

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2009 том 9 № 1 (31)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 1 (31) 2009

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Жамбыла, 25, к. 705
Телефон 8-(727)2-91-13-15, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2009г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 9, № 1 (31), 2009

Асимптотические свойства решений регулируемых систем в простом критическом случае <i>С. А. Айсагалмиев, Д. Г. Шаназаров</i>	5
Обобщенные решения уравнений Ламе в случае бегущих нагрузок. ударные волны <i>Л. А. Алексеева</i>	16
О корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа <i>А. Т. Асанова</i>	26
Об одном трехвесовом интегральном неравенстве <i>Ш. Биалал</i>	34
К теории краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений <i>Д. С. Джумабаев</i>	42
О численном решении одной граничной обратной задачи фильтрации двухфазной жидкости <i>Ш. Ж. Мусиралиева</i>	47
Математическое моделирование турбулентного горения в сложном канале <i>А. Ж. Найманова</i>	55
Динамика систем на циклических инвариантных множествах <i>И. Н. Панкратова</i>	65
Refined definitions for finitary and infinitary similarity relations of theories Part 3: Scheme of standard transformations of theories, and signature reduction procedures <i>М. G. Peretyat'kin</i>	71
О решении обратной стохастической задачи замыкания методом разделения <i>М. И. Тлеубергенов</i>	84
Аппроксимация функций операторами, построенными по φ -лакунарной последовательности <i>Л. П. Фалалеев</i>	90

Рефераты	96
----------------	----

УДК 517.938

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В ПРОСТОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С. А. АЙСАГАЛИЕВ, Д. Г. ШАНАЗАРОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 hapico@mail.ru

Исследуются асимптотические свойства решений нелинейных регулируемых систем в простом критическом случае. Получен критерий абсолютной устойчивости на основе оценки несобственных интегралов на множестве решений динамической системы.

Впервые задача исследования абсолютной устойчивости положения равновесия регулируемых систем была поставлена в работе А.И. Лурье и В.Н. Постникова. На основе второго метода Ляпунова, путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности", А.И. Лурье [1] получил систему конечных ("разрешающих") уравнений и показал, что наличие у них действительных решений достаточно для абсолютной устойчивости рассматриваемой системы. Однако, получение условий абсолютной устойчивости методом А.И. Лурье для систем третьего и выше порядка является очень сложной задачей. В связи с этим появился ряд работ, в которых предлагались упрощенные критерии абсолютной устойчивости. Среди них можно выделить работы И.Г. Малкина, С. Левшеца, А.М. Летова.

Дальнейший поиск условий абсолютной устойчивости привел к появлению частотного критерия, предложенного В.М. Поповым [2]. Основой его метода является изучение частотной характеристики линейной части системы дифференциальных уравнений и оценка несобственных интегралов от изображения Фурье нелинейной функции. В случае одной нелинейности частотный критерий имеет геометрическую интерпретацию и его легко проверить для системы любого порядка. Для систем с несколькими нелинейностями из-за наличия в условиях параметра, изменяющегося в бесконечных пределах, проверка частотного критерия становится практически невозможной.

В работах С.А. Айсагалиева [3], [4] предлагается принципиально новый метод исследования абсолютной устойчивости, основанный на априорных оценках несобственных интегралов вдоль решений исходной системы, получаемых с учетом свойств нелинейной функции после ее представления в виде линейной комбинации фазовых координат системы и их производных.

Данная работа является продолжением научных исследований, предложенных в [3], [4].

Keywords: *Asymptotical properties, regulated systems, equilibrium state*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

© С. А. Айсагалиев, Д. Г. Шаназаров, 2009.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения регулируемой системы в простом критическом случае:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \dot{\eta} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = Dx + E\eta, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \eta(0) = \eta_0 \quad t \in I = [0, \infty),$$

где A, B, D, E – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, матрица A – гурвицева.

Функция $\varphi(\sigma) \in C(R^m, R^m)$ является элементом следующего множества

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{ \varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | \\ 0 < \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i < \mu_{0i}\sigma_i^2, \quad \forall \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}; \quad \varphi(0) = 0 \}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$, $\mu_{0i} > 0$, $i = \overline{1, m}$, – постоянная матрица порядка $m \times m$.

Для регулируемых систем с ограниченными ресурсами функция $\varphi(\sigma)$ является элементом множества

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{ \varphi(\sigma) \in \Phi_0 / |\varphi_i(\sigma_i)| \leq \varphi_i^*, \quad \varphi_i^* = \text{const} > 0, \quad 0 < \varphi_i^* < \infty \quad i = \overline{1, m} \}. \quad (3)$$

Поскольку $\dot{\sigma} = D\dot{x} + E\dot{\eta} = Cx + R\varphi(\sigma)$, $C = DA$, $R = DB + E$, то уравнения движения (1) запишутся в виде:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma), \quad \sigma = Dx + E\eta, \quad (4)$$

$$x(0) = x_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad t \in I, \quad D = CA^{-1}, \quad E = R - CA^{-1}B.$$

Положение равновесия системы (1) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Dx_* + E\eta_* = 0$. Так как матрица A гурвицева, $\varphi(0) = 0$, то в случае, когда E неособая матрица, система (1) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$, где $\sigma_* = 0$.

Определение 1. Говорят, что положение равновесия $x_* = 0, \eta_* = 0$ системы (1), (2) (либо (1), (3)) абсолютно устойчиво, если матрицы A ,

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix}, \quad 0 < \mu < \mu_0,$$

гурвицевы, где $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $0 \leq \mu_i \leq \mu_{0i}$, $i = \overline{1, m}$, и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ (либо $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$) решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$.

Определение 2. Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) (либо (1), (3)) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A, B, D, E, μ_0) , при выполнении которых положение равновесия системы $(x_* = 0, \eta_* = 0)$ абсолютно устойчиво.

Ставится следующая задача: найти алгебраические критерии абсолютной устойчивости положения равновесия систем (1) – (2), (1) – (3).

Основные леммы.

Лемма 1. Пусть матрицы R, E неособые. Тогда уравнения движения (1) и включение (2) равносильны следующим соотношениям:

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}C]x + BR^{-1}\omega, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I, \quad (5)$$

$$\varphi(\sigma) = R^{-1}\omega - R^{-1}Cx \in \Phi_0, \quad \dot{\eta} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = Dx + E\eta, \quad (6)$$

где $\omega = \dot{\sigma}$, $C = DA$, $R = DB + E$.

Доказательство. В отличие от предыдущих исследований авторов, нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ представляется в более упрощенном виде, что позволяет значительно облегчить все последующие преобразования. Как следует из (4) вдоль решения системы (1), (2) функция $\varphi(\sigma) = R^{-1}\omega - R^{-1}Cx$, $t \in I$, причем $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Отсюда следует включение (6) и $\dot{\eta} = \varphi(\sigma(t)) = R^{-1}\omega(t) - R^{-1}Cx(t)$, $t \in I$, $\omega(t) = \dot{\sigma}(t)$, $t \in I$. Теперь дифференциальное уравнение (1) запишется в виде (5).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть матрицы R, E неособые, $T_1 = \text{diag}(T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1m})$, $T_2 = \text{diag}(T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2m})$, $T_3 = \text{diag}(T_{31}, T_{32}, \dots, T_{3m})$, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла:

$$\begin{aligned} I_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{ & \omega^*(t)[R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1} + R^{*-1}T_2]\omega(t) + \omega^*(t)[-2R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1}C - \\ & - R^{*-1}T_1D - T_2R^{-1}C]x(t) + \omega^*(t)[-R^{*-1}T_1E]\eta(t) + x^*(t)[C^*R^{*-1}T_1E]\eta(t) + \\ & + x^*(t)[C^*R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1}C + C^*R^{*-1}T_1D]x(t) \} dt \leq \ell_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma + \\ & + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} [Dx(T) + E\eta(T)]^*T_3[Dx(T) + E\eta(T)] - \frac{1}{2}[Dx_0 + E\eta_0]^*T_3[Dx_0 + E\eta_0], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} T_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } T_2 \leq 0, \\ \mu_0T_2, & \text{если } T_2 > 0, \end{cases} \quad \bar{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{если } T_2 \leq 0, \\ \varphi(\sigma) - \mu_0\sigma, & \text{если } T_2 > 0, \end{cases} \\ \ell_0 = \begin{cases} \ell_1 = - \int_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)T_2d\sigma, & \text{если } T_2 \leq 0, \\ 0 \\ \ell_2 = - \int_0^{\sigma(0)} [\varphi(\sigma) - \mu_0\sigma]^*T_2d\sigma, & \text{если } T_2 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot{\sigma}(t)dt &= \ell_1 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \varphi^*(\sigma)T_2d\sigma, \quad \text{если } T_2 \leq 0; \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot{\sigma}(t)dt &= \ell_2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^*(T)\mu_0T_2\sigma(T) - \\ & - \frac{1}{2}\sigma^*(0)\mu_0T_2\sigma(0), \quad \text{если } T_2 > 0; \end{aligned}$$

$$\varphi^*(\sigma)T_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma) - \varphi^*(\sigma)T_1\sigma \leq 0, \quad \forall \sigma, \quad \sigma \in R^m.$$

Пусть $\pi(t) = \varphi^*(\sigma(t))T_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))T_1\sigma(t) + \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$. Тогда

$$I_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \pi(t) dt \leq \ell_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^*(T)T_3\sigma(T) - \frac{1}{2} \sigma^*(0)T_3\sigma(0).$$

Отсюда с учетом соотношений (5), (6) получим оценку (7). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть матрицы R , E неособые, $H_0 = H_0^*$, $Q = Q^*$, $H_1 = H_1^*$ – матрицы порядков $n \times n$, $m \times m$, $m \times m$ соответственно. Тогда верны равенства:

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{x^*(t)[-2(A - BR^{-1}C)^*H_0]x(t) + \omega^*(t)[-2R^{*-1}B^*H_0]x(t)\} dt = \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)H_0x(T) + x_0^*H_0x_0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{\omega^*(t)[-2R^{*-1}Q]\eta(t) + x^*(t)[2C^*R^{*-1}Q]\eta(t)\} dt = \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)Q\eta(T) + \eta_0^*Q\eta_0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{\omega^*(t)[-2H_1D]x(t) + \omega^*(t)[-2H_1E]\eta(t)\} dt = \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^*(T)H_1\sigma(T) + \sigma_0^*Q\sigma_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Имеем, что

$$-2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{x}^*(t)H_0x(t) dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)H_0x(T) + x_0^*H_0x_0, \quad (11)$$

$$-2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{\eta}^*(t)Q\eta(t) dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)Q\eta(T) + \eta_0^*Q\eta_0, \quad (12)$$

$$-2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{\sigma}^*(t)H_1\sigma(t) dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^*(T)H_1\sigma(T) + \sigma_0^*Q\sigma_0. \quad (13)$$

Отсюда с учетом соотношений (5), (6) следуют равенства (8) – (10).

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть матрицы R , E неособые, $T_4 = \text{diag}(T_{41}, T_{42}, \dots, T_{4m})$, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедливо равенство:

$$I_5 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_4\sigma(t) dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \omega^*(t)T_4\eta(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)T_4\sigma(T) - \eta_0^*T_4\sigma_0. \quad (14)$$

Доказательство. Поскольку

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} [\eta^*(t)T_4\sigma(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)T_4\sigma(T) - \eta_0^*T_4\sigma_0, \quad \text{то}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\varphi^*(\sigma(t))T_4\sigma(t) + \eta^*(t)T_4\dot{\sigma}(t)]dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)T_4\sigma(T) - \eta_0^*T_4\sigma_0,$$

где $\dot{\eta}(t) = \varphi(\sigma(t))$. Отсюда, с учетом того, что $\dot{\sigma}(t) = \omega(t)$, $t \in I$, получим равенство (14). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть матрицы R , E неособые, $T_4 = \text{diag}(T_{41}, T_{42}, \dots, T_{4m})$, матрица θ порядка $m \times n$ такая, что $\theta B = I_m$, где I_m – единичная матрица порядка $m \times m$. Тогда справедливо равенство:

$$I_5 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_4\sigma(t)dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [x^*(t)A^*\theta^*T_4\sigma(t) + \omega^*(t)T_4\theta x(t)]dt + \lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)\theta^*T_4\sigma(T) - x_0^*\theta^*T_4\sigma_0. \quad (15)$$

Доказательство. Вдоль решения системы (1), (2) имеем тождество $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$. Умножая данное тождество слева на матрицу θ порядка $m \times n$, получим $\theta\dot{x}(t) = \theta Ax(t) + \varphi(\sigma(t))$, $t \in I$, где $\theta B = I_m$. Пусть $T_4 = \text{diag}(T_{41}, T_{42}, \dots, T_{4m})$. Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} [x^*(t)\theta^*T_4\sigma(t)]dt = \lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)\theta^*T_4\sigma(T) - x_0^*\theta^*T_4\sigma_0.$$

Подынтегральную функцию можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x^*(t)\theta^*T_4\sigma(t)]dt &= \dot{x}^*(t)\theta^*T_4\sigma(t) + x^*(t)\theta^*T_4\dot{\sigma}(t) = \\ &= x^*(t)A^*\theta^*T_4\sigma(t) + \varphi^*(\sigma(t))T_4\sigma(t) + x^*(t)\theta^*T_4\omega(t), \quad t \in I, \end{aligned}$$

где $\dot{\sigma}(t) = \omega(t)$, $\dot{x}^*\theta^* = x^*A^*\theta^* + \varphi^*(\sigma(t))$, $x = x(t)$, $t \in I$. Отсюда следует, что $\varphi^*(\sigma(t))T_4\sigma(t) = -x^*(t)A^*\theta^*T_4\sigma(t) - x^*(t)\theta^*T_4\omega(t) + \frac{d}{dt} [x^*(t)\theta^*T_4\sigma(t)]dt$, $t \in I$. Интегрируя по t данное тождество в пределах от 0 до T , получим равенство (15). Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть выполнены условия лемм 4,5. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедливо равенство:

$$\begin{aligned} I_6 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\omega^*(t)T_4\eta(t) - x^*(t)A^*\theta^*T_4Dx(t) - x^*(t)A^*\theta^*T_4E\eta(t) - x^*(t)\theta^*T_4\omega(t)]dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)T_4\sigma(T) - \eta_0^*T_4\sigma_0 - \lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)\theta^*T_4\sigma(T) + x_0^*\theta^*T_4\sigma_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Из равенств (14), (15) следует, что

$$\begin{aligned} & - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\omega^*(t)T_4\eta(t) + \lim_{T \rightarrow \infty} \eta^*(T)T_4\sigma(T) - \eta_0^*T_4\sigma_0 = \\ & = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [x^*(t)A^*\theta^*T_4\sigma(t) + \omega^*(t)T_4\theta x(t)]dt + \lim_{T \rightarrow \infty} x^*(T)\theta^*T_4\sigma(T) + x_0^*\theta^*T_4\sigma_0. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что $\sigma = Dx + E\eta$, $t \in I$, получим равенство (16). Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть выполнены условия лемм 1-6. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла:

$$\begin{aligned}
I_7 = & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{ \omega^*(t) [R^{*-1} T_1 \mu_0^{-1} R^{-1} + \frac{1}{2} R^{*-1} T_2 + \frac{1}{2} T_2 R^{-1}] \omega(t) + \omega^*(t) [-T_4 \theta - \\
& - 2R^{*-1} T_1 \mu_0^{-1} R^{-1} C - R^{*-1} T_1 D - T_2 R^{-1} C - 2R^{*-1} B^* H_0 - 2H_1 D] x(t) + \\
& + \omega^*(t) [T_4 - R^{*-1} T_1 E - 2H_1 E - 2R^{*-1} Q] \eta(t) + x^*(t) [-A^* \theta^* T_4 E + C^* R^{*-1} T_1 E + \\
& + 2C^* R^{*-1} Q] \eta(t) + x^*(t) [-A^* \theta^* T_4 D + C^* R^{*-1} T_1 \mu_0^{-1} R^{-1} C + C^* R^{*-1} T_1 D - \\
& - 2(A - BR^{-1} C)^* H_0] x(t) \} dt \leq \ell_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma) T_2 d\sigma - \\
& - \lim_{T \rightarrow \infty} (x^*(T), \eta^*(T)) \Sigma \begin{pmatrix} x(T) \\ \eta(T) \end{pmatrix} + (x_0^*, \eta_0^*) \Sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \tag{17}
\end{aligned}$$

где матрица

$$\begin{aligned}
\Sigma = & \begin{pmatrix} H_0 + D^* H_1 D - \frac{1}{2} D^* T_3 D + \frac{1}{2} \theta^* T_4 D + \frac{1}{2} D^* T_4 \theta \\ \frac{1}{2} [-E^* T_3 D + 2E^* H_1 D - T_4 D + E^* T_4 D] \\ \frac{1}{2} [-D^* T_3 E + 2D^* H_1 E - D^* T_4 + \theta^* T_4 E] \\ Q + E^* H_1 E - \frac{1}{2} E^* T_3 E - \frac{1}{2} T_4 E - \frac{1}{2} E^* T_4 \end{pmatrix}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Доказательство. Так как выполнены условия лемм 1-6, то верны соотношения (7) – (10), (14) – (16). Суммируя несобственные интегралы, получим $I_7 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_6$, где $\Sigma = \Sigma^*$ определяется по формуле (18). Заметим, что $(x^*, \eta^*) \Sigma \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} [Dx + E\eta]^* T_3 [Dx + E\eta] + x^* H_0 x + \eta^* Q \eta + \sigma^* H_1 \sigma - \frac{1}{2} \eta^* T_4 \sigma - \frac{1}{2} \sigma^* T_4 \eta + \frac{1}{2} x^* \theta^* T_4 \sigma + \frac{1}{2} \sigma^* T_4 \theta$. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть матрицы R, E неособые, матрицы $W, P = P^*, T_5 = \text{diag}(T_{51}, T_{52}, \dots, T_{5m}) > 0$, порядков $m \times n, m \times m, m \times m$ соответственно, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда вдоль решения системы (1), (2) верно равенство:

$$\begin{aligned}
I_8 = & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{ \varphi^*(\sigma(t)) P [\sigma(t) - \mu_0^{-1} \varphi(\sigma(t))] + [\dot{\sigma}(t) + Wx(t)]^* T_5 [\dot{\sigma}(t) + \\
& + Wx(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{ \omega^*(t) [T_5 - R^{*-1} P \mu_0^{-1} R^{-1}] \omega(t) + \omega^*(t) [2T_5 W + \\
& + 2R^{*-1} P \mu_0^{-1} R^{-1} C + R^{*-1} P D] x(t) + \omega^*(t) [R^{*-1} P E] \eta(t) + \\
& + x^*(t) [-C^* R^{*-1} P E] \eta(t) + x^*(t) [W^* T_5 W - C^* R^{*-1} P \mu_0^{-1} R^{-1} C - \\
& - C^* R^{*-1} P D] x(t) \} dt. \tag{19}
\end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку выполнены условия леммы 1, то верны тождества (5), (6), где $\dot{\sigma}(t) = \omega(t)$, $t \in I$. Подставляя значение $\varphi(\sigma(t)) = R^{-1} \omega(t) - R^{-1} Cx(t)$, $\sigma(t) = Dx(t) + E\eta(t)$, $t \in I$, можно получить равенство (19). Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть выполнены условия лемм 1-8 и пусть, кроме того, выполнены равенства:

$$\mu_0 = [R^* T_5 R - \frac{1}{2} T_2 R - \frac{1}{2} R^* T_2]^{-1} (T_1 + P), \tag{20}$$

$$2R^{*-1} B^* H_0 + T_4 \theta + 2T_5 W + (2T_5 - R^{*-1} T_2) C + (T_4 - 2R^{*-1} Q) E^{-1} D = 0, \tag{21}$$

$$P + T_1 = R^*[T_4 - 2H_1E - 2R^{*-1}Q]E^{-1}, \quad (22)$$

$$A^*\theta^*T_4E - C^*T_4 + 2C^*H_1E = 0, \quad (23)$$

$$A^*H_0 + H_0A = -W^*T_5W - \frac{1}{2}C^*(T_5C + 2H_1D + T_4\theta + 2T_5)W - \frac{1}{2}(T_5C + 2H_1D + T_4\theta + 2T_5W)^*C - \frac{1}{2}A^*\theta^*T_4D - \frac{1}{2}D^*T_4\theta A. \quad (24)$$

Тогда справедлива следующая оценка несобственного интеграла:

$$I_9 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] + [\omega(t) + Wx(t)]^*T_5[\omega(t) + Wx(t)]\} dt \leq \ell_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma - \lim_{T \rightarrow \infty} (x^*(T), \eta^*(T))\Sigma \begin{pmatrix} x(T) \\ \eta(T) \end{pmatrix} + (x_0^*, \eta_0^*)\Sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Доказательство. Из оценки (25) следует, что несобственные интегралы $I_7 = I_8 = I_9$. Следовательно,

$$T_5 - R^{*-1}P\mu_0^{-1}R^{-1} = R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1} + \frac{1}{2}R^{*-1}T_2 + \frac{1}{2}T_2R^{-1}, \quad (26)$$

$$2T_5W + 2R^{*-1}P\mu_0^{-1}R^{-1}C + R^{*-1}PD = -T_4\theta - 2R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1}C - R^{*-1}T_1D - T_2R^{-1}C - 2R^{*-1}B^*H_0 - 2H_1D, \quad (27)$$

$$R^{*-1}PE = T_4 - R^{*-1}T_1E - 2H_1E - 2R^{*-1}Q, \quad (28)$$

$$-C^*R^{*-1}PE = -A^*\theta^*T_4E + C^*R^{*-1}T_1E + 2C^*R^{*-1}Q, \quad (29)$$

$$W^*T_5W + C^*R^{*-1}P\mu_0^{-1}R^{-1}C - C^*R^{*-1}PD = -A^*\theta^*T_4D + C^*R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1}C + C^*R^{*-1}T_1D - 2(A - BR^{-1}C)^*H_0. \quad (30)$$

Рассмотрим равенство (26). Умножая слева на R^* и справа на R , получим:

$$R^*T_5R - P\mu_0^{-1} = T_1\mu_0^{-1} + \frac{1}{2}T_2R + \frac{1}{2}R^*T_2.$$

Тогда $(P + T_1)\mu_0^{-1} = R^*T_5R - \frac{1}{2}T_2R - \frac{1}{2}R^*T_2$. Отсюда следует равенство (20). Поскольку преобразование неособое, то верно обратное утверждение, т.е. из равенства (20) следует (26). Как следует из (26)

$$P\mu_0^{-1} = R^*T_5R - T_1\mu_0^{-1} - \frac{1}{2}T_2R - \frac{1}{2}R^*T_2, \quad P = (R^*T_5R - \frac{1}{2}T_2R - \frac{1}{2}R^*T_2)\mu_0 - T_1. \quad (31)$$

Рассмотрим равенство (27). Так как (см. (31))

$$2R^{*-1}P\mu_0^{-1}R^{-1}C = 2R^{*-1}(R^*T_5R - T_1\mu_0^{-1} - \frac{1}{2}T_2R - \frac{1}{2}R^*T_2)R^{-1}C = 2T_5C - 2R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1}C - R^{*-1}T_2C - T_2R^{-1}C,$$

$$R^{*-1}PD = R^{*-1}(R^*T_5R\mu_0 - T_1 - \frac{1}{2}T_2R\mu_0 - \frac{1}{2}R^*T_2\mu_0)D = T_5R\mu_0D - R^{*-1}T_1D - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R\mu_0D - \frac{1}{2}T_2\mu_0D,$$

то из равенства (27) имеем:

$$2R^{*-1}B^*H_0 + T_4\theta + 2H_1D + 2T_5W + (2T_5 - R^{*-1}T_2)C + (T_5R - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R - \frac{1}{2}T_2)\mu_0D = 0. \quad (32)$$

Из равенства (28), с учетом того, что

$$\begin{aligned} R^{*-1}PE &= R^{*-1}(R^*T_5R\mu_0 - T_1 - \frac{1}{2}T_2R\mu_0 - \frac{1}{2}R^*T_2\mu_0)E = \\ &= T_5R\mu_0E - R^{*-1}T_1E - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R\mu_0E - \frac{1}{2}T_2\mu_0E, \end{aligned}$$

получим

$$T_4 = T_5R\mu_0E - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R\mu_0E - \frac{1}{2}T_2\mu_0E + 2H_1E + 2R^{*-1}Q. \quad (33)$$

Из соотношения (33) следует, что

$$T_4 - 2H_1E - 2R^{*-1}Q = (T_5R - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R - \frac{1}{2}T_2)\mu_0E.$$

Тогда $R^*(T_4 - 2H_1E - 2R^{*-1}Q)E^{-1} = (R^*T_5R - \frac{1}{2}T_2R - \frac{1}{2}R^*T_2)\mu_0 = P + T_1$ в силу равенства (31). Отсюда следует равенство (22). С другой стороны, из (33) имеем $T_4 = (T_5R - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R - \frac{1}{2}T_2)\mu_0E + 2H_1E + 2R^{*-1}Q$. Тогда $T_4E^{-1}\mu_0^{-1} = (T_5R - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R - \frac{1}{2}T_2) + 2H_1\mu_0^{-1} + 2R^{*-1}QE^{-1}\mu_0^{-1}$. Следовательно,

$$T_5R - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R - \frac{1}{2}T_2 = T_4E^{-1}\mu_0^{-1} - 2H_1\mu_0^{-1} - 2R^{*-1}QE^{-1}\mu_0^{-1}. \quad (34)$$

Из (32), (34), получим равенство (21).

Рассмотрим равенство (29). Поскольку (см.(28))

$$-C^*R^{*-1}PE = -C^*(T_4 - R^{*-1}T_1E - 2H_1E - 2R^{*-1}Q),$$

то из (29) следует равенство (23). Верно обратное утверждение о том, что из (23) следует равенство (29).

Так как (см. (31))

$$\begin{aligned} -C^*R^{*-1}P\mu_0^{-1}R^{-1}C &= -C^*R^{*-1}(R^*T_5R - T_1\mu_0^{-1} - \frac{1}{2}T_2R - \frac{1}{2}R^*T_2)R^{-1}C = \\ &= -C^*T_5C - C^*R^{*-1}T_1\mu_0^{-1}R^{-1}C + \frac{1}{2}C^*R^{*-1}T_2C + \frac{1}{2}C^*T_2R^{-1}C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -C^*R^{*-1}PD &= -C^*R^{*-1}(R^*T_5R\mu_0 - T_1 - \frac{1}{2}T_2R\mu_0 - \frac{1}{2}R^*T_2\mu_0)D = C^*R^{*-1}T_1D - \\ &- C^*(T_5R - \frac{1}{2}R^{*-1}T_2R - \frac{1}{2}T_2)\mu_0D = C^*R^{*-1}T_1D - \\ &- C^*(T_4E^{-1}\mu_0^{-1} - 2H_1\mu_0^{-1} - 2R^{*-1}QE^{-1}\mu_0^{-1})\mu_0D = \\ &= C^*R^{*-1}T_1D - C^*(T_4E^{-1} - 2H_1 - 2R^{*-1}QE^{-1})D, \end{aligned}$$

то из (30) следует равенство (24).

Отметим, что верно обратное утверждение, т.е. из (20) – (24) следуют равенства (26) – (30) в силу неособенности приведенных выше преобразований.

Таким образом, из соотношений (20) – (24) следует, что $I_7 = I_8 = I_9$. Тогда оценка (25) непосредственно следует из (17). Лемма доказана.

Выбор подынтегральной функции в лемме 9, когда матрица R неособая, кардинально отличается от вида подынтегральной функции, указанной в лемме 7 ([3], с.114), что позволяет существенно расширить область абсолютной устойчивости, используя свойства нелинейности.

Лемма 10. Если матрица A гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, то верны оценки:

$$|\chi(t)| \leq c_0, \quad |\dot{\chi}(t)| \leq c_1, \quad |\dot{\sigma}(t)| \leq c_2, \quad \forall t, \quad t \in I,$$

где $c_i = \text{const} > 0, i = 0, 1, 2$. Кроме того, функции $x(t), \sigma(t), t \in I$, равномерно непрерывны.

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau, t \in I$, где $\|e^{At}\| \leq ce^{(a+\varepsilon)t}, \forall t, t \in I, a = \max_{1 \leq j \leq n} \text{Re}\lambda_j(A) < 0, c = c(\varepsilon) = \text{const} > 0, \varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ следует, что $|\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \varphi_* = \text{const} > 0, \forall t, t \in I$. Тогда $|x(t)| \leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| \|B\| |\varphi(\sigma(\tau))| d\tau \leq c_0, \forall t, t \in I$. Из (1) следует, что $|\dot{x}(t)| \leq \|A\| |x(t)| + \|B\| \varphi_* \leq c_1, \forall t, t \in I$. Поскольку $\dot{\sigma}(t) = Cx(t) + R\varphi(\sigma(t)), t \in I$, то $|\dot{\sigma}(t)| = \|C\| |x(t)| + \|R\| |\varphi(\sigma(t))| \leq c_2, \forall t, t \in I$. Из ограниченности $\dot{x}(t), \dot{\sigma}(t), t \in I$, следуют равномерная непрерывность функций $x(t), \sigma(t), t \in I$. Лемма доказана.

Абсолютная устойчивость.

Теорема 1. Пусть выполнены условия лемм 1-8 и пусть, кроме того:

- 1) Матрицы $A, A_1(\mu), 0 < \mu < \mu_0$, гурвицевы;
- 2) Функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ непрерывна по $\sigma, \sigma \in R^m$;
- 3) Выполнены равенства (20) – (24), матрицы $P = P^* > 0, T_5 > 0$;
- 4) Матрица $Q_1 = Q + E^*H_1E - \frac{1}{2}E^*T_3E - \frac{1}{2}T_4E - \frac{1}{2}E^*T_4 > 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (3) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1-8 и равенства (20) – (24), то справедлива оценка (25), где матрицы $P = P^* \geq 0, T_5 > 0$. Заметим, что $\varphi(\sigma) = k(\sigma)\sigma$, где $0 < k(\sigma) < \mu_0$.

Тогда $\sigma - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma) = \sigma - \mu_0^{-1}k(\sigma)\sigma = [I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma)]\sigma$, где $I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma) > 0$. Следовательно, если матрица $P = P^* \geq 0$, то произведение $\varphi^*(\sigma)P[\sigma - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma)] = \sigma^*k(\sigma)P[I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma)]\sigma \geq 0$. Так как матрица $T_5 > 0$, то $(\omega + Wx)^*T_5(\omega + Wx) \geq 0, \forall \omega \in R^m, \forall x \in R^n$. Теперь оценка (25) запишется так:

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{ \varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] + [\omega(t) + Wx(t)]^*T_5[\omega(t) + Wx(t)] \} dt \leq$$

$$\leq \ell_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma - \lim_{T \rightarrow \infty} (x^*(T), \eta^*(T))\Sigma \begin{pmatrix} x(T) \\ \eta(T) \end{pmatrix} + (x_0^*, \eta_0^*)\Sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Поскольку

$$\bar{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{если } T_2 \leq 0, \\ \varphi(\sigma) - \mu_0\sigma, & \text{если } T_2 > 0, \end{cases} \quad T_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } T_2 \leq 0, \\ \mu_0T_2, & \text{если } T_2 > 0, \end{cases}$$

то

$$\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma \leq 0, \quad \forall \sigma(T) \in R^m. \quad (36)$$

Из условия теоремы 1 следует, что выполнены условия леммы 10, где функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$. Следовательно, функции $x(t), \sigma(t), t \in I$, равномерно непрерывны, функции $x(t), \dot{\sigma}(t), t \in I$, ограничены.

Как следует из оценки (35), если матрица $Q_1 = Q_1^* > 0$, то функция $\eta(t), t \in I$, ограничена. В самом деле, если функция $\eta(t), t \in I$, неограничена, то

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{ \varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] + [\omega(t) + Wx(t)]^*T_5[\omega(t) + Wx(t)] \} dt < -\infty,$$

в силу ограниченности функции $x(t)$, $t \in I$, и неравенства (36). Но этого не может быть. Из ограниченности $x(t)$, $\eta(t)$, $t \in I$, следует ограниченность функции $\sigma(t)$, $t \in I$. Тогда из (35) имеем:

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))] + [\omega(t) + Wx(t)]^*T_5[\omega(t) + Wx(t)]\}dt < \infty. \quad (37)$$

Из (37) следует, что

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \{\varphi^*(\sigma(t))P[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))]\}dt < \infty, \quad (38)$$

в силу того, что матрица $T_5 > 0$. Так как $\varphi^*P[\sigma - \mu_0^{-1}\varphi] = \sigma^*P_1(\sigma)$, где $P_1(\sigma) = P_1^*(\sigma) = k(\sigma)P[I_m - \mu_0^{-1}k(\sigma)] > 0$ — диагональная матрица, то из (38) имеем $0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma^*(t)P_1(\sigma(t)) \times \sigma(t)dt < \infty$, $P_1(\sigma(t)) > 0$. Отсюда, в силу равномерной непрерывности функции $\sigma(t)$, $t \in I$, получим $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\lim_{T \rightarrow \infty} \varphi(\sigma(t)) = 0$. Тогда $\lim_{T \rightarrow \infty} x(t) = 0$ в силу гурвицевости матрицы A . Поскольку $\sigma(t) = Dx(t) + E\eta(t)$, $t \in I$, неособая матрица E , то $\lim_{T \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$. Далее, по условию теоремы матрица $A_1(\mu)$ гурвицева. Следовательно, выполнены все условия абсолютной устойчивости тривиального решения системы (1), (3).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1-8, и пусть, кроме того:

- 1) Матрицы A , $A_1(\mu)$, $0 < \mu < \mu_0$ гурвицевы;
- 2) Функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ непрерывна по σ , $\sigma \in R^m$;
- 3) Выполнены равенства (20) – (24), матрицы $P = P^* > 0$, $T_5 \geq 0$;
- 4) Матрица $\Sigma = \Sigma^* > 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Заметим, что в случае, когда $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, функция $\varphi(\sigma)$ может быть неограниченной. Следовательно, не выполнены условия леммы 10. Однако, можно показать, что если матрица $\Sigma > 0$, то функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $\eta(t)$, $t \in I$, ограничены.

В самом деле, если функция $\sigma(t)$, $t \in I$, неограничена, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)T_2d\sigma = -\infty, \quad \text{при } T_2 \neq 0,$$

а если $x(t)$, $\eta(t)$, $t \in I$, неограниченны, то $-\lim_{T \rightarrow \infty} (x^*(T), \eta^*(T))\Sigma \begin{pmatrix} x(T) \\ \eta(T) \end{pmatrix} = -\infty$. В обоих случаях имеем $0 \leq I_9 < -\infty$. Но этого не может быть. Следовательно функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $\eta(t)$, $t \in I$, ограничены. Тогда ограничена и сама функция $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$, где $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Далее, повторяя доказательство теоремы 1, получим утверждения настоящей теоремы.

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории регулируемых систем. М. – Л., 1951.

2. **Попов В.И.** Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
3. **Айсагалиев С.А.** Теория регулируемых систем. Алматы, 2000.
4. **Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.** Динамика нелинейных регулируемых систем. Алматы, 2006.

Поступила в редакцию 13.07.2007 г.

УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ В СЛУЧАЕ БЕГУЩИХ НАГРУЗОК. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Исследуется система уравнений Ламе, описывающая движение упругой среды при дозвуковых, транс- и сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений, и ее решения в пространстве обобщенных вектор-функций. Рассмотрены вопросы, связанные с возникновением ударных волн, которые возникают в среде при сверхзвуковых источниках возмущений. На основе теории обобщенных функции предложен метод определения условий на скачки решений и их производных на фронтах ударных волн.

Математическое моделирование разнообразных процессов, связанных с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения, приводит к решению краевых задач механики сплошных сред в классе "бегущих" функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи – скорость движения источника возмущений в среде – существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых *звуковых скоростей*. Их может быть несколько в зависимости от вида волн. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движение среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям (чисел Маха). Поэтому приходится строить решения систем уравнений эллиптического, гиперболического или смешанного типов. При этом, как известно, гладкость решений существенно зависит от гладкости граничных функций, которые зависят от типа действующих поверхностных нагрузок и массовых сил.

Для физических задач типичными являются ударные воздействия, сосредоточенные на поверхностях и в точках силы и т.п., которые не описываются гладкими функциями. Удобный метод для решения таких задач дает аппарат теории обобщенных функций [1,2], который позволяет существенно расширить класс изучаемых процессов, используя сингулярные обобщенные функции для моделирования наблюдаемых явлений, в особенности описываемых гиперболическими или смешанными уравнениями, для которых математическая теория краевых задач

Keywords: *generalized decisions, elastic media, subsonic, transonic and supersonic velocities, moving source, shock waves*

2000 Mathematics Subject Classification: 74B05,35E05

© Л. А. Алексеева, 2009.

пока еще недостаточно развита. Основные идеи метода обобщенных функций для решения краевых задач для волновых уравнений в N -мерных пространствах в классе бегущих решений рассмотрены в [3,4]. Здесь этот метод используется для построения обобщенных решений уравнений Ламе, описывающих движение упругой среды, при дозвуковых, транс- и сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений. Рассмотрены ударные волны, которые возникают в среде при сверхзвуковых источниках возмущений, и предложен метод определения условий на скачки решений и их производных на фронтах ударных волн.

1. Уравнения движения упругой среды. Ударные волны. Рассмотрим изотропную упругую среду, заданную параметрами Ламе λ, μ , плотностью ρ . Обозначим u_i – компоненты вектора перемещений u ; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций, связанные законом Гука [5]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}, \quad i, j, k = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Здесь (x_1, \dots, x_N) – лагранжевы декартовы координаты точек упругой среды. При $N = 2$ деформация плоская: $u_j = u_j(x_1, x_2, t)$, $j = 1, 2, u_3 = 0$; при $N = 3$ – пространственная: $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3, t)$, $j = 1, 2, 3$.

Уравнения движения сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho G_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3)$$

для упругой среды, с учетом (1), (2), приводятся к виду:

$$L_i^j(\partial_x, \partial_t) u_j(x, t) + G_i(x, t) = 0, \quad (4)$$

где L_i^j – дифференциальный оператор Ламе:

$$L_i^j(\partial_x, \partial_t) = (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_i^j \left(c_2^2 \Delta_N - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right),$$

$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения объемных и сдвиговых волн в упругой среде ($c_1 > c_2$), G_i – декартовы координаты объемной силы, $\delta_i^j = \delta_{ij}$ – символ Кронекера, Δ_N – оператор Лапласа в R^N . В (1) и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до N (подобно тензорной свертке).

Система уравнений (4) исследована в работах Г.И.Петрашениа [6]. В силу положительной определенности упругого потенциала среды, она является строго гиперболической. Детерминант ее характеристической матрицы

$$L = \left\{ L_i^j(\xi, \omega) \right\} = \left\{ (c_1^2 - c_2^2) \xi_i \xi_j + \left(c_2^2 \|\xi\|^2 - \omega^2 \right) \delta_i^j \right\}$$

имеет $2N$ (с учетом кратности) действительных корней: 6 при $N = 3$ ($\omega/\|\xi\| = \pm c_1, \pm c_2, \pm c_2$), и 4 при $N = 2$: ($\omega/\|\xi\| = \pm c_1, \pm c_2$). Здесь $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\|\xi\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N \xi_j^2}$.

Гиперболические системы допускают разрывные по производным решения. Поверхность разрыва F в $R^{N+1} = R^N \times t$, $-\infty < t < \infty$, совпадает с характеристической поверхностью системы. Ей соответствует волновой фронт F_t , который движется в пространстве R^N с течением времени.

Пусть $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_t\}$ – единичный вектор нормали к F в R^{N+1} , удовлетворяющий характеристическому уравнению:

$$\det \left\{ (c_1^2 - c_2^2) \nu_i \nu_j + \delta_{ij} (c_2^2 \|\nu\|_N^2 - \nu_t^2) \right\} = 0, \quad \|\nu\|_N = \sqrt{\sum_{k=1}^N \nu_k^2}. \quad (5)$$

В силу гиперболичности системы (4), это уравнение имеет корни

$$\nu_t = \pm c_j \|\nu\|_N, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Поверхность F_t движется в R^N со скоростью V , которая, как известно, равна

$$V = -\nu_t / \|\nu\|_N. \quad (7)$$

Из (6),(7) следует, что F_t движется в пространстве R^N с одной из звуковых скоростей: $V = c_1$ или $V = c_2$.

Введем *волновой* вектор $m = (m_1, \dots, m_N)$ – это единичный вектор нормали к фронту F_t в R^N при фиксированном t , направленный в сторону ее распространения. В силу (7)

$$m_j = \frac{\nu_j}{\|\nu\|_N} = -V \nu_j / \nu_t. \quad (8)$$

Обозначим $\nu_t = \nu_{N+1}$. Требование непрерывности перемещений при переходе через волновой фронт, связанное с сохранением сплошности среды,

$$[u]_{F_t} = 0, \quad (9)$$

приводит к известным кинематическим условиям совместности решений на волновых фронтах [6]:

$$\left[m_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{F_t} = 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (10)$$

(условие непрерывности касательных производных на F_t). Помимо этого из (4) следуют динамические условия совместности решений на фронтах, эквивалентные закону сохранения импульса в его окрестности [6]:

$$\left[\sigma_{ij} m_j + \rho V \frac{\partial u_i}{\partial t} \right]_{F_t} = 0. \quad (11)$$

Определение. Волну назовем ударной, если скачок напряжений на фронте волны конечен: $e_i [\sigma_{ij} m_j]_{F_t} \neq 0$, где e_i – орты координатных осей. Если $[\sigma_{ij} m_j]_{F_t} = 0$, то волна слабая ударная. Если $[\sigma_{ij} m_j]_{F_t} = \infty$, волна сильная ударная.

Как следует из (11), на фронтах ударных волн происходит скачок скоростей. На фронтах слабых ударных волн нет скачка скоростей, но вторые производные решений разрывны. Случай сильных ударных волн (в данном определении) в реальных средах не реализуется, т.к. при больших скачках напряжений среда разрушается и перестает быть упругой. Однако сильные ударные волны в упругих средах играют важную теоретическую роль при построении решений различных краевых задач. К таковым, в частности, относятся фундаментальные решения уравнений (4).

2. Бегущие решения уравнений Ламе. Числа Маха. Пусть сила, действующая в среде, движется с постоянной скоростью c вдоль координатной оси X_N (для удобства выкладок, противоположно ее направлению) и в подвижной системе координат не зависит от t :

$$G = G(x_1, \dots, x_N + ct). \quad (12)$$

Будем искать решения (4) такой же структуры:

$$u = u(x_1, \dots, x_N + ct), \tag{13}$$

которые назовем *бегущими*.

Введем подвижную систему координат $x' = (x'_1, \dots, x'_N) = (x_1, \dots, x_N + ct)$. В новых переменных уравнения движения имеют вид:

$$\left\{ (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} + \left(c_2^2 \Delta - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_N'^2} \right) \delta_j^i \right\} u_i + G_j = 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{14}$$

В силу гиперболичности исходной системы, уравнения (14) также могут иметь разрывные решения. Пусть F поверхность разрыва в пространстве переменных x' , где она неподвижна, и движущаяся с одной из звуковых скоростей $V = c_1, c_2$ в пространстве переменных (x_1, \dots, x_N) . Из (7) следует, что $V = ch_N$, где $h = (h_1, \dots, h_N)$ – единичная нормаль к F в R^N . Значит, поскольку $c = c_j/h_N$ и $|h_N| \leq 1$, такие поверхности могут возникнуть лишь при сверхзвуковых скоростях $c \geq c_j$.

Назовем скорость c *дозвуковой*, если $c < c_2$; *межзвуковой*, если $c_2 < c < c_1$ и *сверхзвуковой*, если $c > c_1$. Скорость называется *первой* или *второй звуковой*, если $c = c_j$, $j = 1, 2$, соответственно.

Перепишем уравнение (14), поделив его на c^2 :

$$A_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_i = \left\{ (M_1^{-2} - M_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} + \left(M_2^{-2} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_N'^2} \right) \delta_j^i \right\} u_i = -g_j. \tag{15}$$

Здесь $g_j = c^{-2}G_j$, $M_j = c/c_j$ – числа Маха ($M_1 < M_2$). При $M_j < 1$ ($j = 1, 2$) нагрузка дозвуковая, система уравнений эллиптического типа; если нагрузка сверхзвуковая, $M_j > 1$ ($j = 1, 2$), система становится гиперболической; если скорость межзвуковая (*трансзвуковая*), $M_1 < 1$, $M_2 > 1$, то тип уравнений гиперболо-эллиптический. При звуковых скоростях уравнения параболо-эллиптические, если $M_2 = 1$, а при $M_1 = 1$ становятся параболо-гиперболическими. Покажем это далее при построении фундаментальных решений уравнений (4).

Кинематические и динамические условия совместности решений на разрывах в пространстве переменных, как следует из (9) – (11) с учетом (13), примут вид:

$$[u]_F = 0, \tag{16}$$

$$[h_z u_{i,j} - h_j u_{i,N}]_F = 0, \tag{17}$$

$$[\sigma_{ij} h_j - \rho c^2 h_N u_{i,N}]_F = 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{18}$$

Здесь и часто далее дифференцирование по x_j обозначается индексом j после запятой в обозначении функции.

Определение. При $c > c_2$ будем называть решение уравнений (14) классическим, если оно непрерывно, дважды дифференцируемо всюду, за исключением волновых фронтов, число которых конечно на любом замкнутом подмножестве в R^N , на которых удовлетворяются условия на скачки (16) – (18).

Рассмотрим уравнения (15) и его решения на пространстве обобщенных функций.

3. Обобщенные вектор-функции и их производные. Вначале дадим некоторые определения для обобщенных вектор-функций, которые распространяют известную теорию обобщенных функций [1,2] на пространство вектор-функций.

Пространство финитных бесконечно-дифференцируемых M -мерных вектор-функций на R^N обозначим $D_M(R^N) = \{ \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_M(x)), \varphi_k \in D(R^N), k = \overline{1, M} \}$, а через

$D'_M(R^N) = \left\{ \hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_M), \hat{f}_k \in D'(R^N), k = \overline{1, M} \right\}$ – соответствующее ему пространство обобщенных вектор-функций – непрерывных линейных функционалов на $D_M(R^N)$: $(\hat{f}, \varphi) = \sum_{k=1}^M (\hat{f}_k, \varphi_k)$, $\varphi_k(x) \in D(R^N)$. Если f – локально интегрируемая вектор-функция, то ей соответствует регулярная обобщенная вектор-функция \hat{f} , которая определяет следующий линейный функционал:

$$(\hat{f}, \varphi) = \sum_{k=1}^M \int_{R^N} f_k(x) \varphi_k(x) dx_1 \dots dx_N, \quad \varphi_k(x) \in D(R^N). \quad (19)$$

Если \hat{f} нельзя представить в интегральном виде (19), то \hat{f} – сингулярная вектор-функция.

В качестве примера приведем сингулярную обобщенную функцию $\alpha(x)\delta_S(x)$, которую называют "простым слоем на поверхности S ":

$$(\alpha(x)\delta_S(x), \varphi(x)) = \sum_{k=1}^M \int_{S(x)} \alpha_k(x) \varphi_k(x) dS(x).$$

Здесь вектор-функция $\alpha = \{\alpha_1(x), \dots, \alpha_M(x)\}$ определена и интегрируема на поверхности $S \subset R^N$. Заметим, что в отличие от (19), интеграл берется не по R^N , а по поверхности S . Далее будем предполагать, что $\dim S = N - 1$, S непрерывна и имеет непрерывную нормаль $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$, $\|n\| = 1$.

Дифференцирование на $D'_M(R^N)$ определяем, используя производную обобщенной функции:

$$(\partial^a \hat{f}, \varphi) = (-1)^{|a|} (\hat{f}, \partial^a \varphi) = (-1)^{|a|} \sum_{k=1}^M (\hat{f}_k, \partial^a \varphi_k), \quad (20)$$

где мультииндекс $a = (a_1, \dots, a_N)$ определяет частную производную

$$\partial^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_N^{a_N}}, \quad |a| = \sum_{k=1}^N a_k.$$

Если $f(x)$ дифференцируема всюду, кроме поверхности S , то, как известно [1,2],

$$\hat{f}_{,j} = f_{,j} + n_j [f]_S \delta_S(x). \quad (21)$$

Здесь слева стоит обобщенная производная по x_j в смысле определения (20), а справа первое слагаемое – обычная производная. Очевидно, что (21) справедливо и для обобщенных вектор-функций. Далее будем называть обобщенные вектор-функции просто *обобщенными* функциями.

Рассмотрим на $D'_M(R^N)$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$L(\partial_x) = \{L_{ij}(\partial_x)\}_{M \times M} = \left\{ \sum_a C_i^{ja} \partial^a \right\}_{M \times M}.$$

Определение. Назовем \hat{u} обобщенным решением дифференциального уравнения

$$L(\partial_x) \hat{u} = \left\{ L_i^j(\partial_x) \hat{u}_j \right\}_{M \times 1} = \left\{ \hat{f}_i \right\}_{M \times 1} = \hat{f},$$

если

$$(L(\partial_x)\hat{u}, \varphi) = (L_{ij}(\partial_x)\hat{u}_j, \varphi_i) = (\hat{u}_j, L_{ji}^*(\partial_x)\varphi_i) = (\hat{f}, \varphi), \quad \forall \varphi \in D_M(R^N).$$

Здесь сопряженный оператор $L_{ij}^*(\partial_x) = \sum_a (-1)^{|a|} C_j^{ia} \partial^a$.

Определение. Матрица $\hat{U}(x)$ называется матрицей фундаментальных решений, если она удовлетворяет матричному уравнению

$$L(\partial_x)\hat{U} = \left\{ L_{ij}(\partial_x)\hat{U}_j^k(x) \right\}_{M \times M} = \delta(x) \left\{ \delta_i^k \right\}_{M \times M}, \tag{22}$$

где $\delta(x)$ сингулярная δ -функция:

$$\left(\delta(x)\delta_i^k, \varphi_k(x) \right) = \left(\delta(x), \delta_i^k \varphi_k(x) \right) = (\delta(x), \varphi_i(x)) = \varphi_i(0).$$

Ясно, что фундаментальные решения определяются с точностью до решения однородного уравнения.

Теорема 1. Если существует свертка

$$\hat{u} = \hat{U} * \hat{f} = \left\{ \hat{U}_j^k(x) * \hat{f}_k(x) \right\}_{M \times 1}, \tag{23}$$

то \hat{u} является обобщенным решением уравнения $L(\partial_x)\hat{u} = \hat{f}$.

Доказательство. В силу свойства дифференцирования свертки и свертки с $\delta(x)$ [1,2]:

$$L(\partial_x)\hat{u} = L(\partial_x)(\hat{U} * \hat{f}) = (L(\partial_x)\hat{U}) * \hat{f} = \left\{ \delta_i^k \delta(x) * \hat{f}_k \right\}_{M \times 1} = \hat{f}.$$

Ч.т.д.

Если входящие в свертку обобщенные функции являются регулярными, то они записываются в интегральной форме вида:

$$\hat{u} = \hat{U} * \hat{f} = \left\{ \int_{R^N} U_j^k(x-y) f_k(y) dy_1 \dots dy_N \right\}_{M \times 1}. \tag{24}$$

Итак, зная матрицу фундаментальных решений системы дифференциальных уравнений, можно строить их обобщенные решения для разных правых частей из класса обобщенных функций. Как легко видеть в (24), решение представляется в виде суперпозиции фундаментальных решений, распределенных на носителе функции $f(x)$, интенсивность которых определяется ее значением. Поэтому для построения решений, удовлетворяющих определенным свойствам на бесконечности, следует вначале строить фундаментальные решения, удовлетворяющие подобным свойствам.

4. Ударные волны как обобщенные решения уравнений. Условия на фронтах.

Пусть $u(x')$ – классическое решение в R^N , удовлетворяющее (17) – (18) на конечном числе поверхностей типа F . Обозначим $\hat{u}(x, z)$ соответствующую регулярную обобщенную функцию: $\hat{u}(x, z) = u(x')$, $x = (x'_1, \dots, x'_{N-1})$, $z = x'_N$. Пользуясь (21), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x'_j} - \rho c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_N^2} + \rho G_i = \left[\sigma_{ij} h_j - \rho V^2 h_N \frac{\partial u_i}{\partial x_N} \right]_F \delta_F + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ [\lambda u_k h_k \delta_{ij} + \mu (u_i h_j + u_j h_i)]_F \delta_F \} - \frac{\partial}{\partial x_N} \{ [u_i h_N]_F \delta_F \}, \end{aligned} \tag{25}$$

где $a\delta_F$ – простой слой на F , плотность которого определяется скачком перемещений на фронте волны. В силу условий на фронтах ударных волн (16) и (18), правая часть (20) обращается в 0, т.е. обобщенная функция \hat{u} удовлетворяет тем же уравнениям (14), но уже в обобщенном смысле.

Отсюда следует простой формальный способ получения условий на скачки решений и их производных на фронтах. Ударные волны являются обобщенными решениями уравнений (14), поэтому достаточно приравнять плотности независимых слоев нулю, чтобы получить условия на скачки на фронтах ударных волн.

5. Фундаментальные решения. Матрица Грина. При решении краевых задач важную роль играют фундаментальные решения, которые описывают динамику среды при действии сосредоточенных источников различного типа. Здесь приведем два фундаментальных решения, которые играют очень важную роль при построении сингулярных граничных интегральных уравнений, разрешающих первую и вторую краевые задачи теории упругости в случае бегущих нагрузок. В последующих статьях мы приведем решение этих задач во всем диапазоне скоростей движущихся нагрузок, за исключением звуковых, при которых стационарных решений не существует.

Рассмотрим \hat{U}_k^i – матрицу фундаментальных решений уравнения движения (14):

$$A_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) \hat{U}_j^k + \delta(x') \delta_i^k = 0, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (26)$$

Можно показать, что она является тензором. Если она удовлетворяет условиям затухания на бесконечности: $\hat{U}_i^k \rightarrow 0$, $\partial_j \hat{U}_i^k \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow \infty$, назовем ее *тензором Грина* уравнения (14). При фиксированном k он описывает перемещения среды при действии сосредоточенной силы, действующей в направлении координатной оси X_k , и бегущей со скоростью c вдоль оси X_N .

Для произвольной регулярной силы G соответствующее решение имеет вид свертки:

$$\hat{u}_i = \hat{U}_i^k * \hat{g}_k = \int_{R^N} U_i^k(x' - y) g_k(y) dy_1 \dots dy_N. \quad (27)$$

Приведем вид \hat{U}_i^k для разных скоростей c , который получен с использованием преобразования Фурье, имеющего вид [7]:

$$\bar{U}_i^j = \frac{M_2^2 \delta_{ij}}{(\|\xi\|^2 - M_2^2 \xi_N^2)} - \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_N^2} \left(\frac{1}{\|\xi\|^2 - M_2^2 \xi_N^2} - \frac{1}{\|\xi\|^2 - M_1^2 \xi_N^2} \right). \quad (28)$$

Откуда следует

$$U_i^j(x, z) = M_2^2 \delta_i^j f_{02}(\|x\|, z) + (f_{21,ij}(\|x\|, z) - f_{22,ij}(\|x\|, z)),$$

где f_{km} – оригиналы функции $\hat{f}_{km} = \frac{\xi_N^{-k}}{\|\xi\|^2 - M_m^2 \xi_N^2}$, вид которых существенно зависит от размерности задачи и чисел Маха (см.[2]).

Так $\bar{f}_{0m} = \left(\|\xi\|^2 - M_m^2 \xi_N^2 \right)^{-1}$. Легко видеть, что это преобразование Фурье фундаментального решения уравнения

$$\Delta_{N-1} \hat{f}_{0m} + (1 - M_m^2) \frac{\partial^2 \hat{f}_{0m}}{\partial x_N^2} + \delta(x) \delta(z) = 0.$$

При дозвуковых скоростях это уравнение эквивалентно эллиптическому уравнению Лапласа-Пуассона, при сверхзвуковых – волновому уравнению (уравнению Даламбера для $N=2$), при звуковой скорости переменная z в уравнении исчезает, уравнение становится параболическим, т.к. размерность пространства на единицу выше. Что и определяет тип уравнений (15), отмеченный выше.

При построении фундаментальных решений, помимо условий затухания решений на бесконечности, учитывались условия излучения [4,7]:

при $M_m < 1$: $f_{km} = \int_0^{|z|} f_{(k-1)m}(x, y) dy$; при $M_m > 1$: $f_{km} = \theta(z) \int_0^z f_{(k-1)m}(x, y) dy$, $k = 1, 2$.

Пространственная задача ($N = 3$). При дозвуковых скоростях ($M_k < 1$):

$$4\pi f_{ok}(\|x\|, z) = (m_k^2 \|x\|^2 + z^2)^{-1/2}, \quad 4\pi f_{1k} = \operatorname{sgn} |z| \ln \left((|z| + V_k^+) / m_k \|x\| \right),$$

$$4\pi f_{2k} = |z| \ln \left((|z| + V_k^+) / m_k \|x\| \right) - V_k^+ + m_k \|x\|;$$

при звуковых скоростях ($M_k = 1$):

$$2\pi f_{ok}(\|x\|, z) = -\delta(z) \ln \|x\|, \quad 2\pi f_{1k} = -\theta(z) \ln \|x\|, \quad 2\pi f_{2k} = -z \theta(z) \ln \|x\|,$$

при сверхзвуковых скоростях ($M_k > 1$):

$$2\pi f_{ok}(\|x\|, z) = \theta(z - m_k \|x\|) (z^2 - m_k^2 \|x\|^2)^{-1/2},$$

$$2\pi f_{1k} = \theta(z - m_k \|x\|) \ln \left((z + V_k^-) / m_k \|x\| \right),$$

$$2\pi f_{2k} = \theta(z - m_k \|x\|) (z \ln \left((z + V_k^-) / m_k \|x\| \right) - V_k^-).$$

Здесь введены обозначения: $\theta(z)$ – функция Хевисайда,

$$V_k^+ = (z^2 + m_k^2 \|x\|^2)^{1/2}, \quad V_k^- = (z^2 - m_k^2 \|x\|^2)^{1/2}, \quad \theta_k = \theta(z - m_k \|x\|).$$

Плоская задача ($N = 2$). При дозвуковых скоростях ($M_k < 1$):

$$2\pi m_k f_{ok}(|x|, z) = -\ln V_k^+, \quad 2\pi m_k f_{1k} = -|z| \ln V_k^+ + |z| - m_k |x| \operatorname{arctg} \frac{|z|}{m_k |x|},$$

$$2\pi m_k f_{2k} = ((V_k^+)^2 - 2z^2) \ln V_k^+ + 1, 5z^2 - 2m_k |x| |z| \operatorname{arctg} \left| \frac{z}{m_k x} \right|;$$

при звуковых скоростях ($M_k = 1$):

$$2f_{ok}(|x|, z) = -\delta(z) |x|, \quad 2f_{1k} = \theta(z) |x|, \quad 2f_{2k} = z \theta(z) |x|;$$

при сверхзвуковых скоростях ($M_k > 1$):

$$2m_k f_{ok}(|x|, z) = \theta(z - m_k |x|), \quad 2m_k f_{1k} = (z - m_k |x|) \theta(z - m_k |x|),$$

$$4m_k f_{2k} = (z - m_k |x|)^2 \theta(z - m_k |x|).$$

Свойства тензора U исследованы в [7]. В плоском случае тензор U на бесконечности неограничен. В сверхзвуковом случае носителем функций является конус $z > m_k \|x\|$. Последнее является *условием излучения*, т.к. из физических соображений вне этого конуса перемещения упругой среды отсутствуют в силу конечности скорости распространения возмущений, которая не может быть выше соответствующей звуковой для определенного типа деформаций. Отметим, что эти условия появляются в результате построения решения задачи для объемной и

сдвиговой составляющей тензора Грина отдельно в зависимости от скорости бегущей нагрузки. На поверхности $z = m_k \|x\|$ в трехмерном случае тензор Грина имеет бесконечную особенность и описывает сильную ударную волну.

Построенные тензора обладают следующими свойствами симметрии: $\hat{U}_j^i(x, z) = \hat{U}_i^j(x, z) = \hat{U}_j^i(-x, z)$. Легко выделяются объемные и сдвиговые составляющие тензора \hat{U} :

$$\begin{aligned}\hat{U}_j^i &= \hat{U}_{j1}^i + \hat{U}_{j2}^i, \\ \hat{U}_{j1}^i &= c^{-2} f_{21'ij}, \quad \hat{U}_{j2}^i = c_2^{-2} \delta_j^i f_{02} - \nu^{-2} f_{22'ij}.\end{aligned}\quad (29)$$

\hat{U}_{j1}^i описывает деформации сжатия-растяжения, которые распространяются в упругой среде со скоростью c_1 (*объемные волны*), а \hat{U}_{j2}^i – сдвиговые деформации (*сдвиговые волны*), которые распространяются медленнее со скоростью c_2 .

6. Фундаментальная матрица напряжений \hat{T}_i^j . Используя закон Гука (1), введем тензоры напряжений, порождаемые тензором Грина:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{ij}^k(x, z) &= \lambda \delta_{ij} \partial_m \hat{U}_m^k + \mu (\partial_j \hat{U}_i^k + \partial_i \hat{U}_j^k), \\ \hat{\Gamma}_i^k(x, z, n) &= \hat{S}_{ij}^k(x, z) n_j, \quad \hat{T}_i^j(x, z, n) = -\hat{\Gamma}_j^i(x, z, n).\end{aligned}\quad (30)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 2. Тензор \hat{T}_i^j является обобщенным решением уравнения

$$A_i^j(\partial_{x'}) \hat{T}_j^k = -K_k^i(\partial_{x'}, n) \delta(x'),$$

где $K_i^l(\partial_{x'}, n) = \lambda n_i \partial_l + \mu_j (\delta_i^l \partial_j + \delta_j^l \partial_i)$.

Доказательство: Из (32), (1) получим: $-\hat{T}_i^j = \hat{\Gamma}_i^j = K_i^l(\partial_{x'}, n) \hat{U}_l^j(x, z)$. Следовательно, $A_i^j(\partial_{x'}) \hat{T}_j^k = -A_i^j(\partial_{x'}) \hat{\Gamma}_k^j = -A_i^j(\partial_{x'}) K_k^l(\partial_{x'}, n) \hat{U}_l^j = -K_k^l(\partial_{x'}, n) A_i^j(\partial_{x'}) \hat{U}_l^j(x, z) = -K_k^l(\partial_{x'}, n) \delta_i^l \delta(x') = -K_k^i(\partial_{x'}, n) \delta(x')$. Теорема доказана.

Тензор вычисляется, используя соответствующие формулы п.4, в зависимости от размерности задачи и скорости движения. Аналогично можно выделить объемную и сдвиговую составляющие $\hat{T}_i^j(x, n) = \hat{T}_{i1}^j + \hat{T}_{i2}^j$. Он описывает динамику упругой среды при действии бегущей сосредоточенной силы мультипольного типа.

Заключение. Представленные фундаментальные матрицы можно использовать для изучения динамики сред с бегущими нагрузками, распределенными по объему, поверхности или прямой, используя формулу теоремы 1.

Если g_k – локально интегрируемые функции с конечным носителем, что типично для физических задач, в силу регулярности U , решение имеет вид:

$$\hat{u}_i(x, z) = \int_{\text{supp}G(y)} U_i^k(x' - y) g_k(y) dy_1 \dots dy_N.$$

Условия на g_k можно ослабить, если учесть асимптотику U на бесконечности.

Если бегущая сила сосредоточена на цилиндрической поверхности S , образующая которой параллельна оси Z , то ее можно описать сингулярной функцией с компонентами $\hat{g}_k = g_k(x, z) \delta_S(x, z)$. Тогда решение имеет вид:

$$\hat{u}_i(x, z) = \int_S U_i^k(x' - y) g_k(y) dS(y).$$

Если бегущая сила сосредоточена на оси Z , ее можно описать сингулярной функцией $\hat{g}_k = g_k(z)\delta(x)$. Тогда решение имеет вид:

$$\hat{u}_i(x, z) = \int_{R^1} U_i^k(x, z - y)g_k(z)dz.$$

Используя вид U в зависимости от размерности задачи и скорости бегущей нагрузки, можно получить аналитические формулы для определения перемещений среды. При этом эти решения, в силу леммы Дюбуа-Реймона [1], будут классическими.

В случае сингулярных сил другого вида для построения обобщенного решения следует использовать формулу свертки согласно ее определению для обобщенных функций (см.[1,2]).

Цитированная литература

1. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1978.
2. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1. Теория распределений и анализ Фурье. М., 1986.
3. **Алексеева Л. А.** // Математический журнал. Т.8, №2(28). 2008. С. 1 – 19.
4. **Алексеева Л. А.** // Прикладная математика и механика. 1991. Т.55, №5. С. 854 – 862.
5. **Новацкий В.** Теория упругости. М., 1975.
6. **Петрашень Г. И.** Основы математической теории распространения упругих волн. В кн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып.ХVIII. Л., 1978.
7. **Алексеева Л. А.** // Препринт Института математики МН-АН РК, 1997.

Поступила в редакцию 09.02.2009г.

УДК 517.968.7

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. Т. АСАНОВА

Институт Математики МОиН РК

050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Рассматривается краевая задача с данными на характеристиках для систем интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Установлена эквивалентность корректной разрешимости рассматриваемой задачи и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.

В области $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается краевая задача с данными на характеристиках для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x) + \int_0^T \left[K_3(t, x, \tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} + K_2(t, x, \tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} + K_1(t, x, \tau)u(\tau, x) \right] d\tau, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$P_2(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + P_1(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} + P_0(x)u(0, x) + S_2(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} + S_1(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial t} + S_0(x)u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где $(n \times n)$ – матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, n – вектор-функция $f(t, x)$ являются непрерывными в $\bar{\Omega}$, $(n \times n)$ – матрицы $K_i(t, x, \tau)$ непрерывны на $\bar{\Omega} \times [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, $(n \times n)$ – матрицы $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, n – вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$,

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1, n} |u_i(t, x)|, \quad \|A(t, x)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|, \quad \|\varphi\|_0 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi(x)\|,$$

Keywords: *system of integro-differential equations of hyperbolic type, boundary value problem with data on characteristics, method of additional parameter's introduction, correct solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 45K05, 35L20

© А. Т. Асанова, 2009.

$$\|f\|_1 = \max_{(t,x) \in \bar{\Omega}} \|f(t,x)\|, \quad \|K_1\|_2 = \max_{(t,x,\tau) \in \Omega \times [0,T]} \|K_1(t,x,\tau)\|.$$

Пусть $C(J, R^n)$ – множество непрерывных на J ($J \subset R^1$ или $J \subset R^2$) функций $u : J \rightarrow R^n$. Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \Omega$ и выполнены краевые условия (2), (3).

В настоящей статье изучаются вопросы существования, единственности классического решения краевой задачи с данными на характеристиках для систем интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (1) – (3). Доказывается утверждение об эквивалентности корректной разрешимости задачи (1) – (3) и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.

Достаточные условия существования периодических по времени с периодом T решений систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с импульсным воздействием установлены численно-аналитическим методом в [1]. Вопросы существования классического решения задачи Гурса для систем нагруженных гиперболических уравнений изучены в [2]. Нелокальная краевая задача с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений (1) без интегрального слагаемого рассмотрена в [3-5] методом введения функциональных параметров.

Введем обозначения $v(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ и перейдем от задачи (1) – (3) к следующей эквивалентной задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & A(t,x)v + \int_0^T K_3(t,x,\tau)v(\tau,x)d\tau + f(t,x) + \\ & + B(t,x)w(t,x) + C(t,x)u + \int_0^T [K_2(t,x,\tau)w(\tau,x) + K_1(t,x,\tau)u(\tau,x)]d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & P_2(x)v(0,x) + S_2(x)v(T,x) = \varphi(x) - \\ & - P_1(x)w(0,x) - P_0(x)u(0,x) - S_1(x)w(T,x) - S_0(x)u(T,x), \quad x \in [0,\omega], \end{aligned} \quad (5)$$

$$u(t,x) = \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \quad w(t,x) = \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi. \quad (6)$$

В задаче (4) – (6) условие $u(t,0) = 0$ учтено в соотношениях (6). Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ называется решением задачи (4) – (6), если функция $v(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству двухточечных краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(t,x)$, $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$, $\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

Определение 1. Краевая задача (1) – (3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t,x)$, $\varphi(x)$ она имеет единственное классическое решение $u(t,x)$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max \left(\|u\|_1, \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_1, \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_1 \right) & \leq \\ & \leq \tilde{K} \max \left(\|f\|_1, \|\varphi\|_0 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где константа \tilde{K} не зависит от $f(t, x)$, $\varphi(x)$.

Отдельно рассмотрим семейство двухточечных краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + \int_0^T K_3(t, x, \tau)v(\tau, x)d\tau + F(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, \omega], \quad v \in R^n, \quad (8)$$

$$P_2(x)v(0, x) + S_2(x)v(T, x) = \Phi(x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (9)$$

При фиксированных $x \in [0, \omega]$ задача (8), (9) является линейной двухточечной краевой задачей для интегро-дифференциальных уравнений. Вопросы существования и единственности решения задачи (8), (9) при фиксированных $x \in [0, \omega]$ исследованы в работе [6]. В ней предложен метод исследования и решения линейной двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений и получен критерий однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

При изменении переменной x на $[0, \omega]$ получим семейство двухточечных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Теорема. Краевая задача (1) – (3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима задача (8), (9).

Доказательство. Пусть задача (1) – (3) корректно разрешима. Тогда для любых функций $f(t, x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\varphi(x) \in C([0, \omega], R^n)$ существует $u(t, x)$ единственное решение задачи (1) – (3) и для него справедливо неравенство (7). Из наших предположений следует оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|_1 \leq \tilde{K}_0 \max(\|f\|_1, \|\varphi\|_0),$$

$$\tilde{K}_0 = \left(\|A\|_1 + \|B\|_1 + \|C\|_1 + T \sum_{i=1}^3 \|K_i\|_2 \right) \tilde{K} + 1.$$

Поэтому существуют $U \in L(C(\bar{\Omega}, R^n))$, $V \in L(C([0, \omega], R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, определяющие решение задачи (1) – (3) – функцию $u(t, x) = Uf(t, x) + V\varphi(x)$ и $U_i \in L(C(\bar{\Omega}, R^n))$,

$V_i \in L(C([0, \omega], R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $i = 1, 2$, где операторы $U_1 = \frac{\partial}{\partial x} \circ U$, $U_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \circ U$,

$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} \circ V$, $V_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \circ V$ являются суперпозицией операторов дифференцирования и U ,

V . Возьмем пару функций $(F(t, x), \Phi(x))$, принадлежащих прямой сумме двух пространств $Z = C(\bar{\Omega}, R^n) \dot{+} C([0, \omega], R^n)$ [7, с.162] с нормой $\|(F, \Phi)\|_Z = \max(\|F\|_1, \|\Phi\|_0)$. Пару функций $(f(t, x), \varphi(x))$ из Z определим из систем функциональных уравнений:

$$B(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + C(t, x)u(t, x) + \int_0^T \left[K_2(t, x, \tau)w(\tau, x) + K_1(t, x, \tau)u(\tau, x) \right] d\tau + f(t, x) = F(t, x), \quad (10)$$

$$\varphi(x) - P_1(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} - P_0(x)u(0, x) - S_1(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial t} - S_0(x)u(T, x) = \Phi(x), \quad (11)$$

где $u(t, x)$ – решение задачи (1) – (3) при этих функциях $f(t, x)$, $\varphi(x)$. Так как

$$u(t, x) = 0 + \int_0^x \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^x [U_1 f(t, \xi) + V_1 \varphi(\xi)] d\xi,$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 0 + \int_0^x \frac{\partial^2 u(t, \xi)}{\partial \xi \partial t} d\xi = \int_0^x \frac{\partial^2 u(t, \xi)}{\partial t \partial \xi} d\xi = \int_0^x [U_2 f(t, \xi) + V_2 \varphi(\xi)] d\xi,$$

то подставляя их в (10), (11), получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно пары функций $(f(t, x), \varphi(x))$:

$$f(t, x) + B(t, x) \int_0^x [U_2 f(t, \xi) + V_2 \varphi(\xi)] d\xi + \int_0^x \int_0^T K_2(t, x, \tau) [U_2 f(\tau, \xi) + V_2 \varphi(\xi)] d\tau d\xi +$$

$$+ C(t, x) \int_0^x [U_1 f(t, \xi) + V_1 \varphi(\xi)] d\xi + \int_0^x \int_0^T K_1(t, x, \tau) [U_1 f(\tau, \xi) + V_1 \varphi(\xi)] d\tau d\xi = F(t, x), \quad (12)$$

$$\varphi(x) - P_1(x) \int_0^x [U_2 f(t, \xi) + V_2 \varphi(\xi)] |_{t=0} d\xi - S_1(x) \int_0^x [U_2 f(t, \xi) + V_2 \varphi(\xi)] |_{t=T} d\xi -$$

$$- P_0(x) \int_0^x [U_1 f(t, \xi) + V_1 \varphi(\xi)] |_{t=0} d\xi - S_0(x) \int_0^x [U_1 f(t, \xi) + V_1 \varphi(\xi)] |_{t=T} d\xi = \Phi(x), \quad (13)$$

$(t, x) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \omega]$. При изменении $t \in [0, T]$ получим однопараметрическое семейство систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Взяв за начальное приближение пару $(F(t, x), \Phi(x)) \in Z$, последующие приближения определим из систем уравнений:

$$f^{(k)}(t, x) = F(t, x) -$$

$$- B(t, x) \int_0^x [U_2 f^{(k-1)}(t, \xi) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)] d\xi - \int_0^x \int_0^T K_2(t, x, \tau) [U_2 f^{(k-1)}(\tau, \xi) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)] d\tau d\xi -$$

$$- C(t, x) \int_0^x [U_1 f^{(k-1)}(t, \xi) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)] d\xi - \int_0^x \int_0^T K_1(t, x, \tau) [U_1 f^{(k-1)}(\tau, \xi) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)] d\tau d\xi,$$

$$\varphi^{(k)}(x) = \Phi(x) +$$

$$+ P_1(x) \int_0^x [U_2 f^{(k-1)}(t, \xi) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)] |_{t=0} d\xi + S_1(x) \int_0^x [U_2 f^{(k-1)}(t, \xi) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)] |_{t=T} d\xi +$$

$$+ P_0(x) \int_0^x [U_1 f^{(k-1)}(t, \xi) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)] |_{t=0} d\xi + S_0(x) \int_0^x [U_1 f^{(k-1)}(t, \xi) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)] |_{t=T} d\xi,$$

$k = 1, 2, \dots$. Несложно установить, что последовательность пар $(f^{(k)}(t, x), \varphi^{(k)}(x))$ при $k \rightarrow \infty$ в норме Z сходится к единственному решению системы (12), (13) – паре $(f(t, x), \varphi(x)) \in Z$ и справедлива оценка:

$$\max(\|f\|_1, \|\varphi\|_0) \leq \tilde{K}_1 \cdot \max(\|F\|_1, \|\Phi\|_0), \quad (14)$$

где $\tilde{K}_1 = \exp[2\omega \times \max(\|B\|_1 + T\|K_2\|_2)\tilde{K}_0 + \|C\|_1 + T\|K_1\|_2\tilde{K}, \|\|P_1\|_0 + \|S_1\|_0\tilde{K}_0 + \|\|P_0\|_0 + \|S_0\|_0\tilde{K}]$.

Пусть $u(t, x)$ – решение задачи (1) – (3) при найденной паре функций $(f(t, x), \varphi(x))$. Тогда функция $v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ будет решением задачи (8) – (9) при выбранной паре $(F(t, x), \Phi(x))$. Действительно, в силу (3), (10), (11) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x) + \\ &+ \int_0^T \left[K_3(t, x, \tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} + K_2(t, x, \tau) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} + K_1(t, x, \tau)u(\tau, x) \right] d\tau = \\ &= A(t, x)v + \int_0^T K_3(t, x, \tau)v(\tau, x)d\tau + F(t, x), \end{aligned}$$

$$P_2(x)v(0, x) + S_2(x)v(T, x) = P_2(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + S_2(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} = \Phi(x),$$

при всех $(t, x) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \omega]$. Причем, из корректной разрешимости задачи (1) – (3) и неравенства (14) следует оценка:

$$\|v\|_1 = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_1 \leq \tilde{K} \cdot \max\left(\|f\|_1, \|\varphi\|_0\right) \leq \tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 \cdot \max\left(\|F\|_1, \|\Phi\|_0\right). \quad (15)$$

Установим единственность решения задачи (8) – (9). Пусть $v(t, x)$ – решение задачи (8) – (9) при $F(t, x) = 0$, $\Phi(x) = 0$.

С помощью $v(t, x)$ и матриц $B(t, x)$, $C(t, x)$, $K_2(t, x, s)$, $K_1(t, x, s)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$ построим функции $\tilde{u}(t, x) = \int_0^x v(t, \xi)d\xi$, $\tilde{f}(t, x) =$

$$\begin{aligned} &= -B(t, x) \int_0^x \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} d\xi - C(t, x) \int_0^x v(t, \xi)d\xi - \int_0^T \left[K_2(t, x, \tau) \int_0^x \frac{\partial v(\tau, \xi)}{\partial \tau} d\xi + K_1(t, x, \tau) \int_0^x v(\tau, \xi)d\xi \right] d\tau, \\ \tilde{\varphi}(x) &= P_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(0, \xi)}{\partial t} d\xi + S_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(T, \xi)}{\partial t} d\xi + P_0(x) \int_0^x v(0, \xi)d\xi + S_0(x) \int_0^x v(T, \xi)d\xi. \end{aligned}$$

Покажем, что функция $\tilde{u}(t, x)$ является решением задачи (1) – (3) при $f(t, x) = \tilde{f}(t, x)$, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$. Из определения функции $\tilde{u}(t, x)$ следует существование непрерывных частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x} = v(t, x), \quad \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} d\xi, \quad \text{для всех } (t, x) \in \bar{\Omega}$$

и $\tilde{u}(t, 0) = 0$ при $t \in [0, T]$. Учитывая, что $v(t, x)$ – решение задачи (8) – (9) при $F(t, x) = 0$, $\Phi(x) = 0$ имеем:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = A(t, x)v(t, x) + \int_0^T K_3(t, x, \tau)v(\tau, x)d\tau = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T K_3(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x} d\tau + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u}(t, x) + \int_0^T K_2(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial t} d\tau + \\
 & + \int_0^T K_1(t, x, \tau) \tilde{u}(\tau, x) d\tau - B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t} - C(t, x) \tilde{u}(t, x) - \int_0^T K_2(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial t} d\tau - \\
 & - \int_0^T K_1(t, x, \tau) \tilde{u}(\tau, x) d\tau = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x} + \int_0^T K_3(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x} d\tau + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u}(t, x) + \\
 & + \int_0^T K_2(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial t} d\tau + \int_0^T K_1(t, x, \tau) \tilde{u}(\tau, x) d\tau - B(t, x) \int_0^x \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} d\xi - C(t, x) \int_0^x v(t, \xi) d\xi - \\
 & - \int_0^T K_2(t, x, \tau) \int_0^x \frac{\partial v(\tau, \xi)}{\partial t} d\xi d\tau - \int_0^T K_1(t, x, \tau) \int_0^x v(\tau, \xi) d\xi d\tau = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x} + \\
 & + \int_0^T K_3(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x} d\tau + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u}(t, x) + \int_0^T K_2(t, x, \tau) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial t} d\tau + \\
 & + \int_0^T K_1(t, x, \tau) \tilde{u}(\tau, x) d\tau + \tilde{f}(t, x), \\
 & P_2(x) \frac{\partial \tilde{u}(0, x)}{\partial x} + S_2(x) \frac{\partial \tilde{u}(T, x)}{\partial x} = P_2(x) v(0, x) + S_2(x) v(T, x) = 0 = -P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(0, x)}{\partial t} - \\
 & - S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(T, x)}{\partial t} - P_0(x) \tilde{u}(0, x) - S_0(x) \tilde{u}(T, x) + P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(0, x)}{\partial t} + S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(T, x)}{\partial t} + \\
 & + P_0(x) \tilde{u}(0, x) + S_0(x) \tilde{u}(T, x) = -P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(0, x)}{\partial t} - S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(T, x)}{\partial t} - P_0(x) \tilde{u}(0, x) - S_0(x) \tilde{u}(T, x) + \\
 & + P_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(0, \xi)}{\partial t} d\xi + S_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(T, \xi)}{\partial t} d\xi + P_0(x) \int_0^x v(0, \xi) d\xi + S_0(x) \int_0^x v(T, \xi) d\xi = \\
 & = -P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(0, x)}{\partial t} - S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(T, x)}{\partial t} - P_0(x) \tilde{u}(0, x) - S_0(x) \tilde{u}(T, x) + \tilde{\varphi}(x),
 \end{aligned}$$

т.е. функция $\tilde{u}(t, x)$ является решением задачи (1) – (3) при $f(t, x) = \tilde{f}(t, x)$, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$.

Так как

$$v(t, \xi) = \frac{\partial \tilde{u}(t, \xi)}{\partial \xi} = U_1 \tilde{f}(t, \xi) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi), \quad \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(t, \xi)}{\partial t \partial \xi} = U_2 \tilde{f}(t, \xi) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi),$$

то пара функций $(\tilde{f}(t, x), \tilde{\varphi}(x))$, по построению принадлежащая Z , является решением однородной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\tilde{f}(t, x) + B(t, x) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(t, \xi) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)] d\xi + \int_0^T K_2(t, x, \tau) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(\tau, \xi) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)] d\xi d\tau +$$

$$+C(t, x) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(t, \xi) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)] d\xi + \int_0^T K_1(t, x, \tau) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(\tau, \xi) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)] d\xi d\tau = 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}(x) - P_1(x) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(t, \xi) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)] |_{t=0} d\xi - S_1(x) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(t, \xi) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)] |_{t=T} d\xi - \\ & - P_0(x) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(t, \xi) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)] |_{t=0} d\xi - S_0(x) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(t, \xi) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)] |_{t=T} d\xi = 0, \quad x \in [0, \omega]. \quad (17) \end{aligned}$$

В силу того, что система уравнений (16), (17) в пространстве Z имеет только нулевое решение, получим $\tilde{f}(t, x) = 0$, $\tilde{\varphi}(x) = 0$ и

$$v(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial \xi} = U_1 \tilde{f}(t, x) + V_1 \tilde{\varphi}(x) = U_1 0 + V_1 0 = 0$$

для всех $(t, x) \in \bar{\Omega}$. Таким образом из корректной разрешимости задачи (1) – (3) следует корректная разрешимость задачи (8) – (9). Теперь предположим, что задача (8) – (9) корректно разрешима. В силу эквивалентности задач (1) – (3) и (4) – (6) достаточно показать корректную разрешимость задачи (4) – (6).

Решение задачи (4) – (6) – тройку функций $\{v(t, x), u(t, x), w(t, x)\}$ найдем методом последовательных приближений. За нулевое приближение по $u(t, x)$, $w(t, x)$ возьмем нули, а $v^{(0)}(t, x)$ найдем как решение задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + \int_0^T K_3(t, x, \tau)v(\tau, x)d\tau + f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}, \quad (18)$$

$$P_2(x)v(0, x) + S_2(x)v(T, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (19)$$

По предположению задача (18), (19) имеет единственное решение $v^{(0)}(t, x)$ и

$$\begin{aligned} \|v^{(0)}\|_1 &\leq \tilde{K}_2 \max\{\|f\|_1, \|\varphi\|_0\}, \\ \|\partial v^{(0)}/\partial t\|_1 &\leq \left(\|A\|_1 + \|K_3\|_2 \tilde{K}_2 + 1 \right) \times \\ &\quad \times \max\{\|f\|_1, \|\varphi\|_0\}. \end{aligned}$$

Если известны $u^{(k-1)}(t, x)$, $w^{(k-1)}(t, x)$, то $v^{(k)}(t, x)$ найдем, решая задачу (4), (5), где в правых частях уравнения $w(t, x) = w^{(k-1)}(t, x)$, $u(t, x) = u^{(k-1)}(t, x)$, $k = 1, 2, \dots$. При найденном $v^{(k)}(t, x)$ следующие приближения по $u(t, x)$, $w(t, x)$ определим из соотношений (6):

$$u^{(k)}(t, x) = \psi(t) + \int_0^x v^{(k)}(t, \xi) d\xi, \quad w^{(k)}(t, x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(t, \xi)}{\partial t} d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(k)}(t, x) = v^{(k)}(t, x) - v^{(k-1)}(t, x)$, $\Delta u^{(k)}(t, x) = u^{(k)}(t, x) - u^{(k-1)}(t, x)$, $\Delta w^{(k)}(t, x) = w^{(k)}(t, x) - w^{(k-1)}(t, x)$ и для них с помощью корректной разрешимости задачи (8), (9) установим оценки:

$$\max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k+1)}(t, x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(t, x)/\partial t\| \right) \leq$$

$$\leq \max\left(\tilde{K}_2, [\|A\|_1 + \|K_3\|_2]\tilde{K}_2 + 1\right) \max\left(\|B\|_1 + \|K_2\|_2 + \|C\|_1 + \|K_1\|_2, \|P_1\|_0 + \|S_1\|_0 + \|P_0\|_0 + \|S_0\|_0\right) \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta w^{(k)}(t, x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\Delta u^{(k)}(t, x)\|\right), \quad (20)$$

$$\max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta w^{(k)}(t, x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\Delta u^{(k)}(t, x)\|\right) \leq \int_0^x \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k)}(t, \xi)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(t, \xi) / \partial t\|\right) d\xi. \quad (21)$$

Отсюда следует основное неравенство:

$$\max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k+1)}(t, x)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(t, x) / \partial t\|\right) \leq \max\left(\tilde{K}_2, [\|A\|_1 + \|K_3\|_2]\tilde{K}_2 + 1\right) \cdot \tilde{K}_3 \int_0^x \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k)}(t, \xi)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(t, \xi) / \partial t\|\right) d\xi, \quad (22)$$

где $\tilde{K}_3 = \max\left(\|B\|_1 + \|K_2\|_2 + \|C\|_1 + \|K_1\|_2, \|P_1\|_0 + \|S_1\|_0 + \|P_0\|_0 + \|S_0\|_0\right)$.

Из (22) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{v^{(k)}(t, x)\}$, $\{\partial v^{(k)}(t, x) / \partial t\}$ в норме пространства $C(\bar{\Omega}, R^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(k)}(t, x)\}$, $\{w^{(k)}(t, x)\}$ вытекает из (21). При этом предельные функции $v^*(t, x)$, $\partial v^*(t, x) / \partial t$, $u^*(t, x)$, $w^*(t, x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и тройка функций $\{v^*(t, x), u^*(t, x), w^*(t, x)\}$ является решением задачи (4) – (6). Используя оценки (20) – (22), получим

$$\max\left(\|v^*\|_1, \|u^*\|_1, \|w^*\|_1\right) \leq \tilde{K}_4 \cdot \max\left(\|f\|_1, \|\varphi\|_0\right), \quad (23)$$

где $\tilde{K}_4 = \max\left(e^{\tilde{K}_5} [1 + \omega \max(\tilde{K}_2, \alpha \tilde{K}_2 + 1)], \tilde{K}_2 [\tilde{K}_3 (1 + \omega \max(\tilde{K}_2, \alpha \tilde{K}_2 + 1)) + 1]\right)$, $\tilde{K}_5 = \max(\tilde{K}_2, \alpha \tilde{K}_2 + 1) \cdot \tilde{K}_3 \omega$ и не зависит от f , φ .

Пусть теперь тройка $\{\tilde{v}(t, x), \tilde{u}(t, x), \tilde{w}(t, x)\}$ – решение задачи (4) – (6), где $f(t, x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ для всех $(t, x) \in \bar{\Omega}$. Тогда из корректной разрешимости задачи (8), (9) и соотношений (6) вытекают равенства $\tilde{v}(t, x) = 0$, $\tilde{u}(t, x) = 0$, $\tilde{w}(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \bar{\Omega}$. Отсюда и из оценки (23) следует корректная разрешимость задачи (1) – (3). Теорема 1 доказана.

Цитированная литература

1. Ткач А.Б. // Нелинейные колебания. 2005. Т.8, № 1. С. 123 – 131.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. НИИПМА К-Б: НЦ РАН. М., 2006.
3. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Дифференц. уравнения. 2003. Т.39, № 10. С. 1343 – 1354.
4. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295 – 297.
5. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337 – 346.
6. Джумабаев Д. С. // Математический журнал. 2008. Т.8, № 2. С. 44 – 48.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 09.01.2009г.

УДК 517.51

ОБ ОДНОМ ТРЕХВЕСОВОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

Ш. БИЛАЛ

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина,125 bilal@math.kz

Получены необходимые и достаточные условия на весовые функции для выполнения трехвесового интегрального неравенства

1. Постановка задачи. Пусть $J = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $u(\cdot), \rho(\cdot), v(\cdot)$ – неотрицательные измеримые на J функции. Пусть K интегральный оператор вида:

$$Kf(x) = \int_a^x K(x, t)f(t)dt, \quad (1)$$

с неотрицательным ядром $K(x, t)$ ($a < t \leq x < b$), удовлетворяющим при $a < t \leq s \leq x < b$ условию:

$$K(x, s) \leq K(x, t). \quad (2)$$

Обозначим через $Q_p \equiv Q_p(J, \rho, v, K)$ пространство измеримых на J функций $f \geq 0$, для которых конечен функционал

$$\|f\|_{Q_p} \equiv \|\rho f\|_p + \|vKf\|_p, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_p$ – норма пространства L_p , $1 < p \leq \infty$.

Предположим, что функции $f_0(\cdot) = (\rho(\cdot))^{-p'} X_{t,z}(\cdot)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, и $X_{t,z}(\cdot)$ – характеристическая функция интервала $(t, z) \subset J$, принадлежат Q_p . Тогда из (2) и конечности (3) вытекают следующие минимальные (необходимые) требования на функции ρ, v , и K :

$$\rho^{-1}(\cdot) \equiv \frac{1}{\rho(\cdot)} \in L_p^{loc}, \quad v(\cdot) \in L_p(t, b), \quad v(\cdot)K(\cdot, t) \in L_p(t, b), \quad \forall t \in J,$$

которые будем считать выполненными.

Из неравенства

$$K(x, s) \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^x K(x, t)f(t)dt, \quad a < s \leq x < b,$$

Keywords: *Inequality, fractional derivative, characteristic function*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Ш. Биал, 2009.

вытекающего из (2), следует, что $f \in L_p(a, t)$, $t \in J$, для любого $f \in Q_p$. Поэтому для $f \in Q_p$ определим оператор

$$Pf(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

В работе решается задача получения необходимых и достаточных условий на функции u, ρ, v, K , при которых выполнено неравенство

$$\|uPf\|_\infty \leq C(\|\rho f\|_p + \|vKf\|_p), \quad (4)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $f \in Q_p$. Р. Ойнаров в своей работе [1], обобщая неравенство Харди [2]

$$\|uPf\|_q \leq C(\|\rho f\|_p$$

на трехвесовой случай, рассматривал аналогичную задачу с $q < \infty$, в нашем случае $q = \infty$.

2. Вспомогательные утверждения. Неравенство (4) включает в себя некоторые интегральные неравенства. Этот факт мы докажем в виде леммы.

Лемма. Пусть в (4)

$$K(x, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x - s)^{\alpha-1}, \quad \alpha > 1, \quad Kf = g.$$

Тогда неравенство (4) эквивалентно неравенству

$$\|ug^{(\alpha-1)}\|_\infty \leq C(\|\rho g^{(\alpha)}\|_p + \|vg\|_p), \quad (5)$$

где $g^{(\alpha)}$ – дробное производная функции g порядка $\alpha > 1$ в смысле Римана-Лиувилля.

Доказательство. Воспользуемся выкладками относительно дробного дифференцирования и интегрирования из [3].

Итак, по условию

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - s)^{\alpha-1} f(s)ds = g(x). \quad (6)$$

Мы должны показать, что

$$f(x) = D_{a+}^\alpha g(x) = g^{(\alpha)}(x),$$

где D_{a+}^α – оператор дробного дифференцирования порядка α . Для этого подействуем оператором D_{a+}^α на обе части равенства (6) т.е.

$$D_{a+}^\alpha : \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - s)^{\alpha-1} f(s)ds = D_{a+}^\alpha g(x).$$

Или

$$D_{a+}^\alpha : I_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha g(x), \quad (7)$$

где I_{a+}^α – оператор дробного интегрирования порядка α . Так как число $\alpha > 1$, его можно записать как сумму целой и дробной частей: $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, Тогда неравенство (7) запишется в виде:

$$D_{a+}^{[\alpha]+\{\alpha\}} : I_{a+}^{[\alpha]+\{\alpha\}} f(x) = D_{a+}^\alpha g(x). \quad (8)$$

Когда α – целое число, т.е. в случае $\alpha = [\alpha]$, под дробной производной порядка $\alpha([\alpha])$ будем понимать обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^{[\alpha]} = \frac{d^{[\alpha]}}{dx}.$$

Следовательно,

$$D_{a+}^{\alpha} f =_{def} \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} D_{a+}^{\{\alpha\}} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]-1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}}.$$

И неравенство (8) имеет вид:

$$\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} I_{a+}^{[\alpha]+\{\alpha\}} f(x) = D_{a+}^{\alpha} g.$$

Далее, пользуясь свойством оператора дробного интегрирования, имеем:

$$\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{a+}^{[\alpha]+1} f(x) = D_{a+}^{\alpha} g.$$

По известной формуле отсюда следует, что

$$f(x) = D_{a+}^{\alpha} g = g^{\alpha}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$\varphi(z) = \left[\inf_{a < t < z} \left\{ \left(\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_t^b v^p(x) K^p(x, t) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right]^{-1},$$

$$A(z) = \varphi(z) \sup_{t > z} u(t), \quad A = \sup_{z > a} A(z).$$

Пишем $A \ll D$, если существует постоянная $C > 0$, может быть, зависящая от p , и имеет место неравенство $A \leq CD$. Соотношение $A \asymp D$ означает, что $A \ll D \ll A$.

3. Основные результаты. Имеет место

Теорема 1. Пусть $1 < p < q = \infty$ и K – оператор вида (1) с неотрицательным ядром $K(x, s)$, удовлетворяющим условию (2). Тогда неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда $A < \infty$, при этом $A \asymp C$, где C – наименьшая константа в (4).

Доказательство. Необходимость. Пусть для всех $f \in Q_p$ выполнено неравенство (4) с наименьшей константой $C > 0$. Пусть $(t, z) \subset J$. В (4) положим $f_0(\cdot) = \rho^{-p'}(\cdot) X_{t,z}(\cdot) \in Q_p$. Подставляя функцию $f_0(\cdot)$ в правую и левую части неравенства (4) и производя соответствующие вычисления и оценки, будем иметь нужный нам результат. Так как

$$u(x) \int_a^x f_0(\cdot) ds = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq t, \\ u(x) \int_t^x \rho^{-p'}(s) ds, & t \leq x \leq z, \\ u(x) \int_t^z \rho^{-p'}(s) ds, & x \geq z, \end{cases}$$

$$\|u P f_0\|_{\infty} = \sup_{x > a} (u(x) \int_a^x f_0(s) ds) \geq \int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \sup_{x > z} u(x), \quad (9)$$

$$\|\rho f_0\|_p = \left(\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (10)$$

$$\|v K f_0\|_p = \left(\int_t^z v^p(x) \left(\int_t^x K(x, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^p dx + \right. \\ \left. + \int_z^b v^p(x) \left(\int_t^z K(x, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_t^z v^p(x) K^p(x, t) \left(\int_t^x \rho^{-p'}(s) ds \right)^p dx + \right.$$

$$+ \left(\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \right)^p \int_z^b v^p(x) K^p(x, t) dx \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \left(\int_t^b v^p(x) K^p(x, t) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (11)$$

Подставляя полученные оценки (9), (10), (11) в (4), имеем:

$$\sup_{x>z} u(x) \leq C \left\{ \left(\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_t^b v^p(x) K^p(x, t) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Откуда, в силу независимости левой части от $t, a < t < z$,

$$\sup_{x>z} u(x) \leq C\varphi^{-1}(z) \text{ и } A(z) \ll C \text{ при всех } z > 0, \text{ т.е.}$$

$$A \ll C < \infty. \quad (12)$$

Достаточность. Пусть $A < \infty$. Для $k \in Z$ определим множество T_k :

$$T_k = \left\{ x > a : \int_a^x f(s) ds \geq 2^k \right\}.$$

Положим $x_k = \inf T_k$, если $T_k \neq \emptyset$ и $\infty = \inf T_k$, если $T_k = \emptyset$. В силу того, что непрерывная функция Pf не убывает и

$$\lim_{x \rightarrow a} Pf(x) = 0,$$

то $2^k = \int_a^{x_k} f(s) ds$ при $-\infty < k \leq N < \infty, x_k < x_{k+1}$ и $\bigcup_i [x_i, x_{i+1}] = [a, b], [x_i, x_{i+1}] \cap [x_j, x_{j+1}] = \emptyset$, если $i \neq j$. Из определения последовательности $\{x_k\}$ легко видеть, что

$$2^k \leq Pf(x) \leq 2^{k+1}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad (13)$$

$$2^{k-1} = Pf(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(s) ds. \quad (14)$$

Применяя (13) и (14), проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} u(x) \int_a^x f(s) ds &\leq 2^{k+1} \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} u(x) \leq 2^{k+1} \sup_{x_k \leq x} u(x) = \\ &= 2^{k+1} \left(\varphi(x_k) \sup_{x_k \leq x} u(x) \right) \varphi^{-1}(x_k) = 2^{k+1} A(x_k) \varphi^{-1}(x_k) \leq \\ &\leq 2^{k+1} A \inf_{a < t < x_k} \left\{ \left(\int_t^{x_k} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_t^b v^p(x) K^p(x, t) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \leq \\ &\leq A \left[2^{k+1} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + 2^{k+1} \left(\int_{x_{k-1}}^b v^p(x) K^p(x, x_{k-1}) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] = \\ &= A \left[4 \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(s) ds \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + 8 \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} f(s) ds \left(\int_{x_{k-1}}^b v^p(x) K^p(x, x_{k-1}) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(s) ds \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho(s)f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} = \\ & = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho(s)f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |\rho(s)f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = \|\rho f\|_p. \end{aligned} \quad (16)$$

Из условия теоремы имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} f(s) ds \left(\int_{x_{k-1}}^b v^p(x) K^p(x, x_{k-1}) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{x_{k-1}}^b v^p(x) \left(\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, s) f(s) ds \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\int_{x_{k-1}}^b v^p(x) \left(\int_{x_{k-2}}^x K(x, s) f(s) ds \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b v^p(x) \left(\int_a^x K(x, s) f(s) ds \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|vKf\|_p. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя оценки (15) и (16) в (14), получим:

$$\sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} u(x) \int_a^x f(s) ds \leq 8A(\|\rho f\|_p + \|vKf\|_p). \quad (18)$$

Так как

$$\|uPf\|_\infty = \sup_{x>a} u(x) \int_a^x f(s) ds = \sup_k \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} u(x) \int_a^x f(s) ds, \quad (19)$$

то из (17) и (18) имеем

$$\|uPf\|_\infty \leq 8A(\|\rho f\|_p + \|vKf\|_p),$$

т.е. неравенство (4) выполнено и для наименьшей константы C в (4). Имеет место оценка $C \ll A$, которая вместе с (12) дает оценку $A \asymp C$. Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что функция $\varphi(\cdot)$ не убывает, поэтому конечность величины A зависит от поведения функции $A(\cdot)$ на концах интервала J . Следовательно справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда неравенство (4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow a} A(z) < \infty, \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow b} A(z) < \infty. \quad (20)$$

В качестве примера рассмотрим неравенство:

$$\|x^\beta g^{(n-1)}\|_{\infty, (0, \infty)} \leq C(\|x^\gamma g^{(n)}\|_{p, (0, \infty)} + \|x^\lambda g\|_{p, (0, \infty)}), \quad (21)$$

$$g^{(n)} \geq 0, \quad g^{(i)}(0) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Применяя теорему 2 имеем

Утверждение 1. Пусть $1 < p < q = \infty$. Тогда неравенство (21) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta < 0, \quad \lambda + n - \frac{1}{p} < 0, \quad (22)$$

и

$$\beta - \lambda \geq n - 1 + \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad \gamma \geq \frac{1}{p'}, \tag{23}$$

$$\max\{\gamma, \lambda + n\} \geq \beta + 1 - \frac{1}{p} \geq \min\{\gamma, \lambda + n\} \quad \text{при} \quad \gamma < \frac{1}{p'}. \tag{24}$$

Действительно, в нашем примере $u(x) = x^\beta$, $\rho(x) = x^\gamma$, $v(x) = x^\lambda$, $J = (0, \infty)$, $K(x, s) = \frac{1}{\Gamma(n)}(x-s)^{n-1}$. Поэтому условие (22) вытекает из конечности интегралов, входящих в выражение $A(\cdot)$:

$$\left[\inf_{a < t < z} \left\{ \left(\int_t^z \rho^{-p'}(s) ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_t^b v^p(x) K^p(x, t) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right]^{-1} \sup_{t > z} u(t),$$

которое для нашего примера выглядит следующим образом:

$$A(z) = \left[\inf_{a < t < z} \left\{ \left(\int_t^z x^{-\gamma p'} dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\int_t^b x^{\lambda p} (x-t)^{(n-1)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right]^{-1} \sup_{x > z} x^\beta.$$

Чтобы показать при каких значениях параметров β, γ и λ неравенство (21) выполнено и имеет место конечность пределов (20), достаточно установить поведение функции $\varphi(\cdot)$ в окрестности точек 0 и ∞ .

Функцию φ^{-1} можно записать в виде:

$$\varphi^{-1}(z) = \inf_{0 < t < z} T(z, t),$$

где

$$T(z, t) = \left(\int_t^z s^{-\gamma p'} ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + t^{\lambda+n-\frac{1}{p'}} C_p^{n-1},$$

$$C_p^{n-1} = \left(\int_1^\infty s^{\lambda p} (s-1)^{p(n-1)} ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Действительно, если во втором интеграле, входящем в φ^{-1} , произвести соответствующую замену, то получим данное представление:

$$\left(\int_t^b x^{\lambda p} (x-t)^{(n-1)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{t} = s \\ x = st \\ dx = t ds \end{array} \right| =$$

$$\left(\int_1^{\frac{b}{t}} (st)^{\lambda p} t^{(n-1)p+1} (s-1)^{(n-1)p} ds \right)^{\frac{1}{p}} = t^{\lambda+n-\frac{1}{p'}} \left(\int_1^{\frac{b}{t}} s^{\lambda p} (s-1)^{(n-1)p} ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\gamma < \frac{1}{p'}$. Тогда несложно установить, что

$$\varphi^{-1}(z) \asymp z^{\gamma-\frac{1}{p'}} + z^{\lambda+n-\frac{1}{p'}}. \tag{25}$$

Пусть $\gamma = \frac{1}{p'}$. Рассмотрим два случая $z < 1$ и $z > 1$.

При $z < 1$ справедливо:

$$z^{\lambda+n-\frac{1}{p'}} C_p^{n-1} \leq \varphi^{-1}(z) \leq T(z, e^{-1}z) \ll z^{\lambda+n-\frac{1}{p'}},$$

т.е.

$$\varphi^{-1}(z) \asymp z^{\lambda+n-\frac{1}{p}}. \quad (26)$$

Если раскрыть значение $T(z, e^{-1}z)$, то будет очевидным данное представление.

При $z > 1$

$$\varphi^{-1} \leq T(z, \sqrt{z}) \ll |\ln z|^{-\frac{1}{p'}} + z^{\frac{\lambda+n-\frac{1}{p}}{2}},$$

$$\varphi^{-1} \geq \min \left\{ \inf_{0 < t \leq 1} T(z, t), \inf_{1 \leq t < z} T(z, t) \right\} \geq \min \left\{ 1, |\ln z|^{-\frac{1}{p'}} \right\}.$$

Поэтому для достаточно больших $z > 1$

$$\varphi^{-1} \asymp |\ln z|^{-\frac{1}{p'}}. \quad (27)$$

Здесь в первой серии неравенств левая часть следует из определения, а правая часть является результатом вычисления интеграла при $z > 1$. Во второй серии неравенств актуальность левой верхней части очевидно вырисовывается при $z \in (0, 1]$.

Пусть $\gamma > \frac{1}{p'}$. Тогда при $z < 1$

$$C_p^{n-1} z^{\lambda+n-\frac{1}{p}} \leq \varphi^{-1}(z) \leq T(z, \frac{1}{2}z) \ll z^{\lambda+n-\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\varphi^{-1}(z) \asymp z^{\lambda+n-\frac{1}{p}}. \quad (28)$$

При $z > 1$ имеем:

$$1 \ll \inf_{0 < t < \infty} \left\{ t^{\gamma-\frac{1}{p'}} + t^{\lambda+n-\frac{1}{p'}} \right\} \ll \varphi^{-1}(z) \leq T(1, \frac{1}{2}) \ll 1.$$

Откуда

$$\varphi^{-1}(z) \asymp 1. \quad (29)$$

Так как $A(z) \asymp z^\beta \varphi(z)$, то при $\gamma < \frac{1}{p'}$ из (22), (25) следует, что (20) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\beta - \min \left\{ \gamma - \frac{1}{p'}, \lambda + n - \frac{1}{p'} \right\} \geq 0,$$

$$\beta - \max \left\{ \gamma - \frac{1}{p'}, \lambda + n - \frac{1}{p'} \right\} \leq 0,$$

откуда следует (24). Если $\gamma \geq \frac{1}{p'}$, то из (22), (27), (29) имеем:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = 0,$$

а из (22), (26), (28) следует, что конечность предела

$$\lim_{z \rightarrow 0} A(z)$$

эквивалентна неравенству (23). Справедливость утверждения 1 установлена.

Цитированная литература

1. **Ойнаров Р.** //Мат. заметки. 1993. Т.54. Вып.2.

2. Харди Г., Литлвуд Д., Поля Г. Неравенства. М., 1948.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Поступила в редакцию 06.03.2009г.

УДК 517.968.72

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. С. ДЖУМАБАЕВ

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 dzhumabaev@list.ru

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения и предложен метод нахождения ее решений.

На $[0, T]$ рассматривается краевая задача:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$, $K(t, s)$ непрерывны соответственно на $[0, T]$, $[0, T] \times [0, T]$, $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Целью работы является нахождение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (1), (2) и построение ее решений.

По шагу $h > 0$: $Nh = T$ произведем разбиение $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ и от задачи (1), (2) перейдем к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметром:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)[u_j(s) + \lambda_j]ds + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad (3)$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t \in T-0} u_N(t) = d, \quad (5)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow ph-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \quad (6)$$

Keywords: *integral differential equations, linear boundary value problem, solvability, necessary and sufficient conditions*

2000 Mathematics Subject Classification: 45J05

© Д. С. Джумабаев, 2009.

Решением задачи (3) – (6) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$, где система функций $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t))$ является решением специальной задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений (3), (4) при $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)' \in R^{nN}$ и при этом значении параметра удовлетворяют краевому условию (5), условиям склеивания (6). Если $(\lambda^*, u^*[t])$ – решение задачи (3) – (6), то функция $x^*(t)$, определяемая на $[0, T]$ равенствами: $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t)$, будет решением задачи (1), (2).

Используя $X(t)$ – фундаментальную матрицу дифференциальной части (1), от специальной задачи Коши (3), (4) перейдем к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$u_r(t) = X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1\lambda_r + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s)[u_j(s) + \lambda_j]dsd\tau_1 + \\ + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (7)$$

В (7) предполагая $t = \tau$, умножая обе части на $K(t, \tau)$, интегрируя по τ на $[(r-1)h, rh)$, суммируя левые и правые части по r , получаем:

$$\sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau)u_r(\tau)d\tau = \sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau)X(\tau) \int_{(r-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s)u_j(s)dsd\tau_1d\tau + \\ + \sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau)X(\tau) \int_{(r-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \left\{ A(\tau_1)\lambda_r + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s)ds\lambda_j + f(\tau_1) \right\} d\tau_1d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$\Phi(h, t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)u_j(s)ds, \quad M_r(h, t) = \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau)X(\tau) \int_{(r-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1d\tau + \\ + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau)X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{rh} K(\tau_1, s)dsd\tau_1d\tau, \\ F(h, t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau)X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1d\tau,$$

уравнение (8) запишем в виде:

$$\Phi(h, t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau)X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\Phi(h, \tau_1)d\tau_1d\tau + \sum_{r=1}^N M_r(h, t)\lambda_r + F(h, t), \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

При выбранном $h > 0$: $Nh = T$ на $[0, T] \times [0, T]$ непрерывную по $t \in [0, T]$ и кусочно-непрерывную по $\tau \in [0, T]$ ($n \times n$) – матрицу $\tilde{K}(h, t, \tau)$ определяем равенствами:

$$\tilde{K}(h, t, \tau) = \int_{\tau}^{jh} K(t, s)X(s)dsX^{-1}(\tau),$$

$\tau \in [(j-1)h, jh)$, $j = \overline{1, N}$, $\tilde{K}(h, t, T) = 0$, $t \in [0, T]$.

Тогда (9) записывается в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\Phi(h, t) = \int_0^T \tilde{K}(h, t, \tau)\Phi(h, \tau)d\tau + M(h, t)\lambda + F(h, t), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

где $M(h, t) = (M_r(h, t))$, $r = \overline{1, N}$, матрица размерности $n \times nN$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)' \in R^{nN}$.

Лемма. Пусть заданы $h > 0$: $Nh = T$, $\lambda \in R^{nN}$ и непрерывная на $[0, T]$ вектор-функция $f(t)$. Тогда:

а) если система функций $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ – решение специальной задачи Коши (3), (4), то непрерывная на $[0, T]$ вектор-функция $\Phi(h, t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)u_j(s)ds$ удовлетворяет интегральному уравнению (10).

б) если $\tilde{\Phi}(h, t)$ – решение интегрального уравнения (10), то система функций $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t))$ с элементами

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(t) = & X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\lambda_r + \sum_{j=1}^N X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau) \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s)ds\lambda_j + \\ & + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau)\tilde{\Phi}(h, \tau)d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

будет решением специальной задачи Коши (3), (4).

Шаг $h > 0$: $Nh = T$, при котором однородное интегральное уравнение

$$\Phi(h, t) = \int_0^T \tilde{K}(h, t, \tau)\Phi(h, \tau)d\tau \quad (11)$$

имеет только тривиальное решение, назовем регулярным шагом разбиения интервала $[0, T]$. Множество регулярных шагов разбиения интервала $[0, T]$ обозначим через $\omega([0, T])$. Как следует из результатов [1] при наших предположениях относительно $A(t)$, $K(t, s)$ множество $\omega([0, T])$ непусто.

Предположим, что $h > 0$: $Nh = T$ принадлежит $\omega([0, T])$. Тогда уравнение (10) однозначно разрешимо и его единственное решение при заданных $\lambda \in R^{nN}$, $F(h, t) \in C([0, T], R^n)$ представляется в виде:

$$\Phi(h, t) = M(h, t)\lambda + F(h, t) + \int_0^T \Gamma(h, t, s, 1)[M(h, s)\lambda + F(h, s)]ds, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

где $\Gamma(h, t, s, 1)$ – резольвента Фредгольма интегрального уравнения (10).

В (7) вместо $\sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)u_j(s)ds$ подставляя правую часть (12), получаем:

$$u_r(t) = X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\lambda_r + \sum_{j=1}^N X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau)\widehat{M}_j(h, \tau)d\tau\lambda_j + \\ + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau)\widehat{F}(h, \tau)d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где

$$\widehat{M}_j(h, t) = \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)ds + M_j(h, t) + \int_0^T \Gamma(h, t, s, 1)M_j(h, s)ds, \\ \widehat{F}(h, t) = f(t) + F(h, t) + \int_0^T \Gamma(h, t, s, 1)F(h, s)ds.$$

Из (13) определяя $\lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)$, $\lim_{t \rightarrow ph-0} u_p(t)$, $p = \overline{1, N-1}$, и им соответствующие выражения подставляя в краевые условия (5), условия склеивания (6), умножая обе части (5) на $h > 0$, получаем линейную систему уравнений относительно введенных параметров λ_r , $r = \overline{1, N}$:

$$h \left[B + CX(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau)\widehat{M}_1(h, \tau)d\tau \right] \lambda_1 + hC \sum_{k=2}^{N-1} X(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau)\widehat{M}_k(h, \tau)d\tau\lambda_k + \\ + hC \left\{ I + X(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau)[A(\tau) + \widehat{M}_N(h, \tau)]d\tau \right\} \lambda_N = hd - hCX(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau)\widehat{F}(h, \tau)d\tau, \quad (14) \\ \sum_{k=1}^{p-1} X(ph) \int_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\widehat{M}_k(h, \tau)d\tau\lambda_k + \left\{ I + X(ph) \int_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)[A(\tau) + \widehat{M}_p(h, \tau)]d\tau \right\} \lambda_p - \\ - \left[I - X(ph) \int_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\widehat{M}_{p+1}(h, \tau)d\tau \right] \lambda_{p+1} + \sum_{k=p+2}^N X(ph) \int_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\widehat{M}_k(h, \tau)d\tau\lambda_k = \\ = -X(ph) \int_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\widehat{F}(h, \tau)d\tau, \quad p = \overline{1, N-1}, \quad (15)$$

где I – единичная матрица размерности n . Матрицу размерности $nN \times nN$, соответствующую левой части систем (14), (15), обозначив через $Q^*(h)$, эту систему запишем в виде:

$$Q^*(h)\lambda = -F^*(h), \quad \lambda \in R^{nN}, \quad (16)$$

где $F^*(h) = \left(-hd + hCX(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau)\widehat{F}(h, \tau)d\tau, X(h) \int_0^h X^{-1}(\tau)\widehat{F}(h, \tau)d\tau, \right.$

$$X(2h) \int_h^{2h} X^{-1}(\tau) \widehat{F}(h, \tau) d\tau, \dots, X[(N-1)h] \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} X^{-1}(\tau) \widehat{F}(h, \tau) d\tau \Big)' \in R^{nN}.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Если существует $h \in \omega([0, T]) : Nh = T$, при котором матрица $Q^*(h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима, то задача (1), (2) однозначно разрешима.

Теорема 2. Если задача (1), (2) однозначно разрешима, то для любого $h \in \omega([0, T])$ матрица $Q^*(h)$ имеет обратную.

Теорема 3. При $h \in \omega([0, T]) : Nh = T$ возможны лишь два случая:

а) $\det Q^*(h) \neq 0$ для всех $h \in \omega([0, T])$;

б) $\det Q^*(h) = 0$ для всех $h \in \omega([0, T])$.

В случае а) задача (1), (2) однозначно разрешима. В случае б) задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $F^*(h) \in R^{nN}$, составленный из заданной пары $(f(t), d)$, $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$, ортогонален к ядру транспонированной матрицы $[Q^*(h)]'$, т.е. для $\forall \theta \in \text{Ker}[Q^*(h)]'$ справедливо равенство $(F^*(h), \theta) = 0$, где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в R^{nN} .

Нахождение решения задачи (1), (2) осуществляется следующим образом. Из множества $\omega([0, T])$ выбирается шаг разбиения интервала $h > 0 : Nh = T$ и по исходным данным задачи (1), (2) составляются $(nN \times nN)$ – матрица $Q^*(h)$ и nN – вектор $F^*(h)$.

Если матрица $Q^*(h)$ обратима, то решая систему (16), находим единственное ее решение $\lambda^* = -[Q^*(h)]^{-1} F^*(h)$.

При найденном значении параметра $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*)' \in R^{nN}$ решая специальную задачу Коши (3), (4), находим систему функций $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t))$. По паре $(\lambda^*, u^*[t])$ равенствами: $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t)$ определяется решение задачи (1), (2) – функция $x^*(t)$.

Если матрица $Q^*(h)$ не имеет обратную, то находятся все решения однородной системы

$$[Q^*(h)]' \cdot \mu = 0$$

и составляется $\text{Ker}[Q^*(h)]'$. Проверяется ортогональность вектора $F^*(h)$ к ядру $[Q^*(h)]'$. При выполнении этого условия решается система (16). Для каждого решения этой системы находится соответствующее решение специальной задачи Коши (3), (4) и по ним определяется решение исходной задачи (1), (2). Число решений задачи (1), (2) зависит от числа решений уравнения (16).

Если условие ортогональности $F^*(h)$ к $\text{Ker}[Q^*(h)]'$ не выполняется, то решение задачи (1), (2) не существует.

В [1] на основе метода параметризации [2] установлен критерий однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Цитированная литература

1. Джумабаев Д. С. // Матем журнал. 2008. Т. 8, № 2. С. 44 – 48.
2. Джумабаев Д. С. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

Поступила в редакцию 01.03.2009г.

УДК 519.6:532.546

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Ш. Ж. МУСИРАЛИЕВА

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 MussiraliyevaSh@mail.ru

Разрабатывается численный метод для определения неизвестного граничного условия для модели Раппопорта-Лиса, описывающей процесс фильтрации двухфазной жидкости в горизонтальном пласте. На основе численных экспериментов анализируются возможности использования данного метода.

Модель Раппопорта-Лиса, описывающая процесс фильтрации двухфазной жидкости в горизонтальном пласте, является одной из наиболее употребляемых в компьютерных технологиях нефтедобычи моделей фильтрации двухфазной жидкости. Однако, при выполнении численных расчетов, как показано Коноваловым А. Н. [1], за счет обращения в нуль функций относительных фазовых проницаемостей естественные граничные условия являются плохо обусловленными (градиенты в окрестности скважины становятся бесконечно большими). В силу этого необходимо разрабатывать численные методы решения задачи, учитывающие данную особенность. В работах Бочарова О. Б. [2], Монахова В. Н., Жумагулова Б. Т. [3] предложено применять модель Баклея-Левретта в окрестности добывающей скважины.

Известно, что на правой границе фильтрационной области могут быть реализованы различные граничные режимы. Предполагая, что на нагнетательной скважине (на левой границе) известно два граничных условия, разрабатывается численный метод для определения решения на эксплуатационной скважине.

Постановка задачи. Модель Раппопорта-Лиса, описывающая фильтрацию двухфазной жидкости в отсутствии массовых сил при заданном суммарном расходе фаз, имеет вид [4,5]:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\chi(\xi) \varphi(s) \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) + \psi \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} (\omega(s) \chi_\xi(\xi)), \quad (1)$$

где

Keywords: *inverse boundary problem, two-phase fluid flow in a porous medium, the local regularization method.*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

© Ш. Ж. Мусиралиева, 2009.

$$\varphi(s) = \frac{1}{B} \frac{f_1(s)f_2(s)f'(s)}{f_2(s) + \mu_0 f_1(s)}; \psi(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{f_2(s)}{f_2(s) + \mu_0 f_1(s)} \right];$$

$$B = \frac{\mu_1 L V}{\sigma \cos \theta \sqrt{n k_0}}; \omega(s) = \frac{1}{B} \frac{f_1(s)f_2(s)f(s)}{f_2(s) + \mu_0 f_1(s)};$$

s – насыщенность несмачивающей фазой, k – проницаемость, μ_1, μ_2 – вязкости несмачивающей и смачивающей фаз, $\mu_0 = \mu_2 \setminus \mu_1$, $f_i(s)$ – относительные фазовые проницаемости, σ – межфазное натяжение, n – пористость, θ – краевой угол, V – суммарный расход фаз, s_*, s^* – остаточные нефте- и водонасыщенности, $f(s)$ – функция Леверетта.

$$\xi = \frac{x}{L}, \tau = \frac{Vt}{Lm}, \chi(\xi) = \sqrt{\frac{k(\xi)}{k_0}}$$

– безразмерные переменные, где k_0 – характерная проницаемость, L – характерная длина пласта.

При этом функциональные параметры имеют следующие свойства [4]:

- 1) $0 < (f_1, f_2) < 1$ при $s \in (s_*, s^*)$, $f_1(s_*), f_2(s^*) = 0$;
- 2) $(f_{1s}, f_{2s}, p_{cs}) \in C(G)$ где G – замкнутая область в пространстве переменных (x, s) , причем $M^{-1} \leq (\mu_1, \mu_2, p_{cs}) \leq M, M > 0$;
- 3) $|\ln(a, b)| \leq M_0(M)$, где $a = -\frac{\sqrt{n}\sigma f(s)}{\sqrt{k}\mu_1(f_2 + \mu_0 f_1)}$, $b = \frac{1}{f_2 + \mu_0 f_1}$.

Пусть на входе в пласт ($\xi = 0$) с момента $\tau = 0$ при постоянном расходе V поступает только смачивающая фаза. Тогда имеем следующее граничное условие при $\xi = 0$:

$$\chi(\xi) \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{B\mu_0}{f'(s)f_2(s)} + \frac{f(s)}{f'(s)} \frac{d\chi(\xi)}{d\xi}, \quad (2)$$

при $\xi = 1$ ставим следующее условие:

$$s(1, \tau) = \eta(\tau) \quad (3)$$

и начальное условие

$$s(\xi, 0) = s_0(\xi). \quad (4)$$

Будем рассматривать граничную обратную задачу, которая характеризуется тем, что граничное условие на правой границе не задано (функция $\eta(\tau)$ неизвестна). При этом задано дополнительное условие на левой границе

$$s(0, \tau) = a(\tau). \quad (5)$$

Вопросы существования и свойства обобщенного решения прямой задачи рассмотрены в работах Алексеева Г. В., Хуснутдиновой Н. В. [6] и Монахова В. Н. [4].

Известно, что характерной особенностью обратных задач является некорректность исходной постановки, что требует разработки специальных математических методов и вычислительных алгоритмов [7,8]. Вопросы существования, единственности, устойчивости решений для линейных одномерных обратных граничных задач рассмотрены в [9]. Вопросы существования,

единственности, устойчивости решений для нелинейных и для многомерных задач в подобных постановках остаются открытыми.

Численный метод решения. По времени введем сетку с узлами $\tau_n = nh_\tau, n = 0, 1, \dots, N_0;$ $h_\tau = T/N_0$. Задачу (1) – (5) будем решать на каждом фиксированном слое τ^{n+1} . Для этого предварительно проведем дискретизацию по времени:

$$\frac{s - s^n}{h_\tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\chi(\xi)\varphi(s^n)\frac{\partial s}{\partial \xi}) + \psi(s^n)\frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}(\omega(s^n)\frac{d\chi(\xi)}{d\xi}). \quad (6)$$

Для определения граничного условия на правой границе будем использовать метод регуляризации Тихонова А. Н. на каждом временном слое. Таким образом, ищется минимум следующего функционала:

$$J(\eta^{n+1}) = (s^{n+1}(0) - a^{n+1})^2 + \alpha(\eta^{n+1})^2. \quad (7)$$

Представим решение задачи (1) – (5) в виде:

$$s^{n+1} = z^{n+1} + \bar{\omega}^{n+1}. \quad (8)$$

Здесь $z^{n+1}(\xi)$ есть решение сеточной задачи:

$$\frac{z - s^n}{h_\tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\chi(\xi)\varphi(s^n)\frac{\partial z}{\partial \xi}) + \psi(s^n)\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}(\omega(s^n)\frac{d\chi(\xi)}{d\xi}), \quad (9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}(0) = \frac{\mu_0 B}{k f_2 f'}, \quad (10)$$

$$z(1) = 0, \quad (11)$$

$$z^0(\xi) = s^0(\xi). \quad (12)$$

Из (8) и (9) – (12) для $\varpi^{n+1}(\xi)$ имеем:

$$\frac{\varpi}{h_\tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\chi(\xi)\varphi(s^n)\frac{\partial \varpi}{\partial \xi}) + \psi(s^n)\frac{\partial \varpi}{\partial \xi}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \xi}(0) = 0, \quad (14)$$

$$\varpi(1) = \eta^{n+1}, \quad (15)$$

$$\varpi^0(\xi) = 0. \quad (16)$$

Для решения задачи получим следующее представление:

$$\varpi^{n+1}(\xi) = q(\xi)\eta^{n+1}, \quad (17)$$

где $q(\xi)$ есть решение следующей задачи:

$$\frac{q}{h_\tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\chi(\xi)\varphi(s^n)\frac{\partial q}{\partial \xi}) + \psi(s^n)\frac{\partial q}{\partial \xi}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \xi}(0) = 0, \quad q(1) = 1. \quad (19)$$

Подстановка (8), (17) в (7) дает

$$J(\eta^{n+1}) = (z^{n+1}(0) + q(0)\eta^{n+1} - a^{n+1})^2 + \alpha(\eta^{n+1})^2. \quad (20)$$

Минимум (7) достигается при

$$(z^{n+1}(0) + q(0)\eta^{n+1} - a^{n+1})q(0) + \alpha(\eta^{n+1}) = 0.$$

Тем самым для граничного условия на правой границе получим:

$$\eta^{n+1} = q(0)(a^{n+1} - z^{n+1}(0))/(\alpha + q^2(0)). \quad (21)$$

Перейдем к вопросу построения разностных схем. Пусть область изменения аргументов (ξ, τ) есть прямоугольник $(0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \tau \leq T)$. Построим на отрезке $(0 \leq \xi \leq 1)$ сетку $\xi_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$, с шагом $h, h = 1/N$ и сетку $\tau_n = nh_\tau, n = 0, 1, \dots, N_0; h_\tau = T/N_0$ на отрезке $0 \leq \tau \leq T$. В дальнейшем будем пользоваться равномерной сеткой по переменной ξ и неравномерной по переменной τ – через определенное число шагов h_τ будет удваиваться.

Краевая задача (9) – (12) аппроксимировалась следующей неявной разностной схемой:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} [\chi_{i+1/2} \varphi(s_{i+1/2}^n) (z_{i+1}^{n+1} - z_i^{n+1}) - \chi_{i-1/2} \varphi(s_{i-1/2}^n) (z_i^{n+1} - z_{i-1}^{n+1})] + \\ & + \psi(s_i^n) \frac{z_{i+1}^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{2h} - \frac{1}{h^2} [\omega(s_{i+1/2}^n) (\chi_{i+1} - \chi_i) - \omega(s_{i-1/2}^n) (\chi_i - \chi_{i-1})] = \\ & = \frac{z_i^{n+1} - s_i^n}{h_\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{1/2} \frac{z_1^{n+1} - z_0^{n+1}}{h} &= \frac{B\mu_0}{f'(s_{1/2}^n) f_2(s_{1/2}^n)} + \frac{f(s_{1/2}^n)}{f'(s_{1/2}^n)} \frac{\chi_1 - \chi_0}{h}, \\ z_N &= 0, \\ z_i^0 &= s_i^0. \end{aligned}$$

Для численного решения задач (9) – (12) и (13) – (16) использовали метод прогонки. Для нахождения решения обратной задачи решаются две стандартные задачи (9) – (12) и (13) – (16), находится $\eta^n, n = 1, 2, \dots, N$, по формуле (21), после чего искомое решение представляется в виде:

$$s^{n+1}(\xi) = z^{n+1}(\xi) + q(\xi)\eta^{n+1}.$$

Численный анализ. По изложенному выше алгоритму были проведены численные расчеты. При вычислениях использовались следующие виды кривых относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления [5]:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 1,4256(s - 0,216), f_2(s) = 1,6329(0,7 - s)^2, \\ f(s) &= 0,05669(0,7 - s)^{-2} - 0,242. \end{aligned}$$

Начальная нефтенасыщенность равнялась $s^0 = 0,68$; шаг по оси $\xi - h = 0,005$. Шаг по времени взяли равным $h = 0,001$.

Обратную задачу решали в режиме квазиреального эксперимента. Сначала численно решаем прямую задачу (1) – (2), (4) со следующими условиями на правой границе [5]: а) пусть τ' – момент прорыва воды на добывающей скважине. Тогда при $\tau < \tau'$:

$$-\chi(\xi) \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{B}{f'(s) f_1(s)} - \frac{f(s)}{f'(s)} \frac{d\chi(\xi)}{d\xi},$$

при $\tau \geq \tau' : s(1, \tau) = s_*$,

$$b) \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0.$$

Тем самым тестировались 2 вида условий. В первом случае на выходе из пласта заданы краевые условия, соответствующие "концевому" эффекту. Данный экспериментально установленный факт заключается в том, что смачивающая фаза не вытекает из гидрофильного пласта до тех пор, пока насыщенность ею на выходе не достигает максимально возможного значения $1 - s_*$, где s_* – остаточная насыщенность несмачивающей фазы. Во втором случае предполагалось, что жидкости извлекаются соответственно их подвижности [1].

На рисунках 1-5 показаны результаты численных экспериментов. На рисунке 1 показан результат соответствующий первому краевому условию. На всех рисунках сплошная линия соответствует численному решению прямой задачи (1),(2),(4) при $\xi = 1$ с граничным условием типа а) либо б). Пунктирная линия соответствует найденному численному решению обратной граничной задачи. Как видно из рисунка, осуществлен прорыв воды на эксплуатационной скважине и соответственно большие осцилляции на момент времени $\tau \geq \tau'$. Точность определения η до момента прорыва воды составляет 10^{-8} при значении функционала 10^{-6} . После прорыва воды точность вследствие малости функций относительных проницаемостей ухудшается до 10^{-2} . При реализации второго варианта краевого условия имеем точность 10^{-8} на все время эксплуатации пласта.

Для определения влияния погрешностей в задании дополнительных условий, в полученное сеточное решение далее внесем случайные возмущения:

$$a_\delta(\tau) = a(\tau) + 2\delta(\sigma(\tau) - 0,5),$$

где $\sigma(\tau)$ – нормально распределенная от 0 до 1 случайная величина.

На рисунке 2, 3 изображены значения на правой границе при внесении возмущений с $\delta = 1e - 4$ и $\delta = 1e - 5$. На рисунке 4 показаны результаты для краевого условия с коцевым эффектом. Здесь из-за плохой обусловленности самого краевого условия амплитуда колебаний выше при стремлении значения насыщенности к предельному. Сравнивая рисунки 3 и 4 можно заметить, что для краевого условия типа б имеем более качественную картину восстановления граничных значений предложенным алгоритмом. Как показывают расчеты, алгоритм довольно чувствителен к уровню погрешностей. Рекомендуется предварительно сглаживать осцилляции во входных данных. Таким образом, убрав высокочастотные колебания, можем получить более качественные и точные результаты даже при большем значении δ . На рисунке 5 изображены значения на правой границе при внесении возмущений с $\delta = 1e - 3$. Но точность решения здесь остается в пределах допустимого, так как входные данные были обработаны указанным выше способом.

Заключение.

Для одномерной модели фильтрации двухфазной жидкости разработан численный метод по определению граничного режима на эксплуатационной скважине при заданном дополнительном условии на нагнетательной скважине. Проведен тщательный анализ численных расчетов, сопровождаемый графической и тестовой информацией. Выполненные численные расчеты доказывают возможность использования данного метода для определения граничного режима с хорошей точностью.

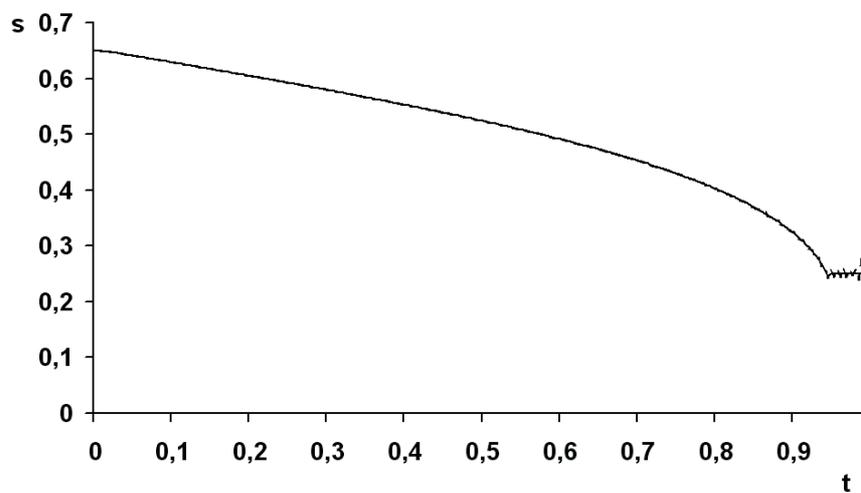
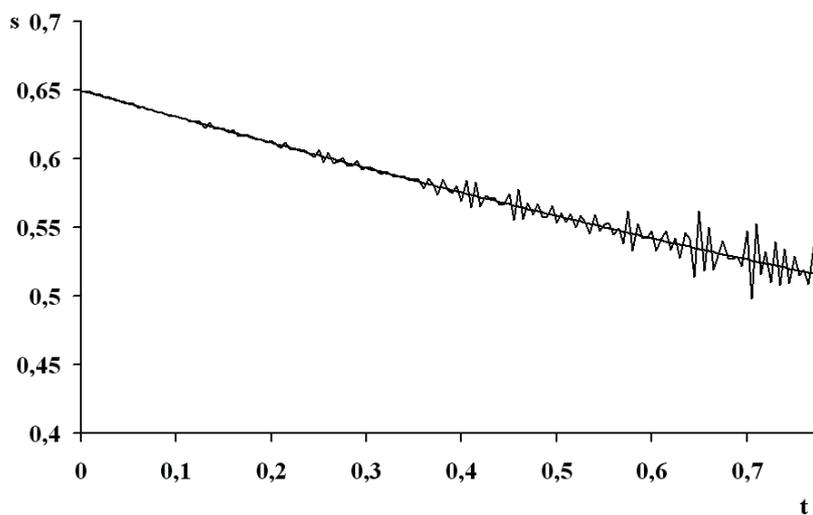


Рис.1. Решение обратной задачи на момент прорыва воды

Рис.2. Решение обратной задачи при $\delta = 10^{-4}$

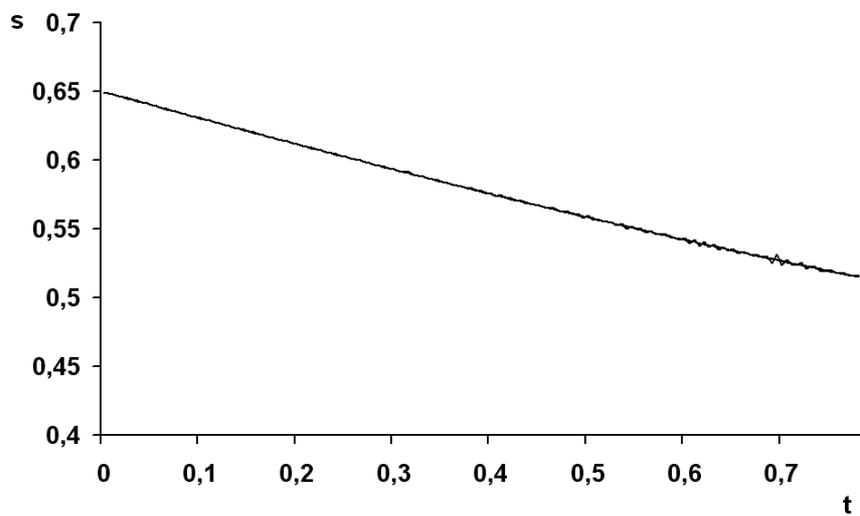


Рис.3. Решение обратной задачи при $\delta = 10^{-5}$

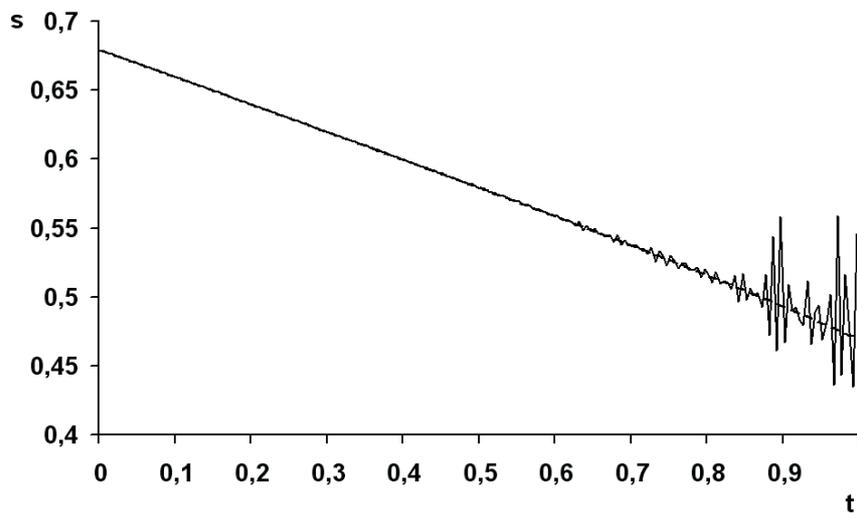
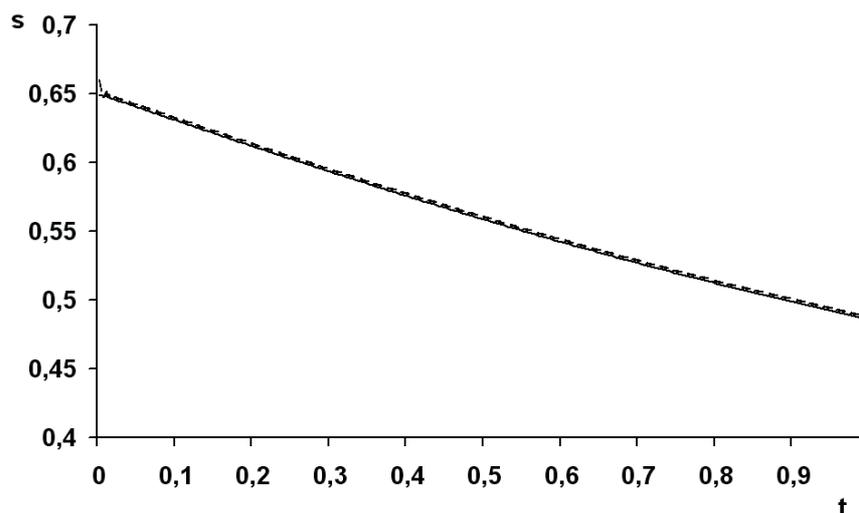


Рис.4. Решение обратной задачи при $\delta = 10^{-5}$ (краевое условие с концевым эффектом до момента прорыва воды)

Рис.5. Решение обратной задачи при $\delta = 10^{-3}$

Цитированная литература

1. Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1988.
2. Бочаров О. Б., Телегин И. Г. // Вычислительные технологии. Новосибирск, 2002. Т. 7, № 1. С. 34 – 40.
3. Жумагулов Б. Т., Монахов В. Н. Гидродинамика нефтедобычи. Алматы, 2001.
4. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.
5. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. Москва, 1970.
6. Алексеев Г. В., Хуснутдинова Н. В. // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 310 – 312.
7. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. Москва, 1988.
8. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва, 2002.
9. Нao D. Methods for inverse heat conduction problems. Peter Lang pub Inc., 1998.

Поступила в редакцию 18.09.2008 г.

УДК 662.92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ГОРЕНИЯ В СЛОЖНОМ КАНАЛЕ

А. Ж. НАЙМАНОВА

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

Предлагается математическая модель турбулентного реагирующего течения многокомпонентной газовой смеси в трехмерном канале. Моделирование основывается на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса, замкнутых $k - \varepsilon$ моделью турбулентности. Выявлены особенности пространственной структуры течений реагирующих газов в зависимости от входного значения скорости вторичного воздуха.

Изучение процессов перемешивания, горения, а также определение полей температуры, скоростей, концентраций компонент с учетом кинетики процесса, определение формы факела, границы зоны смешения и характера течения – все эти вопросы, имеющие важное практическое значение, являются весьма сложными в плане математического моделирования. Основы теории турбулентных реагирующих течений многокомпонентных смесей рассмотрены в работе Вулиса Л. А. и др. [1], в которой излагаются различные пути решения проблемы турбулентного горения предварительно перемешанных газов. Теоретические расчеты турбулентных факелов производились на основе уравнений пограничного слоя, и основные характеристики факела определялись с помощью интегральных соотношений. Следует отметить также работы Ходжиева С. [2], Жумаева З. Ш. [3], где рассматривается диффузионный факел в двумерной и трехмерной постановке, однако при математическом моделировании исходными приняты параболизированные уравнения Навье-Стокса, не позволяющие решать проблему течения реагирующих газов в областях с вихревыми зонами. В связи с этим в настоящее время интенсивно развиваются как методы математического моделирования реагирующих течений, так и способы их численного решения на основе полных трехмерных уравнений Навье-Стокса. Наиболее успешной является модель Луквида и др. [4], однако она построена на основе быстрой кинетики. В работе Станкова П., Топорова Д. [5] на основе двухстадийной кинетики проведены только тестовые расчеты предлагаемой математической модели. Целью данной работы является численное моделирование пространственного горения газозвушной смеси и изучение влияния вдува вторичного воздуха на процесс горения в трехмерном канале с уступом.

Keywords: *turbulence, subsonic flow, multicomponent gas, combustion, chemical reaction*

2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

© А. Ж. Найманова, 2009.

Постановка задачи. Рассматривается вдув турбулентной химически реагирующей газовой смеси (CH_4 , CO , C_2H_2 , H_2 , N_2) в трехмерный канал с уступами. Схема течения показана на рисунке 1.

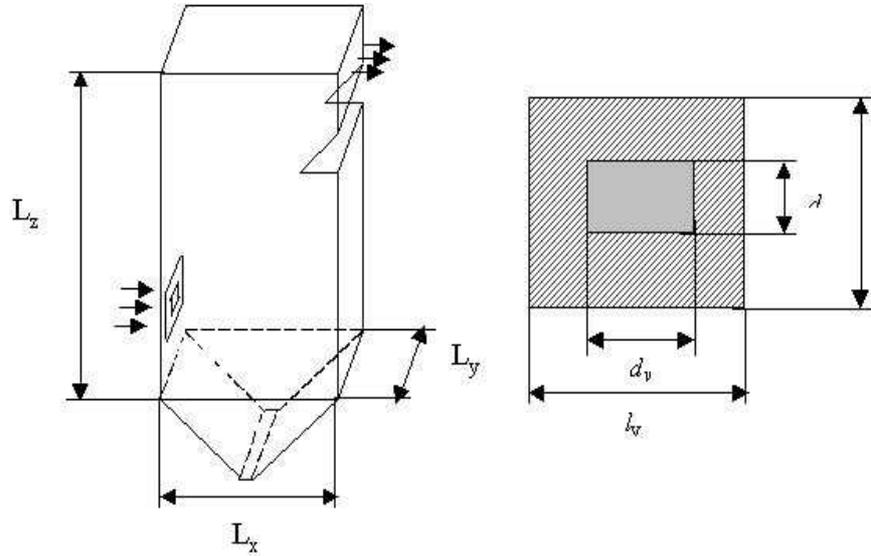


Рис. 1: Схема течения

Трехмерные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса и уравнения переноса компонент реагирующей смеси, записанные относительно декартовой системы координат, имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{u}) = \frac{1}{ReSc} \nabla \cdot \left[\rho D \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \nabla \cdot \sigma(\vec{u}) - \frac{1}{\lambda^2} \nabla P - \nabla \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\rho}{Fr}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\rho I)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} I) = \nabla \cdot \vec{J} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} P \nabla \cdot \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{Q}^c, \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \nabla k \right] - \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \vec{u} + (\gamma - 1) M^2 \sigma : \nabla \vec{u} - \rho \varepsilon, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - \left(\frac{2}{3} c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\varepsilon}{k} [(\gamma - 1) M^2 c_{\varepsilon 1} \sigma : \nabla \vec{u} - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon], \quad (6)$$

$$P = T \sum_m \left(\frac{\rho_m}{W_m} \right), \quad (7)$$

$$I(T) = \sum_m \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) I_m(T), \quad I_m(T) = h_m(T) - \frac{R_0 T}{W_m}, \quad (8)$$

$$c_p(T) = \sum_m \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) c_{p_m}(T), \quad (9)$$

здесь $\sigma(\vec{u}) = \frac{\mu}{Re} \left(\left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} \vec{E} \right)$, $\vec{J} = -\frac{K}{RePr} \nabla T - \frac{\rho D}{ReSc} \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right)$.

Дополнительные члены, обеспечивающий приток массы и энергии за счет химических реакций, имеют вид:

$$\dot{\rho}_m^c = W_m \sum_r Da_r (b_{mr} - a_{mr}) \dot{\omega}_r, \quad \dot{Q}^c = \sum_r Da_r \sum_m (a_{mr} - b_{mr}) (\Delta h_f^0)_m \dot{\omega}_r, \quad (10)$$

где $\dot{\omega}_r = k_{fr} \prod_m \left(\frac{\rho_m}{W_m} \right)^{a_{mr}} - k_{br} \prod_m \left(\frac{\rho_m}{W_m} \right)^{b_{mr}}$ – скорость кинетической реакции, a_{mr}, b_{mr} – стехиометрические коэффициенты, $k_{fr} = A_{fr} \exp(-E_{fr}/R_0T)$, $k_{br} = A_{br} \exp(-E_{br}/R_0T)$ – константы скоростей химических реакций, определенные по закону Аррениуса, $(\Delta h_f^0)_m$ – теплота образования m -й компоненты, Da_r – число Дамкёлера r -й реакции, индекс r – число реакций, m – число компонент, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. Для замыкания исходной системы уравнений используется модель турбулентности, константы которой следующие:

$$c_\mu = 0.09; \quad c_{\varepsilon_1} = 1,44; \quad c_{\varepsilon_2} = 1,92; \quad c_{\varepsilon_3} = -1,0; \quad Pr_k = 1,0; \quad Pr_\varepsilon = 1,3; \quad c_s = 1,50.$$

Система (1) – (10) записана в безразмерной форме в общепринятых обозначениях. В качестве безразмерных параметров приняты параметры струи.

Начальные и граничные условия. В начальный момент газ (воздух) находится в состоянии покоя, распределение температуры постоянно, кинетическая энергия турбулентности и масштаб турбулентности также постоянны:

$$u = v = w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_0, \quad T = 1, \quad k = 0, \quad l = 0. \quad (11)$$

На входе во внутренней части сопла задается газовая смесь ($CH_4, N_2, C_2H_2, H_2, CO$):

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad k = k_0, \quad l = l_0, \quad (12)$$

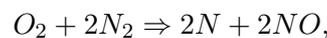
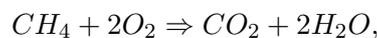
во внешней части сопла – окислитель – вторичный воздух (O_2, N_2):

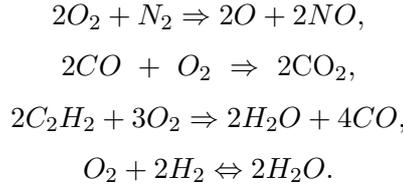
$$u = m_u, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_{air}, \quad T = m_T, \quad k = k_0, \quad l = l_0.$$

Здесь индекс g означает газ, индекс air – окислитель (вторичный воздух).

На стенках для поля скорости и температуры задается турбулентный закон стенки, тангенциальная компонента скоростей которого определяется приближенным соотношением, полученным с помощью логарифмического профиля, и степенным законом аналогично [6]. Для кинетической энергии турбулентности, концентраций компонент газа выполняется условие отсутствия потока через стенку. На выходе задаются мягкие граничные условия.

Описание химического реагирования газовых компонентов CH_4, CO, C_2H_2, H_2 с воздухом проводится на основе химической модели [6]. Таким образом, используемая в работе модель химически реагирующего газа, включает девять компонентов: $CH_4, N_2, C_2H_2, H_2, CO, O_2, CO_2, NO, H_2O$.





Определение скорости химической реакции. Согласно работе [6] скорость химической реакции $\dot{\omega}_r$ вычисляется в предположении, что для реакций r каждый участвующий компонент является либо инертным ($a_{mr} = b_{mr}$), либо появляется только на одной стороне реакции ($a_{mr}b_{mr} = 0$). Запишем величину скорости химической реакций (11) следующим образом:

$$\dot{\omega}_r = \Omega_{fr} - \Omega_{br}, \quad (13)$$

где $\Omega_{fr} = k_{fr}^n \prod_m \left(\frac{\rho_m}{W_m}\right)^{a_{mr}}$, $\Omega_{br} = k_{br}^n \prod_m \left(\frac{\rho_m}{W_m}\right)^{b_{mr}}$.

Тогда приток массы $\dot{\rho}_m^c$ из (10) будет иметь вид:

$$\dot{\rho}_m^c = W_m \sum_r D a_r (b_{mr} - a_{mr}) (\Omega_{fr} - \Omega_{br}).$$

Далее, предварительно проверим компоненты, значение которых уменьшается, в соответствии с учитываемой реакцией с тем, чтобы определить компонент с минимальным значением $W_m (b_{mr} - a_{mr}) (\Omega_{fr} - \Omega_{br}) / \rho_m$, и присвоим ему индекс K , т.е. $W_K (b_{Kr} - a_{Kr}) (\Omega_{fr} - \Omega_{br}) / \rho_K$. Следовательно, это выражение является самым опасным из суммы вкладов скоростей химических реакций, которое может привести к отрицательному значению плотности. После чего рассчитывается изменение характерного компонента смеси K :

$$\frac{(\rho_K)^{n+1}_{ijk} - (\rho_K)^n_{ijk}}{\Delta t} = D a_r W_K (b_{Kr} - a_{Kr}) (\Omega_{fr} - \Omega_{br}). \quad (14)$$

или

$$(\rho_K)^{n+1}_{ijk} = (\rho_K)^n_{ijk} + \Delta t D a_r W_K (b_{Kr} \Omega_{fr} + a_{Kr} \Omega_{br}) - \Delta t D a_r W_K (b_{Kr} \Omega_{br} + a_{Kr} \Omega_{fr}). \quad (15)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Lambda_T &= (\rho_K)^n_{ijk} + \Delta t D a_r W_K (b_{Kr} \Omega_{fr} + a_{Kr} \Omega_{br}), \\
\Lambda_B &= (\rho_K)^n_{ijk} + \Delta t D a_r W_K (b_{Kr} \Omega_{br} + a_{Kr} \Omega_{fr}).
\end{aligned}$$

С учетом которого (15) запишется в виде:

$$(\rho_K)^{n+1}_{ijk} = \Lambda_T - \left(\Lambda_B - (\rho_K)^n_{ijk} \right). \quad (16)$$

После линеаризации уравнение (16) имеет вид:

$$(\rho_K)^{n+1}_{ijk} = \Lambda_T - \left(\Lambda_B - (\rho_K)^n_{ijk} \right) \frac{(\rho_K)^{n+1}_{ijk}}{(\rho_K)^n_{ijk}} = \Lambda_T - \Lambda_B \frac{(\rho_K)^{n+1}_{ijk}}{(\rho_K)^n_{ijk}} + (\rho_K)^{n+1}_{ijk},$$

из которого следует, что

$$(\rho_K)^{n+1}_{ijk} = \frac{\Lambda_T}{\Lambda_B} (\rho_K)^n_{ijk}. \quad (17)$$

Если учесть, что уравнение (16) записывается также в виде:

$$\frac{(\rho_K)^{n+1}_{ijk} - (\rho_K)^n_{ijk}}{\Delta t} = D a_r W_K (b_{Kr} - a_{Kr}) \dot{\omega}_r,$$

получим, что скорость химической реакции $(\rho_K)_{ijk}^{n+1}$ в (17), определяется следующим образом:

$$\dot{\omega}_r = \frac{(\rho_K)_{ijk}^n \left(\frac{\Lambda_T}{\Lambda_B} - 1 \right)}{\Delta t W_K (b_{Kr} - a_{Kr})}. \quad (18)$$

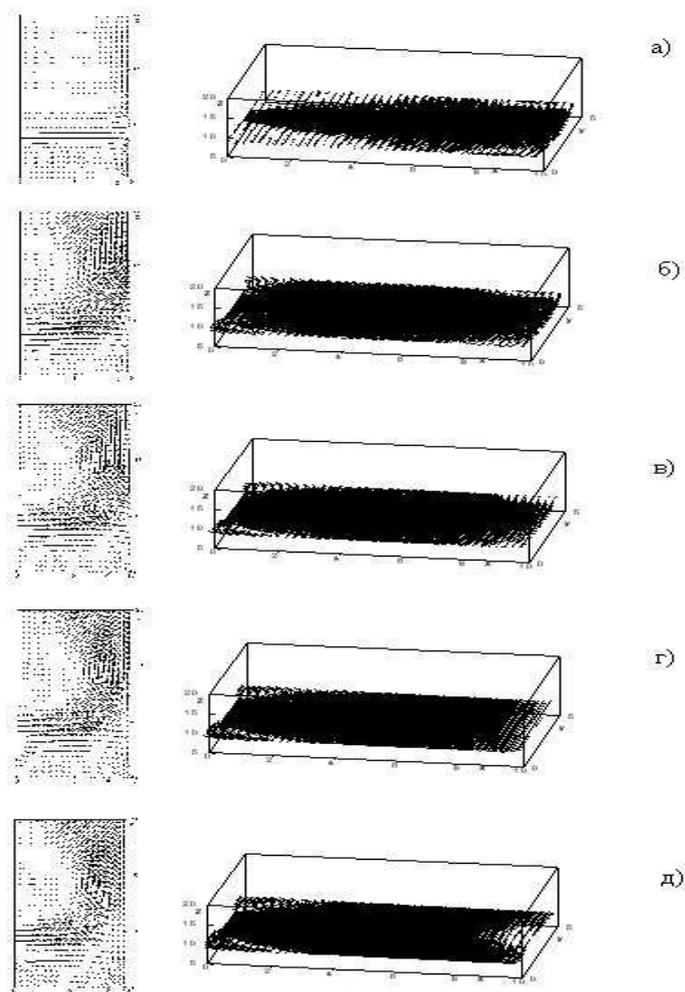
Таким образом, в членах, обусловленных химическими реакциями (10), скорость реакции будет определяться линеаризованным выражением (18).

Анализ результатов численного решения задачи. Решение поставленной задачи осуществлялось алгоритмом, изложенным в работе [7]. Количество контрольного объема составляет 127756. Численный расчет проводился при следующих значениях характерных параметров: $m_u = 1$, $\omega = 2.4$, где $m_u = \frac{u_{air}}{u_g}$ – отношение скорости окислителя к скорости газовой смеси, $\omega = \frac{T_g}{T_{air}}$ – отношение температуры газовой смеси к температуре окислителя. Далее m_u называется параметром спутности, а ω – параметром температуры. Высота канала $L_z = 35$, ширина $L_x = 10$, глубина $L_y = 5$. Размеры прямоугольного отверстия следующие: для газовых компонентов (внутреннее) $l_z = 1$, $l_y = 0.9$, для вторичного воздуха, т.е. окислителя, (внешнее) $d_z = 3.3$, $d_y = 2.6$. Начальные данные: кинетическая энергия турбулентности $k_0 = 0.0036$, масштаб длины $l_0 = 0.1$. Состав вдуваемых газовых компонентов приведен в следующем виде: $CH_4 = 0.11$, $C_2H_2 = 0.41$, $CO = 0.411$, $H_2 = 0.017$, $N_2 = 0.421$.

Влияние входного значения скорости вторичного воздуха на характеристики воспламенения было изучено для параметров спутности в диапазоне $0 \leq m_u \leq 1.5$. На рисунке 2 в плоскостях xy и xz симметрии струи приведены поля вектора скоростей для параметров спутности $0 \leq m_u \leq 1.5$. Из вычислительного эксперимента видно, что в диапазоне $0 \leq m_u \leq 0.5$ наличие преграды (стенки) приводит к боковому растеканию газовой смеси (рисунок 2а-в, в плоскости xy). В результате этого происходит образование двух застойных зон, как у стенки, примыкающей к струе, так и у внешней. При этом следует, что часть потока сносится вверх (Рис.2а-в (слева), в плоскости xz), что и приводит к ускорению течения в области выше вдуваемой струи, т.е. в верхней части устройства.

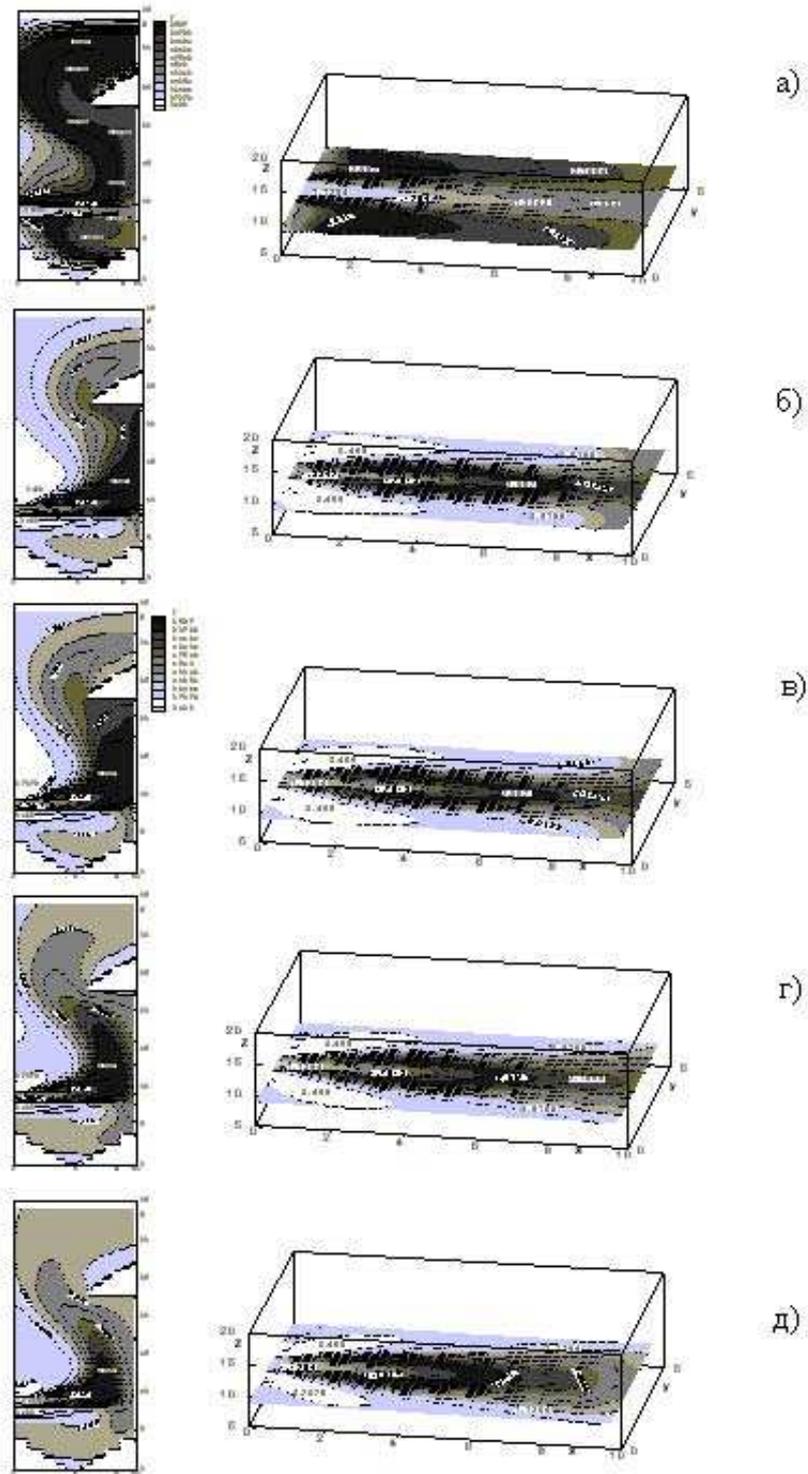
Численные эксперименты с большими m_u приведены на рисунках 2г-е. Из графиков 2г-е (в плоскости xy) четко прослеживается, что вторичный воздух, с одной стороны, расширяется как свободная струя в ограниченном пространстве, с другой, сжимает вдуваемую газовую смесь, и как видно (Рис.2д-е, в плоскости xy) наличие боковой стенки не приводит к заметной потере его импульса. Это и является причиной "захлопывания" вдуваемой газовой смеси и сноса его не только вверх, но и вниз, что и демонстрирует рисунок 2д-е (в плоскости xz). Таким образом, ускоряется не только поток выше струи (как было указано ранее), но и область ниже струи приобретает заметный импульс. На рисунках 3а-е приведены распределения температуры (в плоскостях xz и xy симметрии струи) в зависимости от m_u . Как следует из рисунка 3а, в плоскости xz горение происходит по всей области устройства вплоть до выходной границы. При параметрах спутности $0.2 \leq m_u \leq 0.5$ область сгорания достигает аэродинамического выступа вдоль внешней стенки (Рис.3б-в, в плоскости xz). Однако расчеты в диапазоне показывают, что качественная картина воспламенения меняется. Видно, что зона горения отходит от внешней стенки и смещается к центру (Рис.3г-е, в плоскости xz), причем с увеличением m_u сдвигается не только к центру, но происходит заметная его локализация (Рис.3г-е, в плоскости xy). Вышеописанное подтверждает картина распределения концентрации конечного продукта в плоскости xy симметрии струи, где приведены образования CO_2 для различных m_u и зоны интенсивного его выделения, а именно, линии максимальных его значений (Рис.4). Для параметра $m_u = 0$ область максимального сгорания происходит в застойной зоне, соответственно здесь наблюдается наибольшее образование CO_2 (Рис.4а), тогда как в диапазоне $0.1 \leq m_u \leq 0.3$ картина образования двуокиси углерода иная, здесь его максимумы – в слое смешения и доходят до внешней стенки (Рис.4б-г). Для диапазона $0.5 < m_u \leq 1.2$ максимумы конечного

продукта, расширяясь, сдвигаются к центру устройства (Рис.4д-ж). Из этих графиков вытекает, что для $0.1 < m_u \leq 0.3$ зона воспламенения приобретает вытянутую подковообразную форму, а в диапазоне $0.8 < m_u \leq 1.2$ с увеличением параметра спутности подковообразная форма укорачивается, но становится шире. Таким образом, из конфигурации CO_2 следует, что длина "факела" достигает правой стенки (Рис.4б-г), а при дальнейшем увеличении приводит к уменьшению длины области горения (Рис.4д-ж), что согласуется с численными расчетами Ходжиева [2] и экспериментальными данными авторов работы [1], проведенных для факела в спутном потоке. Влияние скорости вторичного воздуха на процесс горения можно также наблюдать из линии максимальных значений параметров течений, где на рисунке 5 приведены максимумы скорости, температуры и концентрации конечного продукта в зависимости от m_u . Увеличение параметра спутности приводит к волнообразному изменению максимума продольной скорости (Рис.5а). Влияние m_u на максимум температур и распределение концентрации CO_2 незначительно (Рис.5б-в).



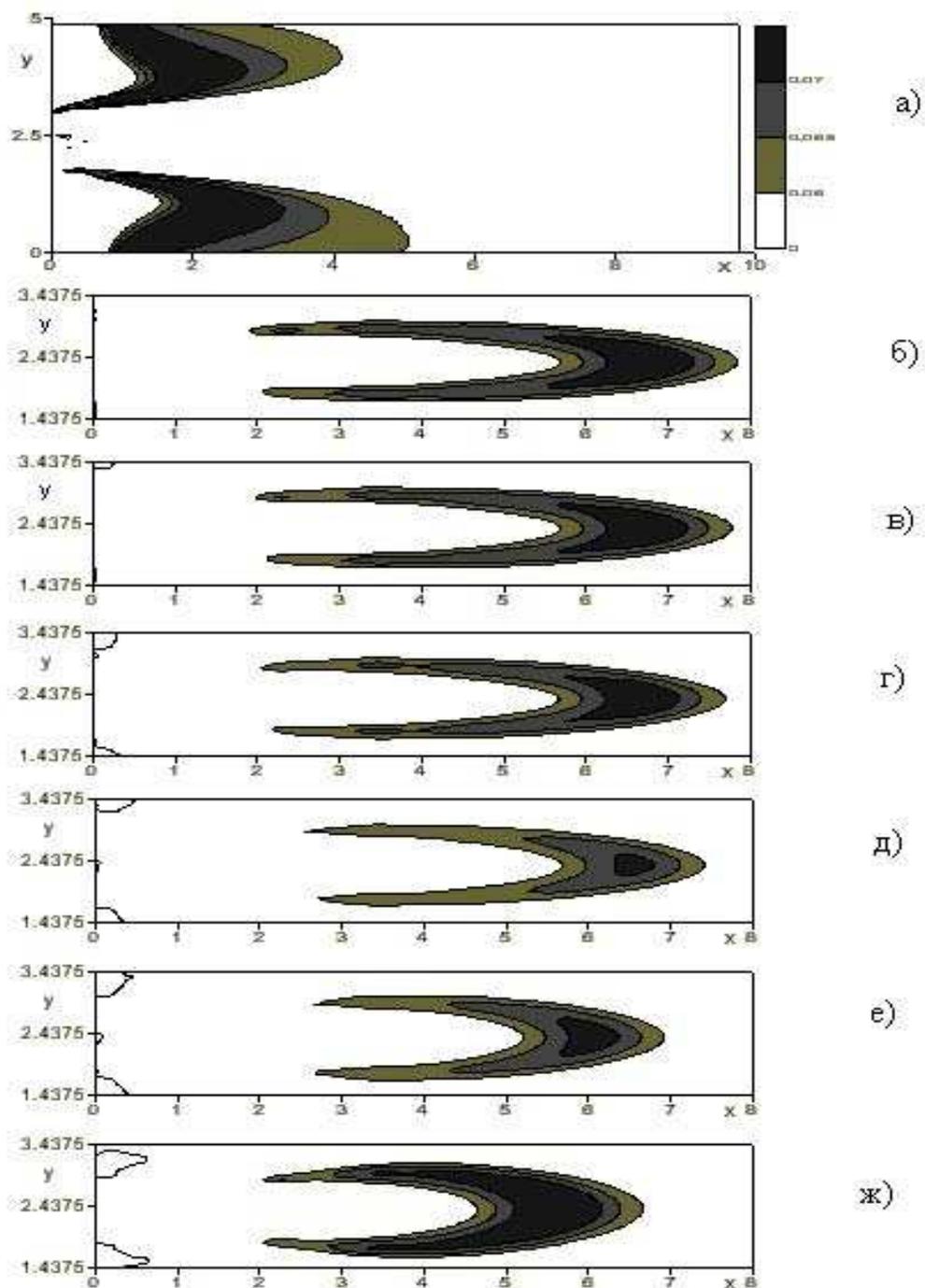
а) $m_u = 0$, б) $m_u = 0,2$, в) $m_u = 0,5$, г) $m_u = 0,8$, д) $m_u = 1,2$

Рис. 2: Поле вектора скорости в вертикальной и горизонтальной плоскостях симметрии струи



а) $m_u = 0$, б) $m_u = 0,2$, в) $m_u = 0,5$, г) $m_u = 0,8$, д) $m_u = 1,2$

Рис. 3: Поле температуры в вертикальной и горизонтальной плоскостях симметрии струи



а) $m_u = 0$; б) $m_u = 0.1$; в) $m_u = 0.2$; г) $m_u = 0.3$; д) $m_u = 0.5$; е) $m_u = 0.8$; ж) $m_u = 1.2$

Рис. 4: Зона интенсивного выделения CO_2 при разных параметрах спутности

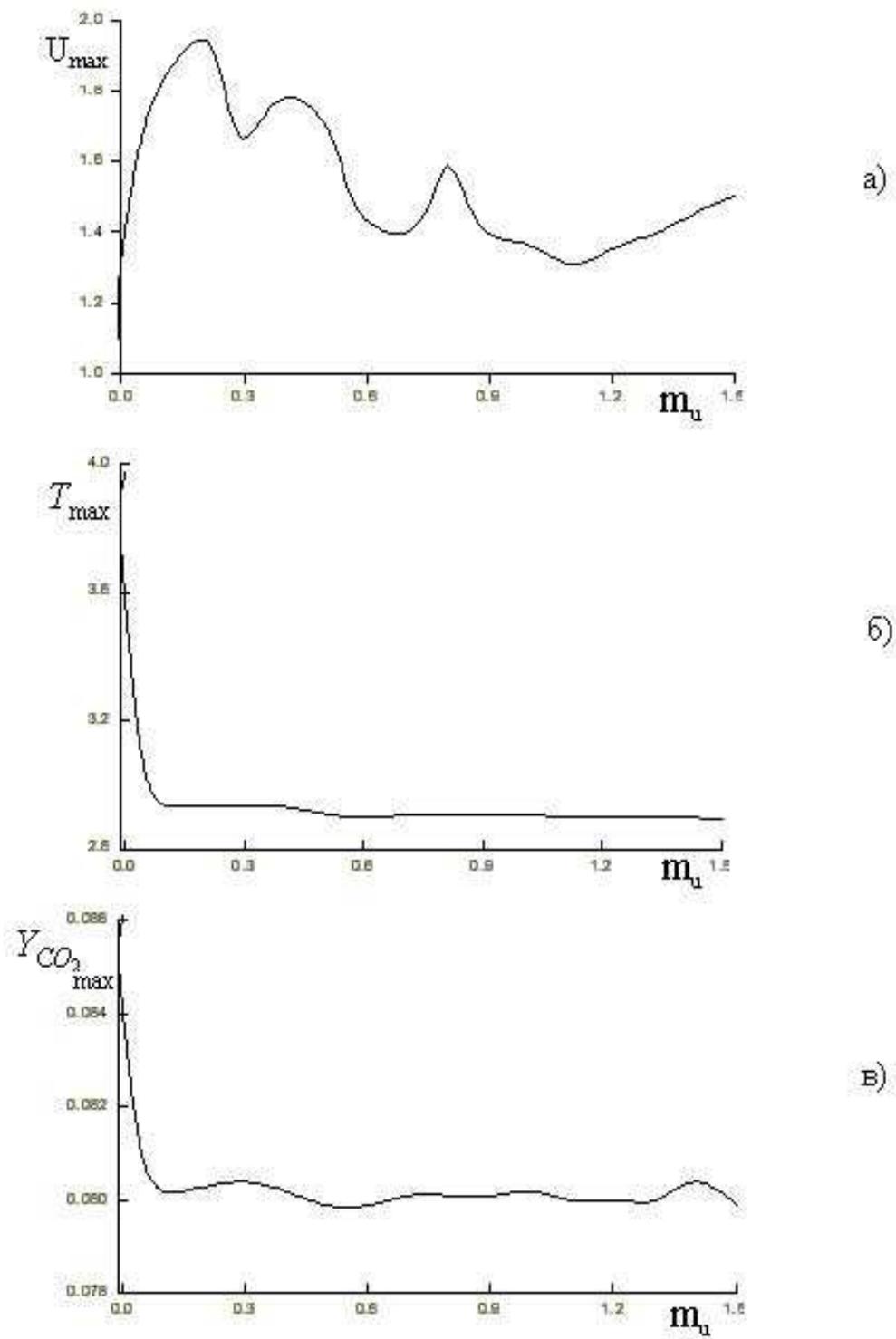


Рис. 5: Максимальные значения скорости (а), температуры (б) и концентраций конечного продукта CO_2 (в)

Цитированная литература

1. **Вулис Л. А., Ершин Ш. А., Ярин Л. П.** Основы теории газового факела. Ленинградское отделение, 1968.
2. **Ходжиев С.** // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 01.02.05. Ташкент, 1994.
3. **Алиев Ф., Жумаев З. Ш.** Струйные течения реагирующих газов. Ташкент, 1987.
4. **Lockwood F. C., Salooja A. P., Syed A. A.** // Combustion Flame. 1980. Vol. 38, №1. P. 1 – 15.
5. **Stankov P., Toporov D.** // Sixth international conference on "Technologies and Combustion for a clean environment". Portugal, 2001. P. 489 – 494.
6. **Amsden A. A., O'Rourke P. J., Butler T. D.** KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos National Laboratory report, 1989.
7. **Камалова Г. А., Найманова А. Ж.** // Математический журнал. 2005. №1. С. 52 – 66.

Поступила в редакцию 10.11.2008г.

УДК 517.9

ДИНАМИКА СИСТЕМ НА ЦИКЛИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

И. Н. ПАНКРАТОВА

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина,125 irina.pankratova@math.kz

Установлены свойства нетипичности динамики, зависящей от максимального числа параметров, и типичности однопараметрической динамики в семействе рассматриваемых систем.

Введение. Рассматривается динамическая система F^m , порожденная отображением $F : L^n \rightarrow L^n$, $Fx = \Phi(x)Ax$, где L^n – n -мерное линейное нормированное пространство, A – $n \times n$ -матрица, $\Phi(x)$ – скалярная функция. В качестве фазового пространства системы F^m выбирается компакт $K_a^n = \{x \in L^n \mid x \geq 0, \|x\| \leq a, a > 0\}$ ($x \geq 0$ означает $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ и $\|x\|$ – норма (длина) вектора x). Условия: $\Phi(x) \geq 0$ непрерывна в K_a^n , $A \geq 0$ ($a_{ij} \geq 0 \forall i, j = \overline{1, n}$) и $\|A\| \leq a/\tilde{C}$ обеспечивают инвариантность относительно отображения F множества K_a^n [1]. Здесь $\tilde{C} = \max_{x \in K_a^n} \Phi(x)\|x\|$ и $\|A\|$ – норма матрицы A , согласованная с векторной нормой пространства L^n .

Для системы F^m установлено, что ее динамика во всем фазовом пространстве K_a^n определяется поведением ее траекторий на циклических инвариантных множествах $M_p \subseteq K_a^n$ отображения F конечного периода $p \geq 1$, содержащих все ω – предельные множества системы F^m . Расположение множеств M_p в K_a^n и их периоды определяются линейной частью отображения F (матрицей $A \geq 0$) и не зависят от вида функции $\Phi(x)$ [1,2]. Период $p \geq 1$ множества M_p совпадает с количеством параметров, которыми может быть описана динамика системы F^m на множестве M_p . Поскольку в K_a^n возможно существование нескольких (и даже континуума) множеств M_p с разными периодами p и в разных частях фазового пространства системы F^m , то ее динамика определяется наборами параметров, точнее, эти наборы параметров описывают динамику целого класса систем F^m с матрицей A , т.к. параметры не зависят от вида функции $\Phi(x)$.

Возникает вопрос о наибольшем периоде (> 1) при $n > 1$ циклических инвариантных множеств M_p семейства n -мерных отображений F . Ответ на этот вопрос позволяет определить максимальное число параметров, которыми может быть описана динамика системы F^m .

Исследования показали, что наибольший период множеств M_p может быть не только больше n – размерности фазового пространства, но и больше n^2 – числа элементов матрицы A , являющейся матрицей параметров. Результаты проведенных исследований и их доказательство

Keywords: *Dynamical system, nonnegative matrix, invariant set, typical property*

2000 Mathematics Subject Classification: 74J05

© И. Н. Панкратова, 2009.

приведены в настоящей статье, в которой определено множество систем F^m , имеющих множества M_p наибольшего периода, и дана простая формула для его вычисления, установлены свойства нетипичности динамики, зависящей от максимального числа параметров (при $n > 1$), и типичности однопараметрической динамики в семействе систем F^m . При этом типичность понимается с метрической точки зрения (в смысле меры Лебега, введенной в пространстве параметров – коэффициентов матрицы A).

1. Параметры системы на циклических инвариантных множествах. Согласно определению (см. [1]) множество M_p состоит из одного отрезка луча длины a вдоль неотрицательного собственного вектора матрицы $A \geq 0$, соответствующего собственному значению $\lambda \geq 0$ матрицы A , и континуума инвариантных относительно отображения F множеств, состоящих из p отрезков лучей длины a вдоль собственных векторов матрицы A^p , соответствующих числу λ^p , циклически переходящих друг в друга под действием отображения F , – циклов отрезков лучей конечного периода ($p \geq 1$). При $p > 1$ для любого $x \in M_p$ точка x , траектория $F^m x$ и ее ω -предельное множество $\omega_F x$ принадлежат одному и тому же циклу отрезков лучей $J_p \subset M_p$ периода p или одному отрезку луча (множеству M_1 периода 1).

Пусть отображение F имеет множество M_p , $p \geq 1$, и $e \in M_p$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda \geq 0$, $\|e\| = 1$.

Пусть e_1 – произвольный вектор из M_p , отличный от собственного вектора e , $\|e_1\| = 1$. Определим следующие векторы e_2, \dots, e_p рекуррентно равенствами

$$e_i = \|Ae_{i-1}\|^{-1} Ae_{i-1}, \quad i = \overline{2, p}.$$

Обозначим $\lambda_i = \|Ae^i\|$. Согласно структуре множества M_p имеем следующие соотношения:

$$Ae_i = \lambda_i e_{i+1}, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad Ae_p = \lambda_p e_1.$$

Пусть $x \in M_p$ – точка на луче вдоль вектора e_1 . Чтобы исключить тривиальный случай, положим $x \neq 0$, тогда $x = ye_1$, $y \in (0, a]$. Из приведенных выше соотношений следует, что траектория $F^m x$ принадлежит множеству J_p , отрезки лучей которого расположены вдоль векторов e_1, \dots, e_p . Вычислим вектор Fx . Имеем

$$Fx = \Phi(x)Ax = \lambda_1 \Phi(ye_1)ye_2.$$

Вычислим далее вектор $F^i x$, итерируя отображение F i раз. В результате получим:

$$F^i x = \prod_{k=1}^i \Phi(F^{k-1} x) A^i x = \Phi_i(ye_1)ye_{i+1}, \quad i = 2, \dots, p-1,$$

где $\Phi_i(x) = \prod_{k=1}^i \lambda_k \Phi(F^{k-1} x)$. При $i = p$ имеем

$$F^p x = \Phi_p(x)x,$$

где функция $\Phi_p(x) = \lambda^p \prod_{k=1}^p \Phi(F^{k-1} x)$ зависит от p чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, связанных соотношением

$$\prod_{i=1}^p \lambda_i = \lambda^p.$$

В частности, для скалярных функций $\Phi(\|x\|)$ нетрудно показать, что отображение F^p принимает вид суперпозиции одномерных отображений ϕ_λ , $\phi_\lambda y = \lambda \Phi(y)y$, $y \in I_a = [0, a]$:

$$F^p = \phi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \phi_{\lambda_1}.$$

При $\lambda = 0$ динамика системы F^m на M_p тривиальна: за конечное число итераций траектории системы F^m попадают в точку $x = 0$. При $\lambda > 0$ имеем $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, p}$.

При рассмотрении системы F^m на множестве $J_p \subset M_p$ ($p > 1$), содержащем точку x , луч вдоль вектора e_1 является "естественным" сечением Пуанкаре, а p -ая итерация F^p отображения F на нем – отображением последования отображения F , зависящим от p чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

При рассмотрении системы F^m на всем множестве M_p , числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ становятся параметрами и отображение F^p зависит от $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, как от параметров. Параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ определяют динамику системы F^m на множестве M_p и сами определяются структурой множества M_p .

При $p = 1$ множество M_1 расположено на собственном направлении матрицы A , соответствующем собственному значению $\lambda \geq 0$. Для любого $x \in M_1$

$$Fx = \lambda\Phi(x)x,$$

т.е. динамика системы F^m на M_1 является однопараметрической (зависит от одного параметра λ). Множество $M_1 \subset M_p$ при $p > 1$ можно назвать "мнимым" циклом отрезков лучей периода p с совпадающими отрезками лучей, для которого $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \lambda$.

Таким образом, динамика системы F^m в K_a^n определяется наборами параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, характерными для этой системы. Поэтому естественно назвать такие параметры "*внутренними*" параметрами системы (в отличие от "внешних" параметров – коэффициентов матрицы A). Наборы параметров определяются однозначно свойствами матрицы A , т.е. при фиксированных значениях "внешних" параметров, и могут отличаться между собой как по количеству входящих в них параметров, так и по области их значений.

2. Определение наибольшего периода циклических инвариантных множеств. Согласно [2] (см. также [1,3]) для всех или почти для всех (по мере) $x \in K_a^n$ ω -предельные множества траекторий $F^m x$ системы F^m расположены во множествах M_p , содержащих собственные векторы матрицы $A \geq 0$, соответствующие максимальному собственному значению $\lambda \geq 0$ матрицы A ([4], с.334). Поэтому будем определять наибольший период $p^* > 1$ (при $n > 1$) именно этих множеств M_p . Поскольку при $\lambda = 0$ матрица A является нильпотентной, т.е. $A^t = 0$ для некоторого $t > 1$, то в дальнейшем полагаем $\lambda > 0$. Рассмотрим возможные виды матрицы A .

Пусть A – неразложимая матрица индекса импримитивности h ([4], с. 355). Тогда наибольший период множества M_p равен $\max\{h \mid 1 \leq h \leq n\} = n$.

Пусть A – разложимая матрица квазидиагонального вида ([4], с. 354), $A = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$, где $A_j \geq 0$ – неразложимая квадратная матрица индекса импримитивности $h_j \geq 1$, $j = \overline{1, s}$, $s > 1$. Обозначим через $\text{НОК}(l, m)$ наименьшее общее кратное чисел l и m . Из [1] (см. лемма 2) следует, что отображение F имеет множества M_p наибольшего периода, если все матрицы A_j имеют число λ своим характеристическим числом, $j = \overline{1, s}$. В этом случае матрица A имеет положительный собственный вектор, соответствующий числу λ , и наибольший период множества M_p равен $\text{НОК}(h_j \mid j = 1, \dots, s)$.

Пусть A – нормальная форма разложимой матрицы ([4], с. 351) неквазидиагонального вида, и неразложимые квадратные матрицы A_j индекса импримитивности $h_j \geq 1$ расположены вдоль диагонали, $j = \overline{1, s}$, $s > 1$. Если числу λ соответствует положительный собственный вектор матрицы A , то согласно теореме 7 ([4], с. 353) только изолированные блочные матрицы вдоль диагонали имеют число λ своим характеристическим числом и значит, наибольший период множества M_p меньше, чем $\text{НОК}(h_j \mid j = 1, \dots, s)$. Если числу λ соответствует неотрицательный собственный вектор матрицы A , то он принадлежит инвариантному координатному подпространству матрицы A , в котором расположено и само множество M_p . Среди матриц A_1, \dots, A_s существуют матрицы ($< s$), собственным значениям которых соответствует это подпространство и, значит, наибольший период множества M_p будет меньше, чем $\text{НОК}(h_j \mid j = 1, \dots, s)$.

Для всех других видов матрицы $A \geq 0$ (матрица A имеет вид разложимой матрицы, но среди максимальных собственных значений матриц A_j могут быть нулевые, $j = \overline{1, s}$) наибольший период множеств M_p будет меньше, чем $\text{НОК}(h_j \mid j = 1, \dots, s)$. (Случай $s = 2$ см. в [3].) Пусть

$$p^* = \max_s \max_{h_j} \text{НОК}(h_j \mid j = 1, \dots, s), \quad 1 \leq s \leq n.$$

Число p^* является искомым. Для любого $n > 1$ число $p^* > 1$ единственно, но неоднозначно определяется квазидиагональным видом матрицы A .

Пример 1. Для $n = 6$ $p^* = n$ и достигается на квазидиагональных матрицах A , у которых: 1) $s = 1$, $h_1 = n$ (неразложимая матрица индекса импримитивности n); 2) $s = 2$, $h_1 = 3$, $h_2 = 2$; 3) $s = 3$, $h_1 = 3$, $h_2 = 2$, $h_3 = 1$, а также на матрицах, полученных из данных перестановкой диагональных блоков и транспонированием. При этом матрицы A_j , $j = \overline{1, s}$, имеют одинаковые максимальные собственные значения.

Очевидно, что p^* есть функция от n и обладает следующим свойством.

Свойство 1. Функция $p^* = p^*(n)$ является неубывающей функцией.

Действительно, с ростом n $p^*(n)$ может только возрастать. Однако, существуют n такие, что $p^*(n) = p^*(n + 1)$. Например, как нетрудно убедиться, $p^*(5) = p^*(6) = 6$ и $p^*(10) = p^*(11) = 30$.

Чтобы определить p^* , достаточно подобрать взаимно простые числа, в сумме не превышающие n , и вычислить их произведение. Допустим, что найдены s взаимно простых чисел h_j , $s \geq 1$, произведение которых является наибольшим. Тогда

$$p^* = \text{НОК}(h_j \mid j = 1, \dots, s) = \prod_1^s h_j. \quad (1)$$

(В данной работе не предлагается метод вычисления числа p^* , т.к. это предмет теории оптимизации. Достаточно указать, что такое число существует, и привести простую формулу для его вычисления.)

Пример 2. Для $n = 18$ $p^* = 210$ и достигается, в частности, на квазидиагональной матрице A , у которой $s = 3$, $h_1 = 7$, $h_2 = 6$, $h_3 = 5$ и все матрицы A_j , $j = \overline{1, s}$, имеют одинаковые максимальные собственные значения.

Таким образом, установлен следующий результат.

Теорема 1. Наибольший период p^* множеств M_p имеют системы F^m с матрицами квазидиагонального вида, у которых неразложимые квадратные матрицы, стоящие на главной диагонали, имеют одинаковые максимальные собственные значения (> 0), при этом число p^* определяется формулой (1).

Элементарные вычисления периода p^* при не очень больших значениях n (≤ 20) позволили установить еще одно свойство функции $p^*(n)$.

Свойство 2.

$$p^* \begin{cases} = n, n \leq 4, \\ < n^2, 4 < n \leq 18, \\ > n^2, n > 18. \end{cases}$$

Доказательство. Определим p^* по формуле (1). Случай $n \leq 4$ не вызывает затруднений. Начиная с $n > 4$, $p^* > n$. Для случая $4 < n \leq 18$ имеем $p^*(5) = 6$ и $p^*(18) = 210$ (пример 2); остается воспользоваться свойством 1 функции $p^*(n)$. Далее вычисляем $p^*(19) = 420$, в то время как $n^2 = 361$. Значение $p^* = 420$ достигается, в частности, на матрице (см. теорему 1), у которой $s = 4$, $h_1 = 3$, $h_2 = 4$, $h_3 = 5$, $h_4 = 7$.

Согласно свойству 2 для полного описания динамики системы F^m размерности $n \geq 19$ "внутренних" параметров становится больше, чем "внешних" параметров.

3. Типичные свойства динамики. Пусть отображение \widehat{F} имеет циклическое инвариантное множество M_{p^*} . Расположение ω -предельных множеств системы \widehat{F}^m в K_a^n дает

Утверждение. Пусть M_{p^*} – циклическое инвариантное множество отображения \widehat{F} . Тогда ω -предельные множества системы \widehat{F}^m расположены в циклических инвариантных множествах отображения \widehat{F} , периоды которых образуют множество попарно различных чисел вида $\{1, \text{НОК}(h_{j_u} \mid j_u \in \{1, \dots, s\}, 1 \leq u \leq t, t = 1, \dots, s)\}$.

Утверждение основано на доказательстве полученных в [1] (см. лемма 2) результатов для матрицы A квазидиагонального вида.

Сформулируем в виде теорем свойства динамики, возникающей в системе F^m .

Теорема 2. Пусть M_{p^*} – циклическое инвариантное множество отображения \widehat{F} . Динамика системы \widehat{F}^m не является типичной.

Доказательство. В пространстве параметров R^{n^2} системы \widehat{F}^m образуют множество нулевой меры: элементы матриц при $n > 1$ расположены в пространстве R^m , где $m = n$ при $s = 1$ и $m \leq \sum_1^s n_j^2 < n^2$ при $s > 1$, n_j – размерность матрицы A_j , $j = \overline{1, s}$.

Теорема 3. Для семейства систем F^m однопараметрическая динамика является типичной.

Доказательство. В пространстве параметров множество систем F^m с положительными матрицами имеет полную меру (за исключением множества меры нуль, расположенного в подпространстве размерности $n^2 - 1$). Отображение F с матрицей $A > 0$ имеет единственное множество M_1 , на котором динамика системы F^m определяется одним параметром.

Из полученных результатов следует ряд утверждений для случая $n \leq 4$.

Следствие 1. Пусть $n \leq 4$. Динамика системы F^m в K_a^n зависит не более, чем от n параметров.

Действительно, в этом случае согласно свойству 2 $p^* = n$ и матрица A является неразложимой индекса примитивности n с n не равными нулю элементами.

Следствие 2. Пусть $1 < n \leq 4$. Для семейства систем F^m n -параметрическая динамика не является типичной.

Отличие утверждений следствия 2 и теоремы 1 для случая $1 < n \leq 4$ в том, что $M_n = K_a^n$, т.е. во всем фазовом пространстве K_a^n динамика системы F^m является n -параметрической.

Заключение. Согласно полученным результатам можно сделать следующие выводы.

1. Периоды циклических инвариантных множеств могут быть такими большими, что при численном эксперименте трудно определить тип динамики системы. Например, система 23-го порядка ($n^2 = 529$) имеет циклическое инвариантное множество (возможно, не наибольшего) периода 840 ($s = 4$, $h_1 = 3$, $h_2 = 5$, $h_3 = 7$, $h_4 = 8$). Даже в случае простой динамики системы (аттракторы на всех отрезках лучей – неподвижные точки), ее сложно проследить численно.

2. Для полного описания динамики систем необходимо проводить p -параметрические исследования зависимости динамики, где $p = \overline{1, p^*}$, поскольку в семействе n -мерных систем присутствуют все виды p -параметрической зависимости динамики.

Цитированная литература

1. Панкратова И. Н. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 138 – 144.
2. Панкратова И. Н. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995 – 997.
3. Панкратова И. Н. // Сиб. матем. журнал. 2009. Т. 50, № 1. С. 132 – 145.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.

Поступила в редакцию 28.01.2009г.

УДК 510.6

REFINED DEFINITIONS FOR FINITARY AND INFINITARY SIMILARITY RELATIONS OF THEORIES

Part 3: Scheme of standard transformations of theories, and signature reduction procedures

M. G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics, Almaty

050010 Kazakhstan, Almaty, 125 Pushkin Street, mikhail_peretyatkin@predicate-logic.org

In this series of papers, Finitary list *ACL* also called *algebraic Cartesian* list and Infinitary list *MQL* also called *quasi-exact* list are considered. They play an important role in investigations of expressive power of first-order Predicate Logic. The series is attended to give definitions for these base concepts and study their main properties in maximum laconic form.

In this work, general scheme of transformations of theories is introduced, and detailed description of primitive stages for signature reduction procedures is given.

Base concepts used in the work can be found in [1]–[4], *GRE* means an extension of Graph theory in signature $\{\Gamma^2\}$ defined in [3], lists *ACL*, *MCL*, *AQL* and corresponding similarity relations are defined in [4].

A finite signature is called *rich*, if it contains at least one n -ary predicate or functional symbol for $n \geq 2$, or two unary functional symbols. By $FL(\sigma)$, we denote the set of all formulas of signature σ , while $SL(\sigma)$ is the set of all sentences of signature σ . A signature σ is called *enumerable*, if the set $FL(\sigma)$ admits a Gödel enumeration. Only enumerable signatures are considered. Marks fin/inf are used to specify type of signature, finite or infinite, in signature reduction procedures.

Based on Post enumeration of recursively enumerable sets W_n , $n \in \mathbb{N}$, we construct an effective enumeration for the class of all recursively axiomatizable theories as follows. Let σ be an enumerable signature. We fix a Gödel enumeration Φ_i , $i \in \mathbb{N}$, for all sentences in the signature σ . If a theory T in the signature σ is defined by the set of axioms $\{\Phi_i \mid i \in W_m\}$, then m is called the *recursively enumerable index* or simply *index* of the theory T . There is an alternative definition. Using the same set of axioms $\{\Phi_i \mid i \in W_m\}$ we construct a theory T' in the signature $\sigma' \subseteq \sigma$, where σ' contains only those symbols from σ that occur in formulas of the sequence Φ_i , $i \in W_m$. The number m is called a *weak recursively enumerable index* or simply *weak index* of the theory T' . Using weak indices with some very large enumerable signature (including infinitely many constants and infinitely many

Keywords: *first-order logic, theory, model, interretation, algorithm*

2000 Mathematics Subject Classification: 03B10

© M. G. Peretyat'kin, 2009.

predicates and functions of each arity), we obtain an effective enumeration of the set of all possible recursively axiomatizable theories of any enumerable signatures.

1. Transformations of theories. Alongside with the concept of an interpretation, there is similar concept of a *transformation of theories*. A transformation J is defined on some class of theories \mathfrak{T} , and for each theory $T \in \mathfrak{T}$, $J(T)$ yields a pair (I', T') , where T' is a theory from some other class \mathfrak{T}' , while I' is an interpretation of given theory T in the obtained theory T' . In this case, we say, that J is *transformation from class \mathfrak{T} into class \mathfrak{T}'* . Ordinarily, both classes \mathfrak{T} and \mathfrak{T}' are directly specified, and the interpretation I' , defined from a transformation J , should satisfy to some known requirements to supply the transmission from T to T' some beforehand planned properties.

2. Scheme of primitive transformations. We describe a complex of special transformations of theories used in signature reduction procedures (and constructions). We call them *primitive* or *standard transformations*. Actually, some of the transformations represent known signature reduction methods repeatedly described in plenty of papers. In this chapter, they are described as an integrated complex, and provided with exact conditions for maximum wide region of applications.

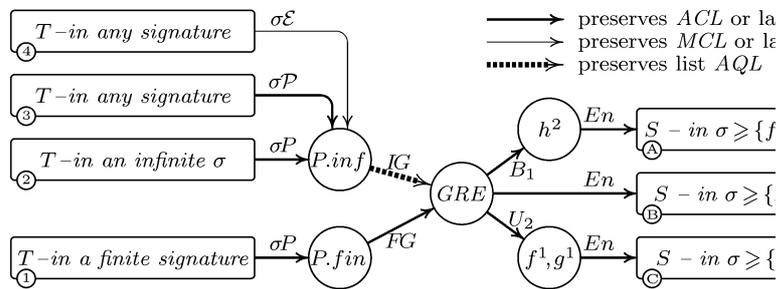


Fig.2.1. Scheme of primitive signature transformations

- ① — entrance of procedure of transformation among finite rich signat
- ②③④ — entrances of reduction of r.e. signature to finite rich signature
- ⒶⒷⒸ — exit points of all procedures, depending of required finite rich sig

Complete scheme of primitive transformations is given in Fig. 2.1. There are 4 input nodes and 3 output nodes. Various paths from input to output cover all possibilities available for signature reduction procedures.

3. Eight primitive transformations. Now consider the elementary transformations in detail.

First elementary transformation:

Theorem 3.1. [Stage σP] *Let T be a theory in an arbitrary (fin/inf) signature σ . One can construct a theory S in a pure predicate (fin/inf) signature τ , of the same cardinality as σ has, together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is algebraic isomorphism of theories (preserving full algebraic list AL of model-theoretic properties), such that the following assertions hold:*

- (a) T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T ,
- (b) T is f.a. $\Leftrightarrow S$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both a Gödel number to S and an index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .

PROOF. The predicate symbols of signature σ are passed to τ without any modification, every n -ary function of σ is transformed in $(n + 1)$ -ary predicate in τ , while each constant of σ is transformed to a unary predicate in τ . The axioms of theory T are naturally transformed to axioms of signature τ . Obviously, this description yields a theory S and an interpretation $I : T \rightarrow S$ which is an algebraic isomorphism of theories. One can easily check that all the requirements for obtained S and I are satisfied.

Second elementary transformation:

Theorem 3.2. [Stage $\sigma\mathcal{P}$] *Let T be a theory in an arbitrary (fin/inf) signature σ . One can construct a theory S in a pure predicate (fin/inf) signature τ , of the same cardinality as σ has, together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is algebraic isomorphism of theories (preserving full algebraic list AL of model-theoretic properties), such that the following assertions hold:*

(a) T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T ,

(b) T is f.a. $\Leftrightarrow S$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both a Gödel number to S and an index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .

PROOF. The transformation is defined for any theory T of a signature σ , and as a result, it gives a theory S of an infinite pure predicate signature τ . Similarly to previous theorem, the predicate symbols of σ are passed to τ without any modification, every n -ary function of σ is transformed in $(n + 1)$ -ary predicate in τ , while each constant of σ is transformed to a unary predicate in τ . Additionally, an infinite set of new predicates P_n^n , $n \in \mathbb{N}$, is added. The axioms of theory T are naturally transformed in axioms of theory S of signature τ , while new predicates must be defined trivially. It is obvious, that obtained interpretation $I : T \rightarrow S$ is an algebraic isomorphism of theories. Moreover, one can use weak indices for input theory T , while destination theory S is defined by normal index, and interpretation I is also found effectively. One can check that all the requirements for S and I are satisfied. Third elementary transformation:

Theorem 3.3. [Stage $\sigma\mathcal{E}$] *Let T be a theory in an arbitrary enumerable signature σ . One can construct a model complete theory S in a pure predicate infinite enumerable signature τ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is isomorphism of theories (preserving full model list ML), and the following is satisfied: T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in a weak index of the source theory T .*

PROOF. Let a theory T of signature σ be given. Define signature τ as follows

$$\tau = \{P_\varphi(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) \in FL(\sigma)\},$$

after that, define an auxiliary theory S' in signature $\sigma \cup \tau$ by the following set of axioms

$$\Sigma = T \cup \{(\forall x_1, \dots, x_n)(P_\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) \in FL(\sigma)\},$$

and finally, define resulting theory S as follows

$$\sigma\mathcal{E}(T) = S = \Sigma \upharpoonright \tau.$$

Transformation from T to Σ is well known in model theory as *full first-order enrichment* of the theory T . In given operation $\sigma\mathcal{E}$, we additionally eliminate any symbols of source signature σ , adapting the same title *full first-order enrichment* to the whole operation $S = \sigma\mathcal{E}(T)$.

One can see, that both steps in the chain

$$T \mapsto \Sigma \mapsto S$$

are first-order invertible transformations, and therefore, $\sigma\mathcal{E}(T)$ results in a theory S which is model isomorphic to T . By the construction, obtained theory S admits quantifier elimination, and therefore, S is model complete. Obviously, we can use weak r.e. indices for source theory T , while resulting theory is defined by normal r.e. index, and all other requirements for obtained S and I are satisfied as well.

Fourth elementary transformation:

Theorem 3.4. [Stage Enrich] *Three following statements are held:*

1: *Let T be a theory in signature $\{P^2\}$, and τ be any finite rich signature including at least one n -ary predicate R^n for $n \geq 2$ (and anything more). One can construct a theory S in signature*

τ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is a singleton interpretation (particularly, I preserves algebraic singleton list ASL).

2: Let T be a theory in signature $\{f^1(x), g^1(x)\}$, and τ be any finite rich signature including at least two unary functions (and anything more). One can construct a theory S in signature τ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is a singleton interpretation (particularly, I preserves algebraic singleton list ASL).

3: Let T be a theory in signature $\{f^2(x, y)\}$, and τ be any finite rich signature including at least one n -ary function for $n \geq 2$ (and anything more). One can construct a theory S in signature τ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is a singleton interpretation (particularly, I preserves algebraic singleton list ASL).

In each of these cases the following assertions are held:

(a) T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T ,

(b) T is f.a. $\Leftrightarrow S$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both a Gödel number to S and an index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .

Moreover, if τ is any finite rich signature, then, at least one of the cases 1, 2, or 3, is applicable to the signature τ , and the case applicable can be found effectively in given signature τ .

PROOF. The transformation is an enrichment of theory T of given finite signature σ (being minimal among rich signatures) to a larger signature τ . For instance, one binary predicate $P(x, y)$ can be represented in any finite "larger" signature, for instance, $\tau = \{R^3, \dots\}$, where there may be any additional predicate, functional and constant symbols instead of dots.

First, consider mostly complicated case when σ includes at least one constant symbol, say c . In this case, the region of the interpretation is defined by formula $U(x) = (x \neq c)$, the I -image of atomic formula $P(x, y) \in FL(\sigma)$ is set to be the formula $R(x, y, y) \wedge U(x) \wedge U(y)$; moreover, all symbols of $\tau \setminus \{R^3\}$ are defined trivially (as for constants in τ , they may be assigned to c). In addition to these demands, formulas of the form $I(\Phi)$, Φ is an axiom of the theory T , are also included in resulting theory S . In this case, interpretation $I : T \rightarrow S$ is a constant extension.

In more simple case when τ includes none constants, take identically true formula $U(x) = (x = x)$ as the domain of interpretation I , and then the same construction is applied. In this case, we obtain an interpretation $I : T \rightarrow S$ which is algebraic isomorphism, and thus, it can be considered as a constant extension with a tuple of constants of length 0.

Other cases of signatures σ and τ are considered similarly. Fifth elementary transformation:

Theorem 3.5. [Stage FG] Let T be a theory in a finite pure predicate signature

$$\sigma = \{P_1^{m_1}, P_2^{m_2}, \dots, P_k^{m_k}\}. \quad (3.1)$$

One can construct a theory S in signature $\tau = \{\Gamma^2\}$ extending graph theory GRE together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is Cartesian interpretation (particularly, I preserves Finitary list ACL). Moreover, the following assertions hold:

(a) S is r.a. $\Leftrightarrow T$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T ,

(b) S is f.a. $\Leftrightarrow T$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both a Gödel number to S and an index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .

Sixth elementary transformation:

Theorem 3.6. [Stage G] Let T be a theory in an infinite pure predicate signature

$$\sigma = \{P_1^{m_1}, P_2^{m_2}, \dots, P_k^{m_k}, \dots\}. \quad (3.2)$$

One can construct a theory S in signature $\tau = \{\Gamma^2\}$ extending graph theory GRE together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is algebraic quasi-exact interpretation (particularly, I preserves algebraic Infinitary list AQL), and the following assertions hold:

(a) S is r.a. $\Leftrightarrow T$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T .

PROOF for Theorem 3.5 and Theorem 3.6 is done parallelly.

Common part for both theorems:

Starting from a model \mathfrak{N} of signature σ , we construct some new model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of graph theory GRE in signature $\{I^2\}$, inside which the source model \mathfrak{N} is $\exists \cap \forall$ -presentable in some regular manner. For this, the following procedure is applied (schematically presented in Fig. 3.1). Define $|\mathfrak{M}|$ to be equal to the union of three following pairwise disjoint sets $U \cup C \cup D$, such that $D = \{d_0, d_1, \dots, d_6\}$ is a seven-element set, U is a set of the same cardinality as $|\mathfrak{N}|$, and $h : |\mathfrak{N}| \rightarrow U$ is a fixed bijection, while the set C is specified later. The construction provides that, these parts U, C, D are first-order definable by means of special formulas $U(x), C(x), D(x)$, which are specified later.

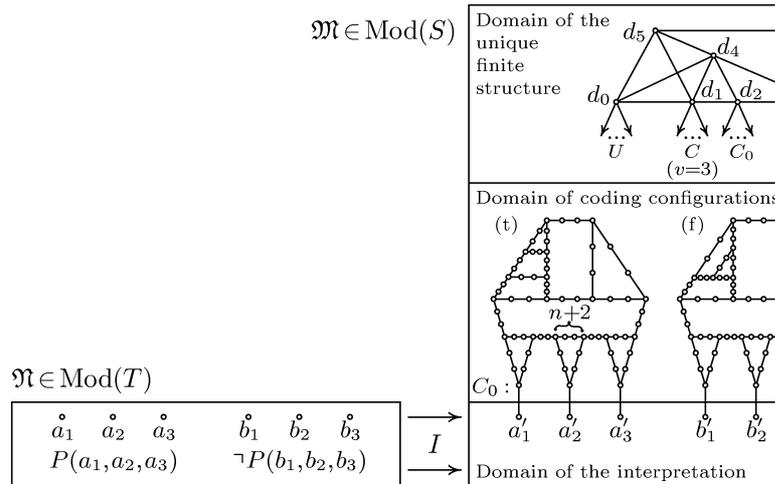


Fig.3.1. Reduction of a pure predicate signature to graphs

Proceed to the definition of I -links on the set $|\mathfrak{M}|$.

At first stage, define I -links on $U \cup C$. According to our construction, predicates of signature either (3.1) or (3.2) are interpreted in the domain U , while the truth values of the predicates are encoded by means of special configurations in extra domain C as it is schematically shown in Fig. 3.1. Denotation

$$E(n, m, v), \quad 1 \leq n, \quad 0 \leq m, \quad v \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\},$$

stands for the form of configuration corresponding to predicate $P_n(x_1, \dots, x_m)$ of signature (3.1) or (3.2), where:

n is index of the predicate; the value $n+2$ represents lengths of prime chains in the configurations for this predicate,

m is arity of the predicate; this value is equal to the number of lags (supports) of configurations for this predicate,

$v \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ represents the truth value of the predicate on a tuple; value of this parameter causes in two different structure form of configurations.

For instance, two configurations presented in Fig. 3.1 correspond to the following values of parameters: $n = 1, m = 3$; moreover, the first configuration labeled as (t) represents case $v = \mathbf{t}$, i.e., true, while the second one labeled as (f) represents case $v = \mathbf{f}$, i.e., false.

By means of given bijection $h : |\mathfrak{N}| \rightarrow U$, temporarily transfer predicate structure of model \mathfrak{N} on the set U . Consider m_n -ary predicate $P_n^{m_n}$ of signature σ and get any tuple of elements $a_1, a_2, \dots, a_{m_n} \in U$. In the case when $P_n(a_1, a_2, \dots, a_{m_n})$ is true, with the help of elements from C and I -links, construct over the tuple $(a_1, a_2, \dots, a_{m_n})$ a configuration of the form $E(n, m_n, \mathbf{t})$. In the other case, when $P_n(a_1, a_2, \dots, a_{m_n})$ is false, construct over this tuple a configuration of the form $E(n, m_n, \mathbf{f})$.

Configurations for different predicates, as well as configurations for the same predicate but for different tuples, should not have common elements in C , but they may have shared elements in U . For each predicate $P_n \in \sigma$ and each tuple of elements from U of length m_n , there should be exactly one configuration, either of the form (\mathfrak{t}) , or of the form (\mathfrak{f}) , in accordance with the truth value of this predicate in this tuple. Now, define domain C as the set of elements of all coding configurations, excluding from them U -elements.

Now, define Γ -links on the set D and between sets D and $U \cup C$. On the set D , determine structure of a seven-element graph which form is depicted in the upper part in Fig. 3.1. For this aim, denote by

$$\Phi(z_0, z_1, \dots, z_6)$$

a primitive quantifier-free formula of signature $\sigma_{GR} = \{\Gamma^2\}$ which describes atomic diagram of this Γ -structure under the assumption that the value of z_i is assigned to d_i . Then, introduce denotations for the following formulas:

$$\begin{aligned} D_i(x) &= (\exists z_0 \dots z_6)[\Phi(z_0, \dots, z_6) \& (x = z_i)], \quad i < 7, \\ D(x) &= D_0(x) \vee \dots \vee D_6(x). \end{aligned}$$

Define Γ -links between sets D and $U \cup C$ as follows. For an arbitrary element x in $U \cup C$, we set

$$\begin{aligned} \Gamma(d_0, x) &\Leftrightarrow x \in U, \\ \Gamma(d_1, x) &\Leftrightarrow (x \in C) \& (x \text{ have valency } 3 \text{ within region } C), \\ \Gamma(d_2, x) &\Leftrightarrow (x \in C) \& (\exists y)(\Gamma(x, y) \& U(y)), \\ \Gamma(d_3, x) &\Leftrightarrow (x \in C) \& (x \text{ have valency } 2 \text{ within region } C) \wedge \neg \Gamma(d_2, x). \end{aligned}$$

Finally, define Γ to be false on all those pairs of elements in $|\mathfrak{M}|$ which were not involved in the description above, and eliminate temporarily defined predicates of signature σ on the set U . On this, construction of the model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of signature $\sigma_{GR} = \{\Gamma^2\}$ is complete.

Study properties of models $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ obtained by the construction.

Construction guarantees uniqueness of realization of the formula Φ , presenting atomic diagram of special seven-element graph, which we denote by G_7 . Valency of each element among d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 , and d_5 is 4 or larger, while none of the elements can have such valency in other parts of the model $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$. As for d_6 , role of this element is to provide that graph G_7 itself is rigid, i.e., admits none non-trivial automorphisms. As a result, each of the formulas $D_i(x)$, $i \in \{0, 1, \dots, 6\}$, distinguishes exactly one element in model $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(\sigma)$; moreover, these seven elements are different, and thus, formula $D(x)$ distinguishes exactly 7 elements in this model.

Using elements of $D(x)$ as pivots, one can distinguish other regions in the model. The following formulas

$$\begin{aligned} U(x) &= \neg D(x) \wedge (\exists z)[D_0(z) \wedge \Gamma(z, x)], \\ C(x) &= \neg D(x) \wedge (\exists z)[(D_1(z) \vee D_2(z) \vee D_3(z)) \wedge \Gamma(z, x)], \\ C_0(x) &= C(x) \& (\exists y)[\Gamma(x, y) \& U(y)]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Distinguish domains U and C involved in the description above, while $C_0(x)$ distinguishes the elements of configurations directly Γ -linked with elements of U . It is immediately provided by the definition of Γ -links in the model.

Notice that, construction of $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ admits some arbitrariness in choice of the domain sets U, D, V , bijective function h , etc. Nevertheless, the resulting model is defined uniquely up to isomorphism, that formally looks as follows. Let \mathfrak{N} be a model of signature σ and two independent realizations of the construction are performed, which use domains and mappings $D', U', C', h' : \mathfrak{N} \rightarrow U'$, and

$D'', U'', C'', h'' : \mathfrak{N} \rightarrow U''$, resulting in two models \mathfrak{M}' and \mathfrak{M}'' . Then, there is an isomorphism $\mu : \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}''$ such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} & U' \subseteq \mathfrak{M}' & \\ h' \nearrow & & \mu \downarrow \\ \mathfrak{N} & & \\ h'' \searrow & & \\ & U'' \subseteq \mathfrak{M}'' & \end{array} \quad (3.4)$$

Moreover, $\mu(D') = D''$, $\mu(C') = C''$, $\mu(U') = U''$ take place. Emphasize that, basic idea of the construction is subordinated to achieve this key property.

Now, turn to the definition of a theory S and an interpretation I .

Define S as the theory of the class of all models of the form $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ for all models \mathfrak{N} of given theory T , i.e.,

$$S = \text{Th}\{\mathbb{E}(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)\}.$$

Domain $U(x)$ of interpretation I of theory T in theory S is defined by formula (3.3). Equality relation $(x = y)$ of theory T is interpreted by an ordinary equality relation restricted in the domain:

$$\varepsilon(x, y) = U(x) \wedge U(y) \wedge (x = y). \quad (3.5)$$

Atomic formula $P_n(x_1, x_2, \dots, x_{m_n})$ of theory T is mapped onto a formula of signature $\sigma_{GR} = \{I^2\}$ asserting inclusions $U(x_i)$, $1 \leq i \leq m_n$, and existence over the tuple $(x_1, x_2, \dots, x_{m_n})$ of a configuration of form (t) corresponding to the predicate P_n . By induction, extend the mapping up to a transformation $I : FL(\sigma) \rightarrow FL(\sigma_{GR})$, which is just required interpretation I of theory T in theory S .

As a result of the construction, starting with input parameter T , we have obtained a pair of objects: a theory S and an interpretation $I : T \rightarrow S$. Below, $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$ denotes kernel-model of $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(S)$, determined by interpretation I from the model \mathfrak{M} , which is defined in Section 5 of [4].

Claim A. *Interpretation I is $\exists \cap \forall$ -presentable.*

PROOF. The following expressions for the domain set $U(x)$ take place:

$$\begin{aligned} U(x) &\leftrightarrow (\exists z_0 \dots z_6)[\Phi(z_0, \dots, z_6) \wedge x \neq z_0 \wedge \dots \wedge x \neq z_6 \wedge \Gamma(z_0, x)], \\ \neg U(x) &\leftrightarrow (\exists z_0 \dots z_6)[\Phi(z_0, \dots, z_6) \wedge (x = z_0 \vee \dots \vee x = z_6) \wedge \neg \Gamma(z_0, x)]. \end{aligned}$$

Also, the following expressions represent predicate symbols of T via signature $\{I^2\}$ in theory S :

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_m) &\leftrightarrow U(x_1) \wedge \dots \wedge U(x_m) \wedge (\exists \bar{z}) \mathcal{C}_P^{\mathfrak{t}}(x_1, \dots, x_m, \bar{z}), \\ \neg P(x_1, \dots, x_m) &\leftrightarrow U(x_1) \wedge \dots \wedge U(x_m) \wedge (\exists \bar{z}) \mathcal{C}_P^{\mathfrak{f}}(x_1, \dots, x_m, \bar{z}), \end{aligned}$$

where $\mathcal{C}_P^{\mathfrak{t}}$ and $\mathcal{C}_P^{\mathfrak{f}}$ are atomic diagrams of configurations for m -ary predicate $P \in \sigma$ of types respectively \mathfrak{t} and \mathfrak{f} . As for I -image $\varepsilon(x, y)$ of the equality relation $=$ defined in (3.5), it can be easily presented in both \forall -form and \exists -form.

Thus, $\exists \cap \forall$ -presentability of the interpretation I is established.

List axioms of theory S . They include the following requirements, where axiom 14° depends of the case of signature fin/inf, while the other axioms are common for both cases.

1°. $(\forall x)\neg \Gamma(x, x)$, and $(\forall x)(\forall y)[\Gamma(x, y) \leftrightarrow \Gamma(y, x)]$.

2°. Formula $D(x)$ distinguishes exactly seven elements presenting unique seven-element tuple of realization for the formula $\Phi(z_0, \dots, z_6)$.

3°. Formulas $U(x), C(x), D(x)$ determine a partition of the universe set in three nonempty parts.

4°. $U(x) \wedge U(y) \rightarrow \neg \Gamma(x, y)$.

5°. Any element x from C has the valency 2 or 3 within the domain C .

6°. $(\forall x)[C_0(x) \leftrightarrow \neg D(x) \& (\exists z)(D_2(z) \& \Gamma(z, x))]$.

7°. An element x has the valency 2 within the domain C if and only if $\neg D(x) \& (\exists z)[(D_2(z) \vee D_3(z)) \& \Gamma(z, x)]$.

8°. An element x has the valency 3 within the domain C if and only if $\neg D(x) \& (\exists z) D_1(z) \& \Gamma(z, x)$.

9°. If $C_0(x)$, then x has the valency 2 within the domain C .

10°. $C_0(x) \wedge \Gamma(x, y) \wedge C(y) \rightarrow y$ has the valency 2 within the domain C .

11°. If $C(x)$, $C(y)$, $\Gamma(x, y)$, and x has the valency 3 within the domain C , then y has the valency 2 within the domain C .

12°. For any predicate $P \in \sigma$ and any tuple of elements in U of corresponding size, in the domain C , there is exactly one coding configuration either of the form (\mathfrak{t}) or of the form (\mathfrak{f}) , such that its form corresponds to this predicate over this tuple according to given above description.

13°. Any two different coding configurations (concerning to different predicates or to different tuples of the same predicate) do not have common elements in the domain C .

14(fin)°. Any element x in the domain C belongs to a coding configuration.

14(inf)°. Consists of two following schemas of axioms: (a) Let $n \in \mathbb{N}$, and let x_0, x_1, \dots, x_n be elements in C having valency 2 in C such that $\Gamma(x_i, x_{i+1})$ is hold for $i = 0, 1, \dots, n-1$. Then, $x_0 \neq x_n$. (b) For each $n \in \mathbb{N}$ the following is satisfied: Let x_0, x_1, \dots, x_n be elements in C such that either of x_0 and x_n has valency 3 in C or belongs to C_0 , while the other elements x_1, \dots, x_{n-1} have valency 2 in C , and $\Gamma(x_i, x_{i+1})$ is hold for $i = 0, 1, \dots, n-1$. Then, the chain x_0, \dots, x_n belongs to a coding configuration of corresponding size n for its primitive chains.

15°. Statement $I(\varphi)$ is satisfied, for any sentence $\varphi \in SL(\sigma)$ which is an axiom of the theory T .

System of axioms is complete.

Claim B. Axioms 1°–15°, including both 14(fin)° and 14(inf)°, hold in $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ for any model $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$.

PROOF. By immediate checking.

COMMON PART ENDS.

PROOF following below is concerned to Theorem 3.5 only.

Prove that these axioms indeed represent theory S .

Claim C. Let \mathfrak{M} be any model of signature $\{\Gamma^2\}$. The following claims are equivalent:

(a) $\mathfrak{M} \models 1^\circ\text{--}13^\circ, 14(\text{fin})^\circ, 15^\circ$,

(b) there is a model $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$ such that $\mathfrak{M} \cong \mathbb{E}(\mathfrak{N})$.

PROOF. (a) \Rightarrow (b) Let the axioms be satisfied in a model \mathfrak{M} of signature $\{\Gamma^2\}$. One can see, these axioms represent formal requirements that exactly correspond to informal description of construction $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(\sigma)$. Moreover, axiom 15° requires that \mathfrak{N} must be a model of source theory T . Performing the construction with this model \mathfrak{N} , we obtain that $\mathbb{E}(\mathfrak{N}) \cong \mathfrak{M}$ is satisfied with $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$. (b) \Rightarrow (a) Is checked immediately.

Claim D. Both theory S and interpretation I are constructed effectively by given index/Gödel number of source theory T . Moreover, in finite case (3.1), theory S is f.a. $\Leftrightarrow T$ is f.a., and in both cases, theory S is r.a. $\Leftrightarrow T$ is r.a.

PROOF. Immediately from the definition of interpretation I and form of axioms of theory T .

Claim E. The following assertions hold:

(a) $\mathbb{K}(\mathbb{E}(\mathfrak{N})) \cong \mathfrak{N}$, for all $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$.

(b) $\mathbb{E}(\mathbb{K}(\mathfrak{M})) \cong \mathfrak{M}$, for all $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(S)$.

PROOF. This claim is an immediate consequence of the construction. **Claim F.** Let \mathfrak{M}_1 and \mathfrak{M}_2 be any two models of theory S . Any isomorphism of their kernels $\mu : \mathbb{K}(\mathfrak{M}_1) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M}_2)$ can be expanded to an isomorphism $\mu^* : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ such that $\mu \subseteq \mu^*$.

PROOF. This claim is provided by isomorphism pointed in (3.4).

Claim G. Interpretation I is an exact interpretation of theory T in domain $U(x)$ of theory S .

PROOF. Check the conditions listed in (16.1) of [4]. Effectiveness is obvious. Model bijectiveness is established in Claim F. Let an element a in $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \text{mod}(T)$, be given. For (c), it is required to prove that $a \in \text{acl}(U(\mathfrak{M}))$. If $U(a) \vee D(a)$, $a \in \text{acl}(U(\mathfrak{M}))$ is satisfies trivially. Consider remainder case $C(a)$. There is a configuration \mathcal{C} of some type \mathfrak{T} over a tuple $\bar{c} \in U(\mathfrak{M})$, such that

$a \in \mathcal{C}$, moreover, there is the only such configuration. Take a formula $\varphi(x, \bar{z})$ stating that x belongs (in particular position) to a configuration of type \mathfrak{T} over a tuple \bar{z} in $U(x)$. Then, $\varphi(x, \bar{c})$ is held for $x = a$, and this provides that $a \in \text{acl}(\bar{c})$, resulting in $a \in \text{acl}(U(\mathfrak{M}))$. Condition (d), that each automorphism $\mu : \mathbb{K}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M})$ can be extended to an automorphism $\mu' : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ is a consequence of Claim F.

Claim H. *Interpretation I is a Cartesian interpretation.*

PROOF. By Claim A, interpretation I is exact, then by Lemma 17.1 in [4], there is a tuple of formulas \varkappa and a model isomorphism E such that the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{I} & S \\ I_{T,\varkappa} \searrow & & \nearrow E \\ & T(\varkappa) & \end{array}$$

By Claim E, interpretation I is $\exists \cap \forall$ -presentable, therefore, isomorphism I is actually algebraic isomorphism, and therefore, E is algebraic isomorphism as well. Then, by the definition, I is a Cartesian interpretation. By this, all requirements of Lemma 3.5 are completely proved.

PROOF following below is concerned to Theorem 3.6 only.

Instead of categorical statement $14(\text{fin})^\circ$, some more weak demand $14(\text{inf})^\circ$ is posed in the case of infinite signature (3.2). Its Part (a) prohibits any cycles among elements of valency 2 in C , while Part (b) prevents any other cyclic formations among any elements of C including elements of valency 3 and elements of C_0 .

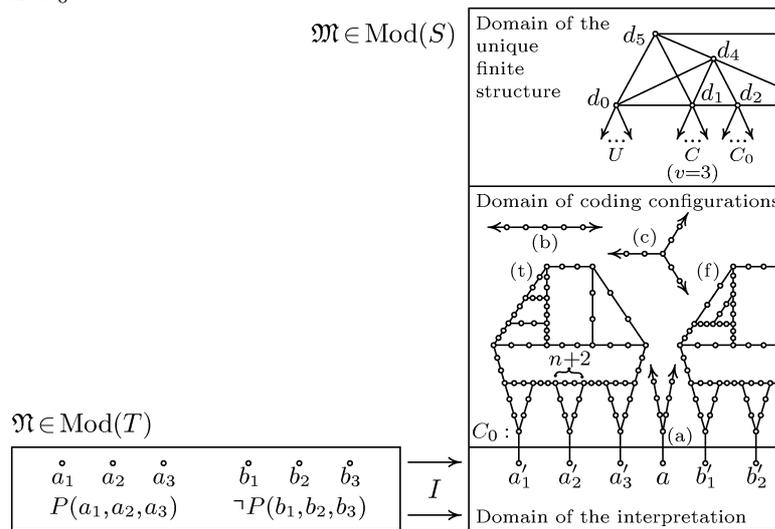


Fig. 3.2. Reduction of an infinite predicate signature to graph

General form of a model is schematically presented in Fig. 3.2. A model of theory S consists of three sets described above, where region C includes all required coding configurations. Besides, nonstandard formations of tree following types can appear: (a) an element a in $U(x)$ which is Γ -linked to an element of valency 2 in $C_0(x)$ generating two infinite chains of elements of valency 2 in C ; (b) an infinite chain of elements of valency 2 in C without cycles; (c) an element of valency 3, generating three infinite chains formed with elements of valency 2 in C . By virtue of Compactness Theorem, any number of fragments of types (b) and (c) may appear in a model, and for any element $a \in U$ there may appear any set of fragments of type (a) over the element a .

An envelope operator \mathbb{E} is defined for $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$ as described above, yielding a model $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of theory S without nonstandard fragments. The equality $\mathbb{K}(\mathbb{E}(\mathfrak{N})) \cong \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$, is obviously satisfied, while inverse equality $\mathbb{E}(\mathbb{K}(\mathfrak{M})) \cong \mathfrak{M}$ is not the case for models of theory S .

Claim I. *In the case of an infinite enumerable signature (3.2), the following assertions hold:*

- (a) T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.,
- (b) in the case when T is r.a. theory, interpretation I is effective; moreover, indices to both theory

S and interpretation I can be found effectively in an index of the source theory T .

PROOF. Immediately from the construction.

Concepts of an immersing interpretation and a quasi-exact interpretation are used below, which will be studied in next parts of the series (if required, the definitions are available in [2]).

Claim J. *In the case of recursively axiomatizable theory T of an infinite enumerable signature (3.2), the following assertions hold:*

- (a) *interpretation I is iso-stone,*
- (b) *interpretation I is immersing,*
- (c) *interpretation I is quasi-exact.*

PROOF. (a) Take any complete extension T' of theory T , and consider theory $S' = S \cup \{I(\Phi) \mid \Phi \in T'\}$. Using back-and-force Ehrenfeucht method, it is possible to prove that the theory S' is complete. Obviously, this gives required statement. Parts (b) and (c) are considered in a forthcoming paper of the series.

Notice that, if theory S is constructed by procedure IG from theory T , then T is model complete $\Leftrightarrow S$ is model complete. This is an immediate consequence of the fact, that I is an immersing interpretation.

Claim J together with Claim A provide all demands of Theorem 3.6.

Thus, both Theorem 3.5 and Theorem 3.6 are completely proved.

Seventh elementary transformation:

Theorem 3.7. [Stage U_2] *Let T be a theory in signature $\{\Gamma^2\}$, such that T is an extension of Graph theory GRE. One can construct a theory S in signature $\tau = \{f^1(x), g^1(x)\}$ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is Cartesian interpretation of theories (particularly, I preserves Finitary list ACL), and the following assertions hold:*

(a) *T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T ,*

(b) *T is f.a. $\Leftrightarrow S$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both a Gödel number to S and an index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .*

PROOF. Starting from an arbitrary model \mathfrak{N} of graph theory of signature $\sigma = \{\Gamma^2\}$, we build a model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of signature $\tau = \{f^1, g^1\}$, in which \mathfrak{N} is first-order definable in some regular way, as it is shown in Fig. 3.3.

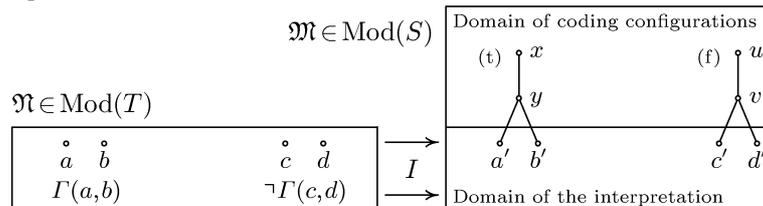


Fig.3.3. Reduction of graphs to a couple of unary functions

We set $|\mathfrak{M}|$ to be equal to union of two disjointed sets $U \cup C$, where U is a set of the same cardinality as $|\mathfrak{N}|$, while the set C is specified later. Choose a bijection $h : |\mathfrak{N}| \rightarrow U$, and temporarily transfer predicate structure of model \mathfrak{N} on the set U in accordance with h . Truth-values of predicate Γ^2 on elements in domain $U(x)$ are coded in model \mathfrak{M} by special *coding configurations* in the region C , available in two forms (t) and (f), i.e., **true** and **false**. Each configuration is defined over a pair of non-equal elements (p, q) from U , and consists in area C of two elements, as it is shown in Fig. 3.3. Over such a configuration, the functions $f(x)$ and $g(x)$ are defined by the following rule:

$$\begin{aligned}
 f : x \mapsto y \mapsto a' \mapsto a'; \quad f^{-1}(x) = \emptyset, & & g : u \mapsto v \mapsto c' \mapsto c'; \quad g^{-1}(u) = \emptyset, \\
 g : x \mapsto b' \mapsto b'; \quad g^{-1}(x) = \emptyset, & & f : u \mapsto d' \mapsto d'; \quad f^{-1}(u) = \emptyset, \\
 g : y \mapsto b' \mapsto b'; \quad g^{-1}(y) = \emptyset, & & f : v \mapsto d' \mapsto d'; \quad f^{-1}(v) = \emptyset.
 \end{aligned}$$

According to the rule, coding configurations over (p, q) and (q, p) differ with each other. Different coding configurations should not be intersected in C , but they may have common elements in U . For each pair of different elements (p, q) from U , there should exist exactly one configuration, either of the form (t) or form (f), depending of the truth-value of predicate Γ on the given pair. Now, we let C to be the set of elements of all possible coding configurations, excluding from them U -elements. Thus, C consists of $2\alpha(\alpha - 1)$ elements, where α is the cardinality of the set $|\mathfrak{N}|$. Finally, we erase temporarily introduced structure of model \mathfrak{N} on the set U , and the construction of model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of signature $\tau = \{f^1, g^1\}$ is completed.

Now define theory S as follows $S = \text{Th}\{\mathbb{E}(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)\}$, and turn to definition of an interpretation $I : T \rightarrow S$. The region of the interpretation is determined by the formula

$$U(x) = [f(x) = x \wedge g(x) = x].$$

Atomic formula $\Gamma(x, y)$ of signature σ is mapped on the formula of signature τ stating that $U(x) \wedge U(y)$ and there is a configuration of the form (t) over the tuple (x, y) . By induction, we expand this mapping up to transformation $I : FL(\sigma) \rightarrow FL(\tau)$, which is just the required interpretation of theory T in theory S . Notice that, the formula $C(x) = \neg U(x)$ determines region for coding configurations in the theory S .

Write out axioms of theory S . They include the following sentences, where formulas $\mathcal{C}^t(a, b, x, y)$ and $\mathcal{C}^f(c, d, u, v)$ represent diagrams of configurations of types (t) and (f) defined above, while $\mathcal{C}(c, d, u, v) = \mathcal{C}^t(c, d, u, v) \vee \mathcal{C}^f(c, d, u, v)$.

- 1°. $(\exists x)U(x)$,
- 2°. $(\forall xy)[U(x) \wedge U(y) \wedge (x \neq y) \leftrightarrow (\exists uv)\mathcal{C}(x, y, u, v)]$,
- 3°. $(\forall xyuvw t)[\mathcal{C}(x, y, u, v) \wedge \mathcal{C}(x, y, w, t) \rightarrow (u, v) = (w, t)]$,
- 4°. $(\forall xyuvx'y'u'v')[\mathcal{C}(x, y, u, v) \wedge \mathcal{C}(x', y', u', v') \wedge (x, y) \neq (x', y') \rightarrow \{u, v\} \cap \{u', v'\} = \emptyset]$,
- 5°. $(\forall z)[\neg U(z) \rightarrow (\exists xyuv)[\mathcal{C}(x, y, u, v) \wedge z \in \{u, v\}]]$,
- 6°. $I(\varphi)$, for any sentence $\varphi \in SL(\sigma)$ which is an axiom of the theory T .

One can check that this set of axioms indeed determines the theory S . By the construction, interpretation I is a Cartesian interpretation. Proof is similar to that given in Theorem 3.5. As a result, we obtain all the required statements.

Proof of Theorem 3.7 is complete.

Eighth elementary transformation:

Theorem 3.8. [Stage B_1] *Let T be a theory in signature $\{\Gamma^2\}$, such that T is an extension of Graph theory GRE. One can construct a theory S in signature $\tau = \{f^2(x, y)\}$ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is Cartesian interpretation of theories (particularly, I preserves Finitary list ACL), and the following assertions hold:*

- (a) T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T ,
- (b) T is f.a. $\Leftrightarrow S$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both a Gödel number to S and an index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .

PROOF. Starting from a model \mathfrak{N} of given theory T of signature $\sigma = \{\Gamma^2\}$, we build a model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of signature $\tau = \{f^2\}$, in which this model \mathfrak{N} is first-order definable in some regular manner. At a whole, the scheme of the transformation is similar to earlier considered.

We set $|\mathfrak{M}|$ to be equal to the union of two disjointed sets $U \cup D$, where U is the set of the same cardinality as $|\mathfrak{N}|$, while the set D consists of two elements d_0 and d_1 . For the construction of the model \mathfrak{M} , by means of a bijection $h : |\mathfrak{N}| \rightarrow U$, we temporarily transfer structure of model \mathfrak{N} onto

the set U . Define the function $f(x, y)$ on the set $|\mathfrak{M}|$ as follows:

$$\begin{aligned} f(d_0, d_0) &= d_1, \\ f(d_0, d_1) &= f(d_1, d_0) = f(d_1, d_1) = d_0, \\ f(x, y) &= d_0, \text{ for all } x, y \in U \text{ such that } \neg\Gamma(x, y), \\ f(x, y) &= d_1, \text{ for all } x, y \in U \text{ such that } \Gamma(x, y), \\ f(x, y) &= d_0, \text{ for all other cases.} \end{aligned}$$

After that, erase temporarily defined structure of model \mathfrak{N} on the set U , and the construction of model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of signature $\tau = \{f^2\}$ is complete.

Consider the following quantifier free formulas in signature $\{f^2\}$:

$$\begin{aligned} D(x) &= [x = f(f(x, x), f(x, x))], \\ D_0(x) &= [x = f(x, f(x, x))], \\ D_1(x) &= D(x) \wedge \neg D_0(x). \end{aligned}$$

One can check that formula $D(x)$ distinguish in the model \mathfrak{N} two-element set $\{d_0, d_1\}$, and it is satisfied

$$D_0(x) \leftrightarrow (x = d_0), \quad D_1(x) \leftrightarrow (x = d_1).$$

Thus, the construction provides the uniqueness of realization of formulas $D_0(x)$ and $D_1(y)$, distinguishing either of the special elements d_0 and d_1 in the model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$.

Now define theory S in the form $S = \text{Th}\{\mathbb{E}(\mathfrak{N}) | \mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)\}$, and turn to definition of an interpretation $I : T \rightarrow S$. The region of the interpretation is defined by the formula

$$U(x) = [x \neq f(f(x, x), f(x, x))],$$

which obviously satisfies the condition $U(x) \leftrightarrow \neg D(x)$. Atomic formula $\Gamma(x, y)$ of signature σ is mapped on the formula of signature τ stating

$$U(x) \wedge U(y) \wedge (x \neq y) \wedge D_1(f(x, y)).$$

By induction, expand this mapping up to transformation $I : FL(\sigma) \rightarrow FL(\tau)$, which is just the required interpretation of theory T in theory S .

Write out axioms of theory S formally. They include the following sentences:

- 1°. $(\exists x)(\forall y)[D_0(x) \wedge (D_0(y) \rightarrow (y = x))]$,
- 2°. $(\exists x)(\forall y)[D_1(x) \wedge (D_1(y) \rightarrow (y = x))]$,
- 3°. $(\exists x)U(x)$,
- 4°. $(\forall xy)[f(x, y) = f(y, x)]$,
- 5°. $(\forall x)[D_0(x) \rightarrow D_1(f(x, x))]$,
- 6°. $(\forall xy)[D_0(x) \wedge (x \neq y) \rightarrow D_0(f(x, y))]$,
- 7°. $(\forall xy)[D_1(x) \rightarrow D_0(f(x, y))]$,
- 8°. $(\forall xy)[\neg D(x) \wedge \neg D(y) \rightarrow D(f(x, y))]$,
- 9°. $I(\varphi)$, for any sentence $\varphi \in SL(\sigma)$ which is an axiom of theory T .

One can check that this set of axioms indeed determines the theory S introduced earlier as theory of a class of models. By the construction, interpretation I is a Cartesian interpretation (actually, Singleton interpretation). As a result, we obtain all the required statements.

Theorem 3.8 is proved.

4. Main signature reduction statements. Now, we can formulate statements presenting integrated signature reduction procedures. They are assembled as compositions of appropriate sequences of primitive transformations.

First, consider the finite version.

Theorem 4.1. [Finite-to-finite transformation] *Let T be a theory in a finite signature σ , and τ be an arbitrary finite rich signature. One can construct a theory S in signature τ together with an interpretation $I : T \rightarrow S$, which is Cartesian interpretation (particularly, I preserves Finitary list ACL). Moreover, the following assertions hold:*

(a) *T is f.a. $\Leftrightarrow S$ is f.a.; moreover, in the case when T is f.a. theory, both Gödel number to S and index to I can be found effectively in a Gödel number of the source theory T .*

(b) *T is r.a. $\Leftrightarrow S$ is r.a.; moreover, in the case when T is r.a. theory, indices to both S and I can be found effectively in an index of the source theory T .*

PROOF. Enter at node 1 in the scheme given in Fig. 2.1 and pass through it finalizing at that of nodes A, B, or C, which can yield required finite rich signature σ .

Considering other input nodes in Fig. 2.1, we obtain three final statements on signature reduction procedures. All of them (including Theorem 4.1) are presented by complete specifications in Table 4.1 below, where it is supposed that index of resulting interpretation I is obtained effectively by either index or Gödel number of input theory T in all these cases, while m.c. means "model complete".

Table 4.1. Signature reduction procedures obtained from scheme in Fig. 2.1.

Input node [case]	Input theory			Output theory		
	σ	T	$index$	τ	S	$index$
1 [a] [r] [f]	fin	any	—	any given finite rich signature	any	—
		r.a.	norm.		r.a.	norm.
		f.a.	Gödel		f.a.	Gödel
2 [a] [r]	inf	any	—		any	—
		r.a.	norm		r.a.	norm
3 [a] [r]	any	any	—		any	—
		r.a.	weak	r.a.	norm	
4 [a] [r]	any	any	—	m.c.	—	
		r.a.	weak	r.a.+m.c.	norm	

Notice that, Entry 1 in Table 4.1 provides finite signature transformation declared in Claim 2.1 in [3], while Entry 2 provides infinite-to-finite signature reduction procedure declared in Claim 2.2 in [3]. As for subsequent entries, they provide alternative versions of infinite-to-finite signature reduction procedure over weak indices yielding a model complete theory in case of entry 4.

References

1. **Hodges W.** *A shorter model theory.* Cambridge, 1997.
2. **Peretyat'kin M. G.** *Finitely axiomatizable theories.* New York, 1997. Russian equivalent in: Novosibirsk, Scientific Books, 1997.
3. **Peretyat'kin M. G.** // *Mathematical Journal.* Almaty. 2008. V.8, № 2(28). P. 90 – 96.
4. **Peretyat'kin M. G.** // *Mathematical Journal,* Almaty. 2008. V.8, № 3(29). P. 58 – 72.

Received at 10.11.2008z.

УДК 517.925.5:519.216

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЗАМЫКАНИЯ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина,125 marat207@math.kz

Рассматривается одна из обратных задач динамики – задача замыкания в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданному интегральному многообразию, независящему от скоростей. Методом разделения получены достаточные условия существования заданного интегрального многообразия достроенной системы стохастических дифференциальных уравнений. Отдельно исследуются общий линейный и скалярный нелинейный случаи поставленной задачи.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2, 3 и др.]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ – метод квазиобращения предложен в работе [3], позволяет получить необходимые и достаточные условия разрешимости. Наряду с указанным методом там же предлагаются метод разделения и метод проектирования, дающие, вообще говоря, лишь достаточные условия разрешимости обратных задач, но полезные для конкретных прикладных обратных задач.

1. Постановка задачи. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = f_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \sigma_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi}, \quad x \in R^n, \quad \xi \in R^k. \quad (1.1)$$

Требуется достроить замыкающие уравнения (например, описывающие вспомогательные устройства)

$$\ddot{u} = f_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \sigma_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi}, \quad u \in R^r, \quad (1.2)$$

по заданным частным интегралам

$$\Lambda(t) : \quad \lambda(x, u, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \quad \lambda = \lambda(x, u, t) \in C_{xut}^{222}. \quad (1.3)$$

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equations, integral manifold*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

© М. И. Тлеубергенов, 2009.

Здесь σ_1 – матрица размерности $(n \times k)$, $\sigma_2 - (r \times k)$, а $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ – система независимых винеровских процессов [4], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P) .

Иначе говоря, по заданным f_1, σ_1 и λ требуется определить вектор-функцию f_2 и матрицу σ_2 так, чтобы множество (1.3) было интегральным для совместной системы уравнений (1.1), (1.2).

Предполагается, что вектор-функции $f_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$, $f_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ и матрицы $\sigma_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$, $\sigma_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x, u, \dot{x}, \dot{u} в области

$$U_H(\Lambda) = \{z = (x^T, \dot{x}^T, u^T, \dot{u}^T)^T : \rho(z, \Lambda(t)) < H, H > 0\}, \tag{1.4}$$

что обеспечивает в (1.4) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $z(t)$ системы уравнений (1.1), (1.2) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [4].

Указанная задача:

1) в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma_1 \equiv 0, \sigma_2 \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2,3],

2) в случае, когда $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ и с заданными свойствами вида $\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) = 0, \lambda \in R^m, \lambda = \lambda(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \in C_{x\dot{x}u\dot{u}}^{12121}$ методом квазиобращения решена в [5].

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [4, с.204] составляется уравнение возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial u} \dot{u} + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial u} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x} \right) \dot{x} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial t} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial x} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial u} \right) \dot{u} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} (f_1 + \sigma_1 \dot{\xi}) + \frac{\partial \lambda}{\partial u} (f_2 + \sigma_2 \dot{\xi}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Введем произвольные функции Еругина [1]: m -мерную вектор-функцию $A(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ и $(m \times n)$ -матрицу $B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ со свойством $A(0, 0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv 0, B(0, 0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$ и такие, что имеет место равенство

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \dot{\xi}. \tag{1.6}$$

Отсюда, сравнивая уравнения (1.5) и (1.6) приходим к соотношениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} f_2 = A - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{x} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial u} \dot{u} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial u} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x} \right) \dot{x} - \\ - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial t} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial x} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial u} \right) \dot{u} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} f_1, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} \sigma_2 = B - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \sigma_1, \end{cases} \tag{1.7}$$

из которых нужно определить вектор-функцию f_2 и матрицу σ_2 .

Рассмотрим решение системы (1.7) методом разделения. Для этого предварительно матрицы $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, σ_2 и вектор-функцию f_2 представим в виде $\frac{\partial \lambda}{\partial u} = (F_1, F_2), \sigma_2 = (\sigma'_2, \sigma''_2), f_2 = (f_2'^T, f_2''^T)$, где $F_1 - (m \times m)$ матрица и тогда соответственно $F_2 - (m \times (r - m)), \sigma'_2 - (m \times k), \sigma''_2 - ((r - m) \times k)$ матрицы.

Тогда систему (1.7) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} F_1 f_2' + F_2 f_2'' = \tilde{A}, \\ F_1 \sigma'_2 + F_2 \sigma''_2 = \tilde{B}, \end{cases}$$

где $\tilde{A} = A - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{x} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial u} \dot{u} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial u} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x} \right) \dot{x} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial t} + \dot{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial x} + \dot{u}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial u} \right) \dot{u} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} f_1$, $\tilde{B} = B - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \sigma_1$.

Если предположить $\det F_1 \neq 0$, то решение данной системы можно представить в виде:

$$f'_2 = F_1^{-1}(\tilde{A} - F_2 f''_2), \quad (1.8)$$

$$\sigma'_2 = F_1^{-1}(\tilde{B} - F_2 \sigma''_2). \quad (1.9)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы множество (1.3) при заданной структуре (1.1) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (1.1), (1.2) достаточно, чтобы

1) квадратная подматрица F_1 прямоугольной матрицы $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$ обладала свойством $\det F_1 \neq 0$,

2) первые m компонент вектор-функции f_2 и $(m \times k)$ подматрица σ'_2 матрицы σ_2 замыкающего уравнения (1.2) имели соответственно вид (1.8) и (1.9).

2. Линейный случай стохастической задачи замыкания. По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = \Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \Phi_3(t)u + \Phi_4(t)\dot{u} + \varphi(t) + T_1(t)\dot{\xi}, \quad x \in R^n, \quad (2.1)$$

требуется достроить линейное по сносу замыкающее стохастическое уравнение

$$\ddot{u} = \Psi_1(t)x + \Psi_2(t)\dot{x} + \Psi_3(t)u + \Psi_4(t)\dot{u} + \psi(t) + T_2(t)\dot{\xi}, \quad u \in R^r, \quad (2.2)$$

так, чтобы заданное линейное множество

$$\Lambda(t) : \quad \lambda \equiv G_1(t)x + G_2(t)u + l(t) = 0, \quad \lambda \in R^m, \quad (2.3)$$

было интегральным для системы уравнений (2.1), (2.2).

Иначе говоря, по заданным $G_1(t)$, $G_2(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$, $T_1(t)$, T_2 и заданным вектор-функциям $\varphi(t)$, $l(t)$ требуется определить $(r \times n)$ -матрицы $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $(r \times r)$ -матрицы $\Psi_3(t)$, $\Psi_4(t)$ и r -мерную вектор-функцию $\psi(t)$, а также $(r \times k)$ -матрицу $T_2(t)$ так, чтобы обеспечить для системы (2.1), (2.2) интегральность свойств движения (2.3).

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & \ddot{G}_1 x + 2\dot{G}_1 + G_1 \left(\Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \Phi_3(t)u + \Phi_4(t)\dot{u} + \varphi(t) + T_1(t)\dot{\xi} \right) + G_2 (\Psi_1(t)x + \\ & + \Psi_2(t)\dot{x} + \Psi_3(t)u + \Psi_4(t)\dot{u} + \psi(t) + T_2(t)\dot{\xi}) + 2\dot{G}_2 \dot{u} + \ddot{l}(t) + \ddot{G}_2 u, \end{aligned} \quad (2.4)$$

а, с другой стороны, уравнение возмущенного движения с помощью произвольных функций Еругина Н. П. [1] – вектор-функций $A_1(t)\lambda$, $A_2(t)\dot{\lambda}$, где A_1 , A_2 – квадратные матрицы порядка m , и $(n \times k)$ -матрицы-функции $B = B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ со свойством $B(0, 0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$, имеет вид:

$$\ddot{\lambda} = A_1 \lambda + A_2 \dot{\lambda} + B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi}. \quad (2.5)$$

Тогда из уравнений (2.4) и (2.5) с учетом того, что

$$\begin{aligned} A_1 \lambda &= A_1 (G_1(t)x + G_2(t)u + l(t)), \\ A_2 \dot{\lambda} &= A_2 (\dot{G}_1(t)x + G_1(t)\dot{x} + \dot{G}_2(t)u + G_2(t)\dot{u} + \dot{l}(t)) \end{aligned}$$

следуют соотношения:

$$\begin{cases} \ddot{G}_1 x + 2\dot{G}_1 \dot{x} + G_1(\Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \Phi_3(t)u + \Phi_4(t)\dot{u} + \varphi(t)) + 2\dot{G}_2 \dot{u} + \ddot{l}(t) + \ddot{G}_2 u + \\ + G_2(\Psi_1(t)x + \Psi_2(t)\dot{x} + \Psi_3(t)u + \Psi_4(t)\dot{u} + \psi(t)) = A_1(G_1(t)x + G_2(t)u + l(t)) + \\ + A_2(\dot{G}_1(t)x + G_1(t)\dot{x} + \dot{G}_2(t)u + G_2(t)\dot{u} + \dot{l}(t)), \quad G_1 T_1 + G_2 T_2 = B, \end{cases}$$

которые преобразуются к виду:

$$\begin{cases} G_2 \Psi_1 = A_1 G_1 + A_2 \dot{G}_1 - \ddot{G}_1 - G_1 \Phi_1, \\ G_2 \Psi_2 = A_2 G_1 + 2\dot{G}_1 - G_1 \Phi_2, \\ G_2 \Psi_3 = A_1 G_2 + A_2 \dot{G}_2 - G_1 \Phi_3 - \ddot{G}_2, \\ G_2 \Psi_4 = A_2 G_2 + 2\dot{G}_2 - G_1 \Phi_4, \\ G_2 \psi(t) = A_1 l(t) + A_2 \dot{l}(t) - G_1 \varphi(t) - \ddot{l}(t), \\ G_2 T_2 = B - G_1 T_1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Для применения метода разделения [3, с.21] предварительно введем обозначения $N_1 = A_1 G_1 + A_2 \dot{G}_1 - \ddot{G}_1 - G_1 \Phi_1$, $N_2 = A_2 G_1 + 2\dot{G}_1 - G_1 \Phi_2$, $N_3 = A_1 G_2 + A_2 \dot{G}_2 - G_1 \Phi_3 - \ddot{G}_2$, $N_4 = A_2 G_2 + 2\dot{G}_2 - G_1 \Phi_4$, $L(t) = A_1 l(t) + A_2 \dot{l}(t) - G_1 \varphi(t) - \ddot{l}(t)$, $\tilde{B} = B - G_1 T_1$ и, далее, систему (2.6) представим в виде:

$$\begin{cases} G'_2 \Psi'_1 + G''_2 \Psi''_1 = N_1, \\ G'_2 \Psi'_2 + G''_2 \Psi''_2 = N_2, \\ G'_2 \Psi'_3 + G''_2 \Psi''_3 = N_3, \\ G'_2 \Psi'_4 + G''_2 \Psi''_4 = N_4, \\ G'_2 \psi'(t) + G''_2 \psi''(t) = L(t), \\ G'_2 T'_2 + G''_2 T''_2 = \tilde{B}, \end{cases} \quad (2.7)$$

где матрицы G_2 и $\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ разбиты на соответствующие подматрицы: $G_2 = (G'_2, G''_2)$, G'_2 – матрица размерности $(m \times m)$, G''_2 – $(m \times (r - m))$, Ψ'_1 – $(m \times n)$, Ψ''_1 – $((n - m) \times n)$; Ψ'_2 – $(m \times n)$, Ψ''_2 – $((n - m) \times n)$; Ψ'_3 – $(m \times n)$, Ψ''_3 – $((n - m) \times n)$; Ψ'_4 – $(m \times n)$, Ψ''_4 – $((n - m) \times n)$; $\psi'(t)$ – m -вектор, $\psi''(t)$ – $(r - m)$ -вектор.

Предположим, что $\det G'_2 \neq 0$, тогда из (2.7) следуют соотношения:

$$\begin{cases} \Psi'_1 = (G'_2)^{-1}(N_1 - G''_2 \Psi''_1), \\ \Psi'_2 = (G'_2)^{-1}(N_2 - G''_2 \Psi''_2), \\ \Psi'_3 = (G'_2)^{-1}(N_3 - G''_2 \Psi''_3), \\ \Psi'_4 = (G'_2)^{-1}(N_4 - G''_2 \Psi''_4), \\ \psi'(t) = (G'_2)^{-1}(L(t) - G''_2 \psi''(t)), \\ T'_2 = (G'_2)^{-1}(\tilde{B} - G''_2 T''_2). \end{cases} \quad (2.8)$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы линейное множество (2.3) при заданной линейной структуре (2.1) было интегральным многообразием системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (2.1), (2.2) достаточно, чтобы квадратная подматрица G'_2 прямоугольной матрицы G_2 обладала свойством $\det G'_2 \neq 0$ и искомые $(r \times n)$ -матрицы $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $(r \times r)$ -матрицы $\Psi_3(t)$, $\Psi_4(t)$ и r -мерная вектор-функция $\psi(t)$, а также $(r \times k)$ -матрица $T_2(t)$ определялись из (2.8).

3. Скалярный нелинейный случай стохастической задачи замыкания $x \in R^1$, $u \in R^1$. Пусть по заданному множеству

$$\Lambda(t) : \quad \eta(x, u, t) = 0, \quad \eta \in R^1, \quad (3.1)$$

и скалярному стохастическому уравнению

$$\ddot{x} = \nu_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \gamma_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi} \quad (3.2)$$

требуется построить замыкающее стохастическое уравнение

$$\ddot{u} = \nu_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \gamma_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi} \quad (3.3)$$

так, чтобы совместная система уравнений (3.2), (3.3) имела интегральное многообразие вида (3.1), т.е. обратная стохастическая задача замыкания в данной постановке заключается в определении $\nu_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ и $\gamma_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$, обеспечивающих системе (3.2), (3.3) интегральность множества $\Lambda(t)$ (3.1).

По правилу стохастического дифференцирования Ито [4] составим уравнение возмущенного движения относительно множества $\Lambda(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} = & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} \dot{u} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \dot{x} \right] \dot{x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} [\nu_1 + \gamma_1 \dot{\xi}] + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \dot{u} \right] \dot{u} + \frac{\partial \eta}{\partial u} [\nu_2 + \gamma_2 \dot{\xi}] + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial u} \dot{u}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее, следуя [1], введем функции $a = a(\eta, \dot{\eta}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ и $b = b(\eta, \dot{\eta}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ такие, что $a(0, 0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv b(0, 0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$ и имеет место следующее равенство:

$$\ddot{\eta} = a(\eta, \dot{\eta}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + b(\eta, \dot{\eta}, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi}. \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.4), (3.5) следуют соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial u} \nu_2 = a - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2\dot{x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - 2\dot{x}\dot{u} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - 2\dot{u} \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \dot{x}^2 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \dot{u}^2 - \frac{\partial \eta}{\partial x} \nu_1, \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} \gamma_2 = b - \frac{\partial \eta}{\partial x} \gamma_1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Отсюда из (3.6) в предположении, что выполняется условие $\frac{\partial \eta}{\partial u} \neq 0$, искомые функции ν_2 и γ_2 , обеспечивающие интегральность свойств (3.1), определяются в виде:

$$\begin{cases} \nu_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^{-1} \left(a - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2\dot{x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - 2\dot{x}\dot{u} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - 2\dot{u} \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \dot{x}^2 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \dot{u}^2 - \frac{\partial \eta}{\partial x} \nu_1 \right), \\ \gamma_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^{-1} \left(b - \frac{\partial \eta}{\partial x} \gamma_1 \right). \end{cases}$$

Заключение. Таким образом, методом разделения в общей нелинейной, линейной и скалярной нелинейной постановках решена стохастическая задача замыкания в предположении, что заданные свойства не зависят от скоростей.

Цитированная литература

1. Еругин Н. П. // ПММ. 1952. Т.10. В.16. С. 659 – 670.

2. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.
3. Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Уравнения программных движений. М., 1986.
4. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.
5. Тлеубергенов М. И. // Доклады МН-АН РК. 1999. №1. С. 53 – 60.

Поступила 23.01.2009

УДК 517.51

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ, ПОСТРОЕННЫМИ ПО φ -ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125.

Приведена оценка констант Лебега матричных операторов, построенных по лакунарным последовательностям сумм Фурье и изучены их аппроксимативные свойства в $C_{2\pi}$ и $L_p^{2\pi}$.

Хорошо известен классический результат А. Лебега:

$$\|f(x) - S_n(f, x)\|_{C_{2\pi}} \leq \frac{4}{\pi^2} E_n(f) \ln(C(n+1)),$$

$C > 0$, $C = \text{const.}$, $E_n(f)$ – величина наилучшего приближения функции $f \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n , $S_n(f, x)$ – частная сумма ряда Фурье.

Пусть ряд Фурье некоторой функции $f(x) \in L_{2\pi}$ разрежен по некоторой строго возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ натуральных чисел, т.е. имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{n_k}(x),$$

где $A_0(x) = \frac{a_0(f)}{2}$, $A_n(x) = a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$.

С. Н. Бернштейн доказал, что если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} = 2p_k + 1, \quad p_k \in \mathbb{N},$$

то для непрерывной функции с разреженным рядом Фурье, имеющим отличные от нуля лишь коэффициенты с номерами $\{n_k\}$, наилучшее приближение тригонометрическими полиномами дается частной суммой ряда Фурье.

Keywords: *Fourier series, Lebesgue constants, lacunarity, Cesaro numbers, linear methods of summation, uniform metric.*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

© Л. П. Фалалеев, 2009.

С. Б. Стечкин показал, что если $\{n_k\}$ лакунарна по Адамару, т.е. существует вещественное число $\lambda > 1$, такое, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{то} \quad \|f(x) - S_{n_k}(x)\|_{C_{2\pi}} = O(E_{n_k}), \quad k \rightarrow \infty.$$

В работах Г. А. Фомина [1], [2] исследовались приближения частными суммами для φ -лакунарных рядов, т.е. в случае, когда

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 1 + \frac{1}{\varphi(k)}, \tag{1}$$

где $\varphi(k)$ -положительная, неубывающая функция, такая, что

$$\varphi(n+p) - \varphi(n) \leq p, \quad n, p \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Вопросы регулярности (ограниченности норм соответствующих операторов) линейных методов суммирования рядов Фурье для различных последовательностей $n_k \neq k$ изучались в работах Р. Салема, Дж. Ньюмена, С. А. Теляковского, Р. М. Тригуба, Е. С. Белинского, Я. С. Бугрова и др.

В работах [3], [4] изучались достаточные условия регулярности и аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье разряженных по последовательности индексов вида $n_k = [k^\gamma \ln^\beta k]$, $\gamma \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Методом математической индукции по $p \in \mathbb{N}$ для каждого $n \in N$ из (1), (2) доказывается:

$$n_{k+p} - n_k \geq \frac{n_k \cdot p}{\varphi(k)}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Пусть $\{n_k\}$ – φ -лакунарная последовательность индексов, S_{n_k} – частные суммы ряда Фурье по тригонометрической системе функций $f \in C_{2\pi}$, $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $k = 0, 1, \dots, N$, $N = 1, 2, \dots$, $\lambda_k^{(N)} = 0$, $k > N$ – нижняя треугольная матрица вещественных чисел. Пусть

$$U_N(f, \Lambda, x) = \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k^{(N)} S_{n_k}(f),$$

$$\Delta \lambda_k^{(N)} = \lambda_{n_k}^{(N)} - \lambda_{n_{k+1}}^{(N)}, \quad \Delta \lambda_N = \lambda_N, \quad \lambda_0^{(N)} = 1, \quad N = 1, 2, \dots$$

– линейный матричный оператор, построенный по подпоследовательностям $S_{n_k}(f)$ (в дальнейшем верхние индексы элементов матрицы Λ будем опускать, полагая $\lambda_k^{(N)} = \lambda_k$). Обозначим

$$\|U_N(f, \Lambda, x)\|_{C[0,2\pi] \rightarrow C[0,2\pi]} = \|U_N\|.$$

В [3], [4] показано, как ограниченность L_1 -норм операторов $U_N(\cdot)$ может быть использована для нахождения скорости приближения на подклассах непрерывных функций.

В [5] была анонсирована следующая

Теорема 1. При $\gamma > 1$

$$\|U_N\| \leq C \left\{ N \cdot \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + C \left\{ n_N^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N \frac{\varphi^{\frac{1}{\gamma}}(k)}{n_\nu^{\frac{1}{\gamma}} |\nu - k|^{\frac{1}{\gamma}}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Доказательство. Будем использовать некоторые вычисления работ [3] и [4]. Применяя стандартные оценки, имеем:

$$\begin{aligned} \|U_N\| &\leq \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^N \Delta\lambda_k \frac{\sin(n_k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq C \int_0^{\frac{1}{n_N}} \left| \sum_{k=0}^N \Delta\lambda_k \frac{\sin(n_k + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt + \\ &\quad + C \int_{\frac{1}{n_N}}^\pi \left| \sum_{k=0}^N \Delta\lambda_k \frac{\sin(n_k + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt = I_1 + I_2, \\ I_1 &\leq C \int_0^{\frac{1}{n_N}} \sum_{k=0}^N |\Delta\lambda_k| \left(n_k + \frac{1}{2}\right) dt \leq C \sum_{k=0}^N |\Delta\lambda_k| \cdot 1 \leq C \left\{ N \sum_{k=0}^N (\Delta\lambda_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Без использования явного вида $\{n_k\}$ в [4], с.438, показано, что

$$I_2 \leq C \left\{ n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N (\Delta\lambda_k)^2 \left(1 + \frac{1}{|n_k - n_\nu|^{1/\gamma}}\right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Используя (3), получим:

$$|n_k - n_\nu| \geq \frac{n_\nu |\nu - k|}{\varphi(k)}, \quad \nu, k \in Z_+,$$

что в силу возрастания $\{n_k\}$ и функции φ дает

$$\frac{1}{|n_k - n_\nu|^{1/\gamma}} \leq \frac{\varphi^{1/\gamma}(k)}{n_\nu^{1/\gamma}} \cdot \frac{1}{|k - \nu|^{1/\gamma}}, \quad \nu \neq k.$$

Учитывая оценку для I_1 , получим утверждение теоремы.

Пусть $\varphi(k) = k$, $\nu = [\nu^\gamma]$, $\gamma > 1$, $[y]$ – целая часть y . Так как

$$\sum_{k=1}^N k^\alpha \approx \frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad \alpha > -1, \quad \text{то из } \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N = \sum_{\nu=1}^{k-1} + \sum_{\nu=k+1}^N + C \Rightarrow$$

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N |k - \nu|^{-\frac{1}{\gamma}} \leq C \left(k^{-\frac{1}{\gamma}+1} + (N-k)^{-\frac{1}{\gamma}+1} \right). \quad (5)$$

Поскольку $\left| \frac{1}{\nu} - \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k\nu} |k - \nu|$, то $\frac{1}{\nu} \leq \frac{1}{k} + \frac{C}{k\nu} |k - \nu|$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^N \frac{k^{\frac{1}{\gamma}}}{\nu |\nu - k|^{\frac{1}{\gamma}}} &\leq C \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^N \frac{k^{\frac{1}{\gamma}}}{k |k - \nu|^{\frac{1}{\gamma}}} + C \sum_{\nu=1, \nu \neq k}^N \frac{k^{\frac{1}{\gamma}} |k - \nu|}{k\nu |k - \nu|^{\frac{1}{\gamma}}} \leq \\ &\leq C \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^N \frac{k^{\frac{1}{\gamma}-1}}{|k - \nu|^{\frac{1}{\gamma}}} + C \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^N \frac{k^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\nu |k - \nu|^{\frac{1}{\gamma}-1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Замечая, что "ядро" в соответствующей оценке Я. С. Бугрова $(N - k)^{1-\frac{1}{\gamma}} k^{\frac{1}{\gamma}-1}$ имеет вид $(\frac{N}{k} - 1)^{1-\frac{1}{\gamma}}$, учитывая оценки (5), (6), получим следствие ([?]-[?]):

$$\|u_N\| \leq C \left\{ N \sum_{k=0}^N (\Delta\lambda_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + C \left\{ n_N^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{k=0}^N (\Delta\lambda_k)^2 \left(1 + (N - k)^{1-\frac{1}{\gamma}} k^{\frac{1}{\gamma}-1} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В работах [6]-[8] приведено и использовано "равномощное" утверждение для $n_k = [k^\delta]$, $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \|U_N\| &\leq M(\lambda, n) + C \left(n_k^\delta \sum_{k=0}^n |\Delta\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ C \left| n_k^\delta \sum_{k=0}^n \Delta\lambda_k \sum_{l=0}^{k-l} \Delta\lambda_k \left[\frac{\cos(\delta \arctg(k-l))}{(1+(k-l)^2)^{\frac{\delta}{2}}} - \frac{\cos(\delta \arctg(k+l+l))}{(1+(k+l+l)^2)^{\frac{\delta}{2}}} \right] \right|^{\frac{1}{2}}, \\ M(\lambda, n) &= \min \left\{ \sum_{k=0}^n |\Delta\lambda_k|, \sum_{k=0}^n \frac{|\Delta\lambda_k|}{n-k+1}, \max_{0 \leq k \leq n} |\lambda_k| \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще один пример использования теоремы 1.

Пусть $\varphi(k) = k$, $n_\nu = l \cdot \nu$, $l \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, 2, \dots$. Применяя формулу Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ к разности $\frac{1}{\nu^\gamma} - \frac{1}{k^\gamma}$ и разделяя случаи $\xi \in [1, k - 1]$, $\xi \in [k + 1, N]$, получим:

$$\frac{1}{\nu^\gamma} \leq \frac{C}{k^\gamma} + \frac{C|k - \nu|}{k \cdot \nu^\gamma}, \quad \gamma > 1. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4), получим:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^N \frac{k^{\frac{1}{\gamma}}}{|k - \nu|^{\frac{1}{\gamma}}} \left\{ \frac{1}{k^\gamma} + \frac{C|k - \nu|}{k \cdot \nu^\gamma} \right\} = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{8}$$

$$\Sigma_1 = k^{1-\frac{1}{\gamma}} + (N - k)^{1-\frac{1}{\gamma}}, \tag{9}$$

$$\Sigma_2 = C \cdot k^{1-\frac{1}{\gamma}} + C \cdot k^{-\frac{1}{\gamma}} |N - k|. \tag{10}$$

Рассматривая слагаемые в равенствах (8) – (10) для $k \leq [\frac{N}{2}]$ и $k \in [\frac{N}{2}, N]$, получим простое достаточное условие сходимости линейных средних, составленных по лакунам $n_\nu = l \cdot \nu$, $l \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \|U_N\| &\leq \left\{ C \cdot N \sum_{k=0}^N (\Delta\lambda_k)^2 \left(k^{1-\frac{1}{\gamma}} + (N - k)^{1-\frac{1}{\gamma}} + N \cdot k^{-\frac{1}{\gamma}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left\{ C \cdot N^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{k=0}^N (\Delta\lambda_k)^2 \left(k^{1-\frac{1}{\gamma}} + (N - k)^{1-\frac{1}{\gamma}} + N \cdot k^{-\frac{1}{\gamma}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Заменяя слагаемые $k^{1-\frac{1}{\gamma}}$, $(N - k)^{1-\frac{1}{\gamma}}$, N , $k^{-\frac{1}{\gamma}}$ соответствующими числами Чезаро $A_k^{1-\frac{1}{\gamma}}$, $A_{N-k}^{1-\frac{1}{\gamma}}$, A_N^1 , $A_N^{\frac{1}{\gamma}}$ и используя формулу

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^n A_k^\alpha A_{n-k}^\beta, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta > -1,$$

найдем, что (C, α) – средние будут регулярными для лакун вида $l \cdot \nu$, $l \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, 2, \dots$, при $\alpha > \frac{1}{2}$.

1. Аппроксимация функций матричными операторами, построенными по φ -лакунарной последовательности в метрике $C_{2\pi}$.

Предположим, что выражение, стоящее в правой части неравенства (4), ограничено. Покажем, что φ -лакунарность последовательности частичных сумм ряда Фурье гарантирует определенную скорость сходимости на подклассах непрерывных функций.

Пусть

$$L_N(\alpha) = \sup_{f \in \text{Lip } \alpha} \|U_N(f, \Lambda, x) - f(x)\|_{C_{2\pi}}.$$

Теорема 2. При $\gamma > 1$, $0 < \alpha \leq 1$ справедливо асимптотическое равенство ($N \rightarrow \infty$):

$$L_N(\alpha) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n_N^\alpha}\right), & 0 < \alpha < \frac{1}{2\gamma}, \\ O\left(\sqrt{\frac{\ln n_N}{n_N^{\frac{1}{2\gamma}}}}\right), & \alpha = \frac{1}{2\gamma}, \\ O(n_N^{-\frac{1}{2\gamma}}), & \frac{1}{2\gamma} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство. По схеме доказательства теоремы 1 (см. также [4], стр. 441) имеем:

$$\begin{aligned} |U_N(f, \Lambda, x) - f(x)| &\leq C \int_0^{\frac{1}{n_N}} t^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta\lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt + \\ &+ C \int_{\frac{1}{n_N}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta\lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + \frac{1}{2})t}{t^{1-\alpha}} \right| dt = I_3 + I_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C \sum_{\nu=0}^N |\Delta\lambda_\nu| \left(n_\nu + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{1}{n_N}} t^\alpha dt \leq \frac{C}{n_N^{\alpha+1}} \sum_{\nu=0}^N \left(n_\nu + \frac{1}{2}\right) \Delta\lambda_\nu \cdot 1 = \\ &= \frac{C}{n_N^\alpha} \left\{ N \sum_{\nu=0}^N (\Delta\lambda_\nu)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{n_N^\alpha}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$A_N(\alpha, \gamma) := \int_{\frac{1}{n_N}}^{\pi} \frac{dt}{t^{1-2\alpha+\frac{1}{\gamma}}} = \begin{cases} O(n_N^{1-2\alpha}), & 0 < \alpha < \frac{1}{2\gamma}, \\ O(\ln n_N), & \alpha = \frac{1}{2\gamma}, \\ O(1), & \frac{1}{2\gamma} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

По аналогии с оценкой I_2 :

$$I_4 \leq C \left\{ \int_{\frac{1}{n_N}}^{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_{\nu} \sin \left(n_{\nu} + \frac{1}{2} \right) t \right|^2 \left(\sqrt{t^{\frac{1}{\gamma}-1}} \right)^2 dt \int_{\frac{1}{n_N}}^{\pi} \frac{dt}{t^{1-2\alpha+\frac{1}{\gamma}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\frac{A_N}{n_N^{\frac{1}{\gamma}}}} \left\{ n_N^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^{\pi} \left| \Delta \lambda_{\nu} \sin \left(n_N + \frac{1}{2} \right) t \right|^2 \cdot t^{\frac{1}{\gamma}-1} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{\frac{A_N}{n_N^{\frac{1}{\gamma}}}}.$$

Учитывая оценку I_3 операторов $U_N(\cdot)$, построенных по суммам Фурье с φ -лакунарными номерами, оценка (11) доказана.

2. Аппроксимация функций матричными операторами, построенными по φ -лакунарной последовательности в L_p .

Пусть $f(x) \in H_p^{(\alpha)}$, $p > 1$, т.е. $\omega_p(f, t) \leq C \cdot t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $C > 0$, $C = \text{const}$. В силу обобщенного неравенства Минковского получаем:

$$\begin{aligned} \|U_N(f, \Lambda, x) - f(x)\|_p &\leq C \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x+t) - f(x)\|_p \left| \sum_{k=1}^N \Delta \lambda_{n_k} \frac{\sin(n_k + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq \\ &\leq C \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{n_N}} + \int_{\frac{\pi}{n_N}}^{\pi} \right\} \left| \sum_{k=1}^N \Delta \lambda_k \sin \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \right| \frac{\omega_p(t)}{t} dt \leq \\ &\leq C \int_0^{\frac{1}{n_N}} \left| \sum_{k=1}^N \Delta \lambda_k \frac{\sin(n_k + \frac{1}{2})t}{t^{1-\alpha}} \right| dt + C \int_{\frac{1}{n_N}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_{k=1}^N \Delta \lambda_k \frac{\sin(n_k + \frac{1}{2})t}{t^{1-\alpha}} \right| dt = I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, видим, что при ограниченности правой части в (4) оценка (11) сохраняет свой вид.

Цитированная литература

1. **Фомин Г. А.** // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1983. С. 118 – 127.
2. **Фомин Г. А.** // Тр. 3-й Саратовской зимней школы. Ч.1. 1986. 1987. С. 114 – 117.
3. **Bliev N. K., Falaleev L. P.** // Topics in Polynomials of One and Several Variables and Their Applications. Singapore: World Scientific. 1993. P. 65 – 79.
4. **Фалалеев Л. П.** // Матем. заметки. 2004. Т.75, вып.3. С. 435 – 443.
5. **Фалалеев Л. П.** // Тезисы докл. IV-международного симпозиума, Ряды Фурье и их приложения. Ростов-на-Дону, 2006. С. 53.
6. **Бугров Я. С.** // Тр. МИАН. 1975. Т.134. С. 31 – 37.
7. **Bugrov Ja. S.** // Analysis Math. 1979. V.5, F.2. P. 119 – 133.
8. **Бугров Я. С.** // Тр. МИАН. 1984. Т.170. С. 77 – 85.

Поступила в редакцию 28.01.2009г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.938

2000 MSC: 34B40

Aisagaliyev S. A., Shanazarov D. G. **Asymptotical properties of the solutions of regular systems in the simple critical case**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 5 – 15.

Asymptotical properties of the solutions of nonlinear regular systems in the simple critical case are regarded. On the base of estimation of improper integrals on the set of solution of the dynamic system the criterion of absolute stability is obtained.

References – 11.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34B40

Айсағалиев С. А., Шаназаров Д. Г. **Жәй критикалық жағдайдағы реттелетін жүйелер шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 5 – 15.

Мақалада жәй критикалық жағдайдағы сызықты емес реттелетін жүйелер шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері зерттелген. Динамикалық жүйе шешімдері жиынындағы меншіксіз интегралдардық бағалауы негізінде абсолютті орнықтылық критерийі алынған.

Библ. – 11.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74B05,35E05

Alexeyeva L. A. **The generalized decisions of the Lama's equations in the case of running loads. The shock waves**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 16 – 25.

The system of Lama's equations is investigated, describing the motion of the elastic media under subsonic, transonic and supersonic velocities of the moving source of distributions, and its decisions in space of generalized vector-functions. The questions are considered connected with arising shock waves, which appear in ambience under supersonic source of distributions. On base of the generalized functions theories the method of the determination of the conditions on gaps of the decisions and their derivatives on shock waves fronts is offered.

References – 7.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74B05,35E05

Алексеева Л. А. **Жүгірмелі жүктемелер әсер еткен жағдайдағы Ламе теңдеулерінің жалпыланған шешімдері. Соқпа толқындар** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 16 – 25.

Қоздырғыш көзінің қозғалысының транс- және дыбыстан жоғарғы жылдамдықпен қозғалатын серпімді ортаны суреттейтін Ламе теңдеулерінің жүйесі зерттелген және оның жалпыланған вектор функциялар кеңістігіндегі шешімдері қарастырылған. Дыбыстан жоғарғы жылдамдықпен қозғалатын жүгірмелі жүктемелер әсер еткенде пайда болатын соқпа толқындар пайда болуымен байланысты сұрақтар қарастырылған. Жалпыланған функциялар теориясының негізінде соқпа толқындар фронтының туындысының және шешімдер секірісінің шартын анықтайтын әдіс ұсынылған.

Библ. – 7.

УДК: 517.968.7

2000 MSC: 45K05, 35L20

Asanova A. T. **About correct solvability of boundary value problem with data on characteristics for systems of integro-differential equations of hyperbolic type** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 26 – 33.

A boundary value problem with data on characteristics for systems of integro-differential equations of hyperbolic type is considered. Equivalence of correct solvability of considering problem and correct solvability of family two-point boundary value problem for integro-differential equations is established.

References – 7.

УДК: 517.968.7

2000 MSC: 45K05, 35L20

Асанова А. Т. **Гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін мәліметтері характеристикаларда берілген шеттік есептің корректілі шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 26 – 33.

Гиперболалық тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін мәліметтері характеристикаларда берілген шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің корректілі шешілімділігі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін қос нүктелі шеттік есептер әулетінің корректілі шешілімділігіне пара-пар екендігі тағайындалған.

Библ. – 7.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A10

Bilal S H. **One three-weight integrated inequality** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 34 – 41.

The necessary and sufficient conditions on weight functions for performance of a three-weight integrated inequality are received.

References – 3.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A10

Билал Ш. **Үшжүгенді интеграл теңсіздік туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 34 – 41.

Үшжүгенді интеграл теңсіздіктің орындалуы үшін жүген функцияларға қойылатын қажетті және жеткілікті шарттар алынды.

Библ. – 3.

УДК: 517.968.72

2000 MSC: 45J05

Dzhumabaev D. S. **To the theories of boundary value problems for integro-differential equations**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 42 – 46.

The necessary and sufficient conditions of solvability for linear boundary value problem for the integro-differential equations are obtained and the method of finding its solutions is proposed.

References – 2.

УДК: 517.968.72

2000 MSC: 45J05

Жұмбаев Д. С. **Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясына**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 42 – 46.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін сызықты шеттік есептің шешімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған және олардың шешімдерін табу әдісі ұсынылған.

Библ. – 2.

УДК: 519.6:532.546

2000 MSC: 34B40

Mussiraliyeva Sh. Zh. **About the numerical solution of one boundary problem of a filtration of a two phase fluid** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 47 – 54.

The numerical method of the identification the unknown boundary condition for the Rapoport-Leas Model describing the process of a filtration Two-Phase Fluid horizontal layer is developed. On the basis of numerical experiments the performance capabilities of this method are analyzed.

References – 9.

УДК: 519.6:532.546

2000 MSC: 34B40

Мүсіралиева Ш. Ж. **Екі фазалық сұйықтықтың сүзгілену есебі үшін шекаралық кері есепті сандық шешу**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 47 – 54.

Екі фазалық сұйықтықтың сүзгілену процесін сипаттайтын Раппорт-Лис моделінде шекаралық шартты анықтау үшін сандық әдіс ұсынылады. Уақыт бойынша әр қабатта Тихонов регуляризация тәсілі қолданылады. Сандық эксперименттер көмегімен тәсілдің қолданылу мүмкіндіктері талқыланады. Графикалық және тестілік мәліметпен жабдықталған сандық анализ жасалған. Орындалған сандық есептеулер бұл тәсілді жақсы дәдікпен қолдануға болатындығын дәлелдейді.

Библ. – 9.

УДК: 662.92

2000 MSC: 76F40

Naimanova A. Zh. **Mathematical modelling of turbulence combustion in the complex channel** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 55 – 64.

The mathematical model of reacting flow of a multicomponent gas in the three-dimensional channel is constructed. The simulation is based on the Reynolds-averaged Navie-Stokes equations, with using of the $k - \varepsilon$ turbulence model. The features of spatial structure of the reacting flow are investigated depending on entrance speed of secondary air.

References – 7.

УДК: 662.92

2000 MSC: 76F40

Найманова А. Ж. **Күрделі каналдардағы турбулентті жануды математикалық модельдеу**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 55 – 64.

Үш өлшемді каналдағы көпкомпонентті газ қоспаларының турбулентті реакциялық ағынының математикалық моделі ұсынылады. Модельдеу $k - \varepsilon$ турбуленттік моделімен тұйықталған Рейнольдс бойынша орташаландырылған Навье-Стокс теңдеулеріне негізделген. Реакциялық газ ағыстарының кеңістіктік құрылымының қосымша ауа жылдамдығының бастапқы мәндеріне тәуелділігінің ерекшеліктері анықталған.

Библ. – 7.

УДК: 517.9

2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Pankratova I. N. **Dynamics of the systems on cyclic invariant sets** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 65 – 70.

Atypical property of dynamics depending of maximum parameters and typical property of one parameter dynamics of the family of the systems under consideration is proved.

References – 4.

УДК: 517.9

2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Панкратова И. Н. **Циклді инвариантты жиындағы жүйелердің динамикасы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 65 – 70.

Параметрлердің максималды санынан және қарастырылып отырған жүйе әулетіндегі бір параметрлі типтігінен тәуелді болатын динамиканың типтік емес қасиеті тағайындалды.

Библ. – 4.

УДК: 510.6

2000 MSC: 03B10

Перетятский М. Г. **Схема стандартных преобразований теорий и процедуры редукции сигнатур. Часть 3: Схема стандартных преобразований теорий и процедуры редукции сигнатур** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 71 – 83.

В серии из нескольких работ рассматривается финитарный список теоретико-модельных свойств ACL , называемый *алгебраическим Декартовым* списком, а также инфинитарный список SQL , называемый *квази-точным* списком. Они играют важную роль в исследовании выразительных возможностей логики предикатов первого порядка. Основная цель серии состоит в том, чтобы дать определения этих базовых понятий и изучить их важнейшие свойства, используя отдельный максимально сжатый текст.

В данной работе определена общая схема преобразований теорий и описаны элементарные шаги из которых собираются процедуры редукции сигнатур.

References – 4.

УДК: 510.6

2000 MSC: 03B10

Перетятский М. Г. **Тазартылған финитарлы және инфинитарлы қатнастардың ұқсас теориялардың анықтамалары. Тарау 3: Теориялардың стандартты түрлендірулерінің схемасы және сигнатуралардың редукциясының процедуралары** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 71 – 83.

Алгебралық Декарт тізімі деп аталатын ACL теориялық-сұлбелік қасиеттерінің финитарлы тізімі мен бірге *квази-дәл* тізімі деп аталатын SQL инфинитарлы тізімі біршама жұмыстар тізбегінде қарастырылады. Олар бірінші ретті предикаттар логикасында айқын мүмкіндіктерді зерттеуде маңызды роль атқарады. Бұл тізбектің негізгі ролі және максималды сығылған мәтінді қолдана отырып осы негізгі түсініктерге анықтама беруде.

Жұмыста теорияны түрлендірудің жалпы үлгісі енгізіледі және сигнатураны келтіру сұлбисінің қарапайым буындарының егжей-тегжейлі суреттеуі беріледі.

Библ. – 4.

УДК: 517.925.5:519.216

2000 MSC: 34K29,60H10

Teubergenov M. I. On the solving of inverse stochastic closure's problem by division method // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 84 – 89.

One of the inverse problems of dynamics - the closure's problem by given properties of motion, no depending from velocities, into the class of stochastic differential Ito's equations of second order is considered. The sufficient conditions of the existence of given integral manifold of constructed system of stochastic equations are received by division method. The general linear and scalar nonlinear cases of posed problem are separately investigated.

References – 5.

УДК: 517.925.5:519.216

2000 MSC: 34K29,60H10

Тілеубергенов М. Ы. Бөліктеу әдісі бойынша кері стохастикалық тұйықтау есебінің шешімі туралы // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 84 – 89.

Жылдамдықтардан тәуелсіз берілген қасиеттері бойынша Ито типтес екінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында динамиканың кері есептерінің бірі - тұйықтау есебі қарастырылады. Стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің құрылған жүйесінің берілген интегралды көпбейнесінің бар болуының жеткілікті шарттары бөліктеу әдісімен алынған. Қойылған есептің жалпы сызықты және скаляр сызықсыз жағдайлары бөлек зерттеледі.

Библ. – 5.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A16

Falaleev L. P. On the approximation of function of operators which are based on lacunar sequences // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 1 (31). P. 90 – 95.

Estimations of Lebesgue constants of matrix operators constructed on lacunarity sequences of Fourier sums are obtained and their approximation properties in $C_{2\pi}$ and $L_p^{2\pi}$ are studied.

References – 8.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A16

Фалалеев Л. П. φ -лакунар тізбегімен құрылған функцияның операторлармен аппроксимациясы // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 1 (31). Б. 90 – 95.

φ -лакунарлық тізбекпен құрылған операторлармен функцияларды жуықтау Фурье қосындыларының лакунарлық тізбегімен құрылған матрицалық операторлардың Лебег тұрақтысын бағалау келтірілген және олардың $C_{2\pi}$ мен $L_p^{2\pi}$ кеңістіктерінде жуықтау қасиеттері қарастырылған.

Библ. – 8.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 1 (31) 2009

Главный редактор:

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Глеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г. Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Жамбыла, 25, к.705

тел.: 8(727)2-91-13-15, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 31.03.2009г.

Тираж 300 экз. Объем 102 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: print_express@bk.ru