}{q_j})}\cdot\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar\tau,\bar\theta}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)}.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть $1\le p_j<q_j<+\infty$, $1\le\theta_j<+\infty$, $j=1,...,d$; $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}<r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\le...\le r_d$, $\gamma_j=\frac{r_j}{r_1}$, $j=1,...,d$.*

Тогда имеет место соотношение

$$\sup_{f\in\tilde H_{\bar p,\bar\theta}^{\bar r}}\|f-S_n^{\bar\gamma}(f)\|_{\bar q,\bar\theta}^{*} \le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\right\}_{\bar s\in Y^d(\bar\gamma,n)}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Пусть $f\in\tilde H_{\bar p,\bar\theta}^{\bar r}$. При $\psi_j(t)=t^{\frac{1}{q_j}}$, $\varphi_j(t)=t^{\frac{1}{p_j}}$ теорему 2 применяя к функции $f-S_n^{\bar\gamma}(f)\in L_{\bar q,\bar\theta}^{*}(I^d)$, будем иметь*

$$\|f-S_n^{\bar\gamma}(f)\|_{\bar q,\bar\theta}^{*} \le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}}\cdot\|\delta_{\bar s}(f-S_n^{\bar\gamma}(f))\|_{\bar p,\bar\theta}^{*}\right\}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}_+^d)}. \tag{10}$$

Так как $\delta_{\bar s}(f-S_n^{\bar\gamma}(f))=0$ $\forall\bar s\notin Y^d(\bar\gamma,n)$ и $\delta_{\bar s}(f-S_n^{\bar\gamma}(f))=\delta_{\bar s}(f)$ $\forall\bar s\in Y^d(\bar\gamma,n)$, то по определению класса $\tilde H_{\bar p,\bar\theta}^{\bar r}$ из (10) получим

$$\|f-S_n^{\bar\gamma}(f)\|_{\bar q,\bar\theta}^{*} \le C\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{d}(m_{s_j}^{(j)})^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}}\cdot\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p,\bar\theta}^{*}\right\}_{\bar s\in Y^d(\bar\gamma,n)}\right\|_{l_{\bar\theta}(\mathbb{Z}^d)} \le$$

$$\leq C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}$$

для любой функции $f \in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j < +\infty$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < 1$, $j = 1, ..., d$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sup_{f\in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \asymp \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Пусть* $f \in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$. *Тогда при* $\psi_j(t) = t^{\frac{1}{q_j}}$, $\varphi_j(t) = t^{\frac{1}{p_j}}$, $j = 1, ..., d$, *применяя теорему 2, будем иметь*

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \leq C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Этим оценка сверху доказана.

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^d_+} \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+1-\frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}),$$

где $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{N}^d : \quad m_{s_j-1} < k_j \leq m_{s_j}, \quad j = 1, ..., d\}$.

В силу соотношения (см.[11], с.323)

$$\left\| \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \asymp \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{1-\frac{1}{p_j}}, \quad 1 < p_j < \infty, j = 1, ..., d,$$

имеем $C_0 \cdot f_0 \in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, *где* C_0 *– некоторая постоянная. Теперь пользуясь теоремой 3, получим*

$$\|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \geq C(q,\theta,r) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{d} (m_{s_j}^{(j)})^{-(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., d$ *и обобщенные системы Хаара* $\chi\{p_{n_j}^{(j)}\}$ *определены числами* $p_{n_j}^{(j)} = p \geq 2$ $\forall n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, ..., d$; $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leq ... \leq r_d$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, ..., d$; $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$, $r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})$, $j = \nu + 1, ..., d$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sup_{f\in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \asymp p^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *В силу теоремы 5 и леммы 4 нетрудно убедиться, что*

$$\sup_{f\in \tilde{H}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \|f - S^{\bar{\gamma}}_n(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \asymp C(q,\theta,d,p)\cdot \left\| \left\{ p^{-\sum\limits_{j=1}^{d} s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^d(\bar{\gamma},n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}^d)} \asymp$$

$$\asymp p^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

З а м е ч а н и е 3. *Отметим, что для системы Хаара (т.е. $p_{n_j}=2\ \forall n_j\in\mathbb{N},\ j=1,...,d$) следствие 1 ранее анонсировано в [7].*

Цитированная литература

1. **Blozinski A.P.** *// Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V.263. P.146-167.*

2. **Нурсултанов Е.Д.** *// Известия РАН, серия математика. 2000. Т.64, №1. С.95-121.*

3. **Голубов Б.И.** *// Сиб. мат. ж. 1968. Т.9. С. 297-314.*

4. **Виленкин Н.Я.** *// Изв. АН СССР, серия матем., 1947, Т.11, С. 363-400.*

5. **Андрианов А.В.** *// Матем. заметки. 1999. Т.66. С. 323-335.*

6. **Освальд П.** *// Метрич. теория функ. и смежные вопр. анал. М, 1999, С. 137-163.*

7. **Акишев Г.** *// Тезисы докл. 3-межд. научн.конф."Проблемы дифференц. урав., анализа и алгебры". Актобе, 2003.*

9. **Johonsson H.** *// Reslerch Rep. Univer. Umea 1975. V.6.*

10. **Лапин С.В.** *Некоторые теоремы вложения для произведений функций. Рукопись деп. в ВИНИТИ 1980, № 1036-80 Деп., 31 с.*

11. **Акишев Г.** *// Фунд. и прикл. матем. 2002. Т.8. С.319-334.*

12. **Тазабеков С., Смаилов Е.С.** *// Изв. АН Каз ССР, серия физ.-матем. 1989. №5. С. 50-54.*

13. **Темляков В.Н.** *// Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. С.112*

Поступила в редакцию 15.10.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С. 16 — 19*

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ-ПРОТТЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

С. А. Алдашев, М. Т. Акылбаева.

Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева
serik@aldash.ricc.kz

В работе для одного класса многомерных гиперболических уравнений четвертого порядка получен критерий единственности решения задачи Дарбу-Проттера.

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = t + \varepsilon$, $\quad |x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $(x_1, ..., x_m)$, $0 \le t \le (1-\varepsilon)/2$, а $0 \le \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S, соответственно.

В области D_ε рассмотрим многомерные гиперболические уравнения четвертого порядка

$$L^2 u \equiv \left(\Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + c(x,t)\right)^2 u = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным x_1, ..., x_m, $m \ge 2$.

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1).

З а д а ч а 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^3(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^4(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_S = 0, \quad L^k u\big|_{S_\varepsilon} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad k = 0, 1 \qquad (2)$$

или

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_S = 0, \quad L^k u\big|_{S_\varepsilon} = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k = 0, 1. \qquad (3)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m$, t к сферическим r, θ_1, ..., θ_{m-1}, t, сохранив обозначения, использованные в [1,2].

Keywords: *mutidimensional hyperbolic equation, Darbu-Protter problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 49K15

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!\ k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$. Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, $\hat{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения ряда по сферическим функциям $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$, соответственно, функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $\hat{a}_i\dfrac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$.

Если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in C^2\left(\bar{D}_\varepsilon\right) \cap W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, ..., m, l \geq m+3$, то имеет место

Т е о р е м а 1. *Если $\varepsilon = 0$, то задача 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*

Т е о р е м а 2. *Решение задачи 1 $u(x,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.*

Если ввести новую неизвестную функцию $\upsilon(x,t) = Lu$, то задача 1 распадается на две следующие задачи.

З а д а ч а 2. Найти в области D_ε решение уравнения $L\upsilon = 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S = 0, \quad \upsilon\big|_{S_\varepsilon} = 0 \tag{4}$$

или

$$\upsilon_t\big|_S = 0, \quad \upsilon\big|_{S_\varepsilon} = 0. \tag{5}$$

З а д а ч а 3. Найти в области D_ε решение уравнения

$$Lu = \upsilon(x,t), \tag{6}$$

удовлетворяющее краевым условиям (4) или (5).

Для задачи 2 в [2] доказана следующая

Т е о р е м а 3. *При $\varepsilon = 0$ задача 2 имеет бесчисленное множество ненулевых решений вида*

$$\upsilon(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{\upsilon}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

при этом $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) \equiv 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,2$ и $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) \neq 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 3,4,...$

Также в [3] установлена справедливость теоремы 2.

Теперь будем доказывать теорему 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Для ее решения достаточно решить задачу (6), (4), где $\upsilon(x,t)$ определяются из (7). Решение $u(r,\theta,t)$ ищем в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Тогда аналогично как в [2,3] с учетом (7) для $\bar{u}_n^k(r,t)$ получим ряд

$$\begin{gathered}
\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m}\hat{a}_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\cdot\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 - \rho_0^1\bar{\upsilon}_0^1 + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m}\hat{a}_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right. \\
\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{a}_{in-1}^k - n\hat{a}_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k - \rho_n^k\bar{\upsilon}_n^k\right\} = 0, \quad \lambda_n = n\,(n+m-2)\,.
\end{gathered} \tag{9}$$

Далее из краевого условия (4) в силу (8) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,0) = 0, \quad \bar{u}_n^k(r,r) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,..., \quad 0 \leq r \leq 1. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}\cdot\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=\rho_0^1\bar{\upsilon}_0^1, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\cdot\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k+\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k=\rho_1^k\bar{\upsilon}_1^k-\tfrac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\right.\\ \left.+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_1},\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\cdot\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k=\rho_n^k\bar{\upsilon}_n^k-\\ -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+\left[\tilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-2}^k-(n-1)\,\hat{a}_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k,\right.\\ k=\overline{1,k_n},\quad n=2,3,...\end{gathered} \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$ — решение системы (11)–(13), то оно является решением уравнения (9).

Таким образом, задача (6), (4) сведена к системе задач Дарбу для уравнений (11)–(13). Теперь будем искать решение этих задач.

Нетрудно показать, что каждое уравнение системы (11)–(13) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k-\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\cdot u_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\bar{\upsilon}_n^k+\bar{f}_n^k\left(r,t\right), \tag{14}$$

где $\bar{f}_n^k\left(r,t\right)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1\left(r,t\right)\equiv 0$. В (14), произведя замену переменных $\bar{u}_n^k\left(r,t\right)=r^{(1-m)/2}u_n^k\left(r,t\right)$ и положив затем $\xi=\frac{r+t}{2}$, $\eta=\frac{r-t}{2}$, получим

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{\left[(m-1)\left(3-m\right)-4\lambda_n\right]}{4\left(\xi+\eta\right)^2}\bar{u}_n^k=f_n^k\left(\xi,\eta\right), \tag{15}$$

$f_n^k(\xi,\eta)=\dfrac{1}{4}(\xi+\eta)^{(m-1)/2}\left[\bar{\upsilon}_n^k(\xi+\eta,\,\xi-\eta)+\bar{f}_n^k(\xi+\eta,\,\xi-\eta)\right]$, при этом краевое условие (10) запишется в виде

$$u_n^k\left(\xi,\xi\right)=\tau_n^k(\xi)=0,\quad u_n^k(\xi,0)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,...,\quad 0\le\xi\le\frac{1}{2}. \tag{16}$$

Используем общее решение уравнения (15) (см. [4]). В [5] получено решение задачи Коши для уравнения (15) в виде

$$\begin{gathered}u_n^k\left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{2}\tau_n^k\left(\eta\right)R\left(\eta,\eta;\xi,\eta\right)+\frac{1}{2}\tau_n^k\left(\xi\right)R\left(\xi,\xi;\xi,\eta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi\left\{\nu_n^k\left(\xi_1\right)R\left(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta\right)-\right.\\ \left.-\tau_n^k\left(\xi_1\right)\frac{\partial}{\partial N}\,R\left(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta\right)\big|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1+\int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta}f_n^k\left(\xi_1,\eta_1\right)R\left(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta\right)d\xi_1d\eta_1,\end{gathered} \tag{17}$$

где $R\left(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta\right)=P_\mu\left[\dfrac{\left(\xi_1-\eta_1\right)\left(\xi-\eta\right)+2\left(\xi_1\eta_1+\xi\eta\right)}{\left(\xi_1+\eta_1\right)\left(\xi+\eta\right)}\right]$ — функция Римана уравнения (15) ([6]), а $P_\mu\left(z\right)$ — функция Лежандра, $\mu=n+\left(m-3\right)/2$,

$$\nu_n^k\left(\xi_1\right)=\left.\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\right|_{\xi_1=\eta_1}=\left.\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\cdot\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\cdot\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)\right|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — нормаль прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1, η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \le \xi$.

Из (17) при $\eta = 0$, используя краевое условие (16), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^{\xi} \nu_n^k(\xi_1)\, P_\mu \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = 0, \quad 0 \le \xi \le 1/2. \tag{18}$$

В [1] доказано, что уравнение (18) в классе $C\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ при $\mu \ge 2$ имеет нетривиальное решение вида

$$\nu_n^k(\xi) = \xi^\beta, \quad \beta = \mu - 2(s+1) \ge 0, \quad s = 0, 1, ... \tag{19}$$

и нулевое решение, если $-\frac{1}{2} \le \mu < 2$.

Следовательно, сначала решив задачу (11), (10) $(n = 0)$, а затем (12), (10) $(n = 1)$ и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$, при этом $\bar{u}_n^k(r,t) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, 2$ и $\bar{u}_n^k(r,t) \ne 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 3, 4, ...$

Таким образом, задача (6), (4) имеет нетривиальные решения вида

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{20}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из (17), в котором $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (19), причем $\beta = \mu - 2(s+1) \ge (m-1)/2$, $s = 0, 1, ...$

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1), нетрудно показать как и в [2], что полученное решение вида (20) принадлежит классу $C^3\left(\bar{D}_0\right) \cap C^4(D_0)$, если $l > \frac{3m}{2} + 3$.

Теорема 1 для задачи (1), (2) доказана. Ее справедливость для задачи (1), (3), используя результаты [1, гл. I], устанавливается аналогично.

Теперь переходим к доказательству теоремы 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из теоремы 2 для задачи 2 вытекает, что $v(x,t) \equiv 0$. Далее, снова применяя теорему 2, теперь уже для задачи 3 будем иметь $u(x,t) \equiv 0$.

Первая часть теоремы 2 для задачи 1 доказана.

Пусть теперь решение задачи 1 $u(x,t) \equiv 0$. Покажем, что $\varepsilon > 0$. Предположим противное, т.е. $\varepsilon = 0$.

Если $\varepsilon = 0$, то из теоремы 1 вытекает, что задача 1 имеет ненулевые решения вида (20). Приходим к противоречию. Теорема 2 установлена.

Цитированная литература

1. **Алдашев С.А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.
2. **Алдашев С.А.** //Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34, № 1. С.1–5.
3. **Алдашев С.А.** //Математический журнал. 2002. Т. 2, № 4 (6), С.26–29.
4. **Бицадзе А.В.** Уравнения смешанного типа. М., 1959.
5. **Алдашев С.А.** //Украинский матем. журнал. 2003. V.55, № 1. С.100–107.
6. **Copson E.T.** // I. Rath. Mech. and Anal. 1958. V.1. P.324–348.

Поступила в редакцию 31.05.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.20 — 29*

УДК 517.95

UNIFORM ESTIMATES OF THE SOLUTION TO THE LINEAR TWO-PHASE STEFAN PROBLEM WITH A SMALL PARAMETER

G.I.Bizhanova

Institute of Mathematics MON RK,
050010 Almaty, Pushkin str., 125, galya@math.kz

In the Hölder space there are established the uniform with respect to κ estimates of the solution to the linear two-phase Stefan problem with a small parameter κ, which permit to obtain the solvability of some linear and non-linear problems with $\kappa = 0$.

Let $D_1 := \mathbb{R}^n_-$, $D_2 := \mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$, be half-spaces $x_n < 0$ and $x_n > 0$ respectively, $D_T^{(j)} := D_j \times (0,T)$, R - plane $x_n = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $R_T := R \times [0,T]$. We designate $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$, $\Delta' = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_{n-1}}$, $\Delta = \Delta' + \partial^2_{x_n}$, $\nabla' = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}})$, $\nabla = (\nabla', \partial_{x_n})$.

We consider the problem with unknown functions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ and $\psi(x',t)$

$$\partial_t u_j - a_j \, \Delta u_j = 0 \text{ in } D_T^{(j)}, \; j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \; u_j|_{t=0} = 0 \text{ in } D_j, \; j = 1, 2, \tag{2}$$

$$u_1 - \alpha_1 \psi = u_2 - \alpha_2 \psi = 0 \text{ on } R_T, \tag{3}$$

$$b \nabla u_1 - c \nabla u_2 + h' \nabla' \psi + \kappa \, \partial_t \psi = \Phi(x', t) \text{ on } R_T, \tag{4}$$

where all coefficients are constant, $a_j > 0$, $b = (b', b_n)$, $b' = (b_1, \ldots, b_{n-1})$, $c = (c', c_n)$, $c' = (c_1, \ldots, c_{n-1})$, $h' = (h_1, \ldots, h_{n-1})$, $\kappa > 0$ - small parameter.

The problem (1)-(4) is on the basis of many free boundary problems for the parabolic equations, in particular, of Stefan problem, Stefan problem with "supercooling" and etc. There are observed physical processes, mathematical models of which contain small parameter proceeding higher terms in conditions on free boundary and their linearization leads to the problem (1)-(4).

The problem (1)-(4) with $\kappa = 1$ in Hölder spaces was studied by B.V.Bazaliy [1], E.V.Radkevich [2], G.I.Bizhanova [3]. J.F. Rodrigues, V.A.Solonnikov, F. Yi [4] investigated one-phase linear and Stefan problems for the second order parabolic equations with small parameter ε. They have established the uniform on ε estimates of the solution in Hölder space, from which the existence of the solutions to the considered problems with $\varepsilon = 0$ follows.

Keywords: *parabolic equation, linear Stefan problem, small parameter, uniform estimates, Hölder space*
2000 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

In the present paper there will be found uniform with respect to κ estimates of the solution to two-phase linear problem (1)-(4) with small parameter κ, which permit to prove the solvability of some linear and nonlinear free boundary problems with $\kappa = 0$ without loss of the smoothness of solution.

T h e o r e m 1. *Let* $\alpha_j > 0,\ j = 1,2,\ b_n > 0,\ c_n > 0,\ \kappa > 0.$

For every function $\Phi \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, $\alpha \in (0,1)$, *the problem (1)-(4) has unique solution* $u_j \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ \ t}(D_T^{(j)})$, $j = 1,2$, $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x'\ \ \ \ t}(R_T)$, $\kappa\,\partial_t\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, *and it satisfies the estimate*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+\alpha)}_{D_T^{(j)}} + |\psi|^{(2+\alpha)}_{R_T} + |\kappa\partial_t\psi|^{(1+\alpha)}_{R_T} \le C_1|\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_T}, \tag{5}$$

where constant C_1 *does not depend on* κ.

Via $C^{l,l/2}_{x\ t}(\bar\Omega_T)$ we denote the Hölder space with the norm $|u|^{(l)}_{\Omega_T}$[5]; $\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{x\ t}(\bar\Omega_T)$ is subspace of functions $u \in C^{l,l/2}_{x\ t}(\bar\Omega_T)$ such, that $\partial_t^k u|_{t=0} = 0,\ k \le [l/2]$.

We apply Laplace (L) on t and Fourier (F) on x' transforms to the problem (1)-(4) and denoting $FL[u(x,t)] := \tilde u(s', x_n, p)$, we find

$$\tilde u_j = \frac{\alpha_j}{\kappa\zeta}\,\tilde\Phi\, e^{-r_j|x_n|},\ \ \tilde\psi = \frac{1}{\kappa\zeta}\tilde\Phi,\ \ \zeta = p + \frac{\alpha_1 b_n}{\kappa} r_1 + \frac{\alpha_2 c_n}{\kappa} r_2 + i\frac{d' s'}{\kappa},\ \ r_j = \frac{\sqrt{p + a_j s'^2}}{\sqrt{a_j}},$$

$j = 1,2$, $d' = \alpha_1 b' - \alpha_2 c' + h'$. With the help of inverse Laplace and Fourier transforms we obtain the solution to the problem (1)-(4) in the explicit form [3]

$$u_j(x,t) = \frac{\alpha_j}{\kappa}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',\tau) G_j(x'-y', x_n, t-\tau)\, dy' := \frac{\alpha_j}{\kappa}\big(\Phi * G_j\big), \tag{6}$$

$$\psi(x',t) = \frac{1}{\alpha_j} u_j(x',0,t) \equiv \frac{1}{\kappa}\big(\Phi * G_j\big)|_{x_n=0},\ \ j = 1,2, \tag{7}$$

where

$$G_j(x,t) = \int_0^t \partial_{x_n} g_j(x' - \frac{d'\sigma}{\kappa}, |x_n|, \frac{\sigma}{\kappa}, t-\sigma)\, d\sigma, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} g_1(x' - \frac{d'\sigma}{\kappa}, -x_n, \frac{\sigma}{\kappa}, t) &= 4a_1 a_2 \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma_1(x' - \eta' - \frac{d'\sigma}{\kappa}, \frac{\alpha_1 b_n \sigma}{\kappa} - x_n, t-\tau_1) \times \\ &\times \partial_{\eta_n}\Gamma_2(\eta', \frac{\alpha_2 c_n \sigma}{\kappa} - \eta_n, \tau_1)\big|_{\eta_n=0}\, d\eta' \equiv \\ &\equiv 2a_1 \int_0^t d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(2\sqrt{\pi a_1 (t-\tau_1)})^n} \frac{\alpha_2 c_n\, \sigma/\kappa}{(2\sqrt{\pi a_2 \tau_1})^n \tau_1} \times \\ &\times e^{-\frac{(x'-\eta'-d'\sigma/\kappa)^2 + (\alpha_1 b_n\,\sigma/\kappa - x_n)^2}{4a_1(t-\tau_1)}}\, e^{-\frac{\eta'^2 + (\alpha_2 c_n \sigma/\kappa)^2}{4a_2\tau_1}}\, d\,\eta',\ \ x_n < 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} g_2(x - \frac{d'\sigma}{\kappa}, x_n, \frac{\sigma}{\kappa}, t) &= 4a_1 a_2 \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\eta_n}\Gamma_1(\eta', \frac{\alpha_1 b_n \sigma}{\kappa} + \eta_n, \tau_1) \times \\ &\times \Gamma_2(x' - \eta' - \frac{d'\sigma}{\kappa}, \frac{\alpha_2 c_n \sigma}{\kappa} + x_n, t - \tau_1)\big|_{\eta_n=0}\, d\eta' \equiv \\ &\equiv -2a_2 \int_0^t d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\alpha_1 b_n\, \sigma/\kappa}{(2\sqrt{\pi a_1 \tau_1})^n \tau_1} \frac{1}{(2\sqrt{\pi a_2 (t-\tau_1)})^n} \times \end{aligned} \tag{10}$$

$$\times e^{-\frac{\eta'^2+(\alpha_1 b_n\,\sigma/\kappa)^2}{4a_1\tau_1}} e^{-\frac{(x'-\eta'-d'\sigma/\kappa)^2+(\alpha_2 c_n\sigma/\kappa+x_n)^2}{4a_2(t-\tau_1)}}\,d\,\eta',\ x_n>0,$$

$\Gamma_j(x,t)=\frac{1}{(2\sqrt{a_j\pi t})^n}e^{-\frac{x^2}{4a_jt}}$ is a fundamental solution to the heat equation (1), satisfying the estimate

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,\Gamma_j(x,t)|\le C_2\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}\,e^{-\frac{x^2}{8a_jt}},\ j=1,2, \tag{11}$$

which is derived with the help of an inequality

$$|\xi|^\alpha e^{-\xi^2}\le C_\alpha e^{-\xi^2/2},\ \alpha\ge 0. \tag{12}$$

We see that parameter κ is contained in the form $\frac{1}{\kappa}$ in the formulas (6), (7) and in the exponents of Green functions $G_j(x,t), j=1,2,$ i.e. the functions u_j, ψ have indefiniteness of $\frac{0}{0}$ order as $\kappa\to 0$. We uncover it.

L e m m a 1. *Let $\alpha_j>0,\ j=1,2,\ b_n>0,\ c_n>0,\ \kappa>0$. For the functions g_j and $G_j, j=1,2,$ defined by (9), (10) and (8), the following estimates hold*

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,\partial_{x_n}g_j(x'-\frac{d'\sigma}{\kappa},|x_n|,\frac{\sigma}{\kappa},t)|\le C_3\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|+1}{2}}}\,e^{-\frac{q_1^2x^2+q_2^2\sigma^2}{t}}, \tag{13}$$

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,G_j(x,t)|\le C_4\,\kappa\frac{e^{-\frac{q_1^2x^2}{t}}}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}+C_5\frac{e^{-\frac{q_1^2x^2+q_2^2t^2}{4t}}}{(q_1^2x^2+q_2^2t^2)^{\frac{n+2k+|m|-1}{2}}}, \tag{14}$$

where

$$q_1^2=\frac{\beta^2}{16a(\alpha_1^2b_n^2+\alpha_2^2c_n^2+d'^2)},\ q_2^2=\frac{\beta^2}{16a\kappa^2} \tag{15}$$

constants C_3-C_5 does not depend on κ, $a=\max(a_1,a_2)$, $\beta=\min(\alpha_1b_n,\alpha_2c_n)$.

P r o o f. Taking into account that the function $u_j(x,t)$ satisfies the heat equation, we can represent the derivative $\partial_{x_n}^2 g_j$ in the form $(1/a_j\partial_t-\partial_{x_1}^2-\ldots-\partial_{x_{n-1}}^2)g_j$ and estimate the derivative $\partial_t^{k_1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu}g_j$ instead of $\partial_t^k\partial_x^m\partial_{x_n}g_j$, where $\nu=0,1,$ and $2k_1+|s'|+\nu=2k+|m|+1$. We consider function g_1 determined by (9). We divide an integral over τ_1 into two ones on the domains $(0,t/2)$ and $(t/2,t)$, in the second integral we make change of the variables $\tau_1=t-\tau_2$, $\eta'=x'-\xi'$ and then differentiate g_1 with respect to t, if $k_1\ge 1$, x' and x_n

$$J:=\partial_t^{k_1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu}g_1=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\partial_t^{k_1-1}\Big(\partial_t^{i-1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu}\Gamma_1\partial_{\eta_n}\Gamma_2+$$

$$+\partial_{x_n}^{\nu}\Gamma_1(\eta'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\frac{\alpha_1b_n\sigma}{\kappa}-x_n,\frac{t}{2})\partial_t^{i-1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{\eta_n}\Gamma_2(x'-\eta',\frac{\alpha_2c_n\sigma}{\kappa}-\eta_n,\frac{t}{2})\Big)\Big|_{\eta_n=0}d\eta'+$$

$$+\int_0^{t/2}d\,\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\partial_t^{k_1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu}\Gamma_1\partial_{\eta_n}\Gamma_2+\partial_{x_n}^{\nu}\Gamma_1(\eta'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\frac{\alpha_1b_n\sigma}{\kappa}-x_n,\tau_1)\times$$

$$\times\partial_t^{k_1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{\eta_n}\Gamma_2(x'-\eta',\frac{\alpha_2c_n\sigma}{\kappa}-\eta_n,t-\tau_1)\Big)\Big|_{\eta_n=0}d\eta':=J_1+J_2.$$

If $k_1=0$, an integral J_1 will not appear. In J_1 we differentiate the product of functions with respect to t and apply the estimate (11) of Γ_j in J_1 and J_2, then integrate over η' using the table formula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2\pi\tau_1(t-\tau_1)}}e^{-\frac{(x_i-\eta_i)^2}{4a_1(t-\tau_1)}-\frac{(\eta_i-z_i)^2}{4a_2\tau_1}}d\eta_i=\frac{1}{\sqrt{a_1(t-\tau_1)+a_2\tau_1}}e^{-\frac{(x_i-z_i)^2}{4(a_1(t-\tau_1)+a_2\tau_1)}}.$$

In the integral over τ_1 in J_2 we apply an inequality $1/(t-\tau_1) \le 2/t$ and integrate with respect to τ_1, then we obtain an estimate of a derivative of $g_1 := g$

$$|J| \le C_6 \frac{1}{t^{\frac{n+2k_1+|s'|+\nu}{2}}} e^{-\frac{(x-l\sigma)^2+\lambda^2\sigma^2}{8at}},\ l = (\frac{d'}{\kappa}, \frac{\alpha_1 b_n}{\kappa}),\ \lambda = \frac{\alpha_2 c_n}{\kappa}, \tag{16}$$

where $a = \max(a_1, a_2)$, constant C_6 does not depend on κ ($l = (\frac{d'}{\kappa}, \frac{\alpha_2 c_n}{\kappa}),\ \lambda = \frac{\alpha_1 b_n}{\kappa}$ in the similar estimate of a derivative of g_2).

We evaluate an exponent in (16). For that we apply Hölder and Young inequalities with $p = p' = 2$ $(1/p + 1/p' = 1)$ to the sum $2\sigma\, x\, l$

$$2\sigma\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i l_i\Big| \le 2\sigma\big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2}\big(\sum_{i=1}^{n} l_i^2\big)^{1/2} \equiv 2\big(|x|\sqrt{\varepsilon}\big)\big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|l|\sigma\big) \le \varepsilon x^2 + \frac{l^2\sigma^2}{\varepsilon},$$

then assuming $\varepsilon = (\lambda^2/2 + l^2)/(\lambda^2 + l^2)$, we shall have $e^{-\frac{(x-l\sigma)^2+\lambda^2\sigma^2}{8at}} \le e^{-\frac{q_1^2 x^2 + q_2^2\sigma^2}{t}}$, where $q_1,\ q_2$ are defined by (15). Applying this inequality and identity $2k_1 + |s'| + \nu = 2k + |m| + 1$ in (16) leads to (13) for $j = 1$. In the same manner the estimate (13) for the function g_2 is derived.

Now we prove an estimate

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{q/2}}\, e^{-\frac{q_1^2 x^2 + q_2^2\sigma^2}{t-\sigma}}\, d\sigma \le$$

$$\le C_7 \frac{1}{q_2\, t^{\frac{q-1}{2}}} e^{-\frac{q_1^2 x^2}{t}} + C_8 \frac{1}{(q_1^2 x^2 + q_2^2 t^2)^{\frac{q-2}{2}}}\, e^{-\frac{q_1^2 x^2 + q_2^2 t^2}{4t}},\ q > 2. \tag{17}$$

For that we divide an integral into two ones in the domains $(0, t/2)$ and $(t/2, t)$, in the first integral we use an inequality $1/(t-\sigma) \le 2/t$ and put $\sigma = 0$ in $t - \sigma$ in exponent, make changes of variables $q_2\sigma/\sqrt{t} = v$ and in the second one $A^2/(t-\sigma) = 2\zeta^2$, $A^2 = q_1^2 x^2 + q_2^2 t^2/4$, then we obtain an estimate (17). Applying (13) and (17) with $q = n + 2k + |m| + 1 \ge 3$ in the inequality

$$|\partial_t^k \partial_x^m\, G_j(x,t)| \le \int_0^t |\partial_t^k \partial_x^m\, \partial_{x_n} g_j|\, d\,\sigma$$

of Green function G_j determined by (8) we shall have an estimate (14). $\square$

We consider function $u_j(x,t)$ without coefficient α_j/κ at the plane $x_n = 0$, which we denote by $v_j(x',t)$

$$\frac{\kappa}{\alpha_j} u_j(x',0,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',\tau)dy' \int_0^{t-\tau} \partial_{x_n} g_j(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa}, |x_n|, \frac{\sigma}{\kappa}, t-\tau-\sigma)d\,\sigma\Big|_{x_n=0} =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{\tau} \Phi(y', \tau-\sigma)\partial_{x_n} g_j(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa}, 0, \frac{\sigma}{\kappa}, t-\tau)\, d\,\sigma := v_j(x',t). \tag{18}$$

R e m a r k 1. *From the formula (8) with the help of integration by parts over σ we can express time derivative $\partial_t G_j,\ j = 1,2$, via its space ones multiplied by $1/\kappa$ and kernel $\partial_{x_n} g_j(x', |x_n|, 0, t)$ independent on κ, which does not permit to obtain uniform with respect to κ estimates of solution.*

L e m m a 2. *Let $\alpha_j > 0,\ j = 1,2,\ b_n > 0,\ c_n > 0,\ \kappa > 0$ and $\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$, $\alpha \in (0,1)$. Then $v_j(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$ and an estimate holds*

$$|v_j|_{R_T}^{(2+\alpha)} \le C_9 \kappa |\Phi|_{R_T}^{(1+\alpha)}, j = 1,2. \tag{19}$$

P r o o f. First, we consider function $v_1(x',t)$. For the sake of convenience we designate $v_1(x',t):=v(x',t)$ and $g_1 := g$.

To prove theorem we should estimate the Hölder norm of function $v(x',t)$

$$|v|^{(2+\alpha)}_{R_T} := \sum_{2k+|m'|\le 2} |\partial_t^k \partial_{x'}^{m'} v|_{R_T} + [v_t]^{(\alpha)}_{R_T} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n-1} [\partial^2_{x_\mu x_\nu} v]^{(\alpha)}_{R_T} + \sum_{\nu=1}^{n-1} [\partial_{x_\nu} v]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}, \tag{20}$$

where $|u|_{R_T} = \sup_{(x',t)\in R_T} |u(x',t)|$, $[u]^{(\alpha)}_{R_T} := [u]^{(\alpha)}_{x',R_T} + [u]^{(\alpha/2)}_{t,R_T}$,

$$[u]^{(\alpha)}_{x',R_T} = \sup_{(x',t),(z',t)\in R_T} \frac{|u(x',t)-u(z',t)|}{|x'-z'|^\alpha},\ [u]^{(\alpha)}_{t,R_T} = \sup_{(x',t),(x',t_1)\in R_T} \frac{|u(x',t)-u(x',t_1)|}{|t-t_1|^\alpha}.$$

We shall make use of the following notations, for convenience, $M_1 = [\Phi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}$, $M_2 = [\Phi_{x_\nu}]^{(\alpha/2)}_{t,R_T}$, $M_3 = [\Phi_{x_\nu}]^{(\alpha)}_{x',R_T}$, and estimates

$$|\partial^k_{x_\nu}\Phi(x',t) - \partial^k_{x_\nu}\Phi(x',t_1)| \le M_{1+k}(t-t_1)^{\frac{1+\alpha-k}{2}},\ t_1\le t,\ k=0,1; \tag{21}$$

$$|\Phi_{x_\nu}(x',t) - \Phi_{z_\nu}(z',t)| \le M_3|x'-z'|^\alpha. \tag{22}$$

We evaluate Hölder constants with respect to t. For that we represent the derivatives $v_t, \partial^2_{x_\mu x_\nu} v,\ \mu,\nu = 1,\dots,n-1$, in the form

$$\begin{aligned} v_t(x',t) = &\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\Phi(y',\tau-\sigma) - \Phi(y',t-\sigma)]\partial_t g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma + \\ &+ \int_0^t d\sigma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',t-\sigma) g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\sigma)\,dy'; \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{x_\mu x_\nu} v(x',t) = &\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau \Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma)\partial_{x_\mu} g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma \equiv \\ \equiv &\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma) - \Phi_{x_\nu}(x',\tau-\sigma)]\partial_{x_\mu} g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma \end{aligned} \tag{24}$$

and compose the differences assuming, for the definiteness, that $t_1 < t$,

$$\begin{aligned} &\triangle_1 := v_t(x',t) - v_{t_1}(x',t_1) = \\ &= \int_{t_1}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\Phi(y',\tau-\sigma) - \Phi(y',t-\sigma)]\partial_t g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma + \\ &+ \int_0^{t_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\Phi(y',\tau-\sigma) - \Phi(y',t_1-\sigma)]d\sigma \int_{t_1}^t \partial^2_{t_2} g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},t_2-\tau)dt_2 + \\ &+ \int_{t_1}^t d\sigma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',t-\sigma) g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},t-\sigma)dy' + \\ &+ \int_0^{t_1} d\sigma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\Phi(y',t-\sigma) - \Phi(y',t_1-\sigma)] g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},t-t_1)dy' + \\ &+ \int_0^{t_1} d\sigma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',t_1-\sigma)dy' \int_{t_1}^t \partial_{t_2} g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},t_2-\sigma)dt_2; \end{aligned}$$

$$\triangle_2 := \partial^2_{x_\mu x_\nu} v(x',t) - \partial^2_{x_\mu x_\nu} v(x',t_1) =$$

$$= \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma) - \Phi_{x_\nu}(x',\tau-\sigma)] \partial_{x_\mu} g_{x_n}(\cdot, \frac{\sigma}{\kappa}, t-\tau) d\sigma + \tag{25}$$

$$+ \int_0^{t_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma) - \Phi_{x_\nu}(x',\tau-\sigma)] d\sigma \int_{t_1}^t \partial_{t_2} \partial_{x_\mu} g_{x_n}(\cdot, \frac{\sigma}{\kappa}, t_2-\tau) dt_2.$$

We consider $\triangle_1$. Applying an inequalities (13) for the kernel $g_1 := g$ and (21) for Φ and integrating over y', we shall have

$$|\triangle_1| \leq C_{10} M_1 \Big(\int_{t_1}^t d\tau \int_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-\frac{q_2^2 \sigma^2}{t-\tau}} d\sigma +$$

$$+ \int_{t_1}^t dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(t_2-\tau)^3} d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t_2-\tau}} d\sigma + \int_{t_1}^t \frac{(t-\sigma)^{1+\alpha/2}}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t-\sigma}} d\sigma +$$

$$+ (t-t_1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t-t_1}} d\sigma + \int_{t_1}^t dt_2 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\sigma)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(t_2-\sigma)^2} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t_2-\sigma}} d\sigma \Big).$$

In the integral over σ in the first term we make change $q_2\sigma/\sqrt{t-\tau} = \zeta$ and estimate it by Poisson integral, in the second and fourth terms we do the same, then integrate over τ and t_2; in the third term we make use of the inequality $(t-\sigma)^{1+\alpha/2} \leq t(t-t_1)^{\alpha/2}$ and extend the integration domain up to $(0,t)$, and in the fifth one we take into consideration that $\sqrt{t_1-\sigma} \leq \sqrt{t_2-\sigma}$ and $(t_1-\sigma)^{\alpha/2} \leq t_2^{\alpha/2}$, then we derive

$$|\triangle_1| \leq C_{11} M_1 \big(\frac{1}{q_2} (t-t_1)^{\alpha/2} + (t-t_1)^{\alpha/2} t \int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t-\sigma}} d\sigma +$$

$$+ \int_{t_1}^t t_2^{\alpha/2} dt_2 \int_0^{t_2} \frac{1}{(t_2-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t_2-\sigma}} d\sigma \big).$$

Using inequality (17) to the integral over σ with $q = 3$ and $q_1 = 0$ we obtain

$$|v_t(x',t) - v_{t_1}(x',t_1)| := |\triangle_1| \leq C_{12} M_1 \frac{1}{q_2} (t-t_1)^{\alpha/2}, \ [v_t]^{(\alpha/2)}_{t,R_T} \leq C_{12} M_1 \frac{1}{q_2}. \tag{26}$$

We evaluate the difference (25) with the help of the estimates (22) of function Φ and (13) of a kernel $g := g_1$

$$|\triangle_2| \leq C_{13} M_3 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |x'-y'|^\alpha dy' \Big(\int_{t_1}^t d\tau \int_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{q_1^2(x'-y')^2 + q_2^2\sigma^2}{t-\tau}} d\sigma +$$

$$+ \int_{t_1}^t dt_2 \int_0^{t_1} d\tau \int_0^\tau \frac{1}{(t_2-\tau)^{\frac{n+4}{2}}} e^{-\frac{q_1^2(x'-y')^2 + q_2^2\sigma^2}{t_2-\tau}} d\sigma \Big).$$

We apply an estimate (12) and integrate over y', σ and then over τ and t_2

$$|v_{x_\mu x_\nu}(x',t) - v_{x_\mu x_\nu}(x',t_1)| := |\triangle_2| \leq C_{14} M_3 \frac{1}{q_2} \Big(\int_{t_1}^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}} d\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^t dt_2 \int_0^{t_1} \frac{1}{(t_2-\tau)^{2-\alpha/2}} d\tau \Big) \leq \frac{C_{15} M_3}{q_2} (t-t_1)^{\alpha/2}, \ [v_{x_\mu x_\nu}]^{(\alpha/2)}_{t,R_T} \leq \frac{C_{15} M_3}{q_2}. \tag{27}$$

To evaluate Hölder constant $[v_{x_\nu}]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}$ we represent derivative $v_{x_\nu}(x',t)$, $\nu=1,\dots,n-1$, in the form

$$v_{x_\nu}=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy'\int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma)-\Phi_{y_\nu}(y',t-\sigma)]g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma+$$
$$+\int_0^t d\sigma\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Phi(y',t-\sigma)\,d\,y'\int_0^{t-\sigma} g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},\tau)\,d\,\tau, \tag{28}$$

compose the difference

$$\triangle_3 := v_{x_\nu}(x',t)-v_{x_\nu}(x',t_1)=$$
$$=\int_{t_1}^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy'\int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma)-\Phi_{y_\nu}(y',t-\sigma)]g_{x_n}(x'-y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)\,d\sigma+$$
$$+\int_0^{t_1} d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy'\int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y',\tau-\sigma)-\Phi_{y_\nu}(y',t_1-\sigma)]d\sigma\int_{t_1}^t \partial_{t_2}g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},t_2-\tau)dt_2+$$
$$+\int_{t_1}^t d\sigma\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Phi_{y_\nu}(y',t-\sigma)dy'\int_0^{t-\sigma} g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^{t_1} d\sigma\int_{\mathbb{R}^{n-1}}[\Phi_{y_\nu}(y',t-\sigma)-\Phi_{y_\nu}(y',t_1-\sigma)]dy'\int_0^{t-t_1} g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},\tau)d\tau+$$
$$+\int_{t_1}^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy'\int_0^{t_1}\Phi_{y_\nu}(y',t_1-\sigma)g_{x_n}(\cdot,\frac{\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)d\sigma$$

and estimate it as above, using (21) and (13)

$$|\triangle_3|\le C_{16}M_2\Big(\int_{t_1}^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}}\int_0^\tau e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}d\sigma+$$

$$+\int_{t_1}^t dt_2\int_0^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{\alpha/2}}{(t_2-\tau)^2}d\tau\int_0^\tau e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t_2-\tau}}d\sigma+\int_{t_1}^t (t-\sigma)^{\alpha/2}d\sigma\int_0^{t-\sigma}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\tau}}d\tau+$$

$$+(t-t_1)^{\alpha/2}\int_0^{t-t_1}\frac{d\tau}{\tau}\int_0^{t_1}e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\tau}}d\sigma+\int_{t_1}^t d\tau\int_0^{t_1}\frac{(t_1-\sigma)^{\alpha/2}\sqrt{\tau-\sigma}}{(\tau-\sigma)^{3/2}}e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\tau-\sigma}}d\sigma\Big).$$

In the third integral we apply the inequalities $(t-\sigma)^{\alpha/2}\le(t-t_1)^{\alpha/2}$ and $t-\sigma\le t-t_1$ in the integral upper limit, then integrate over σ and τ, t_2 all fourth integrals; in the last term we make use of the obvious inequalities $t_1-\sigma\le t_1\le\tau$, $\sqrt{\tau-\sigma}\le\sqrt{\tau}$, enlarge the integral upper limit from t_1 till τ and apply an estimate (17) with $q=3,\ q_1=0$, then we shall have

$$|v_{x_\nu}(x',t)-v_{x_\nu}(x',t_1)]:=|\triangle_3|\le\frac{C_{17}M_2}{q_2}(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}},\ [v_{x_\nu}]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}\le C_{17}M_2\frac{1}{q_2}. \tag{29}$$

In the formula (24) in the integral over y' we carry out a change of variable $y'+d'\sigma/\kappa=\xi'$, then the derivative $v_{x_\mu x_\nu}(x',t)$ may be written in the form

$$v_{x_\mu x_\nu}=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy'\int_0^\tau [\Phi_{y_\nu}(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\Phi_{x_\nu}(x'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)]\partial_{x_\mu}g_{x_n}(x'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma,$$

analogously we represent v_t determined by (23), and compose the differences of these derivatives, denoting $r=|x'-z'|$,

$$\begin{gathered}\triangle_4:=v_t(x',t)-v_t(z',t)=\\ \int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\le 2r}dy'\int_0^\tau\big(\Phi(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\Phi(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},t-\sigma)\big)\times\\ \times\Big(\partial_t g_{x_n}(x'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)-\partial_t g_{z_n}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)\Big)d\sigma+\\ +\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|>2r}dy'\int_0^\tau[\Phi(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\Phi(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},t-\sigma)]\times\\ \times\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-z_i)\int_0^1\partial_t\partial_{z_i}g_{z_n}(z'-y'+\lambda(x'-z'),0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\lambda d\sigma+\\ +\int_0^t d\sigma\int_{|y'-z'|\le 2r}\Phi(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},t-\sigma)\Big(g_{x_n}(x'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\sigma)-g_{z_n}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\sigma)\Big)+\\ +\int_0^t d\sigma\int_{|y'-z'|>2r}\Phi(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},t-\sigma)dy'\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-z_i)\int_0^1\partial_{z_i}g_{z_n}(z'-y'+\lambda(x'-z'),0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\sigma)d\lambda;\end{gathered}\tag{30}$$

$$v_{x_\mu x_\nu}(x',t)-v_{z_\mu z_\nu}(z',t):=\triangle_5+I,\ \ \mu,\nu=1,\dots,n-1,\tag{31}$$

$$\begin{gathered}\triangle_5:=\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\le 2r}dy'\int_0^\tau\big(\Phi_{y_\nu}(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\Phi_{x_\nu}(x'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)\big)\times\\ \times\partial_{x_\mu}g_{x_n}(x'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma-\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|\le 2r}dy'\int_0^\tau\big(\Phi_{y_\nu}(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\\ -\Phi_{z_\nu}(z'-\frac{d'\sigma}{\kappa},t-\sigma)\big)\partial_{z_\mu}g_{z_n}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\sigma+\\ +\int_0^t d\tau\int_{|y'-z'|>2r}dy'\int_0^\tau[\Phi_{y_\nu}(y'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\Phi_{x_\nu}(x'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)]\times\\ \times\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-z_i)\int_0^1\partial^2_{z_iz_\mu}g_{z_n}(z'-y'+\lambda(x'-z'),0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)d\lambda d\sigma,\end{gathered}$$

$$I=\int_0^t d\tau\int_0^\tau[\Phi_{x_\nu}(x'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)-\Phi_{z_\nu}(z'-\frac{d'\sigma}{\kappa},\tau-\sigma)]d\sigma\int_{|y'-z'|>2r}g_{z_ny_\mu}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)dy'.$$

We evaluate difference (30). We apply the inequalities (21) and (13), in the integrals over y' pass to the spherical coordinates assuming $\rho=|x'-y'|$ in the first and fourth terms, $\rho=|z'-y'|$ in the second and fifth terms and $\rho=|z'-y'+\lambda(x'-z')|$ in the third and the last ones, then we shall have

$$\begin{gathered}|\triangle_4|\le C_{18}M_1\Big(\big(\int_0^{3r}+\int_0^{2r}\big)\rho^{n-2}d\rho\int_0^t d\tau\int_0^\tau\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+2-\alpha}{2}}}e^{-\frac{q_3^2\rho^2+q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}\,d\sigma+\\ +r\int_r^\infty\rho^{n-2}\,d\rho\int_0^t d\tau\int_0^\tau\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+3-\alpha}{2}}}e^{-\frac{q_3^2\rho^2+q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}d\sigma+\\ +\int_0^t\frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{n-\alpha}{2}}}\,d\sigma\big(\int_0^{3r}+\int_0^{2r}\big)\rho^{n-2}e^{-\frac{q_3^2\rho^2+q_2^2\sigma^2}{t-\sigma}}d\rho+\end{gathered}$$

$$+r\int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{n+1-\alpha}{2}}}d\sigma\int_r^\infty \rho^{n-2}e^{-\frac{q_3^2\rho^2+q_2^2\sigma^2}{t-\sigma}}\,d\rho\Big),\ q_3=q_1|_{d'=0}.$$

We integrate the first two integrals over σ and then on τ making change $q_3^2\rho^2/(t-\tau)=\zeta^2$, in two last ones we use an inequality (12), then we obtain

$$|\triangle_4|\le C_{19}M_1\Bigg(\frac{1}{q_2}(\int_0^{3r}+\int_0^{2r})\rho^{-1+\alpha}d\rho\int_0^\infty \zeta^{n-2-\alpha}e^{-\zeta^2}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{q_2}r\int_r^\infty \rho^{\alpha-2}\,d\rho\int_0^\infty \zeta^{n-1-\alpha}e^{-\zeta^2}\,d\zeta+$$

$$+\Big((\int_0^{3r}+\int_0^{2r})\rho^{-1+\alpha}d\rho+r\int_r^\infty \rho^{\alpha-2}\,d\rho\Big)\int_0^t\frac{t-\sigma}{(t-\sigma)^{3/2}}e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t-\sigma}}\,d\sigma\Bigg),\ n\ge 2.$$

In the integral over σ we apply an inequality $t-\sigma\le t$ and an estimate (17) with $q=3$, $q_1=0$ and integrate them, then we shall have

$$|v_t(x',t)-v_{t_1}(z',t)|:=|\triangle_4|\le C_{20}M_1\frac{1}{q_2}|x'-z'|^\alpha,\ [v_t]^{(\alpha)}_{x',R_T}\le C_{20}M_1\frac{1}{q_2}. \qquad (32)$$

We consider the difference (31). The first two integrals in $\triangle_5$ are estimated as the first two ones in $\triangle_4$, in the last integral we make use of an inequality $|x'-y'|^\alpha\le C_{21}(\rho^\alpha+r^\alpha)\le 2C_{21}\rho^\alpha$ by virtue of $r\le\rho$, then integrating over σ, τ and ρ, we obtain

$$|\triangle_5|\le C_{22}M_3\int_0^t d\tau\Big((\int_0^{3r}+\int_0^{2r})\rho^{n-2+\alpha}d\rho\int_0^\tau\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{q_1^3\rho^2+q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}\,d\sigma+$$

$$+r\int_r^\infty \rho^{n-2+\alpha}\,d\rho\int_0^\tau\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+3}{2}}}e^{-\frac{q_1^3\rho^2+q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}d\sigma\Big)\le C_{23}M_3\frac{1}{q_2}|x'-z'|^\alpha. \qquad (33)$$

We evaluate an integral I. If $n\ge 3$, we apply formula

$$\int_{|y'-z'|>2r}\partial_{y_\mu}g_{z_n}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)dy'=\int_{|y'-z'|=2r}g_{z_n}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)\cos(\bar n,x_\mu)dS_{y'},$$

where $\bar n$ is the normal to the sphere $|y'-z'|=2r$, then we shall have

$$|I|\le C_{24}M_3r^\alpha\int_0^t d\tau\int_0^\tau d\sigma\Big|\int_{|y'-z'|=2r}g_{z_n}(z'-y',0,\frac{\sigma}{\kappa},t-\tau)\cos(\bar n,x_\mu)dS_{y'}\Big|\le$$

$$\le C_{25}M_3\int_0^t d\tau\int_0^\tau\frac{r^{n-2+\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}}e^{-\frac{4q_3^2r^2+q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}\,d\sigma\le\frac{C_{26}M_3}{q_2}r^{n-2+\alpha}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{4q_3^2r^2}{t-\tau}}d\tau\le$$

$$\le C_{27}M_3\frac{1}{q_2}r^\alpha\int_0^\infty \zeta^{n-3}e^{-\zeta^2}\,d\zeta=C_{28}M_3\frac{1}{q_2}|x'-z'|^\alpha,\ n\ge 3,\ q_3=q_1|_{d'=0}. \qquad (34)$$

For $n=2$ an integral I is equal to zero by virtue of evenness of function $g_{z_2}(y_1,0,\sigma/\kappa,t-\tau)$ with respect to argument y_1.

The estimates (33), (34) lead to the required inequality for the difference (31)

$$|v_{x_\mu x_\nu}(x',t)-v_{z_\mu z_\nu}(z',t)|\le C_{29}M_3\frac{1}{q_2}|x'-z'|^\alpha,\ [v_{x_\mu x_\nu}]^{(\alpha)}_{x',R_T}\le C_{29}M_3\frac{1}{q_2}. \qquad (35)$$

We evaluate function $v(x',t) := v_1(x',t)$ defined by a formula (18)

$$|v(x',t)| \le C_{30} M_1 \int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}}{t-\tau} d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{t-\tau}}\, d\sigma \le C_{31} M_1 \frac{1}{q_2} t^{1+\alpha/2}. \tag{36}$$

By direct evaluations of the modules of derivatives $v_t,\ v_{x_\mu x_\nu}, v_{x_\nu}$, determined by (23), (24), (28), using also formula (17) for the second integral in (23), we shall have the estimates

$$|\partial_t v| \le C_{32} M_1 \frac{1}{q_2} t^{\alpha/2},\ |\partial^2_{x_\mu x_\nu} v| \le C_{33} M_3 \frac{1}{q_2} t^{\alpha/2},\ |\partial_{x_\nu} v| \le C_{34} M_2 \frac{1}{q_2} t^{\frac{1+\alpha}{2}}. \tag{37}$$

Thus, we have estimated all the terms of the norm (20) of function $v(x',t)$.

Gathering the estimates (36), (37), (26), (32), (27), (35), (29), and remembering that $q_2 = \beta/(4\sqrt{a}\kappa)$ we obtain an inequality (19) for the function $v(x',t) := v_1(x',t)$. An estimate for $v_2(x',t)$ is established in the same way as for v_1. $\square$

P r o o f of T h e o r e m 1. The function $u_j(x,t)$ satisfies the heat equation (1), moreover, in accordance to the Lemma 2 and estimate (19) at the plane $x_n = 0$ the function $u_j(x,t)|_{x_n=0} = \frac{\alpha_j}{\kappa} v_j(x',t)$ belongs to the space $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x'\ \ t}(R_T)$ and the estimate for it holds

$$\big|u_j|_{x_n=0}\big|^{(2+\alpha)}_{R_T} \le C_{35} |\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_T} \tag{38}$$

with the constant C_{35} independent on small parameter κ. The function $u_j(x,t)$ may be considered as a solution of the first boundary-value problem for the equation (1) in $D_T^{(j)}$ with the trace on $x_n = 0$ from the space $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x'\ \ t}(R_T)$, but then function $u_j(x,t)$ belongs to $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(D_T^{(j)})$, $j = 1,2$, and due to (38) satisfies the estimate [5]

$$|u_j|^{(2+\alpha)}_{D_T^{(j)}} \le C_{36} \big|u_j|_{x_n=0}\big|^{(1+\alpha)}_{R_T} \le C_{37} |\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_T},$$

where C_{37} is not depended on κ. As it is seen from the formula (7) for the function $\psi(x',t) = \frac{1}{\alpha_j} u_j(x',0,t)$ estimate (38) with constant C_{35}/α_j is fulfilled. From the boundary condition (4) we obtain an inequality $|\kappa\, \partial_t \psi|^{(1+\alpha)}_{R_T} \le C_{38} |\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_T}$ with constant C_{38} independent on κ. Gathering these estimates we derive an estimate (5) and complete the proving of Theorem 1. $\square$

C o r o l l a r y 1. *The problem (1)-(4) with $\kappa = 0$ has unique solution $u_j \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(D_T^{(j)})$, $j = 1,2$, $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x'\ \ t}(R_T)$, and it satisfies the estimate*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+\alpha)}_{D_T^{(j)}} + |\psi|^{(2+\alpha)}_{R_T} \le C_{39} |\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_T}. \tag{39}$$

P r o o f. On the basis of a compact embedding of $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ t}$ into $C^{2,1}_{x\ t}$ and with the help of a direct evaluation of Hölder constants of the solution to the problem (1)-(4) with $\kappa = 0$ via solution to the problem (1)-(4) with $\kappa > 0$ and applying the estimate (5) we obtain existence of the solution and estimate (39). Uniqueness follows from (39). $\square$

References

1. **Bazaliy B.V.** // Doklady AN USSR. Ser.A. 1986. N 11. P.3-7.
2. **Radkevich E.V.**// Some applications of functional analysis to the problems of mathematical physics. Novosibirsk. 1986. P. 85-111.
3. **Bizhanova G.I.** // Algebra i Analiz. 1994. V.6, N 1. P.64-94.
4. **Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi. F.**// Math. Ann. 1999. V.315, N 1.P. 61–95.
5. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva, N.N.** // "Nauka", Moscow, 1967.

Received by editors 17.02.2005

УДК 519.624

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д. С. Джумабаев, А. Е. Иманчиев

Институт Математики МОиН РК,
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
463000, Актобе, ул. братьев Жубановых, 263

В терминах матрицы специальной структуры, составляемой по матрицам дифференциального уравнения и граничных условий, установлены признаки корректной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи.

Рассматривается линейная многоточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j x(t_j) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, C_j – $(n \times n)$-матрицы, $j = \overline{1,m}$, $t_1 = 0 < t_2 < ... < t_{m-1} < < t_m = T$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \le \alpha$, $\alpha - const$.

Вопросы существования, единственности и построения приближенных методов нахождения решения многоточечных краевых задач исследованы многими авторами [1-4]. В соответствии применяемым при этом методам ответы на них получены в разных терминах.

Целью статьи является нахождение коэффициентных необходимых и достаточных условий корректной разрешимости задачи (1), (2). Для этой цели используется метод параметризации (м.п.) [5].

Берется шаг $h > 0 : Nh = T$ и производится разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$. Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначив через $x_r(t)$, введя дополнительные параметры $\lambda_r = x_r[(r-1)h]$ и на каждом r-ом интервале произведя замену $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, получим краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r + f(t), \qquad u_r[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{3}$$

Keywords: *linear system of differential equations, multi-point boundary value problem, correct solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B10

$$C_1\lambda_1 + \sum_{j=2}^{m-1} C_j[\lambda_{r_j} + u_{r_j}(t_j)] + C_m[\lambda_{r_m} + \lim_{t\to T-0} u_{r_m}(t)] = d, \tag{4}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \qquad s = \overline{1, N-1}. \tag{5}$$

Здесь r_j – номер интервала, где располагается t_j при данном шаге разбиения, т.е. $t_j \in ((r_j - 1)h, r_j h)$ и $r_1 = 1 \le r_2 \le ... \le r_{m-1} \le r_m = N$.

Решением задачи (3)-(5) является система пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, где функция $u_r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) при всех $t \in [(r-1)h, rh)$. В точке $t = (r-1)h$ уравнению (4) удовлетворяет правосторонняя производная функции $u_r(t)$. Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, N}$, с элементами $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(r-1)h]$, $t \in [(r-1)h, rh)$, будет решением (3)-(5). И, наоборот, если $(\widetilde{\lambda}_r, \widetilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, – решение (3)-(5), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_N + \lim\limits_{t\to T-0} \widetilde{u}_N(t)$, является решением задачи (1), (2). Это следует из непрерывности $A(t)$, $f(t)$ на $[0, T]$ и условий склеивания решения (5).

Задачи Коши (3) при фиксированных значениях параметров λ_r эквивалентны интегральным уравнениям Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau)d\tau\lambda_r + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставляя правую часть (6) и повторяя этот процесс ν раз, получим следующее представление для функции $u_r(t)$:

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t)\lambda_r + F_{\nu r}(f, t) + G_{\nu r}(u, t), \qquad r = \overline{1, N}, \tag{7}$$

где

$$D_{\nu r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1)... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}...d\tau_1, \qquad \tau_0 = t,$$

$$F_{\nu r}(f, t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1)... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} f(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j...d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u, t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1)... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1.$$

Существование $\lim\limits_{t\to rh-0} D_{\nu r}(t)$, $\lim\limits_{t\to rh-0} F_{\nu r}(f, t)$ следует из непрерывности $A(t)$, $f(t)$ на $[0, T]$ (тем самым и на $[(r-1)h, rh]$). Так как функции $u_r(t)$ непрерывны на $[(r-1)h, rh)$ и существуют $\lim\limits_{t\to rh-0} u_r(t)$, то доопределив функцию $u_r(t)$ при $t = rh$ ее левосторонним пределом, получим непрерывную на $[(r-1)h, rh]$ функцию. Отсюда и из непрерывности $A(t)$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to rh-0} G_{\nu r}(u, t)$. В равенствах (7) переходя к пределу при $t \to rh - 0$, имеем

$$\lim_{t\to rh-0} u_r(t) = D_{\nu r}(rh)\lambda_r + F_{\nu r}(f, rh) + G_{\nu r}(u, rh). \tag{8}$$

Подставляя в (4), (5) соответствующие значения пределов из (8) и умножая (4) на $h > 0$, получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных параметров

$$hC_1\lambda_1 + h\sum_{j=2}^{m} C_j[I + D_{\nu r_j}(t_j)]\lambda_{r_j} = hd - h\sum_{j=2}^{m} C_j[F_{\nu r_j}(f, t_j) + G_{\nu r_j}(u, t_j)], \tag{9}$$

$$[I + D_{\nu s}(sh)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{\nu s}(f, sh) + G_{\nu s}(u, sh), \qquad s = \overline{1, N-1}, \tag{10}$$

где I – единичная матрица размерности n.

Записав систему уравнений (9), (10) в виде

$$Q_\nu(h)\lambda = -F_\nu(f, d, h) - G_\nu(u, h) \tag{11}$$

с $nN \times nN$-матрицей $Q_\nu(h)$, определяемой левой частью (9), (10) и nN-векторами

$F_\nu(f, d, h) = (-hd + \sum\limits_{j=2}^{m} hC_jF_{\nu r_j}(f, t_j), F_{\nu 1}(f, h), ..., F_{\nu N-1}(f, (N-1)h))'$,

$G_\nu(u, h) = (\sum\limits_{j=2}^{m} hC_jG_{\nu r_j}(u, t_j), G_{\nu 1}(u, h), ..., G_{\nu N-1}(u, (N-1)h))'$,

для нахождения системы пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, имеем замкнутую систему уравнений (6), (11).

Решение задачи с параметром (3)-(5) – систему пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, найдем как предел последовательности, определяемой по следующему алгоритму.

Шаг 0. а) Предполагая, что при выбранных h, ν матрица $Q_\nu(h)$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}$ определяем из уравнения $Q_\nu(h)\lambda = -F_\nu(f, d, h)$, т.е. $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(h)]^{-1}F_\nu(f, d, h)$.

б) Учитывая, что $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, ..., \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN}$, и решая задачи Коши (3) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, эквивалентные интегральным уравнениям (6) на интервалах $[(r-1)h, rh)$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Шаг 1. а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, в правую часть (11) из уравнения $Q_\nu(h)\lambda = -F_\nu(f, d, h) - G_\nu(u^{(0)}, h)$, определяем $\lambda^{(1)} \in R^{nN}$.

б) Решая задачи Коши (3) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Продолжая алгоритм, на k-ом шаге получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r = \overline{1, N}$.

Достаточные условия сходимости алгоритма, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2), а также оценку ее решения устанавливает

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T$, $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(h) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства*

a) $||[Q_\nu(h)]^{-1}|| \leq \gamma_\nu(h)$,

b) $q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \cdot \max\Big(1, h\sum\limits_{j=2}^{m} ||C_j||\Big)\Big[e^{\alpha h} - \sum\limits_{p=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^p}{p!}\Big] < 1.$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка

$$||x^*||_1 = \max_{t\in[0,T]} ||x^*(t)|| \leq M_\nu(h) \cdot \max(||f||_1, ||d||), \tag{12}$$

где

$$M_\nu(h) = e^{\alpha h}\Big\{\Big[\frac{e^{\alpha h} - 1}{1 - q_\nu(h)}\gamma_\nu(h)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\max\Big(1, h\sum_{j=2}^{m}||C_j||\Big) + 1\Big]\gamma_\nu(h)\times$$

$$\times \max\Big[1 + h\sum_{j=2}^{m}||C_j||\sum_{p=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^p}{p!}, \sum_{p=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^p}{p!}\Big] + \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\frac{\gamma_\nu(h)e^{\alpha h}}{1 - q_\nu(h)}\max\Big(1, h\sum_{j=2}^{m}||C_j||\Big) + 1\Big\}h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из обратимости матрицы $Q_\nu(h)$ и вида вектора $F_\nu(h)$ следует, что

$$||\lambda^{(0)}|| \le \gamma_\nu(h)\max\left\{h||d|| + \sum_{j=2}^{m} h||C_j||\sum_{p=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^p}{p!}||f||_1 h, \sum_{p=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^p}{p!}||f||_1 h\right\} \le$$

$$\le \gamma_\nu(h)\max\left\{1 + \sum_{j=2}^{m}||C_j||h\sum_{p=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^p}{p!}, \sum_{p=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^p}{p!}\right\}\max(||f||_1, ||d||)h. \qquad (13)$$

Для функции $u_r^{(0)}(t)$, решения задачи Коши (3) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, справедливо неравенство

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}||u_r^{(0)}(t)|| \le \left(e^{\alpha h} - 1\right)||\lambda^{(0)}|| + e^{\alpha h}||f||_1 h. \qquad (14)$$

Разность параметров $\lambda^{(k+1)}$, $\lambda^{(k)}$ удовлетворяет уравнению $Q_\nu(h)(\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}) = -[G_\nu(u^{(k)}, h) - G_\nu(u^{(k-1)}, h)]$, откуда вытекает оценка

$$||\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|| \le \gamma_\nu(h)||G_\nu(u^{(k)} - u^{(k-1)}, h)|| \le \gamma_\nu(h)\max\Big(1, h\sum_{j=2}^{m}||C_j||\Big)\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\left|\left|\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)[u_r^{(k)}(\tau_\nu) - u_r^{(k-1)}(\tau_\nu)]d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right|\right|. \qquad (15)$$

Используя неравенство Гронуолла-Беллмана для разности $u_r^{(k)}(t)$, $u_r^{(k-1)}(t)$, имеем

$$||u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)|| \le \left\{e^{\alpha[t-(r-1)h]} - 1\right\}||\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}||, \qquad t \in [(r-1)h, rh). \qquad (16)$$

Подставляя (16) в правую часть (15) и вычисляя повторные интегралы, получим основное неравенство

$$||\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|| \le q_\nu(h)||\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}||. \qquad (17)$$

Так как $q_\nu(h) < 1$, то из (17), (16) получим сходимость $\lambda_r^{(k)}$ к λ_r^* и равномерную на $[(r-1)h, rh)$ сходимость функции $u_r^{(k)}(t)$ к $u_r^*(t)$, $r = \overline{1,N}$. Система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1,N}$, будет решением задачи (3)-(5) и для нее имеют место неравенства

$$||\lambda^* - \lambda^{(0)}|| \le \frac{1}{1 - q_\nu(h)}||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}|| \le$$

$$\le \frac{\gamma_\nu(h)\max\Big(1, h\sum\limits_{j=2}^{m}||C_j||\Big)}{1 - q_\nu(h)}\cdot\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\left[\left(e^{\alpha h} - 1\right)||\lambda^{(0)}|| + e^{\alpha h}||f||_1 h\right], \qquad (18)$$

$$||u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)|| \le \left(e^{\alpha h} - 1\right)||\lambda_r^* - \lambda_r^{(0)}||, \qquad r = \overline{1,N}. \qquad (19)$$

Учитывая, что $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim\limits_{t\to T-0} u_N^*(t)$, и используя неравенства (13), (14), (18), (19), для $x^*(t)$, решения задачи (1), (2), получим оценку (12). Единственность решения задачи (1), (2) доказывается методом от противного. Теорема 1 доказана.

Далее покажем, что существование $h > 0 : Nh = T$, $\nu \in \mathbb{N}$, при которых матрица $Q_\nu(h)$ обратима и выполняются неравенства a), b) теоремы 1, являются также и необходимыми условиями однозначной разрешимости задачи (1), (2).

При этом мы воспользуемся следующим утверждением, устанавливающим взаимосвязь между значениями решения задачи (1), (2) в точках разбиения и решением линейной системы уравнений, составленной по исходным данным задачи (1), (2).

Лемма 1. *Если функция $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_N^*)' \in R^{nN}$ с координатами $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$ удовлетворяет системе линейных уравнений*

$$\frac{1}{h}Q_*(h)\lambda = -F(f,d,h), \tag{20}$$

где $Q_*(h) = \lim\limits_{\nu\to\infty} Q_\nu(h)$, $F(f,d,h) = \frac{1}{h}\lim\limits_{\nu\to\infty} F_\nu(f,d,h)$.

И, наоборот, если вектор $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, ..., \widetilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ удовлетворяет (20), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_N + \lim\limits_{t\to T-0} \widetilde{u}_N(t)$, где $\widetilde{u}_r(t)$ – решение задачи Коши (3) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, будет решением задачи (1), (2).

Доказательство. Используя представление матриц $D_{\nu r}(t)$ и векторов $F_{\nu r}(f,t)$, соответственно, нетрудно установить равномерную на $[r-1)h, rh)$ сходимость последовательности функциональных матриц $\{D_{\nu r}(t)\}$ и вектор-функции $\{F_{\nu r}(f,t)\}$ к $D_{*r}(t)\}$ и $F_{*r}(f,t)\}$ при $\nu \to \infty$. Отсюда и из структур $Q_\nu(h)$, $F_\nu(f,d,h)$ следует существование пределов $Q_*(h) = \lim\limits_{\nu\to\infty} Q_\nu(h)$, $F_*(f,d,h) = \lim\limits_{\nu\to\infty} F_\nu(f,d,h)$.

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то ввиду эквивалентности задач (1), (2) и (3)-(5) система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, где $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(r-1)h]$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, будет решением задачи с параметром (3)-(5). Поэтому для любого $\nu \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$Q_*(h)\lambda^* = -F_\nu(f,d,h) - G_\nu(u^*,h) \tag{21}$$

и справедливы оценки

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} ||u_r^*(t)|| \leq \beta, \qquad \beta - const,$$

$$||G_\nu(u^*,h)|| \leq \max\Big(1, h\sum_{j=2}^m ||C_j||\Big)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\beta. \tag{22}$$

В (21) переходя к пределу при $\nu \to \infty$ и учитывая (22), получим, что вектор $\lambda^* \in R^{nN}$ удовлетворяет (20).

Пусть теперь $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, ..., \widetilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ – решение (20), а функции $\widetilde{u}_r(t)$ – решение задач Коши (3) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1,N}$. Тогда для $\widetilde{u}_r(t)$ имеет место представление (7), где $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$.

Вновь используя (22) и переходя к пределу при $\nu \to \infty$, установим, что

$$\widetilde{u}_r(t) = D_{*r}(t)\widetilde{\lambda}_r + F_{*r}(f,t), \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{23}$$

Покажем, что система пар $(\widetilde{\lambda}_r, \widetilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1,N}$, – решение задачи (3)-(5). Так как функции $\widetilde{u}_r(t)$ удовлетворяют (3) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1,N}$, то достаточно доказать выполнение равенств (4), (5). Для этого (20) запишем в блочно-координатной форме

$$hC_1\widetilde{\lambda}_1 + h\sum_{j=2}^m C_j[I + D_{*r_j}(t_j)]\widetilde{\lambda}_{r_j} = hd - h\sum_{j=2}^m C_j F_{*r_j}(f,t_j),$$

$$[I + D_{*s}(sh)]\widetilde{\lambda}_s - \widetilde{\lambda}_{s+1} = -F_{*s}(f,sh), \qquad s = \overline{1,N-1}.$$

Отсюда и из (23) следуют равенства

$$hC_1\widetilde{\lambda}_1 + h\sum_{j=2}^{m-1} C_j[\widetilde{\lambda}_{r_j} + \widetilde{u}_{r_j}(t_j)] + C_m[\widetilde{\lambda}_{r_m} + \lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_{r_m}(t)] = d,$$

$$\widetilde{\lambda}_s + \lim_{t\to sh-0}\widetilde{u}_s(t) = \widetilde{\lambda}_{s+1}, \qquad s=\overline{1,N-1},$$

т.е. система пар $(\widetilde{\lambda}_r, \widetilde{u}_r(t))$, $r=\overline{1,N}$, удовлетворяет вместе с (3) также и (4), (5).

Тогда в силу эквивалентности задач (1), (2) и (3)-(5) получим второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 2. *Задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $h>0 : Nh=T$ существует $\nu=\nu(h)$, при котором матрица $Q_\nu(h) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1), (2) однозначно разрешима и $h>0 : Nh=T$ – любой заданный шаг разбиения интервала $[0,T)$. Установим обратимость матрицы $Q_*(h)$. Допустим противное: матрица $Q_*(h)$ необратима. Тогда существует ненулевой вектор $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, ..., \widetilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ и $Q_*(h)\widetilde{\lambda} = 0$. Рассмотрим краевую задачу (1), (2) с $f(t)=0$, $d=0$, т.е. однородную многоточечную краевую задачу. Так как $F(0,0,h)=0$, то согласно лемме из равенства $\frac{1}{h}Q_*(h)\widetilde{\lambda} = -F(0,0,h)$ следует, что функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t\in[(r-1)h, rh)$, $r=\overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_N + \lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{u}_N(t)$, будет ненулевым решением однородной задачи, соответствующей (1), (2).

Учитывая, что задача (1), (2) при $f(t)=0$, $d=0$ имеет также и тривиальное решение $x(t)=0$, придем к противоречию с однозначной разрешимостью задачи (1), (2). Поэтому матрица $Q_*(h)$ обратима и $||[Q_*(h)]^{-1}|| \le \gamma_*(h)$. Используя оценку

$$||Q_*(h) - Q_\nu(h)|| \le \max\Big(1, h\sum_{j=2}^{m}||C_j||\Big)\Big[e^{\alpha h} - \sum_{p=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^p}{p!}\Big]$$

и теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [6, с. 142], для любого $h>0 : Nh=T$ найдем $\overline{\nu} = \overline{\nu}(h)$, при которых матрица $Q_{\overline{\nu}}(h)$ обратима и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.
Достаточность следует из теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Определение 1. *Задача (1), (2) называется корректно разрешимой с константой K, если для любых $f(t)$, d существует единственное решение $x^*(t)$ и для него справедливо неравенство*

$$\|x^*\|_1 \le K\max\Big(\|f\|_1, \|d\|\Big),$$

где K – const, независящая от $f(t)$, d.

Число K является константой корректной разрешимости задачи (1), (2).

Из оценки (12) вытекает, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K=M_\nu(h)$ для выбранных h,ν. Отсюда и из теоремы 2 следует эквивалентность однозначной разрешимости задачи (1), (2) ее корректной разрешимости.

Необходимость условий теоремы 1 для корректной разрешимости задачи (1), (2) при фиксированном $\nu\in\mathbb{N}$ устанавливает

Теорема 3. *Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu\in\mathbb{N}$ существует $h=h(\nu)>0 : Nh=T$, при которых матрица $Q_\nu(h) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима с константой K. Тогда как было установлено при доказательстве теоремы 2, матрица $Q_*(h)$ обратима при любом $h > 0 : Nh = T$. Рассмотрим систему уравнений

$$Q_h\lambda \equiv \frac{1}{h}Q_*(h)\lambda = b, \qquad \lambda, b \in R^{nN}. \tag{24}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $h_0 = h_0(\varepsilon)$ выберем, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{\alpha h_0}\Big(e^{\alpha h_0} - 1 - \alpha h_0\Big) \le \frac{2\varepsilon}{(4+\varepsilon)(2+\varepsilon)}.$$

Теперь для любых $h \in (0, h_0]$: $Nh = T$, $b = (b_1, ..., b_N)' \in R^{nN}$ можно построить непрерывную на $[0, T]$ вектор-функцию $f_b(t)$, удовлетворяющую условиям

$$-\frac{1}{h}F_{*,s}(f_b, sh) = b_{s+1}, \qquad s = \overline{1, N-1}, \qquad ||f_b||_1 \le \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)||b||.$$

Для этого по b_{s+1}, $s = \overline{1, N-1}$, на основе леммы из [5, с.57] следует построить непрерывные на $[(s-1)h, sh]$ функции $f_{s+1}(t)$ такие, что $f_{s+1}[(s-1)h] = f_{s+1}(sh) = 0$,

$$\max_{t\in[(s-1)h,sh]} ||f_{s+1}(t)|| \le \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)||b_{s+1}||, \qquad -\frac{1}{h}F_{*,s}(f_b, sh) = b_{s+1},$$

и функцию $f_b(t)$ определить равенствами $f_b(t) = f_{s+1}(t)$, $t \in [(s-1)h, sh]$, $s = \overline{1, N-1}$, $f_b(t) = 0$, $t \in [T-h, T]$. Взяв $d_b = -b_1 + \sum\limits_{j=2}^{m} C_j F_{*r_j}(f_b, t_j)$, получим равенство $-F(f_b, d_b, h) = b$.

Тогда согласно лемме единственным решением систем уравнений (24) будет вектор $\lambda_b = (\lambda_{b1}, ..., \lambda_{bN})' \in R^{nN}$ с элементами $\lambda_{br} = x_b[(r-1)h]$, $r = \overline{1, N}$, где $x_b(t)$ – решение задачи (1), (2) при $f(t) = f_b(t)$, $d = d_b$ и ввиду корректной разрешимости задачи (1), (2) имеет место неравенство

$$\|Q_h^{-1}b\| = ||\lambda_b|| = \max_{r=\overline{1,N}} ||x_b[(r-1)h]|| \le ||x_b||_1 \le K\max\Big(||f_b||_1, ||d_b||\Big). \tag{25}$$

Учитывая, что по построению функции $f_b(t)$ и выбору вектора d_b имеют место неравенства

$$||f_b||_1 \le \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)||b||,$$

$$||d_b|| \le ||b|| + \sum_{j=2}^{m} ||C_j|| ||F_{*,r_j}(f_b, t_j)|| \le \Big[1 + h\sum_{j=2}^{m} ||C_j||e^{\alpha h}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big]||b||,$$

из (25) получим оценку

$$\|Q_h^{-1}b\| \le \max\Big[1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1 + h\sum_{j=2}^{m} ||C_j||e^{\alpha h}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big]K||b||.$$

Отсюда ввиду произвольности $b \in R^{nN}$ следует, что

$$||[Q_*(h)]^{-1}|| = \frac{1}{h}||Q_h^{-1}|| \le \frac{1}{h}K_1(\varepsilon, h), \tag{26}$$

где $K_1(\varepsilon, h) = \max\Big[1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1 + h\sum\limits_{j=2}^{m} ||C_j||e^{\alpha h}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big]K$. Используя оценку

$$||Q_*(h) - Q_\nu(h)|| \le \max\Big(1, h\sum_{j=2}^{m} ||C_j||\Big)\left[e^{\alpha h} - \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^p}{p!}\right] \tag{27}$$

и выбирая шаг $h_1 = h_1(\varepsilon, \nu) \in (0, h_0] : Nh_1 = T$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{h} K_1(\varepsilon, h) \max\Big(1, h \sum_{j=2}^{m} ||C_j||\Big) \left[e^{\alpha h} - \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^p}{p!}\right] < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)},$$

получим: a) обратимость матрицы $Q_\nu(h_1)$ и

$$||[Q_\nu(h_1)]^{-1}|| \le \frac{1}{h_1} K_1(\varepsilon, h_1) \frac{2(1+\varepsilon)}{2+\varepsilon},$$

$$b) \quad q_\nu(h_1) = \frac{2(1+\varepsilon)}{h_1(2+\varepsilon)} K_1(\varepsilon, h) \max\Big(1, h_1 \sum_{j=2}^{m} ||C_j||\Big) \left[e^{\alpha h_1} - \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(\alpha h_1)^p}{p!}\right] < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < 1.$$

Достаточность следует из теоремы 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если задача (1), (2) корректно разрешима, то для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h_0 = h_0(\nu)$ такое, что при всех $h \in (0, h_0]$: $Nh = T$ матрица $Q_\nu(h)$ будет обратимой и*

$$||[Q_\nu(h_1)]^{-1}|| \le \frac{\gamma}{h}, \tag{28}$$

где γ – const, не зависящая от h. Причем, если известна K – константа корректной разрешимости задачи (1), (2), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\bar{h} = \bar{h}(\varepsilon, \nu)$ и оценка (28) будет выполняться с константой $\gamma = (1+\varepsilon)K$ при всех $h \in (0, \bar{h}] : Nh = T$.

Доказательство. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима с константой K. Тогда, как было установлено при доказательстве теоремы 3, для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0]$: $Nh = T$ матрица $Q_*(h)$ обратима и справедлива оценка (26). Взяв число $h_1 > 0$ удовлетворяющим неравенству $h \sum\limits_{j=2}^{m} ||C_j|| e^{\alpha h}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \le \frac{\varepsilon}{2}$, получим обратимость матрицы $Q_*(h)$ для всех $h \in (0, h_1]$: $Nh = T$ и оценку

$$||[Q_*(h)]^{-1}|| \le \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \frac{K}{h}.$$

Вновь используя оценку (27) и выбирая $\bar{h} = \bar{h}(\varepsilon, \nu)$ удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{h}\Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) K \max\Big(1, h \sum_{j=2}^{m} ||C_j||\Big) \left[e^{\alpha h} - \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^p}{p!}\right] < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)},$$

получим обратимость матрицы $Q_\nu(h)$ для всех $h \in (0, \bar{h}] : Nh = T$ и оценку (28) с $\gamma = (1+\varepsilon)K$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h_0 = h_0(\nu)$ такое, что при всех $h \in (0, h_0]$: $Nh = T$ матрица $Q_\nu(h)$ обратима и ее обратная удовлетворяет оценке (28).*

Тогда задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K = \gamma$.

Доказательство. Пусть для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(h)$ обратима при всех $h \in (0, h_0]$: $Nh = T$ и имеет место оценка (28). Тогда учитывая, что

$$q_\nu(h) = \frac{\gamma}{h} \max\Big(1, h \sum_{j=2}^{m} ||C_j||\Big) \left[e^{\alpha h} - \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^p}{p!}\right] = O(h^\nu)$$

и выбирая $\tilde{h} \in (0, h_0]$: $Nh = T$, удовлетворяющим неравенству $q_\nu(h) < 1$, из теоремы 1 получим корректную разрешимость задачи (1), (2). При этом оценка (12) справедлива для всех $h \in (0, \tilde{h}]$: $Nh = T$. Заменяя $\gamma_\nu(h)$ на $\frac{\gamma}{h}$ и переходя к пределу при $h \to 0$ в $M_\nu(h)$ имеем

$$||x^*||_1 \leq \gamma \max\Big(||f||_1, ||d||\Big),$$

т.е. задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K = \gamma$. Теорема 5 доказана.

Таким образом, одним из основных условий корректной разрешимости является обратимость матрицы $Q_\nu(h)$ при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$, $h > 0$: $Nh = T$. Специальная структура матрицы $Q_\nu(h)$ позволила в [7] установить аналоги рекуррентных формул (5.5) из [5, с.62], позволяющие поблочно определить элементы матрицы $[Q_\nu(h)]^{-1}$.

Используя эти формулы, можно вычислить $||[Q_\nu(h)]^{-1}||$ и при различных ν, h, получить двухпараметрическое семейство сходящихся алгоритмов нахождения решения задачи (3)-(5), одновременно обеспечивающих однозначную разрешимость исходной задачи (1), (2).

В [7] были получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) при дополнительном предположении, что точки t_j, $j = \overline{1, m}$, лежат в разных интервалах разбиения $[0, T)$.

Цитированная литература

1. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы. М.,1969.

2. **Ешуков Л. Н., Веков А. А., Степанов А. Н.** Проблемы и библиография теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Труды Рязан. радиотехн. ин-та. Рязань. 1972. Вып. 42. С. 184-192.

3. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1985.

4. **Кигурадзе И. Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. Т. 30. С. 3-103.

5. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №1. С. 50-66.

6. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М., 1980.

7. **Иманчиев А. Е.** // Известия НАН РК, МОН РК. Сер.физ.-мат. 2002. №3. С.79-84.

Поступила в редакцию 18.02.2005г.

УДК 511.33

АРИФМЕТИКА НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ С НЕЧЕТКОЗНАЧНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

В. П. Добрица, Е. А. Иванникова, И. Г. Полегенько, Г. Э. Яхьева

КазНПУ им.Абая
г.Алматы пр.Достык, 13 dobritsa@mail.ru

Целью работы является обоснование эффективности применения нечеткозначных операций по сравнению с четкими операциями над нечеткими числами.

Изучение нечетких множеств, как научное направление, начинает формироваться в 60-х годах XX века. Основа была заложена Л.А. Заде [1,5]. Исследования по нечеткости получили широкое развитие. В частности, стали рассматриваться и нечеткие множества с заданными на них операциями, которые удовлетворяют определенным свойствам относительно функции принадлежности элемента множеству. В этом же русле проводятся исследования и по нечеткой арифметике [2,3,6].

Нечеткая арифметика отличается от стандартной в первую очередь тем, что вместо конкретного объекта (элемента) рассматривается нечеткое множество, каждый элемент которого с той или иной степенью приоритета удовлетворяет понятию нечеткого числа [2].

Любой нечеткий интервал A на множестве действительных чисел R вводится через α-уровни для всех $\alpha \in (0,1]$ и представляется либо трапециодальным интервалом, либо треугольным числом (в [2] соответственно называемыми трапециодальным нечетким интервалом и треугольным нечетким числом) с соответствующими этим представлениям функциями принадлежности.

Любой трапециодальный нечеткий интервал A полностью характеризуется четверкой $< a,b,c,d >$ действительных чисел, через которые его функция принадлежности $\mu(x)$ определяется так:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 1, & x \in [b,c], \\ \frac{d-x}{d-c}, & x \in [c,d], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $A =< a,b,c,d >$ — символьное представление нечеткого трапециодального интервала, чей α-уровень для всех $\alpha \in (0,1]$ определяется по формуле

$$^{\alpha}A = [a + (b-a)\alpha,\ d - (d-c)\alpha],\ \text{где}\ \alpha \in (0,1] \quad \text{или}\ ^{\alpha}A = [\underline{a}, \overline{a}], \tag{2}$$

Keywords: *fuzzy number, fuzzy of operation, crisp operation, fuzzy, arithmetic of fuzzy numbers*
2000 Mathematics Subject Classification: 08A72

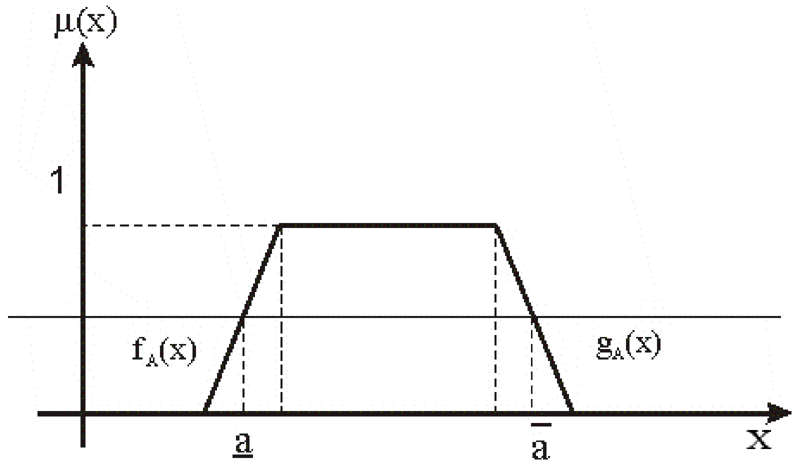


Рис. 1: Нечеткий трапециодальный интервал A.

где $\underline{a} = a + (b - a)\alpha, \quad \overline{a} = d - (d - c)\alpha$. Треугольное нечеткое число есть особый нечеткий интервал, для которого $b = c$ в (1) и (2), далее символьно представляемое, как $A =< a, b, c >$, для которого функция принадлежности $\mu(x)$ определяется следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x = b, \\ \frac{x-c}{b-c}, & x \in [b, c], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

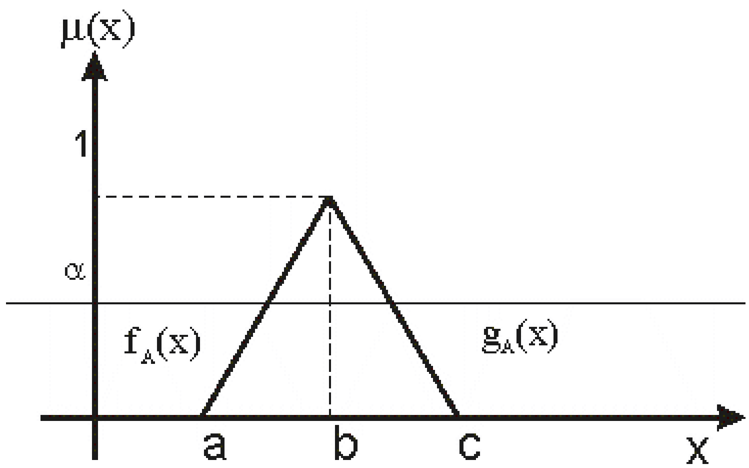


Рис. 2: Нечеткое треугольное число A.

Из рис.1,2 видно, что функции $f_A(x)$ и $g_A(x)$ — функции размытости для любых $\alpha \in (0, 1]$, при этом $f_A(x)$ есть линейная функция, монотонно возрастающая на $[a, b]$, и $g_A(x)$ — линейная функция, монотонно убывающая на $[c, d] \quad ([b, c])$.

1. Об арифметике нечетких чисел. Аналогично арифметике четких чисел на нечетких интервалах определяются операции сложения, умножения, вычитания и деления. Для любой пары нечетких интервалов A и B, используя α-уровневое представление, четыре основные арифметические операции для всех $\alpha \in (0, 1]$ вычисляем по общей формуле:

$$^{\alpha}(A * B) = a * b| < a, b > \in {^{\alpha}A} \times {^{\alpha}B}, \tag{4}$$

где $*$ обозначает любую из 4-х арифметических операций. Для операции деления A на B необходимо, чтобы $0 \notin {}^{\alpha}B$ для любых $\alpha \in (0,1]$ [2].

Каждая конкретная арифметическая операция, где α-уровни нечетких интервалов A и B определяются по (2) для любых $\alpha \in (0,1]$, вводится по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&{}^{\alpha}[\underline{a},\overline{a}] + {}^{\alpha}[\underline{b},\overline{b}] = {}^{\alpha}[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}],\\
&{}^{\alpha}[\underline{a},\overline{a}] - {}^{\alpha}[\underline{b},\overline{b}] = {}^{\alpha}[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}],\\
&{}^{\alpha}[\underline{a},\overline{a}] \bullet {}^{\alpha}[\underline{b},\overline{b}] = {}^{\alpha}[\min(\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b}),\ \max(\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b})],\\
&{}^{\alpha}[\underline{a},\overline{a}]/{}^{\alpha}[\underline{b},\overline{b}] = {}^{\alpha}[\underline{a},\overline{a}] \bullet {}^{\alpha}[1/\overline{b},1/\underline{b}],\ \text{где}\quad 0 \notin {}^{\alpha}[\underline{b},\overline{b}].
\end{aligned} \tag{5}$$

Вычисление значений операций по этим формулам приводит к некорректным результатам. Рассмотрим нечеткие интервалы $A =< 1,2,3,4 >$ и $B =< 3,4,5,6 >$. Используя формулы (2), выполним операцию умножения A на B для всех $\alpha \in (0,1]$ в соответствии с (5):
${}^{\alpha}A = [\underline{a},\overline{a}] = [1+\alpha,\ 4-\alpha]$,
${}^{\alpha}B = [\underline{b},\ \overline{b}] = [3+\alpha,\ 6-\alpha]$,
${}^{\alpha}[\underline{a},\overline{a}] \bullet {}^{\alpha}[\underline{b},\overline{b}] = {}^{\alpha}[\min((1+\alpha)(3+\alpha),\ (1+\alpha)(6-\alpha),\ (4-\alpha)(3+\alpha),\ (4-\alpha)(6-\alpha)),$
$\max((1+\alpha)(3+\alpha),\ (1+\alpha)(6-\alpha),\ (4-\alpha)(3+\alpha),\ (4-\alpha)(6-\alpha))] =$
$= {}^{\alpha}[\min((3+4\alpha+\alpha^2),\ (6+5\alpha-\alpha^2),\ (12+\alpha-\alpha^2),\ (24-10\alpha+\alpha^2)),\ \max((3+4\alpha+\alpha^2),$
$(6+5\alpha-\alpha^2),\ (12+\alpha-\alpha^2),\ (24-10\alpha+\alpha^2))]$.
Выбор из полученных значений функции минимального и максимального значений представляется возможным только для конкретно определенных α.

Однако автор статьи [2] в приводимых им примерах для вычислений использует не формулы (5), а следующее определение, которое он не вводит, но которое использует при вычислениях.

О п р е д е л е н и е 1. *Для любых двух нечетких трапециодальных интервалов*

$$A =< a_1, b_1, c_1, d_1 >,\ B =< a_2, b_2, c_2, d_2 >$$

любая из четырех арифметических операций определяется так:

$$A \bullet B = [\min(a_1 * d_2, d_1 * a_2), \min(b_1 * c_2, c_1 * b_2), \max(a_1 * d_2, d_1 * a_2), \max(b_1 * c_2, c_1 * b_2)], \tag{6}$$

при этом в случае деления $0 \notin< a_2, d_2 >$.
Но если сравнивать вычисления по формулам (5) и (6) на конкретных значениях, например, при $A =< 0,1,2,3 >$ и $B =< 1,2,3,4 >$, мы получим следующее.

Подсчитав произведение по формуле (6), имеем
$A \bullet B =< 0,2,6,12 >$.
Его α-уровень определяется по (2) следующим образом:
${}^{\alpha}A = [\underline{a},\overline{a}] = [\alpha, 3-\alpha]$,
${}^{\alpha}B = [\underline{b},\overline{b}] = [1+\alpha,\ 4-\alpha]$,
${}^{\alpha}(A \bullet B) = {}^{\alpha}[\min(\alpha(1+\alpha), \alpha(4-\alpha), (3-\alpha)(1+\alpha), (3-\alpha)(4-\alpha)),$
$\max(\alpha(1+\alpha), \alpha(4-\alpha), (3-\alpha)(1+\alpha), (3-\alpha)(4-\alpha))] = {}^{\alpha}[\min(\alpha+\alpha^2, 4\alpha-\alpha^2, 3+2\alpha-\alpha^2, 12+7\alpha-\alpha^2),$
$\max(\alpha+\alpha^2, 4\alpha-\alpha^2, 3+2\alpha-\alpha^2, 12+7\alpha-\alpha^2)]$.
Определим минимальное и максимальное числа, положив, $\alpha = 0,5$. Получим, что минимальная функция равна $\alpha+\alpha^2$, а максимальная равна $12-7\alpha+\alpha^2$, т.е. $(A * B) = [\alpha+\alpha^2,\ 12-7\alpha+\alpha^2]$.

Изобразим схематически результат произведения, полученного по формулам (5), (6).

Из рис.3 видно, что эти формулы и произведения нечетких интервалов не являются эквивалентными. Произведение, вычисленное по формуле (5), ограничивается функциями, которые линейными не являются. В то время, как по определению функция принадлежности $\mu(x)$, определяемая по формуле (1), должна быть ограничена линейными функциями. Данный пример показывает, что определение операции умножения нечетких чисел является некорректным

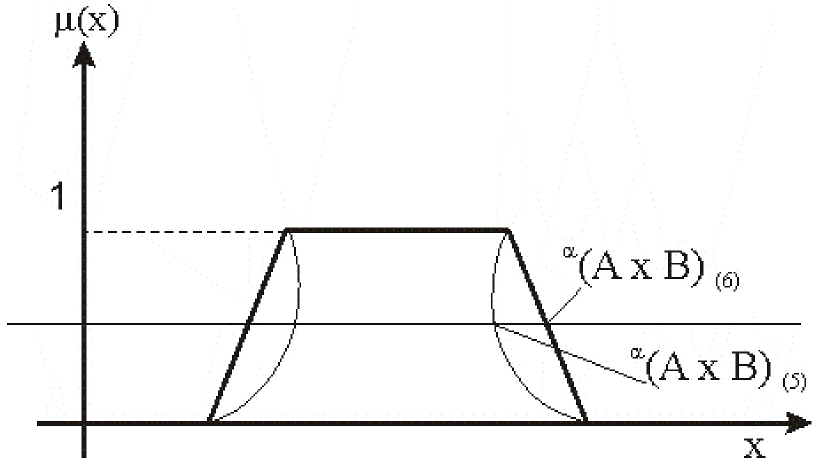


Рис. 3: Представление произведения 2-х нечетких чисел

по отношению к определению α-уровней. Причем в этом случае α-уровни не совпадают, т.е. ${}^{\alpha}(A \bullet B)_{(5)} \neq {}^{\alpha}(A \bullet B)_{(6)}$, что тоже является недостатком приведенного подхода.

Далее, если производить вычитание и деление для двух одинаковых интервалов по формулам (5), то не получается значения нуль для разности и единицы в случае рассмотрения деления двух нечетких чисел.

Чтобы обойти данные недостатки, автор [2] вводит дополнительные ограничения на операции следующего вида:

$$\begin{aligned}
&{}^{\alpha}(A + A)_E = \{a + a |\, a \in {}^{\alpha}A\} = {}^{\alpha}[2\underline{a}, 2\overline{a}],\\
&{}^{\alpha}(A - A)_E = \{a - a |\, a \in {}^{\alpha}A\} = 0,\\
&{}^{\alpha}(A \bullet A)_E = \{a \bullet a |\, a \in {}^{\alpha}A\} = \begin{cases} {}^{\alpha}[\overline{a}^2, \underline{a}^2], \overline{a} < 0 \,\forall \alpha \in (0,1],\\ {}^{\alpha}[\underline{a}^2, \overline{a}^2], \underline{a} > 0 \,\forall \alpha \in (0,1],\\ [0,\, \max(\underline{a}^2, \overline{a}^2)],\, 0 \in {}^{\alpha}[\underline{a}, \overline{a}], \end{cases}\\
&{}^{\alpha}(A/A) = \{a/a |\, a \in {}^{\alpha}A,\, 0 \notin {}^{\alpha}A,\, \forall \alpha \in (0,1]\} = 1,
\end{aligned} \tag{7}$$

которые не вписываются в общее определение операций (4). При таких ограничениях полученный результат будет являться точным (нечетким) числом и определяться единственным образом.

Также без введения ограничений на операции не выполняется и дистрибутивный закон умножения относительно сложения для любых нечетких чисел A, B, C, т.е. $A(B + C) = AB + AC$.

Рассматривая трапециодальные нечеткие интервалы $A =< 0, 1, 2, 3 >$, $B =< 3, 4, 4, 5 >$, $C =< -2, -1, -1, 0 >$, имеем
${}^{\alpha}A = [\underline{a}, \overline{a}]$,
${}^{\alpha}A = [\alpha, 3 - \alpha]$,
${}^{\alpha}B = [3 + \alpha, 5 - \alpha]$,
${}^{\alpha}C = [\alpha - 2, -\alpha]$, автор [2] получает $A \bullet B + A \bullet C =< -6, 2, 7, 15 >$,
${}^{\alpha}[A \bullet B + A \bullet C] = [8\alpha - 6,\, 15 - 8\alpha]$,
$A(B + C) =< 0, 3, 6, 15 >$, $\qquad {}^{\alpha}[A(B + C)] = [3\alpha,\, 15 - 9\alpha]$.

Здесь для вычисления произведения используется формула (6) из определения 1 и α-уровень определяется из формулы (2), приведенной ранее.

Изобразим на рисунке полученные результаты.

Рис.4. показывает, что как в данном, так и в общем случае равенства нет, т.е. выполняется лишь субдистрибутивный закон $A(B + C) \subseteq AB + AC$. Однако с введением ограничений на

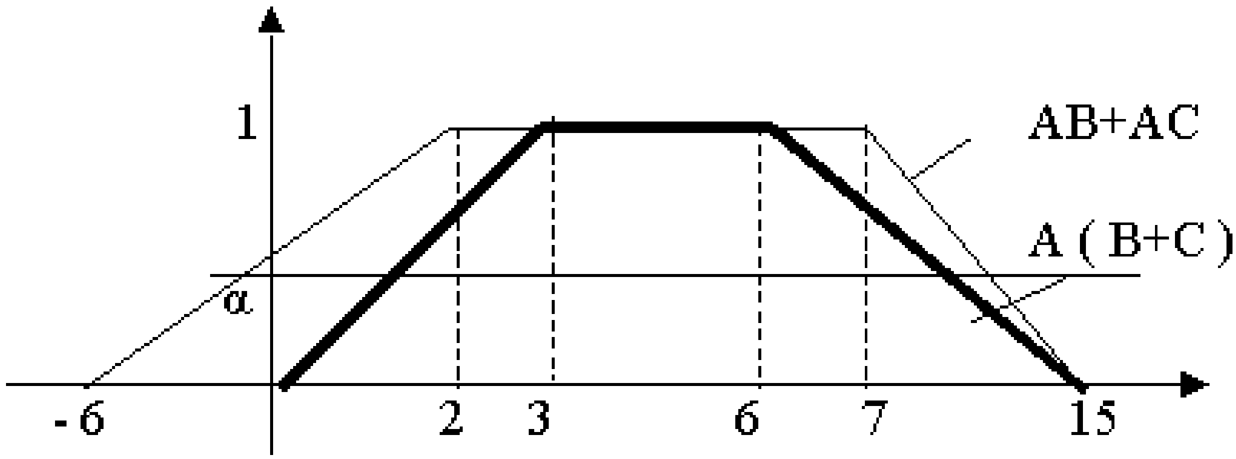


Рис. 4: Умножение интервалов.

операции требуемое равенство выполняется.

Введение ограничений сужает понятие нечеткого числа, определенное ранее. Поэтому такой подход является не совсем удачным. Чтобы избавиться от ограничений и приведенных выше несоответствий и, тем самым, не сужать понятия нечеткого числа, можно ввести другие определения операций.

2. Размытые группы нечетких чисел.

Определение 2. *Любое треугольное нечеткое число A, выраженное через тройку чисел $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ $(a_1 \le a_2 \le a_3)$, далее будем записывать в виде*

$$A =< a, \alpha, \beta >,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

где $a = a_2$ есть четкий представитель числа A, который будем называть модой, а числа $\alpha = |a_2 - a_1|$, $\beta = |a_3 - a_2|$ определяют характеристики "размытости", которые дают левую и правую границы размытости числа A.

Теперь введем определение нечеткозначной операции.

Определение 3. *На множестве нечетких чисел нечеткозначная операция для любых двух нечетких чисел $A =< a, \alpha_1, \beta_1 >$ и $B =< b, \alpha_2, \beta_2 >$ будет определяться следующим образом:*

$$A * B = \{C \,|\, C =< c, \alpha', \beta' >, \text{ где } c = a * b,\ \alpha', \beta' \in \mathbf{R}\}. \tag{9}$$

Заметим, что результатом операции является множество. Элемент $C =< c, \alpha, \beta >$, $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$, из этого множества является каноническим представителем данного множества и принадлежность элемента $C =< c, \alpha', \beta' >$ этому множеству определяется в сравнении с этим каноническим представителем, т.е. $C' = \gamma C$, где $\gamma = \mu_{A*B}(C')$ является функцией принадлежности числа данному множеству и определяется следующим образом:

$$\gamma = \frac{1}{\max\{|\alpha - \alpha'|, |\beta - \beta'|\} + 1}. \tag{10}$$

Заметим, что $\mu_{A*B}(C) = 1$.

Введенное таким образом определение треугольного нечеткого числа,
во-первых, позволяет определять функции размытости для каждого нечеткого числа единственным образом.

Рассмотрим, например, нечеткие числа $A =< 1, 3, 5 >$, $B =< 0, 7, 8 >$. Их сумма определится по (9) следующим образом: $A + B = \{C \,|\, C =< 1, \alpha^*, \beta^* >,\ \alpha^*, \beta^* \in \mathbf{R}\}$. Ее канонический представитель $C_K =< 1, 7, 8 >$ и функция принадлежности элемента C' этому множеству определится из (10) в сравнении с C_K. В частности, для элемента $C' =< 1, 3, 5 >$ функция приоритетности определится так:

$$\gamma_{A+B}C' = \frac{1}{\max\{|7-3|, |8-5|\} + 1} = \frac{1}{5},$$

т.е. C' принадлежит множеству $A + B$ с приоритетом $\gamma = \frac{1}{5}$;
во-вторых, не требует введения дополнительных ограничений на операции для определения нулевого и обратного элементов. Рассмотрим два равных нечетких элемента $A = B =< 2, 4, 5 >$ и найдем их разность, используя (9): $A - B = \{C \,|\, C =< 0, \alpha^*, \beta^* >,\ \alpha^*, \beta^* \in \mathbf{R}\}$. Каноническим представителем будет являться число $C_K =< 0, 4, 5 >$. Принадлежность остальных элементов данному множеству определяется сравнением с этим каноническим элементом. Результатом операции является не единственный элемент, а целое множество нечетких нулей $\mathbf{0} = \{0 \,|\, 0 = =< 0, \alpha, \beta >,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Аналогично, частным от деления двух равных нечетких чисел является множество нечетких единиц $\mathbf{1} = \{1 \,|\, 1 =< 1, \alpha, \beta >,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$;
в-третьих, выполняется дистрибутивность без каких-либо ограничений на ее введение.

Действительно, для нечетких чисел $A =< 1, 3, 5, >$, $B =< 0, 1, 2 >$, $C =< 2, 3, 4 >$ имеем $A*(B-C) = \{E \,|\, E =< 2, \alpha^*, \beta^* >,\ \alpha^*, \beta^* \in \mathbf{R}\}$, где $E_K =< 2, 3, 5 >$ — канонический представитель данного множества. Пусть $E' =< 2, 7, 7 >$ — один из элементов множества. Его функция принадлежности данному множеству определится как

$$\gamma_{A(B+C)}(E') = \frac{1}{\max\{|3-7|, |5-7|\} + 1} = \frac{1}{5}.$$

Рассмотрим теперь множество $A * B + A * C = \{P \,|\, P =< 2, \alpha^*, \beta^* >,\ \alpha^*, \beta^* \in \mathbf{R}\}$, $P_K =< 2, 3, 5 >$ — его канонический представитель. Установим принадлежность элемента $P' =< 2, 7, 7 >$ этому множеству. Имеем

$$\gamma_{AB+AC}(P') = \frac{1}{\max\{|3-7|, |5-7|\} + 1} = \frac{1}{5}.$$

Получим, что $A * (B + C) = A * B + A * C$, причем значения функций приоритетности также совпадают, т.е. $\gamma_{A(B+C)=\gamma_{AB+AC}}$.

Используя введенные понятия множества нечетких чисел с нечеткозначной операцией, мы можем рассмотреть алгебраическую структуру, например, группу, как это было введено в [4]. Аналогично стандартной арифметике размытые операции обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, т.е. $\forall A =< a, \alpha_1, \beta_1, >$, $B =< b, \alpha_2, \beta_2 >$, $C =< c, \alpha_3, \beta_3 >$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, 3}$ выполняются равенства

$$A * B = B * A,$$

$$A * (B * C) = (A * B) * C,$$

рассматриваемые как равенства множеств.

Доказательство свойств.

Коммутативность

$$A * B = B * A. \tag{11}$$

Рассмотрим множество

$$A * B = \{C \,|\, C =< a * b, \alpha, \beta >, \, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}. \tag{12}$$

Для данного множества нечеткое число $C^0 =< b * a, \alpha^0, \beta^0 >$ является каноническим представителем, где $\alpha^0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta^0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

$$B * A = \{C \,|\, C =< b * a, \alpha, \beta >, \, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}. \tag{13}$$

Для этого множества $C^1 =< b * a, \alpha^1, \beta^1 >$ является каноническим представителем, где $\alpha^1 = \max\{\alpha_2, \alpha_1\}$, $\beta^1 = \max\{\beta_2, \beta_1\}$. Очевидно, что множества (12), (13) совпадают, т.к. $a * b = b * a$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Заметим, что у них совпадают также и канонические представители, т.е. $C^0 =< a * b, \alpha^0, \beta^0 >=< b * a, \alpha^1, \beta^1 >= C^1$, поскольку $a * b = b * a$ и $\alpha^0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\alpha_2, \alpha_1\} = \alpha^1$, $\beta^0 = \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\beta_2, \beta_1\} = \beta^1$. При этом произвольный элемент $C' =< c, \alpha', \beta' >$, где $c = a * b = b * a$, будет входить в эти множества с одинаковым приоритетом, что следует из равенства

$$\mu_{A*B}(C') = \frac{1}{\max\{|\alpha^0 - \alpha'|, |\beta^0 - \beta'\} + 1} = \frac{1}{\max\{|\alpha^1 - \alpha'|, |\beta^1 - \beta'|\} + 1} = \mu_{B*A}(C').$$

Ассоциативность

$$A * (B * C) = (A * B) * C. \tag{14}$$

Для любых $A =< a, \alpha_1, \beta_1, >$, $B =< b, \alpha_2, \beta_2 >$, $C =< c, \alpha_3, \beta_3 >$ рассмотрим множество

$$A * (B * C) = \{D \,|\, D =< a * (b * c), \alpha, \beta >, \, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}. \tag{15}$$

Для данного множества $D^0 =< d^0, \alpha^0, \beta^0 >$ — канонический представитель, где $d^0 = a * (b * c)$, $\alpha^0 = \max\{\alpha_1, \max\{\alpha_2, \alpha_3\}\}$, $\beta^0 = \max\{\beta_1, \max\{\beta_2, \beta_3\}\}$,

$$(A * B) * C = \{D \,|\, D =< (a * b) * c, \alpha, \beta >, \, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}. \tag{16}$$

Для этого множества $D^1 =< d^1, \alpha^1, \beta^1 >$ — канонический представитель, где $d^1 = (a * b) * c$, $\alpha^1 = \max\{\max\{\alpha_1, \alpha_2, \}\alpha_3\}$, $\beta^1 = \max\{\max\{\beta_1, \beta_2\}, \beta_3\}$. Очевидно, что у множеств (15),(16) совпадают канонические представители, т.к. $d^0 = a * (b * c) = (a * b) * c = d^1$ и
$\alpha^0 = \max\{\alpha_1, \max\{\alpha_2, \alpha_3\}\} = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \max\{\max\{\alpha_1, \alpha_2, \}\alpha_3\} = \alpha^1$,
$\beta^0 = \max\{\beta_1, \max\{\beta_2, \beta_3\} = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \max\{\max\{\beta_1, \beta_2\}, \beta_3\} = \beta^1$, т.е. $D^0 = D'$.
В то же время (15) и (16) совпадают как множества, т.к. $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и $a * (b * c) = (a * b) * c$. Для произвольного элемента $D' =< d, \alpha', \beta' >$ из $A * (B * C)$ имеем

$$\mu_{A*(B*C)}(D') = \frac{1}{\max\{|\alpha - \alpha^0|, |\beta - \beta^0|\} + 1} = \frac{1}{\max\{|\alpha - \alpha^1|, |\beta - \beta^1|\} + 1} = \mu_{(A*B)*C}(D').$$

Поэтому данные множества полностью совпадают и как нечеткие множества (по функциям принадлежности).

На множестве нечетких чисел мы можем определить нечеткие нейтральные элементы и нечеткие обратные элементы.

Определение 4. *Нечеткое число $E =< e, \alpha_1, \beta_1 >$ будем называть нейтральным элементом относительно операции $*$, если для любого нечеткого числа $A =< a, \alpha, \beta >$ будет выполняться равенство*

$$A * E = E * A = \mathbf{A}, \tag{17}$$

где $\mathbf{A} = \{A' \,|\, A' =< a, \alpha', \beta' >, \, \alpha', \beta' \in \mathbf{R}\}$.

A' входит в $\mathbf{A}$ с приоритетом $\mu_{\mathbf{A}}(A') = \gamma$, где γ вычисляется по формуле (10); если $\mu_{\mathbf{A}}(A') = 1$, то A' является каноническим представителем этого множества, относительно которого можно вычислять приоритет других элементов данного множества. Совокупность всех нейтральных нечетких элементов образует множество

$$\mathbf{E} = \{E \,|\, E =< e, \alpha_1, \beta_1 >,\ \alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{R}\}. \tag{18}$$

Определение 5. *Нечеткое число $A^{-1} =< a^{-1}, \alpha', \beta' >$ будем называть обратным нечетким элементом к $A =< a, \alpha, \beta >$ относительно операции $*$, если выполняется равенство*

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = \mathbf{E}. \tag{19}$$

Совокупность всех нечетких обратных элементов образует множество

$$\mathbf{A}^{-1} = \{A^{-1} \,|\, A^{-1} =< a^{-1}, \alpha', \beta' >,\ \alpha', \beta' \in \mathbf{R}\}. \tag{20}$$

Любое нечеткое число A^{-1} будет принадлежать множеству $\mathbf{A}^{-1}$ с приоритетом $\mu_{\mathbf{A}^{-1}}(A^{-1}) = \gamma$, определяемым по формуле (10). Если $\gamma = 1$, то данный элемент A^{-1} будет являться каноническим представителем данного множества.

Условие компактности на множестве нечетких чисел определяется следующим образом:

$$A * B =_{\gamma} C \Rightarrow (((A * B) * D = C * D) \wedge (D * (A * B) = D * C))). \tag{21}$$

Опираясь на вышесказанное, мы можем прийти к выводу, что множество нечетких чисел $\mathbf{A}$ с определенной на нем операцией сложения является размытой группой относительно этого сложения, т.к. выполняются все аксиомы размытой группы:
1) операция сложения ассоциативна;
2) операция сложения компактна;
3) в множестве $\mathbf{A}$ существует подмножество $\mathbf{O}$ нейтральных нечетких чисел относительно сложения;
4) для каждого нечеткого элемента A из $\mathbf{A}$ существует множество обратных (противоположных) элементов $-\mathbf{A}$.

Кроме того, на этом множестве для данной нечеткозначной операции будет выполняться и свойство коммутативности. Если из множества нечетких чисел $\mathbf{A}$ исключить множество нечетких нулей $\mathbf{O} = \{O \,|\, O =< o, \alpha, \beta >,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$, которое соответствует определению 4, то полученное множество нечетких чисел $\mathbf{A} \backslash \mathbf{O}$ будет являться размытой группой относительно операции умножения, т.к. на ней выполнены аксиомы 1–4 размытой группы для умножения. В этом случае также выполняется свойство коммутативности.

Вывод. Совокупность нечетких чисел с нечеткозначными операциями $+, *$ представляет собой размытое кольцо.

Цитированная литература

1. **Zadeh L.A.** //Inform. and Control. 1965. № 8. P. 338–353.

2. **Klir G. J.** //Fuzzy arithmetic with requisite constraints, Fuzzy Sets and Systems. 1997. № 91. P.165–175.

3. **Ma M., Friedman M., Kandel A.** //A new fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets and Systems. 1999. № 108. P.83–90.

4. **Добрица В.П., Яхъяева Г.Э.** //Вычислительные системы. 1999. № 165. P.127–138.

5. **Zadeh L.A.** The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, I, II, III, Inform. sci. 1975. № 8. P.199–251, P.301–357. № 9. P.43–80.

6. **Lun Shan Gao** //The fuzzy arithmetic mean, Fuzzy Sets and Systems. 1999. № 107. P.335–348.

Поступила в редакцию 08.09.2004г.

Исправленный вариант 15.12.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.48 — 51*

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Т.Ж.Елдесбай

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050010 Almaty Pushkin str., 125 galya@math.kz

Для модельного эллиптико-гиперболического уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением решена одна обратная задача в спектральной постановке.

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа с характеристическим параболическим вырождением на линии $y = 0$ [1, 2]:

$$u_{xx} + Sgn\, y|y|^m u_{yy} - Sgn\, y\, C(y)u = 0, \quad 1 \le m < 2, \tag{1}$$

относительно решения которого будем предполагать, что

$$\left.\begin{aligned} -\infty < \int\limits_{-\infty}^{0} |u(x,y)|^2(-y)^{-m}dy < \infty\ \forall x \ge 0, \\ \int\limits_{0}^{\infty} |u(x,y)|^2 y^{-m}dy < \infty\ \forall x \ge 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y), \quad -\infty < y < \infty, \tag{3}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$ – заданные функции, причем ниже введены следующие обозначения:

$$\varphi(y) = \begin{cases} \varphi_1(y), y > 0, \\ \varphi_2(y), y < 0, \end{cases} \varphi_1(+0) = \varphi_2(-0) = \varphi(0),$$

$$\psi(y) = \begin{cases} \psi_1(y), y > 0, \\ \psi_2(y), y < 0, \end{cases} \psi_1(+0) = \psi_2(-0) = \psi(0),$$

и

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), y > 0, \\ u_2(x, y), y < 0, \end{cases}$$

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \rho_1(\lambda_1), y > 0, \\ \rho_2(\lambda_2), y < 0. \end{cases}$$

Keywords: *inverse problem, model equation, mixed type*
2000 Mathematics Subject Classification: 49K15

З а д а ч а. Требуется найти коэффициент $C(y)$ уравнения (1), если известно, что решение задачи (1)-(3) удовлетворяет условию

$$\lim_{y\to 0+} y^{m-1}u(x,y) = \lim_{y\to 0-}(-y)^{m-1}u(x,y) = \tau(x), 0 < x < \infty, \tag{4}$$

где $\tau(x)$ – известная функция.

Будем считать, что функция $\tau(x)$ является реализацией решения задачи (1)-(3) при $y\to\pm 0$ для некоторой непрерывной на интервалах $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ функции $C(y)$, что эквивалентно предположению существования решения обратной задачи.

Т е о р е м а . *Пусть функции* $\varphi_1(y)\in C[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$, $\psi_1(y)\in C[0,\infty)\cap C^1(0,\infty)$, $\varphi_2(y)\in C(-\infty,0]\cap C^1(-\infty,0)$, $\psi_2(y)\in C(-\infty,0]\cap C^1(-\infty,0)$, $\tau(x)\in C[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$, *причем*

$$\tau(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi_1}(\lambda_1)d\rho_1(\lambda_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi_2}(\lambda_2)d\rho_2(\lambda_2),$$

$$\widetilde{\varphi_1}(\lambda_1) = \int\limits_{0}^{\infty}\varphi_1(y)y^{-m}V_1(y,\lambda_1)dy, \quad \widetilde{\varphi_2}(\lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{0}\varphi_2(y)(-y)^{m}V_2(y,\lambda_2)dy,$$

где $V_1(y,\lambda_1)$ *и* $V_2(y,\lambda_2)$ *– решения соответственно задач:*

$$-y^m V_1'' + C(y)V_1 = \lambda_1 V_1,\ 0<y<\infty,\ \lim_{y\to 0+}V_1(y,\lambda_1) = 1, \tag{5}$$

$$-(-y)^m V_2'' + C(y)V_2 = \lambda_2 V_2,\ -\infty<y<0,\ \lim_{y\to 0-}V_2(y,\lambda_2) = 1, \tag{6}$$

а $\rho_1(\lambda_1),\rho_2(\lambda_2)$ *– спектральные функции задач (5) и (6). Тогда в классе непрерывных и ограниченных на интервалах* $(-\infty,0)$ *и* $(0,\infty)$ *функций, для которых* $\lim\limits_{y\to 0+}C(y) = \lim\limits_{y\to 0-}C(y)$, *коэффициент* $C(y)$ *уравнения (1) восстанавливается однозначно заданием функции* $\tau(x)$.

bf Д о к а з а т е л ь с т в о . Считая пока функцию $C(y)$ известной, решение уравнения (1) в областях $\Omega_1 = \{(x,y): 0<x<\infty, 0<y<\infty\}$ и $\Omega_2 = \{(x,y): 0<x<\infty, -\infty<y<0\}$ представим в виде:

$$u_1(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{u_1}(x,\lambda_1)V_1(y,\lambda_1)d\rho_1(\lambda_1),\ x>0, y>0, \tag{7}$$

$$u_2(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{u_2}(x,\lambda_2)V_2(y,\lambda_2)d\rho_2(\lambda_2),\ x>0, y<0, \tag{8}$$

$$\widetilde{u_1}(x,\lambda_1) = \int\limits_{0}^{\infty}u_1(x,y)y^{-m}V_1(y,\lambda_1)dy,\ x>0, y>0,$$

$$\widetilde{u_2}(x,\lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{0}u_2(x,y)(-y)^{-m}V_2(y,\lambda_2)dy,\ x>0, y<0,$$

где $\rho_1(\lambda_1),\rho_2(\lambda_2)$ – спектральные функции соответственно задач (5) и (6).

Подставив представления (7) и (8) решения уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2 в само уравнение и условия (3), получим для нахождения функций $u_1(x,\lambda_1)$ и $u_2(x,\lambda_2)$ следующие задачи:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\widetilde{u_1}(x,\lambda_1)}{dx^2}-\lambda_1\widetilde{u_1}(x,\lambda_1)=0,\\
&\widetilde{u_1}(0,\lambda_1)=\widetilde{\varphi_1}(\lambda_1)=\int\limits_0^\infty \varphi_1(y)y^{-m}V_1(y,\lambda_1)dy,\\
&\frac{d\widetilde{u_1}(0,\lambda_1)}{dx}=\widetilde{\psi_1}(\lambda_1)=\int\limits_0^\infty \psi_1(y)y^{-m}V_1(y,\lambda_1)dy,
\end{aligned}\right\}\qquad(9)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\widetilde{u_2}(x,\lambda_2)}{dx^2}+\lambda_2\widetilde{u_2}(x,\lambda_2)=0,\\
&\widetilde{u_2}(0,\lambda_2)=\widetilde{\varphi_2}(\lambda_2)=\int\limits_{-\infty}^0 \varphi_2(y)(-y)^{-m}V_2(y,\lambda_2)dy,\\
&\frac{d\widetilde{u_2}(0,\lambda_2)}{dx}=\widetilde{\psi_2}(\lambda_2)=\int\limits_{-\infty}^0 \psi_2(y)(-y)^{-m}V_2(y,\lambda_2)dy.
\end{aligned}\right\}\qquad(10)
$$

Решения задач (9) и (10) как решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в зависимости от значений λ_1 и λ_2 выписывается в явном виде.

Введя новую независимою переменную z и новую неизвестную функцию $W_1=W_1(z,\lambda_1)$ при помощи равенств $V_1(y,\lambda_1)=x^{m/4}W_1(z,\lambda_1)$, $z=\int\limits_0^x\xi^{-m/2}d\xi$, $0\le z\le B$, $B=\int\limits_0^\infty\xi^{-m/2}d\xi$, перепишем задачу (5) в виде [3]:

$$
\left.\begin{aligned}
-W_1''+\frac{\nu^2-1/4}{z^2}W_1+q_1(z)W_1=&\lambda_1W_1,\ \nu=\frac{1}{2-m},\ \nu\ge1,\\
\lim_{z\to0+}z^{-\nu-1/2}W_1(z,\lambda_1)=&\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},
\end{aligned}\right\}\qquad(11)
$$

где

$$
q_1(z)=\frac{C\left(\frac{2-m}{2}z^{\frac{2}{(2-m)}}\right)}{\frac{2-m}{2}z^{2(2-m)}},
$$

а если введем новую неизвестную переменную t и новую независимую функцию $W_2=W_2(t,\lambda_2)$ при помощи равенств $V_2(y,\lambda_2)=(-y)^{m/4}W_2(t,\lambda_2)$, $t=\int\limits_0^{-y}\xi^{-m/2}d\xi$, $0\le t\le B$, $B=\int\limits_0^\infty\xi^{-m/2}d\xi$, то задача (6) переходит в задачу [3]:

$$
\left.\begin{aligned}
-W_2''+\frac{\nu^2-1/4}{t^2}W_2+q_2(t)W_2=&\lambda_2W_2,\ \nu=\frac{1}{2-m},\ \nu\ge1,\\
\lim_{t\to0+}t^{-\nu-1/2}W_2(t,\lambda_2)=&\frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)},
\end{aligned}\right\}\qquad(12)
$$

где

$$
q_2(t)=\frac{C\left(\frac{2-m}{2}t^{\frac{2}{(2-m)}}\right)}{\frac{2-m}{2}t^{2(2-m)}}.
$$

Таким образом, задача отыскания неизвестного коэффициента $C(y)$ уравнения (1) свелась к задачам (11) и (12), которые исследованы в работах [3, 4].

Находя функции $W_1(z,\lambda_1)$ и $W_2(t,\lambda_2)$ которые являются решениями задачи 11) и (12), можно найти решения задач(5) и (6) $V_1(x,\lambda_1)$ и $V_2(x,\lambda_2)$.

Теперь из представлений (7) и (8) решений задач (1)-(3) при $y \to 0+$ и $y \to 0-$ с учетом условия (4) получим соотношение

$$\tau(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u_1}(x,\lambda_1)d\rho_1(\lambda_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u_2}(x,\lambda_2)d\rho_2(\lambda_2), \tag{13}$$

связывающие данные обратной задачи (1) и (4) со спектральными функциями $\rho_1(\lambda_1)$ и $\rho_2(\lambda_2)$.

Если известны спектральные функции $\rho_1(\lambda_1)$ и $\rho_2(\lambda_2)$, то по формуле (13) можно построить функцию $\tau(x)$.

И, наоборот, по заданной функции $\tau(x)$ из уравнений (13) можно найти спектральные функции $\rho_1(\lambda_1)$ и $\rho_2(\lambda_2)$. В самом деле, соответствующие функциям $\rho_1(\lambda_1)$ и $\rho_2(\lambda_2)$ интегральные уравнения с неизвестными ядрами можно обратить, если они имеют единственное решение относительно функций $\rho_1(\lambda_1)$ и $\rho_2(\lambda_2)$. Условия (2) обеспечивают возможность обращения интегральных преобразований (13) и с известными ядрами [5]. Принципиальным здесь является вопрос однозначности спектральных функций $\rho_1(\lambda_1)$ и $\rho_2(\lambda_2)$ [6, с.71]. В нашем случае спектральных задач (11) и (12) имеет место случай предельной точки Вейля [7], когда существует одна спектральная функция.

Таким образом, оказалось, что обратная задача (1)-(4) в областях Ω_1 и Ω_2 эквивалентна обратной задаче спектрального анализа в случае предельной точки Вейля.

Цитированная литература

1. **Бицадзе А.В.** Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. **Смирнов М.М.** Уравнения смешанного типа. М., 1985.
3. **Сташевская В.В.** //ДАН СССР. 1953. Т. 93, № 3. С.409–411.
4. **Гасымов М.Г.** //ДАН СССР. 1965. Т.161, № 2. С.261–264.
5. **Кошляков Н.С. Глипер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
6. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. М., 1984.
7. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Введение в спектральную теорию. М., 1970.

Поступила в редакцию 28.06.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.52 — 66*

УДК 662.92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В УСТРОЙСТВАХ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Г.А.Камалова, А.Ж.Найманова

Институт математики Министерства образования и науки
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, ked@math.kz

Предлагается численная модель газодинамических процессов двухфазной среды в устройствах различной конфигурации. Для моделирования процесса используется осредненная по Рейнольдсу система уравнений Навье-Стокса, замыкаемая $k-\varepsilon$ моделью турбулентности. Решение уравнений газовой динамики осуществляется методом конечных объемов и с целью улучшения метода расчета используется закон сохранения объема (ЗСО). Уравнение ЗСО решается совместно с основными уравнениями Навье-Стокса. Для моделирования параметров газовой фазы используется эйлеров подход, для описания параметров дисперсной фазы - лагранжев. Приведены численные результаты для поля течения, теплоотдачи и твердых частиц.

В связи с практическим применением в последнее время интенсивно разрабатываются математические модели горения угля в топочных устройствах. Изучение процессов тепло- и массопереноса, протекающих в различных топочных устройствах, не всегда возможно в лабораторных условиях, поэтому возникает необходимость использования методов математического моделирования. Так в работе [1] предложена двумерная двухфазная (газ-твердая частица) численная модель, которая основывается на методе контрольного объема с SIMPLE алгоритмом. В [2] предлагается математическая трехмерная модель тепло- массообмена в промышленных камерах сгорания, работающих на пылеугольном топливе, где численная модель опирается на стационарные трехмерные уравнения механики гетерогенных сред. Авторы J.R.Fan и др. [8] изучают горение угля в топочных устройствах. Однако во всех вышеуказанных трехмерных моделях используется эйлеров подход и не производится учет межфазного взаимодействия.

Целью данной работы является разработка численной модели газодинамических процессов двухфазной среды в топочных устройствах различной конфигурации и исследование влияния дисперсной среды на параметры газовой фазы. Следует отметить, что численная модель основана на эйлерово-лагранжевом представлении двухфазного течения и позволяет более детально отслеживать изменение характеристик частиц с теплообменными поверхностями, а также полидисперсность твердых частиц.

Keywords: *two-phase flow, pressure, turbulence layer, subsonic flow*
2000 Mathematics Subject Classification: 76T30

П о с т а н о в к а   з а д а ч и. Рассматривается вдув воздуха и твердых частиц в канал с открытой верхней и частично открытой правой границами. Участок входного сопла разбивается на две зоны. С верхней зоны вводится твердые частицы, с нижнего отверстия осуществляется вдув воздуха. На рис.1 представлены схемы течений.

Основные допущения, используемые при формулировке математической модели, следующие:

- течение является турбулентным, двухфазным, нестационарным,
- газ является реагирующим,
- вторая фаза состоит из твердых частиц сферической формы.

Для описания межфазного взаимодействия представляется целесообразным использовать функцию плотности вероятности нескольких параметров дисперсной фазы, например, скорости, температуры и массы частиц. Основное достоинство указанного подхода состоит в возможности учета влияния турбулентных пульсаций и полидисперсного распределения частиц дисперсной фазы на значения источниковых членов в соответствующих уравнениях газовой и дисперсной фаз.

Система основных уравнений, описывающих нестационарные процессы в устройствах, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{u}) = \nabla \cdot \left[\rho D \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)\right] + \dot{\rho}^s \delta_{m1}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = \nabla \cdot \vec{\sigma}\,(\vec{u}) - \nabla P - \nabla \left(\frac{2}{3}\rho k\right) + \rho \vec{g} + \vec{F}^s, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho I)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} I) = \nabla \cdot \vec{J} - P \nabla \cdot \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{Q}^s, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}_k}\right) \nabla k\right] - \frac{2}{3}\rho k \nabla \cdot \vec{u} + \vec{\sigma}\,(\vec{u}) : \nabla \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{W}^s, \tag{4}$$

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\right) \nabla \varepsilon\right] - \left(\frac{2}{3}c_{\varepsilon_1} - c_{\varepsilon_3}\right) \rho \varepsilon \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\varepsilon}{k}\left[c_{\varepsilon_1} \vec{\sigma}\,(\vec{u}) : \nabla \vec{u} - c_{\varepsilon_2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W}^s\right], \tag{5}$$

$$P = R_0 T \sum_m \left(\frac{\rho_m}{W_m}\right), \quad \sum_m \frac{\rho_m}{\rho} = 1, \tag{6}$$

$$I(T) = \sum_m \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right) I_m(T), \quad I_m\,(T) = h_m\,(T) - \frac{R_0 T}{W_m}, \tag{7}$$

$$c_p(T) = \sum_m \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right) c_{pm}(T), \tag{8}$$

где

$$\vec{\sigma}\,(\vec{u}) = \mu\left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T\right] - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{u} \vec{\varepsilon},$$

$$\mu = \mu_{air} + \rho c_\mu k^2/\varepsilon,$$

$$\vec{J} = -K \nabla T - \rho D \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right),$$

$$K = \frac{\mu c_p}{\mathrm{Pr}}, \quad D = \frac{\mu}{\rho Sc}, \quad \mu_{air} = \frac{A_1 T^{3/2}}{A_2 + T}.$$

Закон сохранения объема (ЗСО) [6] представляется следующим уравнением:

$$\frac{DV}{Dt} = \int\limits_S u dA. \tag{9}$$

Уравнения движения частицы вдоль ее траектории записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_p = \vec{u}_p, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_p = D_p(\vec{u}_g + \vec{u}'_g - \vec{u}_p) + \vec{g}, \tag{11}$$

$$m_p c_p \frac{dT_p}{dt} = K_{air}\left(\widehat{T}\right)(T - T_p)\, Nu_p - L\left(T_p\right)(\rho D)_{air}\, B_p\left(T_p\right) Sh_p, \tag{12}$$

$$\frac{dm_p}{dt} = -2\pi r_p\,(\rho D)_{air}\left(\widehat{T}\right)\frac{Y_1^* - Y_1}{1 - Y_1^*} Sh_p, \tag{13}$$

где

$$D_p = \frac{3}{8}\frac{\rho}{\rho_p}\frac{\left|\vec{u}_g + \vec{u}'_g - \vec{u}_p\right|}{r_p} C_D(Re_p),$$

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_p}\left(1 + \frac{1}{6}Re_p^{2/3}\right), \ \mathrm{Re}_p \leq 1000 \\ 0,424, \ \ \mathrm{Re}_p > 1000 \end{cases}$$

$$Re_p = \frac{2\rho\left|\vec{u}_g + \vec{u}'_g - \vec{u}_p\right| r_p}{\mu_{air}(\widehat{T})},$$

$$Nu_p = \left(2.0 + 0.6 Re_p^{1/2} \underset{p}{\mathrm{Pr}}^{1/2}\right)\frac{\ln\left(1 + B_p\right)}{B_p}, \quad \underset{p}{\mathrm{Pr}} = \frac{\mu_{air}\left(\widehat{T}\right) c_p\left(\widehat{T}\right)}{K_{air}\left(\widehat{T}\right)},$$

$$Sh_p = \left(2.0 + 0.6 Re_p^{1/2} Sc_p^{1/2}\right)\frac{\ln\left(1 + B_p\right)}{B_p}, \quad Sc_p = \frac{\mu_{air}\left(\widehat{T}\right)}{(\rho D)_{air}\left(\widehat{T}\right)},$$

$$K_{air} = \frac{K_1 \widehat{T}^{3/2}}{\widehat{T} + K_2}, \quad \widehat{T} = \frac{T + 2T_p}{3}, \quad (\rho D)_{air}\left(\widehat{T}\right) = D_1 \widehat{T}^{D_2}.$$

Здесь t – время, ρ_m – парциальная плотность m-й компоненты, $\vec{u} = (u, w)$ – компоненты скоростей газа, ρ - плотность смеси, P – давление, I – удельная внутренняя энергия, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, T – температура газовой фазы, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, W_m - молекулярный вес m-й компоненты, $\vec{\sigma}\left(\vec{u}\right)$ – тензор вязких напряжений, $\vec{J}$ – вектор теплового потока, K – коэффициент теплопроводности,D - коэффициент диффузии, μ – коэффициент вязкости, μ_{air} – коэффициент вязкости для воздуха, $c_{pm}\left(T\right)$, $h_m\left(T\right)$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении и энтальпия m-й компоненты, определенные из таблицы JANAFF, $\vec{u}'_g$ – случайный вектор возмущения скорости газа, Pr – число Прандтля, Re – число Рейнольдса, Sh – число Струхаля, Nu – число Нуссельта, Sc – число Шмидта. Индекс g относится к параметрам газа, p – к параметрам дисперсной фазы.

Исходная система уравнений замыкается $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, константы которые имеют следующие значения:

$$c_\mu = 0.09; c_{\varepsilon_1} = 1,44; \quad c_{\varepsilon_2} = 1,92; \quad c_{\varepsilon_3} = -1,0; \quad \underset{k}{\mathrm{Pr}} = 1,0; \quad \underset{\varepsilon}{\mathrm{Pr}} = 1,3; \quad c_s = 1,50.$$

При использовании $k-\varepsilon$ модели турбулентности связь между кинетической энергией турбулентности и скоростью ее диссипации задается в форме

$$l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}.$$

Дополнительные члены в уравнениях газовой фазы (1)-(5), появляющиеся за счет межфазного взаимодействия, следующие:

$$\dot{\rho}^s = -\int f\rho_p 4\pi r^2 R d\vec{u}_p dT_p dy d\dot{y},$$

$$\vec{F}^s = -\int f\rho_p \left(\frac{4}{3}\pi r^3(\vec{F}-\vec{g}) + 4\pi r^2 R\vec{u}_p\right) d\vec{u}_p dr dT_p dy d\dot{y},$$

$$\dot{Q}^s = -\int f\rho_p \big\{4\pi r^2 R\big[I(T_p) + \tfrac{1}{2}(\vec{u}_p - \vec{u})^2\big] +$$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3\Big[c_p(\dot{T}_p) + (\vec{F}-\vec{g})\cdot(\vec{u}_p - \vec{u} - \vec{u}'_p)\Big]\Big\} d\vec{u}_p dr dT_p dy d\dot{y},$$

$$\dot{W}^s = -\int f\rho_p \frac{4}{3}\pi r^3(\vec{F}-\vec{g})\vec{u'}_p d\vec{u}_p dr dT_p dy d\dot{y}.$$

Изменение функции распределения вероятности частиц согласно [3] представляется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x\cdot(f\vec{V}) + \nabla_V\cdot(f\vec{F}) + \frac{\partial(fR)}{\partial r} + \frac{\partial(f\dot{T}_p)}{\partial T_p} + \frac{\partial(f\dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial(f\ddot{y})}{\partial\dot{y}} = \dot{f}_{coll} + \dot{f}_{bu}. \qquad (14)$$

В правой части уравнения (14) первое слагаемое $\dot{f}_{coll}$ учитывает изменение функции f вследствие процессов столкновения, второе $\dot{f}_{bu}$ - вследствие распада частиц. Функция $f\,(\vec{x}, \vec{u}_p, r, T_p, y, \dot{y})$ имеет десять независимых переменных и время. Это три составляющие радиус-вектора $\vec{x}$, плюс три составляющие скорости $\vec{u}_p$, температура T_p, которая предполагается однородной внутри капель, функция y, характеризующая отклонение частицы от сферической формы, и скорость ее изменения $\frac{dy}{dt}$. Поскольку уравнение (14) трудно решать классическими методами вычислительной математики, здесь используется условие, полученное в [5], согласно которому, функция распределения частиц f аппроксимируется дискретной функцией распределения f'

$$f'\,(r, \vec{x}, \vec{u}_p, t) = \sum_p N'_p \delta\,(r - r_p)\,\delta\,(\vec{x} - \vec{x}_p)\,\delta\,(\vec{u} - \vec{u}_p) \approx \frac{\Delta N}{\Delta r \Delta\vec{x}\Delta\vec{u}_p}, \qquad (15)$$

где ΔN – число частиц в "объеме" $\Delta x \Delta r \Delta\vec{u}_p$.

Начальные и граничные условия. Рассматриваемая проблема решается со следующими постановками начальных и граничных условий.

В начальный момент времени газовая фаза находится в состоянии покоя, давление газовой фазы равно давлению окружающей среды, начальное распределение температуры постоянно:

$$u = w = 0, \quad P = P_0, \quad T_g = T_0, \quad \rho_m = (\rho_m)_0\,, \quad k = k_0, \quad l = l_0.$$

На входе задаются скорости, плотности вдуваемого воздуха и твердых частиц:

$$u = u_0, \quad w = 0, \quad P = P_0, \quad \rho_m = (\rho_m)_0\,, \quad k = k_0, \quad l = l_0,$$

$$u_p = u_{p0}, \quad w_p = 0, \rho_p = (\rho_p)_0\,, \quad T_p = T_0.$$

На стенках для поля скорости задается турбулентный закон стенки, тангенциальная компонента скоростей которого определяется логарифмическим профилем:

$$\frac{\upsilon}{u^*} = \begin{cases} 1/k \ln\left(c_{l\omega}\varsigma^{7/8}\right), & \varsigma > R_c, \\ \varsigma^{1/2}, & \varsigma < R_c, \end{cases}$$

где $\varsigma = \frac{\rho y \upsilon}{\mu_{air}(T)}$ есть число Рейнольдса, определенное по скорости газа относительно стенки $\upsilon = \left|\vec{u} - \omega_{wall}\vec{k}\right|$ на расстоянии y от стенки, u' – динамическая скорость, которая относится к тангенциальным компонентам напряжения трения на стенках $\vec{\sigma}_\omega$ следующим образом:

$$\vec{\sigma}_\omega - (\vec{\sigma}_\omega \cdot \vec{n})\,\vec{n} = \rho\,(u^*)^2\,\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon},$$

где $\vec{\upsilon} = \vec{u} - \omega_{wall}\vec{k}$, $k = \sqrt{c_\mu^{1/2}\left(c_{\varepsilon_2} - c_{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Pr}_\varepsilon}$, $B = R_c^{1/2} - 1/k\ln\left(c_{l\omega}R_c^{7/8}\right)$, и для температуры, кинетической энергии турбулентности, концентраций компонент газа условие отсутствия потока через стенку:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \rho_m}{\partial \vec{n}} = 0.$$

При этом скорость диссипации кинетической энергии турбулентности определяется как

$$\varepsilon = c_{\mu_\varepsilon}\frac{k^{3/2}}{y}, \quad c_{\mu_\varepsilon} = \left[\frac{c_\mu}{\mathrm{Pr}_\varepsilon\left(c_{\varepsilon_2} - c_{\varepsilon_1}\right)}\right]^{1/2}.$$

На выходе для поля скорости принимаются мягкие граничные условия, для давления и плотностей компонент поддерживаются заданные значения:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0, \quad P = P_0, \quad \rho_m = (\rho_m)_0\,.$$

Предполагается, что частицы достигающие стенку, прилипают к ней, т.е. $u_p = w_p = 0$, частицы вблизи открытой границы покидают рассматриваемую область.

М е т о д   р е ш е н и я. Для исключения трудностей, связанных с численным решением уравнений Навье-Стокса по аналогии с [10], осуществляется преобразование, в котором давление представляется в виде суммы среднего по пространству термодинамического $\bar{P}$ и вызванного движением газа динамического давления P':

$$P\left(\vec{r}, t\right) = \bar{P}\left(t\right) + P'\left(\vec{r}, t\right), \quad \bar{P}\left(t\right) = \frac{1}{V}\int\limits_V P(\vec{r}, t)d\vec{r}$$

Далее это выражение записывается в виде $\bar{P} + \alpha^2 P'$, поскольку возмущение P' является малым, будет малым и $\alpha^2 P'$ при условии $0 \le \alpha \le 1$. Тогда уравнения (2)-(3) можно переписать в более удобной форме, обозначив $\widehat{P} = \bar{P} + \alpha^2 P'$, $\nabla\widehat{P} = \alpha^2\nabla P'$.

Исходная система уравнений при этом имеет следующий вид (черта над градиентом давления для удобства записи опущена):

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\vec{u}) = \nabla\cdot\left[\rho D\nabla\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)\right] + \dot{\rho}^s\delta_{m1}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}\vec{u}) = \nabla\cdot\vec{\sigma}\left(\vec{u}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\nabla P - \nabla\left(\frac{2}{3}\rho k\right) + \rho\vec{g} + \vec{F}^s, \tag{17}$$

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u}I)=\nabla\cdot\vec{J}-P\nabla\cdot\vec{u}-\rho\varepsilon+\dot{Q}^s, \tag{18}$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u}k)=\nabla\cdot\left[\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}_k}\right)\nabla k\right]-\frac{2}{3}\rho k\nabla\cdot\vec{u}+\vec{\sigma}:\nabla\vec{u}-\rho\varepsilon+\dot{W}^s, \tag{19}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u}\varepsilon)=\nabla\cdot\left[\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right]-\left(\frac{2}{3}c_{\varepsilon_1}-c_{\varepsilon_3}\right)\rho\varepsilon\nabla\cdot\vec{u}+\frac{\varepsilon}{k}\Big[c_{\varepsilon_1}\vec{\sigma}:\nabla\vec{u}-c_{\varepsilon_2}\rho\varepsilon+c_s\dot{W}^s\Big], \tag{20}$$

$$P=R_0T\sum_m\left(\frac{\rho_m}{W_m}\right),\quad \sum_m\frac{\rho_m}{\rho}=1, \tag{21}$$

$$I(T)=\sum_m\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)I_m(T),\quad I_m\left(T\right)=h_m\left(T\right)-\frac{R_0T}{W_m}, \tag{22}$$

$$c_p(T)=\sum_m\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)c_{pm}(T), \tag{23}$$

$$\frac{DV}{Dt}=\int\limits_S u dA, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_p=\vec{u}_p, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_p=D_p(\vec{u}_g+\vec{u}'_g-\vec{u}_p)+\vec{g}, \tag{26}$$

$$m_pc_p\frac{dT_p}{dt}=K_{air}\left(\widehat{T}\right)\left(T-T_p\right)Nu_p-L\left(T_p\right)\left(\rho D\right)_{air}B_p\left(T_p\right)Sh_p, \tag{27}$$

$$\frac{dm_p}{dt}=-2\pi r_p\left(\rho D\right)_{air}\left(\widehat{T}\right)\frac{Y_1^*-Y_1}{1-Y_1^*}Sh_p. \tag{28}$$

Пространственная дискретизация системы уравнений (16) - (24) основывается на ALE методе (произвольный лагранжево-эйлеровый метод), который является по существу методом конечного объема для произвольного шестигранника [4,6]. При расчете с помощью этого метода используется интегральная форма исходных уравнений. Отметим, что интегрирование уравнений термодинамических величин ($P,\rho_m,I,T,k,\varepsilon$) производится по контрольному объему V, ограниченному замкнутой поверхностью A с гранями α (Рис.2а), уравнения количества движения – по объему V', ограниченному замкнутой поверхностью A' с гранями β (Рис.2б), уравнения закона сохранения объема – по объему, ограниченному замкнутой поверхностью A'' с гранями γ (Рис.2в).

Решение уравнений, полученных при дискретизации, осуществляется трехэтапной схемой расщепления по физическим процессам и принимается следующее допущение в алгоритме: $\rho^B_{ijk}V^B_{ijk}=\rho^A_{ijk}V^n_{ijk}=M^A_{ijk}=M^B_{ijk}$.

Этап A. На данном этапе учитывается вклад дисперсной среды на несущую фазу:

$$\frac{(\rho_m)^A_{ijk}-(\rho_m)^n_{ijk}}{\Delta t}=\dot{\rho}^s_{ijk}\delta_{m1}, \tag{29}$$

$$\frac{\Big[(M'_{ijk})^A+S'_{ijk}\Big]\vec{u}^A_{ijk}-(M'_{ijk})^n\vec{u}^n_{ijk}}{\Delta t}=\vec{g}_{ijk}\left(M'\right)^n_{ijk}-\frac{1}{\Delta t}R'_{ijk}, \tag{30}$$

$$\frac{\rho^A_{ijk}I^A_{ijk}-\rho^n_{ijk}I^n_{ijk}}{\Delta t}=\dot{Q}^s_{ijk}, \tag{31}$$

$$\frac{\rho^A_{ijk}k^A_{ijk}-\rho^n_{ijk}k^n_{ijk}}{\Delta t}=\dot{W}^s_{ijk}, \tag{32}$$

$$\frac{\rho^A_{ijk}\varepsilon^A_{ijk}-\rho^n_{ijk}\varepsilon^n_{ijk}}{\Delta t}=c_s\dot{W}^s_{ijk}\frac{\varepsilon^n_{ijk}}{k^n_{ijk}}. \tag{33}$$

Промежуточные значения искомых величин на этом этапе определяются явным образом.

Этап B. Определяются промежуточные значения искомых величин с учетом диффузии, поля давления, кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации:

$$\frac{(\rho_m)^B_{ijk}V^B_{ijk}-(\rho_m)^A_{ijk}V^n_{ijk}}{\Delta t}=\sum_\alpha(\rho D)_\alpha\nabla\left[\Phi_D Y^B_m+(1-\Phi_D)Y^A_m\right]\cdot\vec{A}^n_\alpha, \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\left[(M')^B_{ijk}+S'_{ijk}\right]\tfrac{\vec{u}^B_{ijk}-\vec{u}^A_{ijk}}{\Delta t}=\sum_\beta\left[\Phi_D\vec{\sigma}\left(\vec{u}^B\right)+(1-\Phi_D)\,\vec{\sigma}\left(\vec{u}^n\right)\right]_\beta\cdot\left(\vec{A}'\right)^n_\beta-\\ -\tfrac{1}{(a^n)^2}\sum_\beta\left[\Phi_p p^B+(1-\Phi_p)\,p^n\right]_\beta\left(\vec{A}'\right)^n_\beta-\sum_\beta\tfrac{2}{3}\rho^A_\beta\kappa^A_\beta\left(\vec{A}'\right)^n_\beta,\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}\rho^B_{ijk}V^B_{ijk}\tfrac{I^B_{ijk}-I^A_{ijk}}{\Delta t}=\sum_\alpha K^n_\alpha\nabla\left[\Phi_D T^B+(1-\Phi_D)\tilde{T}\right]_\alpha\cdot\vec{A}^n_\alpha+\sum_\alpha(\rho D)^n_\alpha\cdot\\ \cdot\left\{\sum_m h_m(T^n_\alpha)\nabla\left[\Phi_D Y^B_m+(1-\Phi_D)Y^A_m\right]_\alpha\right\}\cdot\vec{A}^n_\alpha-\tfrac{P^B_{ijk}-P^n_{ijk}}{2}\tfrac{V^B_{ijk}-V^n_{ijk}}{\Delta t}+\\ +\rho^A_{ijk}V^n_{ijk}\varepsilon^A_{ijk},\end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\rho^B_{ijk}V^B_{ijk}\tfrac{k^B_{ijk}-k^A_{ijk}}{\Delta t}=\sum_\alpha\tfrac{\mu^n_\alpha}{\mathrm{Pr}_k}\nabla\left[\Phi_D k^B+(1-\Phi_D)k^A\right]_\alpha\cdot\vec{A}^n_\alpha-\\ -\tfrac{2}{3}\rho^B_{ijk}\tfrac{V^B_{ijk}-V^A_{ijk}}{\Delta t}\left[(1-f_{ijk})k^A_{ijk}+f_{ijk}k^B_{ijk}\right]+(VD)_{ijk}-\rho^A_{ijk}V^n_{ijk}\tfrac{\varepsilon^n_{ijk}}{k^n_{ijk}}k^{n+1}_{ijk},\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\rho^B_{ijk}V^B_{ijk}\tfrac{\varepsilon^B_{ijk}-\varepsilon^A_{ijk}}{\Delta t}=\sum_\alpha\tfrac{\mu^n_\alpha}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\nabla\left[\Phi_D\varepsilon^B+(1-\Phi_D)\varepsilon^A\right]_\alpha\cdot\vec{A}^n_\alpha-\left(\tfrac{2}{3}c_{\varepsilon_1}-c_{\varepsilon_3}\right)\rho^B_{ijk}\cdot\\ \cdot\tfrac{V^B_{ijk}-V^A_{ijk}}{\Delta t}\left[(1-f_{ijk})\varepsilon^A_{ijk}+f_{ijk}\varepsilon^B_{ijk}\right]+c_{\varepsilon_1}\tfrac{\varepsilon^n_{ijk}}{k^n_{ijk}}(VD)_{ijk}-c_{\varepsilon_2}\rho^A_{ijk}V^n_{ijk}\tfrac{\varepsilon^n_{ijk}}{k^n_{ijk}}\varepsilon^B_{ijk},\end{gathered} \tag{38}$$

где $\quad (VD)_{ijk}=V^n_{ijk}\left[\Phi_D\vec{\sigma}(\vec{u}^B):\nabla\vec{u}^B+(1-\Phi_D)\vec{\sigma}(\vec{u}^n):\nabla\vec{u}^n\right]_{ijk},$

$$P^B_{ijk}=\sum_m\left(\frac{(\rho_m)^B_{ijk}}{W_m}\right)R_0T^B_{ijk}, \tag{39}$$

или

$$P^B_{ijk}=\frac{\rho^A_{ijk}V^n_{ijk}}{V^B_{ijk}}\left[\sum_m\frac{(Y_m)^B_{ijk}}{W_m}\right]R_0T^B_{ijk}, \tag{40}$$

$$\frac{V^B_{ijk}-V^n_{ijk}}{\Delta t}=\sum_\alpha(uA)^B_\alpha, \tag{41}$$

$(uA)_\alpha$ – скорость грани α контрольного объема V.

Этап C. Вычисляется конвективный перенос рассматриваемых величин, связанный с движением ячейки, относящейся к жидкости, схемой донорской ячейки [3].

Здесь $M'_{ijk} = \rho_{ijk} V'_{ijk}$ – масса ячейки количества движения, S', R' – силы, появляющиеся из-за скоростей газовой и дисперсной фаз.

Алгоритм решения уравнений этапа В.

I. Вычисляется массовая концентрация компонент $(Y_m)^B_{ijk}$ из формулы (34) методом сопряженных разностей[4].

II. Для решения уравнений скорости, температуры и давления фазы В применяется алгоритм SIMPLE, предложенный в работе [7], который осуществляется следующим образом.

Шаг предиктор.

1. Задание поля предиктор - давления $P^{B,P}_{ijk}$. Его можно получить, экстраполируя по значениям уже известных на двух предыдущих слоях:

$$P^{B,P}_{ijk} = P^{B,n-1}_{ijk} + \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} \left(P^{B,n-1}_{ijk} - P^{B,n-2}_{ijk} \right). \tag{42}$$

2. Решение уравнения количества движения для предиктор - скоростей $\vec{u}^{B,P}_{ijk}$ из (35) методом сопряженных разностей:

$$\begin{gathered}
\vec{u}^{B,P}_{ijk} - \tfrac{\Delta t}{(M'_{ijk})^B + S'_{ijk}} \sum_\beta \left[\Phi_D \vec{\sigma}(\vec{u}^{B,P}) \right]_\beta \cdot (\vec{A}')^n_\beta = \vec{u}^A_{ijk} + \tfrac{\Delta t}{(M'_{ijk})^B + S'_{ijk}} \cdot \\
\cdot \sum_\beta \left\{ \left[\Phi_p p^{B,P} + (1 - \Phi_p)\, p^n \right]_\beta / \left(a^n \right)^2 \right\} \left(\vec{A}' \right)^n_\beta + \sum_\beta \tfrac{2}{3} \rho^A_\beta \kappa^A_\beta \left(\vec{A}' \right)^n_\beta + \\
+ \tfrac{\Delta t}{(M'_{ijk})^B + S'_{ijk}} \sum_\beta \left[(1 - \Phi_D)\, \vec{\sigma}\left(\vec{u}^n \right) \right]_\beta \cdot \left(\vec{A}' \right)^n_\beta .
\end{gathered} \tag{43}$$

3. Нахождение предиктор - температуры $T^{B,P}_{ijk}$. Для этого уравнение переноса внутренней энергии (36) расщепляется следующим образом:

$$\rho^A_{ijk} V^n_{ijk} \frac{I^{B,P}_{ijk} - I^{t,P}_{ijk}}{\Delta t} = -\frac{P^n_{ijk} + P^{B,P}_{ijk}}{2} \frac{V^{B,P}_{ijk} - V^n_{ijk}}{\Delta t} + \sum_\alpha K^n_\alpha \nabla \Big[\Phi_D T^{B,P} + (1 - \Phi_D) \tilde{T} \Big]_\alpha \cdot \vec{A}^n_\alpha,$$

$$\rho^A_{ijk} V^n_{ijk} \frac{I^{t,P}_{ijk} - I^A_{ijk}}{\Delta t} = \rho^A_{ijk} V^n_{ijk} \varepsilon^A_{ijk} + \sum_\alpha (\rho D)^n_\alpha \left\{ \sum_m h_m (T^n_\alpha) \nabla \big[\Phi_D Y^B_m + (1 - \Phi_D) Y^A_m \big]_\alpha \right\} \cdot \vec{A}^n_\alpha. \tag{44}$$

Для определения $\tilde{T}$ предполагается, что изменение температуры относится к изменению энтальпии: $h^{t,P}_{ijk} = h^n_{ijk} + (c_p)^n_{ijk} (\tilde{T}_{ijk} - T^n_{ijk})$ и учитывается, что $h^n_{ijk} = I^n_{ijk} + \frac{P^n_{ijk}}{\rho^n_{ijk}}$. Тогда

$$\tilde{T}_{ijk} = T^n_{ijk} + \frac{1}{(c_p)^n_{ijk}} \left[I^{t,P}_{ijk} - I^n_{ijk} + P^n_{ijk} \left(\frac{1}{\rho^A_{ijk}} - \frac{1}{\rho^n_{ijk}} \right) \right]. \tag{45}$$

Далее, используя зависимость внутренней энергии от температуры в виде

$$I^{B,P}_{ijk} - I^{t,P}_{ijk} = (c_v)^t_{ijk} \, (T^{B,P}_{ijk} - T^{t,P}_{ijk}) \tag{46}$$

в первом уравнении (44) и учитывая (40), получим уравнение для предиктор - температуры, которое решается методом сопряженных разностей:

$$T^{B,P}_{ijk} - \frac{\Delta t}{\rho^A_{ijk} V^n_{ijk} (c_v)^t_{ijk}} \sum_\alpha \left[K^n_\alpha \nabla \Phi_D T^{B,P} \right]_\alpha \cdot \vec{A}^n_\alpha \Big/ \left[1 + \frac{P^n_{ijk} + P^{B,P}_{ijk}}{2 (c_v)^t_{ijk} P^{B,P}_{ijk}} R_0 \sum_m \frac{(Y_m)^B_{ijk}}{W_m} \right] =$$

$$= \left\{ T^t_{ijk} + \frac{P^n_{ijk} + P^{B,P}_{ijk}}{2 (c_v)^t_{ijk} \rho^A_{ijk}} + \frac{\Delta t}{\rho^A_{ijk} V^n_{ijk} (c_v)^t_{ijk}} \left[\sum_\alpha K^n_\alpha \nabla \left[(1 - \Phi_D) \tilde{T} \right]_\alpha \cdot \vec{A}^n_\alpha \right] \right\} \Big/ \tag{47}$$

$$\Big/ \left[1 + \frac{P^n_{ijk} + P^{B,P}_{ijk}}{2 (c_v)^t_{ijk} P^{B,P}_{ijk}} R_0 \sum_m \frac{(Y_m)^B_{ijk}}{W_m} \right].$$

4. Вычисление предиктор - объем ячейки $V^{B,P}_{ijk}$ из (40):

$$V^{B,P}_{ijk} = \frac{\rho^A_{ijk} V^n_{ijk}}{P^{B,P}_{ijk}} R_0 \left[\sum_m \frac{(Y_m)^B_{ijk}}{W_m} \right] T^{B,P}_{ijk}. \tag{48}$$

Шаг корректор.

5. Определение корректор - давления $P^{B,C}_{ijk}$.

Аппроксимация интегрального закона сохранения объема (41) имеет вид

$$V^{B,C}_{ijk} = V^n_{ijk} + \Delta t \sum_\alpha (uA)^{B,C}_\alpha. \tag{49}$$

Как следует из (49), необходимо знать скорости граней ячеек. Для этого рассмотрим баланс количества движения для контрольного объема V (Рис. 2в), движущегося с потоком

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dv = \vec{F}, \tag{50}$$

где $\vec{F}$ – сумма векторов всех сил на V.

Скалярно умножая обе части этого уравнения на элемент площади $\vec{A}$, движущегося с потоком, получим

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} \cdot \vec{A} dv = \vec{F} \cdot \vec{A} + \frac{D\vec{A}}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dv. \tag{51}$$

Последний член этого уравнения дает ускорение Кориолиса и центробежную силу.

Уравнение (51) аппроксимируется следующим образом. Скорости граней ячеек $(uA)^{B,C}_\alpha$ получаются с помощью скоростей вершин, которые отличаются от скоростей этапа B только тем, что в (35) не включаются члены, связанные с P и $\frac{2}{3}\rho k$:

$$\left[(M'_{ijk})^B + S'_{ijk} \right] \frac{\vec{u}^B_{ijk} - \vec{u}^t_{ijk}}{\Delta t} = - \sum_\beta \left\{ \frac{1}{(\alpha^n)^2} \left[\Phi_p P^B + (1 - \Phi_p) P^n \right]_\beta + \frac{2}{3} \rho^A_\beta k^A_\beta \right\} (\vec{A}')^n_\beta. \tag{52}$$

Вектор скоростей $\vec{u}^t$ отличается от $\vec{u}^A$ дополнительным вкладом вязких членов:

$$\left[(M'_{ijk})^B + S'_{ijk} \right] \frac{\vec{u}^t_{ijk} - \vec{u}^A_{ijk}}{\Delta t} = \sum_\beta \left[\Phi_D \vec{\sigma}(\vec{u}^B) + (1 - \Phi_D) \vec{\sigma}(\vec{u}^n) \right]_\beta (\vec{A}')^n_\beta. \tag{53}$$

Из уравнения (53) находим промежуточное значение $\vec{u}^t_{ijk}$:

$$\vec{u}^t_{ijk} = \vec{u}^A_{ijk} + \frac{\Delta t}{\left[(M'_{ijk})^B + S'_{ijk} \right]} \sum_\beta \left[\Phi_D \vec{\sigma}(\vec{u}^B) + (1 - \Phi_D) \vec{\sigma}(\vec{u}^n) \right]_\beta (\vec{A}')^n_\beta.$$

Интегрирование уравнений (51) осуществляется по контрольному объему, ограниченному поверхностями γ (Рис.2в). Тогда с использованием (52) конечно-разностную аппроксимацию уравнения (51) можно представить в виде:

$$\left[\left(M''\right)_a^B + S''_a\right]\frac{(uA)_a^{B,C}-(uA)_a^t}{\Delta t} = -\sum_\gamma\left\{\left[\Phi_p p^{B,C} + (1-\Phi_p)\,p^n\right]/\left(a^n\right)^2 + \frac{2}{3}\rho^A\kappa^A\right\}_\gamma\left(\vec{A}''\right)_\gamma^n\cdot\vec{A}_a + \\ + \frac{\vec{A}_a^t-\vec{A}_a^n}{\Delta t}\cdot\frac{\vec{u}_a^n+\vec{u}_b^n+\vec{u}_c^n+\vec{u}_d^n}{4}\left[\left(M''\right)_a^B + S''_\alpha\right], \tag{54}$$

где

$$S''_\alpha = \frac{S'_a+S'_b+S'_c+S'_d}{(M')_a^B+(M')_b^B+(M')_c^B+(M')_d^B}\left(M''\right)_a^B,$$

$$\vec{A}_a^t = \vec{A}_a\left(\vec{x}^n + \vec{u}^n\Delta t\right),$$

$$(uA)_a^t = \frac{1}{4}\left(\vec{u}_a^t+\vec{u}_b^t+\vec{u}_c^t+\vec{u}_d^t\right)\cdot\vec{A}_a^n,$$

a, b, c и d – метки четырех вершин, образующих грань ячейки.

Для получения уравнения корректор - давления разложим корректор - объем в ряд Тейлора в таком виде:

$$V_{ijk}^{B,C} = V_{ijk}^{B,P} + \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{ijk}\Delta P_{ijk} = V_{ijk}^{B,P} + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{ijk}^{B,P}\left(P_{ijk}^{B,C} - P_{ijk}^{B,P}\right), \tag{55}$$

здесь

$$\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{ijk} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{M_{ijk}^B}{P_{ijk}^{B,P}}R_0\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\right)T_{ijk}^{B,P} + \frac{M_{ijk}^B}{P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\frac{\partial T_{ijk}^{B,P}}{\partial P}. \tag{56}$$

Пренебрегая членами диффузии в уравнении предиктор - температуры (47), подставляем его в (56):

$$\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{ijk} = -\frac{V_{ijk}^{B,P}}{P_{ijk}^{B,P}} + \frac{\frac{M_{ijk}^B}{P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\frac{V_{ijk}^n}{2(c_v)_{ijk}^t M_{ijk}^B}\left(1+\frac{P_{ijk}^n+P_{ijk}^{B,P}}{2(c_v)_{ijk}^t P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\right)}{\left(1+\frac{P_{ijk}^n+P_{ijk}^{B,P}}{2(c_v)_{ijk}^t P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\right)^2} +$$

$$+\frac{\frac{M_{ijk}^B}{P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\cdot\frac{P_{ijk}^n R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}}{2(c_v)_{ijk}^t P_{ijk}^{B,P}}}{\left(1+\frac{P_{ijk}^n+P_{ijk}^{B,P}}{2(c_v)_{ijk}^t P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\right)}\cdot\frac{V_{ijk}^{B,P}}{\frac{M_{ijk}^B}{P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}} =$$

$$= -\frac{V_{ijk}^{B,P}}{P_{ijk}^{B,P}} + \frac{\frac{V_{ijk}^n}{P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m} + \frac{P_{ijk}^n V_{ijk}^{B,P}}{\left(P_{ijk}^{B,P}\right)^2}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}}{2(c_v)_{ijk}^t + \frac{P_{ijk}^n+P_{ijk}^{B,P}}{P_{ijk}^{B,P}}R_o\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}} = -\frac{1}{\gamma^t}\frac{V_{ijk}^{B,P}}{P_{ijk}^{B,P}},$$

где

$$\frac{1}{\gamma_{ijk}^t} = \frac{2\,(c_v)_{ijk}^t\,P_{ijk}^{B,P}}{2\,(c_v)_{ijk}^t\,P_{ijk}^{B,P} + \left(P_{ijk}^n + P_{ijk}^{B,P}\right)R_0\left[\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\right]}\left[1+\frac{R_0}{2\,(c_v)_{ijk}^t}\left[\sum_m\frac{(Y_m)_{ijk}^B}{W_m}\right]\left(1-\frac{V_{ijk}^n}{V_{ijk}^{B,P}}\right)\right].$$

Окончательно (55) примет вид:

$$V_{ijk}^{B,C} = V_{ijk}^{B,P}\left[1 + \frac{1}{\gamma_{ijk}^t}\left(1 - \frac{P_{ijk}^{B,C}}{P_{ijk}^{B,P}}\right)\right]. \tag{57}$$

Уравнение корректор - давления (57) с учетом (48) и (54) в линейном относительно $P_{ijk}^{B,C}$ виде представляется:

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{\gamma_{ijk}^t}\tfrac{V_{ijk}^{B,P}}{P_{ijk}^{B,P}}P_{ijk}^{B,C} - \Delta t\sum_\alpha \tfrac{\Delta t}{\left[(M'')_\alpha^B + S''_\alpha\right]}\sum_\gamma \left(\Phi_p P^{B,C}\right)_\gamma \Big/ (\alpha^n)^2 \left(A''\right)_\gamma^n \cdot \vec{A}_\alpha^n = \\
= V_{ijk}^{B,P} + \tfrac{1}{\gamma_{ijk}^t}\tfrac{V_{ijk}^{B,P}}{P_{ijk}^{B,P}} - V_{ijk}^n - \Delta t\sum_\alpha \Bigg\{(uA)_\alpha^t - \tfrac{\Delta t}{\left[(M'')_\alpha^B + S''_\alpha\right]}\sum_\gamma \Big[(1-\Phi_p)P^n \Big/ (\alpha^n)^2 + \\
+ \frac{2}{3}\rho^A k^A\Big]_\gamma \left(A''\right)_\gamma^n \cdot \vec{A}_\alpha^n + \left(\vec{A}_\alpha^t - \vec{A}_\alpha^n\right)\cdot \frac{\vec{u}_a^n + \vec{u}_b^n + \vec{u}_c^n + \vec{u}_d^n}{4}\Bigg\}
\end{gathered} \tag{58}$$

и решается методом сопряженных разностей.

6. Вычисление $\vec{u}_{ijk}^B$ с учетом соответствующих значений $\vec{u}_{ijk}^{B,P}$ и с помощью корректор - давления $P_{ijk}^{B,C}$.

7. Представляется корректор - давление $P_{ijk}^{B,C}$ взамен $P_{ijk}^{B,P}$, возвращаемся к пункту 2 и на данном временном слое повторяем расчет поля давления, скорости и температуры с учетом вновь найденного поля давления до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости [3]:

$$\left|P^{B,P} - P^{B,C}\right| \le \varepsilon_0\left\{\left|\max_{ijk}\left(P_{ijk}^{B,C}\right) - \min\left(P_{ijk}^{B,C}\right)\right| + 10^{-10}\left|\max P_{ijk}^{B,C} + \min P_{ijk}^{B,C}\right|\right\}.$$

III. Если условие сходимости выполняется,то вычисляются компоненты скоростей u_{ijk}^B, w_{ijk}^B из (35), внутренняя энергия I_{ijk}^B из первого уравнения (44) и плотность из уравнения $\rho_{ijk}^B = \sum\limits_m (\rho_m)_{ijk}^B$.

IV. Траектории вершин контрольного объема основной ячейки определяются из закона сохранения объема следующим образом: $\vec{x}_{ijk}^B = \vec{x}_{ijk}^n + u_{ijk}^B\Delta t$.

V. Вычисляются кинетическая энергия турбулентности k_{ijk}^B и скорость ее диссипации ε_{ijk}^B из (37) и (38) методом сопряженных разностей[4].

Алгоритм решения этапа С.

Перенос рассматриваемых величин вычисляется путем использования приращения объема δV_a^G от старого $\vec{x}_{i,j,k}^n$ радиуса–вектора к новому $\vec{x}_{i,j,k}^{n+1}$. Величина вычисляется в зависимости от скорости грани ячеек и от старых и новых положений сеток следующим образом [3]:

$$\delta V_\alpha = \delta V_\alpha^G \Delta t_c/\Delta t - (uA)_\alpha^B \Delta t_c. \tag{59}$$

Из (41) следует, что δV_α удовлетворяет соотношению

$$V_{ijk}^B + NS\sum_\alpha \delta V_\alpha = V_{ijk}^{n+1}, \tag{60}$$

где $NS = \Delta t/\Delta t_c$ – число конвективных циклов.

Плотности компонент после υ конвективных циклов определяются

$$(\rho_m)_{ijk}^\upsilon V_{ijk}^\upsilon = (\rho_m)_{ijk}^{\upsilon-1} V_{ijk}^{\upsilon-1} + \sum_\alpha (\rho_m)_\alpha^{\upsilon-1}\delta V_\alpha, \tag{61}$$

здесь суммирование производится по всем граням ячейки (i,j,k).

Плотности компонент на гранях ячеек вычисляются схемой донорской ячейки. Начальным условием для плотности компонент на этапе С служат их конечные значения из этапа В, т.е.

$$
\begin{aligned}
&(\rho_m)^0_{ijk} = (\rho_m)^B_{ijk}\,, \\
&V^{\upsilon}_{ijk} = \left[\upsilon V^{n+1}_{ijk} + (NS-\upsilon)V^B_{ijk}\right]/NS.
\end{aligned} \tag{62}
$$

Плотность смеси после υ конвективных циклов вычисляется

$$
\rho^{\upsilon}_{ijk} = \sum (\rho_m)^{\upsilon}_{ijk}.
$$

Аналогичным образом определяются характерная внутренняя энергия и величины турбулентности:

$$
\begin{aligned}
&\rho^{\upsilon}_{ijk}V^{\upsilon}_{ijk}I^{\upsilon}_{ijk} = \rho^{\upsilon-1}_{ijk}V^{\upsilon-1}_{ijk}I^{\upsilon-1}_{ijk} + \sum_{\alpha}(\rho I)^{\upsilon-1}_{\alpha}\,\delta V_{\alpha}, \\
&\rho^{\upsilon}_{ijk}V^{\upsilon}_{ijk}q^{\upsilon}_{ijk} = \rho^{\upsilon-1}_{ijk}V^{\upsilon-1}_{ijk}q^{\upsilon-1}_{ijk} + \sum_{\alpha}(\rho q)^{\upsilon-1}_{\alpha}\,\delta V_{\alpha},
\end{aligned} \tag{63}
$$

где $q = k$, $k^{3/2}\Big/\varepsilon = l$.

Поле вектора скорости вычисляется следующим образом:

$$
\left(M'\right)^{\upsilon}_{ijk}\vec{u}^{\upsilon}_{ijk} = \left(M'\right)^{\upsilon-1}_{ijk}\vec{u}^{\upsilon-1}_{ijk} + \sum_{\beta}\left(\delta M'_{\beta}\right)^{\upsilon-1}_{i}\vec{u}^{\upsilon-1}_{\beta}, \tag{64}
$$

где $(\delta M'_{\alpha})^{\upsilon-1} = \frac{1}{8}\left(\rho^{\upsilon-1}_0\delta V_0 - \rho^{\upsilon-1}_i\delta V_i\right)$, $(M')^{\upsilon}_{ijk} = (M')^{\upsilon-1}_{ijk} + \sum\limits_{\alpha}(\delta M'_{\alpha})^{\upsilon-1}$. После завершения всех конвективных циклов окончательное значение величин устанавливается равным их значениям после циклов. Температура вычисляется из уравнения (22) с использованием окончательных значений энергии и плотности масс. Поле давления на $(n+1)$-м слое определяется следующим образом:

$$
P^{n+1}_{ijk} = R_0 T^{n+1}_{ijk}\sum_m (\rho_m)^{n+1}_{ijk}\Big/W_m. \tag{65}
$$

А н а л и з р е з у л ь т а т о в. Некоторые результаты расчетов представлены на Рис.3-5. Конечно-разностный аналог полученной системы реализован на сетке (60x120) с шагами $\Delta x = 0.1$, $\Delta z = 0.2$.

На Рис.3 приведено распределение поля вектора скорости. Как следует из рисунка, для всех рассматриваемых случаев формируется система вихрей: верхние вихри, которые вращаются против часовой стрелки, нижние вихри – по часовой стрелке. При этом для открытой верхней границы (Рис.3а) поток равномерно устремляется вверх. Распределение поля векторов скоростей качественно согласуется с результатами работ [8-9]. Расчеты, выполненные для устройств с частично правой открытой границей (Рис.3б) и с нижним выступом (Рис.3в), показывают, что в этих устройствах качественная картина распределения вихрей не меняется, что подтверждает и картины поля температуры (Рис.4) и распределения твердых частиц (Рис.5).

Из Рис. 5 видно, что твердые частицы, попадая в топочные устройства, взаимодействуют с потоком, двигаясь по траектории, поднимаются вверх и покидают устройства. При этом твердые частицы, достигающие стенок, прилипают к ним.

З а к л ю ч е н и е. На основании проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- разработана численная модель вдува воздуха и частиц;
- полученные результаты качественно согласуются с данными других авторов;
- предложенный метод решения позволяет провести дальнейшие исследования влияния параметров на структуру течения и распространяется на трехмерный случай.

Цитированная литература

1. **Akamatsu F., Saiton H., and Katsuki M.** // Proceedings of the 4th JSME-KSME Thermal Engineering Conference, October 1-6, Kobe, Japan, 2000.
2. **Старченко А.В.** // Физика горения и взрыва. 1998. Т.34, №6.С.3-13.
3. **Amsden A.A., O'Rourke. P.J., Butler T.D.** KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos National Laboratory report, 1989.
4. **Holst M.J.** Notes on the KIVA-II software and chemically reactive fluid mechanics. Livermore, California, 1992.
5. **Dukowicz. J.K.** // Journal of Computational Physics, 1980. V.35, No.2.P.229-253.
6. **Томас П.Д., Ломбард К.К.** // Ракетная техника и космонавтика. 1979. Т.17, №10. С.9-19.
7. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости, М., 1984.
8. **Fan J.R., Zha X.D., Sun P., Cen K.F.** // Fuel 80. 2001. P.645-654.
9. **Устименко Б.П., Джакупов К.Б., Кроль В.О.** Численное моделирование аэродинамики и горения в топочных и технологических устройствах, Алма-Ата, 1986.
10. **Ramshaw J. D., O'Rourke P.J., and Stein L.R.** // Journal of Computational Physics. 1985. V. 58. P. 361-376.

Поступила в редакцию 21.01.2005г.

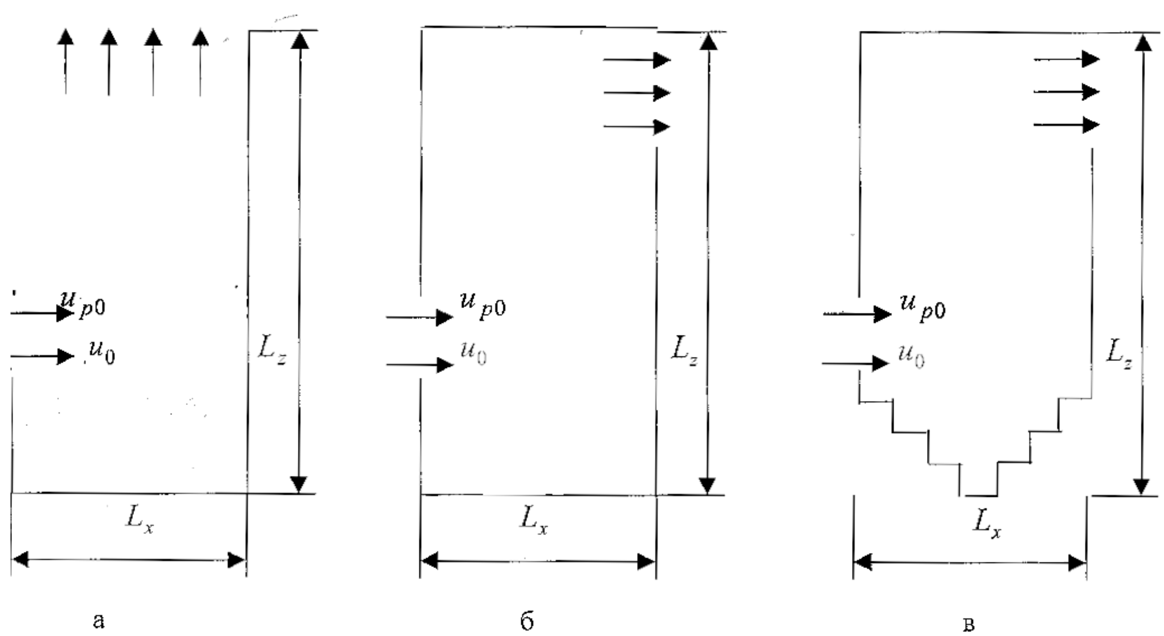


Рис. 1: Схема течения: а - открыта верхняя граница; б - открыта правая граница; в - нижний выступ и частично открыта правая граница.

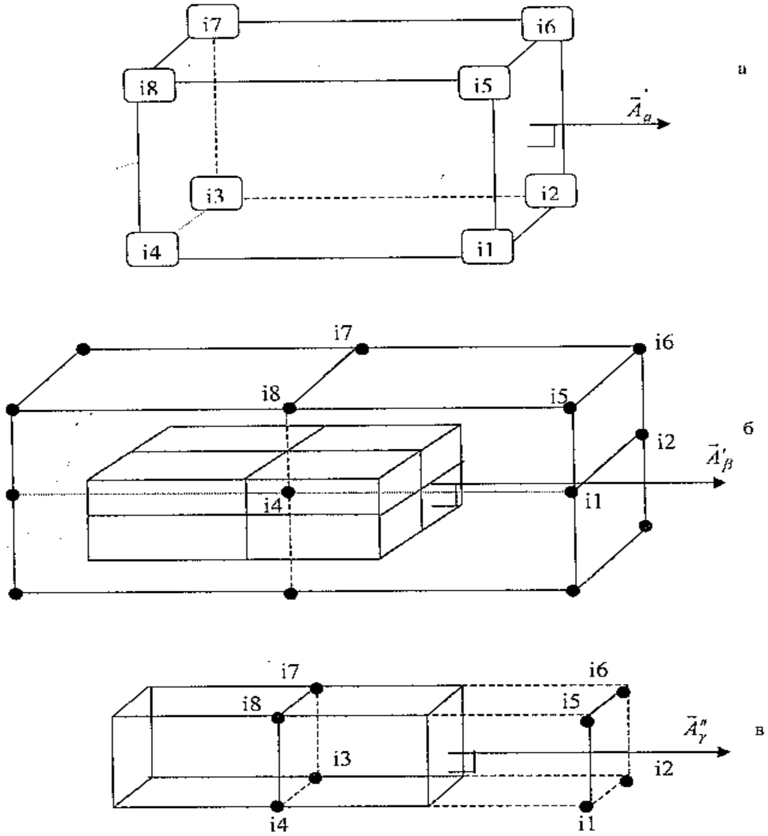


Рис. 2: Объемы вычислительных ячеек: а - контрольный объем основной ячейки, б - контрольный объем ячейки количества движения, в - контрольный объем левой грани ячейки.

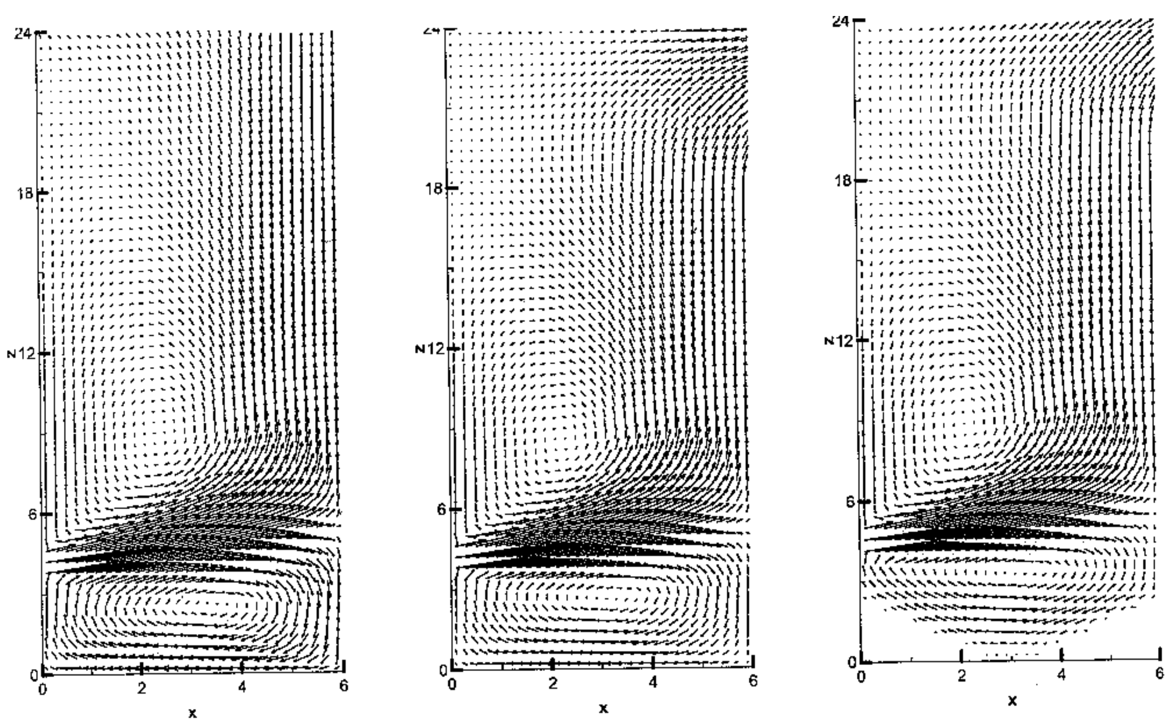


Рис. 3: Распределение поля векторов скоростей газа.

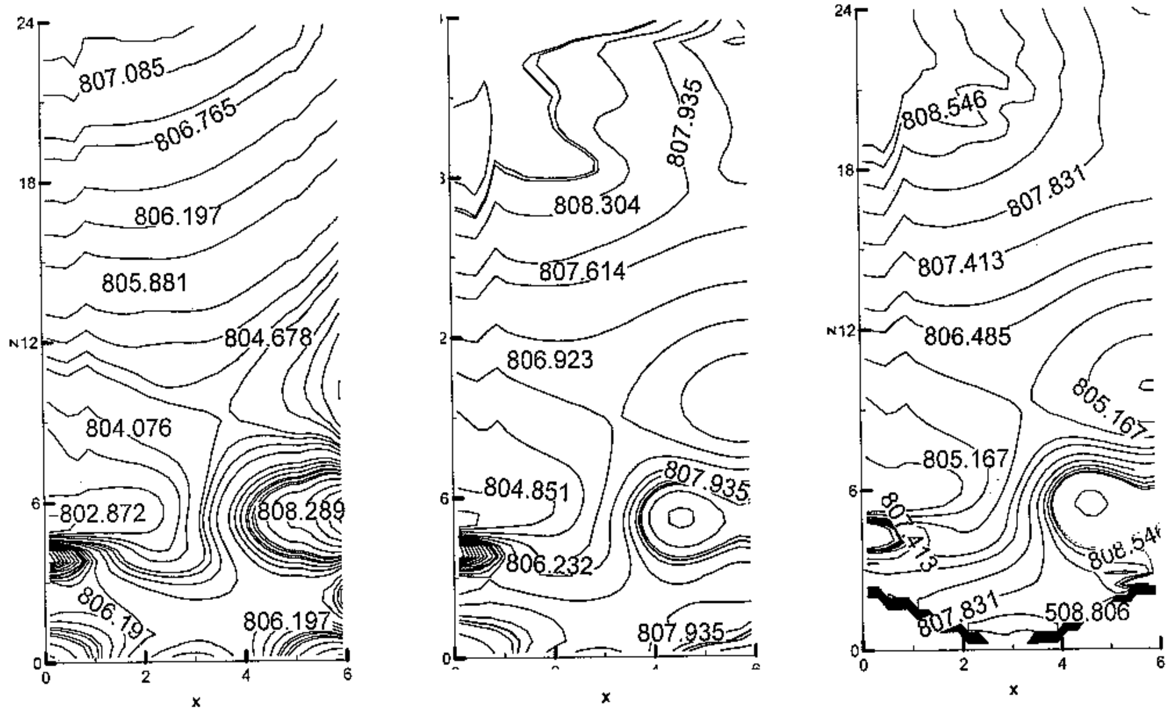


Рис. 4: Распределение поля температур газа.

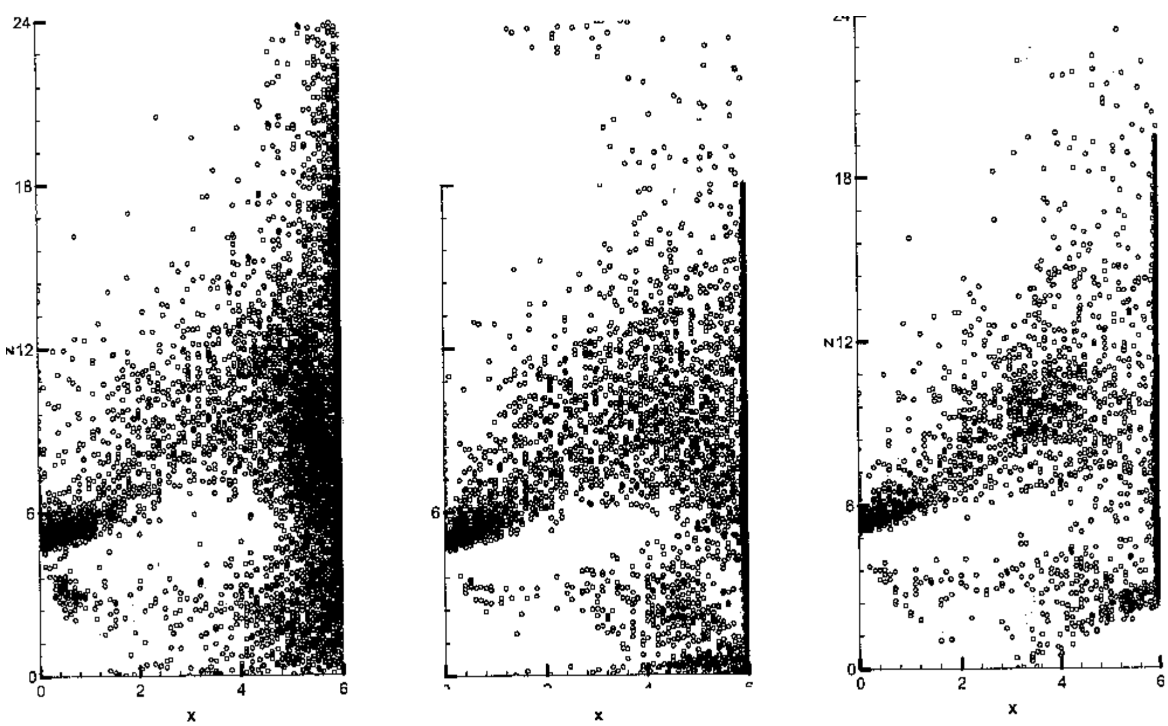


Рис. 5: Распределение твердых частиц.

РЕФЕРАТ.

Г.А.Камалова, А.Ж.Найманова "Математическое моделирование газодинамических процессов двухфазной среды в устройствах различной конфигурации"

Предлагается численная модель газодинамических процессов двухфазной среды в устройствах различной конфигурации. Для моделирования процесса используется осредненная по Рейнольдсу система уравнений Навье-Стокса, замыкаемая $k-\varepsilon$ моделью турбулентности. Решение уравнений газовой динамики осуществляется методом конечных объемов и с целью улучшения метода расчета используется закон сохранения объема (ЗСО). Уравнение ЗСО решается совместно с основными уравнениями Навье-Стокса. Для моделирования параметров газовой фазы используется эйлеров подход, для описания параметров дисперсной фазы - лагранжев. Приведены численные результаты для поля течения, теплоотдачи и твердых частиц.

Ключевые слова: двухфазное течение, давление, турбулентный слой, дозвуковой поток.

G.A.Kamalova, A.Zh.Naimanova

"Mathematical simulation of gas dynamical processes of two-phase flow in devices of different configuration"

A simulation model of gas dynamical processes of two-phase flow in devices of different configuration is proposed. For process modelling we use a system of Navier-Stokes equations, closed by $k - \varepsilon$ turbulence model. Solving gas dynamics equations is carried out by a finite volume method as well as volume conservation law (VCL) is used for the method improvement. VCL equation is solved together with Navier-Stokes equations. Numerical solutions are given for a flow field, heat transfer flow and solid particles flow. For modelling parameters of gas phase is used Eulerian approach as well as for description of parameters of dispersion phase we use Lagrangian approach. The numerical results for a fields of the flow, temperature and solid particles are given.

Keywords: two-phase flow, pressure, turbulence layer, subsonic flow

Г.А.Камалова, А.Ж.Найманова

"Әр түрлі конфигурациядағы құрылғыларда екіфазалы ортаның газодинамикалық процесстерін математикалық модельдеу"

От жағу құрылғыларында екіфазалы ортаның газодинамикалық процесстерін сандық модельдеу ұсынылады. Процессті модельдеу үшін $k-\varepsilon$ турбуленттік моделімен толықтырылған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі пайдаланылады. Газ динамикасы теңдеулерінің шешімі шектік көлемдер әдісімен жүзеге асырылады және есептеу әдісін жақсарту мақсатында көлемдерді сақтау заңдылығы пайдаланылады. Көлемдерді сақтау заңдылығының теңдеуі негізгі Навье-Стокс теңдеулерімен бірге шешіледі. Газ фазасының параметрлерін модельдеу үшін эйлер тәсілі, дисперсиялық фазаның параметрлеріне лагранж тәсілі қолданылады. Ағыс өрістері, температура және қатты түйіршіктер үшін сандық нәтижелер келтірілген.

Белгілеу сөздері: екіфазалы ағын, қысым, турбуленттік қабат, дыбыс жылдамдығынан төмен ағыс

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.67 — 74*

УДК 519.624

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. В. Кокотова

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова
463000 Актобе ул. бр. Жубановых, 263 ruteshova@yandex.ru

Рассматривается задача нахождения ограниченного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с неограниченной матрицей и ограниченной с весом правой частью. На основе метода параметризации с неравномерным шагом разбиения в терминах двусторонне-бесконечной матрицы специальной структуры получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

В различных разделах прикладной математики возникают задачи, приводящие к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями или на бесконечном интервале. Вопросы существования ограниченного решения подобного рода задач различными методами исследовались многими авторами [1-10].

В [6] условие ограниченности решения в особой точке заменяется эквивалентным соотношением в ее окрестности - уравнением устойчивого начального многообразия, порожденного в окрестности особой точки всей совокупностью ограниченных решений системы.

В [8] вопросы существования и аппроксимации ограниченного на всей оси решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения исследуются на основе метода параметризации.

В настоящей работе методом параметризации с неравномерным шагом разбиения на интервале $(0,T)$ исследуется линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

Keywords: *ordinary differential equation, singular boundary-value problem, correct solvability, parameterization's method*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

где $A(t), f(t)$ непрерывны на $(0,T)$, $\|A(t)\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| = \alpha(t)$, $\alpha(t)$ – непрерывная на $(0,T)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_0^{T/2} \alpha(t)dt = \infty, \qquad \lim_{t\to 0+0} \alpha(t) = \infty, \qquad \int\limits_{T/2}^{T} \alpha(t)dt = \infty, \qquad \lim_{t\to T-0} \alpha(t) = \infty.$$

Введем следующие пространства:
$\widetilde{C}((0,T), R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных на $(0,T)$ функций $x : (0,T) \to R^n$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sup_{t\in(0,T)} \|x(t)\|;$$

m_n – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda_r \in R^n$ с нормой

$$\|\lambda\|_2 = \|(\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots)'\|_2 = \sup_r \|\lambda_r\|, \quad r \in Z;$$

$\widetilde{C}_{1/\alpha}((0,T), R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных с весом $1/\alpha(t)$ на интервале $(0,T)$ функций $f : (0,T) \to R^n$ с нормой

$$\|f\|_\alpha = \sup_{t\in(0,T)} \|f(t)/\alpha(t)\|;$$

$L(m_n)$ – пространство всех линейных ограниченных операторов, отображающих m_n в себя, с индуцированной нормой.

Выберем числа $\theta > 0, t_0 = \dfrac{T}{2}$ и произведем разбиение $(0,T) = \bigcup\limits_{r=-\infty}^{\infty} [t_{r-1}, t_r)$, где точки t_r, $r \in Z$, определяем из соотношений $\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha(t)dt = \theta$.

Через $\overline{h}(\theta)$ обозначим двусторонне-бесконечную последовательность чисел $h_r = t_r - t_{r-1}$, $r \in Z$; через $x_r(t)$ – сужение функции $x(t) \in \widetilde{C}((0,T), R^n)$ на $r-$ й интервал и введем еще одно пространство $m_n(\overline{h})$ ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных и ограниченных на $[t_{r-1}, t_r)$ функций $x_r(t)$, $r \in Z$, с нормой

$$\|x[t]\|_3 = \|(\ldots, x_r(t), x_{r+1}(t), \ldots)'\|_3 = \sup_s \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x_r(t)\|.$$

Ограниченное на $(0,T)$ решение уравнения (1), когда правая часть $f(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{C}_{1/\alpha}((0,T), R^n)$, назовем решением задачи 1_α. Разрешимость задачи 1_α эквивалентна существованию решения $x[t] \in m_n(\overline{h})$ многоточечной краевой задачи для уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2}$$

с условиями сшивания решения во внутренних точках разбиения

$$\lim_{t\to t_r - 0} x_r(t) = x_{r+1}(t_r), \qquad r \in Z, \tag{3}$$

(производная $\dfrac{dx_r}{dt}$ при $t = t_{r-1}$ понимается как правосторонний предел $\lim\limits_{t\to t_{r-1}+0} \dfrac{dx_r}{dt}$).

Действительно, пусть $\widehat{x}(t)$ – решение задачи 1_α, а $\widehat{x}[t] = (\ldots, \widehat{x}_r(t), \widehat{x}_{r+1}(t), \ldots)'$ – система сужений функции $\widehat{x}(t)$. Покажем, что $\widehat{x}[t] \in m_n(\overline{h})$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) и условиям (3).

Так как $\widehat{x}(t)$ является решением уравнения (1) на $(0,T)$, то $\widehat{x}(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,T)$. Тогда $\widehat{x}_r(t)$, $\dfrac{d\widehat{x}_r(t)}{dt}$ непрерывны на $[t_{r-1},t_r)$. Функция $\widehat{x}(t)$ ограничена на $(0,T)$. Следовательно, функции $\widehat{x}_r(t)$, $r\in Z$, ограничены на $[t_{r-1},t_r)$, а $\widehat{x}[t]\in m_n(\overline{h})$.

Проверим выполнение дифференциального уравнения (2) при всех $t\in[t_{r-1},t_r), r\in Z:$

$$\frac{d\widehat{x}_r(t)}{dt}=\frac{d\widehat{x}(t)}{dt}=A(t)\widehat{x}(t)+f(t)=A(t)\widehat{x}_r(t)+f(t).$$

Из непрерывности функции $\widehat{x}(t)$ на $(0,T)$ следует существование левосторонних пределов

$$\lim_{t\to t_r-0}\widehat{x}_r(t)=\lim_{t\to t_r-0}\widehat{x}(t)=\widehat{x}(t_r),\qquad r\in Z,$$

т.е. справделивы соотношения (3):

$$\lim_{t\to t_r-0}\widehat{x}_r(t)=\widehat{x}(t_r)=\widehat{x}_{r+1}(t_r).$$

Пусть теперь $\widetilde{x}[t]=(\ldots,\widetilde{x}_r(t),\widetilde{x}_{r+1}(t),\ldots)\in m_n(\overline{h})$ – решение задачи (2)-(3). Покажем, что функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r\in Z$, будет решением задачи 1_α.

В силу (3) функция $\widetilde{x}(t)$ является непрерывной на $(0,T)$. Так как функции $\widetilde{x}_r(t)$, $r\in Z$, удовлетворяют уравнению (2) при всех $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r\in Z$, то $\widetilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную при всех $t\in(0,T)$, кроме точек $t=t_r$, $r\in Z$, и

$$\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt}=\frac{d\widetilde{x}_r(t)}{dt}=A(t)\widetilde{x}_r(t)+f(t)=A(t)\widetilde{x}(t)+f(t),$$

$$t\in(0,T)\backslash\{t=t_r,r\in Z\}.$$

В точках $t=t_r$, $r\in Z$, функция $\widetilde{x}(t)$ имеет правостороннюю производную. Пусть $t=t_r$ – произвольная из точек t_r, $r\in Z$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) на интервалах $[t_{r-1},t_r)$ и $[t_r,t_{r+1})$:

$$\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt}=A(t)\widetilde{x}(t)+f(t),\qquad t\in[t_{r-1},t_r), \tag{$*$}$$

$$\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt}=A(t)\widetilde{x}(t)+f(t),\qquad t\in[t_r,t_{r+1}). \tag{$**$}$$

Из (*) и непрерывности $A(t),f(t),\widetilde{x}(t)$ на $(0,T)$ следует, что

$$\lim_{t\to t_r-0}\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt}=A(t_r)\widetilde{x}(t_r)+f(t_r),$$

т.е. в точке $t=t_r$ существует левосторонняя производная функции $\widetilde{x}(t)$:

$$\dot{\widetilde{x}}(t_r-0)=A(t_r)\widetilde{x}(t_r)+f(t_r).$$

Учитывая (**) и существование $\dot{\widetilde{x}}(t_r+0)=A(t_r)\widetilde{x}(t_r)+f(t_r)$, получим существование непрерывной производной в точке $t=t_r$ и выполнение в этой точке дифференциального уравнения (1).

Итак, функция $\widetilde{x}(t)$ является непрерывно дифференцируемой на $(0,T)$ и удовлетворяет уравнению (1) при всех $t\in(0,T)$. Так как $\widetilde{x}[t]\in m_n(\overline{h})$, то $\widetilde{x}(t)$ будет ограниченным решением уравнения (1).

Обозначим через λ_r значение функции $x_r(t)$, $r \in Z$, в точке $t = t_{r-1}$. Тогда, произведя на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$ замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получим краевую задачу с параметром:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad u_r(t_{r-1}) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t) + \lambda_r = \lambda_{r+1}, \qquad r \in Z, \tag{5}$$

$$(\lambda, u[t]) \in m_n \times m_n(\overline{h}). \tag{6}$$

Если пара $(\lambda^*, u^*[t]) \in m_n \times m_n(\overline{h})$ – решение задачи (4)-(6), то функция $x^*(t)$, полученная склеиванием систем функций $(\lambda_r^* + u_r^*[t])$, $r \in Z$, принадлежит пространству $\widetilde{C}((0,T), R^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in (0,T)$. И наоборот, если $x(t)$ – решение задачи 1_α, то пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\ldots, x_r(t_{r-1}), x_{r+1}(t_r), \ldots)$, $u[t] = (\ldots, x_r(t) - -x_r(t_{r-1}), x_{r+1}(t) - x_{r+1}(t_r), \ldots)$, $x_r(t)$ – сужение функции $x(t)$ на r-й интервал, принадлежит $m_n \times m_n(\overline{h})$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) с условиями (5).

Появление начального условия в точке $t = t_{r-1}$ позволяет при фиксированных значениях параметра λ_r функцию $u_r(t)$ определить из интегрального уравнения

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r] d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau) d\tau, \qquad r \in Z. \tag{7}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (7) и повторив этот процесс ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ раз, получим

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u,t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{8}$$

где

$$D_{\nu,r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u,t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) u_r(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1, \qquad \tau_0 = t, \qquad r \in Z.$$

Из (8) найдем $\lim\limits_{t \to t_r - 0} u_r(t)$, $r \in Z$. Подставляя в (5) выражения для $u_r(t)$, получим двусторонне-бесконечную систему уравнений относительно параметров λ_r :

$$[I + D_{\nu,r}(h_r)]\lambda_r - \lambda_{r+1} = -F_{\nu,r}(h_r) - G_{\nu,r}(u, h_r), \qquad r \in Z, \tag{9}$$

где I – единичная матрица порядка n.

Блочно-ленточную двусторонне-бесконечную матрицу, соответствующую левой части системы (9), обозначим через $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}$. В каждой блочной строке матрицы $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}$ ненулевыми являются лишь $I + D_{\nu,r}(h_r)$ и $-I$. Поэтому для любой последовательности $\overline{h}(\theta)$ матрица $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}$ переводит элементы пространства m_n снова в m_n и справедлива оценка

$$\|Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \le 2 + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\theta^j}{j!}.$$

Систему уравнений (9) запишем в виде

$$Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}\lambda = -F_\nu(\overline{h}) - G_\nu(u,\overline{h}), \qquad \lambda \in m_n, \tag{10}$$

где

$$F_\nu(\overline{h}) = (\ldots, F_{\nu,r}(h_r), F_{\nu,r+1}(h_{r+1}), \ldots)' \in m_n,$$

$$G_\nu(u,\overline{h}) = (\ldots, G_{\nu,r}(u,h_r), G_{\nu,r+1}(u,h_{r+1}), \ldots)' \in m_n$$

для любых $u[t] \in m_n(\overline{h})$ и $\overline{h}(\theta)$.

О п р е д е л е н и е. Задача 1_α называется корректно разрешимой, если для любой функции $f(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}((0,T),R^n)$ существует единственное решение $x(t) \in \widetilde{C}((0,T),R^n)$ и для него справедлива оценка $\|x\|_1 \leq K\|f\|_\alpha$, где K – константа, независящая от $f(t)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для некоторой последовательности $\overline{h}(\theta)$ и некоторого $\nu(\nu = 1,2,\ldots)$ матрица $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)} : m_n \to m_n$ обратима и выполняются неравенства*

$$\|Q^{-1}_{\nu,\overline{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \leq \gamma_\nu(\overline{h}), \tag{11}$$

$$q_\nu(\overline{h}) = \gamma_\nu(\overline{h})\left(e^\theta - 1 - \theta - \ldots - \frac{\theta^\nu}{\nu!}\right) < 1. \tag{12}$$

Тогда задача 1_α корректно разрешима и справедлива следующая оценка

$$\|x^*\|_1 \leq e^\theta\left[\frac{\gamma_\nu(\overline{h})}{1-q_\nu(\overline{h})}\frac{\theta^\nu}{\nu!}(\gamma_\nu(\overline{h})(e^\theta-1)^2+\theta e^\theta) + \gamma_\nu(\overline{h})(e^\theta - 1) + \theta\right]\|f\|_\alpha. \tag{13}$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 статьи [7].

Пусть $x^*(t)$ – решение задачи 1_α. Тогда пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с параметрами $\lambda^*_r = x^*[t_{r-1}]$, $r \in Z$, и функциями $u^*_r(t) = x^*(t) - x^*(t_{r-1})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r \in Z$, будет решением задачи (4)-(6). Кроме того, существуют числа δ_1, δ_2 такие, что $\|\lambda^*\| \leq \delta_1$, $\|u^*_r(t)\| \leq \delta_2$, $t \in [t_{r-1}, t_r), r \in Z$, и для любого $\nu \in N$ имеют место равенства:

$$u^*_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda^*_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u^*,t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r \in Z, \tag{14}$$

$$Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}\lambda^* = -F_\nu(\overline{h}) - G_\nu(u^*,\overline{h}). \tag{15}$$

Так как $\|G_\nu(u^*,\overline{h})\|_2 \leq \dfrac{\theta^\nu}{\nu!}\|u^*[t]\|_3 \leq \dfrac{\theta^\nu}{\nu!}\delta_2$ и $D_{\nu,r}(t)$, $F_{\nu,r}(t)$ при $\nu \to \infty$ на $[t_{r-1}t_r)$ равномерно сходятся к

$$D_{*,r}(t) = \sum_{j=o}^{\infty}\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}\ldots d\tau_1,$$

$$F_{*,r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j\ldots d\tau_1, \quad r \in Z,$$

то, переходя к пределу при $\nu \to \infty$ в (14), (15) и разделив обе части (15) на $\theta > 0$, получим

$$u^*_r(t) = D_{*,r}(t)\lambda^*_r + F_{*,r}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r \in Z, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\theta}Q_{*,\overline{h}(\theta)}\lambda^* = -F_*(A,f,\overline{h}(\theta)), \quad \lambda^* \in m_n. \tag{17}$$

Здесь $F_*(A,f,\overline{h}(\theta)) = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{1}{\theta}F_\nu(\overline{h})$. Таким образом, если $(\lambda^*, u^*[t])$ – решение задачи (4)-(6), то параметр $\lambda^* = (\ldots,\lambda_r^*,\lambda_{r+1}^*,\ldots)' \in m_n$ удовлетворяет уравнению (17), а соответствующие λ_r^*, $r\in Z$, решения задач Коши (4), функции $u_r^*(t)$, имеют вид (16).

Теперь пусть $\widehat{\lambda} = (\ldots,\widehat{\lambda}_r,\widehat{\lambda}_{r+1},\ldots)' \in m_n$ – решение систем уравнений

$$\frac{1}{\theta}[I + D_{*,r}(t_r)]\lambda_r - \frac{1}{\theta}\lambda_{r+1} = -\frac{1}{\theta}F_{*,r}(t_r),$$

т.е.

$$\frac{1}{\theta}Q_{*,\overline{h}(\theta)}\widehat{\lambda} = -F_*(A,f,\overline{h}(\theta)), \tag{18}$$

и $\widehat{u}[t] = (\ldots,\widehat{u}_r(t),\widehat{u}_{r+1}(t),\ldots)'$ – система решений задач Коши (4) на $[t_{r-1},t_r)$ при $\lambda_r = \widehat{\lambda}_r$, $r\in Z$. Покажем, что пара $(\widehat{\lambda},\widehat{u}[t])$ – решение задачи (4)-(6). Так как $\widehat{u}_r(t)$ – решение задачи Коши (4) при $\lambda_r = \widehat{\lambda}_r$, то из (16) и единственности решения задачи Коши (4) при фиксированных значениях параметра λ_r следует, что

$$\widehat{u}_r(t) = D_{*,r}(t)\widehat{\lambda}_r + F_{*,r}(t), \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r\in Z. \tag{19}$$

Ввиду (18)

$$\widehat{\lambda}_r + [D_{*,r}(t_r)\widehat{\lambda}_r + F_{*,r}(t_r)] = \widehat{\lambda}_{r+1}, \quad r\in Z. \tag{20}$$

Тогда в силу (19) выражения, стоящие в квадратных скобках в (20), равны $\lim\limits_{t\to t_r-0}\widehat{u}_r(t)$, $r\in Z$, и пара $(\widehat{\lambda},\widehat{u}[t])$ удовлетворяет также и (5).

Т е о р е м а 2. *Задача* 1_α *корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого* $\nu\in N$ *найдется* $\theta(\nu)>0$ *такое, что при всех* $\overline{h}(\theta) = (\ldots,h_r(\theta),h_{r+1}(\theta),\ldots)$ *матрица* $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}: m_n\to m_n$ *обратима и выполняются неравенства (11), (12).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Достаточность выполнения условий теоремы для корректной разрешимости задачи 1_α следует из теоремы 1.

Необходимость. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\theta}Q_{*,\overline{h}(\theta)}\lambda = b, \qquad \lambda, b\in m_n. \tag{21}$$

Очевидно, что $Ker\dfrac{1}{\theta}Q_{*,\overline{h}(\theta)}$ состоит только из нулевого пространства m_n. Действительно, предположим, что существует $\overline{\lambda}\in m_n$ такое, что $\dfrac{1}{\theta}Q_{*,\overline{h}(\theta)}\overline{\lambda} = 0$, $\|\overline{\lambda}\|\neq 0$. Тогда, как было показано выше, пара $(\overline{\lambda},\overline{u}[t])$, где $\overline{u}[t] = (\ldots,\overline{u}_r(t),\overline{u}_{r+1}(t),\ldots)'$ – система решений задач Коши (4) на интервалах $[t_{r-1},t_r)$ при $\lambda_r = \overline{\lambda}_r$, является решением задачи (4)-(6) при $f(t)=0$. Функция $\overline{x}(t)$, полученная путем сшивания систем функций $(\overline{\lambda}_r + \overline{u}_r(t))$, $r\in Z$, принадлежит пространству $\widetilde{C}((0,T),R^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Учитывая, что $\sup\limits_{t\in(0,T)}\|\overline{x}(t)\|\neq 0$, приходим к противоречию с корректной разрешимостью задачи 1_α. Следовательно, матрица $Q_{*,\overline{h}(\theta)}$ обратима.

Зададим $\varepsilon>0$ и выберем $\theta_0(\varepsilon)>0$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{\theta}(e^\theta - 1 - \theta) \le \frac{\varepsilon/2}{2(1+\varepsilon/4)(1+\varepsilon/2)}. \tag{***}$$

Тогда на основании леммы из [10] для любых $b_r \in R^n$, $r \in Z$, можно построить функции $f_{b_r} \in C([t_{r-1}, t_r], R^n)$, $r \in Z$, обладающие свойствами:

$$F_*(A, f_{b_r}) = b_r, \qquad \max_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|f_{b_r}(t)/\alpha(t)\| \le (1 + \varepsilon/2)\|b_r\|.$$

Следовательно, функция $f_b(t)$, определяемая равенствами $f_b(t) = f_{b_r}(t)$ при $t \in [t_{r-1}, t_r]$ будет удовлетворять соотношениям:

$$f_b(t) \in \widetilde{C}((0,T), R^n), \qquad \|f_b\|_\alpha \le (1+\varepsilon/2)\|b\|_2, \qquad F_*(A, f_b, \overline{h}(\theta)) = b.$$

По условию задача 1_α корректно разрешима. Следовательно, уравнение (17) для любой функции $f_b(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}((0,T), R^n)$ имеет единственное решение $\lambda_b \in m_n$ и

$$\|\lambda_b\|_2 = \sup_{r \in Z} \|\lambda_{b_r}\| = \sup_{r \in Z} \|x_b(t_{r-1})\| \le \sup_{t \in (0,T)} \|x_b(t)\| \le K\|f_b\|_\alpha \le K(1+\varepsilon/2)\|b\|_2.$$

Учитывая, что $\|\lambda_b\|_2 = \| \left[\dfrac{1}{\theta} Q_{*,\overline{h}(\theta)}\right]^{-1} b\|_2$, из установленной оценки имеем

$$\frac{\| \left[\frac{1}{\theta} Q_{*,\overline{h}(\theta)}\right]^{-1} b\|_2}{\|b\|_2} \le (1 + \frac{\varepsilon}{2})K \quad \forall b \in m_n.$$

Отсюда получим

$$\| \left[\frac{1}{\theta} Q_{*,\overline{h}(\theta)}\right]^{-1} \|_{L(m_n)} \le K(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \quad \forall \theta \in (0, \theta_0].$$

Тогда, выбирая $\theta \in (0, \theta_0]$ удовлетворяющим неравенству

$$\frac{(1+\varepsilon/2)K}{\theta}\left(e^\theta - 1 - \theta - \ldots - \frac{\theta^\nu}{\nu!}\right) < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \tag{22}$$

и учитывая, что

$$\|\frac{1}{\theta} Q_{*,\overline{h}(\theta)} - \frac{1}{\theta} Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \le \frac{1}{\theta}\left(e^\theta - 1 - \theta - \ldots - \frac{\theta^\nu}{\nu!}\right), \tag{23}$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим ограниченную обратимость матрицы $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}$ и оценку

$$\| \left[\frac{1}{\theta} Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}\right]^{-1} \|_{L(m_n)} \le (1+\varepsilon)K. \tag{24}$$

Тогда из (17) получим

$$q_\nu(\overline{h}(\theta)) = (1+\varepsilon)\frac{K}{\theta}\left(e^\theta - 1 - \theta - \ldots - \frac{\theta^\nu}{\nu!}\right) < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < 1.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Задача* 1_α *корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого* ν *найдется* $\theta_0(\nu)$ *такое, что для любой последовательности* $\overline{h}(\theta)$, $\theta \in (0, \theta_0]$, *матрица* $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}$ *обратима и*

$$\| \left[Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}\right]^{-1} \|_{L(m_n)} \le \frac{\gamma}{\theta}, \tag{25}$$

где γ – константа, независящая от $\overline{h}(\theta)$.

Если при этом известна константа K, то для любого $\varepsilon > 0$ $\exists \overline{\theta}(\varepsilon, \nu) > 0$ такое, что при $\theta \in (0, \overline{\theta}(\varepsilon, \nu)]$ оценка (25) выполняется с $\gamma = (1+\varepsilon)K$. Обратно, если выполняется (25), то $K = \gamma$.

Доказательство. Необходимость. Пусть задача 1_α корректно разрешима с константой K. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\overline{\theta}(\varepsilon, \nu) \in (0, \theta_0(\varepsilon)]$, где $\theta_0(\varepsilon)$ удовлетворяет условию (***). Тогда, как было показано в теореме 2, матрица $Q_{\nu, \overline{h}(\theta)}$ будет обратимой при всех $\theta \in (0, \overline{\theta}(\varepsilon, \nu)]$ и $\| \left[Q_{\nu, \overline{h}(\theta)} \right]^{-1} \|_{L(m_n)} \le \dfrac{(1+\varepsilon)K}{\theta}$, т.е. $\gamma = (1+\varepsilon)K$.

Достаточность. Пусть выполняется оценка (25). Выберем число θ таким образом, чтобы $q_\nu(\overline{h}(\theta)) < 1$. Тогда по теореме 1 задача 1_α корректно разрешима и справедлива оценка

$$\|x^*\|_1 \le e^\theta \left[\frac{\gamma}{\theta} \cdot \frac{1}{1 - q_\nu(\overline{h}(\theta))} \cdot \frac{\theta^\nu}{\nu!} \left(\frac{\gamma}{\theta} (e^\theta - 1)^2 + \theta e^\theta \right) + \frac{\gamma}{\theta} (e^\theta - 1) + \theta \right] \|f\|_\alpha.$$

Переходя к пределу при $\theta \to 0$, получим

$$\|x^*\|_1 \le \|f\|_\alpha,$$

т.е. $K = \gamma$. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.

2. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.

3. **Плисс В. А.** Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев, 1977. С.168-173.

4. **Мухамадиев Э.** // Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 3. С.443 - 460.

5. **Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. Киев, 1990.

6. **Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Балла К.** Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.// Computational mathematics Banach Center publications. Warsaw. PWN-Polish Scientific pablishes. 1984. V. 13, P. 319 – 351.

7. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

8. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388 – 404.

9. **Утешова Р. Е.** // Математический журнал. 2003. Т. 3, № 2. С. 75 – 83.

10. **Утешова Р. Е.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 3. С. 91 – 98.

11. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 1. С. 5 – 63.

12. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 09.02.2005г.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

К o k o t o v a E.V. **Bounded solutions of linear systems of ordinary differential equations with unlimited coefficients** // Mathematical journal. 2005. Vol.4. №1(15). P.

A problem of finding bounded solution of non-homogeneous linear differential equation with unlimited matrix and right part bounded with a wight is considered. Necessary and sufficient conditions of correct solvability of the problem in the terms of bilaterally infinite matrix of special structure are received by parameterization's method with non-uniform step of partition.

References - 12.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

К о к о т о в а Е.В. **Коэффициенттерi шектелмеген жәй дифференциалдық теңдеулердiң сызықтық жүйесiнiң шектелген шешiмдерi**// Математикалық журнал. 2005.

Шектелмеген матрицалы және салмақты оң жағы шектелген бiртектi емес сызықты дифференциалдық теңдеудiң шектелген шешiмiн табу есебi қарастырылады. Қадамы бiр қалыпты емес параметрлеу әдiсi бойынша арнай құрылымды екi жақты шексiз матрица терминiнде қарастырылып отырған есептiң корректi шешiлiмдiгiнiң қажеттi және жеткiлiктi шарттары алынады.

Әдебиеттер тiзiмi - 12.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.75 — 84*

УДК 519.624

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Б. Б.Минглибаева

Институт Математики МОиН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Для линейной сингулярной двухточечной краевой задачи с параметром с предельно постоянными матрицами построены аппроксимирующие регулярные четырехточечные краевые задачи с параметром. Установлена взаимосвязь между корректными разрешимостями исходной и аппроксимирующей задач.

На $R=(-\infty,\infty)$ рассматривается сингулярная краевая задача с параметром

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)\mu+f(t),\quad t\in R,\quad x\in R^n,\quad \mu\in R^m,\quad ||x||=\max_{i=1,..,n}|x_i|, \tag{1}$$

$$C_0\mu+C_1x(0)+C_2x(a)=d,\quad d\in R^m, \tag{2}$$

$$x(t)\in \widetilde{C}(R,R^n), \tag{3}$$

где $a>0$, матрицы $A(t),B(t)$, вектор-функция $f(t)$ непрерывны и ограничены на R, $\widetilde{C}(R,R^n)$– пространство непрерывных и ограниченных функций $x:R\to R^n$ с нормой $||x||_1=\sup\limits_t||x(t)||$,

$$||A(t)||=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}(t)|\le\alpha,\quad ||B(t)||=\max_i\sum_{j=1}^m|b_{ij}(t)|\le\beta.$$

Задача заключается в определении пары $(\mu^*,x^*(t))$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на R функция $x^*(t)$ при $\mu=\mu^*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и краевому условию (2).

Вопросы существования ограниченного на R решения линейного уравнения (1) при фиксированном μ различными методами исследованы в [1]-[4]. В работе [5] получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи нахождения ограниченного на всей оси решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах двусторонне-бесконечных блочно-ленточных матриц, составленных через интегралы матрицы $A(t)$ на интервалах длины h . Для систем с предельно постоянными данными построены аппроксимирующие двухточечные краевые задачи, дана оценка аппроксимации и установлена связь между

Keywords: *approximation, parametrization's method, two-point boundary-value problem with parameter,linear singular boundary-value problem , ordinary differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B08

корректными разрешимостями исходной и аппроксимирующей задач. В настоящей работе эти вопросы изучаются для сингулярной краевой задачи с параметром (1)-(3).

Определение 1. *Задача (1)-(3) называется корректно разрешимой с константой* K, *если для любых* $f(t) \in \widetilde{C}(R, R^n), d \in R^m$ *она имеет единственное решение* $(\mu^*, x^*(t))$ *и справедливо неравенство*

$$\max(||\mu^*||, ||x^*||_1) \leq K max(||f||_1, ||d||),$$

где $K - const$, *независящая от* $f(t), \quad d$.

Коэффициентные признаки корректной разрешимости краевой задачи с параметром (1)-(3) с помощью метода параметризации установлены в [6].

Для нахождения приближенного решения задачи (1)-(3) ставится

Задача аппроксимации. По заданному $\varepsilon > 0$ требуется определить число $T > a$, вещественные $(n \times n)$- матрицы $D_1, D_2, \quad (n \times m)-$ матрицу D_0, вектор $d_1 \in R^m$, при которых решение $(\mu_T, x_T(t))$ четырехточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad t \in (-T, T), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \tag{4}$$

$$C_0\mu + C_1x(0) + C_2x(a) = d, \quad d \in R^m, \tag{5}$$

$$D_0\mu + D_1x(-T) + D_2x(T) = d_1, \quad d_1 \in R^n, \tag{6}$$

удовлетворяло бы неравенству $\max(\|\mu^* - \mu_T\|, \max\limits_{t\in[-T,T]} ||x^*(t) - x_T(t)||) < \varepsilon$, где $(\mu^*, x^*(t))-$ решение задачи (1)-(3).

Определение 2. *Задача (4)-(6) называется корректно разрешимой, если для любых* $f(t) \in C([-T, T], R^n), \quad d \in R^m, \quad d_1 \in R^n$ *она имеет единственное решение* $(\mu_T, x_T(t))$ *и выполняется неравенство*

$$\max(||\mu_T||, \max_{t\in[-T,T]} ||x_T(t)||) \leq K \max(\max_{t\in[-T,T]} ||f(t)||, ||d||, ||d_1||),$$

где $K - const$, *не зависящая от* $f(t), \quad d, \quad d_1$.

Число K *называется константой корректной разрешимости задачи (4)-(6).*

Задачу аппроксимации будем рассматривать в следующих предположениях.

Предположение 1. Имеют место соотношения $\lim\limits_{t\to\mp\infty} A(t) = A_\mp, \quad \lim\limits_{t\to\mp\infty} B(t) = B_\mp, \quad Re\xi_i^\mp \neq 0$, где $\xi_i^\mp$ - собственные значения матрицы $A_\mp, \quad i = \overline{1, n}$.

Предположение 2. Справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\mp\infty} f(t) = f_\mp$.

Тогда функции $\delta_1(T) = \max(\sup\limits_{t\in(-\infty,-T]} ||A(t) - A_-||, \sup\limits_{t\in[T,+\infty)} ||A(t) - A_+||)$,

$\delta_2(T) = \max(\sup\limits_{t\in(-\infty,-T]} ||B(t) - B_-||, \sup\limits_{t\in[T,+\infty)} ||B(t) - B_+||)$,

$\delta_3(T) = \max(\sup\limits_{t\in(-\infty,-T]} ||f(t) - f_-||, \sup\limits_{t\in[T,+\infty)} ||f(t) - f_+||)$ удовлетворяют условию $\delta_l(T) \to 0$ при $T \to \infty, \quad l = 1, 2, 3$.

Известно [7,с.350], что для предельных матриц $A_\mp$ существуют неособые $(n \times n)-$матрицы $S_\mp$, приводящие их к обобщенно-жордановой форме $\tilde{A}_\mp = S_\mp A_\mp S_\mp^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^\mp & O \\ O & A_{22}^\mp \end{pmatrix}$, где $A_{11}^\mp$ и $A_{22}^\mp$ состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матриц $A_\mp$ с отрицательными и положительными действительными частями, число которых обозначим, соответственно, $n_1^\mp$ и $n_2^\mp$. С помощью I_{n_l} - единичных матриц размерности $n_l, \ l = 1, 2,$ составим $(n \times n)-$ матрицы $P_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n_2} \end{pmatrix}$ и $P_1^\mp = (I_{n_1^\mp}, O), P_2^\mp = (O, I_{n_2^\mp})$ - матрицы размерностей $(n_1^\mp \times n)$ и $(n_2^\mp \times n)$, соответственно.

Обозначим через $\widetilde{m}_n$ пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей вида $\lambda = (..., \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \mu, \lambda_1, \lambda_2, ...), \mu \in R^m, \lambda_s \in R^n, s \in \mathbb{Z}$ с нормой $||\lambda||_2 = = \max(\sup_s ||\lambda_s||, ||\mu||)$, $m_{n_i^-}$ – пространства ограниченных односторонне-бесконечных последовательностей вида $(..., \lambda_{l,-}^{(i)}, ..., \lambda_{-N,-}^{(i)})$ с блочными элементами $\lambda_{l,-}^{(i)} = P_i^- \lambda_l, i = 1, 2, \lambda_l \in R^n, l = -N, -N-1, ...,$ $m_{n_i^+}$ – пространства ограниченных односторонне-бесконечных последовательностей вида $(\lambda_{N+1,+}^{(i)}, ..., \lambda_{p,+}^{(i)}, ...)$ с блочными элементами $\lambda_{p,+}^{(i)} = P_i^+ \lambda_p, i = 1, 2, \lambda_p \in R^n, p = N+1, N+2, ...,$ $N-$ натуральное число.

Далее мы воспользуемся следующим утверждением, устанавливающим достаточные условия существования решения сингулярной краевой задачи с параметром (1)-(3) и его оценку.

Теорема 1. *Пусть при некотором $T_0 > a$ для $\forall T \geq T_0$ задача (4)-(6) корректно разрешима с константой K_1, независящей от T. Тогда для $\forall f(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$, и $\forall d \in R^m$ задача (1)-(3) имеет решение $(\mu^*, x^*(t))$, для которого справедливо неравенство*

$$\max(||\mu^*||, \sup_{t \in R} ||x^*(t)||) \leq K_1 \max(||d||, ||f||_1). \tag{7}$$

Доказательство. По предположению для $\forall T \geq T_0$ задача (4)-(6) корректно разрешима с независящей от T константой K_1, т.е. для $\forall T \geq T_0,\ f(t) \in C([-T, T], R^n), d \in R^m, \quad d_1 = 0$ существует единственное решение $(\mu_T, x_T(t))$ и для него справедлива оценка

$\max(||\mu_T||, \max\limits_{t \in [-T,T]} ||x_T(t)||) \leq K_1 \max(||d||, \max\limits_{t \in [-T,T]} ||f(t)||)$. Так как $f(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$, то

$$\max(||\mu_T||, \max_{t \in [-T,T]} ||x_T(t)||) \leq K_1 \max(||d||, ||f||_1) \tag{8}$$

и правая часть неравенства не зависит от T.

Рассмотрим последовательность функций

$x_T(t) = x_T(0) + \int\limits_0^t A(\tau) x_T(\tau) d\tau + \int\limits_0^t B(\tau) \mu_T d\tau + \int\limits_0^t f(\tau) d\tau,\ t \in [-T, T]$, где $T \to \infty$.

Из корректной разрешимости задачи (4)-(6) и ограниченности матриц $A(t),\ B(t)$ следует

$$||x_T(t') - x_T(t'')|| \leq ((\alpha + \beta) K_1 + 1) \max(||d||, ||f||_1) |t'' - t'|,\ t', t'' \in [-T, T].$$

Поэтому семейство вектор-функций $\{x_T(t), T > p\}$, рассматриваемых на промежутке $[-p, p]$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и можно выделить подпоследовательность $\{x_{T'}(t)\}$, равномерно сходящуюся на $[-p, p]$. Из $\{x_{T'}(t)\}$ тем же способом можно выделить подпоследовательность пар $\{x_{T''}(t))\}$, равномерно сходящуюся на $[-2p, 2p]$ и т.д.

Далее построим диагональную последовательность $\{x^{(k)}(t)\}$, в которой за $x^{(1)}(t)$ возьмем первую функцию из последовательности $\{x_{T'}(t)\}$, за $x^{(2)}(t)-$ вторую функцию из $\{x_{T''}(t)\}$ и т.д. Последовательность $\{x^{(k)}(t)\}$ будет сходиться равномерно на каждом конечном промежутке к вектор-функции $x^*(t)$, которая определена при всех $t \in R$, а соответствующие им $\{\mu^{(k)}\}$ составляют ограниченную последовательность. Поэтому из нее можно выделить сходящуюся к μ^* подпоследовательность $\{\mu^{(k')}\}$.

В равенствах

$$x^{(k')}(t) = x^{(k')}(0) + \int_0^t A(\tau) x^{(k')}(\tau) d\tau + \int_0^t B(\tau) \mu^{(k')} d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

$$C_0 \mu^{(k')} + C_1 x^{(k')}(0) + C_2 x^{(k')}(a) = d$$

перейдем к пределу при $k' \to \infty$ получим

$$x^*(t) = x^*(0) + \int\limits_0^t A(\tau)x^*(\tau)d\tau + \int\limits_0^t B(\tau)\mu^* d\tau + \int\limits_0^t f(\tau)d\tau,$$

$$C_0\mu^* + C_1 x^*(0) + C_2 x^*(a) = d,$$

т.е. пара $(\mu^*, x^*(t))$ будет решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (2).

Так как сотношение (8) выполняется для $(\mu_T, x_T(t))$ при всех $T > T_0$, то при $l > T$ последовательность $(\mu^{(l)}, x^{(l)}(t))$ удовлетворяет неравенству

$\max(||\mu^{(l)}||, \max\limits_{t\in[-T,T]} ||x^{(l)}(t)||) \le K_1 \max(||d||, ||f||_1)$. Тогда, переходя к пределу при $l \to \infty$, имеем $\max(||\mu^*||, \max\limits_{t\in[-T,T]} ||x^*(t)||) \le K_1 \max(||d||, ||f||_1)$ для любого $T > T_0$. Отсюда в силу произвольности T получим $\sup\limits_{t\in R} ||x^*(t)|| \le K_1 \max(||d||, ||f||_1)$, т.е. вектор-функция $x^*(t)$ удовлетворяет условию (3) и имеет место оценка (7). Теорема 1 доказана.

Далее для доказательства основной теоремы нам понадобится аналог теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов в случае, когда операторы имеют ограниченный правый обратный.

Пусть X, Y — — банаховы пространства. $\mathcal{L}(X,Y)-$пространство линейных ограниченных операторов с индуцированной нормой. При $X = Y$ обозначим через $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Л е м м а 1. *Пусть $U, V \in \mathcal{L}(X,Y)$ и для оператора U существует ограниченный правый обратный, удовлетворяющий неравенству*

$$||U_r^{-1}(U - V)||_{\mathcal{L}(X)} < 1. \tag{9}$$

Тогда существует ограниченный правый обратный оператор V_r^{-1} и справедлива оценка

$$||V_r^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)} \le \frac{||U_r^{-1}||_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - ||U_r^{-1}(V - U)||_{\mathcal{L}(X)}}. \tag{10}$$

Доказательство. Оператор V представим в виде $V = UI_x - I_y(U - V) = UI_x - UU_r^{-1}(U - V) = U[I_x - U_r^{-1}(U - V)]$, где I_x, I_y- тождественные операторы в пространствах X, Y, соответственно. По теореме из [9, с.140] и из неравенства (9) получим, что $I_x - U_r^{-1}(U - V)$ имеет ограниченный обратный оператор и выполняется оценка

$$||[I_x - U_r^{-1}(U - V)]^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{1 - ||U_r^{-1}(V - U)||_{\mathcal{L}(X)}}. \tag{11}$$

Пусть теперь $W = [I_x - U_r^{-1}(U - V)]_r^{-1} U_r^{-1}$. Покажем , что оператор W является правым обратным для V. В самом деле $VW = U[I_x - U_r^{-1}(U - V)][I_x - U_r^{-1}(U - V)]^{-1} U_r^{-1} = UI_x U_r^{-1} = I_y$, т.е $V_r^{-1} = [I_x - U_r^{-1}(U - V)]^{-1} U_r^{-1}$. Учитывая соотношение (11), получим оценку (10). Лемма доказана.

В следующем утверждении граничные условия аппроксимирующей задачи (4)-(6)определяются через предельные значения матриц $A(t), B(t)$ уравнения (1) и неособые матрицы $S_\mp$, приводящие $A_\mp, B_\mp$ к обобщенно-жордановой форме.

Т е о р е м а 2. *В предположении 1 задача (1)-(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: а) $n_1^- = n_1^+ = n_1$, $n_2^- = n_2^+ = n_2$, б) при некотором $T_0 > 0$ для любого $T > T_0$ четырехточечная краевая задача с параметром (4)-(6), где $D_0 = P_1S_-B_- + P_2S_+B_+, D_1 = P_1S_-A_-$, $D_2 = P_2S_+A_+$, корректно разрешима с независящей от T константой K_1.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено предположение 1 и задача 1 корректно разрешима. Тогда, как показано в теореме 3 из [6, с. 101], существует h_0 такое , что двусторонне-бесконечная блочно-ленточная матрица $Q_{1,h}\ :\ \ \tilde{m}_n \to \tilde{m}_n$(см. формулу (15) из [6,с.97]) обратима при всех $h \in (0, h_0]$ и $||Q_{1,h}^{-1}|| \le \gamma/h$, где $\gamma - const$, не зависящая от h.

Возьмем $T > a,\ h > 0\ :\ \ Nh = a$ и в матрице $Q_{1,h}$ в блочных строках с номерами s : $|s| \ge N$, заменяя $A(t), B(t)$ соответственно на A_-, B_- для $s = -N, -N-1, ...$ и на A_+, B_+ для $s = N, N+1, ...$, получаем матрицу $Q_{h,T}$. Из предположения 1 следует, что $||Q_{1,h} - Q_{h,T}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \le$ $\le (\delta_1(T-h) + \delta_2(T-h))h$. Выбирая $T_0 > a$ удовлетворяющим неравенству $\gamma(\delta_1(T_0-h)+\delta_2(T_0-$ $-h)) \le 1/2$ с помощью теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [8, с.142] устанавливаем обратимость $Q_{h,T}:\ \tilde{m}_n \to \tilde{m}_n$ для всех $T \ge T_0$ и оценку

$$||Q_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \le \frac{\gamma_T}{h} \le \frac{2\gamma}{h}, \qquad \gamma_T \to \gamma, \qquad T \to \infty.$$

Составим теперь двусторонне - бесконечную блочно - диагональную матрицу $D = diag(d_{ss})$, в которой $d_{\mu\mu} = I_m$ - единичная матрица размерности $(m \times m)$, $d_{ss} = S_-$ при $s = 0, -1, -2, ...$ и $d_{ss} = S_+$ при $s = 1, 2, ...$ Тогда матрица $\widetilde{Q}_{h,T} = DQ_{h,T}D^{-1}$ обратима и

$$||\widetilde{Q}_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \le ||D^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \cdot ||Q_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \cdot ||D||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \le \frac{\zeta_1\gamma_T\zeta_2}{h}, \tag{12}$$

где $\zeta_1 = ||D^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} = \max\big(||S_-^{-1}||, ||S_+^{-1}||\big), \qquad \zeta_2 = ||D||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} = \max\big(||S_+||, ||S_-||\big)$.

В матрице $\widetilde{Q}_{h,T}$ блочные строки с номерами $s,\ s \le -N$, имеют вид

$$\left(\ldots \quad O \quad I + \begin{pmatrix} A_{11}^- & O \\ O & A_{22}^- \end{pmatrix} h \quad -I \quad O \quad \ldots \quad O \quad \widetilde{B}_- h \quad O \ldots \right),$$

для $s \ge N$ $\left(\ldots \quad O \quad \widetilde{B}_+ h \quad O \ldots O \quad I + \begin{pmatrix} A_{11}^+ & O \\ O & A_{22}^+ \end{pmatrix} h \quad -I \quad O \quad \ldots O \ldots \right)$,

с матрицами $\widetilde{B}_- = S_- B_-, \quad \widetilde{B}_+ = S_+ B_+$.

В результате перестановок в матрице $\widetilde{Q}_{h,T}$ получаем

$$M_{h,T} = \begin{bmatrix} M_{11}(h) & O & M_{13}(h) & O & O \\ O & M_{22}(h) & M_{23}(h) & O & O \\ M_{31}(h) & O & M_{33}(h) & O & M_{35}(h) \\ O & O & M_{43}(h) & M_{44}(h) & O \\ O & O & M_{53}(h) & O & M_{55}(h) \end{bmatrix}.$$

Односторонне - бесконечные матрицы $M_{kk}(h),\ k = 1, 2, 4, 5$, имеют такой же вид, что в работе [5].

Матрица $M_{33}(h)$ имеет размерность $[(2N-1)n + n_1^- + n_2^+ + m] \times [2Nn + m]$ и

$$M_{33}(h) =$$

$$= \begin{bmatrix} -P_1^- & O & ... & O & P_1^- \widetilde{B}_- h & O & ... & O & O \\ I + \widetilde{D}_{1,1-N} & -I & ... & O & \widetilde{H}_{1,1-N} & O & ... & O & O \\ . & . & ... & . & . & . & ... & . & . \\ O & O & ... & I + \widetilde{D}_{1,0} & \widetilde{H}_{1,0} & -\widetilde{I} & ... & O & O \\ O & O & ... & O & C_0 + C_2 H_{1,N} & \widetilde{C}_1 h & ... & O & O \\ O & O & ... & O & \widetilde{H}_{1,1} & I + \widetilde{D}_{1,1} & ... & O & O \\ . & . & . & ... & . & . & . & & \\ O & O & ... & O & \widetilde{H}_{1,N-1} & O & ... & I + \widetilde{D}_{1,N-1} & -I \\ O & O & ... & O & P_2^+ \widetilde{B}_+ h & O & ... & O & P_2^+(I + \widetilde{A}_+ h) \end{bmatrix},$$

где $\widetilde{D}ij = \begin{cases} S_- \int\limits_{(j-1)h}^{jh} A(t)dtS_-^{-1}, & j=-N+1,-N+2,...,1,0, \\ S_+ \int\limits_{(j-1)h}^{jh} A(t)dtS_+^{-1}, & j=1,2,...,N-1, \end{cases}$

$$\widetilde{H}_{ij} = \begin{cases} S_- \int\limits_{(j-1)h}^{jh} B(t)dtI_m, & j=-N+1,-N+2,...,1,0, \\ S_+ \int\limits_{(j-1)h}^{jh} B(t)dtI_m, & j=1,2,...,N-1, \end{cases}$$

$\widetilde{B}_- = S_-B_-I_m$, $\quad \widetilde{B}_+ = S_+B_+I_m$, $\quad \widetilde{C}_1 = I_mC_1S_+^{-1}$, $\quad \widetilde{I} = S_-S_+^{-1}$.

Для внедиагональных ненулевых блоков матрицы $M_{h,T}$ справедливы соотношения

$||M_{13}(h)||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_{n_1^-})} = ||P_1^-\widetilde{B}_-h|| \le \zeta_1\beta h$, $\quad ||M_{23}(h)||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_{n_2^-})} \le ||P_2^-|| + ||P_2^-\widetilde{B}_-h|| \le 1+\zeta_1\beta h$, $||M_{31}(h)|| = ||I_{n_1^-} + A_{11}^-h|| \le 1+\zeta_1\alpha\zeta_2 h$, $\quad ||M_{35}(h)|| = ||P_2^+|| = 1$, $\quad ||M_{43}(h)||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_{n_1^+})} \le$ $\le ||P_1^+\widetilde{B}_+h|| + ||I_{n_1^+} + A_{11}^+h|| \le 1+\zeta_1\alpha\zeta_2 h+\zeta_1\beta h$, $\quad ||M_{53}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_{n_2^+})} = ||P_2^+\widetilde{B}_+h|| \le \zeta_1\beta h$.

Матрица $M_{h,T}$ получается из $\widetilde{Q}_{h,T}$ перестановками строк, поэтому из обратимости $\widetilde{Q}_{h,T}$ и (12) следует обратимость $M_{h,T}$ и оценка

$$||M_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} = ||\widetilde{Q}_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \le \frac{\zeta_1\gamma_T\zeta_2}{h} = \frac{\widetilde{\gamma}_T}{h}. \tag{13}$$

Как показано в [5], в силу предположения 1 существует $h_1 > 0$ такое, что для всех $h \in (0,h_1]$ матрицы $M_{kk}(h)$ обратимы и

$||[M_{kk}(h)]^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_{n_k^\mp})} \le ||\widetilde{D}_k^{-1}||||[\widetilde{M}_{kk}(h)]^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_{n_k^\mp})}||\widetilde{D}_k|| \le \Big[\max(||S_{l,\mp}||,||S_{l,\mp}^{-1}||)\Big]^2\dfrac{2}{\xi h} = \dfrac{\beta_1}{h}$, где $k=1,2,4,5$, $\quad S_{l,\mp}-$ неособые комплекснозначные $(n_l^\mp \times n_l^\mp)-$ матрицы, приводящие $A_{ll}^\mp$, $l=1,2$ к обобщенно-жордановой форме, $\widetilde{D}_1 = diag(S_{1,-})$,$\widetilde{D}_2 = diag(S_{2,-})$,$\widetilde{D}_3 = diag(S_{1,+})$, $\widetilde{D}_4 = diag(S_{2,+})$.

Далее представим вектор $\lambda \in \widetilde{m}_n$ в виде $\lambda = (\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\lambda^{(3)},\lambda^{(4)},\lambda^{(5)})$, где размерности $\lambda^{(k)}$ определяются размерами матриц $M_{kk}(h),\ k=1,2,3,4,5$.

Рассмотрим систему уравнений

$$M_{h,T}\lambda = 0, \quad \lambda \in \widetilde{m}_n, \tag{14}$$

и перепишем ее в виде

$$M_{11}(h)\lambda^{(1)} + M_{13}(h)\lambda^{(3)} = 0, \tag{14a}$$

$$M_{22}(h)\lambda^{(2)} + M_{23}(h)\lambda^{(3)} = 0, \tag{14b}$$

$$M_{31}(h)\lambda^{(1)} + M_{33}(h)\lambda^{(3)} + M_{35}(h)\lambda^{(5)} = 0, \tag{14c}$$

$$M_{43}(h)\lambda^{(3)} + M_{44}(h)\lambda^{(4)} = 0, \tag{14d}$$

$$M_{53}(h)\lambda^{(3)} + M_{55}(h)\lambda^{(5)} = 0. \tag{14e}$$

Из представления матриц $M_{11}(h)$, $\quad M_{13}(h)$ следует , что каждая строка блочного уравнения (14a) имеет вид: $(I_{n_1^-} + A_{11}^-h)\lambda_l^- - \lambda_{l+1}^- = -P_1^-\widetilde{B}_-h\mu$, $\quad l=-N-1,-N-2,...,$ где $\lambda_l^- = P_1^-\lambda_l$. Отсюда ввиду ограниченной обратимости односторонне-бесконечной матрицы $M_{11}(h)$ для любого $\mu \in R^m$ существует единственное решение этого уравнения

$$\lambda^{(1)} = (..., -(A_{11})^{-1}P_1^-\widetilde{B}_-\mu, ..., -(A_{11})^{-1}P_1^-\widetilde{B}_-\mu) \in m_{n_1^-} \tag{15a}$$

Аналогично из представления матриц $M_{53}(h), M_{55}(h)$ и ограниченной обратимости $M_{55}(h)$ находим единственное решение уравнения (14e) при любом $\mu \in R^m$

$$\lambda^{(5)} = (-(A_{22}^{+})^{-1}P_2^{+}\widetilde{B}_{+}\mu, ..., -(A_{22}^{+})^{-1}P_2^{+}\widetilde{B}_{+}\mu, ...) \in m_{n_2^{+}}. \qquad (15b)$$

Подставим найденные $\lambda^{(1)}, \lambda^{(5)}$ в третье уравнение системы (14), получим соотношение $M_{33}^{'}(h)\lambda^{(3)} = 0$, где $M_{33}^{'}(h)-$матрица размерности $[(2N-1)n + n_1^{-} + n_2^{+} + m] \times [2Nn + m]$ и имеет вид:

$$\begin{bmatrix} P_1^{-}\widetilde{A}_{-} & O & ... & O & P_1^{-}\widetilde{B}_{-} & O & ... & O & O \\ I+\widetilde{D}_{1,1-N} & -I & ... & O & \widetilde{H}_{1,1-N} & O & ... & O & O \\ . & . & ... & . & . & . & ... & . & . \\ O & O & ... & I+\widetilde{D}_{1,0} & \widetilde{H}_{1,0} & -\widetilde{I} & ... & O & O \\ O & O & ... & O & C_0 + C_2H_{1,N} & \widetilde{C}_1 h & ... & O & O \\ O & O & ... & O & \widetilde{H}_{1,1} & I+\widetilde{D}_{1,1} & ... & O & O \\ . & . & . & ... & . & . & . & & \\ O & O & ... & O & \widetilde{H}_{1,N-1} & O & ... & I+\widetilde{D}_{1,N-1} & -I \\ O & O & ... & O & P_2^{+}(I+\widetilde{A}_{+}h)\widetilde{B}_{+} & O & ... & O & P_2^{+}\widetilde{A}_{+}(I+\widetilde{A}_{+}h) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $M_{h,T}^{'}$ матрицу

$$\begin{bmatrix} M_{11}(h) & O & M_{13}(h) & O & O \\ O & M_{22}(h) & M_{23}(h) & O & O \\ O & O & M_{33}^{'}(h) & O & O \\ O & O & M_{43}(h) & M_{44}(h) & O \\ O & O & M_{53}(h) & O & M_{55}(h) \end{bmatrix}.$$

Выше показано , что если $M_{h,T}\lambda = 0$, то $M_{h,T}^{'}\lambda = 0$. Обратно, пусть $M_{h,T}^{'}\lambda = 0$, тогда используя (14a) и (14e), выразим $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(5)}$ через $\lambda^{(3)}$, подставим их в (14c) и получим

$M_{31}(h)\lambda^{(1)} + M_{33}(h)\lambda^{(3)} + M_{35}(h)\lambda^{(5)} = M_{33}^{'}\lambda = 0$, т.е. $M_{hT}\lambda = 0$.

Установим теперь обратимость матрицы $M_{33}^{'}(h)$. Для этого покажем обратимость матрицы $M_2^{'}(h) : m_{n_2^{-}} \times R^{2Nn+m} \times m_{n_1^{+}} \rightarrow m_{n_2^{-}} \times R^{2Nn+m} \times m_{n_1^{+}}$,

$$M_2^{'}(h) = \begin{bmatrix} M_{22}(h) & M_{23}(h) & O \\ O & M_{33}^{'}(h) & O \\ O & M_{43}(h) & M_{44}(h) \end{bmatrix}.$$

Предположим обратное. Пусть $M_2^{'}(h)\widetilde{\lambda}_{(2)} = 0$, где $\widetilde{\lambda}_{(2)} = (\widetilde{\lambda}^{(2)}, \widetilde{\lambda}^{(3)}, \widetilde{\lambda}^{(4)})-$ненулевой элемент пространства $m_{n_2^{-}} \times R^{2Nn+m} \times m_{n_1^{+}}$. Тогда как показано выше, существуют $\widetilde{\lambda}^{(1)}, \widetilde{\lambda}^{(5)}$ такие , что $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}^{(1)}, \widetilde{\lambda}_{(2)}, \widetilde{\lambda}^{(5)}) \in \widetilde{m}_n$, $||\widetilde{\lambda}||_2 \neq 0$ и удовлетворяет уравнению $M_{h,T}\lambda = 0$, что противоречит обратимости $M_{h,T}$. Поэтому $Ker M_2^{'}(h) = \{0\}$ и $M_2^{'}(h)$ имеет обратную.

Возьмем теперь $b = (0, b_{(2)}, 0) \in \widetilde{m}_n$ и рассмотрим уравнение

$$M_2^{'}(h)\lambda_{(2)} = b_{(2)}. \qquad (16)$$

Ввиду обратимости $M_{11}(h), M_{55}(h)$, ограниченности $M_{13}(h), M_{53}(h)$ и оценки (13) единственным решением уравнения $M_{h,T}\lambda = b$ является $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda^{(5)}) \in \widetilde{m}_n$, где $\lambda_{(2)}-$ решение уравнения (16), $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(5)}$ определяются равенствами (15a),(15b) и $||(0, \lambda_{(2)}, 0)||_2 \leq ||\lambda||_2 \leq$

$(\widetilde{\gamma}_T/h)||b||_2 = (\widetilde{\gamma}_T/h)||(0,b_{(2)},0)||_2$. Отсюда следует оценка $||[M_2'(h)]^{-1}||_{\mathcal{L}(m_{n_2^-}\times R^{2N+m}\times m_{n_1^+})} \leq \widetilde{\gamma}_T/h$.

Обратима также матрица $M_{33}'(h)$, так как если $M_{33}'(h)\widetilde{\lambda}^{(3)} = 0$ и $||\widetilde{\lambda}^{(3)}|| \neq 0$, то уравнение $M_2'(h)\widetilde{\lambda}_{(2)} = 0$ в силу ограниченной обратимости $M_{22}(h), M_{44}(h)$ и ограниченности $M_{23}(h)$, $M_{43}(h)$ имеет ненулевое решение $\widetilde{\lambda}_{(2)} = (\widetilde{\lambda}^{(2)},\widetilde{\lambda}^{(3)},\widetilde{\lambda}^{(4)})$, где $\lambda^{(2)} = (..., -(A_{22}^-)^{-1}P_2^-\widetilde{B}_-\mu, ...$

$..., -(A_{22}^-)^{-1}P_2^-\widetilde{B}_-\mu)$, $\lambda^{(4)} = (-(A_{11}^+)^{-1}P_1^+\widetilde{B}_+\mu, ..., -(A_{11}^+)^{-1}P_1^+\widetilde{B}_+\mu, ...)$, что противоречит обратимости $M_2'(h)$.

Покажем теперь оценку нормы $||[M_{33}'(h)]^{-1}||$. Пусть $b_{(2)} = (0,b_{(3)},0) \in m_{n_2^-}\times R^{2N+m}\times m_{n_1^+}$, а $\widetilde{\lambda}_{(2)} = (\widetilde{\lambda}^{(2)},\widetilde{\lambda}^{(3)},\widetilde{\lambda}^{(4)})$ - соответствующее ему решение уравнения (16). Тогда $\widetilde{\lambda}^{(3)}-$ решение уравнения $M_{33}'(h)\lambda^{(3)} = b^{(3)}$, удовлетворяющее неравенству
$||\widetilde{\lambda}^{(3)}|| \leq ||(0,\widetilde{\lambda}_{(2)},0)||_2 \leq (\widetilde{\gamma}_T/h)||(0,b_{(2)},0)||_2 = (\widetilde{\gamma}_T/h)||b^{(3)}||$, откуда следует оценка

$$||[M_{33}'(h)]^{-1}|| \leq (\widetilde{\gamma}_T/h). \tag{17}$$

Из обратимости $[(2N-1)n+n_1^-+n_2^++m]\times[2Nn+m]$ - матрицы $M_{33}'(h)$ получим, что $n_1^-+n_2^+ = n$, а из предположения 1 $n_1^- + n_2^- = n_1^+ + n_2^+ = n$ вытекают соотношения $n_1^- = n_1^+ = n_1, n_2^- = n_2^+ = n_2$. Далее, осуществляя перестановку в матрице $M_{33}'(h)$, имеем $N_{33}'(h) =$

$$= \begin{bmatrix} P_1\widetilde{A}_- & O & ... & O & P_1\widetilde{B}_- + P_2(I+\widetilde{A}_+h)\widetilde{B}_+ & O & ... & O & P_2\widetilde{A}_+(I+\widetilde{A}_+h) \\ I+\widetilde{D}_{1,1-N} & -I & ... & O & \widetilde{H}_{1,1-N} & O & ... & O & O \\ . & . & ... & . & . & . & ... & . & . \\ O & O & ... & I+\widetilde{D}_{1,0} & \widetilde{H}_{1,0} & -\widetilde{I} & ... & O & O \\ O & O & ... & O & C_0+C_2H_{1,N} & \widetilde{C}_1h & ... & O & O \\ O & O & ... & O & \widetilde{H}_{1,1} & I+\widetilde{D}_{1,1} & ... & O & O \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ O & O & ... & O & \widetilde{H}_{1,N-1} & O & ... & I+\widetilde{D}_{1,N-1} & -I \end{bmatrix},$$

$N_{33}'(h)$ обратима и в силу (17) имеет место оценка $||[N_{33}'(h)]^{-1}|| = ||[M_{33}'(h)]^{-1}|| \leq \dfrac{\widetilde{\gamma}_T}{h} \leq \dfrac{2\widetilde{\gamma}}{h}$.

Через D_{2N+1} обозначим блочно - диагональную матрицу, состоящую из блоков d_{ss} с номерами $s = -N, -N+1, ..., 0, \mu, 1, 2, ..., N-2, N-1$. Умножив каждую блочную строку матрицы $N_{33}'(h)D_{2N+1}$, кроме первой, слева на S_-^{-1} при $s = -N+1, ..., -1, 0$, на I_m при $s = \mu$ и на S_+^{-1} при $s = 1, 2, ..., N-1$, обозначим полученную матрицу через $V_1(h)$. Тогда

$$||[V_1(h)]^{-1}|| \leq \zeta_1\zeta_2||[N_{33}'(h)]^{-1}|| \leq \frac{2\tilde{\gamma}\zeta_1\zeta_2}{h} = \frac{\gamma_1}{h}$$

и число γ_1 не зависит от T.
Учитывая, что $||P_2\widetilde{A}_+h\widetilde{B}_+|| \leq \max(1,\overline{\xi})\zeta_1\zeta_2\beta h$, $||P_2(\widetilde{A}_+)^2h|| \leq [\max(1,\overline{\xi})]^2h$ и при достаточно малых $h > 0$ слагаемыми, содержащими $\widetilde{A}_+h$ в первой блочной строке матрицы $V_1(h)$ можно пренебречь, по теореме 1 из [9] задача (4)-(6), где $D_0 = P_1S_-B_- + P_2S_+B_+$, $D_1 = P_1S_-A_-$, $D_2 = P_2S_+A_+$, при всех $T \geq T_0$ будет корректно разрешима с не зависящей от T константой K_1.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы и $\widetilde{Q}_1(h)$ - матрица $N_{33}'(h)$ с первой блочной строкой, умноженной на $h > 0$. Тогда по теореме 3 [10,с.47] из корректной разрешимости задачи (4)-(6) для $\forall\varepsilon > 0$ найдется $h_1 = h_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $h \in (0,h_1]$ матрица $\widetilde{Q}_1(h)$ обратима и $||[\widetilde{Q}_1(h)]^{-1}|| \leq \dfrac{(1+\varepsilon)\zeta_1\zeta_2K_1}{h} = \dfrac{(1+\varepsilon)\widetilde{K}_1}{h}$.

Из обратимости $\widetilde{Q}_1(h)$ и эквивалентности матриц $N_{33}^{'}(h)$ и $M_{33}^{'}(h)$ следует обратимость $M_{33}^{'}(h)$ и $||[M_{33}^{'}(h)]^{-1}|| \leq \dfrac{(1+\varepsilon)\widetilde{K}_1}{h}$.

Тогда обратима матрица $M_2^{'}(h)$, иначе придем к противоречию с обратимостью $M_{33}^{'}(h)$. Обратимость $M_{33}^{'}(h)$ обеспечивает обратимость $M_{h,T}^{'}$ и $M_{h,T}$.

Далее из теоремы 1 следует существование решения $(\mu^*, x^*(t))$ задачи (1)-(3), для которого выполняется неравенство (7).

Тогда, как показано в лемме из [6,с.98], существует решение $(\lambda^*, u^*[t])$ эквивалентной многоточечной краевой задачи с параметром и λ^* удовлетворяет линейному уравнению

$$h^{-1}Q_{*,h}\lambda = -F_*(A, C_2, f, d, h). \tag{18}$$

Рассмотрим теперь уравнение $h^{-1}Q_{*,h}\lambda = c$. Аналогично показанному в доказательстве теоремы 2 из [6,с.100] для любого $c = (..., c_{-1}, c_0, c_\mu, c_1, c_2, ...) \in \widetilde{m}_n$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $h \in (0, h_0] : Nh = a$ можно построить функцию $f_c(t)$, вектор $d_c \in R^m$, для которых выполняется равенство $F_*(A, C_2, f_c, d_c, h) = -c$, и вектор $\lambda^c \in \widetilde{m}_n$, компоненты которого определяются через решение $(\mu_c, x_c(t))$ задачи (1)-(3) при $f(t) = f_c(t),\ d = d_c$: $\lambda_r^c = x_c[(r-1)h],\ r \in \mathbb{Z},\ \mu_c = c_\mu$, удовлетворяет уравнению (18). Это означает , что сущестует правый обратный оператор $Q_{*,h,r}^{-1}$ и оценка $||Q_{*,h,r}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq (1+\varepsilon/2)K_1$ устанавливается также как в [6].

Так как $||\widetilde{Q}_{*,h} - \widetilde{Q}_{1,h}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq max(1, h||C_2||)\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h + \beta h[e^{\alpha h} - 1]\right\}$, то выбирая $h_1 = h_1(\varepsilon) \in (0, h_0] : Nh_1 = a$, удовлетворяющим неравенству $\dfrac{(1+\frac{\varepsilon}{2})K_1}{h} max(1, h||C_2||)(e^{\alpha h} - 1 - \alpha h + \beta h[e^{\alpha h} - 1]) < \dfrac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, по доказанной выше лемме 1 получим, что матрица $\widetilde{Q}_{1,h}$ тоже имеет правую обратную при всех $h \in (0, h_1] : Nh = a$ и справедлива оценка

$$||[\widetilde{Q}_{1,h,r}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq (1+\varepsilon)\frac{K_1}{h}. \tag{19}$$

Применим лемму 1 еще раз к матрицам $\widetilde{Q}_{1,h}, \widetilde{Q}_{h,T}$.
Учитывая неравенство $||\widetilde{Q}_{1,h} - \widetilde{Q}_{h,T}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq (\delta_1(T-h) + \delta_2(T-h))h$ и выбирая $h \in (0, h_1] : Nh = a$ так, чтобы $(1+\varepsilon)\dfrac{\widetilde{K}_1}{h}(\delta_1(T-h) + \delta_2(T-h))h < \dfrac{1}{2}$, получим существование правой обратной матрицы $Q_{h,T,r}^{-1}$ и оценку $||\widetilde{Q}_{h,T,r}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq 2(1+\varepsilon)\frac{K_1}{h}$.

Выше показано существование матрицы, обратной к $M_{h,T}$, которая получается из матрицы $\widetilde{Q}_{h,T}$ перестановками строк. Из существования обратной и правой обратной матриц следует их совпадение и справедливость соотношения $||M_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} = ||\widetilde{Q}_{h,T}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq 2(1+\varepsilon)\dfrac{K_1}{h}$. Далее используя снова оценку (19) и выбирая $h \in (0, h_1] : Nh = a$, удовлетворяющим условию $2(1+\varepsilon)\dfrac{K_1}{h}(\delta_1(T-h) + \delta_2(T-h))h < \dfrac{1}{2}$, получим существование матрицы $\widetilde{Q}_{1,h}^{-1}$ и ее оценку $||\widetilde{Q}_{1,h}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq 4(1+\varepsilon)\dfrac{K_1}{h}$. Отсюда $||Q_{1,h}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq ||D^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)}||\widetilde{Q}_{1,h}^{-1}||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)}||D||_{\mathcal{L}(\widetilde{m}_n)} \leq 2\zeta\widetilde{\gamma}/h$, где $\zeta = [\max(\zeta_1, \zeta_2)]^2$, и согласно теореме 3 из [6,с.101] при $\nu = 1$ задача 1 корректно разрешима. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.М., 1980.

2. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.Киев, 1986.

3. **Плисс В.А.** В кн. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев. 1977.С.168-173.

4. **Абрамов А.А., Конюхова Н.Б.** // Computational mathematics Banach center publications. Warsaw. 1984.v.13. C.319 - 351.

5. **Джумабаев Д.С.** // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1990. №3. С.388 - 404.

6. **Минглибаева Б.Б.** // Известия НАН РК. №3. 2004. С.95-102

7. **Тышкевич Р.И., Феденко А.С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск. 1968.

8. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М., 1980.

9. **Минглибаева Б.Б.** // Матем.журнал. 2003, т.3, №2(8). С.55-62

10. **Джумабаев Д.С., Минглибаева Б.Б.** // Матем.журнал. 2004. Т.4, №1(11). С.41-51

Поступила в редакцию 15.01.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.85 — 93*

УДК 517.946

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА А.В.БИЦАДЗЕ

К.Н.Оспанов

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева
473028 Астана ул.Мунайтпасова, 6, ospanov_k@mail.ru

Установлены нелокальные оценки решения и его производных полупериодической задачи на полосе для системы типа А.В.Бицадзе с неограниченными коэффициентами.

Пусть $G = \{(x,y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$. Рассмотрим систему уравнений

$$L_0 w \equiv B_{xy} w + P(y)\frac{\partial w}{\partial x} + Q(y) w = F(x,y). \tag{1}$$

где

$$B_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad P(y) = \begin{pmatrix} \varphi(y) & 0 \\ 0 & \psi(y) \end{pmatrix},$$

$$Q(y) = \begin{pmatrix} a(y) & 0 \\ 0 & d(y) \end{pmatrix}, \quad w = (u,v), \quad F = (f,g).$$

Предположим, что $F \in L_2(G, R^2)$, а $\varphi(y), a(y), \psi(y), d(y)-$ определенные на R непрерывные функции (здесь и в дальнейшем $T(S,H)$ означает класс функций, определенных в области S со значениями в пространстве H).

Через $C^\infty_{\pi,0}(G, R^2)$ обозначим класс действительно–значных вектор - функций $w = (u,v)$, бесконечно дифференцируемых в области G, непрерывно дифференцируемых в $\overline{G} = \{(x,y) : -\pi \le x \le \pi, -\infty < y < \infty\}$, финитных по y и удовлетворяющих условиям:

$$w(-\pi, y) = w(\pi, y), \;\; w_x(-\pi, y) = w_x(\pi, y). \tag{2}$$

Оператор L_0 с областью определения $D(L_0) = C^\infty_{\pi,0}(G, R^2)$ допускает замыкание в норме $\|\cdot\|_{2,G}$ пространства $L_2(G, R^2)$, которые обозначим через L. Функция $w(x,y) \in L_2(G, R^2)$ называется решением задачи (1), (2), если $w \in D(L)$ и $Lw = F$.

Следующее утверждение доказано в работе [1].

Т е о р е м а 1. *Если $\varphi(y), a(y), \psi(y), d(y)-$ непрерывные функции такие, что*

$$\inf_{y \in R} \{-\varphi(y), a(y), \psi(y), d(y)\} \ge \delta > 0, \tag{3}$$

Keywords: *coersitive estimate, singular system*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J20

то задача (1), (2) имеет, притом единственное решение $w = (u, v)$, принадлежащее пространству $W_2^1(G, R^2)$ С.Л.Соболева.

В настоящей работе устанавливаются оценки сверху норм каждого из присутствующих в (1) слагаемых. Такая оценка называется оценкой разделимости или коэрцитивной оценкой и актуальна в случае уравнения, заданного в некомпактной области. Она является аналогом известного "второго основного неравенства"для обобщенного решения краевой задачи [2]. Ранее, оценки разделимости были установлены для довольно общих классов эллиптических и вырождающихся уравнений [3-6] и для сильно эллиптических систем первого и второго порядков [7,8]. Система (1) является лишь эллиптической по Петровскому, в этом и состоит новизна решаемой в настоящей работе задачи.

Основные результаты работы связаны с изучением свойств системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида ($n \in Z$):

$$\begin{cases} -u_n^{''} - 2inv_n^{'} + (-n^2 + in\varphi(y) + a(y))u_n = f_n(y), \\ -v_n^{''} + 2inu_n^{'} + (-n^2 + in\psi(y) + d(y))v_n = g_n(y). \end{cases} \tag{4}$$

Через l_n обозначим замыкание в норме пространства $L_2 \equiv L_2(R, \mathbb{C}^2)$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел) оператора этой системы, определенного на множестве $C_0^\infty(R, \mathbb{C}^2)$. При выполнении условия (3) оператор l_n ограниченно обратим [1].

Пусть $\Delta_k = [k-1, k+1]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а $\ldots, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ – неотрицательные функции из $C_0^\infty(R)$ такие, что

$$0 \leq \theta_j(y) \leq 1, \ \ supp\, \theta_j \in \Delta_j \ (j \in Z), \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j^2(y) = 1.$$

Через $\varphi_k(y), \psi_k(y)$, $a_k(y)$, $d_k(y)$ $(k \in Z)$ обозначим периодические на все R с периодом 2 продолжения сужений на Δ_k функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $a(y)$, $d(y)$, соответственно.

Замыкание в норме L_2 оператора, соответствующего системе (4), где функции φ, ψ, a, d заменены, соответственно, на $\varphi_k, \psi_k, a_k, d_k$, обозначим через $l_{n,k}$.

Л е е м м а 1. *Пусть постоянные $\lambda, \tilde{\lambda}$ такие, что $\tilde{\lambda} \geq \lambda > 0$, выполнены условия (3) и*

$$\inf_{y,\eta \in R,\ |y-\eta| \leq 2} \frac{\varphi^2(y)}{a(\eta)} \geq \delta_0 > 0, \inf_{y,\eta \in R,\ |y-\eta| \leq 2} \frac{\psi^2(y)}{d(\eta)} \geq \delta_0 > 0. \tag{5}$$

Тогда имеют место неравенства

$$\|(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leq \frac{1}{\lambda |n|}, \tag{6}$$

$$\left\| \frac{d}{dy}(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1} \right\|_{L_2 \to L_2} \leq \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условия (3) оператор $l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E$ $\tilde{\lambda}, \lambda \geq 0$, ограниченно обратим, что показывается аналогично доказательству леммы 3 [1]. Пусть $u, v \in C_0^\infty(R)$, $U = (u, v)$.
Обозначим $\tilde{V} = (-u, v)$, $\alpha_k = \min(\inf a_k(y), \inf d_k(y))$, $\beta_k = \min(\inf[-\varphi_k(y)], \inf \psi_k(y))$. Легко видеть

$$Re((l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)U, U) \geq \|U^{'}\|_2^2 + (\alpha_k + \lambda)\|U\|_2^2 - n^2\|U\|_2^2, \tag{8}$$

$$\left|((l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)U,\tilde{V})\right| \geq |n|[\beta_k+\tilde{\lambda}]\|U\|_2^2. \tag{9}$$

Из (9) и (8), соответственно, вытекают оценки

$$|n|\frac{\beta_k+\tilde{\lambda}}{\sqrt{\alpha_k+\lambda}}\|U\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_k+\lambda}}\|(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)U\|_2, \tag{10}$$

$$\|U^{'}\|_2^2+[\alpha_k+\lambda]\|U\|_2^2-n^2\|U\|_2^2 \leq \frac{C_0}{\alpha_k+\lambda}\|(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)U\|_2^2+\frac{\alpha_k+\lambda}{4C_0}\|U\|_2^2.$$

Из последних двух неравенств имеем

$$\|U^{'}\|_2^2+\left(1-\frac{1}{4C_0}\right)[\alpha_k+\lambda]\|U\|_2^2+n^2\left[C_1\frac{(\beta_k+\tilde{\lambda})^2}{\alpha_k+\lambda}-1\right]\|U\|_2^2 \leq$$

$$\leq \frac{C_1+C_0}{\alpha_k+\lambda}\|(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)U\|_2^2. \tag{11}$$

Отсюда, выбрав постоянные C_0 и C_1 соответствующим образом, с учетом условия (5) при $\tilde{\lambda} \geq \lambda > 0$ получим оценку (7). Неравенство (6) вытекает из (10). Лемма 1 доказана.

Следующее утверждение доказывается непосредственным вычислением.

Л е м м а 2. *Пусть выполнены условия (3), (5) и $\tilde{\lambda},\lambda \geq 0$. Тогда для любой функции $F \in L_2$ имеет место соотношение*

$$(l_n+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}F = F+P_{1,n}(\tilde{\lambda}),\lambda)F+P_{2,n}(\tilde{\lambda}),\lambda)F+P_{3,n}(\tilde{\lambda}),\lambda)F, \tag{12}$$

где

$$P_{1,n}(\tilde{\lambda},\lambda)F=-\sum_k \theta_k^{''}(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}\theta_k F,$$

$$P_{2,n}(\tilde{\lambda},\lambda)F=\sum_k 2in\theta_k^{'}T(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}\theta_k F,\ \ T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{3,n}(\tilde{\lambda},\lambda)F=-2\sum_k \theta_k^{'}\frac{d}{dy}(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}\theta_k F.$$

Л е м м а 3. *Пусть выполнены условия (3), (5) и $\tilde{\lambda} \geq \lambda > 0$. Тогда найдется такое $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ справедливо представление*

$$(l_n+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}=P_n(\tilde{\lambda},\lambda)\left[E-\sum_{j=1}^{3}P_{j,n}(\tilde{\lambda},\lambda)\right]^{-1}, \tag{13}$$

где

$$P_n(\tilde{\lambda},\lambda)F=\sum_k \theta_k(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}\theta_k F,\ \ \sum_{j=1}^{3}\left\|P_{j,n}(\tilde{\lambda},\lambda)\right\|_{L_2\to L_2} \leq \frac{1}{2}.$$

Доказательство леммы проводится с учетом соотношения (12), оценок (6), (7), свойств матрицы T и функций θ_j $(j \in Z)$.

Л е м м а 4. *Пусть выполнены условия (3), (5) и $\lambda \geq \lambda_0$ (λ_0 из леммы 3). Тогда справедлива оценка*

$$\|(l_n+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leq 8\sup_{k\in Z}\|(l_{n,k}+in\tilde{\lambda}\tilde{E}+\lambda E)^{-1}\|_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)}. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств функций $\theta_j(y)$ $(j \in Z)$ в каждой точке $y \in R$ сумма $P_n(\tilde{\lambda}, \lambda)h(y)$ $(h \in L_2)$ состоит из не более, чем двух слагаемых, поэтому из представления (13) имеем

$$\|(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}h\|_{L_2} \le 2\int\limits_R \sum_k |\theta_k(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\theta_k h|^2 dy \le$$

$$\le 4\sum_k \int\limits_{\Delta_k} |\theta_k(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\theta_k h|^2 dy \le$$

$$\le 4\sum_k \|\theta_k(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|^2_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)} \|\theta_k h\|^2_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)} \le$$

$$\le 4\sup_k \|\theta_k(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|^2_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)} \sum_k \int\limits_{\Delta_k} |\theta_k(y)h(y)|^2 dy.$$

Сумма интегралов справа в силу свойств функциональной последовательности $\{\theta_j(y)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ не превосходит величину $2\|h\|_{L_2}$. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *Пусть выполнены условия (3), (5) и*

$$\sup_{y,\eta\in R,\ |y-\eta|\le 2} \left[\frac{\varphi(y)}{\varphi(\eta)}, \frac{\psi(y)}{\psi(\eta)}, \frac{a(y)}{a(\eta)}, \frac{d(y)}{d(\eta)}, \frac{a(y)}{d(\eta)}\right] \le C < \infty. \tag{15}$$

Тогда

$$\||n|(P(\cdot) + \tilde{\lambda}\tilde{E})(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2\to L_2} + \|(Q(\cdot) + \lambda E)(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2\to L_2} < \infty,$$

где $P(y)$ и $Q(y)$ — — матрицы из системы (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, считаем $\tilde{\lambda} \ge \lambda \ge \lambda_0$, где λ_0 – положительная постоянная из леммы 3. Из леммы 4 с учетом оценки (11) и условия (15) имеем

$$\|(Q(\cdot) + \lambda E)(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le$$

$$\le C_1 \left\|\max\left(\sup_{y\in\Delta_k}[a(y)+\lambda], \sup_{y\in\Delta_k}[d(y)+\lambda]\right)(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\right\|_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)} \le$$

$$\le C_2 \max\left(\sup_{y\in\Delta_k}[a_k(y)+\lambda], \sup_{y\in\Delta_k}[d_k(y)+\lambda]\right) \frac{1}{\min\left(\inf[a_k(y)+\lambda], \inf[d_k(y)+\lambda]\right)} < \infty.$$

Конечность нормы $\||n|(P(\cdot) + \tilde{\lambda}\tilde{E})(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2\to L_2}$ показывается аналогично с учетом неравенства (10). Лемма 5 доказана.

О п р е д е л е н и е 1. *Оператор L называется разделимым, если для всех $U \in D(L)$ справедлива оценка*

$$\Lambda \equiv \|B_{xy}U\|_2 + \|P(y)U_x\|_2 + \|Q(y)U\|_2 \le C(\|LU\|_2 + \|U\|_2).$$

Л е м м а 6. *Пусть относительно коэффициентов системы (4) выполнено условие (3) и при некоторых неотрицательных $\tilde{\lambda}$ и λ справедлива оценка*

$$\|B_{xy}U\|_2 + \|\left(P(y) + \tilde{\lambda}\tilde{E}\right)U_x\|_2 + \|\left(Q(y) + \lambda E\right)U\|_2 \le$$

$$\le C\left(\left\|(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E)U\right\|_2 + \|U\|_2\right), U \in D\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right). \tag{16}$$

Тогда оператор L разделим. **Д о к а з а т е л ь с т в о.** При выполнении условия (3) верна оценка $\|LU\|_2 \geq C_0(\lambda,\tilde{\lambda})(\|\tilde{\lambda}U_x\|_2 + \|\lambda U\|_2)$ ([1], лемма 2). Следовательно, из неравенства (16) имеем

$$\|B_{xy}U\|_2 + \|P(y)U_x\|_2 + \|Q(y)U\|_2 \leq C(\|LU + \tilde{\lambda}\tilde{E}U_x + \lambda U\|_2 + \|\tilde{\lambda}U_x\|_2 + \|\lambda U\|_2 + \|U\|_2) \leq$$

$$\leq C_1(\lambda,\tilde{\lambda})\,(\|LU\|_2 + \|LU\|_2 + \|U\|_2) \leq C_3\left(\lambda,\tilde{\lambda})(\|LU\|_2 + \|U\|_2\right),$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия (3), (5) и (15), то оператор L разделим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 6 достаточно показать справедливость оценки (16). В условиях теоремы оператор L ограниченно обратим. Кроме того, справедливо неравенство

$$\left\|\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)U\right\|_2 \geq C\|U\|_2, U \in D\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right) \ \ (\tilde{\lambda},\lambda \geq 0).$$

Тогда по известной теореме [9] оператор $L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E$ $(\tilde{\lambda},\lambda \geq 0)$ также ограниченно обратим в $L_2(D,R^2)$. Далее, по построению

$$\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1} F = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}F_n\exp(inx),$$

если $F = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} F_n\exp(inx)$, $F = (f,g)$, $F_n = (f_n,g_n)$. Отсюда с учетом ортонормированности системы $\{\exp(inx)\}_{n=-\infty}^{-\infty}$ имеем

$$\|V(y)D_x^{\alpha}\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\|_{L_2(D,R^2)\to L_2(D,R^2)} =$$

$$= \sup_n \||n|^{\alpha}V(y)(l_n + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2\to L_2}, \ \ D_x^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Здесь $\alpha = 0,1$, $V(y) - 2\times 2-$ матрица с непрерывными элементами. По лемме 4

$$\left\|V(y)D_x^{\alpha}\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \sup_n\sup_k \|V(y)|n|^{\alpha}\theta_k(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)}.$$

Поэтому согласно лемме 5 (здесь $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(D,R^2)\to L_2(D,R^2)}$)

$$\left\|(P(\cdot) + \tilde{\lambda}\tilde{E})\frac{\partial}{\partial x}\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\right\| + \left\|(Q(y) + \lambda E)\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \sup_n\sup_k \||n|(P(\cdot) + \tilde{\lambda}E)(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)} +$$

$$+ \sup_n\sup_k \|(Q(y) + \lambda E)(l_{n,k} + in\tilde{\lambda}\tilde{E} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)\to L_2(\Delta_k,\mathbb{C}^2)} < \infty.$$

Тогда из системы (1) получим

$$\left\|B_{xy}\left(L + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{L_2(D,R^2)\to L_2(D,R^2)} < \infty.$$

Из последних двух неравенств вытекает оценка (16). Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если выполнены условия (3), (5) и (15), то решение $U = (u, v)$ задачи (1), (2) удовлетворяет коэрцитивной оценке*

$$\|u_{xx}\|^2_{2,D} + \|u_{xy}\|^2_{2,D} + \|u_{yy}\|^2_{2,D} + \|v_{xx}\|^2_{2,D} + \|v_{xy}\|^2_{2,D} + \|v_{yy}\|^2_{2,D} +$$

$$+\|\varphi(y)u_x\|^2_{2,D} + \|u_y\|^2_{2,D} + \|\psi(y)v_x\|^2_{2,D} + \|v_y\|^2_{2,D} + \|a(y)u\|^2_{2,D} +$$

$$+\|d(y)v\|^2_{2,D} \le C\left(\|LU\|^2_{2,D} + \|U\|^2_{2,D}\right). \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Пусть $U \in C^\infty_{\pi,0}(D, R^2)$. Интегрируя по частям, имеем*

$$\|B_{xy}U\|^2_{2,D} = \int\limits_D \left[u^2_{xx} + 2u^2_{xy} + u^2_{yy} + v^2_{xx} + 2v^2_{xy} + v^2_{yy}\right] dxdy \tag{18}$$

(внеинтегральные члены исчезают согласно свойств функций из $C^\infty_{\pi,0}(D, R^2)$). Равенство (18) остается справедливым и для всех $U \in D(L)$. Далее, согласно оценке (8) работы [1]

$$\|u_y\|^2_{2,D} + \|v_y\|^2_{2,D} \le C_1\|LU\|^2_{2,D},\ U \in D(L). \tag{19}$$

Объединяя (18) и (19) с оценкой (16), получаем оценку (17). Следствие доказано.

Оценка (17) эквивалентна неравенству

$$\|U\|^2_{W^2_2(D,R^2)} + \|\varphi(y)u_x\|^2_{2,D} + \|\psi(y)v_x\|^2_{2,D} + \|a(y)u\|^2_{2,D} + \|d(y)v\|^2_{2,D} \le$$

$$\le C(\|LU\|^2_{2,D} + \|U\|^2_{2,D}).$$

Рассмотрим случай, когда часть коэффициентов изучаемой системы зависит еще и от переменной x. Будем интересоваться задачей нахождения решения системы

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy} + \varphi(y)u_x + [a(x,y) + \lambda]u = f(x,y), \\ 2u_{xy} + v_{xx} - v_{yy} + \psi(y)v_x + [d(x,y) + \lambda]v = g(x,y), (x,y) \in D, \end{cases} \tag{20}$$

удовлетворяющего условиям (2), где $w = (u, v)$. Предположим, что функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$, такие же, как и раньше, а $a(x,y)$, $d(x,y)$ непрерывны на полосе $\bar{D}$ и удовлетворяют условиям:
a)

$$\inf_{y \in R}\{a(x,y), d(x,y)\} \ge \delta > 0; \tag{21}$$

b) *хотя бы для одной точки $x_0 \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство*

$$\min\left(\inf_{y,\eta,|y-\eta|\le 2}\frac{\varphi^2(y)}{a(x_0,\eta)}, \inf_{y,\eta,|y-\eta|\le 2}\frac{\psi^2(y)}{d(x_0,\eta)}\right) \ge \delta_0 > 0; \tag{22}$$

c)

$$C^{-1} \le \frac{a(x,y)}{a(x,\eta)}, \frac{d(x,y)}{d(x,\eta)}, \frac{a(x,y)}{d(x,\eta)} \le C, \quad при\ \ |y-\eta| \le 2, x \in [-\pi, \pi]; \tag{23}$$

d)

$$\frac{|a(x,y) - a(z,y)|}{|a(z,y)|} \le C, \frac{|d(x,y) - d(z,y)|}{|d(z,y)|} \le C\ (x,y),(z,y) \in \bar{D}. \tag{24}$$

Полагая

$$Q_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) + \lambda & 0 \\ 0 & d(x,y) + \lambda \end{pmatrix}$$

и сохраняя остальные обозначения из (1), систему (20) перепишем в виде ($\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$)

$$\mathcal{L}_\lambda w = B_{xy}w + P(y)w_x + Q_\lambda(x,y)w = F(x,y).$$

Решение задачи (20), (2) понимается как и в случае задачи (1), (2).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функции* $\varphi(y), a(x,y), \psi(y), d(x,y)$ *непрерывны,* φ, ψ *удовлетворяют условиям (3) и (15), а* $a(x,y), d(x,y)-$ *условиям* (21) – (24), $\lambda \geq 0$. *Тогда задача (20), (2) имеет, притом единственное решение* $w = (u,v)$, *такое, что*

$$\|u_{xx}\|^2_{2,D} + \|u_{xy}\|^2_{2,D} + \|u_{yy}\|^2_{2,D} + \|v_{xx}\|^2_{2,D} + \|v_{xy}\|^2_{2,D} + \|v_{yy}\|^2_{2,D}+$$

$$+\|\varphi(y)u_x\|^2_{2,D} + \|u_y\|^2_{2,D} + \|\psi(y)v_x\|^2_{2,D} + \|v_y\|^2_{2,D} + \|[a(x,y)+\lambda]u\|^2_{2,D}+$$

$$+\|[d(x,y)+\lambda]v\|^2_{2,D} \leq C(\|(\mathcal{L}+\lambda E)w\|^2_{2,D} + \|w\|^2_{2,D}). \tag{25}$$

Доказательство. *Пусть* $\tilde{x}-$ *некоторая точка интервала* $(-1,1)$, *рассмотрим уравнение*

$$\mathcal{L}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}w = B_{xy}w + \left[P(y) + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x}\right]w + [Q(\tilde{x},y)+\lambda E]w = \tilde{F}(x,y). \tag{26}$$

Тогда для функций $a(\tilde{x},y)$, $d(\tilde{x},y)$ *выполнены условия (3), (5), (15), следовательно, в силу следствия теоремы 2 при* $\tilde{\lambda} \geq 0$ *и* $\lambda \geq 0$ *решение* $w = (u,v) = \mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F$ *задачи (26), (2) существует и единственно, причем справедлива оценка*

$$\|u_{xx}\|^2_{2,D} + \|u_{xy}\|^2_{2,D} + \|u_{yy}\|^2_{2,D} + \|v_{xx}\|^2_{2,D} + \|v_{xy}\|^2_{2,D} + \|v_{yy}\|^2_{2,D}+$$

$$+\|[\varphi(y)+\tilde{\lambda}]u_x\|^2_{2,D} + \|u_y\|^2_{2,D} + \|[\psi(y)+\tilde{\lambda}]v_x\|^2_{2,D} + \|v_y\|^2_{2,D} + \|[a(\tilde{x},y)+\lambda]u\|^2_{2,D}+$$

$$+\|[d(\tilde{x},y)+\lambda]v\|^2_{2,D} \leq C(\|\mathcal{L}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}w\|^2_{2,D} + \|w\|^2_{2,D}). \tag{27}$$

Если $F(x,y)-$ *финитная по* y *гладкая функция, то* $\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F$ *принадлежит области определения оператора* $\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E$ *и выполняется равенство*

$$\left(\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F = \left(\mathcal{L}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)} + [Q(x,y) - Q(\tilde{x},y)]\right)\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F =$$

$$= F + [Q(x,y) - Q(\tilde{x},y)]\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F. \tag{28}$$

Положим

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая оценка

$$\|[Q(x,y) - Q(\tilde{x},y)]\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F\|^2_{2,D} =$$

$$= \|[a(x,y) - a(\tilde{x},y)]E_1\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F\|^2_{2,D} + \|[d(x,y) - d(\tilde{x},y)]E_2\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F\|^2_{2,D} \leq$$

$$\leq \max\left[\frac{|a(x,y) - a(\tilde{x},y)|}{a(\tilde{x},y)+\lambda}, \frac{|d(x,y) - d(\tilde{x},y)|}{d(\tilde{x},y)+\lambda}\right]\times$$

$$\times\left(\|[a(\tilde{x},y)+\lambda]E_1\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F\|^2_{2,D} + \|[d(\tilde{x},y)+\lambda]E_2\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F\|^2_{2,D}\right).$$

Первый сомножитель в правой части в силу условия (24) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, а второй - ограничен, что вытекает из оценки (27). Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|[Q(x,y) - Q(\tilde{x},y)]\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}\|^2_{L_2(D,R^2)\to L_2(D,R^2)} = 0,$$

поэтому найдется такое число λ_0, что при всех $\tilde{\lambda} \ge \lambda_0$, $\lambda \ge \lambda_0$ из (28) имеем

$$\left(\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}F = F + B_{\tilde{\lambda},\lambda}F, \tag{29}$$

где $\|B_{\tilde{\lambda},\lambda}F\|^2_{L_2(D,R^2)\to L_2(D,R^2)} \le 0.5$. Тогда оператор $S_{\tilde{\lambda},\lambda} = E + B_{\tilde{\lambda},\lambda}$ $(\lambda \ge \lambda_0,\ \tilde{\lambda} \ge \lambda_0)$ ограниченно обратим и $\|S^{-1}_{\tilde{\lambda},\lambda}\|_{L_2(D,R^2)\to L_2(D,R^2)} \le 2$. В (29) полагая $[E + B_{\tilde{\lambda},\lambda}]F = \Phi$, имеем

$$\left(\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)\left[\mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}[E + B_{\tilde{\lambda},\lambda}]^{-1}\right]\Phi = \Phi\ (\lambda \ge \lambda_0, \tilde{\lambda} \ge \lambda_0). \tag{30}$$

Далее, аналогично доказательству леммы 1 [1] получим оценку

$$\left\|\left(\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)w\right\|_{2,D} \ge C(\delta + \lambda)\|w\|_{2,D}, \lambda \ge 0, \tilde{\lambda} \ge 0. \tag{31}$$

Тогда из (30) вытекает, что при $\tilde{\lambda} \ge \lambda_0$, $\lambda \ge \lambda_0$ оператор $\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E$ имеет обратный

$$\left(\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1} = \mathcal{L}^{-1}_{\tilde{x},(\tilde{\lambda},\lambda)}S^{-1}_{\tilde{\lambda},\lambda},$$

определенный на всем пространстве $L_2(D,R^2)$. Из этого соотношения, оценки (27) и неравенств $\|a(x,y)u\|^2_{2,D} \le (C_0+1)\|a(\tilde{x},y)u\|^2_{2,D}$ и $\|d(x,y)v\|^2_{2,D} \le (C_0+1)\|d(\tilde{x},y)v\|^2_{2,D}$, вытекающих из условия (24), следует, что для всех $w \in D(\mathcal{L} + \tilde{\lambda}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E)$ $\quad(\tilde{\lambda} \ge 0,\ \lambda \ge 0)$ справедлива оценка (27), где $a(\tilde{x},y)$ и $d(\tilde{x},y)$ заменены, соответственно, на $a(x,y)$ и $d(x,y)$.

Разобьем промежуток $[0,\tilde{\lambda}]$ на n равных частей точками $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1} < \mu_n = \tilde{\lambda}$. Формально имеет место представление

$$\left(\mathcal{L} + \mu_{k-1}E\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1} = \left(\mathcal{L} + \mu_k\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1} \times$$

$$\times\left[E + (\mu_k - \mu_{k-1})\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{L} + \mu_{k-1}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\right],\ k = \overline{1,n}. \tag{32}$$

Согласно оценке (4) [1], которая остается справедливой и в случае, когда $a = a(x,y)$, $d = d(x,y)$, имеем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{L} + \mu_{k-1}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{L_2\to L_2} \le \rho$$

Поэтому, если выбрать μ_k $(k = \overline{1,n})$ так, что $|\mu_k - \mu_{k-1}| < \rho^{-1}$, то при $k = n$ из соотношения (32) вытекает, что оператор $\left(\mathcal{L} + \mu_{n-1}\tilde{E}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda E\right)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве $L_2(D,R^2)$ и в силу замкнутости ограничен. Повторим указанную процедуру, заменив μ_{n-1} на μ_{n-2}, а $\mu_n = \tilde{\lambda}$ – на μ_{n-1} и т.д. В результате получим, что оператор $\mathcal{L} + \lambda E$ $(\lambda \ge \lambda_0)$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $L_2(D,R^2)$. Тогда из оценки (31) и известного утверждения из [9, с.350] следует, что оператор $(\mathcal{L} + \lambda E)^{-1}$

является таковым при всех $\lambda \geq 0$, *причем для функций* $w \in D(\mathcal{L} + \lambda E)$ $(\lambda \geq 0)$ *справедлива оценка (25). Теорема 3 доказана.*

Цитированная литература

1. **Оспанов К.Н.** *// Математический журнал. 2004. Т.4, №3(13). С.68-73.*

2. **Ладыженская О.А.** *Краевые задачи математической физики. М. 1973.*

3. **Отелбаев М.** *// Тр. МИАН СССР. 1983. Т.161. С.195 - 217.*

4. **Бойматов К.Х.** *// Труды МИАН СССР. 1984. Т.170. С.37 - 76.*

5. **Ойнаров Р.** *// Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, №5. С.1062 - 1064.*

6. **Муратбеков М.Б.** *// Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, №12. С.2127 - 2137.*

7. **Оспанов К.Н.** *// Сибирск. матем. журнал. 1997. №2. С.365 - 371.*

8. **Оспанов К.Н.** *// Труды межд. конф. "Современные проблемы математики". Астана. 2002. С.60.*

9. **Ахиезер Н.И., Глазман И.М.** *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.*

Поступила в редакцию 09.03.2005 г.

UDK 517.946 *2000 MSC: 35J20*

Ospanov K.N. **Coercive estimates for A.V. Bitsadze type singular system** // *Mathematical journal. 2005. T.5. №1. P.*

The coercive estimates of solves of the half-periodical problem in a strip for A.V. Bitsadze type system with unlimited coefficients in S.L.Sobolev class are established.

References - 9.

УДК 517.946 *2000 MSC: 35J20*

Оспанов Қ.Н. **А.В.Бицадзе типтес сингулярлы жүйе үшін коэрцитивті бағалар** // *Математикалық журнал. 2005. Т.5. №1, Б.*

Шектелмеген коэффициенттері бар А.В.Бицадзе типтес жүйе үшін жолақтағы жартылай периодты есептің шешімінің С.Л.Соболев класындағы коэрцитивті бағалары тағайындалады.

Әдебиеттер тізімі - 9 ат.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.94 — 98*

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

И. Н.Панкратова

Институт Математики МОиН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 irina@math.kz

Определены области значений параметров с разным числом неподвижных точек отображения последования для двумерного логистического отображения, на границах которых наблюдается неустойчивость.

Рассмотрим отображение

$$f : L^n \to L^n, \quad f(x) = (1 - \sum_1^n x_i)Ax,$$

где A – матрица параметров, L^n – n-мерное линейное нормированное пространство с нормой $|x| = \sum_1^n |x_i|$ [1]. При $n = 1$ $f = \chi_\lambda$, где $\chi_\lambda : L^1 \to L^1$ – одномерное логистическое отображение, $\chi_\lambda x = \lambda(1 - x)x$, λ – параметр [2], [3]. На собственных направлениях матрицы A также существует линейный изоморфизм между отображениями f и χ_λ, где в качестве λ выступает собственное значение матрицы A, соответствующее выбранному собственному направлению.

В силу своей многомерности и многопараметричности отображение f, наследуя основные свойства однопараметрического отображения χ_λ, проявляет некоторые качественно новые свойства: в разных частях фазового пространства устойчивость сложным образом сочетается с неустойчивостью, хаос – с регулярным поведением траекторий и т.д. На эту проблему многомерных динамических систем еще в 1991г. указал Д.В. Аносов [4]. Однако до настоящего времени вопрос о механизме и причинах возникновения такого поведения остается открытым даже для узких классов динамических систем [5-8].

В настоящей работе на примере изучения двумерного отображения f обнаружена одна из причин, связанная с существованием областей значений параметров с разным числом неподвижных точек отображения последования для отображения f. На границах областей нарушается устойчивость неподвижных точек, что приводит к скачкообразному изменению их положения в фазовом пространстве, либо к смене типа аттрактора.

Keywords: *dynamical system, logistic map, fixed point, stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C05, 39A05, 65P30

Из [9] следует, что отображение f можно задать совокупностью одномерных отображений в виде суперпозиций логистических отображений χ_λ. Более точно результат состоит в следующем.

Пусть $K^n = \{x \in L^n | x \geq 0, \ \sum\limits_1^n x_i \leq 1\}$ – компактное фазовое пространство отображения f и $\omega_f(x)$ – ω-предельное множество траектории $f^m x$. Инвариантность множества K^n относительно f обеспечивается выбором матрицы A: A – неотрицательная матрица, т.е. $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j = \overline{1,n}$ и $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n a_{ij} \leq 4$.

Т е о р е м а [9]. *Для любого x из K^n существует инвариантное относительно f множество $J_p \subseteq K^n$ для некоторого $p \leq n$, $p \in N$, такое, что J_p состоит из p отрезков лучей $J_{p,1}, \ldots, J_{p,p}$, инвариантных относительно отображения f^p, и $\omega_f(x) \subseteq J_p$. На J_p отображение f^p имеет одномерное представление на каждом $J_{p,i}$*

$$f^p_{|J_{p,i}} = \chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}, \qquad (*)$$

где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$ – некоторые числа.

Отображения f^p, $p \in N$, удовлетворяющие утверждению теоремы, являются отображениями последования.

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ при $p = n$ удовлетворяют условию $\prod\limits_1^n \lambda_i = \lambda^n$, где $\lambda > 0$ – максимальное собственное значение матрицы A (мы полагаем λ строго положительным, иначе динамика отображения f в K^n сводится к тривиальной); при $p < n$ $\prod\limits_1^p \lambda_i = \overline{\lambda}^p$, где собственное значение $\overline{\lambda}$ может быть уже другим, $0 \leq \overline{\lambda} \leq \lambda$. Поскольку отображение f действует на K^n, отображение $\chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}$ с необходимостью действует на $I = [0, 1]$.

Сделаем несколько существенных добавлений к данной теореме, которые понадобятся в дальнейшем.

З а м е ч а н и е 1. *Пусть $A \geq 0$ и $\lambda > 0$. Тогда пространство L^n расщепляется на циклические инвариантные относительно линейного оператора, заданного матрицей A, подпространства L^p, $p \leq n$ [10, с.166]. Отсюда следует, что указанное в теореме множество $J_p \subseteq K^n$ принадлежит некоторому множеству $M_p \subseteq K^n$, т.е. $J_p \subset M_p$, где $M_p = L^p \bigcap K^n$, L^p – p-мерное циклическое подпространство, $p \leq n$, $p \in N$. На M_p отображение f^p имеет тот же одномерный вид (*), но $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ являются уже параметрами.*

З а м е ч а н и е 2. *Теорема справедлива для более общего случая, когда $x \in L^{n+}$, где $L^{n+} = \{x \in L^n \mid x \geq 0\}$, т.к. множества $M_p \subseteq K^n$ и параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \in N$, однозначно определяются свойствами матрицы $A \geq 0$.*

В силу одномерных представлений (*) отображений последования правомерно свести изучение свойств отображения f к изучению свойств отображений $\chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}$, зависящих от p параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $p \in N$.

Очевидно, что множество $\{\chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}, p \in N\}$ содержит отображение χ_λ $(p = 1)$ (свойства которого мы считаем известными [2-3]), т.к. существует хотя бы одно неотрицательное собственное направление матрица $A \geq 0$, соответствующее максимальному собственному значению $\lambda > 0$ [10, с.344], на котором $f = \chi_\lambda$.

Поскольку новые по сравнению с одномерным отображением χ_λ свойства возникают уже у двумерного отображения f, мы ограничимся рассмотрением двумерного случая. В зависимости от свойств матрицы A для двумерного отображения f характерны одномерные представления только двух видов: однопараметрические χ_λ, $\lambda \in (0, 4]$ и двухпараметрические $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, $\lambda_i \in (0, 4], i = 1, 2$. Двухпараметрические представления возникают в двумерном отображении f, имеющем матрицу A вида $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$, где $0 < a_1, a_2 \leq 4$. При этом $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_1 \cdot a_2 = \lambda^2$ [9].

Двухпараметрическое отображение $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ будем изучать в сравнении с однопараметрическим $f^2 = \chi^2_\lambda$ (второй итерацией отображения χ_λ), которое действует на собственном направлении матрицы A и получается из $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, если положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (λ – максимальное собственное значение). Именно при таком сравнении обнаружатся отличия в свойствах отображений $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ и χ^2_λ.

Рассмотрим неподвижные точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, т.е. корни уравнения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1} x = x$.

С учетом равенства $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$ имеем

$$\lambda^2(1 - \chi_{\lambda_1}x)(1 - x)x = x.$$

Очевидно, $x = 0$ является корнем данного уравнения. Полагая $x \neq 0$, подставляя выражение для $\chi_{\lambda_1}x$, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим уравнение вида

$$x^3 - 2x^2 + (1 + 1/\lambda_1)x - 1/\lambda_1 \cdot (1 - 1/\lambda^2) = 0$$

или приведенное (неполное) уравнение, которое не содержит квадрата неизвестного,

$$x^3 + (1/\lambda_1 - 1/3)x + 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3) = 0.$$

Далее используем формулу Кардано для решения неполного кубического уравнения. Обозначим

$$P(\lambda_1) = 1/\lambda_1 - 1/3, \quad Q(\lambda_1, \lambda) = 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3).$$

Данное уравнение разрешимо в зависимости от знака дискриминанта

$$D(\lambda_1, \lambda) = -108(Q(\lambda_1, \lambda)^2/4 + P(\lambda_1)^3/27).$$

Для определения знака функции D вначале найдем область допустимых параметров (λ_1, λ), в которой изучается вопрос о неподвижных точках отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Очевидно, что при $0 < \lambda \le 4$ и $0 < \lambda_1 \le 4$ суперпозиция $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ имеет смысл и существует на I вместе со всеми своими итерациями, т.е. $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^m x \in I$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Однако параметр λ_1 нельзя выбрать произвольным, в частности, произвольно малым для данного λ (для заданного двумерного отображения f параметр λ фиксирован: $\lambda = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$). Отсюда следует ограничение $\lambda_{1\,\min} \le \lambda_1 \le 4$, где $\lambda_{1\,\min}$ выбирается из условия: $4\lambda_{1\,\min} = \lambda^2$. Таким образом, имеем следующую область изменения параметров (λ_1, λ):

$$\Lambda = \{\ (\lambda_1, \lambda)\ \mid\ \lambda_{1\,\min} \le \lambda_1 \le 4,\ \ 0 < \lambda \le 4,\ \ \lambda_{1\,\min} = \lambda^2/4\}.$$

Изучим свойства неподвижной точки $x = 0$ в области Λ. Вычислим мультипликатор [2, с.9] в этой точке. Имеем

$$\mu(0) = (\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})'(0) = (\chi'_{\lambda_2}(\chi_{\lambda_1}x) \cdot \chi'_{\lambda_1}x)|_{x=0} = \lambda^2(1 - 2\chi_{\lambda_1}x)(1 - 2x)|_{x=0} = \lambda^2.$$

Значит, при $\lambda < 1$ неподвижная точка $x = 0$ является притягивающей и при $\lambda > 1$ — отталкивающей. При $\lambda = 1$ неподвижная точка $x = 0$ все еще остается притягивающей, т.к. $\forall x \in I \backslash \{0\}$ $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1} x < x$ и $\bigcap\limits_0^\infty (\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^m (I \backslash \{0\}) = \{0\}$. Отметим, что при $\lambda \le 1$ $x = 0$ — единственная неподвижная точка отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (и всех его итераций). Таким образом, в области

$$\Lambda_1 = \{\ (\lambda_1, \lambda)\ \mid\ \lambda_{1\,\min} \le \lambda_1 \le 4,\ \ 0 < \lambda \le 1,\ \ \lambda_{1\,\min} = \lambda^2/4\}$$

неподвижная точка $x = 0$ отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ – притягивающая. Для однопараметрического отображения χ^2_λ неподвижная точка $x = 0$ также является притягивающей при $\lambda \le 1$.

Перейдем далее к изучению нетривиальных неподвижных точек отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Они появляются на интервале I при $\lambda > 1$ (когда неподвижная точка $x = 0$ становится отталкивающей). Как известно, при $D < 0$ неполное кубическое уравнение имеет один действительный корень, что соответствует существованию на I одной нетривиальной неподвижной точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$; при $D = 0$ все три корня уравнения действительные, причем два из них равны между собой, т.е. существуют три неподвижных точки на I, две из которых сливаются, и при $D > 0$ все три корня уравнения действительны и различны: имеем три различных неподвижных точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ на I.

Рассмотрим дискриминант $D(\lambda_1, \lambda) = -108(Q(\lambda_1, \lambda)^2/4 + P(\lambda_1)^3/27)$. При фиксированном значении λ функция $Q(\lambda_1, \lambda)^2/4$ есть степенная функция относительно переменной λ_1, при этом $Q^2/4 \geq 0$. Функция $P(\lambda_1)^3/27$ – степенная и монотонно убывает на всем промежутке изменения параметра λ_1, пересекаясь с осью λ_1 только при $\lambda_1 = 3$. Если построить линии уровня функции $D(\lambda_1, \lambda)$, то из графика видно, что в области Λ до значений $\lambda < 3$, $\lambda_1 < 3$ $D(\lambda_1, \lambda) < 0$. При $\lambda = 3$, $\lambda_1 = 3$ $D(\lambda_1, \lambda) = 0$. Это первое нулевое значение функции D. При $\lambda > 3$, $\lambda_1 > 3$ функция D принимает как отрицательные, так нулевые и положительные значения. При рассмотрении линий уровня $D(\lambda_1, \lambda) = const$ в области параметров $\{\ 3 \leq \lambda_1 \leq 4;\ 3 \leq \lambda \leq 4\ \}$ обнаруживается, что линии уровня, выходящие из точки $(\lambda_1, \lambda) = (3, 3)$ (образующие криволинейный угол с вершиной в точке $(\lambda_1, \lambda) = (3, 3)$) соответствуют $D(\lambda_1, \lambda) = 0$. Линии $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ делят область параметров Λ на три части: вне угла $D < 0$ и, значит, существует одна неподвижная точка отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ на I; на линии $D = 0$ неподвижных точек три, две из которых сливаются, и внутри криволинейного угла $D > 0$ – три различных неподвижных точки. Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Область Λ изменения параметров λ_1, λ разделяется линией уровня $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ функции $D(\lambda_1, \lambda)$ на три подмножества, в которых существуют одна, две и три неподвижных нетривиальных точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$.*

Посмотрим теперь, как появляются неподвижные точки однопараметрического отображения χ_λ^2. Согласно [2, c.10] у отображения χ_λ^2 с ростом λ при $\lambda > 1$ появляется сначала одна неподвижная нетривиальная точка, затем при $\lambda = 3$ появляются еще две (сливающиеся в одну), которые при $\lambda > 3$ распадаются на две различные, и при $3 < \lambda \leq 4$ количество точек остается равным трем.

С л е д с т в и е. *На линии $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ происходит потеря устойчивости неподвижных точек, проявляющаяся в скачкообразном изменении их положения, либо в смене типа аттрактора.*

Данное свойство легко обнаруживается при рассмотрении бифуркационных диаграмм для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Достаточно даже обратиться к (одномерным) срезам бифуркационных диаграмм, где вдоль оси x меняется один из управляющих параметров (λ_1 или λ), другой параметр при этом фиксирован, а по оси y откладываются значения переменной x, расположенные на аттракторе, которые получаются при итерациях отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. При входе и выходе из треугольной области, ограниченной криволинейным углом, в которой $D(\lambda_1, \lambda) > 0$, т.е. при пересечении линии $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ неподвижная точка, являющаяся аттрактором в одной из областей (где $D(\lambda_1, \lambda) < 0$ или $D(\lambda_1, \lambda) > 0$), теряет устойчивость и мы наблюдаем либо скачкообразное изменение ее положения, либо другой тип аттрактора, включая хаос.

З а м е ч а н и е 3. *Как показывают бифуркационные диаграммы, при пересечении линии $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ нарушается устойчивость не только неподвижных точек, но и притягивающих циклов отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (неподвижных точек отображений, являющихся итерациями исходного отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$), либо происходит смена типа аттрактора.*

Цитированная литература

1. **Панкратова И. Н.** // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995-997.
2. **Шарковский А. Н., Коляда С. Ф. и др.** Динамика одномерных отображений. Киев, 1989.

3. **Фейгенбаум М.** // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, No 2. С. 343-374.
4. **Аносов Д. В.** //"Современные проблемы математики. Фунд. направления". 1991. Т. 66. С. 6-12.
5. **Loskutov A., Shishmarev A.** // CHAOS. 1994. V. 4, № 2. P. 391-395.
6. **Sauer T., Yorke J. A.** // Nonlinearity. 1991. V. 4. P. 961-979.
7. **Mestel B. D., Osbaldestin A. H.** // Commun. Math. Phys. 1998. V. 197. P. 211-228.
8. **Kong Xiang-dong, Liu Jian, Dong Ping** // J. Dalian Univ. Technol. 2001. V. 41, № 3. P. 268-270.
9. **Панкратова И. Н., Рахимбердиев М. И.** // Математический журнал. 2003. № 1. С. 75-79.
10. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., 1988.

Поступила в редакцию 24.03.2005 г.

On Some Instability Properties of Two-Dimensional Logistic Map

It's shown that there's three parts of parameters domain with quite different number of fixed points of first return map for two-dimensional logistic map as well as fixed point instability on boundaries of this parts occur.

Екі өлшемді логистикалық бейненің орнықсыздығының кейбір қасиеттері.

Шекараларында орнықсыздық байқалатын екі өлшемді логистикалық бейне үшін бейне тізбектелуінің қозғалмайтын нүктелері әртүрлі санды параметр мәндерінің облысы анықталды.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С. 99 — 111*

УДК 517.962.2, 517.956.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ В ДВУМЕРНО-ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧЕ АКУСТИКИ

А. Дж. Сатыбаев

Кыргызско-Узбекский университет
Кыргызская Республика Ош ул. МолдоНияза, 37 abdigani_s@netmail.kg

Разработан конечно-разностный регуляризованный метод, на основе которого получено приближенное решение, которое сходится к точному решению. Приведены численные расчеты в виде графиков.

При решении прикладных задач часто возникают проблемы отыскания переменных коэффициентов уравнений математической физики. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения описывают физические процессы, а коэффициенты связаны с физическими характеристиками среды, в которой протекают эти процессы.

Возникает вопрос о том, как определить эти коэффициенты по некоторой дополнительной информации о решении прямых задач. Например, в акустике по отражению звуковых волн необходимо определить какой-нибудь предмет: в воздухе - самолета, вертолета, в воде - подводную лодку и другие.

Численные методы решения обратных задач акустики, тем более двумерных, мало исследованы.

Задачи определения скорости распространения волн, входящей в волновое уравнение и акустики, в различных постановках, в теоретическом плане исследовались в работах В.Г. Романова [1], А.С. Благовещенского [2], М.М. Лаврентьева, К.Г. Резницкой, В.Г. Яхно [3], Т.В. Мельниковой [4] и других авторов.

В работе С.И. Кабанихина [5] изучена задача определения плотности $\rho(x, y, z)$, входящей в уравнение акустики, при известной скорости $c(x, y, z)$, и в его же работе рассматривался вопрос единственности решения задачи определения плотности $\rho(x, y, z)$, скорости $c(z)$, зависящих только от глубины z. Здесь в [5] численные методы не рассматривались.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Определить $c_1(z, y)-$ малой скорости распространения волн из следующей задачи акустики

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_0^2(z)\Delta_{z,y}u_1 + \frac{c_1(z,y)}{c_0^2(z)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\rho'_{1z}(z,y)}{\rho_0(z)}c_0^2(z)\frac{\partial u_0}{\partial z} - \\ &-\frac{\rho'_{oz}(z)}{\rho_0(z)}c_0^2(z)\frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad z \in (0,d), \quad y \in (-D,D), \quad t \in (0,T_d), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Keywords: *mathematics of phisics, isnverse problems, numerical methods*
2000 Mathematics Subject Classification: 49K15

$$u_1(z,y,t)\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_1(z,y,t)}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad u_1(z,y,t)\Big|_{y=-D} = u_1(z,y,t)\Big|_{y=+D} = 0,$$

$$u_1(z,y,t)\Big|_{z=0} = g(y,t), \quad y \in (-D,D), \quad t \in [0,T_d] \tag{2}$$

где $c_0(z)$, $\rho_0(z)$- известные большие скорости распространения волн и плотности среды соответственно, $\rho_1(z,y)$- известная малая плотность среды, $u_0(z,t)$- известное большое возмущение среды, $u_1(z,y,t)$- малое возмущение среды, $\Delta_{z,y} = \partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial y^2$.

О приведении к линеаризованной обратной задаче (1),(2) см. [6].

Пусть относительно заданных и искомой функции выполнены условия:

$$\rho_0(z), \quad c_0(z) \in \Lambda_0, \tag{3}$$

$$\rho_1(z,y), \quad c_1(z,y) \in \Lambda_1, \tag{4}$$

$$\Lambda_0 = \left\{\rho_0\left(z\right) \in C^6\left(R_+\right), \rho_0'\left(+0\right) = 0,\ 0 < M_1 \leq \rho_0\left(z\right) \leq M_2, \|\rho_0\|_{C^2} \leq M_3\right\},$$

$$\Lambda_1 = \left\{\rho_1\left(z,y\right) \in C^6\left(R \times R_+\right),\ \ supp\{\rho_1\left(z,y\right)\} \subset \left((0,d) \times (-D,D)\right)\right\},$$

где M_1, M_2, M_3, D, d – положительные постоянные.

П р и в е д е н и е к о б р а т н о й з а д а ч е с д а н н ы м и н а х а р а к т е р и с т и к а х.

Введем новую переменную x и новые функции:

$$x = \varphi(z), \quad \varphi(z) = \int\limits_0^z \frac{d\lambda}{c_0(\lambda)}, \quad b(x) = c_0(z), \quad a(x,y) = c_1(z,y),$$

$$d(x) = \rho_0(z), \quad e(x,y) = \rho_1(z,y), \quad S(x) = \sqrt{\frac{b(0)}{d(0)} b(x) d(x)},$$

$$q(x) = \frac{S''(x)}{S(x)} - 2\left[\frac{S'(x)}{S(x)}\right]^2, \quad U(x,t) = u_0(z,t)/S(x), \quad W(x,y,t) = u_1(z,y,t)/S(x).$$

Продолжая все входящие функции в уравнения (1) четным образом по x на $R\_$, из (1)-(2) имеем

$$\left.\begin{aligned} &W_{tt} = W_{xx} + b^2(x) W_{yy} + q(x) W + \frac{a(x,y)}{b^2(x)} U_{tt} - \\ &-\left(\frac{e(x,y)}{d(x)}\right)_x \left[U_x + \frac{S_x'(x)}{S(x)} U\right], \quad (x,t) \in \Delta(T), \quad y \in (-D,D), \\ &W\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad W_x\Big|_{x=0} = 0, \quad W\Big|_{y=-D} = W\Big|_{y=D} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$W\Big|_{x=0} = g(y,t)/S(0), \quad t \in [0,T], \quad y \in (-D,D), \tag{6}$$

где $T = T_d$, $\Delta(T) = \{(x,t) : x \in (0, T/2)\,, t \in (|x|\,, T - |x|)\}$.

Для краткости введем обозначения $\sigma(x,y) = \dfrac{e(x,y)}{d(x)}$, $\mu(x,y) = \dfrac{a(x,y)}{b^2(x)}$.

Если для $e(x,y)$, $a(x,y)$, следовательно и для $\sigma(x,y)$, $\mu(x,y)$, выполнены условия (3) и разложение в ряд Фурье, то решение последней задачи (5)-(6) также представим в виде ряда Фурье, т.е.

$$W(x,y,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} W_j(x,t) Y_j(y), \ \ g(y,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(t) Y_j(y), \ \ Y_j(y) = \exp\left(ij\pi y/D\right).$$

Тогда имеем следующую серию одномерных обратных задач относительно $\mu_j(x)$, $j = -\infty, +\infty$:

$$\left.\begin{aligned} & W_{jtt} = W_{jxx} - b^2(x)j^2 W_j + q(x)W_j + \mu_j(x)U_{tt} - \sigma'_{jx}(x)\left[U_x + \frac{S_x}{S}U\right], \\ & (x,t) \in \Delta(T), \\ & W_j\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad W_{jx}\Big|_{x=0} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$W_j\Big|_{x=0} = g_j(t)/S(0), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Решение прямой задачи (7) представим в виде

$$W_j(x,t) = \alpha(x)\delta(t-|x|) + \beta(x)\theta(t-|x|) + \gamma(x)\theta_1(t-|x|) + \widetilde{W}_j(x,t).$$

Тогда получим обратную задачу с данными на характеристиках:

$$\left.\begin{aligned} & W_{jtt} = W_{jxx} - b^2(x)j^2 W_j + q(x)W_j + \mu_j(x)U_{tt} - \sigma'_{jx}\left[U_x + \frac{S'_x}{S(x)}U\right], \\ & (x,t) \in \Delta(T), \\ & W_j\Big|_{t=|x|} = \frac{1}{4}\mu_j(x) + \frac{1}{2}\sigma_j(x) + \frac{1}{4}\int\limits_0^x K_j(x,\tau)\mu_j(\tau)d\tau, \quad x \in [0, T/2], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$W_j\Big|_{x=0} = g_j(t)/S(0), \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

где $K_j(x,\tau) = \int\limits_\tau^x \left[q(\xi) - b^2(\xi)j^2\right]d\xi$ – известная функция, $W_j = W_j(x,t)$, $U = U(x,t)$.

Решение обратной задачи (9)-(10) для каждого j, $j = \overline{-L, L}$ ищется конечно-разностным регуляризованным методом, поэтому в следующем пункте для краткости индекс j опустим.

К о н е ч н о - р а з н о с т н о е р е ш е н и е.

Пусть теперь $W(x,t) \in C^4(\Delta(T)), U(x,t) \in C^4(\Delta(T))$.

Введем сеточную область

$$\Delta_i^k = \{x_i = ih, t_k = kh, h = T/2N, (ih,kh) : ih \in (0, T/2)\,, \ ih \le kh \le T - ih\}\,,$$

где h – сеточный шаг по x, t.

Составим разностный аналог задачи (9)-(10):

$$\left.\begin{aligned} & W_{t\bar t} = W_{x\bar x} - \left(b_i^2 j^2 - q_j\right)W_i^k + \mu_i V_{t\bar t} - \sigma_{\bar x}\left(V_x + \frac{S_x}{S}V\right) + O(h), \\ & (ih,kh) \in \Delta_i^k, \\ & W_i^i = \frac{1}{4}\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i + \frac{1}{4}I_i + O\left(h^3\right), \quad i = \overline{0,N}; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$W_O^k = g^k/S_0, \quad k = \overline{0, 2N}. \tag{12}$$

Здесь $I_i = \sum_{l=0}^{i} K_{il}\mu_l h$, $K_{il} = \sum_{m=l}^{i}(q_m - b_m^2 j^2)h$.

Используя четность $W(x,t)$ по x и разложение в ряд Тейлора, определим

$$W_1^k = (g^{k+1} + g^{k-1})/2S_0 + h^2(b_0^2 j^2 - g_0)g^k/_{2S_0} -$$

$$-\mu_0 \frac{h^2}{2}\left[\frac{V_0^{k+1} - 2V_0^k + V_0^{k-1}}{h^2}\right] + O(h^3). \tag{13}$$

Из уравнения (11) имеем

$$W_{i+1}^k = W_i^{k+1} + W_i^{k-1} - W_{i-1}^k + h^2(b_i^2 j^2 - q_i)W_i^k - h^2\mu_i V_{t\bar{t}} +$$

$$+h^2\sigma_{\bar{x}}\left(V_{\dot{x}} + \frac{S_{\dot{x}}}{S}V_i^k\right) + O(h). \tag{14}$$

Подставляя в правую часть (11) последовательно W_i^{k+1}, W_i^{k-1}, W_{i-1}^{k-2}, ..., представленные аналогичной формулой, получим конечно - разностный аналог формулы Даламбера

$$W_{i+1}^k = \frac{g^{k+i+1} + g^{k-i-1}}{2S_0} + \frac{h^2}{2}(b_0^2 j^2 - q_0)\sum_{l=0}^{i}\frac{g^{i-2l+k}}{S_0} +$$

$$+h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}(b_l^2 j^2 - q_l)W_l^{k-i-l+2m} - \frac{h^2}{2}\mu_0\sum_{l=1}^{i}\frac{V_o^{k+i-2l+1} - 2V_o^{k+i-2l} + V_0^{k+i-2l-1}}{h^2} -$$

$$-h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\mu_l\left(\frac{V_l^{k-i-l+2m+1} - 2V_l^{k-i-l+2m} + V_l^{k-i-l+2m-1}}{h^2}\right) +$$

$$+h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{h}\left(\frac{V_{l+1}^{k-i-l+2m} - V_{l-1}^{k-i-l+2m}}{2h} + \frac{S_{l+1} - S_{l-1}}{2hS_l}V_l^{k-i-l+2m}\right) + O(h),$$

$$i = \overline{0, N-1}; \quad k = \overline{i, 2N-i}. \tag{15}$$

Отсюда при $k = i+1$ следует

$$W_{i+1}^{i+1} = \Gamma_{i+1} + \Pi_{i+1} + O(h), \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{16}$$

где

$$\Gamma_{i+1} = \frac{g^{2i+2} + g^0}{2S_0} + \frac{h^2}{2}(b_0^2 j^2 - q_0)\sum_{l=1}^{i}\frac{g^{2i+1-2l}}{S_0} -$$

$$-\frac{-1}{2}h^2\mu_0\sum_{l=0}^{i}\frac{V_0^{2i+2-l} - 2V_0^{2i+1-l} + V_0^{2i-l}}{h^2} + h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}(b_l^2 j^2 - q_l)W_l^{1-l+2m} +$$

$$+h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{h}\left(\frac{V_{l+1}^{1-l+2m} - V_{l-1}^{1-l+2m}}{2h} + \frac{S_{l+1} - S_{l-1}}{2hS_l}V_l^{1-l+2m}\right),$$

$$\Pi_{i+1} = -h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\mu_l\left(\frac{V_l^{2-l+2m} - 2V_l^{1-l+2m} - V_l^{-1+2m}}{h^2}\right).$$

С другой стороны, из второго условия (11) найдем

$$W_{i+1}^{i+1}=\frac{1}{4}\mu_{i+1}+\frac{1}{2}\sigma_{i+1}+\frac{1}{4}I_{i+1}+O(h^3),\quad i=\overline{0,N-1}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$\mu_{i+1}=[-2\Gamma_{i+1}+\Pi_i+\sigma_{i+1}-I_i]\times\left[\frac{1}{2}+K_{i+1,i+1}+2(V_{i+1}^{3+i}-2V_{i+1}^{2+i}+V_{i+1}^{1+i})\right]+$$
$$+O(h),\quad i=\overline{0,N-1}. \tag{18}$$

Обозначим теперь через $\widetilde{W}_i^k$, $\tilde{\mu}_i$ приближенное решение обратной задачи (11)-(12) (т.е. в (11) и (12) отброшены $O(h)$). В этом случае и для $\widetilde{W}_i^k$, $\tilde{\mu}_i$ можно написать формулы, аналогичные формулам (13) и (18), но без малых величин $O(h)$.

Следовательно, для

$$\bar{W}_i^k=W_i^k-\widetilde{W}_i^k,\quad \bar{\sigma}_i=\sigma_i-\tilde{\sigma}_i,\quad \bar{\mu}_i=\mu_i-\tilde{\mu}_i$$

имеем

$$\bar{W}_{i+1}^k=-\frac{h^2}{2}\bar{\mu}_0\sum_{l=1}^{i}\frac{V_0^{i-2l+k+1}-2V_o^{i-2l+k}+V_0^{i-2l+k-1}}{h^2}+$$
$$+h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}(b_l^2j^2-q_l)\bar{W}_l^{k-i-l+2m}-$$
$$-h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\bar{\mu}_l(\frac{V_l^{k-i-l+2m+1}-2V_l^{k-i-l+2m}+V_l^{k-i-l+2m-1}}{h^2})+h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\bar{\sigma}_l-\bar{\sigma}_{l-1}}{h}\times$$
$$\times\left(\frac{V_{l+1}^{k-i-l+2m}-V_{l-1}^{k-i-l+2m}}{2h}+\frac{S_{l+1}-S_{l-1}}{2hS_l}V_l^{k-i-l+2m}\right)+O(h), \tag{19}$$

$$\bar{\mu}_{i+1}=\{\,\bar{\sigma}_{i+1}+4h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\left(b_l^2j^2-q_l\right)\bar{W}_l^{1-l+2m}+$$
$$+h^2\bar{\mu}_0\sum_{l=0}^{i}\frac{V_0^{2i-2l+2}-2V_0^{2i-2l+1}+V_0^{-l+2m}}{h^2}+h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\bar{\mu}_l\times$$
$$\times\left(\frac{V_l^{-l+2m+2}-2V_l^{-l+2m+1}+V_l^{-l+2m}}{h^2}\right)-2h^2\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{m}\frac{\bar{\sigma}_l-\bar{\sigma}_{l-1}}{h}\times$$
$$\times\left(\frac{V_{l+1}^{1-l+2m}-V_{l-1}^{1-l+2m}}{2h}+\frac{S_{l+1}-S_{l-1}}{2hS_l}V_l^{1-l+2m}\right)+$$
$$+h^2\sum_{m=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{m}\bar{\mu}_l(\frac{V_l^{2-l+2m}-2V_l^{1-l+2m}-V_l^{-1+2m}}{h^2})-\sum_{l=0}^{i}K_{il}\bar{\mu}_lh\,\}\times$$
$$\times[\frac{1}{2}+K_{i+1,i+1}h+2(V_{i+1}^{2+i}-2V_{i+1}^{1+i}+V_{i+1}^{i})]+O(h). \tag{20}$$

Введя обозначения

$$G=\max_{k=\overline{0,2N}}|g^k|,\quad B=\max_{i=\overline{0,N}}|b_i|\,,\quad Q=\max_{i=\overline{0,N}}|q_i|\,,\quad SG=\max_{i=\overline{0,N}}|\overline{\sigma}_i|\,,$$

$$\overline{V}_i=\max_{k=\overline{i,2N-i}}\left\{\left|\frac{u_i^{k+1}-2u_i^k+u_i^{k-1}}{h^2}\right|,\ \left|\frac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h}\right|,\ \left|u_i^k\right|\right\},$$

$$\overline{Z}_i=\max_{k=\overline{i,2N-i}}\left\{\left|\overline{W}_i^k\right|,\ |\mu_i|\right\},\quad i=\overline{0,N};\quad \overline{S}_i=\frac{S_{i+1}-S_{i-1}}{2hS_i}, \tag{21}$$

из (19) и (20) имеем оценку

$$\overline{Z}_{i+1}\leq h^2\mu_0V_0 2N+2Nh^2\left(B^2j^2+Q\right)\sum_{l=1}^{i}\overline{Z_l}+h^2 2N\sum_{l=1}^{i}\bar{\mu}_l\overline{V_l}+$$

$$+h^2 2N\sum_{l=1}^{i}\frac{2SG}{h}\left(\overline{V_l}+S\bar{V_l}\right)+O(h),$$

$$\overline{\mu}_{i+1}\leq\{\,SG+O(h^3)+4Th(B^2j^2+Q)\sum_{l=1}^{i}\overline{Z_l}+4Th\bar{V}\bar{\mu}_0+$$

$$+8Th\bar{V}\sum_{l=1}^{i}\bar{\mu}_l+4ThSG\left(\overline{V_l}+S_l.\overline{V_l}\right)+Kh\sum_{l=1}^{i}\bar{\mu}_l\,\}[1/2+Kh+4\bar{V}]+4O(h). \tag{22}$$

Пусть

$$Z_{i+1}=\max_{i=\overline{0,N-1}}\left\{\overline{Z}_{i+1},\overline{\mu}_{i+1}\right\},\quad \bar{V}=\max_{i=\overline{0,N}}\left|\overline{V}_i^k-\widetilde{V}_i^k\right|,\quad S=\max_{i=\overline{0,N}}\left|\overline{S}_i\right|, \tag{23}$$

тогда

$$Z_{i+1}\leq\{\,SG+O(h^3)+4Th(B^2j^2+Q)\sum_{l=1}^{i}\overline{Z}_l+4Th\overline{V}Z_i+8Th\overline{V}\sum_{l=1}^{i}Z_l+$$

$$+4ThSG\left(\overline{V_l}+S_l.\overline{V_l}\right)+Kh\sum_{l=1}^{i}Z_l\,\}\times[1/2+Kh+4\bar{V}]+4O(h). \tag{24}$$

Отсюда, используя дискретный аналог леммы Гронуолла-Беллмана, имеем

$$Z_{i+1}\leq\{[SG+O(h^3)+4ThM\bar{V}+4ThSG\bar{V}(1+S)]\times[1/2+Kh+4\bar{V}]+4O(h)\}\times$$

$$\times\exp\left\{[4Th(B^2j^2+Q)+12Th\bar{V}+Kh]\times[1/2+Kh+4\bar{V}]\right\}. \tag{25}$$

Таким образом , доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть решения обратной задачи (9) - (10) существует и* $W_j(x,t)\in C^4(\Delta(T))$*,* $U(x,t)\in C^4(\Delta(T))$*. Тогда построенно решение* $\left(\widetilde{W}_i^k,\tilde{\mu}_i\right)$ *обратной задачи сходится к точному решению* (W_i^k,μ_i) *обратной задачи (9)-(10) со скоростью порядка* $O(h)$ *для каждого* j*.*

Р е г у л я р и з о в а н н о е р е ш е н и е. Напишем теперь приближенное решение обратной задачи (9)-(10) в виде

$$\widetilde{\Omega}_{i,L}(y)=\sum_{j=-L}^{L}\tilde{\mu}_j(ih)Y_j(y),\quad Y_j\left(y\right)=\exp\left(ij\pi y/D\right). \tag{26}$$

Используя результаты С.И.Кабанихина [7] и равенство Парсеваля-Стеклова, получим

$$\left\|\mu(ih,y)-\tilde{\Omega}_{iL}(y)\right\|_{L_2(-D,D)}\leq\left\|\mu(ih,y)-\sum_{j=-L}^{L}\mu_i(ih)Y_j(y)\right\|_{L_2(-D,D)}+$$

$$+\left\|\sum_{j=-L}^{L}(\mu_i(ih)-\mu_i(ih))Y_j(y)\right\|_{L_2(-D,D)}\leq$$

$$\leq\left(\gamma(L)+\|W\|_{C^2}h/L+SG+4Th\bar{V}+4ThSG\bar{V}\right)\times\left[1/2+Kh+4\bar{V}\right]\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{j=-L}^{L}e^{4ThB^2j^2}}\times\exp\left\{4Th\left(Q+2\bar{V}\right)\times\left[1/2+Kh+4\bar{V}\right]\right\}, \tag{27}$$

Пусть теперь дополнительная информация задана с погрешностью

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|g-g^{(\varepsilon)}\right\|_{L_2(-D,D)}<\varepsilon, \tag{28}$$

а $\sigma(x,y)$ – с погрешностью

$$\delta:\max_{t\in[0,T]}\left\|\sigma-\sigma^{(\delta)}\right\|_{L_2(-D,D)}\leq\delta. \tag{29}$$

Обозначим через $\tilde{\mu}_{ij}^{(\varepsilon)}$ конечно-разностное решение обратной задачи (9)-(10) с дополнительной информацией $g_j^{(\varepsilon)}(t)$, здесь

$$g^{(\varepsilon)}(y,t)=\sum_{j=-L}^{L}g_j^{(\varepsilon)}(t)\,Y_j(y), \tag{30}$$

а через $\tilde{\Omega}_{i,L}^{(\varepsilon)}$ – регуляризирующее семейство, т.е.

$$\tilde{\Omega}_{i,L}^{(\varepsilon)}=\sum_{j=-L}^{L}\tilde{\mu}_{ij}^{(\varepsilon)}Y_j(y). \tag{31}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть существует решение обратной задачи (5)-(6), удовлетворяющее условию теоремы 1, а для $c_0(z)$ и $\rho_0(z)$, $\rho_1(z,y)$ выполнены условия (3), (4). Кроме того пусть $W_j(x,t)\in C^4(\Delta(t))$, $V(x,t)\in C^4(\Delta(t))$. Если для $g(y,t)$ выполнено условие (28), а для $\sigma(x,y)$ – (29), то приближенное решение $\widetilde{\Omega}_{i,L}^{(\varepsilon)}$ сходится к точному решению обратной задачи $\mu(ih,y)$ в классе $CL(T,D)$ и справедливо неравенство*

$$\left\|\mu(ih,y)-\tilde{\Omega}_{i,L}^{(\varepsilon)}\right\|_{L_2(-D,D)}\leq\left(\gamma(L)+\|W\|_{C^2}h/L+SG+4Th\bar{V}+4ThSG\bar{V}\right)\times$$

$$\times\left[1/2+Kh+4\bar{V}\right]\sqrt{\sum_{j=-L}^{L}e^{4ThB^2j^2}}\times\exp\left\{4Th\left(Q+2\bar{V}\right)\left[1/2+Kh+4\bar{V}\right]\right\}+$$

$$+\left\{\left[\delta\left(1+2T\overline{V}h+8Th(\overline{V}+\overline{VS})\right)+\frac{\varepsilon}{S_0}(4+2hTQ)\right]\times[1/2+V+Kh]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[\left(\times ThQ+4Th\bar{V}+Kh\right)\times(1/2+4V+Kh)\right]\times$$

$$\times \sqrt{\sum_{j=-L}^{L} [\exp[8Th\,(B^2 j^2)] \times (1/2 + 4V + Kh)]}, \tag{32}$$

где $\gamma\,(L)$ – заданная функция [7, с.140],

$CL(T,D) = \left\{ (\mu_1(x,y) : \, \mu_1 = \sum\limits_{j=-L}^{L} \mu_{1j}(x) Y_j(y), \;\; Y_j(y) = \exp(ij\pi y/D), \;\; \mu_{1j}(x) \in C(0,T) \right\}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая для $\tilde{\mu}_1^{(\varepsilon)}$ так же как и для $\tilde{\mu}_1$ можем получить (17), в котором вместо g^k подставлен $g_k^{(\varepsilon)}$, поэтому

$$\begin{gathered}
\left[\tilde{\mu}_{i+1} - \tilde{\mu}_{j+1}^{(\varepsilon)}\right] = \{\, \delta_{i+1} + 2\frac{\varepsilon}{S_0} + h^2 \left(b_0^2 j^2 - q_0\right) \varepsilon \frac{N}{S_0} - \\
-h^2(\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_0^{(\varepsilon)}) \times \sum_{l=0}^{i} \frac{V_0^{2i+2-2l} + 2V_0^{2i+1-2l} + V_0^{2i-2l}}{h^2} + \\
+2h^2 \sum_{m=1}^{i} \sum_{l=1}^{m} \left(b_l^2 j^2 - q_l\right) \left(\widetilde{W}_l^{1-l+2m} - \widetilde{W}_l^{(\varepsilon)\;1-l+2m}\right) - \\
-4h^2 \delta_i \times \sum_{m=1}^{i} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{V_{l+1}^{1-l+2m} - V_{l-1}^{1-l+2m}}{2h} + \frac{S_{l+1} - S_{l-1}}{2hS_l} V_l^{1-l+2m} \right) + \\
+2h^2(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_i^{(\varepsilon)}) \times \sum_{m=1}^{i} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{V_l^{2-l+2m} + 2V_l^{1-l+2m} + V_l^{2l+2m}}{h^2} \right) - \\
-(1/2) \times h(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_i^{(\varepsilon)}) \times \sum_{l=0}^{i} K_{il} \,\} \times [\, \frac{1}{2} + K_{i+1,i+1} h + 2(V_{i+1}^{2+i} - 2V_{i+1}^{1+i} + V_{i+1}^{i}) \,] + O(h).
\end{gathered} \tag{33}$$

где $\delta_{i+1} = \tilde{\sigma}_{i+1} - \tilde{\sigma}_{i+1}^{(\varepsilon)}$. Обозначая $\delta = \max_{i=\overline{0,N}} |\delta_i|$, из последнего выражения имеем

$$\begin{gathered}
\left|\tilde{\mu}_{i+1} - \tilde{\mu}_{i+1}^{(\varepsilon)}\right| \le \{\, \delta \left(1 + T^2\right) + \varepsilon \left(2/S + 2h^2 QN/S_0\right) + \\
+2h^2 \sum_{m=1}^{i} \sum_{l=1}^{m} \left(b_l^2 j^2 - q_l\right) \times \left(\tilde{W}_l^{1-l+2m} - \tilde{W}_l^{(\varepsilon)1-l+2m}\right) + 2ThSG(\bar{V} + \bar{V}\bar{S}) + \\
+2h^2(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_i^{(\varepsilon)}) \times \sum_{m=1}^{i} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{V_l^{2-l+2m} + 2V_l^{1-l+2m} + V_l^{2l+2m}}{h^2} \right) - \\
-(1/2) \times h(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_i^{(\varepsilon)}) \times \sum_{l=0}^{i} K_{il} \,\} \times [\, \frac{1}{2} + K_{i+1,i+1} h + 2(V_{i+1}^{2+i} - 2V_{i+1}^{1+i} + V_{i+1}^{i}) \,] + O(h).
\end{gathered} \tag{34}$$

Используя оценку (25), получим

$$\begin{gathered}
\max_{l=\overline{0,N}} \left\{ \left|\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_i^{(\varepsilon)}\right|, \max_{k=\overline{i,2N-i}} \left|\tilde{W}_i^k - \tilde{W}_i^{(\varepsilon)k}\right| \right\} \le \{\, [\, \delta \left(1 + 2T\bar{V}h + 8Th(\bar{V} + \bar{V}\bar{S})\right) + \\
+ \frac{\varepsilon}{S_0} \left(4 + 2hTQ\right) \,] \times [1/2 + V + Kh] \,\} \times \\
\times \exp\left[8Th\left(B^2 j^2 + Q\right) + 4Th\bar{V} + Kh\right) \times (1/2 + 4V + Kh)\right].
\end{gathered} \tag{35}$$

Тогда, учитывая оценку (35), найдем

$$\left\|\tilde{\Omega}_{i,L}\left(y\right)-\tilde{\Omega}_{i,L}^{(\varepsilon)}\left(y\right)\right\|_{L_2(-D,D)}=\left\|\sum_{j=-L}^{L}\left|\tilde{\sigma}_i-\tilde{\sigma}_i^{(\varepsilon)}\right|Y_j\left(y\right)\right\|_{L_2(-D,D)}\leq$$

$$\leq\{\,[\,\delta\left(1+2T\bar{V}h+8Th(\bar{V}+\bar{V}\bar{S})\right)+\frac{\varepsilon}{S_0}\left(4+2hTQ\right)\,]\times[1/2+V+Kh]\}\times$$

$$\times\exp\left[\left(ThQ+4Th\overline{V}+Kh\right)\left(1/2+4V+Kh\right)\right]\times$$

$$\times\sum_{j=-L}^{L}\left[\exp[8Th\left(B^2j^2\right)]\times\left(1/2+4V+Kh\right)\right]. \tag{36}$$

Из оценок (36) и (27) имеем утверждение теоремы.

Как видно из оценки (32), решение зависит от L – количества коэффициентов Фурье и автором экспериментально установлено, что численные расчеты наиболее эффективны при L, меняющемся от -7 до 7.

По вышеизложенному алгоритму проведены численные реализации и результаты получены в виде графиков (см. рисунки).

Цитированная литература

1. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. М., 1984.

2. **Благовещенский А.С.** //Тр. Ленингр. ун-та. 1966. Вып.1. С.68-81.

3. **Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.** Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск, 1982.

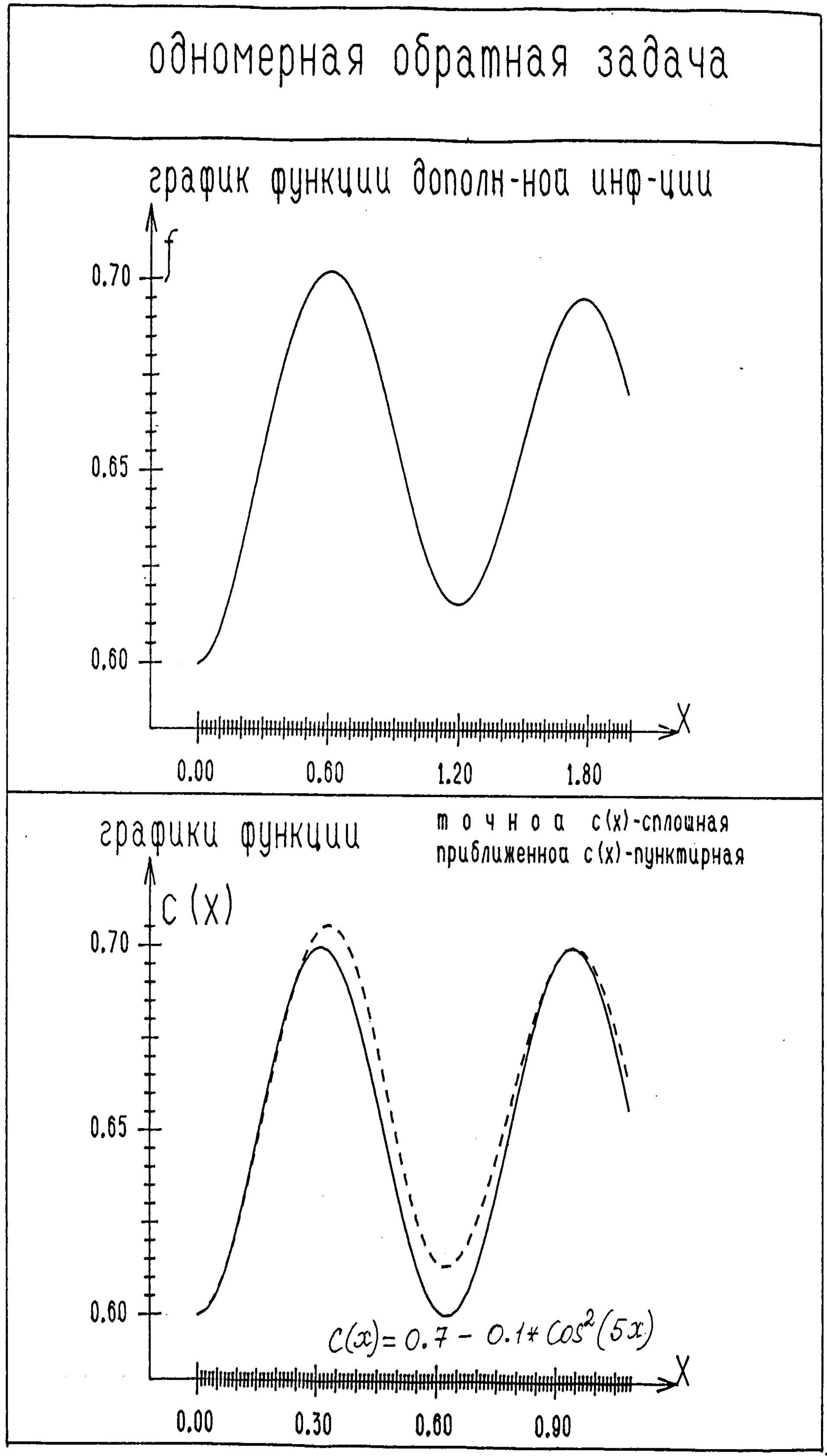
4. **Мельникова Т.В.** // Обратные задачи математической физики. Новосиб., 1985. С. 97-104.

5. **Кабанихин С.И.** Обратная задача для уравнения акустики (Определение плотности среды). Препринт N426. Новосибирск, ВЦ СОАН СССР. 1980. 16 с.

6. **Сатыбаев А.Дж.** //Наука. Образование. Техника. /Международный научный журнал. 2000. N2 (4), Ош, 2000. С.101-104.

7. **Кабанихин С.И.** Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск, 1988.

Поступила в редакцию 05.04.2004 г.



одномерная обратная задача
график функции дополн-ноа инф-ции
f
0.70
0.65
0.60
X
0.00
0.60
1.20
1.80
графики функции
т о ч н о а с(x)-сплошная
приближенноа с(x)-пунктирная
c (x)
0.70
0.65
0.60
C(x)= 0.7 - 0.1* Cos^2(5x)
X
0.00
0.30
0.60
0.90

Рис. 1.

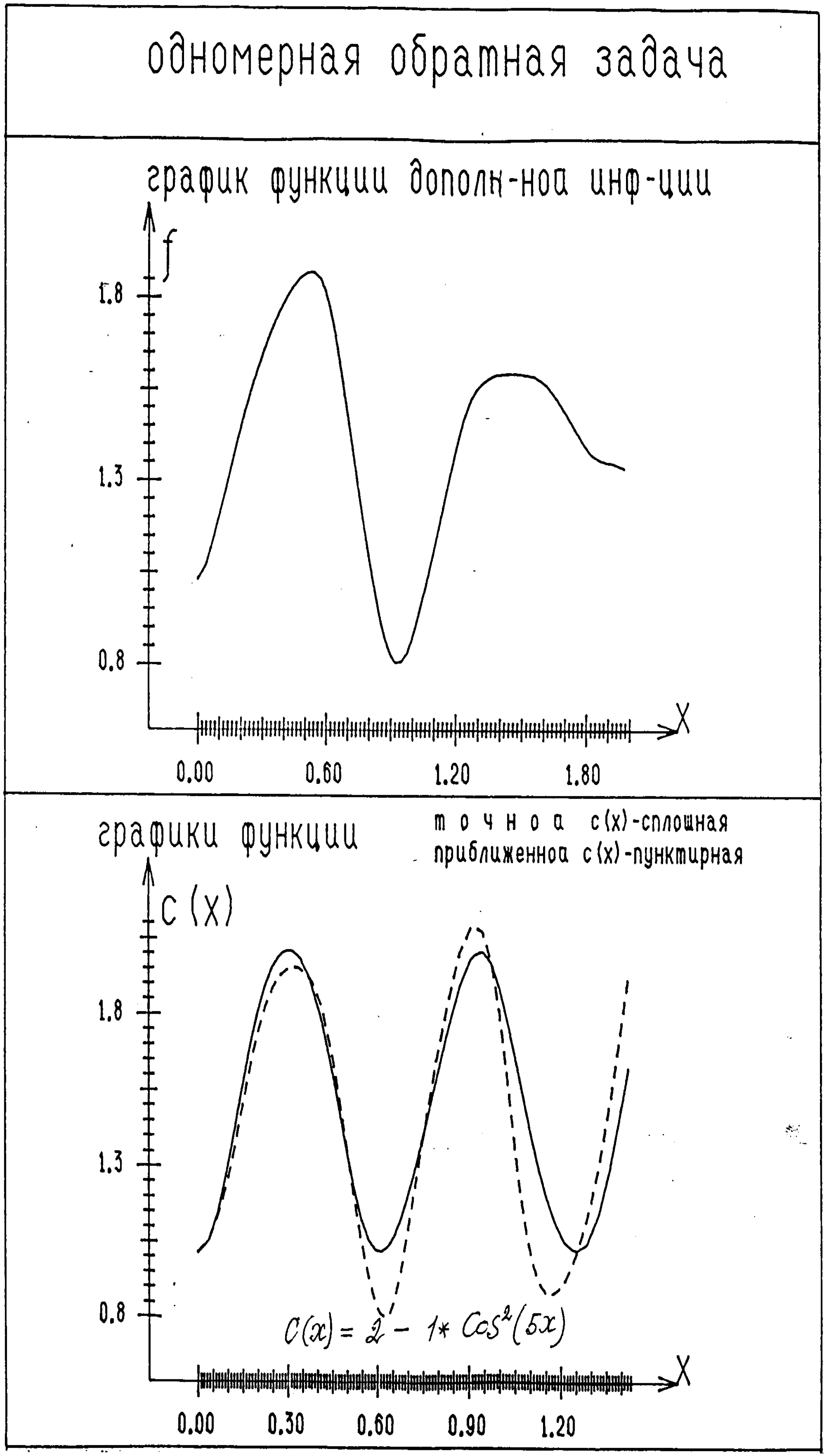

одномерная обратная задача
график функции дополн-ноа инф-ции
f
1.8
1.3
0.8
X
0.00
0.60
1.20
1.80
графики функции
точноа c(x)-сплошная
приближенноа c(x)-пунктирная
c (x)
1.8
1.3
0.8
C(x) = 2 - 1* Cos²(5x)
X
0.00
0.30
0.60
0.90
1.20

Рис. 2.

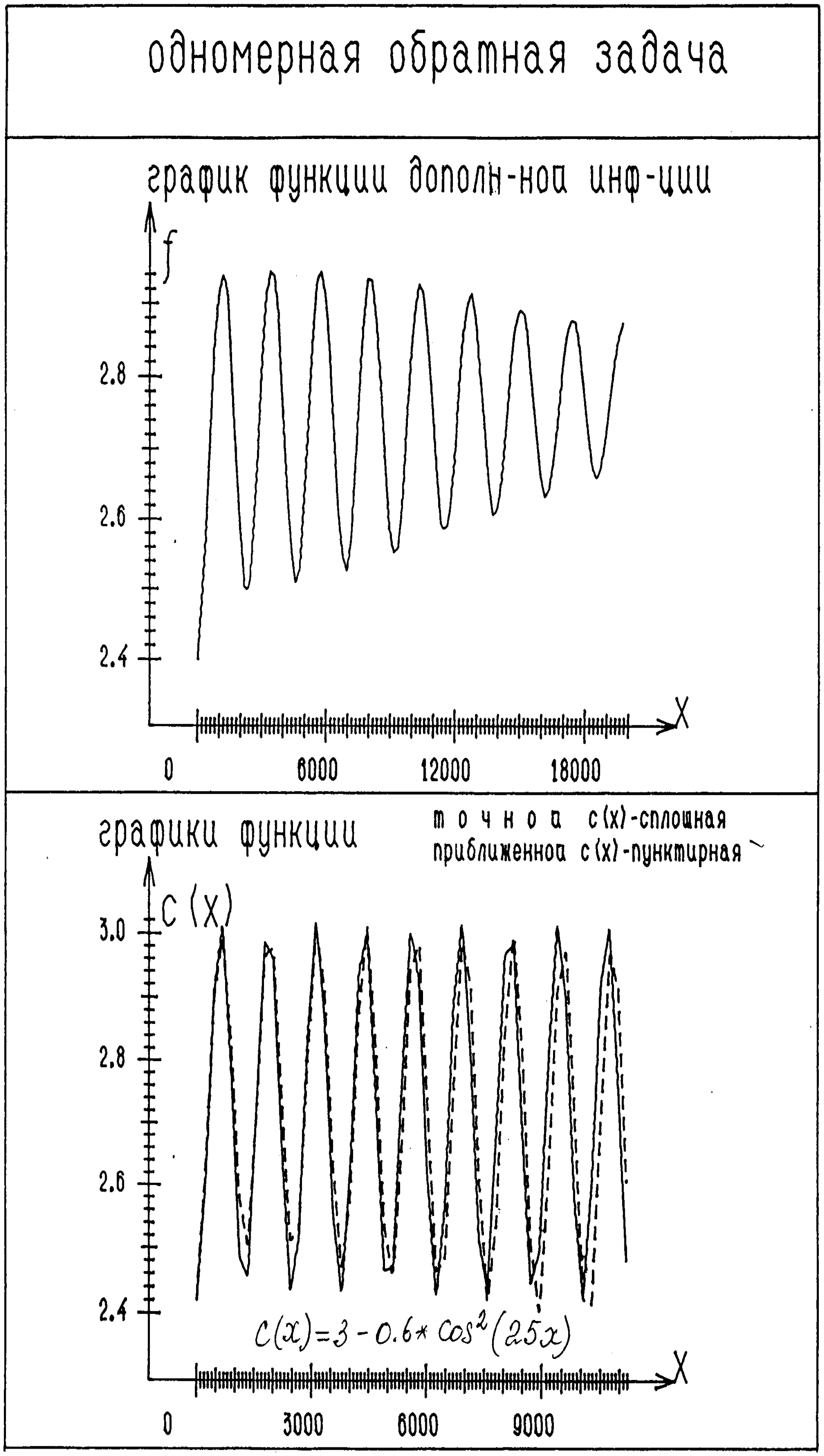
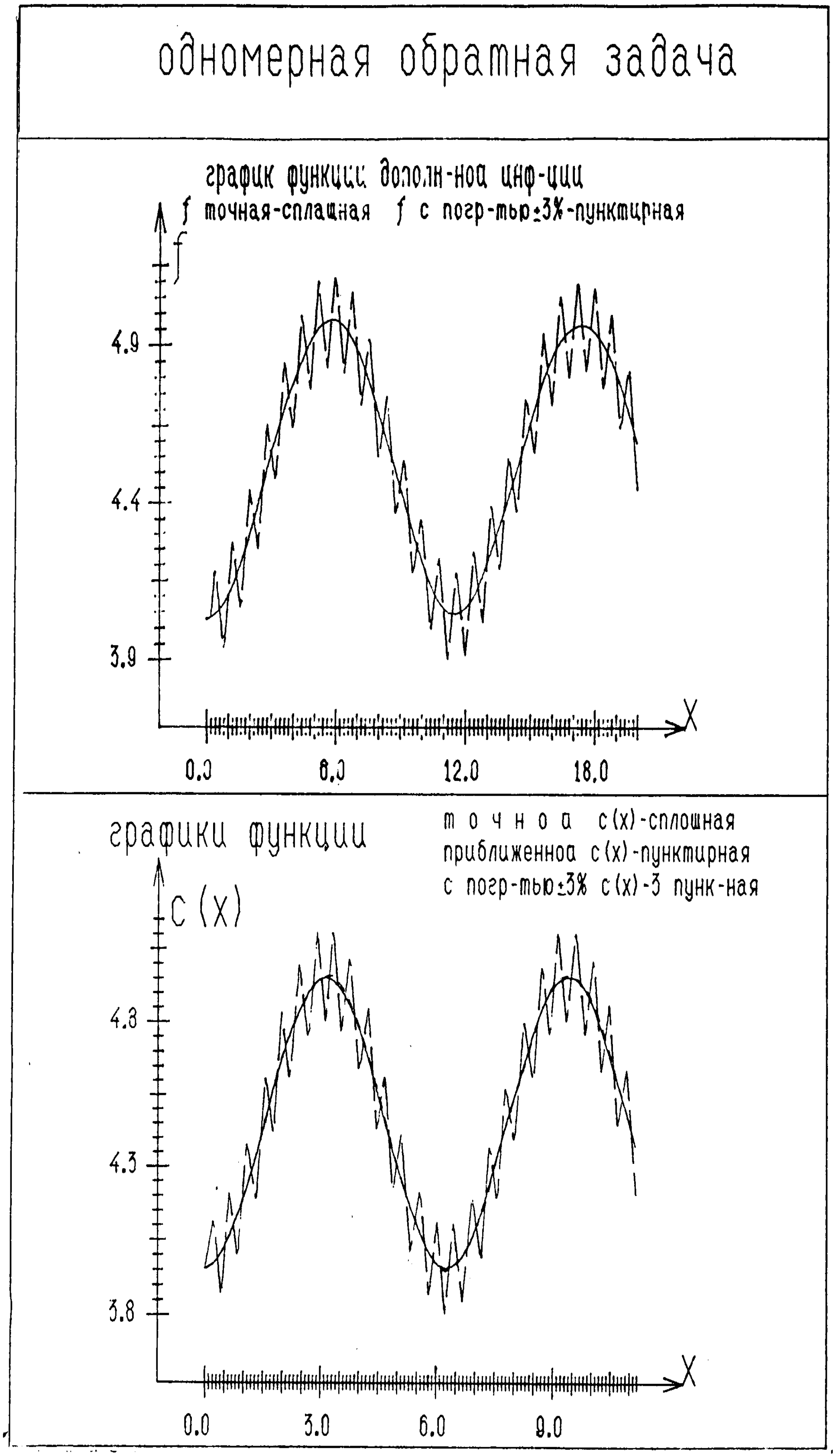

одномерная обратная задача
график функции дополн-ной инф-ции
f
2.8
2.6
2.4
X
0
6000
12000
18000
графики функции
точное c(x)-сплошная
приближенное c(x)-пунктирная
c (x)
3.0
2.8
2.6
2.4
c(x)=3 - 0.6* cos²(25x)
X
0
3000
6000
9000

Рис. 3.



одномерная обратная задача
график функции дополн-ноа инф-ции
f точная-сплашная f с погр-тью±3%-пунктирная
f
4.9
4.4
3.9
X
0.0
6.0
12.0
18.0
графики функции
точноа c(x)-сплошная
приближенноа c(x)-пунктирная
с погр-тью±3% c(x)-3 пунк-ная
C (X)
4.8
4.3
3.8
X
0.0
3.0
6.0
9.0

Рис. 4.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С. 112 – 117*

УДК 517.925.5:519.216

О РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МЕТОДОМ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ В СОЧЕТАНИИ С МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ

М. И. Тлеубергенов

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина,125 marat207@math.kz

Рассматриваются три постановки задачи восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, не зависящим от скоростей, когда управление входит в: 1) в коэффициент сноса, 2) в коэффициент диффузии, и 3) как в коэффициент сноса, так и в коэффициент диффузии. В этих задачах определяется множество управляющих параметров, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В в е д е н и е. В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2–4]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в работе [4]. В работах [5–7] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, в основе которого лежит

Л е м м а 1 [4, с.12–13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n},\ m \le n, \tag{1}$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$v = sv^{\tau} + v^{\nu}. \tag{2}$$

Keywords: *inverse problem, stochastic differential equation, integral manifold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

Здесь s — произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k — единичные орты пространства R^n, $v^\tau = (v_k^\tau)$, где

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \; v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T — матрица, транспонированная к H.

1. Стохастическая задача восстановления с управлением по сносу. Рассматривается задача построения стохастического дифференциального уравнения второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения.

Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \text{ где } \quad \lambda = \lambda(x, t) \in C_{xt}^{11}. \tag{3}$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + D(x, \dot{x}, t)u + \sigma(x, \dot{x}, t)\xi \tag{4}$$

так, чтобы множество (3) было интегральным многообразием уравнения (4).

Здесь $x \in R^n, \xi \in R^k, \lambda \in R^m$, а σ — матрица размерности $(n \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ — система независимых винеровских процессов [7], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P). Вектор-функция $f(x, \dot{x}, t)$ и матрицы $D(x, \dot{x}, t), \sigma(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ предполагаются непрерывными по t и липшицевыми по x и $\dot{x}$ в области

$$U_H(\Lambda) = \left\{ y = (x^T, \dot{x}^T)^T : \rho(y, \Lambda(t)) < H, \; H > 0 \right\}, \tag{5}$$

что обеспечивает в (5) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, \dot{x}(t)^T)^T$ уравнения (4) с начальным условием $(x(t_0)^T, \dot{x}(t_0)^T)^T = (x_0^T, \dot{x}_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [8].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2–4], а случай $\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \lambda \in C_{x\dot{x}t}^{121}$ исследован в [7].

Для решения стохастической задачи восстановления, следуя методу разделения [4], искомую вектор-функцию $u(x, \dot{x}, t)$, предварительно представим в виде $u = (u_1^T, u_2^T)^T$, где $u_1 \in R^l, u_2 \in R^k, l + k = n, x = (y^T, z^T)^T$, и тогда уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$\begin{cases} \ddot{y} = f_1(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t) + D_1(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t)u_1 + \sigma_{1y}(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t)\dot{\xi}, \\ \ddot{z} = f_2(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t) + D_2(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t)u_2 + \sigma_{2z}(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t)\dot{\xi} \end{cases} \tag{6}$$

и далее при произвольных, но заданных u_1, σ_{1y} строятся множества вектор-функций u_2 и функциональных матриц σ_{2y}.

Таким образом, пусть $u_1(x,\dot{x},t)$ и σ_{1y} — произвольно заданные соответственно l-мерная вектор-функция и матрица размерности $([n-(l+1)]\times r)$.

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [8] в силу (2) составляется уравнение возмущенного движения

$$\begin{gathered}\ddot{\lambda} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot{y} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot{z} + (\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot{y} + (\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y})\dot{z} + \\ + \frac{\partial\lambda}{\partial y}(f_1 + D_1u_1 + \sigma_{1y}\dot{\xi}) + \frac{\partial\lambda}{\partial z}(f_2 + D_2u_2 + \sigma_{2z}\dot{\xi}).\end{gathered} \tag{7}$$

Введем произвольные функции Н.П. Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A_4 и $(m\times\times k)$ — матрицу B_4, обладающие свойством $A_4(0,y,z,\dot{y},\dot{z},u,\dot{u},t)\equiv 0, B_4(0,y,z,\dot{y},\dot{z},u,\dot{u},t)\equiv 0$, такие, что имеет место

$$\ddot{\lambda} = A_4(\lambda,y,z,\dot{y},\dot{z},u,\dot{u},t) + B_4(\lambda,y,z,\dot{y},\dot{z},u,\dot{u},t)\dot{\xi}. \tag{8}$$

На основе уравнений (7) и (8) приходим к соотношениям

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\sigma_{1y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_{2z} = B_4, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z}D_2u_2 = A_4 - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot{y} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot{z} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \\ + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot{y} - (\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y})\dot{z} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}(f_1 + D_1u_1) - \frac{\partial\lambda}{\partial z}f_2,\end{array}\right. \tag{9}$$

из которых нужно определить вектор-функцию u_2 и матрицу σ_{2z}.

Обозначим $\tilde{B} = B_4 - \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\sigma_{1y}, \quad \tilde{D} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}D_2$ и из соотношений (6) по лемме 1 определим искомые вектор-функцию u_2 и матрицуσ_{2z} в виде

$$u_2 = s_1\left[\tilde{D}C\right] + \left(\tilde{D}\right)^+ b_{4,} \tag{10}$$

$$\sigma_{i2z} = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^+ \tilde{B}_i, \tag{11}$$

где $b_4 = A_4 - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot{y} - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot{z} - (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot{y} - (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y})\dot{z} - $
$- \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}f_2 - \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}(f_1 + D_1u_1),$

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z}C\right] = \left|\begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_n \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\lambda_1}{\partial z_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\lambda_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\lambda_m}{\partial z_k} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1} & \dots & c_{k-1,k}\end{array}\right|,$$

$\sigma_{i2z} = (\sigma_{1i2z}, \sigma_{2i2z}, \dots, \sigma_{ni2z})^T - i$-ый столбец матрицы $\sigma_{2z} = (\sigma_{2\nu j})$ $(\nu = 1,\dots,n;\ j = = 1,\dots,k)$; $\tilde{B}_i = (\tilde{B}_{1i}, \tilde{B}_{2i}, \dots, \tilde{B}_{mi})^T - i$-ый столбец матрицы $\tilde{B} = (\tilde{B}_{\mu l})$ $(\mu = 1,\dots,m;\ l = 1,\dots,k)$.

Следовательно, если обозначить через K класс функций $\theta(x,\dot{x},t)$, непрерывных по t и липшицевых по x и $\dot{x}$, то справедлива

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (4) имело заданное интегральное многообразие (3), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция u_2 и матрица σ_{2z} (при произвольных $u_1 \in K$, $\sigma_{1y} \in K$) уравнения (6) имели соответственно вид (10) и (11).*

2. С т о х а с т и ч е с к а я з а д а ч а в о с с т а н о в л е н и я с у п р а в л е н и е м п о д и ф ф у з и и. Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \qquad \text{где} \quad \lambda = \lambda(x,t) \in C^{11}_{xt}. \tag{12}$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = N(x, \dot{x}, t) + W(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \tag{13}$$

так, чтобы множество (12) было интегральным многообразием уравнения (13).

Следуя методу разделения [4], искомую вектор-функцию $N(x, \dot{x}, t)$ предварительно представим в виде $N = (N_1^T, N_2^T)^T$, где $N_1 \in R^l$, $N_2 \in R^k$, $l + k = n$, $x = (y^T, z^T)^T$,

$$\begin{cases} \ddot{y} = N_1(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t) + W_{1y}(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t)\dot{\xi}, \\ \ddot{z} = N_2(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t) + W_{2z}(y, z, \dot{y}, \dot{z}, t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{14}$$

и при произвольных, но заданных N_1, W_{1y} построим множества вектор-функций N_2 и функциональных матриц W_{2z}.

Таким образом, пусть $N_1(x, \dot{x}, t)$ и W_{1y} — произвольно заданные соответственно l-мерная вектор-функция и матрица размерности $([n - (l + 1)] \times r)$.

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [8] в силу (13) составляется уравнение возмущенного движения

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = {} & \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot{y} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot{z} + (\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot{y} + (\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y})\dot{z} + \\ & + \frac{\partial\lambda}{\partial y}(N_1 + W_{1y}\dot{\xi}) + \frac{\partial\lambda}{\partial z}(N_2 + W_{2z}\dot{\xi}). \end{aligned} \tag{15}$$

Введем произвольные функции Н.П. Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A_5 и $(m \times k)$ – матрицу B_5, $A_5(0, y, z, \dot{y}, \dot{z}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$, $B_5(0, y, z, \dot{y}, \dot{z}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$ такие, что имеет место равенство

$$\ddot{\lambda} = A_5(\lambda, y, z, \dot{y}, \dot{z}, u, \dot{u}, t) + B_5(\lambda, y, z, \dot{y}, \dot{z}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi}. \tag{16}$$

На основе уравнений (15) и (16) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}W_2 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}W_1 = B_5, \qquad A_5 = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot{z} + (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot{y} + (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y} + \\ + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t})\dot{z} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}N_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}N_2, \end{cases} \tag{17}$$

из которых нужно определить вектор-функцию N_2 и матрицу W_{2z}.

Обозначив $\tilde{B}_5 = B_5 - \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}W_1$ и используя метод квазиобращения, из соотношений (17) определим искомые вектор-функцию N_2 и матрицу W_{2z} в виде

$$N_2 = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^+ b_5, \tag{18}$$

$$W_{i2z} = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^+ \tilde{B}_{5i}, \tag{19}$$

где $b_5 = A_5 - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot y - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot z - (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot y - (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y})\dot z - \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}N_1$, $W_{i2z} = (W_{1i2z}, W_{2i2z}, \ldots, W_{ni2z})^T - i-$ый столбец матрицы $W_{2z} = (W_{2\nu j}), (\nu = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k)$; $\tilde B_{5i} = (\tilde B_{51i}, \tilde B_{52i}, \ldots, \tilde B_{5mi})^T - i-$ый столбец матрицы $\tilde B_5 = (\tilde B_{5\mu l}), (\mu = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, k)$.

Следовательно, если воспользоваться введенным выше обозначением K-класса непрерывных по t и липшицевых по x и $\dot x$ функций, то справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (13) имело заданное интегральное многообразие (12), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция N_2 и матрица W_{2z} (при произвольных $N_1 \in K, W_{1y} \in K$) уравнения (14) имели соответственно вид (18) и (19).*

3. Стохастическая задача восстановления с управлениями по сносу и диффузии. Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \qquad \text{где} \quad \lambda = \lambda(x,t) \in C^{11}_{xt}. \tag{20}$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot x = f(x, \dot x, t) + D(x, \dot x, t)u + V(x, \dot x, t)\dot\xi \tag{21}$$

так, чтобы множество (20) было интегральным многообразием уравнения (21).

Указанная задача в случае $\Lambda(t) : \lambda(x, \dot x, t) = 0, \quad \lambda \in C^{121}_{x\dot x t}$ исследована в [7].

Для решения стохастической задачи восстановления, следуя методу разделения [4], искомое управление $u(x, \dot x, t)$ предварительно представим в виде $u = (u_1^T, u_2^T)^T$, где $u_1 \in R^l$, $u_2 \in R^k$, $l + k = n$, $x = (y^T, z^T)^T$,

$$\begin{cases} \ddot y = f_1(y, z, \dot y, \dot z, t) + D_1(y, z, \dot y, \dot z, t)u_1 + V_{1y}(y, z, \dot y, \dot z, t)\dot\xi, \\ \ddot z = f_2(y, z, \dot y, \dot z, t) + D_2(y, z, \dot y, \dot z, t)u_2 + V_{2z}(y, z, \dot y, \dot z, t)\dot\xi \end{cases} \tag{22}$$

и по произвольным, но заданным u_1, V_{1y} определим множества вектор-функций u_2 и функциональных матриц V_{2y}.

Таким образом, пусть $u_1(x, \dot x, t)$ и V_{1y} — произвольно заданные соответственно вектор-функция размерности l и матрица размерности $([n - (l+1)] \times r)$.

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [8] в силу (22) составляется уравнение возмущенного движения

$$\begin{aligned} \ddot\lambda &= \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot y + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot z + (\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot y + (\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y})\dot z + \\ &+ \frac{\partial\lambda}{\partial y}(f_1 + D_1u_1 + V_{1y}\dot\xi) + \frac{\partial\lambda}{\partial z}(f_2 + D_2u_2 + V_{2z}\dot\xi). \end{aligned} \tag{23}$$

Введем произвольные функции Н.П. Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A_6 и $(m \times k)$ – матрицу B_6, обладающие свойством $A_6(0, y, z, \dot y, \dot z, u, \dot u, t) \equiv 0$, $B_6(0, y, z, \dot y, \dot z, u, \dot u, t) \equiv 0$, и такие, что имеет место равенство

$$\ddot\lambda = A_6(\lambda, y, z, \dot y, \dot z, u, \dot u, t) + B_6(\lambda, y, z, \dot y, \dot z, u, \dot u, t)\dot\xi. \tag{24}$$

На основе уравнений (23) и (24) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}V_{2z} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}V_{1y} = B_6, \qquad A_6 = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}\dot y + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial z}\dot z + (\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z})\dot y + \\ +(\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t})\dot z + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}(f_1 + D_1u_1) + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}(f_2 + D_2u_2), \end{cases} \tag{25}$$

из которых определим управление $u_2(x, \dot{x}, t)$ и матрицу V_{2z}.

Обозначим $\widehat{D} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} D_2$ и на основе метода квазиобращения из соотношений (25) определим искомые вектор-функцию u_2 и матрицу V_{2z} в виде

$$u_2 = s_1 \left[\widehat{D} C \right] + \left(\hat{D} \right)^+ b_6, \tag{26}$$

$$V_{i2z} = s_2 \left[\frac{\partial \lambda}{\partial z} C \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^+ (B_{6i} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} V_{1y}), \tag{27}$$

где $b_6 = A_6 - \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial y} \dot{y} - \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial z} \dot{z} - (\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial t} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z}) \dot{y} - (\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial t} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial y}) \dot{z} -$ $- \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 - \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} (f_1 + D_1 u_1)$, $V_{i2z} = (V_{1i2z}, V_{2i2z}, \ldots, V_{ni2z})^T$ — i-ый столбец матрицы $V_{2z} = (V_{2z\nu j})$ $(\nu = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k)$; $B_{6i} = (B_{61i}, B_{62i}, \ldots, B_{6mi})^T$ — i-ый столбец матрицы $B_6 = (B_{6\mu l})$ $(\mu = 1, \ldots, m; l = 1, \ldots, k)$.

Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 3. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (21) имело заданное интегральное многообразие (20), необходимо, и достаточно, чтобы вектор-функция u_2 и матрица V_{2z} (при произвольных $u_1 \in K, V_{1y} \in K$) уравнения (22) имели соответственно вид (26) и (27).*

З а к л ю ч е н и е. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости трех постановок задач восстановления при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов. Теоремы 1–3, доказанные с использованием методов квазиобращения и разделения, являются вариантами распространения на класс стохастических дифференциальных уравнений одного утверждения Р.Г. Мухарлямова в классе ОДУ [4]. В рассматриваемых постановках в отличие от ранее исследованной автором в [7] стохастической задачи восстановления предполагается, что заданное интегральное многообразие не зависит от вектора скоростей $\dot{x}$.

Цитированная литература

1. **Еругин Н. П.** //ПММ. 1952. Т.10, вып.16. С.659–670.

2. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.** Построение систем программного движения. М., 1971.

3. **Галиуллин А. С.** Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.

4. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М., 1986.

5. **Тлеубергенов М. И.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". М., 1999. №1. С.48–51.

6. **Тлеубергенов М. И.** //Доклады МН–АН РК. 1999. №1. С.53–60.

7. **Тлеубергенов М. И.** //Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т.37, № 5. С.714–716.

8. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила в редакцию 31.10.2004г.

M.I.Tleubergenov. **On a solution of stochastic problem of restoration with the help of quasi-inverse method in combination with the separation method**//Mathematical journal. № . 2005. P - .

There are considered three statements of restoration problem in the class of stochastic differential Ito equations of second order by given motion properties, independent on velocities, when the control is contained: 1) in the coefficient of drift, 2) in the coefficient of diffusion and 3) as in the coefficient of drift, as in the coefficient of diffusion. The set of control parameters, ensuring the necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold is defined in these problems.

М.Ы.Тілеубергенов. **Бөліктеу әдісімен түістірілген квазикерілеу әдісі арқылы стохастикалық қалпына келтіру есебін шешу туралы**//Математикалық журнал. № . 2005. Р - .

1) Көшіру коэффициентіне, 2) диффузия коэффициентіне, 3) көшіру және диффузия коэффициентеріне баскару кіретін кездерде берілген қасиеттері бойынша жылдамдықтардан тәуелсіз Ито типтес екінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында үш қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бул есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін басқару параметрлердің түрі анықталады.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15). С.118 — 127*

УДК 519.624

АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р. Е. Утешова

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова
463000 Актобе ул. бр. Жубановых, 263 ruteshova@yandex.ru

Исследуются вопросы нахождения решения сингулярной краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с предельно (при $t \to \mp\infty$) нулевой матрицей. Построены регулярные двухточечные краевые задачи, позволяющие найти приближенное решение рассматриваемой задачи и дана оценка допускаемой при этом погрешности. Установлена взаимосвязь между корректными разрешимостями исходной задачи и аппроксимирующих ее двухточечных краевых задач.

Вопросы, связанные с существованием и построением приближенных методов нахождения ограниченного решения обыкновенного дифференциального уравнения, рассмотрены многими авторами [1-8]. В [9] для линейного уравнения с предельно постоянными матрицей и правой частью (методом параметризации) исследованы вопросы существования, единственности ограниченного на всей оси решения и его аппроксимации решениями двухточечных краевых задач на конечном интервале. В предположении, что действительные части собственных значений предельных матриц отличны от нуля, построены двухточечные краевые задачи, позволяющие с заданной точностью определить сужение ограниченного решения на конечный интервал. Установлена взаимосвязь между корректными разрешимостями исходной и аппроксимирующей задач.

В настоящей работе на $R = (-\infty, \infty)$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x \in R^n, \qquad \|x\| = \max_j |x_j| \tag{1}$$

с непрерывной на R матрицей $A(t)$, удовлетворяющей условию $\|A(t)\| \equiv \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}(t)| \leq$ $\leq \alpha(t)$, где непрерывная и положительная на R функция $\alpha(t)$ обладает свойствами

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \alpha(t)dt = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = 0, \qquad \int\limits_{0}^{\infty} \alpha(t)dt = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0. \tag{2}$$

Keywords: *linear differential equation, singular boundary value problem,approximation, correct solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

Известно, что при предположении (2) уравнение (1) имеет ограниченное решение не для всякой непрерывной и ограниченной на R функции $f(t)$. По этой причине в [9] были исследованы вопросы существования и единственности ограниченного на R решения уравнения (1) для непрерывных и ограниченных на R с весом функций $f(t)$.

Пусть $\widetilde{C}(R,R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных на R функций $x : R \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\in R}\|x(t)\|$ и $\widetilde{C}_{1/\alpha}(R,R^n)$ – пространство непрерывных, ограниченных с весом $1/\alpha(t)$ функций $f : R \to R^n$ с нормой $\|f\|_\alpha = \sup\limits_{t\in R}\|f(t)/\alpha(t)\|$.

З а д а ч е й 1_α назовем задачу нахождения ограниченного на R решения уравнения (1), когда правая часть $f(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{C}_{1/\alpha}(R,R^n)$.

Задача 1_α называется корректно разрешимой с константой K, если для любой функции $f(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}(R,R^n)$ она имеет единственное решение $x(t) \in \widetilde{C}(R,R^n)$ и справедливо неравенство $\|x\|_1 \le K\|f\|_\alpha$, где K – константа, независящая от $f(t)$.

В работе [10] задача 1_α исследована методом параметризации [9] с неравномерным шагом разбиения. По числу $\theta > 0$ производится разбиение $R = \bigcup\limits_{s=-\infty}^{\infty}[t_{s-1},t_s)$, где точки $t_s \in R$, $s \in Z$, определяются из соотношений: $t_0 = 0$, $\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(t)dt = \theta$ и двусторонне-бесконечная последовательность положительных чисел $h_s(\theta) = t_s - t_{s-1}$, $s \in Z$, обозначается через $\widetilde{h}(\theta)$, т.е. $\widetilde{h}(\theta) = (\ldots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \ldots)$.

Используются следующие пространства:

m_n – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda_s \in R^n$ с нормой

$$\|\lambda\|_2 = \|(\ldots,\lambda_s,\lambda_{s+1},\ldots)\|_2 = \sup_s\|\lambda_s\|, \quad s \in Z;$$

$L(m_n)$ – – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих m_n в себя, с индуцированной нормой;

$m_n(\widetilde{h}(\theta))$ – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных и ограниченных на $[t_{s-1},t_s)$ функций $x_s(t)$ с нормой

$$\|x[t]\|_3 = \|(\ldots,x_s(t),x_{s+1}(t),\ldots\|_3 = \sup_s \sup_{t\in[t_{s-1},t_s)}\|x_s(t)\|, \quad s \in Z.$$

В [10] получены необходимые и достаточные признаки корректной разрешимости задачи 1_α в терминах двусторонне-бесконечной блочно-ленточной матрицы $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)} : m_n \to m_n$, имеющей вид

$$Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)} = \begin{Vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & I + D_{\nu,s}(h_s(\theta)) & -I & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & I + D_{\nu,s+1}(h_{s+1}(\theta)) & -I & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix},$$

где $D_{\nu,s}(h_s(\theta)) = \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}A(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}A(\tau_1)\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_1}A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1$, $s \in Z$, I – единичная матрица порядка n.

Для нахождения приближенного решения задачи 1_α ставится

З а д а ч а 2_α**.** По заданному $\varepsilon > 0$ требуется определить числа $T_1 > 0, T_2 > 0$, вещественные $(n \times n)$– матрицы B, C, n-вектор d, при которых $x_{T_1,T_2}(t)$ – решение двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (-T_1,T_2), \quad x \in R^n, \tag{3}$$

$$Bx(-T_1) + Cx(T_2) = d \tag{4}$$

удовлетворяет неравенству

$$\max_{t\in[-T_1,T_2]} ||x_{T_1,T_2}(t) - x^*(t)|| < \varepsilon,$$

где $x^*(t)$ – решение задачи 1_α.

Задачу 2_α рассмотрим в следующих предположениях.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\mp\infty} A(t)/\alpha(t) = A_{(\mp)}, \qquad Re\xi_j^{\mp} \neq 0,$$

где $\xi_j^{\mp}$ – собственные значения матриц $A_{(\mp)}, j = 1, 2, \ldots, n.$

П р е д п о л о ж е н и е 2. Справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\mp\infty} f(t)/\alpha(t) = f_{(\mp)}.$$

Тогда функции

$$\delta_1^-(T) = \sup_{t\in(-\infty,-T]} \left\| A(t)/\alpha(t) - A_{(-)} \right\|, \qquad \delta_1^+(T) = \sup_{t\in[T,\infty)} \left\| A(t)/\alpha(t) - A_{(+)} \right\|,$$

$$\delta_2^-(T) = \sup_{t\in(-\infty,-T]} \left\| f(t)/\alpha(t) - f_{(-)} \right\|, \qquad \delta_2^+(T) = \sup_{t\in[T,\infty)} \left\| f(t)/\alpha(t) - f_{(+)} \right\|$$

удовлетворяют условию $\delta_r^{\mp}(T) \to 0$ при $T \to \infty, r = 1, 2.$

Существуют вещественные неособые $(n\times n)-$ матрицы $S_{(\mp)}$, приводящие предельные матрицы $A_{(\mp)}$ к обобщенно-жордановой форме

$$\widetilde{A}_{(\mp)} = S_{(\mp)} A_{(\mp)} S_{(\mp)}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}^{\mp} & 0 \\ 0 & A_{22}^{\mp} \end{array} \right\|, \tag{5}$$

где $A_{11}^{\mp}$ и $A_{22}^{\mp}$ состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матриц $A_{(\mp)}$ с отрицательными и положительными действительными частями, число которых обозначим, соответственно, $n_1^{\mp}$ и $n_2^{\mp}$. Составим $(n \times n)-$ матрицы

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cc} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \qquad P_2 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{array} \right\|,$$

где I_{n_r} – единичные матрицы размерности $n_r, r = 1, 2.$

Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между корректными разрешимостями задачи 1_α и двухточечной краевой задачи. Для доказательства используем идею доказательства теоремы 5 из [9].

Т е о р е м а 1. *В предположении 1 задача* 1_α *корректно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) $n_1^- = n_1^+ = n_1, \quad n_2^- = n_2^+ = n_2,$

б) существуют положительные числа T_0^1, T_0^2 *такие, что для любых* $T_1 > T_0^1, T_2 > T_0^2$ *двухточечная краевая задача (3), (4), где* $B = -P_1S_{(-)}, C = P_2S_{(+)},$ *корректно разрешима с независящей от* T_1, T_2 *константой* K_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть выполнено предположение 1 и задача 1_α корректно разрешима. Тогда по теореме 3 из [10] для некоторого $\theta_0 > 0$ матрица $Q_{1,\widetilde{h}(\theta)} : m_n \to m_n$ обратима при всех $\theta \in (0, \theta_0]$ и справедлива оценка $\|Q^{-1}_{1,\widetilde{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \leq \gamma/\theta,$ где $\gamma - const,$ независящая от $\widetilde{h}(\theta).$

При фиксированном $\theta > 0$ числа T_1, T_2 определим равенствами $t_{-N_1} = -T_1$, $t_{N_2} = T_2$. В матрице $Q_{1,\widetilde{h}(\theta)}$ заменив $A(t)$ на $\alpha(t)A_{(-)}$ в блочных строках с номерами $s = -N_1, -N_1-1, \dots$ и на $\alpha(t)A_{(+)}$ в блочных строках с номерами $s = N_2, N_2+1, \dots,$ получим матрицу Q_{θ,T_1,T_2}. Из предположения 1 следует, что $\|Q_{1,\widetilde{h}(\theta)} - Q_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \le \max\{\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2 - h_N(\theta))\}\theta$. Тогда по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов при выборе чисел $T_0^1 > 0, T_0^2 > 0$, удовлетворяющих неравенству $\gamma \max\{\delta_1^-(T_0^1), \delta_1^+(T_0^2 - h_N(\theta))\} \le 1/2$, получим обратимость матрицы $Q_{\theta,T_1,T_2} : m_n \to m_n$ для всех $T_1 \ge T_0^1, T_2 \ge T_0^2$ и оценку

$$\|Q^{-1}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \le \frac{\gamma_{T_1,T_2}}{\theta} \le \frac{2\gamma}{\theta},$$

где $\gamma_{T_1,T_2} = \dfrac{\gamma}{1 - \gamma \max\{\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2)\}} \to \gamma$ при $T_1 \to \infty, T_2 \to \infty$.

Составим двусторонне-бесконечную блочно-диагональную матрицу $D = diag(d_{ss})$, где $d_{ss} = S_{(-)}$ при $s = 0, -1, -2, \dots$ и $d_{ss} = S_{(+)}$ при $s = 1, 2, \dots$ Матрица $\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2} = DQ_{\theta,T_1,T_2}D^{-1}$ обратима и её обратная удовлетворяет оценке

$$\|\widetilde{Q}^{-1}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \le \|D^{-1}\|_{L(m_n)} \|Q^{-1}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \|D\|_{L(m_n)} \le \zeta_1 \gamma_{T_1,T_2} \zeta_2/\theta \tag{6}$$

с числами $\zeta_1 = \|D^{-1}\| = max(\|S^{-1}_{(-)}\|, \|S^{-1}_{(+)}\|)$, $\quad \zeta_2 = \|D\| = max(\|S_{(-)}\|, \|S_{(+)}\|)$. В матрице $\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}$ блочные строки с номерами $s : s \le -N_1, s \ge N_2$ имеют вид

$$\left\| \quad \dots \quad 0 \quad I + \left\| \begin{matrix} A_{11}^{\mp} & 0 \\ 0 & A_{22}^{\mp} \end{matrix} \right\| \theta \quad -I \quad 0 \quad \dots \quad \right\|.$$

В результате перестановки в матрице $\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}$ получим матрицу

$$M_{\theta,T_1,T_2} = \left\| \begin{matrix} M_{11}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22}(\theta) & M_{23}(\theta) & 0 & 0 \\ M_{31}(\theta) & 0 & M_{33}(\theta) & 0 & M_{35}(\theta) \\ 0 & 0 & M_{43}(\theta) & M_{44}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55}(\theta) \end{matrix} \right\|.$$

Односторонне-бесконечные матрицы $M_{kk}(\theta), k = 1, 2, 4, 5,$ имеют вид

$$M_{11}(\theta) = \left\| \begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I_{n_1^-} + A_{11}^-\theta & -I_{n_1^-} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & I_{n_1^-} + A_{11}^-\theta & -I_{n_1^-} \end{matrix} \right\|,$$

$$M_{22}(\theta) = \left\| \begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & I_{n_2^-} + A_{22}^-\theta & -I_{n_2^-} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & I_{n_2^-} + A_{22}^-\theta & -I_{n_2^-} \\ \dots & 0 & 0 & 0 & I_{n_2^-} + A_{22}^-\theta \end{matrix} \right\|,$$

$$M_{44}(\theta) = \left\| \begin{matrix} -I_{n_1^+} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ I_{n_1^+} + A_{11}^+\theta & -I_{n_1^+} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I_{n_1^+} + A_{11}^+\theta & -I_{n_1^+} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|,$$

$$M_{55}(\theta) = \left\| \begin{matrix} I_{n_2^+} + A_{22}^+\theta & -I_{n_2^+} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I_{n_2^+} + A_{22}^+\theta & -I_{n_2^+} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|.$$

Матрица $M_{33}(\theta)$ размерности $[(N_1+N_2-1)n+n_1^-+n_2^+]\times(N_1+N_2)n$ имеет вид

$$M_{33}(\theta)=\left\|\begin{array}{ccccccc} -P_1^{(-)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ I+\widetilde{A}_{-N_1+1}(\theta) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+\widetilde{A}_{N_2-1}(\theta) & -I & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_2^{(+)}(I+\widetilde{A}_{(+)}\theta) \end{array}\right\|,$$

где $P_1^{(-)}=(I_{n_1^-},0)$ – матрица размерности $n_1^-\times n$, а $P_2^{(+)}=(0,I_{n_2^+})$ – матрица размерности $n_2^+\times n$,

$$\widetilde{A}_p(\theta)=\begin{cases} S_{(-)}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}A(t)dtS_{(-)}^{-1}, & p=-N_1+1,-N_1+2,\dots,1,0, \\ S_{(+)}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}A(t)dtS_{(+)}^{-1}, & p=1,2,\dots,N_2-1; \end{cases}$$

в блочной строке матрицы $M_{33}(\theta)$, соответствующей номеру $p=0$, вместо $-I$ стоит матрица $-S_{(-)}S_{(+)}^{-1}$; 0 – нулевая матрица соответствующих размеров.

Внедиагональные ненулевые блоки матрицы M_{θ,T_1,T_2} удовлетворяют соотношениям

$$\|M_{31}(\theta)\|=\|I_{n_1^-}+A_{11}^-\theta\|,\quad \|M_{23}(\theta)\|=1,\quad \|M_{43}(\theta)\|=\|I_{n_1^+}+A_{11}^+\theta\|,\quad \|M_{35}(\theta)\|=1.$$

В силу обратимости матрицы $\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}$ матрица M_{θ,T_1,T_2} обратима и ей обратная удовлетворяет оценке

$$\|M_{\theta,T_1,T_2}^{-1}\|_{L(m_n)}=\|\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}^{-1}\|_{L(m_n)}\le\frac{\zeta_1\gamma_{T_1,T_2}\zeta_2}{\theta}=\frac{\widetilde{\gamma}_{T_1,T_2}}{\theta}. \tag{7}$$

По схеме работы [9] устанавливается обратимость матриц $M_{kk}(\theta),k=\overline{1,5}$, и выполнение оценок

$$\|[M_{kk}(\theta)]^{-1}\|\le[\max_{r=1,2}(\|S_{r,\mp}\|,\ \|S_{r,\mp}^{-1}\|)]^2\frac{2}{\xi\theta}=\frac{\beta}{\theta},\qquad k=1,2,4,5, \tag{8}$$

$$\|[M_{33}(\theta)]^{-1}\|\le\widetilde{\gamma}_{T_1,T_2}/\theta, \tag{9}$$

где $\xi=min\{|Re\xi_j^{\mp}|,j=1,2,\dots,n\}$, $S_{r,\mp}(r=1,2)$ – неособые матрицы размерности $n_r^{\mp}\times n_r^{\mp}$ с комплексными элементами, приводящие матрицы $A_{rr}^{\mp}$ к жордановой форме, где по диагонали стоят собственные значения матриц, а вне диагонали – числа $\xi/4$ или нули.

Из обратимости матрицы $M_{33}(\theta)$ размерности $\{[(N_1+N_2-1)n+n_1^-+n_2^+]\times(N_1+N_2)n\}$ следует, что $n_1^-+n_2^+=n$. Учитывая предположение 1, а именно: $n_1^-+n_2^-=n_1^++n_2^+=n$, получим, что $n_1^-=n_1^+=n_1,n_2^-=n_2^+=n_2$.

В результате перестановки в матрице $M_{33}(\theta)$ получим

$$N_{33}(\theta)=\left\|\begin{array}{ccccccc} -P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_2(I+\widetilde{A}_{(+)}\theta) \\ I+\widetilde{A}_{-N_1+1}(\theta) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I+\widetilde{A}_{N_2-1}(\theta) & -I \end{array}\right\|,$$

причем $N_{33}(\theta)$ обратима и из (9) следует оценка

$$\|[N_{33}(\theta)]^{-1}\|=\|[M_{33}(\theta)]^{-1}\|\le\widetilde{\gamma}_{T_1,T_2}/\theta\le2\widetilde{\gamma}/\theta.$$

Через D_{N_1,N_2} обозначим блочно-диагональную матрицу, состоящую из блоков D с номерами $s=-N_1,-N_1+1,\dots,N_2-2,N_2-1$. Умножив каждую блочную строку матрицы

$N_{33}(\theta)D_{N_1,N_2}$, кроме первой, слева соответственно на $S_{(-)}^{-1}$ или $S_{(+)}^{-1}$, получим матрицу $V_1(\theta)$. Так как

$$\|[V_1(\theta)]^{-1}\| \leq \zeta_1\zeta_2\|[N_{33}(\theta)]^{-1}\| \leq 2\widetilde{\gamma}\zeta_1\zeta_2/\theta = \gamma_1/\theta$$

и число γ_1 не зависит от T_1, T_2, то, используя теорему 4 из [11], можно показать, что двухточечная краевая задача (2),(3), где $B = -P_1S_{(-)}, C = P_2S_{(+)}$, при всех $T_1 \geq T_0^1, T_2 \geq T_0^2$ корректно разрешима с независящей от T_1, T_2 константой K_1.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия теоремы и $\widetilde{Q}_1(\theta)$ – матрица $N_{33}(\theta)$ с первой блочной строкой, умноженной на $\theta > 0$. Тогда по теореме 3 из [11] для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon) > 0$ такое,что при всех $\theta \in (0, \theta_1]$ матрица $\widetilde{Q}_1(\theta)$ обратима и

$$\|[\widetilde{Q}_1(\theta)]^{-1}\| \leq (1+\varepsilon)\zeta_1\zeta_2K_1/\theta = (1+\varepsilon)\widetilde{K}_1/\theta. \tag{10}$$

Из обратимости $\widetilde{Q}_1(\theta)$ следует обратимость матрицы $M_{33}(\theta)$. Учитывая ограниченную обратимость $M_{kk}(\theta), k = 1,2,4,5,$ и структуру матрицы M_{θ,T_1,T_2}, получим, что M_{θ,T_1,T_2} ограниченно обратима. Покажем, что для её обратной матрицы справедлива оценка

$$\|M_{\theta,T_1,T_2}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \widetilde{\gamma}/\theta, \tag{11}$$

где $\widetilde{\gamma}$ – постоянная, независящая от $\theta > 0$. С этой целью рассмотрим уравнение

$$M_{\theta,T_1,T_2}\mu = b, \qquad \mu, b \in m_n, \tag{12}$$

которое, исходя из представления $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)}, \mu^{(5)})$, $b = (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)}, b^{(5)})$, запишем в виде системы:

$$M_{11}(\theta)\mu^{(1)} = b^{(1)}, \tag{13.1}$$

$$M_{22}(\theta)\mu^{(2)} + M_{23}(\theta)\mu^{(3)} = b^{(2)}, \tag{13.2}$$

$$M_{31}(\theta)\mu^{(1)} + M_{33}(\theta)\mu^{(3)} + M_{35}(\theta)\mu^{(5)} = b^{(3)}, \tag{13.3}$$

$$M_{43}(\theta)\mu^{(3)} + M_{44}(\theta)\mu^{(4)} = b^{(4)}, \tag{13.4}$$

$$M_{55}(\theta)\mu^{(5)} = b^{(5)}. \tag{13.5}$$

Из ограниченной обратимости $M_{11}(\theta), M_{55}(\theta)$ и оценки (7) следует существование $\mu^{(1)} = [M_{11}(\theta)]^{-1}b^{(1)}$, $\mu^{(5)} = [M_{55}(\theta)]^{-1}b^{(5)}$ и

$$\|\mu^{(1)}\| \leq \frac{\beta}{\theta}\|b^{(1)}\|, \qquad \|\mu^{(5)}\| \leq \frac{\beta}{\theta}\|b^{(5)}\|. \tag{14}$$

В уравнении (13.2) первую (снизу) блочную строку, в (13.3) – первую (размерности n_1) и последнюю (размерности n_2) блочные строки, в (13.4) – первую (сверху) блочную строку умножим на $\theta > 0$. Преобразованные таким образом матрицы обозначим через $M_{22,\theta}$, $M_{23,\theta}$, $M_{31,\theta}$, $M_{33,\theta}$, $M_{35,\theta}$, $M_{43,\theta}$, $M_{44,\theta}$, векторы – через $b_\theta^{(2)}, b_\theta^{(3)}, b_\theta^{(4)}$, а уравнения – через (13.2), (13.3), (13.4). Подставив найденные $\mu^{(1)}, \mu^{(5)}$ в (13.3), определим $\mu^{(3)}$. Учитывая $\|M_{33,\theta}^{-1}\| = \|[\widetilde{Q}_1(\theta)]^{-1}\|$ и оценку (10), получим

$$\|\mu^{(3)}\| = \|M_{33,\theta}^{-1}\{b_\theta^{(3)} - M_{31,\theta}[M_{11}(\theta)]^{-1}b^{(1)} - M_{35,\theta}[M_{55}(\theta)]^{-1}b^{(5)}\}\| \leq$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)\widetilde{K}_1}{\theta}\left[\|b_\theta^{(3)}\| + (1+\alpha\xi\theta)\beta\|b^{(1)}\| + \beta\|b^{(5)}\|\right] \leq$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)\widetilde{K}_1}{\theta}[1 + (2+\alpha\xi\theta)\beta]\max_{k=1,3,5}\|b^{(k)}\|, \tag{15}$$

где $\zeta = [max(\zeta_1, \zeta_2)]^2$. Односторонне-бесконечные матрицы $M_{22,\theta}, M_{44,\theta}$ ограниченно обратимы, причем

$$\|M_{22,\theta}^{-1}\| \leq \beta\frac{\xi}{2}max\left(\frac{2}{\xi}, 1\right)\frac{1}{\theta}, \qquad \|M_{44,\theta}^{-1}\| \leq \beta\frac{\xi}{2}max\left(\frac{2}{\xi}, 1\right)\frac{1}{\theta}.$$

Подставив значение $\mu^{(3)}$ в (13,2), (13,4), найдем $\mu^{(2)}, \mu^{(4)}$ и получим оценки

$$\|\mu^{(2)}\| \leq \beta\frac{\xi}{2\theta}max\left(\frac{2}{\xi}, 1\right)(\|b_\theta^{(2)}\| + \theta\|\mu^{(3)}\|) \leq$$

$$\leq \beta\frac{\xi}{2\theta}max\left(\frac{2}{\xi}, 1\right)\{1 + (1+\varepsilon)\widetilde{K}_1[1 + (2 + \alpha\zeta\theta)\beta]\}\max_{k=1,2,3,5}\|b^{(k)}\|, \tag{16}$$

$$\|\mu^{(4)}\| \leq \beta\frac{\xi}{2\theta}max\left(\frac{2}{\xi}, 1\right)(\|b_\theta^{(4)}\| + (1 + \alpha\zeta\theta)\theta\|\mu^{(3)}\|) \leq$$

$$\leq \beta\frac{\xi}{2\theta}max\left(\frac{2}{\xi}, 1\right)\{1 + (1+\varepsilon)\widetilde{K}_1(1 + \alpha\zeta\theta)[1 + (2 + \alpha\zeta\theta)\beta]\}\max_{k=2,3,4,5}\|b^{(k)}\|. \tag{17}$$

Итак, для любого $b \in m_n$ уравнение (12) имеет единственное решение $\mu \in m_n$ и для него, ввиду (14) - (17), справедливо неравенство $\|\mu\| \leq (K/\theta)\|b\|$, где $K = max\{\beta, (1+\varepsilon)\widetilde{K}_1[1 + (2+ +\alpha\zeta\theta)\beta], (\beta\xi/2)max(2/\xi, 1)[1 + (1+\varepsilon)\widetilde{K}_1(1 + 2\beta + \alpha\zeta\beta\theta)]\}$. Отсюда для любого $\varepsilon_1 > 0$, выбирая $\theta_2 = \theta_2(\varepsilon_1) > 0$ достаточно малым, получим, что оценка (11) справедлива при $\widetilde{\gamma} = \widetilde{K} + \varepsilon_1 = (\beta\xi/2)max(2/\xi, 1)[1 + \widetilde{K}_1(1 + 2\beta)] + \varepsilon_1$ для всех $\theta \in (0, \theta_2]$. Так как по условию б) теоремы константа K_1 не зависит от T_1, T_2, то и $\widetilde{\gamma} = \widetilde{K} + \varepsilon_1$ не зависит от T_1, T_2. Поэтому, учитывая оценки

$$\|\widetilde{Q}_{1,\theta} - \widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \leq \delta_1(T_1, T_2 - h_N(\theta_2))\theta, \qquad \|\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}^{-1}\|_{L(m_n)} = \|M_{\theta,T_1,T_2}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq (\widetilde{K} + \varepsilon_1)/\theta$$

и выбирая T_0^1, T_0^2, удовлетворяющими неравенству $(\widetilde{K} + \varepsilon_1)\zeta\delta_1(T_0^1, T_0^2 - h_N(\theta_2)) \leq 1/2$, по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим обратимость матрицы $\widetilde{Q}_{1,\theta} : m_n \to m_n$ и оценку $\|\widetilde{Q}_{1,\theta}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq 2\widetilde{\gamma}/\theta$. Тогда

$$\|\widetilde{Q}_{1,\theta}\|_{L(m_n)} \leq \|D^{-1}\|_{L(m_n)}\|\widetilde{Q}_{1,\theta}^{-1}\|_{L(m_n)}\|D\|_{L(m_n)} \leq 2\zeta\widetilde{\gamma}/\theta.$$

Следовательно, по теореме 3 [10] при $\nu = 1$ задача 1_α корректно разрешима. Теорема доказана.

Применение теоремы 1 позволяет получить эффективные признаки корректной разрешимости задачи 1_α. Но условие б) несколько сужает область ее применения, так как возникает необходимость проверять корректную разрешимость двухточечной краевой задачи при всех T_1, T_2 с независящей от T_1, T_2 константой. Однако, если повторить доказательство теоремы 1 в достаточную сторону, положив $T_1^0 = T_0^1, T_2^0 = T_0^2$ и используя введенные нами числа β, ξ, ζ, и перейти в правой части неравенства

$$\|Q_{1,\widetilde{h}(\theta)}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \frac{2\zeta\{(\beta\xi/2)max(2/\xi, 1)[1 + \widetilde{K}_1(1 + 2\beta)] + \varepsilon_1\}}{\theta}$$

к пределу при $\theta \to 0$, то имеет место

Т е о р е м а 2. *Пусть при предположении 1 выполнены следующие условия:*
а) $n_1^- = n_1^+ = n_1, \quad n_2^- = n_2^+ = n_2$;
б) для некоторых $T_1^0 > 0, T_2^0 > 0$ *двухточечная краевая задача*

$$dx/dt = A(t)x + f(t), \qquad t \in (-T_1^0, T_2^0), \tag{18}$$

$$P_1 S_{(-)} x(-T_1^0) + P_2 S_{(+)} x(T_2^0) = d \tag{19}$$

корректно разрешима с константой K_1, *удовлетворяющей неравенству* $\widetilde{K}\zeta\delta_1(T_1^0, T_2^0) < 1$, *где* $\widetilde{K} = (\beta\xi/2)max(2/\xi, 1)[1+(1+2\beta)K_1\zeta]$. *Тогда задача* 1_α *корректно разрешима с константой* $K = \widetilde{K}\zeta/[1 - \widetilde{K}\zeta\delta_1(T_1^0, T_2^0)]$.

Следующая теорема полностью определяет аппроксимирующую двухточечную краевую задачу и дает оценку аппроксимации.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1 и 2 и задача* 1_α *корректно разрешима с константой* K. *Тогда для любых* $T_1 \geq T_0^1, T_2 \geq T_0^2$, *где* $T_0^1 > 0, T_0^2 > 0 - const$, *определяемые из неравенства* $K\max(\delta_1^-(T_0^1), \delta_1^+(T_0^2)) < 1$, *двухточечная краевая задача*

$$dx/dt = A(t)x + f(t), \qquad t \in (-T_1, T_2), \tag{20}$$

$$P_1 S_{(-)} A_{(-)} x(-T_1) + P_2 S_{(+)} A_{(+)} x(T_2) = -P_1 S_{(-)} f_{(-)} - P_2 S_{(+)} f_{(+)} \tag{21}$$

имеет единственное решение $x_{T_1,T_2}(t)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[-T_1,T_2]} \|x_{T_1,T_2}(t) - x^*(t)\| \leq$$

$$\leq \frac{K}{1 - K\max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2))}[K\|f\|_\alpha \max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2)) + \max(\delta_2^-(T_1), \delta_2^+(T_2))], \tag{22}$$

где $x^*(t)$ *– решение задачи* 1_α.

Доказательство. Возьмем $\theta > 0$ и, применив метод параметризации, получим, что решение $(\lambda^*, u^*(t)) \in m_n \times m_n(\widetilde{h}(\theta))$ краевой задачи с параметром (2)-(5) из [10] удовлетворяет соотношению

$$\left[I + \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} A(t)dt\right]\lambda_s^* + \lambda_{s+1}^* = -\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} f(t)dt - \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} A(t)u_s^*(t)dt, \quad s \in Z. \tag{23}$$

Так как согласно теореме 3 [10] для любого $\varepsilon > 0$ существует $\overline{\theta} = \overline{\theta}(\varepsilon)$, при котором для всех $\theta \in (0, \overline{\theta}]$ выполняется $\|Q^{-1}_{1,\widetilde{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \leq (1+\varepsilon)K/\theta$, и, кроме того, имеет место оценка

$$\left\|\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} A(t)u_s^*(t)dt\right\| \leq \alpha c\theta^2,$$

где $c = [1 + (1+\varepsilon)K]exp(\overline{\theta})\|f\|_\alpha$, то при достаточно малых $\theta > 0$ последним членом в (23) можно пренебречь. Разобъем систему (23) на три части и при $s : s \leq N_1$, заменив $A(t), f(t)$ на $\alpha(t)A_{(-)}, \alpha(t)f_{(-)}$, а при $s : s \geq N_2$ – на $\alpha(t)A_{(+)}, \alpha(t)f_{(+)}$, получим

$$(I + A_{(-)}\theta)\lambda_{r_1} - \lambda_{r_1+1} = -f_{(-)}\theta, \qquad r_1 = -N_1, -N_1 - 1, \ldots, \tag{24.1}$$

$$\left[I + \int\limits_{t_{r_2-1}}^{t_{r_2}} A(t)dt\right]\lambda_{r_2} + \lambda_{r_2+1} = -\int\limits_{t_{r_2-1}}^{t_{r_2}} f(t)dt, \qquad r_2 = -N_1 + 1, \ldots, N_2 - 1, \tag{24.2}$$

$$(I + A_{(+)}\theta)\lambda_{r_3} - \lambda_{r_3+1} = -f_{(+)}\theta, \qquad r_3 = N_2, N_2 + 1, \ldots \tag{24.3}$$

Запишем эту систему в виде

$$Q_{\theta,T_1,T_2}\lambda = -F_{\theta,T_1,T_2}. \tag{25}$$

Если $\varepsilon > 0$ взять удовлетворяющим неравенству $(1+\varepsilon)K\max(\delta_1^-(T_0^1), \delta_1^+(T_0^2)) < 1$, то по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов при всех $\theta \in (0, \overline{\theta}]$ и $T_1 \geq T_0^1, T_2 \geq T_0^2$ матрица $Q_{\theta,T_1,T_2} : m_n \to m_n$ обратима и её обратная удовлетворяет оценке

$$\|Q^{-1}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \leq \frac{(1+\varepsilon)K}{[1-(1+\varepsilon)K\max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2))]\theta}. \tag{26}$$

Поэтому в силу предположений 1, 2 имеет место оценка

$$\|\lambda_{T_1,T_2} - \lambda^*\| \leq \|Q^{-1}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)}\|F_{\theta,T_1,T_2} - F_1(\widetilde{h}(\theta)) + [F_1(\widetilde{h}(\theta)) - Q_{\theta,T_1,T_2}\lambda^*]\| =$$

$$= \|Q^{-1}_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)}\|F_{\theta,T_1,T_2} - F_1(\widetilde{h}(\theta)) + [Q_{1,\widetilde{h}(\theta))}\lambda^* + G_1(u^*, \widetilde{h}(\theta)) - Q_{\theta,T_1,T_2}\lambda^*]\| \leq$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)K}{1-(1-\varepsilon)K\max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2))}[\max(\delta_2^-(T_1), \delta_2^+(T_2)) + K\|f\|_\alpha \max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2)) + \alpha c\theta]. \tag{27}$$

Здесь λ_{T_1,T_2} — решение уравнения (25) и координаты двусторонне-бесконечного вектора $\lambda_{T_1,T_2} \in m_n$ при $s : s \leq N_1, s \geq N_2$ удовлетворяют (24.1), (24.3). Тогда соответствующие координаты вектора $\mu_{T_1,T_2} = D\lambda_{T_1,T_2}$ являются решениями уравнений

$$(I + \widetilde{A}_{(-)}\theta)\mu_{r_1} - \mu_{r_1+1} = -S_{(-)}f_{(-)}\theta, \qquad r_1 = -N_1, -N_1-1, \ldots,$$

$$(I + \widetilde{A}_{(+)}\theta)\mu_{r_3} - \mu_{r_3+1} = -S_{(+)}f_{(+)}\theta, \qquad r_3 = N_2, N_2+1, \ldots$$

Отсюда, учитывая расщепляемость матриц $A_{(-)}, A_{(+)}$, для $P_1^{(-)}\mu_{r_1}, P_2^{(+)}\mu_{r_3}$ получим

$$(I_{n_1^-} + A_{11}^-\theta)P_1^{(-)}\mu_{r_1} - P_1^{(-)}\mu_{r_1+1} = -P_1^{(-)}S_{(-)}f_{(-)}\theta, \tag{28.1}$$

$$(I_{n_2^+} + A_{22}^+\theta)P_2^{(+)}\mu_{r_3} - P_2^{(+)}\mu_{r_3+1} = -P_2^{(+)}S_{(+)}f_{(+)}\theta. \tag{28.2}$$

В ходе доказательства теоремы 1 было показано, что при предположении 1 матрицы $M_{11}(\theta)$ и $M_{55}(\theta)$ ограниченно обратимы. Следовательно, односторонне-бесконечные системы (28) в пространстве ограниченных последовательностей имеют единственнные решения

$$P_1^{(-)}\mu_{-N_1+1} = P_1^{(-)}\mu_{-N_1+2} = \ldots = -[A_{11}^-]^{-1}P_1^{(-)}S_{(-)}f_{(-)},$$

$$P_2^{(+)}\mu_{N_2} = P_2^{(+)}\mu_{N_2+1} = \ldots = -[A_{22}^+]^{-1}P_2^{(+)}S_{(+)}f_{(+)}.$$

Переходя обратно к переменной λ, получим

$$A_{11}^-P_1^{(-)}S_{(-)}\lambda_{-N_1+1} = -P_1^{(-)}S_{(-)}f_{(-)},$$

$$A_{22}^+P_2^{(+)}S_{(+)}\lambda_{N_2} = -P_2^{(+)}S_{(+)}f_{(+)}.$$

Следовательно, с учетом (5) имеем

$$A_{11}^-P_1^{(-)}S_{(-)}\lambda_{-N_1+1} = P_1^{(-)}\widetilde{A}_{(-)}S_{(-)}\lambda_{-N_1+1} =$$

$$= P_1^{(-)}S_{(-)}A_{(-)}S^{-1}_{(-)}S_{(-)}\lambda_{-N_1+1} = P_1^{(-)}S_{(-)}A_{(-)}\lambda_{-N_1+1} = -P_1^{(-)}S_{(-)}f_{(-)},$$

$$P_2^{(+)}S_{(+)}A_{(+)}\lambda_{N_2} = -P_2^{(+)}S_{(+)}f_{(+)}.$$

Присоединяя эти равенства к (24.2), получим замкнутую систему уравнений относительно параметров $\lambda_{-N_1+1}, \lambda_{-N_1+2}, \ldots, \lambda_{N_2-1}, \lambda_{N_2}$. При выполнении (26) краевая задача (18),(19) корректно разрешима для любых $T_1 \geq T_0^1, T_2 \geq T_0^2$. Учитывая, что левая часть краевого условия (21) получается из (19) умножением на неособую $(n \times n)-$ матрицу $\left\| \begin{matrix} -A_{11}^- & 0 \\ 0 & A_{22}^+ \end{matrix} \right\|$, отсюда следует корректная разрешимость (20),(21) для любых $T_1 \geq T_0^1, T_2 \geq T_0^2$. Пусть x_{T_1,T_2} – решение двухточечной краевой задачи (20),(21), а $[\lambda_{T_1,T_2}]_{N_1,N_2}$ – вектор, составленный из координат $\lambda_{T_1,T_2} \in m_n$ с номерами $s = -N_1+1, -N_1+2, \ldots, N_2-1, N_2$. Так как

$$\max_s \sup_{t \in [t_{s-1}, t_s)} \|x_{T_1,T_2} - \lambda_{T_1,T_2,s}\| \leq c_1 \theta,$$

где $c_1 = const$ не зависит от θ, то на основе (27) справедливо неравенство

$$\max_{t \in [-T_1, T_2]} \|x_{T_1,T_2}(t) - x^*(t)\| \leq \|[\lambda_{T_1,T_2}]_{N_1,N_2} - [\lambda^*]_{N_1,N_2}\| + (c + c_1)\theta \leq$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)K}{1 - (1+\varepsilon)K \max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2))} [K\|f\|_\alpha \max(\delta_1^-(T_1), \delta_1^+(T_2)) + \max(\delta_2^-(T_1), \delta_2^+(T_2)) +$$

$$+\alpha c \theta] + (c + c_1)\theta.$$

Перейдя здесь к пределу при $\theta \to 0$, получим (22). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
2. **Плисс В. А.** Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев, 1977. С.168-173.
3. **Мухамадиев Э.** // Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 3. С.443 - 460.
4. **Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. Киев, 1990.
5. **Абрамов А. А.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 4. С. 733 – 737.
6. **Макаров В. Л., Гочева С. Г.** //Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 3. С. 527 – 540.
7. **Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б.** //Сообщения по вычисл. матем. М.:ВЦ АН СССР, 1981.
8. **Markowich P. A.** //SIAM. J. Math. Analys. 1982. V. 13, № 13. P. 484 – 513.
9. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388 – 404.
10. **Утешова Р. Е.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 3(13). С. 91 – 98.
11. **Кокотова Е. В.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 3(13). С. 49 – 57.

Поступила в редакцию 09.02.2005г.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

U t e s h o v a R.E. **The approximation of singular boundary value problem for linear differential equation** // Mathematical journal. 2003. Vol.4. №4. P.

The problem of finding of solution of singular value problem for linear ordinary differential equation with zero matrix limit is investigated. The regular two-point boundary value problems permitting to find approximate solution considered problem is constructed and admissible error at the same time estimation is given. The interconnection between of correct solvability of starting problem and correct solvability approximate two-point boundary value problems is established.

References - 11.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

У т е ш о в а Р.Е. **Сызықты дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы шеттік есептің аппроксимациясы**//Математикалық журнал. 2005.

Шектік нольдік матрицасы (t $\mp\infty$ ұмтылғанда) бар сызықты жәй дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы шеттік есептің шешімін табу мәселелері зерттелген. Қарастырылып отырған есептің жуықталған шешімін табуға мүмкіндік беретін регулярлы қос нүктелі шеттік есептер құрылған және оның жіберетін қателігінің бағасы берілген. Бастапқы есеп пен оны аппроксимациялайтын қос нүктелі шеттік есептің корректі шешілімділіктерінің өзара байланысы тағайындалған.

Әдебиеттер тізімі - 11.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 1 (15) . С. 128—132*

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук профессору Рахимбердиеву Марату Исимгалиевичу, известному специалисту в области качественной теории дифференциальных уравнений и их приложений. Он родился 30 января 1945 года в городе Зайсан Восточно-Казахстанской области в семье военнослужащего. В детстве, в связи с переводами по службе отца, жил и учился в Усть-Каменогорске, Караганде, Кокчетаве, Гурьеве.

В 1962 году после окончания средней школы в Гурьеве начал свою трудовую деятельность на электростанции, проработав в должностях моториста и машиниста котла до поступления в 1964 году на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова на отделение математики. Специализировался на кафедре дифференциальных уравнений. Начиная с третьего курса стал проводить научные исследования под руководством профессора В.М. Миллионщикова, который оказал большое влияние на формирование его как ученого. С тех пор он активный участник известного научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством В.А. Кондратьева, В.М. Миллионщикова, Н.Х. Розова. После завершения учебы был рекомендован и принят в аспирантуру механико-математического факультета МГУ.

В университете он активно занимался как научной, так и общественной работой. В 1970-72 гг. избирался освобожденным секретарем комсомольской организации мехмата.

В аспирантуре под руководством В.М. Миллионщикова и Н.Х. Розова им была выполнена кандидатская диссертация "Об устойчивости особых показателей и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией ", в которой изучены свойства особых показателей систем линейных дифференциальных уравнений с точки зрения влияния на них малых возмущений системы. Полученный им в диссертации критерий устойчивости особых показателей позволил выяснить, при каких условиях линейная дифференциальная система при малых возмущениях может приобрести свойство экспоненциальной дихотомии или, в частности, может стать равномерно экспоненциально устойчивой. Защита состоялась в марте 1975 года на диссертационном совете мехмата МГУ (оппоненты Д.В. Аносов и Ю.С. Богданов, ведущая организация - Институт математики АН Белоруссии).

После окончания аспирантуры Рахимбердиев был распределен в Институт математики и механики (ИММ) АН КазССР. Работал в лабораториях, руководимых академиками О.А. Жаутыковым и У.М. Султангазиным. В 1991 году, в связи с выделением из ИММ АН КазССР

Института космических исследований, возглавляемого У.М. Султангазиным, перешел в этот институт, где работал заведующим лаборатории и заместителем директора по науке (1994-1995). В 1995 году перешел в Институт теоретической и прикладной математики (ныне Институт математики), где по настоящее время заведует лабораторией динамических систем.

Докторскую диссертацию на тему "Устойчивость и распределение показателей Ляпунова" Марат Исимгалиевич успешно защитил в 1992 году в Минске на диссертационном совете Института математики АН Беларуси (научный консультант В.М.Миллионщиков, оппоненты Ю.Л. Далецкий, Н.А. Изобов, Е.Л. Тонков, ведущая организация - Санкт-Петербургский государственный университет).

Наиболее существенные научные результаты М.И. Рахимбердиевым получены в следующих направлениях: экспоненциально дихотомические системы [1,2] и грубые свойства неоднородных линейных дифференциальных систем [3], критерий выполнимости условия Перрона [20,22,26,29, 31]; введение и изучение классов линейных систем с различными свойствами грубости асимптотического поведения их решений [23], исследование центральных показателей как разрывных функций параметров системы [10,13], изучение вопроса о бэровской классификации показателей Ляпунова как разрывных функций [11], описание распределения значений показателей Ляпунова вблизи их точек разрывов как функций системы в различных ситуациях. Им дано описание замыкания множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией в метрическом пространстве систем с равномерной метрикой [1,2], описано открытое ядро множества неоднородных систем, имеющих хотя бы одно ограниченное решение [3]; совместно с Н.Х. Розовым решена задача распределения показателей Ляпунова периодических систем относительно малых в среднем возмущений коэффициентов системы [6,7]. Для ряда систем решены задачи о локализации спектра показателей на основе их векторного представления. Им установлена строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных дифференциальных систем и уравнений [11,34]. Изучены экспоненциально разделенные и равномерно неразделенные гомоморфизмы векторных расслоений динамических систем, введено понятие сильно положительного гомоморфизма и установлена его эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом n-1 (n–размерность векторного расслоения), а для n-k -ой внешней степени гомоморфизма – эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом k [19,20,26,29]; получены коэффициентные признаки экспоненциальной разделенности линейных систем произвольного индекса [22]; показано, что замыкание множества систем с экспоненциальной близостью совпадает с множеством равномерно неразделенных систем [4,23]. Им получены распределения показателей Ляпунова для линейных расширений динамической системы на торе [16, 24] и совместно со Т.И Смирновым та же задача решена для периодических аппроксимаций эргодический динамической системы на торе [25]. Установлены необходимые и достаточные условия равномерной экспоненциальной разделенности линейного расширения динамической системы на векторном расслоении в терминах послойной сильной положительности семейства автоморфизмов, порождающего динамическую систему [26]; найдены достаточные условия устойчивости старшего показателя семейства автоморфизмов векторного расслоения [19]. Установлены типичные свойства однопараметрического семейства линейных дифференциальных уравнений при бифуркациях экспоненциальной устойчивости [30].

Под влиянием У.М. Султангазина и в сотрудничестве с ним существенные результаты получены совместно с их учениками Цаем М.Д, Калыбаевой А.А. при изучении свойств дискретных уравнений Больцмана в пространственно однородном случае, исследована устойчивость положения равновесия, дано описание инвариантных множеств, установлены условия топологической и дифференцируемой эквивалентности пространственно однородных моделей [9,17,26,32]; совместно с Панкратовой И.Н. исследованы бифуркационные свойства многомерных аналогов нелинейных логистических уравнений, дано описание структуры инвариантных множеств дискретного аналога нелинейного логистического разностного уравнения [33]; разработаны некоторые математические модели биологических популяций, которые нашли применение при решении ряда прикладных задач, в частности, при изучении динамики популяции сайгаков и саранчи на территории Казахстана и др.

По материалам научных исследований М.И.Рахимбердиевым опубликовано более 100 научных работ в международных и республиканских изданиях, в том числе в таких ведущих математических журналах, как "Успехи математических наук", "Математические заметки", "Дифференциальные уравнения", "Известия НАН РК. Серия физико-математическая"и др. Результаты этих исследований представлялись на многих международных математических съездах, симпозиумах и конференциях (Москва 1981, 1984, 1987, 1989, 2000, 2003, 2004, Иркутск 1986, Новосибирск 2000, Минск, Беларусь 2000, Русе (Болгария) 1981, 1985, Цюрих (Швейцария) 1994, Стамбул (Турция) 1997 и др.)

Много времени Марат Исимгалиевич уделяет преподавательской деятельности. С 1975 года он по совместительству преподает на механико-математическом факультете Казахского государственного университета (ныне КазНУ им.аль-Фараби). Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций.

М.И.Рахимбердиев также активно занимается научно-организаторской деятельностью. В 1996–97гг. исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук НАН РК. В 1997–1999, 2000–2002, 2003–2005гг. — научный руководитель республиканских программ фундаментальных исследований по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. С 1997 по 2004г. являлся председателем секции физико-математических наук рабочей группы Высшей научно-технической комиссии при Правительстве РК.

Много времени он отдает научной экспертизе: член Президиума ВАК РК (1998–2000гг.), член диссертационного совета по защите докторских диссертаций при ИМ МОН РК, с 2001 по 2004гг. — заместитель председателя, в настоящее время — председатель этого совета. Рахимбердиев М.И. — референт (с 1978г.) реферативных журналов "РЖ Математика", "Mathematical Review", постоянный рецензент журналов "Дифференциальные уравнения", "Известия НАН РК. Серия физико-математическая" и др., один из организаторов и ныне заместитель главного редактора "Математического журнала".

Друзья и коллеги искренне поздравляют Марата Исимгалиевича с замечательным юбилеем и от всей души желают ему успехов в работе, творческого вдохновения, крепкого здоровья, счастья и благополучия.

Джумабаев Д.С., Женсыкбаев А.А.,
Изобов Н.А., Касымов К.А.,
Миллионщиков В.М., Розов Н.Х.,
Султангазин У.М.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ М.И. РАХИМБЕРДИЕВА

1. Об устойчивости особых показателей линейной системы и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией. 1. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 14. С. 659–670.

2. Об устойчивости особых показателей линейной системы и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией. 2. // Дифференц. уравнения, 1974. Т. 10, № 10. С. 1797–1807.

3. Некоторые топологические свойства линейных неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 5. С. 931–936.

4. О линейных системах, связанных отношением почти приводимости с системами скалярного типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4 .С. 616–625.

5. Об одном отношении эквивалентности во множестве систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН Каз. ССР. Сер. физ- мат. 1977. № 3. С. 55–59.

6. Распределение показателей Ляпунова линейных систем с периодическими коэффициентами, близкими в среднем к постоянным // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14, №9. С. 1710–1714. (совм. с Розовым Н.Х.)

7. Распределение показателей Ляпунова линейных стационарных систем при малых в среднем периодических возмущениях коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1978.Т. 14, № 10.С. 1913–1914 (совм. с Розовым Н.Х.)

8. О локализации спектра линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН Каз. ССР сер. физ.-мат. 1980. № 1. С.72–76 (совм.с Розовым Н.Х.)

9. Об устойчивости положения равновесия дискретного уравнения Больцмана // Известия АН Каз ССР. Сер., физ.-мат. 1981. № 1.С.42–46 (совм.. с У.М.Султангазиным)

10. О свойстве неустойчивости центральных показателей линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математ. наук. 1981. Т. 36. № 4. С.277.

11. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 6. С.925–931

12. О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1982.Т. 18. № 11. С.2016–2017.

13. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 2. С.253–259.

14. Об одном типичном свойстве показателей Ляпунова // Известия АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1983. № 5. С.71–73.

15. О представлении и изменениях при возмущении системы показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1984. Т.39. № 4. С.104.

16. О показателях Ляпунова линейных расширений динамической системы на торе // Матем. заметки, 1984. Т.36. №3. С.309–317.

17. Асимптотические свойства дискретного уравнения Больцмана в пространственно однородном случае // Известия АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1985. № 5. С.47–50. (совм. с Цаем М.)

18. Условия грубой экспоненциальной устойчивости // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 4. С.118.

19. Об условиях непрерывности старшего показателя линейного расширения динамической системы // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С.591–600.

20. Об экспоненциальной разделенности с максимальным индексом и равномерной сильной положительности семейства автоморфизмов векторного расслоения // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 25. № 2. С.234–240.

21. Некоторые свойства старшего показателя Ляпунова как функции параметра // Успехи матем. наук. 1989. Т.44. № 4. С.209.

22. Критерий экспоненциальной разделенности линейной системы. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С.70–72.

23. Об экспоненциальной разделенности линейных систем дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. № 4. С.141.

24. Соотношение классов семейств автоморфизмов векторного расслоения с различными свойствами грубости. // Изв. НАН РК. Сер. физ.- мат. 1994. № 1. С.73–77.

25. О свойствах линейных расширений сдвигов на торе, близких к эргодическим // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.- мат. 1997. № 3. С.47–57. (совм. с Смирновым Т.И.)

26. Инвариантные множества и предельные точки дискретного уравнения Больцмана в пространственно однородном случае // Изв. МН АН РК. Сер. физ.-мат. 1997. №5. С.24–33

(совм. с Калыбаевой А.А.)

27. Положительность и экспоненциальная разделенность семейства автоморфизмов векторного расслоения // Дифференц. уравнения.1999. Т.35. №1. С.121–124.

28. Об условии слабой экспоненциальной разделенности линейного расширения динамических систем. Труды Института математики АН Беларуси. 2000. С.51–58.

29. Соотношение топологической структуры векторного расслоения и условия равномерной экспоненциальной разделенности семейства его морфизмов // Математический журнал. 2002 Т.1. №2. С.66–72.

30. Равномерная экспоненциальная разделенность семейства морфизмов векторного расслоения // Математический журнал. 2001.Т.1. №1. С.116–117.

31. Свойство старшего показателя Ляпунова как разрывной функции системы // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С.855.

32. Пространственно однородная дискретная модель уравнения Больцмана. Интегрируемый случай // Математический журнал. 2002 Т.1. №1. С.56–60. (совм. с Колыбай А.А.)

33. Канонический вид многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Математический журнал. 2003. Т3. №1. С.54–58.

34. О разрывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С.1570.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.51 2000 MSC: 42A30

Akishev G.A. **On orders of approximation of functional classes by polynomials with respect to generalized Haar system** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.5–15.

In is this paper generalization of anisotropic Lorentz space is under consideration. A sufficient condition of embedding by class $H^r_{\varphi,\theta}$ in Lorentz space is proved. Exact order of approximation of this class by partial Fourier sums with respect to multiple generalized Haar system is obtained.
Referens –13.

УДК: 517.51 2000 MSC: 42A30

Ақышев Г.А. **Жалпылама Хаар жүйелері полиномдарымен функционалдық кластарды жуықтау реттері туралы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.5–15.

Мақалада анизотроптық Лоренц кеңістігінің жалпыламасы қарастырылады. $H^r_{\varphi,\theta}$ класының Лоренц кеңістігіне енгізілуінің жеткілікті шарты анықталған және аталған кластың еселі жалпылама Хаар жүйесі бойынша Фурье толықсыз қосындыларымен жуықтаудың нақты реті алынған.
Библ.назв.—13.

УДК: 517.956 2000 MSC: 49K15

Aldashev S.A., Akylbaeva M.T. **Uniqueness criterion of solution of Darboux-Protter problem for one class of multidimensional fourth order hyperbolic equations**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.16–19.

In this paper uniqueness criterion of solution of Darboux-Protter problem for one class of multidimensional fourth order hyperbolic equations is obtained.
References — 6.

УДК: 517.956 2000 MSC: 49K15

Алдашев С.А., Ақылбаева М.Т. **Төртінші дәрежелі көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған Дарбу-Проттер есебі шешімінің жалғыздық критериі**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б. 16–19.

Мақалада төртінші дәрежелі көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған Дарбу-Протер есебі шешімінің жалғыздық критериі алынған.
Библ. — 6.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

Бижанова Г.И. **Равномерные оценки решения для линейной двухфазной задачи Стефана с малым параметром**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P. 20–29.

В пространстве Гельдера установлены равномерные относительно κ оценки решения линейной двухфазной задачи Стефана с малым параметром κ, которая позволяет получить разрешимость некоторых линейных и нелинейных задач с $\kappa = 0$.
Библ. — 5.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

Бижанова Г.Е. **Кіші параметрлі сызықты екіфазалы Стефан есебі шешімінің бірқалыпты өлшемдері**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б. 20–29.

Гельдер кеңістігінде кіші $\kappa-$параметрлі сызықты екіфазалы Стефан есебі шешиміне κ бойынша бірқалыпты өлшемдер алынды. κ параметры кейбір сызықты және сызықсыз есептердің шешімділігін анықтауға мүмкіншілік береді.
Библ. — 5.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B10

Dzhumabayev D.S., Imanchiyev A.E. **Correct solvability of linear multi-point boundary value problem**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.30–38.

The criteria of correct solvability of linear multi-point boundary value problem are established in the term of special matrix structure composed of matrices of differential equation and boundary conditions.
References — 7.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B10

Жұмабаев Д.С., Иманчиев А.Е. **Сызықты көпнүктелі шекаралық есебінің корректті шешілетіндігі**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.30–38.

Сызықты көпнүктелі шеттік есептің корректілі шешілімділігінің белгілері дифференциалдық теңдеу мен шекаралық шарттар матрицалары арқылы құрастырылған арнайы құрылымды матрица терминінде тағайындалған.
Библ. — 7.

УДК: 511.33 2000 MSC: 08A72

Dobritza V.P., Ivannikova E.A., Polegen'ko I.G., Yakh'eva G.E. **Arithmetic of fussy numbers with fussy of operation**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.39–47.

In this paper we introduce fuzzy of operations on fuzzy numbers. It's established that the system obtained is arithmetic (ring) of fuzzy numbers. So it is not necessary to impose restrictions arising when introducing crisp operations on fuzzy numbers ("the western approach").

References — 6.

УДК: 511.33 2000 MSC: 08A72

Добрица В.П., Иванникова Е.А., Полегенько И.Г., Яхьева Г.Э. **Айқын бейнеленбеген операциялары бар айқындалмаған сандар арифметикасы**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.39–47.

Жұмыста айқындалмаған сандарға айқын бейнеленбеген операция енгізіледі. Алынған жүйе айқындалмаған сандардың арифметикасы болып табыл атындығы анақталды. Сол кезде шектеу қойымайды. Бұл кезде анықталмаған сандарға айқын операция жүргізу кезінде пайда болатын шектеулер кіргізу толап етілмейді.

Библ. — 6.

УДК: 517.956 2000 MSC: 49K15

Eldesbay T.Zh. **On one inverse problem for model equation of mixed type of second kind**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.48–51.

In this paper one inverse problem for model elliptic-hyperbolic equation of mixed type with characteristic degeneration of type is solved in spectral statement.

References — 7.

УДК: 517.956 2000 MSC: 49K15

Елдесбай Т.Ж. **Екінші түрдегі модельдік аралас теңдеу үшін бір кері есеп туралы**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.48–51.

Екінші түрдегі модельдік аралас эллипсті-гиперболалық теңдеу үшін шекаралы қойылымдағы бір кері есеп шешілген.

Библ. — 7.

УДК: 662.92 2000 MSC: 76T30

Kamalova G.A., Naimanova A.Zh. **Mathematical simulation of gas dynamical processes of two-phase flow in devices of different configuration**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.52–66.

A simulation model of gas dynamical processes of two-phase flow in devices of different configuration is proposed. For process modelling we use a system of Navier-Stokes equations, closed by $k-\varepsilon$ turbulence model. Solving gas dynamics equations is carried out by a finite volume method as well as volume conservation law (VCL) is used for the method improvement. VCL equation is solved together with Navier-Stokes equations. Numerical solutions are given for a flow field, heat transfer flow and solid particles flow. For modelling parameters of gas phase is used Eulerian approach as well as for description of parameters of dispersion phase we use Lagrangian approach. The numerical results for a fields of the flow, temperature and solid particles are given.

References — 10.

УДК: 662.92 2000 MSC: 76T30

Камалова Г.А., Найманова А.Ж. **Әртүрлі конфигурациядағы құрылғыларда екіфазалы ортаның газодинамикалық процесстерін математикалық модельдеу**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.52–66.

От жағу құрылғыларында екіфазалы ортаның газодинамикалық процесстерін сандық модельдеу ұсынылады. Процессті модельдеу үшін $k-\varepsilon$ турбуленттік моделімен толықтырылған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі пайдаланылады. Газ динамикасы теңдеулерінің шешімі шектік көлемдер әдісімен жүзеге асырылады және есептеу әдісін жақсарту мақсатында көлемдерді сақтау заңдылығы пайдаланылады. Көлемдерді сақтау заңдылығының теңдеуі негізгі Навье-Стокс теңдеулерімен бірге шешіледі. Газ фазасының параметрлерін модельдеу үшін эйлер тәсілі, дисперсиялық фазаның параметрлеріне лагранж тәсілі қолданылады. Ағыс өрістері, температура және қатты түйіршіктер үшін сандық нәтижелер келтірілген.

Библ. — 10.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Kokotova E.V. **Bounded solutions of linear systems of ordinary differential equations with unlimited coefficients**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.67–74.

A problem of finding bounded solution of non-homogeneous linear differential equation with unlimited matrix and right part bounded with a wight is considered. Necessary and sufficient conditions of correct solvability of the problem in the terms of bilaterally infinite matrix of special structure are received by parametrization's method with non-uniform step of partition.

References — 12.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Кокотова Е.В. **Коэффициенттері шектелмеген жәй дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйесінің шектелген шешімдері**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.67–74.

Шектелмеген матрицалы және салмақты оң жағы шектелген біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеудің шектелген шешімін табу есебі қарастырылады. Қадамы бір қалыпты емес параметрлеу әдісі бойынша арнай құрылымды екі жақты шексіз матрица терминінде қарастырылып отырған есептің корректі шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынады.

Библ. — 12.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

Minglibayeva B.B. **On approximation of singular linear boundary value problem with parameter**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.75–84.

Approximating regular four–point boundary value problem with parameter for linear singular boundary value problem with parameter with utmost constant matrixes are constructed. The relationship between correct solvabilities of origin and approximating problems are established.

References — 10.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

Мыңғлыбаева Б.Б. **Параметрі бар сызықты сингулярлы шеттік есептің аппроксимациясы туралы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.75–84.

Матрицалары шекті тұрақты болатын параметрі бар сызықты сингулярлы қос нүктелі шеттік есеп үшін аппроксимациялаушы регулярлы төрт нүктелі параметрі бар шеттік есептер құрылған. Бастапқы және аппроксимациялаушы есептердің корректі шешілімдіктерінің арасындағы байланыс тағайындалған.

Библ. — 10.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35J20

Ospanov K.N. **Coersitive estimates for A.V. Bitsadze type singular system**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.85–93.

Coersitive estimates of solutien and its derivatives of the half-periodical problem in a strip for A.V. Bitsadze type system with unlimited coefficients in S.L.Sobolev class are established.

References — 9.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35J20

Оспанов Қ.Н. **А.В.Бицадзе типтес сингулярлы жүйе үшін коэрцитивті бағалар** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.85–93.

Шектелмеген коэффициенттері бар А.В.Бицадзе типтес жүйе үшін жолақтағы жартылай периодты есептің шешімінің С.Л.Соболев класындағы коэрцитивті бағалары тағайындалады.

Библ. — 9.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Pankratova I.N. **On Some Instability Properties of Two-Dimensional Logistic Map**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.94–98.

It's shown that there's three parts of parameters domain with quite different number of fixed points of first return map for two-dimensional logistic map as well as fixed point instability on boundaries of this parts occur.

References — 10.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Панкратова И.Н. **Екі өлшемді логистикалық бейненің орнықсыздығының кейбір қасиеттері** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.94–98.

Шекараларында орнықсыздық байқалатын екі өлшемді логистикалық бейне үшін бейне тізбектелуінің қозғалмайтын нүктелері әртүрлі санды параметр мәндерінің облысы анықталды.

Библ. — 10.

УДК: 517.962.2, 517.956.3 2000 MSC: 49K15

Satybayev A.J. **Speed determination in two-dimensional-linearized acoustics problem**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.99–111.

Finite-difference regularized method for finding approximated solution that is converging to exact one is developed. Numerical computation is given.

References — 7.

УДК: 517.962.2, 517.956.3 2000 MSC: 49K15

Сатыбаев А.Дж. **Екі өлшемді сызықтырылған акустика мәселесіндегі жылдамдықты анықтау** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.99–111.

Қойылған мәселеге шенелген айырымдық регулярдалған әдісі істеліп шығарылған, оның негізінде жақындатылған шешім табылған және ол дәл шешіміне ұмтылады. Сандық есептеулері график түрінде шығарылған.

Библ. — 7.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Tleubergenov M.I. **On solving of stochastic restoration's problem by quasi-inverse method in combination with separation's method**

// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.112–117.

Three statements of a problem of restoration in the class of stochastic differential Ito's equations of second order by given properties of motion, independent from velocities, are considered when the control contains: 1) in drift coefficient, 2) in diffusion coefficient, and 3) in drift coefficient as well as in diffusion coefficient. Sets of control parameters, ensuring necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold are defined in these problems.

References — 8.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Тілеубергенов М.Ы. **Бөліктеу әдісімен түістірілген квазикерілеу әдісі арқылы стохастикалық қалпына келтіру есебін шешу туралы**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.112–117.

1) Көшіру коэффициентіне, 2) диффузия коэффициентіне, 3) көшіру және диффузия коэффициентеріне баскару кіретін кездерде берілген қасиеттері бойынша жылдамдықтардан тәуелсіз Ито типтес екінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында үш қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бул есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін басқару параметрлердің түрі анықталады.

Библ. — 8.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Uteshova R.E. **Approximation of singular boundary value problem for linear differential equation**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 1 (15). P.118–127.

Solving of singular boundary value problem for l.o.d.e. with limitly zero-matrix is under consideration. Reqular two-point boundary value problems that allow to find an approximate solution of the problem considered are constructed. Estimation of admissible error is obtained. Interrelation between correct solubilities of the problem considered and two-point boundary value problem that approximate it is established.

References — 11.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Өтешова Р.Е. **Сызықты дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы шеттік есептің аппроксимациясы**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 1 (15). Б.118–127.

Шектік нольдік матрицасы ($t \mp\infty$ ұмтылғанда) бар сызықты жәй дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы шеттік есептің шешімін табу мәселелері зерттелген. Қарастырылып отырған есептің жуықталған шешімін табуға мүмкіндік беретін регулярлы қос нүктелі шеттік есептер құрылған және оның жіберетін қателігінің бағасы берілген. Бастапқы есеп пен оны аппроксимациялайтын қос нүктелі шеттік есептің корректі шешілімділіктерінің өзара байланысы тағайындалған.

Библ. — 11.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.