

ISSN 1682—0525

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*M A T H E M A T I C A L J O U R N A L*

2009 том 9 № 2 (32)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК  
АЛМАТЫ

*Министерство образования и науки Республики Казахстан*

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 2 (32) 2009

Периодичность — 4 номера в год

*Главный редактор*  
А.А.Женсыкбаев

*Заместители главного редактора:*  
М.Т.Дженалиев, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев,  
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,  
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин,  
С.Н.Харин,  
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).  
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

*Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304*  
*Телефон 8-(727)2-72-01-66, journal@math.kz, <http://www.math.kz>*

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2009г.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 9, № 2 (32), 2009

---

---

О коэффициентах разложения по ортоподобной системе <i>Г. Акишев</i> .....	5
Обобщенные решения краевых задач эластодинамики в случае транспортных нагрузок <i>Л. А. Алексеева</i> .....	15
Диагностика синхронных паттернов во временных рядах геофизических данных методами символической динамики <i>О. М. Белослудцев, Н. Г. Макаренко, А. А. Пак</i> .....	24
Достаточное условие вложения в пространство Лоренца по слабому параметру <i>А. У. Бимендина, Е. С. Смаилов</i> .....	35
Об области сжимаемости неустойчивых РДС и детерминированный хаос <i>К. Б. Бонаев, С. К. Бонаева</i> .....	45
Smoothing of sourcewise multivariate functions <i>A. A. Zhensykbayev</i> .....	53
Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений <i>Ж. М. Кадирбаева</i> .....	64
Диаграммы направленности магнитного дипольного момента в анизотропной среде <i>И. А. Канымгазиева</i> .....	71
О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений <i>А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина</i> .....	78
Задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина <i>Р. Б. Сеилханова</i> .....	93
Моделирование волновых явлений с помощью периодических одномерных структур <i>А. А. Сыдыков</i> .....	102
О транспортном времени релаксации для энергетических характеристик поверхностных волн на стохастически-шероховатых поверхностях <i>Е. И. Уразаков</i> .....	106

Письмо в редакцию	
<i>Г. Акишев</i> .....	114

---

---

Рефераты .....	115
----------------	-----

---

---

УДК 517.518

## О КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОРТОПОДОБНОЙ СИСТЕМЕ

Г. АКИШЕВ

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова  
г. Караганда ул. Университетская , 28 akishev@ksu.kz

В статье доказана оценка коэффициентов разложения по ортоподобной системе элементов пространств Марцинкевича, Лоренца и теоремы Харди-Литтлвуда для ортоподобных систем.

**Введение.** Пусть  $X$  – счетно-конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой  $\nu$ .

Для всякой  $\nu$ -измеримой функции  $f$  обозначим через  $f^*$  ее невозрастающую перестановку (см.[1], стр. 15-17).

Через  $L_{p,\theta}(X, \nu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $1 \leq \theta < +\infty$ , обозначим пространство Лоренца состоящее из всех  $\nu$ -измеримых функций  $f$  для которых

$$\|f\|_{p,\theta} = \left( \int_0^\infty (f^*(t))^\theta t^{\frac{\theta}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

$L_{p,\infty}(X, \nu)$  – пространство Марцинкевича состоящее из всех  $\nu$  измеримых функций  $f$  для которых

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < +\infty.$$

В частности  $L_{p,p}(X, \nu) = L_p(X, \nu)$  – пространство Лебега.

Т.П.Лукашенко [2],[3] ввел определение системы разложения, подобной ортогональной, с неотрицательной мерой.

**Определение 1.** Пусть  $\Omega$  пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой  $\mu$ ,  $H$  – действительное или комплексное гильбертово пространство. Система  $\{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  элементов  $H$  называется системой разложения, подобной ортогональной, с неотрицательной мерой (ортоподобной неотрицательной системой разложения), если

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}(\omega) \varphi_\omega d\mu(\omega)$$

---

Keywords: *similar to orthogonal systems, the spaces Lorentz, Marcinkiewicz.*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Г. Акишев, 2009.

для любого  $y \in H$ , где  $\hat{y}(\omega) = (y, \varphi_\omega)$  – скалярное произведение, а интеграл – собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в  $H$ , причем в последнем случае есть такое исчерпывание  $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$  пространства  $\Omega$  (все  $\Omega_k$  измеримы  $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$  для  $k \in N$  и  $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$ ) быть может, зависящий от  $y$  и называемое подходящим для  $y$ , что функция  $\hat{y}(\omega)\varphi_\omega$  интегрируема на  $\Omega_k$  и

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}(\omega)\varphi_\omega d\mu(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \hat{y}(\omega)\varphi_\omega d\mu(\omega).$$

Система называется измеримой, если для любого  $y \in H$  функция  $\hat{y}_\omega$  измерима на  $\Omega$ . Ортоподобными являются, в частности, все полные ортонормированные системы и их ортогональные проекции, системы всплесков Габора и Морле. Системы, подобные ортогональным, обладают многими свойствами, аналогичными свойствам ОНС. Например, имеет место аналог равенства Парсеваля [2].

Далее,  $\Omega$  – счетно-конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой  $\mu$ ,  $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ ,

где  $E_j$  – попарно непересекающиеся  $\mu$ -измеримые множества,  $\Lambda_k = \bigcup_{j=1}^k E_j$ ;  $G(\omega)$  – комплекснозначная измеримая функция на  $\Omega$ .

Пусть  $\{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  – измеримая система разложения, подобная ортогональной, построенная в гильбертовом пространстве  $H = L_2(X, \nu)$  комплекснозначных функций и обладающая следующими свойствами (см. [4]):

1. существуют число  $r \in (2, +\infty]$  и измеримая конечная функция  $M(\omega) > 0$  такие, что для почти всех  $\omega \in \Omega$   $\|\varphi_\omega\|_r \leq M(\omega)$ ;
2. для любого  $j \in N$  из условия  $G \in L_2(E_j, \mu)$  следует интегрируемость на  $E_j$  функции  $G(\omega)\varphi_\omega$  как функции со значениями в  $H \equiv L_2(X, \nu)$ ;
3. функция  $b(\omega)\varphi_\omega$  измерима, как функция со значениями в  $L_r(X, \nu)$ , для любой комплекснозначной функции  $b$ , удовлетворяющей условию  $b(\omega)M(\omega) \in L_1(\Omega, \mu)$ .

В дальнейшем  $C(q, r, p)$  означает положительные величины зависящие от указанных в скобках параметров.

В теории ортогональных рядов хорошо известны теоремы Хаусдорфа-Юнга, Рисса, Пэли, Харди-Литтлвуда о коэффициентах Фурье. В настоящее время известны обобщения их результатов на различные пространства и системы. Например в [5], [6], [7], [8], [9], [10] (а также см. библиографию в этих работах). Аналог теорем Хаусдорфа-Юнга, Харди-Литтлвуда в пространствах  $L_p(X)$  для ортоподобных систем доказал Т. В. Родионов [4].

Далее будем считать, что  $\nu(X) < +\infty$ . В настоящей заметке доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\frac{r}{r-1} = r' < q \leq 2$  и  $\{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  – ортоподобная система функции, удовлетворяющая условиям 1-3 и

$$\int_A M^2(\omega) d\mu(\omega) < +\infty$$

для произвольного множества  $A \subset \Omega$  с конечной мерой  $\mu A > 0$ . Тогда для любой функции  $f \in L_{q,\infty}(X, \nu)$  имеет место неравенство:

$$(\mu A)^{-\frac{1}{2}} \left[ \int_A M^2(\omega) d\mu(\omega) \right]^{\frac{r(q-2)}{2q(r-2)}} \left| \int_A \hat{f}(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq C(q, r) \|f\|_{q,\infty}.$$

Заметим, что теорема 1 является обобщением леммы 7 [5].

Далее, будем рассматривать счетную ортоподобную систему (см. [3], стр. 58 и [11], стр. 188).

Пусть  $\{\hat{f}^*(k)\}$  невозрастающая перестановка последовательности  $\{|\hat{f}(n)|\}$  и  $|\hat{f}(m_1)|, \dots, |\hat{f}(m_k)|, \dots$  числа, которые после перестановки перешли соответственно в числа  $\hat{f}^*(1), \dots, \hat{f}^*(k), \dots$ . Для заданной функции  $f$  и номера  $n$  обозначим:

$$\Delta_n(f) = \left\{ m_k : \hat{f}^*(k) = |\hat{f}(m_k)|, \quad k = 1, \dots, n \right\}.$$

**Теорема 2.** Пусть счетная ортоподобная система  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  при некотором  $r \in (2, +\infty]$  удовлетворяет условию  $\|\varphi_n\|_r \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}$  и существует число  $M_0$  такое, что  $0 < M_0 \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Тогда для любой функции  $f \in L_{2,q}(X, \nu), 2 < q \leq \infty$ , имеет место неравенство:

$$\left[ \sum_{k=1}^n (\hat{f}^*(k))^2 \right]^{1/2} \leq C(q, r, M_0) \cdot \left( \ln(1 + \sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2) \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{2,q}$$

для  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\{\varphi_n\}$  – счетная ортоподобная система и  $\|\varphi_n\|_r \leq M, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad r \in (2, +\infty]$ . Тогда для любой функции  $f \in L_{2,q}, \quad 2 < q < r \leq \infty$  имеет место неравенство:

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}^*(n))^q \cdot n^{\frac{q}{2}-1} \left( \ln(1 + nM^2) \right)^{1-\frac{q}{2}} \right]^{\frac{1}{q}} \leq C(q, r) \cdot \|f\|_{2,q}.$$

Пусть  $\{\varphi_k\}$  – счетная ортоподобная система и  $\varphi_n \in L_r(X)$  для некоторого  $r \in (2, \infty]$ :  $\|\varphi_n\|_r \leq M_n, \forall n \in \mathbf{N}$ . Положим

$$\mu_n \equiv \mu_n^{(r)} = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_r : \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 1 \right\}.$$

Из определения видно, что  $\{\mu_n\}$  неубывает.

**Теорема 3.** Пусть  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  – счетная ортоподобная система,  $\varphi_n \in L_r(X)$  для некоторого  $2 < r \leq \infty$ . Если  $\{a_n\} \in l_2, \quad \rho_n = \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 2 < q < r$ , и

$$\Lambda_q(a) \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\frac{(q-2)r}{r-2}} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) \right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  сходится в  $L_q(X)$  к некоторой функции  $f \in L_q(X)$  и  $\|f\|_q \leq C(q, r) \cdot \Lambda_q(a)$ .

Отметим, что если  $\{\varphi_n\}$  – равномерно ограниченная ортонормированная система и  $r = +\infty$ , то из теоремы 2 получим результат С.В.Бочкарева ([6], теорема 1). Из теоремы 3 следует теорема 1 [9].

**Доказательство утверждений. Доказательство теоремы 1.** По определению коэффициентов разложения функции  $f$  по ортоподобной системе и неравенству Гельдера имеем:

$$\left| \int_A \hat{f}(\omega) d\mu(\omega) \right| = \left| \int_A \int_X f(x) \varphi_\omega(x) d\nu d\mu \right| \leq$$

$$\leq \int_A \|f\|_{r'} \|\varphi_\omega\|_r d\mu(\omega) \leq \|f\|_{r'} \int_A M(\omega) d\mu(\omega) \quad (1)$$

для функций  $f \in L_{r'}(X, \nu)$ .

Далее, сначала применяя неравенство Гельдера, затем равенство Парсеваля для ортоподобной системы (см.[2]), получим

$$\left| \int_A \hat{f}(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq \sqrt{\mu A} \|f\|_2 \quad (2)$$

для функций  $f \in L_2(X, \nu)$ . Пусть  $f \in L_{q,\infty}(X, \nu)$ . Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq f^*(\tau), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_0(x) = f(x) - f_1(x), x \in X,$$

где

$$\tau = \left[ \int_A M^2(\omega) d\mu(\omega) \right]^{-\frac{\beta}{2}}, \quad \beta = \frac{2r}{r-2}.$$

Известно, что (см.[7], стр.222)

$$f_1^*(t) \leq \begin{cases} f^*(\tau), & 0 < t < \tau, \\ f^*(t), & \tau \leq t, \end{cases}, \quad f_0^*(t) \leq \begin{cases} f^*(t), & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t, \end{cases} \quad (3)$$

при этом  $f_0 \in L_{r'}(X, \nu)$  и  $f_1 \in L_2(X, \nu)$ .

Пользуясь неравенством (1) и соотношениями (3), получим:

$$\begin{aligned} \left| \int_A \hat{f}_0(\omega) d\mu(\omega) \right| &\leq \|f_0\|_{r'} \int_A M(\omega) d\mu(\omega) \leq \\ &\leq \left[ \int_0^\tau f^{*r'}(t) dt \right]^{\frac{1}{r'}} \int_A M(\omega) d\mu(\omega) \leq (\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} f^*(t)) \times \\ &\left[ \int_0^\tau t^{-\frac{r'}{q}} dt \right]^{\frac{1}{r'}} \int_A M(\omega) d\mu(\omega) = \|f\|_{q,\infty} \left( \frac{q}{q-r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \tau^{\frac{1}{r'} - \frac{1}{q}} \int_A M(\omega) d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера к интегралу по  $\omega$  в правой части этого соотношения, будем иметь:

$$\left| \int_A \hat{f}_0(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq \left( \frac{q}{q-r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \|f\|_{q,\infty} \cdot \tau^{\frac{1}{r'} - \frac{1}{q}} \left( \int_A M^2(\omega) d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mu A}. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим функцию  $f_1 \in L_2(X, \nu)$ . Сначала применяя интегральное неравенство Гельдера, затем равенство Парсеваля и соотношение (3) и учитывая, что  $q < 2$ , получим:

$$\left| \int_A \hat{f}_1(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq \sqrt{\mu A} \|f_1\|_2 \leq \sqrt{\mu A} \left[ \int_0^\tau f^{*2}(\tau) dt + \right.$$

$$+ \left[ \int_{\tau}^{\infty} f^{*2}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mu A} \cdot \left( \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} f^*(t) \right) \left[ \tau^{1-\frac{2}{q}} + \frac{q}{2-q} \tau^{1-\frac{2}{q}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\left| \int_A \hat{f}_1(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq \sqrt{\mu A} \|f\|_{q,\infty} \left( \frac{2}{2-q} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_A \hat{f}(\omega) d\mu(\omega) \right| &\leq \left| \int_A \hat{f}_0(\omega) d\mu(\omega) \right| + \left| \int_A \hat{f}_1(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\mu A} \|f\|_{q,\infty} \left[ \left( \int_A M^2(\omega) d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \left( \frac{q}{q-r'} \right)^{\frac{1}{r'}} + \left( \frac{2}{2-q} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Из определения числа  $\beta$  следует, что  $1 - \beta\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{q}\right) = -\beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \iff \beta = \frac{2r}{r-2}$ . Тогда, учитывая значение числа  $\tau > 0$ , из соотношения (6) получим:

$$\left| \int_A \hat{f}(\omega) d\mu(\omega) \right| \leq \sqrt{\mu A} \|f\|_{q,\infty} C(q, r) \cdot \left( \int_A M^2(\omega) d\mu(\omega) \right)^{-\frac{r(q-2)}{2q(r-2)}}.$$

Этим теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $f \in L_{2,q}(X, \nu)$ . Эту функцию можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq f^*(\tau), \\ 0, & \text{если } |f(x)| > f^*(\tau), \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x), \quad 0 < \tau < \nu(X).$$

Докажем, что для натуральных чисел  $\{m_k\}_{k=1}^n$  каждая из функций  $f_i, i = 1, 2$ , удовлетворяет неравенству

$$\left[ \sum_{k=1}^n |\hat{f}_i(m_k)|^2 \right]^{1/2} \leq C(q, r) \left( \ln(1 + \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2) \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|f\|_{2,q}. \tag{7}$$

В силу равенства Парсеваля для ортоподобной системы (см. [2] и введение) и неравенства Гельдера  $\frac{q}{2} > 1$  для функции  $f_1$  имеем

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(m_k)|^2 \leq \|f_1\|_2^2 \leq \int_{\tau}^{\nu(X)} f^{*2}(t) dt \leq \|f\|_{2,q}^2 \left[ \ln \frac{\nu(X)}{\tau} \right]^{1-\frac{2}{q}}. \tag{8}$$

Для функции  $f_2 \in L_{r'}(X, \nu)$  по определению коэффициентов разложения и неравенства Гельдера ( $2 < r < +\infty$ ) имеем:

$$|\hat{f}_2(m_k)| = \left| \int_X f_2(x) \varphi_{m_k}(x) d\nu \right| \leq \|f_2\|_{r'} \|\varphi_{m_k}\|_r \leq M_{m_k} \|f\|_{r'}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(m_k)|^2 \leq \|f_2\|_{r'}^2 \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2. \tag{9}$$

Так как по условию  $q \in (2, +\infty)$ , то учитывая, что  $f^*$  не возрастает и  $t^{\frac{q}{2}-1}$  не убывает, будем иметь:

$$\|f\|_{2,q} \geq \left[ \int_{x/2}^x f^{*q}(t) t^{\frac{q}{2}-1} dt \right]^{1/q} \geq f^*(x) \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для любого  $x \in (0, \nu(X)]$ . Поэтому из оценки (9) с учетом условия  $r \in (2, +\infty]$  получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(m_k)|^2 &\leq \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2 \left[ \int_0^\tau f^{*r'}(t) dt \right]^{2/r'} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2 \|f\|_{2,q}^2 \left[ \int_0^\tau \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{r'}{2}} dt \right]^{\frac{2}{r'}} = 2 \left(\frac{2}{2-r'}\right)^{\frac{2}{r'}} \|f\|_{2,q}^2 \tau^{2(\frac{1}{r'}-\frac{1}{2})} \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left[ \sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(m_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \left(\frac{2}{2-r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \|f\|_{2,q} \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \left[ \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Положим  $\tau = \nu(X) \left(1 + \sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2\right)^{-\frac{r}{r-2}} = \nu(X) \left(1 + \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2\right)^{-\frac{r}{r-2}}$ . Тогда для функции  $f_1$  из неравенства (8) имеем:

$$\left[ \sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(m_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{r}{r-2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \left(\ln\left(1 + \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|f\|_{2,q}. \quad (11)$$

Так как  $\sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2 > M_0^2 > 0$ , то

$$1 = \log_{1+M_0^2}(1 + M_0^2) < \log_{1+M_0^2}\left(1 + \sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2\right) = \frac{\ln\left(1 + \sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2\right)}{\ln(1 + M_0^2)}.$$

Поэтому из неравенства (10) для функции  $f_2$  получим:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(m_k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{2} \left(\frac{2}{2-r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \|f\|_{2,q} \left(\frac{\nu(X)}{\left(1 + \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2\right)^{\frac{r}{r-2}}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \left[ \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{2}{2-r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \|f\|_{2,q} \left(\nu(X)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{\ln(1 + M_0^2)}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \left(\ln\left(1 + \sum_{k=1}^n M_{m_k}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Этим неравенство (7) доказано. Из неравенства (7) (см. также (11) и (12)) следует, что

$$\left[ \sum_{k=1}^n \hat{f}^{*2}(k) \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(q, r, M_0) \|f\|_{2,q} \left(\ln\left(1 + \sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2\right)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема доказана.

**Доказательство следствия 1.** На множестве натуральных чисел определим меру следующим образом: для любого конечного множества  $A \subset \mathbf{N}$  положим

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n} \ln(1 + nM^2).$$

Тогда  $\mu$  будет считающей мерой (см. [8], стр.160). Рассмотрим пространство последовательностей  $l_{q(\mu)}$  с нормой

$$\|\{b_n\}\|_{l_{q(\mu)}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \mu(n) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < +\infty.$$

Из доказанной теоремы 2 в случае  $q = \infty$  получим:

$$\sqrt{\frac{n}{\ln(1+nM^2)}} \hat{f}^*(n) \leq C \cdot \|f\|_{2,\infty}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

т.е. оператор  $T : f \longrightarrow \sqrt{\frac{n}{\ln(1+nM^2)}} \hat{f}^*(n)$  ограниченно действует из  $L_{2,\infty}$  в  $l_\infty$  – пространство ограниченных последовательностей.

Далее, в силу равенства Парсеваля для ортоподобных систем (см. [2]) имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ \hat{f}^*(n) \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln(1+nM^2)}} \right\} \right\|_{l_2(\mu)} &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{f}^*(n) \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln(1+nM^2)}} \right)^2 \cdot \frac{\ln(1+nM^2)}{n} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}^*(n))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2, \end{aligned}$$

т.е. оператор  $T$  ограниченно действует из пространства  $L_2(X, \nu)$  в  $l_2(\mu)$ . Следовательно, по интерполяционной теореме оператор  $T$  ограничен из  $L_{2,q}(X, \nu)$  в  $l_q(\mu)$ , т.е.

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}^*(n))^q \cdot n^{\frac{q}{2}-1} (\ln(1+nM^2))^{1-\frac{q}{2}} \right]^{\frac{1}{q}} \leq C(q) \cdot \|f\|_{2,q}.$$

Следствие доказано.

Для доказательства теоремы 3 отметим следующие факты:

**Замечание 1.** По свойству нормы и неравенства Гельдера для сумм имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_r \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \|\varphi_k\|_r \leq \left( \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot M_n^*,$$

где  $M_n^* = \max_{k \leq n} M_k$ . Из этой оценки следует, что

$$\mu_n \leq \sqrt{n} \cdot M_n^*. \tag{13}$$

**Замечание 2.** Если  $p \in [2, r]$ , то  $\mu_n^{(p)} \leq \left( \mu_n^{(r)} \right)^\gamma$ , где  $\gamma = \frac{p-2}{p} \cdot \frac{r}{r-2}$ .

**Доказательство.** Так как  $\sum_{k=1}^n c_k^2 = 1$ , то в силу теоремы 2 [2]:

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_2 \leq 1.$$

Полагая  $\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$ , имеем:

$$\int_X |\Phi_n(x)|^p d\nu = \int_X |\Phi_n(x)|^{p-\alpha} |\Phi_n(x)|^\alpha d\nu,$$

где  $\alpha = \frac{2(r-p)}{r-2}$ . Отметим, что  $p - \alpha = p - \frac{2(r-p)}{r-2} = \frac{(p-2)r}{r-2} < r$  при  $p < r$ . Поэтому, применяя неравенство Гельдера, будем иметь ( $\theta = \frac{r}{p-\alpha}$ ,  $\theta' = \frac{\theta}{\theta-1} = \frac{r-2}{r-p}$ ):

$$\int_X |\Phi_n(x)|^p d\nu \leq \|\Phi_n\|_r^{p-\alpha} \cdot \|\Phi_n\|_2^\alpha = \|\Phi_n\|_r^{p-\alpha} \leq \left(\mu_n^{(r)}\right)^{p-\alpha}.$$

Таким образом  $\mu_n^{(p)} \leq \left(\mu_n^{(r)}\right)^{p-\alpha} = \left(\mu_n^{(r)}\right)^\gamma$ , где  $\gamma = p - \alpha = \frac{(p-2)r}{r-2}$ .

**Доказательство теоремы 3.** Пусть выполнено условие теоремы 3:

$$\Lambda_q(a) \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\frac{(q-2)r}{r-2}} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) \right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty. \quad (14)$$

Так как  $\{a_n\} \in l_2$ , то  $\rho_n \downarrow 0$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . Положим  $n_1 = 1$ ,  $n_{k+1} = \min\{n : \rho_n \leq \frac{1}{2}\rho_{n_k}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$u_k(x) = \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n \varphi_n(x) \right|.$$

Тогда, в силу теоремы 2 [2] имеем  $\|u_k\|_2 \leq \rho_{n_k} \equiv \varepsilon_k$ . Из определения номера  $n_{k+1}$  видно, что  $\varepsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_k$ . Поэтому, по лемме 3 [9] при  $p = 2$  будем иметь:

$$\left\| \sum_{j=m}^k u_j \right\|_q^q \leq C(q, r) \cdot \sum_{j=m}^k \|u_j\|_r^{q-s} \cdot \varepsilon_j^s, \quad (15)$$

где  $s = \frac{2(r-q)}{r-2}$ . По свойству нормы

$$\|u_k\|_r = \left\| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} c_n \cdot \varphi_n \right\|_r \cdot \left( \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

где  $c_n = a_n \left( \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_n|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$ . Так как  $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} c_n^2 = 1$ , то по определению числа  $\mu_n$  из (16) получим  $\|u_k\|_r \leq \mu_{n_{k+1}-1} \cdot \rho_{n_k}$ . Поэтому, из (15) следует, что

$$\left\| \sum_{j=m}^k u_j \right\|_q^q \leq C(q, r) \cdot \sum_{j=m}^k \mu_{n_{j+1}-1}^{q-s} \cdot \rho_{n_j}^q. \quad (17)$$

По выбору номера  $n_{j+1}$  имеем  $\rho_{n_j} < 2\rho_{n_{j+1}-1}$  и  $\rho_{n_{j+1}-1} \geq 2 \cdot \rho_{n_{j+2}}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=n_{j+1}-1}^{n_{j+2}} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) = \rho_{n_{j+1}-1}^q - \rho_{n_{j+2}+1}^q \geq \\ & \geq \rho_{n_{j+1}-1}^q - \left(2^{-1}\rho_{n_{j+1}-1}\right)^q = \left(1 - 2^{-q}\right)\rho_{n_{j+1}-1}^q > \left(1 - 2^{-q}\right) \cdot 2^{-q}\rho_{n_j}^q. \end{aligned}$$

Поэтому, из (17) получим:

$$\left\| \sum_{j=m}^k u_j \right\|_q^q \leq C(q, r) \cdot \sum_{j=m}^k \mu_{n_{j+1}-1}^{q-s} \cdot \sum_{n=n_{j+1}-1}^{n_{j+2}} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) \leq C(q, r) \cdot \sum_{n=n_m}^{\infty} \mu_n^{q-s} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q). \quad (18)$$

В силу условия теоремы отсюда следует, что  $\{u_j\}$  фундаментальна в пространстве  $L_q(X)$ . Следовательно, в силу полноты пространства  $L_q(X)$  существует функция  $f \in L_q(X)$  такая, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right\|_q \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

В (18) полагая  $m = 1$ , получим:

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_{k+1}-1} a_n \varphi_n \right\|_q \leq C(q, r) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{q-s} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

В этом неравенстве переходя к пределу, получим:

$$\|f\|_q \leq C(q, r) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{q-s} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема доказана.

**Замечание 3.** Если  $\{M_n\}$  неубывает, то условие (см. теорему 2' [4] при  $u_k = k$ )  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \cdot n^{(q-2)\frac{r-1}{r-2}} \cdot M_n^{(q-2)\frac{r}{r-2}} < +\infty$  влечет (14).

Действительно, так как  $\mu_n \uparrow$  и  $2 < q < r < +\infty$ , то

$$\Lambda_q^q(a) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} \mu_n^{(q-2)\frac{r}{r-2}} (\rho_n^q - \rho_{n+1}^q) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \mu_{n_{k-1}}^{(q-2)\frac{r}{r-2}} \cdot \rho_{n_{k-1}}^q. \quad (19)$$

Далее, учитывая, что  $\rho_{n_{k-1}} \leq 2\rho_{n_{k-1}}$  и  $\rho_n \downarrow$ , имеем:

$$\rho_{n_{k-1}}^q \leq 2^q \cdot \rho_{n_{k-1}}^q \leq 2^q \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{q}{2}} (\rho_{n_{k-1}}^2 - \rho_{n_{k+1}}^2)^{\frac{q}{2}} \quad (20)$$

Положим  $\theta = \frac{q}{2} > 1$ ,  $\theta' = \frac{\theta}{\theta-1} = \frac{q}{q-2}$ . Применяя неравенство Гельдера и принимая во внимание  $1 - 2\theta'(1 - \frac{2}{q})^{\frac{r-1}{r-2}} = -\frac{r}{r-2} < 0$ , получим:

$$\left( \sum_{n=n_{k-1}}^{n_{k+1}} |a_n|^2 \right)^{\frac{q}{2}} \leq \left( \frac{r-2}{r} \right)^{\frac{q}{2}-1} \cdot n_k^{-\frac{(q-1)r}{r-2}} \cdot \left[ \sum_{n=n_{k-1}}^{n_{k+1}} |a_n|^q \cdot n^{(q-2)\frac{r-1}{r-2}} \right]. \quad (21)$$

Теперь в силу неравенств (13), (20), (21) и  $M_n \uparrow$  из (19) получим:

$$\Lambda_q^q(a) \leq C(q, r) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \cdot n^{(q-2)\frac{r-1}{r-2}} \cdot M_n^{(q-2)\frac{r}{r-2}}.$$

Этим замечание 3 обосновано.

**Замечание 4.** Теорема 2 является исправлением теорем сформулированных в [12], [13] (теорема 1), где вместо  $\ln(1 + \sum_{j \in \Delta_n(f)} M_j^2)$  напечатано  $\ln(\sum_{j=1}^n M_j^2)$  и без условия  $0 < M_0 \leq M_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Теорема 2, сформулированная в [13], справедлива для последовательности  $\{a_n\}$  действительных чисел. В [13] это не отмечено. Поэтому доказанная теорема 3 является исправлением теоремы 2 [13].

### Цитированная литература

1. Берг Й., Лефстерм Й. Интерполяционные пространства М., 1980.
2. Лукашенко Т. П. // Вестник МГУ, сер. матем. мех. 1997. №5. С. 27 – 31.
3. Лукашенко Т. П. // Матем. сб. 1997. Т. 188, №12. С. 57 – 72.
4. Родионов Т. В. // Изв. РАН, сер.матем. 2001. Т. 65, №3. С. 175 – 192.
5. Нурсултанов Е. Д. // Изв. РАН, сер.матем. 2000. Т. 64, №1. С. 95 – 122.
6. Бочкарев С. В. // Труды МИРАН. 1997. Т. 219. С. 103 – 114.
7. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
8. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М., 1985.
9. Коляда В. И. // Матем. заметки. 1992. Т. 51, №3. С. 24 – 34.
10. Flett Т. М. // J.London Math. Soc. 1973. V. 7. P. 376 – 384.
11. Лукашенко Т. П. // Изв. РАН, сер.матем. 1998. Т. 64, №5. С. 187 – 206.
12. Акишев Г. // Тезисы докладов международного симпозиума "Ряды Фурье и их приложения". Ростов - на - Дону, 2005. С. 7.
13. Акишев Г. // Тезисы докладов 7 – международной конференции "Актуальные проблемы современной науки". части 1-3. Самара, 2006. С. 11 – 14.

*Поступила в редакцию 22.08.2008г.*

УДК 519.6:539.3

## ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛАСТОДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

Институт Математики МОиН РК  
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Рассматриваются краевые задачи для упругой среды, ограниченной цилиндрической поверхностью, по которой с постоянной дозвуковой скоростью движется нагрузка, вид которой не меняется с течением времени. Данный класс задач является модельным для динамики подземных сооружений, типа транспортных тоннелей, а также наземного дорожного транспорта. Для решения краевых задач развивается метод обобщенных функций. Построены динамические аналоги формул Грина и на их основе получены сингулярные граничные интегральные уравнения, разрешающие поставленные краевые задачи.

В [1] с использованием теории обобщенных функций построены обобщенные решения системы уравнений Ламе, описывающие движение упругой среды при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях движения источников возмущений различного типа. Рассмотрены ударные волны, которые возникают в среде при сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений.

Здесь рассматриваются краевые задачи для упругой среды, ограниченной цилиндрической поверхностью, по которой с постоянной дозвуковой скоростью движется нагрузка, вид которой не меняется с течением времени. Назовем такие нагрузки *транспортными*. Данный класс задач является модельным для динамики подземных сооружений, типа транспортных тоннелей, а также наземного дорожного транспорта, скорость движения которого пока еще намного меньше скорости распространения возмущений в среде, где происходит это движение. Для решения краевых задач развивается метод обобщенных функций (МОФ), который позволяет сравнительно легко строить динамические аналоги формул Грина и на их основе получать вид решений и строить сингулярные интегральные уравнения, разрешающие поставленные краевые задачи. Основные идеи этого метода для класса бегущих решений волнового уравнения в пространствах разной размерности изложены автором в [2].

---

Keywords: *elastodynamics, subsonic running loads, boundary value problems, generalized functions method*

2000 Mathematics Subject Classification: 74B05, 35E05

© Л. А. Алексеева, 2009.

**1. Уравнения Ламе в подвижной системе координат. Числа Маха.** Рассматривается упругая среда, заданная параметрами Ламе  $\lambda, \mu$ , плотностью  $\rho$ ;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений  $u$ ;  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора напряжений и деформаций, связанные законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = 0,5 (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Введем подвижную систему координат  $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3 + ct) = (x_1, x_2, z)$ . В новых переменных уравнения движения среды имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} - \rho c^2 u_{i,zz} + \rho G_i = 0. \quad (2)$$

Здесь и далее введены обозначения:  $u_{i,j} = \partial_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $u_{i,z} = \partial_z u_i = \frac{\partial u_i}{\partial z}$  и т.п. С учетом (1) уравнения (2) приводятся к виду :

$$\left( (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} + \left( \mu \Delta - \rho c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta_j^i \right) u_i + \rho G_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\delta_j^i = \delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  – две звуковые скорости, с которой распространяются объемные и сдвиговые деформации в упругой среде. Всюду далее по одноименным индексам суммирование в указанных пределах изменения индексов (тензорная свертка).

Назовем скорость  $c$  *дозвуковой*, если  $c < c_2$ ; *межзвуковой*, если  $c_2 < c < c_1$  и *сверхзвуковой*, если  $c > c_1$ . Скорость называется *первой* или *второй звуковой*, если  $c = c_j, j = 1, 2$  соответственно. Для транспортных задач  $c < c_2$ . Этот случай здесь рассмотрим.

Пусть массовая сила  $G$ , действующая в среде, движется с постоянной дозвуковой скоростью  $c$  вдоль координатной оси  $X_3$  (для удобства выкладок, противоположно ее направлению) и в подвижной системе координат не зависит от  $t$ . Будем искать решения (3) такой же структуры:  $u_k = u_k(x_1, x_2, x_3 + ct) = u_k(x_1, x_2, z)$ , которые назовем *бегуцими*.

Перепишем уравнение (3), поделив его на  $\rho c$ :

$$L_j^i(\partial_x) u_i = \left( (M_1^{-2} - M_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} + \left( M_2^{-2} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta_j^i \right) u_i + c^{-1} G_j = 0. \quad (4)$$

Здесь  $M_j = c/c_j$  числа Маха в дозвуковом случае

$$M_j < 1, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Перейдем к постановке краевых задач в подвижной системе координат. Далее обозначаем  $x = (x_1, x_2)$ .

**2. Постановка первой и второй краевой задачи.** Пусть  $D^-$  – упругая среда, ограниченная цилиндрической поверхностью  $D$  с образующей, параллельной оси  $X_3$ ,  $S^-$  – поперечное сечение цилиндра,  $S$  – его граница,  $n$  – вектор единичной внешней нормали к  $D$ , очевидно  $n = n(x), n_3 = 0$ . Предположим, что  $G$  – локально интегрируемая функция и  $\exists \varepsilon > 0$ :

$$\|G\| \leq O(\|x'\|^{-(3+\varepsilon)}) \quad \text{при } \|x'\| \rightarrow \infty, x' \in D^- + D. \quad (6)$$

Пусть  $u(x, z)$  – вектор перемещений – решение уравнений (3) в  $D^-$ , дважды дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

$$\|u(x, z)\| \leq O(\|x'\|^{-\varepsilon}), \|u_{,j}(x, z)\| \leq O(\|x'\|^{-1-\varepsilon}) \quad \text{при } \|x'\| \rightarrow \infty, x' \in D^- + D. \quad (7)$$

Обозначим

$$u_i(x, z) = u_i^D(x, z) \text{ при } (x, z) \in D. \quad (8)$$

На  $D$  движется нагрузка  $p(x, z)$ :

$$\sigma_{ij}(x, z)n_j(x) = p_i(x, z) \text{ при } (x, z) \in D. \quad (9)$$

Будем называть задачу первой краевой, если на границе известны перемещения (8); в случае заданных на  $D$  напряжений  $p$  (9) имеем вторую краевую задачу. Предполагается, что  $\exists \varepsilon_i > 0$ :

$$\|u^D(x, z)\| \leq O(|z|^{-\varepsilon_1}) \text{ при } |z| \rightarrow \infty, x \in S, \quad (10)$$

$$\|p(x, z)\| \leq O(|z|^{-1-\varepsilon_2}) \text{ при } |z| \rightarrow \infty, x \in S. \quad (11)$$

Вектор-функцию  $u$ , удовлетворяющую поставленным условиям, будем называть *классическим* решением первой (второй) краевой задачи.

**3. Единственность решений краевых задач.** Построим два полезных энергетических равенства, которым удовлетворяют решения поставленных краевых задач. Обозначим  $W$  – упругий потенциал среды:  $W = \sigma_{ij}u_{i,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ .

Уравнения движения (2) умножим на  $u_i$  и свернем по  $i$ . В результате простых выкладок получим:

$$(\sigma_{ij}u_{i,j})_{,j} - W - \rho c^2(u_{i,z}u_{i,z}) + \rho c^2 u_{i,z}u_{i,z} + G_i u_i = 0. \quad (12)$$

Интегрируя (12) по ограниченному цилиндру  $C_{ab}^- = \{(x, z) : x \in D^-, a < z < b\}$  с использованием формулы Остроградского-Гаусса, получим:

$$\int_{C_{ab}^-} p_i u_i dS(x, z) - \int_{C_{ab}^-} (W - \rho c^2 \|u_{,z}\|^2 - G_i u_i) dV(x, z) + \int_{S^-} \{(\rho c^2 u_{i,z} - \sigma_{i3}) u_i |_{(x,a)} - (\rho c^2 u_{i,z} - \sigma_{i3}) u_i |_{(x,b)}\} dV(x) = 0.$$

Здесь  $dV(x, z) = dx_1 dx_2 dz$ ,  $dV(x) = dx_1 dx_2$ ,  $dS(x, z)$  – дифференциал площади поверхности интегрирования, подынтегральные функции в последнем интеграле берутся при  $z = a, b$  в зависимости от указанного значения в нижних индексах у черты. Переходя к пределу при  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ , с учетом условий (6),(7),(10), (11), получим первое энергетическое соотношение:

$$\int_D (p, u) dS(x, z) = \int_{D^-} (\rho c^2 \|u_{,z}\|^2 - W + (G, u)) dV(x, z),$$

которое определяет полную энергию среды  $E = (\rho c^2 \|u_{,z}\|^2 - W)$  через работу объемных и поверхностных сил.

Для построения второго энергетического соотношения умножим (2) на  $U_{i,z}$ , свернем по  $i$  и получим после несложных преобразований:

$$(\sigma_{ij}u_{i,z})_{,j} - 0,5 (W_{,z} + \rho c^2 (u_{i,z}u_{i,z})_{,z}) + (G, u)_{,z} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Интегрирование этого равенства по  $C_{ab}^-$  приводит к формуле:

$$\int_{S^-} (0,5 (W + \rho c^2 \|u_{,z}\|^2) - \sigma_{i3}u_{i,z}) \Big|_{(x,a)}^{(x,b)} dV(x) = \int_{C_{ab}^-} (p, u_{,z}) dS(x, z) + \int_{C_{ab}^-} (G, u_{,z}) dV(x, z). \quad (14)$$

Если устремить  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ , в силу их произвольности, отсюда следуют два равенства для  $\forall z$ :

$$\int_{S^-} \left( 0,5 \left( W + \rho c^2 \|u_{,z}\|^2 \right) \mp \sigma_{i3} u_{i,z} \right) dV(x) = \int_{C_{z,\pm\infty}} (p, u_{,z}) dS(x, z) + \int_{C_{z,\pm\infty}^-} (G, u_{,z}) dV(x, z),$$

соответственно верхнему и нижнему знакам. Если их сложить, получим второе энергетическое соотношение: для любых  $z$

$$\int_{S^-} \left( W + \rho c^2 \|u_{,z}\|^2 \right) dV(x) = \int_D (p, u_{,z}) dS(x, z) + \int_{D^-} (G, u_{,z}) dV(x, z). \quad (15)$$

Следствием его является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Решение первой (второй) краевой задачи единственно.*

**Доказательство.** В силу линейности задачи достаточно показать единственность нулевого решения. Пусть  $u(x, z)$  удовлетворяет нулевым граничным условиям:  $u^D = 0$  или  $p = 0$  на  $D$  и является решением однородных уравнений движения:  $G = 0$ . Тогда из (15) следует, что для  $\forall z$

$$\int_{S^-} \left( W(x, z) + \rho c^2 \|u_{,z}(x, z)\|^2 \right) dV(x) = 0. \quad (16)$$

Выражение под знаком интеграла представляет собой положительно определенную квадратичную форму от  $u_{i,j}$ , т.к. упругий потенциал  $W \geq 0$  [3], причем  $W = 0$  только для смещений среды как абсолютно твердого тела. Поэтому равенство (16) выполняется, только если  $u_{i,j} = 0$  для всех  $i, j$ . Отсюда, с учетом условий затухания решений на  $\infty$  и произвольности  $z$ , получим  $u = 0$ . Теорема доказана. Она справедлива как для внешней, так и для внутренней краевой задачи ( для нее асимптотики на  $G$  и граничные функции можно ослабить).

**4. Постановка задач в пространстве обобщенных функций.** Нашей целью является построение граничных интегральных уравнений для решения поставленных краевых задач. В [1] показано, что при дозвуковых скоростях система уравнений (3) эллиптического типа. Определяющим при построении ГИУ краевых задач является построение аналога формулы Грина для решений эллиптических уравнений [4], который позволяет по граничным значениям искомой функции и ее нормальной производной определять значения функции внутри области. Аналог этой формулы для уравнений статической теории упругости называется *формулой Соммильяны*. Она определяет  $u(x, z)$  в области  $D^-$ , если известны граничные значения перемещений и напряжений  $u^D(x, z)$  и  $p(x, z)$ . Построим динамический аналог этой формулы в случае бегущих решений. Используем для этого аппарат теории обобщенных функций [4], который легко распространить на обобщенные вектор-функции (см.[1]).

Введем регулярную обобщенную функцию  $\hat{u} = u(x, z)H_D^-(x) = u(x, z)H_S^-(x)1(z)$ , определенную теперь во всем пространстве  $R^3$ . Здесь  $H_S^-(x)$  – характеристическая функция множества  $S^-$ , равная 0,5 на  $S$ ,  $1(z) \equiv 1$ .

Используя свойства дифференцирования регулярных обобщенных функций со скачком на  $S$ , получим уравнение для  $\hat{u}$ :

$$\rho L_i^j (\partial_{x'}) \hat{u}_j(x') = \hat{G}_i + (\rho c^2 n_3 u_{i,z} - p_i) \delta_D + (n_3 u_i \delta_D)_{,z} - (\lambda u_k n_k \delta_{ij} + \mu (n_j u_i + n_i u_j) \delta_D)_{,j}, \quad (17)$$

где  $\hat{G} = c^{-1} \rho G H_D^-(x, z)$ ,  $\delta_D(x, z) = \delta_S(x)1(z)$  – простой слой на  $D$  [4]. Поскольку  $n_3 \equiv 0$  на  $D$ , используя свойства тензора Грина, получим аналог формулы Соммильяны в пространстве обобщенных функций:

$$\rho \hat{u}_i = \hat{U}_i^j * p_j \delta_D + \left( \lambda u_k n_k \delta_{ij}^j + \mu (n_j u_i + n_i u_j) \right) \delta_D * \hat{U}_i^l * \hat{U}_l^j + \hat{U}_i^j * \hat{G}_j, \quad (18)$$

который можно записать и так

$$\rho \hat{u}_i = \hat{U}_i^j * p_j \delta_D + \left( (\lambda u_k n_k \delta_l^j + \mu (n_j u_l + n_l u_j)) \delta_D * \hat{U}_i^l \right)_{,j} + \hat{U}_i^j * G_j H_D^-.$$

**Замечание.** Вообще говоря, представление решения (17) в виде (18) верно с точностью до решения однородной системы уравнений, однако, в силу теоремы 1 оно единственно.

Введем тензоры - сдвиги:

$$U_j^i(x, y, z, \tau) = \hat{U}_j^i(x - y, z - \tau), T_j^i(x, y, z, \tau, n) = \hat{T}_j^i(x - y, z - \tau, n).$$

Здесь

$$\hat{T}_j^i(x, z, n) = -\Sigma_{jk}^i(x, z) n_k, \tag{19}$$

$\Sigma_{jk}^i(x, z)$  – тензор напряжений, порождаемый тензором  $\hat{U}_j^i$ :

$$\Sigma_{jk}^i(x, z) = \lambda U_{l,l}^i \delta_{jk} + \mu (U_{j,k}^i + U_{k,j}^i).$$

Если записать свертку (18) в интегральном виде с учетом введенных обозначений и формул (1), (2), то получим формулу, по виду совпадающую с формулой Сомильяны [3]:

$$\rho \hat{u}_i(x, z) = \int_D (U_i^j(x, y, z, \tau) p_j(y, \tau) - T_i^j(x, y, z, \tau, n(y)) u_j(y, \tau)) dS(y, \tau), \tag{20}$$

которая позволяет по известным граничным значениям перемещений и напряжений определять перемещения в среде.

**5. Фундаментальные решения. Динамический аналог формулы Гаусса.** В дозвучном случае тензор Грина является регулярным и имеет следующий вид [1,5]:

$$\begin{aligned} \hat{U}_1^1 &= \frac{1}{4\pi c^2} \left( \frac{1}{V_2} + \frac{z^2 x_1^2 W_{12}}{r^4 M_2^2} - \frac{x_2^2 V_{12}}{r^4 M_2^2} \right), & \hat{U}_2^2 &= \frac{1}{4\pi c^2} \left( \frac{1}{V_2} + \frac{z^2 x_2^2 W_{12}}{r^4 M_2^2} - \frac{x_1^2 V_{12}}{r^4 M_2^2} \right), \\ \hat{U}_1^2 &= \hat{U}_2^1 = \frac{x_1 x_2}{4\pi c^2 r^4} (z^2 W_{12} + V_{12}), & \hat{U}_3^3 &= \frac{1}{4\pi c^2} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{m_2^2}{V_2} \right), \\ \hat{U}_1^3 &= \hat{U}_3^1 = -\frac{x_1 z}{4\pi c^2 r^2} W_{12}, & \hat{U}_2^3 &= \hat{U}_3^2 = -\frac{x_2 z W_{12}}{4\pi c^2 r^2}, \end{aligned}$$

где  $V_{12} = V_1 - V_2$ ,  $V_i = \sqrt{z^2 + m_i^2 r^2}$ ,  $m_i^2 = 1 - M_i^2$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $W_{12} = V_1^{-1} - V_2^{-1}$ .

Поскольку при  $x' \rightarrow \mathbf{0}$  [6]:

$$V_{12} \sim \frac{r^2(m_1^2 - m_2^2)}{2|z|}, \quad W_{12} \sim \frac{r^2(m_2^2 - m_1^2)}{2|z|}, \quad \frac{z^2 x_1^2}{r^4} W_{12} - \frac{x_2^2}{r^4} V_{12} \sim \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{2|z|},$$

компоненты тензора  $\hat{U}_i^k$  ограничены на оси  $Z$  (при  $x = 0$ ) кроме точки  $(x, z) = 0$ , где тензор имеет слабую особенность порядка  $R^{-1}$ ,  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ . Такого же типа его асимптотика при  $R \rightarrow \infty$ . Соответственно  $R^{-2}$  – порядок особенности производного от него тензора  $\hat{T}_i^k$  и поведение на  $\infty$ . Легко видеть, что справедливы следующие свойства симметрии по аргументам:

$$U_i^j(x, y, z, \tau) = U_i^j(y, x, \tau, z) = U_i^j(y, x, z, \tau), \tag{21}$$

$$T_i^j(x, y, z, \tau, n) = -T_i^j(y, x, \tau, z, n) = -T_i^j(y, x, z, \tau, -n). \tag{22}$$

Пусть  $F$  – двумерная замкнутая поверхность Ляпунова в  $R^3$ , ограничивающая область  $F^-$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_z)$  – единичный вектор внешней нормали к ней,  $F^+ = R^3 - (F^- + F)$ .

**Теорема 2.** Тензор  $T_i^j$  удовлетворяет формуле:

$$\int_F T_i^j(y, x, \tau, z, \nu(y, \tau)) dS(y, \tau) + c^2 \partial_z \int_F U_i^j(x, y, z, \tau) \nu_z(y, \tau) dS(y, \tau) + \rho H_F^-(x, z) \delta_i^j = 0.$$

При  $x \notin F$  интегралы регулярные, при  $x \in F$  – сингулярные, берутся в смысле главного значения.

**Доказательство.** Если свернуть уравнение для  $\hat{U}_j^i$ :

$$\Sigma_{ij}^m - \rho c^2 \hat{U}_{i,zz}^m + \rho \delta_i^m \delta(x) \delta(z) = 0$$

с характеристической функцией множества  $F^-$ , то, используя свойство дифференцирования свертки, легко получим:

$$-\Sigma_{ij}^m * \nu_j \delta_F + \rho c^2 (\hat{U}_i^m * \nu_z \delta_F)_{,z} + \rho \delta_j^m H_F^- = 0. \quad (23)$$

Для цилиндрических поверхностей типа  $D$  компонента  $\nu_z = 0$  и формула упрощается:

$$-\Sigma_{ij}^m * \nu_j \delta_F + \rho \delta_j^m H_D^- = 0.$$

Асимптотические свойства позволяют сразу же записать формулы (23) в искомом интегральном виде на основе интегрального определения свертки, но только для  $x' \notin F$ , поскольку подынтегральные функции непрерывны для таких  $x'$  и имеют интегрируемую асимптотику в случае неограниченной области.

На границе  $D$  для  $y' = x'$  тензор  $T$  имеет сильную особенность, интеграл слева в (23) не существует в обычном смысле. Покажем, что его следует брать в смысле главного значения. Здесь и далее используются следующие обозначения:  $\Gamma_\varepsilon(x, z) = \{(y, t) : \|(y - x, t - z)\| = \varepsilon\}$ ,  $\Pi_\varepsilon(x, z) = \{(y, t) : \|(y - x, t - z)\| < \varepsilon\}$ ; соответственно знакам  $\Gamma_\varepsilon^\pm = \Gamma_\varepsilon(x, z) \cap F^\pm$ ,  $\Pi_\varepsilon^\pm = \Pi_\varepsilon \cap F^\pm$ ,  $F_\varepsilon(x, z) = \{(y, t) : (y, t) \in F, \|(y - x, t - z)\| > \varepsilon\}$ .

Аналогично (23) получим равенства для  $F_\varepsilon^-$  и  $F_\varepsilon^- + \Pi_\varepsilon^-$  – это области  $F^-$  с выколотой и расширенной  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x' \in F$ . Поскольку  $x' \notin F_\varepsilon^-$  и  $x' \in F^- + \Pi_\varepsilon^+$ , имеем:

$$\int_{F_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} \left( T_i^j(y, x, \tau, z, \nu(y, \tau)) - \rho c^2 U_{i,z}^j(y, x, \tau, z) \nu_z(y, \tau) \right) dS(y, \tau) = 0,$$

$$\int_{F_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} \left( T_i^j(y, x, \tau, z, \nu(y, \tau)) - \rho c^2 U_{i,z}^j(y, x, \tau, z) \nu_z(y, \tau) \right) dS(y, \tau) = \rho.$$

В силу указанных асимптотик и свойств симметрии  $T$  (22) существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} \left( T_i^j(y, x, \tau, z, \nu(y, \tau)) - \rho c^2 U_{i,z}^j(y, x, \tau, z) \nu_z(y, \tau) \right) dS(y, \tau) =$$

$$= V.p. \int_F \left( T_i^j(y, x, \tau, z, \nu(y, \tau)) - \rho c^2 U_{i,z}^j(y, x, \tau, z) \nu_z(y, \tau) \right) dS(y, \tau).$$

Поскольку тензора  $T_i^j, U_i^j, z$  антисимметричны, а в противоположных относительно  $(x, z)$  точках сферы  $\Gamma_\varepsilon$  нормали здесь совпадают,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^\pm} T_i^j(y, x, \tau, z, m(y, \tau)) dS(y, \tau) + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} T_i^j(y, x, \tau, z, -m(y, \tau)) dS(y, \tau) = 0,$$

т.к. на  $\Gamma_\varepsilon^\pm$  внешняя нормаль  $\nu(y, \tau) = \pm m(y, \tau)$  соответственно знаку, где  $m(y, \tau) = \frac{(y-x, z-\tau)}{\|(y-x, z-\tau)\|}$ . Складывая оба равенства, деля на 2 и переходя к пределу по  $\varepsilon \rightarrow 0$ , с учетом последних равенств получим формулу теоремы и для  $x' \in F$ . Теорема доказана.

**Лемма 1.** Если  $F$  - сферическая поверхность с центром в точке  $(x^*, z^*)$ , то

$$\int_F T_i^j(y, x^*, \tau, z^*, \nu(y, \tau)) dS(y, \tau) + \rho H_F^-(x, z) \delta_i^j = 0. \tag{24}$$

**Доказательство** следует из формулы теоремы 2 для внутренних точек, свойств симметрии тензора  $U$  (21) и антисимметрии внешних нормалей в противоположных точках сферы, в силу чего

$$\int_F U_i^j(x^*, y, z^*, \tau) \nu_z(y, \tau) dS(y, \tau) = 0,$$

$$\int_F U_i^j(x^*, y, z^* + \Delta z, \tau) \nu_z(y, \tau) dS(y, \tau) = \int_F U_i^j(x^*, y, z^* - \Delta z, \tau) \nu_z(y, \tau) dS(y, \tau).$$

Поэтому второе слагаемое в этом случае в формуле теоремы 2 обнуляется.

**6. Сингулярные граничные интегральные уравнения.** Решение поставленных краевых задач дает следующая теорема.

**Теорема 3.** Если решение  $u(x, z)$  краевых задач удовлетворяет условию Гельдера на  $D$ , а именно,

$$\|u_j(x, z) - u_j(y, t)\| \leq C \|(x, z) - (y, t)\|^\beta \quad x \in S, \quad y \in S, \tag{25}$$

тогда  $u(x, z)$  определяется по граничным значениям перемещений и напряжений формулой :

$$\rho u_i H_D^-(x, z) = \int_D \left( U_i^j(x, y, z, \tau) p_j(y, \tau) - T_i^j(x, y, z, \tau, n(y, \tau)) u_j(y, \tau) \right) dS(y, \tau). \tag{26}$$

**Доказательство.** Формула (26) является интегральной записью формулы (17) с учетом введенных обозначений. Для  $x' \notin D$  все интегралы регулярные.

Пусть  $(x^*, z^*) \in D, x' \rightarrow (x^*, z^*)$ . Тогда, в силу леммы 1, теоремы 2,

$$\lim_{(x, z) \rightarrow (x^*, z^*)} \rho u_i(x, z) = \rho u_i(x^*, z^*) =$$

$$\lim_{(x, z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_D \left( U_i^j(x, y, z, \tau) p_j(y, \tau) - T_i^j(x, y, z, \tau, n(y, \tau)) (u_j(y, \tau) - u_j(x^*, z^*)) \right) dS(y, \tau) +$$

$$+ u_j(x^*, z^*) \times \lim_{(x, z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_D T_i^j(x, y, z, \tau, n(y, \tau)) dS(y, \tau) =$$

$$= \int_D \left( U_i^j(x^*, y, z^*, \tau) p_j(y, \tau) - T_i^j(x^*, y, z^*, \tau, n(y, \tau)) \right) (u_j(y, \tau) - u_j(x^*, z^*)) dS(y, \tau) +$$

$$\begin{aligned}
& + \rho u_j(x^*, z^*) = \int_D U_i^j(x^*, y, z^*, \tau) p_j(y, \tau) dS(y, \tau) - \\
& - V.P. \int_D T_i^j(x^*, y, z^*, \tau, n(y, \tau)) u_j(y, \tau) dS(y, \tau) + 0,5 \rho u_i(x^*, z^*).
\end{aligned}$$

В последнем равенстве воспользовались очевидными свойствами:

- интегралы существуют в силу гельдеровости  $u$  на  $D$  и теоремы 2;
- если интеграл существует, то он совпадает по величине со своим главным значением;
- главное значение интеграла, содержащего разность подынтегральных функций, равно разности главных значений интегралов, соответствующих каждой из этих функций, если они существуют.

Переносим последнее слагаемое в левую часть равенства, получим, согласно определению  $H_D(x, z)$  на границе, формулу теоремы для граничных точек. Теорема доказана.

Из этой теоремы получаем разрешающую систему уравнений.

**Теорема 4.** *Решение  $u(x, z)$  краевых задач удовлетворяет сингулярным граничным интегральным уравнениям для  $(x, z) \in D$ :*

$$0,5 \rho u_i(x, z) = \int_D U_i^j(x, y, z, \tau) p_j(y, \tau) dS(y, \tau) - V.P. \int_D T_i^j(x, y, z, \tau, n(y, \tau)) u_j(y, \tau) dS(y, \tau).$$

При этом для решения первой краевой задачи следует решать систему уравнений Фредгольма первого рода со слабо полярным ядром для определения компонент напряжения на границе  $p(x, z)$ . После чего, используя формулу теоремы 3, можно определить  $u(x, z)$  для внутренних точек. Для них формулы допускают дифференцированием под знаком интеграла. Подставляя их в (1), (2), можно определить деформации напряжения в среде.

Решение второй краевой задачи удовлетворяет тем же уравнениям, но которые теперь уже являются сингулярными граничными интегральными уравнениями типа Фредгольма второго рода относительно компонент перемещений  $u(x, z)$ .

**Заключение.** При дозвуковых скоростях обе задачи относятся к классу эллиптических задач типа Дирихле и Неймана. Методы исследования вопросов разрешимости такого типа ГИУ достаточно хорошо известны. Численную реализацию такого типа уравнений на основе методов граничных элементов можно проводить аналогично, как в статических задачах теории упругости [7,8].

Отметим также, что аналог формулы Соммильяны получен для обобщенных функций. Но поскольку они регулярные в данном случае, поэтому решения являются классическими в силу леммы Дюбуа-Реймона [4]. Однако, если действующие нагрузки описываются сингулярными обобщенными функциями, что часто бывает в физических задачах, следует пользоваться представлением обобщенного решения в сверточном виде (17) с вычислением сверток по определению (см. [4]).

## Цитированная литература

1. Алексеева Л. А. // Математический журнал. 2009. Т.9, №1(31). С. 16 – 25.
2. Алексеева Л. А. // Математический журнал. 2008. Т.8, №2(28). С. 1 – 19.
3. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1978.

5. Алексеева Л. А. // Прикладная математика и механика. 1991. Т.55, №5. С. 854 – 862.
6. Алексеева Л. А. Граничные интегральные уравнения краевых задач для класса стационарных бегущих решений волновых уравнений в цилиндрических областях/ Препринт ИТПМ МН-АН РК. Алматы, 1997. 72с.
7. Партон В. Б., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977.
8. Бреббиа К., Теллес Ж., Брoубелл Л. Методы граничных элементов. М., 1987.

*Поступила в редакцию 27.05.2009г.*

УДК 523.98, 530.182

## ДИАГНОСТИКА СИНХРОННЫХ ПАТТЕРНОВ ВО ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

О. М. БЕЛОСЛЮДЦЕВ, Н. Г. МАКАРЕНКО, А. А. ПАК

ТОО Институт Сейсмологии МОиН РК  
050060 г. Алматы пр. Аль-Фараби, 75 а ombel@mail.ru  
Институт Математики МОиН РК  
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 chaos@math.kz

В работе исследуется взаимная связь между различными геофизическими сигналами, которые наблюдаются синхронно на геофизических обсерваториях Алматинского прогностического полигона. Для этого используется аппарат символической динамики, который, во-первых, позволяет анализировать данные различной природы без предварительной нормировки и, во вторых, обладает свойством толерантности к ошибкам измерений. Метод позволил обнаружить обобщенную синхронизацию отсчетов сигналов различной природы, полученных на различных станциях. Возможное объяснение результата – существование единого сейсмического сценария, связанного движением отдельностей геологической среды.

В 1991 году академиком М.А. Садовским было высказано предположение о синергетических процессах в литосфере [1]. Горные породы, образующие земную кору (литосферу), имеют два характерных свойства.

Первое из них – дискретность: литосфера состоит из иерархии отдельных блоков, "отдельностей" разного масштаба – от мельчайших песчинок до континентальных плит, причем в каждую крупномасштабную отдельность вложены последовательно все более мелкие. (см.Рис.1) Изучение распределений отдельностей горной породы по размерам показало, что все распределения по размерам полимодальны и моды их практически не зависят от физико-химических свойств горной породы. Выяснилось также, что не все размеры отдельностей равновероятны – некоторые из них встречаются чаще других. Далее было установлено, что приоритетные отдельности приближенно описываются геометрической прогрессией с показателем  $K$ , близким к постоянному значению. Этот показатель не зависит от физико-химических свойств породы, но остается неизменным и в случае различных способов образования отдельностей, будь то природное трещинообразование, дробление подземными взрывами или измельчение на мельницах [1].

---

Keywords: *Order Pattern, transcriptor, symbolic dynamics, earthquake prediction, Markov chain, joint synchronization*

2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

© О. М. Белослудцев, Н. Г. Макаренко, А. А. Пак , 2009.

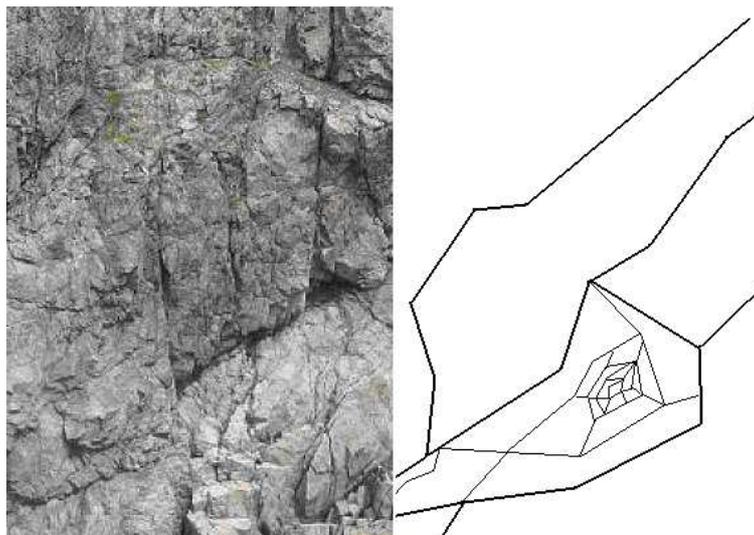


Рис. 1: Борт скалы с ярко выраженным блочным строением (слева) и схема блочного строения литосферы, крупные блоки которые являются системами меньшего масштаба, как бы вложены одна в другую (справа). (Рисунок взят из работы [1])

Вторым важнейшим свойством горной породы является ее постоянное колебательное движение в широком спектре частот. Так, известны микросейсмические колебания с периодами от 0.01 до 15 секунд. И длиннопериодные собственные колебания Земли с периодами до 1 часа, достигающими главных приливных солнечно-земных гармоник. Высокочастотные упругие волны быстро затухают, поэтому их обнаружение свидетельствует о том, что они генерируются рассредоточением внутри всего объема литосферы под действием какой-то внешней причины. Учитывая сказанное о дискретном строении горной породы, естественно было бы считать ее колебания в различных спектральных областях собственными колебаниями составляющих ее отдельных частей разного масштаба.

Наша планета может рассматриваться как пример открытой системы, обменивающейся с окружающей средой веществом и энергией [1, 2, 3, 4]. Эта система является неравновесной, неустойчивой и нелинейной. Характерной особенностью является то, что малый сигнал на входе может вызвать сильный отклик на выходе. При этом характерна смена порядка и хаоса обуславливающая нестационарность пространственно-временных структур [2, 4].

Энергия, поступающая в открытые системы, перерабатывается в них, причем механизм этой переработки может иметь различную физико-химическую природу (механическое движение, полиморфные превращения и т. п.). Остановимся только на механике. Представим себе систему из обладающих упругостью отдельных частей - блоков, способных воспринимать энергию извне и обмениваться ею друг с другом. Поглощая энергию извне, некоторые блоки будут терять устойчивость, излучая при этом часть накопленной энергии в виде упругих волн, в свою очередь поглощаемых соседними, близкими по размерам блоками.

В процессе такой эволюции системы изменяются конфигурации составляющих ее блоков. Блоки смещаются относительно друг друга, происходит своеобразная их перегруппировка – формирование структуры, приспособленной для переработки поступающей энергии. Однако и после образования такой структуры энергия флуктуирует, поступая в систему извне и излучаясь ею во внешнее пространство. Возникает некое динамическое равновесие. Процесс обмена энергией никогда не заканчивается полностью, так как часть энергии системы все время диссипирует, поэтому не прекращается и колебание элементов системы. Важно отметить, что

практическое постоянство потока энергии, поступающей на Землю извне, является причиной того, что свойства самой системы Земли и составляющей ее горной породы практически не меняются при всех протекающих в них процессах.

Описанная выше модель системы отдельностей литосферы имеет прогностический смысл. Можно предположить, что процесс подготовки к сейсмическому событию сопровождается синхронизацией в движениях отдельностей – из-за возникновения мощного стока энергии упругих деформаций или эффектов резонанса. Процессы синхронизации должны наследоваться в записях различных геофизических параметров, полученных на пространственно удаленных станциях. Следовательно, их можно попытаться обнаружить, как одновременные корреляционные паттерны во временных рядах. Возникающие во времени связи носят нелинейный характер. Кроме того, измеренные отсчеты всегда отягощены шумами, а сами параметры разномасштабны. Поэтому метод, который будет использоваться для нахождения синхронных паттернов, не должен зависеть от масштабов измерения и быть устойчивым к присутствию значительной доли шума.

Один из таких методов уже был применен для сейсмических данных в работе [5]. Целью настоящей статьи является тестирование метода паттернов порядка на геофизических данных. Данный метод относится к направлению символической динамики.

История развития символической динамики берет начало в 1898 году, когда Жак Адамар (1865-1963 гг.) впервые дал символическое описание последовательностей в геодезических потоках на поверхностях отрицательной кривизны. Конкретнее, он определил конечное множество запрещенных пар символов (тех, которые не могут встречаться в данном ряде) и отметил, что возможными были последовательности, не содержащие запрещенных пар. Позднее эту работу продолжили Морзе и Гедландом (Morse and Gedland). Используя символическое описание, они исследовали периодические орбиты в классических системах и были первыми, кто использовал термин "символическая динамика". Спустя некоторое время, двое других исследователей Коллет и Экман (Collet P. and Eckmann J.P.) формализовали символическую динамику, показав, что полное описание поведения динамической системы может быть записано с использованием символического анализа. Одновременно с Адамаром, в 1899 году, Анри Пуанкаре в анализе классической задачи трёх тел предположил, что полную временную эволюцию такой системы можно было бы изобразить, используя тип стробоскопической выборки многомерной траектории фазового пространства. Точнее, Пуанкаре определил некоторую плоскость в фазовом пространстве, называемую теперь сечением Пуанкаре, таким образом, что временная эволюция системы порождает последовательность отображений точек пересечениям фазовой траектории с поверхностью Пуанкаре [9]. (см.Рис.2)

Результатом применения этой техники явилось понижение размерности задачи и преобразование непрерывного потока в фазовом пространстве в сглаженное дискретно-временное отображение между последовательными положениями на поверхности. В продолжение этой идеи, другие исследователи предположили, что в случае крупнозернистого разбиения сечений Пуанкаре было бы удобно пересечения, попадающие внутрь определенной подобласти (называемой клетка), изображать одинаковым символом. В этом случае, можно было бы вычислять относительные частоты для этих пересечений в различных областях [6].

**1. Отношение строго порядка и частотные гистограммы** В основе метода лежит простая идея отношения строгого порядка между отсчетами ряда. Бинарное отношение  $R$  на множестве  $X$  называется отношением строгого порядка, если имеют место рефлексивность: для любого  $x \in X(xRx)$ ; транзитивность: для любых  $x, y, z \in X(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$ ; антисимметричность:  $x, y \in X(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$ .

Пусть задан дискретный числовой ряд  $X$  длины  $n$  и последовательность  $s = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$  длины  $k$ , состоящая из отсчетов этого ряда. Рассмотрим в качестве примера отношение поряд-

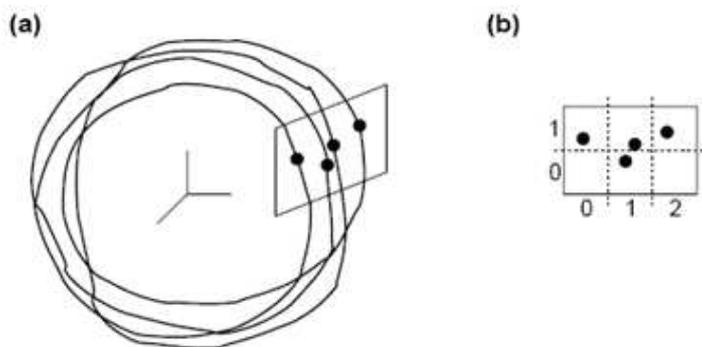


Рис. 2: Связь между поверхностью сечения Пуанкаре и траекторией фазового пространства (а) с соответствующим дискретизированным сегментом. Чёрными кружками изображены точки пересечения с сечением Пуанкаре. (Рисунок взят из работы [9])

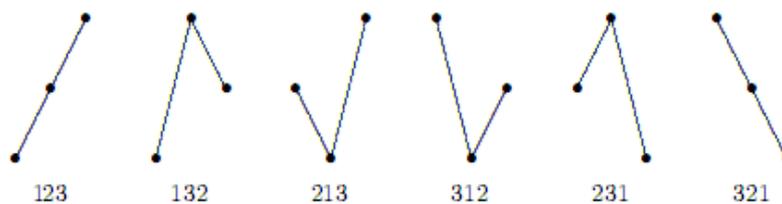


Рис. 3: Паттерны порядка длины 3. (Рисунок взят из работы [8])

ка длины  $k = 3$ . Значения ряда  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  образуют шесть паттернов порядка показанных на Рис.3. Если отсчеты ряда находятся в отношении  $x_i > x_{i+2} > x_{i+1}$ , то их последовательность  $s$  соответствует паттерну  $p = (312)$  он обозначен на Рис.3 как "312". Полученная таким образом последовательность сохраняет лексикографический порядок ряда.

В дальнейшем для обозначения паттерна  $p$  мы также будем использовать термин "подстановка". Если длина слова  $k$ , то всего может быть  $k!$  перестановок. Назовем мощностью алфавита  $m$  количество всех возможных символов в подстановке  $p$ . Следует заметить, что длина подстановки и мощность алфавита совпадают. Из статистических соображений длина ряда должна быть много больше количества всех возможных слов  $n \gg k!$  для того, чтобы гарантировать представительность выборки. Но даже при выполнении выше обозначенного условия в выборке из всего ряда  $X$  могут отсутствовать некоторые слова, они будут называться "запрещенными". Их отсутствие связано с важными структурно статистическими свойствами ряда [10]. Если в ряде встречаются отсчеты равные по значению, то в этом случае в подстановке  $p$  отсчеты нумеруются согласно порядку следования в исходном ряде  $X$ . После того как мы преобразовали весь исходный ряд  $X$  в слова, можно построить гистограмму встречаемости слов. Структура гистограммы наследует "грубые" в топологическом смысле свойства динамической системы: наличие или отсутствие возрастающих или убывающих трендов, запрещенных слов и т.д. Анализируя частоту встречаемости различных "слов" в текстах, полученных для двух временных рядов, можно попытаться выявить взаимодействие двух динамических систем, продуцирующих данные ряды.

**2. Транскрипторы** Пусть  $p_1$  и  $p_2$  – подстановки. Определим произведение двух подстановок [12]:

$$p_1 \times p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (0123)$  – тождественная подстановка. Операция умножения не коммутативна  $p_1 p_2 \neq p_2 p_1$  [11].

Множества всех подстановок и определенная над ними операция умножения образуют небелеву группу с единицей – тождественной подстановкой.

Снова рассмотрим две подстановки  $p_1$  и  $p_2$ . Тогда, всегда существует подстановка  $T$ , такая что  $T p_1 = p_2$ . Пусть  $p_1 = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  и  $T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Следовательно,  $T p_1 = p_2 = (j_{q_1}, j_{q_2}, \dots, j_{q_n})$ . Такая подстановка называется транскриптором.

Рассмотрим пример вычисления транскрипторов. Пусть имеется две подстановки  $p_1 = (1032)$  и  $p_2 = (0132)$ . Нетрудно заметить, что для того, чтобы перевести  $p_1$  в  $p_2$ , достаточно сделать одну перестановку. Вычислим транскриптор для этих перестановок, то есть найдём ту подстановку, на которую надо "умножить"  $p_1$ , чтобы получить  $p_2$ .

$$T \times p_1 = p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Сначала, в верхней строчке каждого члена мы записываем тождественную подстановку  $I = (0123)$ . Затем, во втором члене в нижней строчке мы записываем исходную подстановку  $p_1$ . Далее, в нижней строчке последнего члена мы записываем подстановку  $p_2$ , которую хотим получить из исходной. Нижняя строка в первом члене остаётся пустой. Это и есть транскриптор, который необходимо вычислить. "Умножение" происходит следующим образом: В нижней строчке последнего члена  $p_2$  на первом месте стоит число "0". Обратим внимание, что в нижней строке второго множителя "0" стоит под числом "1". Следовательно, в первом множителе в пустой строке под "1" появится "0". Аналогично, на втором месте в последней подстановке

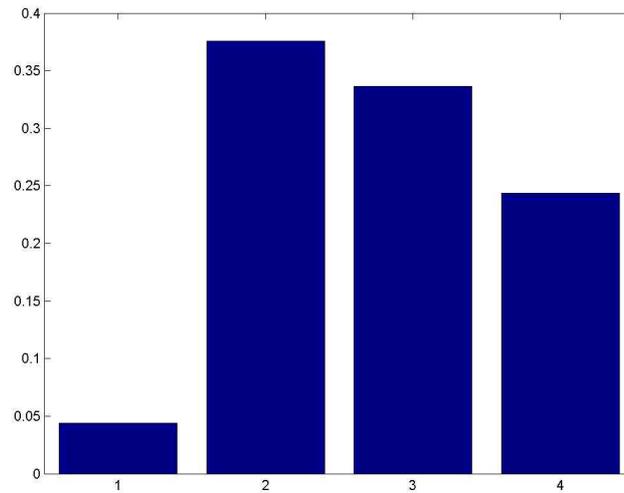


Рис. 4: Гистограмма транскрипторов для двух случайных рядов

стоит число "1". Во втором множителе "1" стоит под числом "0". Тогда, в первом члене под "0" появится "1" и т.д.

Таким образом, мы вычислили транскриптор  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Далее, необходимо вычислить порядок транскриптора. Для этого снова выполним операцию символического умножения, умножив  $T$  сам на себя.

$$T \times T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I = T^2. \tag{3}$$

Порядок транскриптора – это степень, в которую надо возвести транскриптор, чтобы получить тождественную подстановку, обозначим его  $d$ . В данном примере мы получили транскриптор второго порядка. Число  $d - 1$  называется расстоянием между "словами". В нашем случае, чтобы из комбинации  $p_1 = (1032)$  получить  $p_2 = (0132)$  достаточно сделать одну подстановку. Следовательно, чем ниже порядок транскриптора, тем меньше одно "слово" отличается от другого. Порядок транскриптора является хорошим показателем силы связи между рядами. Чем сильнее ряды связаны между собой, тем ниже будет преобладающий порядок транскриптора. Соответственно, при сравнении двух идентичных рядов мы получим первый порядок величины –  $d$ .

На Рис.4 представлена гистограмма транскрипторов для двух случайных рядов с равномерной функцией плотности распределения вероятности.  $k = 4$ . Из гистограммы видно, что даже для двух случайных рядов является статистически возможным совпадение некоторых слов.

### 3. Цепи Маркова

Цепь Маркова – последовательность событий с конечным или счетно-бесконечным числом исходов, обладающая тем свойством, что будущее зависит только от настоящего и не зависит от прошлого. Более строго определение выглядит следующим образом. Последовательность случайных событий  $\{A_i\}_{i=1...N}$  называется цепью Маркова, если  $P(A_{i+1}|A_i A_{i-1} A_{i-2} \dots) = P(A_{i+1}|A_i)$ . Множество  $\{A_i\}_{i=1...N}$  называется пространством состояний цепи, а значение  $i$  - но-

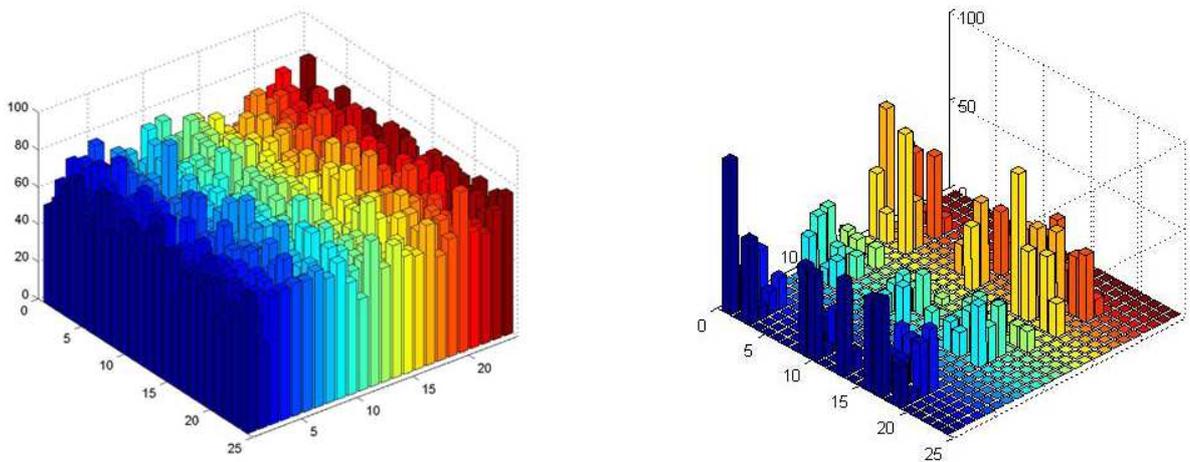


Рис. 5: Матрицы переходов. (слева) случайный ряд. (справа) логистическое отображение

мером шага.

Пусть число всех возможных состояний равно  $k$ , тогда однородная матрица переходных вероятностей будет иметь вид:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $p_{ij} = P(A_i|A_j)$ .

Пусть  $B$  – отображение ряда  $X$  на множество подстановок, для простоты объяснения, длины 4. В таком случае, существует всего 24 возможных слова, размерность матрицы перехода будет  $24 \times 24$ . Подстановки упорядочиваются в четверичной системе счисления. Первая строка и первый столбец будут соответствовать подстановке (0123), последняя строка и столбец будут соответствовать слову (3210). Пусть строки соответствуют уже встреченным в ряде подстановкам, тогда столбцы будут соответствовать последующим словам. А их пересечение – это частота встречаемости заданной пары слов следующих друг за другом [7].

На Рис.5 (слева) представлена матрица перехода слов длины 4 для случайного ряда с равномерной функцией плотности распределения вероятности. Каждый столбик – это количество переходов от одного слова к другому.

На Рис.5 (справа) представлена матрица перехода для логистического отображения вида:

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i), \quad (5)$$

где  $r = 3.9$ , а  $x_1 = 0.1$ . Из Рис.5 видно, что если система обладает детерминированной динамикой, то продуцируемый ею ряд имеет запрещенные или же маловероятные переходы.

#### 4. Данные

Экспериментальные данные были предоставлены ТОО Институтом Сейсмологии МОН РК. Для анализа были использованы ряды трех геофизических обсерваторий Тургень (в 60 км к западу от г.Алматы.), Курты (в 200 км к северо-западу от г.Алматы), Медео (в 40 км к юго-востоку от г.Алматы). Деформация измерялась на станциях Тургень-01, Курты-08 и Медео-31.

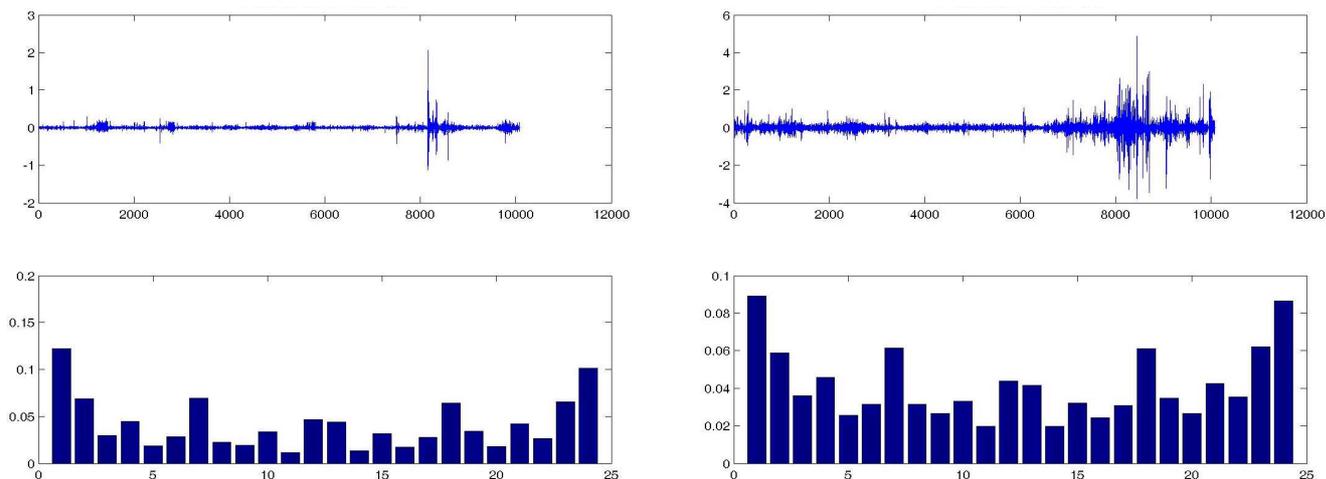


Рис. 6: Частотные гистограмма для  $k = 4$ : (слева) деформации (справа) геомагнитных данных. В верхней части рисунка изображены соответствующие отфильтрованные сигналы.

Геомагнитные данные были получены на станциях Тургень-18 и Курты-08. Значения деформации получены прямыми измерениями относительного смещения блоков литосферы в подземной шахте. Датчик представляет собой кварцевый стержень длиной 30 метров и диаметром 150 миллиметров с закрепленным и свободно покоящемся концом на тонкой игле. К свободному концу прикреплено зеркало, отражающее луч лазера на набор фотоэлементов.

Отсчеты геомагнитного поля получены с помощью протонного магнитометра. Его действие основано на изменении ориентации оси вращения вокруг направления магнитного поля (ядерной прецессии). Под влиянием искусственного магнитного поля ядра водорода, содержащегося в рабочем веществе датчика (спирт, ацетон, керосин), ориентированного примерно под прямым углом к земному магнитному полю, поляризуются. Затем поляризующее магнитное поле внезапно выключается. Ядра водорода начинают свободно прецессировать вокруг направления земного магнитного поля до тех пор, пока ядерные спины не достигнут нового равновесного состояния. Прецессия протонов индуцирует небольшую э.д.с. в катушке. Частота  $f$  этого сигнала такая же, как частота прецессии протонов и связана с величиной магнитного поля  $F$  соотношением  $2\pi f = \gamma F$ , где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение протона, известное с высокой точностью. Измерение частоты сигнала в катушке позволяет определить общую магнитную интенсивность.

Геомагнитные и деформационные ряды представлены с дискретом одна минута. Ряды нарезались на фрагменты по 10000 точек (т.е. 10000 минут), перед сейсмическими событиями выше 11 класса. Всего событий 28. Расстояние хотя бы от одной из обсерваторий до эпицентра землетрясения не более 100 км. Следует упомянуть, что в вариациях геомагнитного поля на 2% полезного сигнала Земли накладывается 98% ионосферных шумов. Благодаря этому, между данными различных станций очень большой коэффициент линейной корреляции. С другой стороны в деформационных и геомагнитных рядах есть вклад суточного тренда, что также ухудшает репрезентативность данных. Для удаления из рядов лишних связей мы использовали скользящее среднее с шириной окна 7, после чего искали нелинейную корреляцию непосредственно в остатках фильтрации.

### 5. Результаты

На Рис.6 представлены гистограммы встречаемости слов длины 4 в отфильтрованных де-

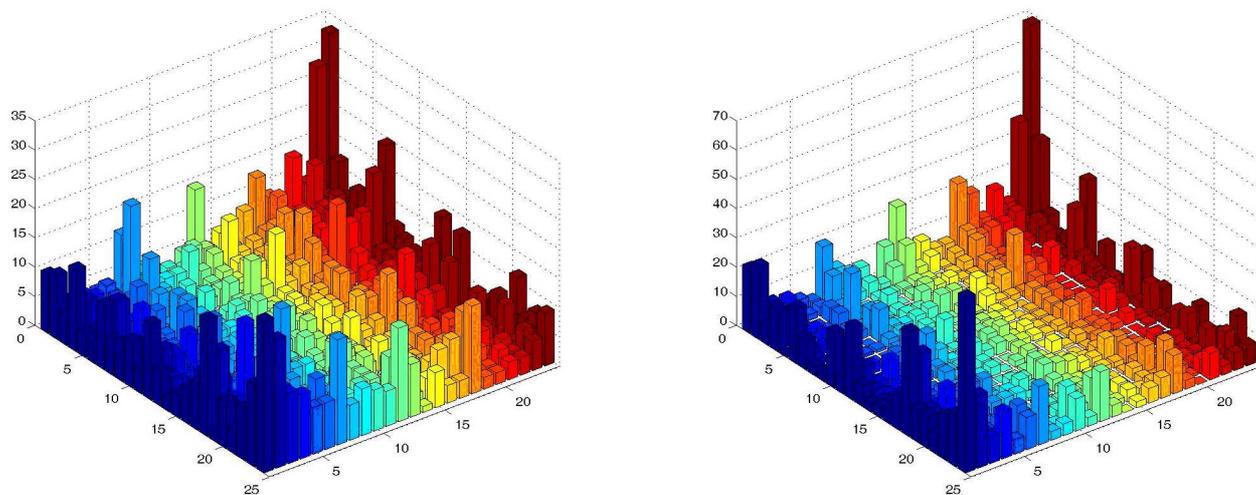


Рис. 7: Матрицы переходов отфильтрованных рядов: (слева) деформации (справа) геомагнитных данных

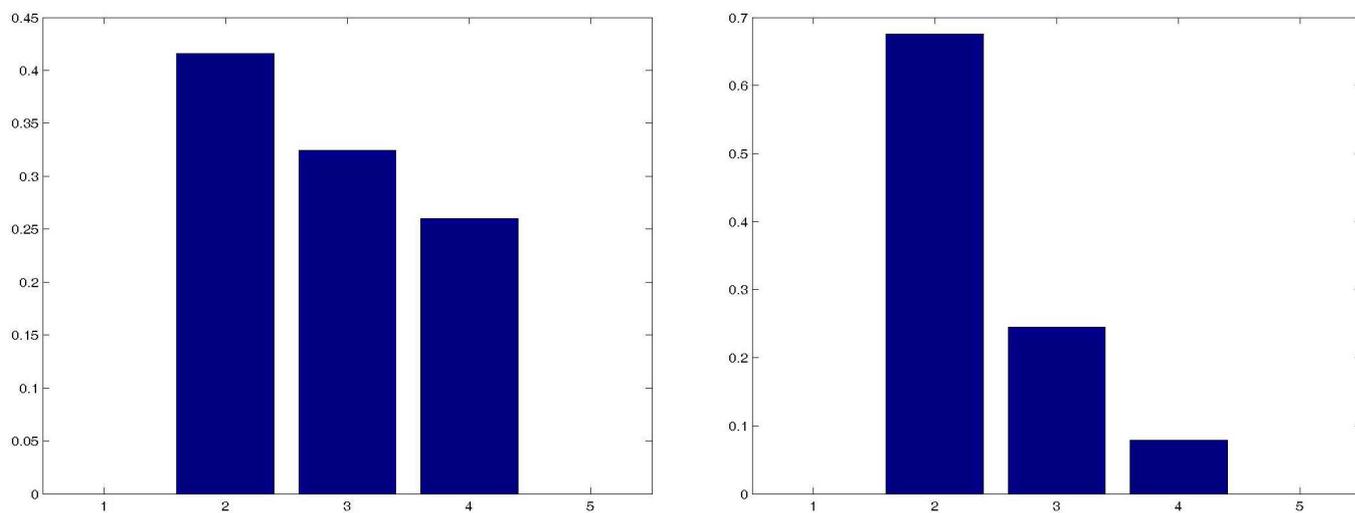


Рис. 8: Гистограмма транскрипторов: (слева) для двух деформационных рядов (Тургень-01 и Медео-31 );(справа) для двух геомагнитных рядов (Тургень-18 и Курты-08)

формационных и геомагнитных рядах. Видно, что существует некое подобие между гистограммами. На Рис.7 представлена матрица переходных вероятностей для отфильтрованных деформационных и геомагнитных рядов. Наличие маловероятных переходов говорит о слабом детерминизме системы. Между деформациями и геомагнитными данными различных станций после детрендирования скользящим средним линейная корреляция составляла приблизительно один процент. Структура гистограммы транскрипторов деформации на Рис.8(слева) похожа на случайный процесс. В то время как гистограммы транскрипторов геомагнитных данных на Рис.8(справа) отчетливо указывали на сохранившуюся связь во втором порядке. Обнаруженную связь можно объяснить влиянием общей ионосферной компонентой, модулирующей отсчеты двух разнесенных станций.

**6. Заключение.** Данная работа была посвящена проверке гипотезы синхронизации между различными геофизическими сигналами, измеряемыми на пространственно разнесенных станциях перед сейсмическими событиями. Эта задача является частью общей проблемы прогноза землетрясений. В качестве тестовой выборки рассматривались ряды деформационных и геомагнитных данных трех геофизических обсерваторий – Курты, Тургень, Медео. Для поиска зависимостей использовался метод символической динамики – паттерны порядка. Его основными преимуществами перед традиционными подходами являются толерантность к ошибкам измерений и возможность анализа гетерогенных данных. Компьютерные эксперименты на примере шести реальных рядов показали что синхронизация отсутствует. Однако статистическое подобие и слабый детерминизм отфильтрованных сигналов указывают на возможность наличия слабой нелинейной связи. В дальнейших исследованиях гипотезы синергетических процессов земной коры авторы предполагают исследовать сдвиг между временными рядами на эффект синхронизации. Фазовая скорость распространения упругих волн деформации в земной коре обратно пропорциональна периоду и возрастает пропорциональна характерному масштабу явления [13], т.е. для обнаружения коллективного эффекта нужно ввести лаг обратно пропорциональный характерной фазовой скорости упругих волн.

## Цитированная литература

1. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М., 1987.
2. Гамбурцев А. Г. Сейсмический мониторинг. М., 1992.
3. Кейлис-Борок В. И. // Природа. 1989. № 2. С. 10 – 18.
4. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М., 1989.
5. Zhizhin V. // Bulletin of the Seismological Society of America. 2006. 96. P. 2329 – 2347.
6. Боуэн Р. Методы символической динамики. М., 1979.
7. Froyland G. // Nonlinear dynamics and statistics. 2001. P. 283 – 322.
8. Bandt, C., Shiha, F. // Journal of Time Series Analysis. 2007. Vol. 28. P. 646 – 665.
9. Daw C. S., Finney C. E. A, Tracy E. R. // Rev. of Scientific Instruments. 2003. - Vol. 74. P. 916 – 930.
10. Zanin M. // Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science. 2008.
11. Monetti R., Bunk W., Jamitzky F. // Phys. rev. E, statistical, nonlinear, and soft matter physics. 2009. Vol. 79 46207
12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1972.

13. Кочарян Г. Г., Костюченко В. Н., Павлов Д. В. // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7, № 1. С. 5 – 22.

*Поступила в редакцию 27.02.2009 г.*

УДК 517.51

## ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА ПО СЛАБОМУ ПАРАМЕТРУ

А. У. БИМЕНДИНА, Е. С. СМАИЛОВ

РГКП Институт прикладной математики МОН РК  
 Караганда ул. Университетская, 28/а, bimend@mail.ru

В данной работе рассматриваются соотношения между наилучшими приближениями посредством линейных агрегатов системы Прайса в разных метриках в пространстве Лоренца  $L_{p\theta}(G)$  по слабому метрическому параметру.

**§1. Вспомогательные утверждения.** Впервые соотношения между тригонометрическими наилучшими приближениями в разных метриках установлены А. А. Конюшковым [1]. Впоследствии эти результаты усилены П. Л. Ульяновым [2]. Теоремы вложения в пространство Лоренца по сильному метрическому параметру получены С. Тазабековым и Е. Смаиловым [3],[4], Г. Акишевым [5],[6], М. Л. Гольдманом [7], а по слабому параметру были установлены Н. Т. Темиргалиевым [8]. В терминах наилучших приближений по линейным агрегатам системы Прайса по сильному метрическому параметру достаточное условие вложения в пространство Лоренца было установлено в работе [9].

Пусть  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$  – система Прайса на группе  $G = G(P)$  [10]. Для функции  $f \in L(G)$  ставим в соответствие ее ряд Фурье-Прайса  $f(x) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k(x)$ , где  $a_k = \int_G f(t) \varphi_k(t) dt$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Функция  $f(x)$  принадлежит пространству Лоренца  $L_{p\theta}(G)$ , если

$$\|f\|_{p\theta} = \left\{ \int_0^1 t^{\frac{\theta}{p}-1} [f^*(t)]^\theta dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty, \quad \text{когда } 1 \leq p < +\infty, 1 \leq \theta < +\infty$$

и

$$\|f\|_{p\theta} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < +\infty, \quad \text{когда } 1 \leq p < +\infty, \theta = +\infty,$$

где  $f^*(t)$  – невозрастающая перестановка функции  $|f(x)|$ ,  $x \in G$  (см.[?]).

Пусть  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$  многочлен Прайса. Наилучшее приближение функции  $f \in L_{p\theta}(G)$  полиномами Прайса порядка не выше  $n$  будем обозначать через

$$E_n(f)_{p\theta} = \inf\{\|f - T_l\|_{p\theta} : \{T_l(x)\}, l \leq n\}.$$

Keywords: *Lorenz's space, multiplicative Price system, best approximation*

2000 Mathematics Subject Classification: 42C10, 46E25

© А. У. Бимендина, Е. С. Смаилов, 2009.

**Теорема 1.** [12] Пусть числа  $1 < p < +\infty$ ,  $1 < \theta_2 < \theta_1 \leq +\infty$ . Тогда для многочленов Прайса  $T_n(x)$  справедливо неравенство:

$$\|T_n\|_{p\theta_2} \leq c_{p\theta_1\theta_2} \{\log_2(n+1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} \|T_n\|_{p\theta_1},$$

где константа  $c_{p\theta_1\theta_2} > 0$  не зависит от  $n \in \mathbb{N}$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2.** Пусть  $1 < q < +\infty$ ,  $1 < \theta_2 < \theta_1 \leq +\infty$ . Пусть  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$  последовательность чисел убывающих к нулю, таких что  $\varepsilon_{n+1} < \beta\varepsilon_n, \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \beta < 1$ , и последовательность неотрицательных функций  $u_n \in L_{qr}(G)$  такова, что  $\|u_n\|_{q\theta_1} \leq \varepsilon_n, n = 1, 2, \dots$ . Тогда для любого  $r : 1 \leq r < \theta_2$  имеет место:

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right\|_{q\theta_2} \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{qr}^{\theta_2-s} \varepsilon_n^s \right)^{\frac{1}{\theta_2}},$$

где  $s = \frac{\theta_1(\theta_2-r)}{\theta_1-r}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  почти для всех  $x \in G$  и  $s = \frac{\theta_1(\theta_2-r)}{\theta_1-r}, \alpha = \frac{s}{\theta_2}$ .

Ясно, что  $s < \theta_2$ .

Согласно лемме 1 [13] имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq 2 \sup_n \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right|^{1-\alpha} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|^\alpha.$$

Тогда, применяя неравенство Гельдера при  $\lambda = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{\theta_2}{\theta_2-s}, \lambda' = \frac{1}{\alpha} = \frac{\theta_2}{s}$ , получим, что

$$\begin{aligned} f^*(t) &\leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\tau) d\tau \leq 2 \sup_n \frac{1}{t} \sup_{\substack{E \subset [0,1] \\ |E|=t}} \int_E \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right|^{1-\alpha} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|^\alpha \leq \\ &\leq 2 \sup_n \frac{1}{t} \left\{ \sup_{\substack{E \subset [0,1] \\ |E|=t}} \int_E \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| dx \right\}^{\frac{\theta_2-s}{\theta_2}} \left\{ \sup_{\substack{E \subset [0,1] \\ |E|=t}} \int_E \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| dx \right\}^{\frac{s}{\theta_2}} = \\ &= 2 \sup_n \frac{1}{t} \left\{ \int_0^t \left( \sum_{k=1}^n u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\frac{\theta_2-s}{\theta_2}} \left\{ \int_0^t \left( \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\frac{s}{\theta_2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[f^*(t)]^{\theta_2} \leq 2^{\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=1}^n u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\theta_2-s} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^s.$$

Умножая обе части на  $\frac{\theta_2}{q} \cdot t^{\frac{\theta_2}{q}-1}$  и интегрируя, получим:

$$\frac{\theta_2}{q} \int_0^1 t^{\frac{\theta_2}{q}-1} [f^*(t)]^{\theta_2} dt \leq 2^{\theta_2} \frac{\theta_2}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{\frac{\theta_2}{q}-1} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=1}^n u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\theta_2-s} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^s dt = c_{\theta_2 q} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{\frac{(r-q)(\theta_2-s)}{qr}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=1}^n u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\theta_2-s} \times \\ & \quad \times t^{\frac{(\theta_1-q)(r-\theta_2+s)}{qr}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^s t^{-\frac{(r-q)(\theta_2-s)}{qr} - \frac{(\theta_1-q)(r-\theta_2+s)}{qr} + \frac{\theta_2}{q} - 1} dt = \\ & = c_{\theta_2 q} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^{\frac{(r-q)(\theta_2-s)}{qr}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=1}^n u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\theta_2-s} t^{\frac{(\theta_1-q)(r-\theta_2+s)}{qr}} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^s dt. \end{aligned}$$

Далее, применим неравенство Гельдера с показателями  $\nu = \frac{r}{\theta_2-s}$ ,  $\nu' = \frac{r}{r-\theta_2+s}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{q\theta_2}^{\theta_2} & \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \int_0^1 t^{\frac{r}{q}-1} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=1}^n u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^r dt \right]^{\frac{\theta_2-s}{r}} \times \\ & \quad \times \left[ \int_0^1 t^{\frac{\theta_1}{q}-1} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left( \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(\tau) \right)^* d\tau \right\}^{\theta_1} dt \right]^{\frac{\theta_2-r}{\theta_1-r}} \leq \\ & \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|_{qr}^{\theta_2-s} \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right\|_{q\theta_1}^s \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{qr} \right)^{\theta_2-s} \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_k\|_{q\theta_1} \right)^s \leq \\ & \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{qr} \right)^{\theta_2-s} \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k \right)^s \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{qr} \right)^{\theta_2-s} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_n \beta^k \right)^s \leq \\ & \leq (0 < \beta < 1) \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{qr} \right)^{\theta_2-s} \varepsilon_n^s \leq [\text{Лемма 2(см.[?])}] \leq c'_{qr\theta_1\theta_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{qr}^{\theta_2-s} \varepsilon_n^s. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right\|_{q\theta_2} \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{qr}^{\theta_2-s} \varepsilon_n^s \right\}^{\frac{1}{\theta_2}},$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает

**Следствие 1.** Пусть  $1 < q < +\infty, 1 < \theta_2 < \theta_1 \leq +\infty, \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$  – последовательность монотонно стремящихся к нулю положительных чисел, таких что  $\exists \beta \in (0, 1) : \varepsilon_{n+1} < \beta \varepsilon_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Последовательность неотрицательных функций  $u_n \in L_{qr}(G)$  такова, что:

- a)  $\|u_n\|_{q\theta_1} \leq \varepsilon_n, n = 1, 2, \dots;$
- b) для чисел  $r \in [1, \theta_1)$  справедливо неравенство:

$$\|u_n\|_{qr} \leq \{\log_2(n+1)\}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\theta_1}} \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, если почти для всех  $x \in G : f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ , то имеет место соотношение:

$$\|f\|_{q\theta_2} \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \{\log_2(n+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} \varepsilon_n^{\theta_2} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

**Доказательство.** На основании теоремы 1 при  $1 \leq r < \theta_1$  имеем:

$$\|u_n\|_{qr} \leq \{\log_2(n+1)\}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\theta_1}} \|u_n\|_{q\theta_1} \leq \{\log_2(n+1)\}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\theta_1}} \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, согласно теореме 2 при  $1 \leq r < \theta_2$ , следует, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{q\theta_2} &\leq c_{qr\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{qr}^{\theta_2-s} \varepsilon_n^s \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \leq c_{qr\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \{\log_2(n+1)\}^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{\theta_1})(\theta_2-s)} \varepsilon_n^{\theta_2-s} \varepsilon_n^s \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} = \\ &= c_{qr\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \{\log_2(n+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} \varepsilon_n^{\theta_2} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть  $f \in L_{q\theta_1}(G)$ , где  $1 < q < +\infty$ ,  $1 < \theta_1 < +\infty$  и  $\{l_n\}_{n=0}^{+\infty}$  – возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что  $\exists \alpha \in (0, 1)$ :

$$E_{l_{n+1}}(f)_{q\theta_1} \leq \alpha E_{l_n}(f)_{q\theta_1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Если при  $1 < \theta_2 < \theta_1 \leq +\infty$  ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_n}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1}$$

сходится, то  $f \in L_{q\theta_2}(G)$  и имеют место соотношения

$$\|f\|_{q\theta_2} \leq c_{q\theta_1\theta_2} \left\{ \|f\|_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_n}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right\},$$

а при  $l_n \leq s < l_{n+1}$

$$E_s(f)_{q\theta_2} \leq c'_{q\theta_1\theta_2} \left[ \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right].$$

**Доказательство.** Пусть  $S_{l_n}(x) = \sum_{k=0}^{l_n-1} a_k \varphi_k(x)$  – частичная сумма ряда Фурье - Прайса функции  $f$ :

$$f(x) \sim S_{l_0}(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (S_{l_{n+1}}(x) - S_{l_n}(x)),$$

при этом положим  $l_0 = 1$ .

Обозначим  $u_0(x) = |S_{l_0}(x)|$ ,  $u_n(x) = |S_{l_{n+1}}(x) - S_{l_n}(x)|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$|f(x)| \leq u_0(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Дважды применяя неравенство Гельдера, получим, что  $\|u_0\|_{q\theta_2} = c_{q\theta_2}|a_0| \leq c_{q\theta_1}\|f\|_{q\theta_1}$ .

Функцию  $u_n(x)$  оценим по норме  $\|\cdot\|_{q\theta_1}$  через наилучшее приближение функции  $f$ . Тогда

$$\|u_n\|_{q\theta_1} = \|S_{l_{n+1}} - S_{l_n}\|_{q\theta_1} \leq \|S_{l_{n+1}} - f\|_{q\theta_1} + \|S_{l_n} - f\|_{q\theta_1} \leq E_{l_{n+1}}(f)_{q\theta_1} + E_{l_n}(f)_{q\theta_1} \leq 2E_{l_n}(f)_{q\theta_1}. \quad (1)$$

Далее, для любого  $r : 1 \leq r < \theta_2 < \theta_1 \leq +\infty$ , с помощью неравенства (1) имеем:

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{qr} &= \|S_{l_{n+1}} - S_{l_n}\|_{qr} \leq (\text{теорема 1}) \leq c_{qr\theta_1} \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{r} - \frac{1}{\theta_1}} \|S_{l_{n+1}} - S_{l_n}\|_{q\theta_1} = \\ &\leq c_{qr\theta_1} \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{r} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_n}(f)_{q\theta_1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Тогда, в силу следствия 1 справедливо неравенство:

$$\|f\|_{q\theta_2} \leq \|u_0\|_{q\theta_2} + \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\|_{q\theta_2} \leq c_{q\theta_1\theta_2} \left\{ \|f\|_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_n}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть теперь  $l_n \leq s < l_{n+1}$ . С помощью следствия 1 находим:

$$\|f - S_{l_n}\|_{q\theta_2} \leq c_{q\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{k=n}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Отсюда, в силу теоремы 1, следует, что

$$\begin{aligned} E_s(f)_{q\theta_2} &\leq \|f - S_{l_{n+1}}\|_{q\theta_2} + \|S_{l_{n+1}} - S_s\|_{q\theta_2} \leq \\ &\leq c'_{q\theta_1\theta_2} \left\{ \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right\}. \end{aligned}$$

## §2 Достаточное условие вложения по слабому параметру

**Теорема 4.** Пусть  $1 < q < +\infty, 1 < \theta_1 < +\infty$  и  $f \in L_{q\theta_1}(G)$ . Если для  $\theta_2 : 1 < \theta_2 < \theta_1$  ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \{\log_2(n + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_n^{\theta_2}(f)_{q\theta_1}$$

сходится, то  $f \in L_{q\theta_2}(G)$  и имеют место неравенства

$$\|f\|_{q\theta_2} \leq c_{q\theta_1\theta_2} \left[ \|f\|_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \{\log_2(n + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_n^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right]$$

и

$$E_n(f)_{q\theta_2} \leq c_{\theta_1\theta_2} \left[ \{\log_2(n + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_n(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(k + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right], \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Пусть  $l_0 = 1; l_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid E_n(f)_{q\theta_1} \leq \frac{1}{2} E_1(f)_{q\theta_1}\}; l_2 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid E_n(f)_{q\theta_1} \leq \frac{1}{2} E_{l_1}(f)_{q\theta_1}\}; \dots l_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid E_n(f)_{q\theta_1} \leq \frac{1}{2} E_{l_{k-1}}(f)_{q\theta_1}\}.$

Последовательность  $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty}$  удовлетворяет следующим свойствам:

- 1)  $l_0 = 1 < l_1 < l_2 < \dots < l_k < \dots$  – возрастающая последовательность;
- 2)  $E_{l_k}(f)_{q\theta_1} \leq \frac{1}{2} E_{l_{k-1}}(f)_{q\theta_1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$
- 3)  $E_{l_{k-1}}(f)_{q\theta_1} > \frac{1}{2} E_{l_{k-1}}(f)_{q\theta_1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Пусть  $l_n \leq s < l_{n+1}, n \in \mathbb{Z}^+$ . Введем следующие обозначения:

$$A_s = \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=s+1}^{+\infty} \{\log_2(k+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}};$$

$$B_s = \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Пусть сначала  $s = l_{n+1} - 1$ . Тогда

$$A_{l_{n+1}-1} = \{\log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=l_{n+1}}^{+\infty} \{\log_2(k+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}; \quad (2)$$

$$B_{l_{n+1}-1} = \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}. \quad (3)$$

Из соотношения (2) следует, что

$$A_{l_{n+1}-1} > \{\log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad (4)$$

а

$$A_{l_{n+1}-1}^{\theta_2} \geq \sum_{k=l_{n+1}}^{+\infty} \{\log_2(k+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \geq \sum_{j=n+1}^{+\infty} E_{l_{j+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \sum_{k=l_j}^{l_{j+1}-1} \{\log_2(k+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}}.$$

Поскольку, в силу того, что  $\frac{1}{\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}(k+1)} \downarrow 0$ , при  $k \rightarrow +\infty$ , имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \sum_{k=l_j}^{l_{j+1}-1} \{\log_2(k+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} &\geq \sum_{k=l_j}^{l_{j+1}-1} \{\log_2(k+1)\}^{-\frac{\theta_2}{\theta_1}} \geq (l_j+1) \int_{l_j}^{l_{j+1}} \frac{\{\log_2(x+1)\}^{-\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{(x+1)} dx \geq \\ &= \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} (l_j+1) [\{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} - \{\log_2(l_j+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}}] \geq (\{l_j\}_{j=0}^{+\infty} \uparrow +\infty, j \rightarrow +\infty) \geq \\ &\geq \frac{2\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} [\{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} - \{\log_2(l_j+1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}}], \end{aligned} \quad (5)$$

то получим, что

$$\begin{aligned} A_{l_{n+1}-1}^{\theta_2} &\geq \frac{2\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} \sum_{j=n+1}^{+\infty} E_{l_{j+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \left\{ \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} - \{\log_2(l_j+1)\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} \right\} \geq \\ &\geq (E_{l_{j+1}-1}(f)_{q\theta_1} > \frac{1}{2} E_{l_j}(f)_{q\theta_1}) \geq \\ &\geq \frac{\theta_1}{2^{\theta_2-1}(\theta_1 - \theta_2)} \left\{ \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_j}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} - \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_j+1)\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_j}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\} \geq \\ &\geq (E_{l_j}(f)_{q\theta_1} \leq \frac{1}{2} E_{l_{j-1}}(f)_{q\theta_1}) \geq \frac{\theta_1}{2^{\theta_2-1}(\theta_1 - \theta_2)} \left\{ \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_j}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left\{ \log_2(l_{n+1} + 1) \right\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_{n+1}}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} - \frac{1}{2^{\theta_2}} \sum_{j=n+2}^{+\infty} \left\{ \log_2(l_j + 1) \right\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_{j-1}}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\} \geq \\
 & \geq \\
 & \frac{\theta_1}{2^{\theta_2-1}(\theta_1 - \theta_2)} \left\{ \frac{2^{\theta_2-1}}{2^{\theta_2}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left\{ \log_2(l_{j+1} + 1) \right\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_j}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} - \frac{1}{2^{\theta_2}} \left\{ \log_2(l_{n+1} + 1) \right\}^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \frac{(2^{\theta_2-1}\theta_1)}{2^{2\theta_2-1}(\theta_1 - \theta_2)} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left\{ \log_2(l_{j+1} + 1) \right\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_j}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \leq \\
 & A_{l_{n+1}-1}^{\theta_2} + \frac{2^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} \theta_1}{2^{2\theta_2-1}(\theta_1 - \theta_2)} \left\{ \log_2 l_{n+1} \right\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1}.
 \end{aligned}$$

Теперь с учетом (4) найдем:

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \left\{ \log_2(l_{j+1} + 1) \right\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_j}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \leq \left[ \frac{2^{2\theta_2-1}(\theta_1 - \theta_2)}{(2^{\theta_2} - 1)\theta_1} + \frac{2^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}}}{2^{\theta_2} - 1} \right] A_{l_{n+1}-1}^{\theta_2} = c_{\theta_1\theta_2} A_{l_{n+1}-1}^{\theta_2}. \quad (6)$$

Так как  $l_1 \geq 2$ , то в силу (4)

$$E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} \leq A_{l_{n+1}-1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (7)$$

Далее с помощью неравенства (6) получим, что

$$\begin{aligned}
 B_{l_{n+1}-1} & = \left\{ \log_2(l_{n+1} + 1) \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left\{ \log_2(l_{k+1} + 1) \right\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \leq \\
 & \leq \left\{ \log_2(l_{n+1} + 1) \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + c_{\theta_1\theta_2}^{\frac{1}{\theta_2}} A_{l_{n+1}-1} \leq \left\{ 1 + \log_2 l_{n+1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \\
 & \quad + c_{\theta_1\theta_2}^{\frac{1}{\theta_2}} A_{l_{n+1}-1} \leq \left[ 1 + \left\{ \log_2 l_{n+1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} \right] E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + c_{\theta_1\theta_2}^{\frac{1}{\theta_2}} A_{l_{n+1}-1} = \\
 & = \left[ E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \left\{ \log_2 l_{n+1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} \right] + c_{\theta_1\theta_2}^{\frac{1}{\theta_2}} A_{l_{n+1}-1} \leq [(4), (7)] \leq \left[ 2 + c_{\theta_1\theta_2}^{\frac{1}{\theta_2}} \right] A_{l_{n+1}-1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при  $s = l_{n+1} - 1$  имеет место соотношение:

$$B_s \leq c'_{\theta_1\theta_2} A_s, \quad (8)$$

где константа  $c'_{\theta_1\theta_2} > 0$ , не зависит от  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Пусть теперь  $l_n \leq s \leq l_{n+1} - 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Поскольку  $2(a + b)^{\frac{1}{q}} > a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}}$ , при  $a > 0, b > 0, 1 < q < +\infty$ , то

$$\begin{aligned}
 A_s & \geq \left\{ \log_2(s + 1) \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=s+1}^{l_{n+1}-1} \left\{ \log_2(k + 1) \right\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=l_{n+1}}^{+\infty} \left\{ \log_2(k + 1) \right\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} =: \\
 & =: \left\{ \log_2(s + 1) \right\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2; \quad (9)
 \end{aligned}$$

Произведя вычисления точно так же как и в (5), находим:

$$I_1 \geq \left\{ E_{l_{n+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \sum_{k=s+1}^{l_{n+1}-1} \{\log_2(k+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \geq \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} [\{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} - \{\log_2(s+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1}]^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

В силу равенства (2) получим, что

$$I_2 \geq A_{l_{n+1}-1} - \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1}.$$

Теперь с учетом (8) соотношение (9) можем продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} A_s &\geq \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \frac{1}{2} \{A_{l_{n+1}-1} - \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1}\} \geq \\ &\geq (s \leq l_{n+1} - 2 < l_{n+1} - 1, E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} \leq E_s(f)_{q\theta_1}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} B_{l_{n+1}-1} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \frac{1}{2c'_{\theta_1\theta_2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}. \end{aligned}$$

Так как из определения чисел  $A_s$  следует неравенство  $A_s > \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1}$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , то

$$\begin{aligned} A_s &\geq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} A_s + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \right] A_s &\geq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1-\frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}. \end{aligned}$$

Легко показать, что  $c'_{\theta_1\theta_2} = \left( \frac{2\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta_1\theta_2}} - 1 > 0$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 A_s &\geq c''_{\theta_1\theta_2} \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} + c'''_{\theta_1\theta_2} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \geq \\
 &\geq (E_{l_{n+1}-1}(f)_{q\theta_1} > \frac{1}{2} E_{l_n}(f)_{q\theta_1} > \frac{1}{2} E_s(f)_{q\theta_1}) \geq \\
 &\geq \min(c''_{\theta_1\theta_2}, c'''_{\theta_1\theta_2}) \left\{ \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right\} = \\
 &= c_{\theta_1\theta_2}^{IV} B_s.
 \end{aligned}$$

Таким образом, и при  $l_n \leq s < l_{n+1} - 2$  будет выполняться неравенство

$$B_s \leq c_{\theta_1\theta_2}^{IV} A_s, \tag{10}$$

где  $c_{\theta_1\theta_2}^{IV} > 0$  не зависит от  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Из соотношений (8) и (10) для  $s \in \mathbb{N} : l_n \leq s < l_{n+1}$  получим, что

$$B_s \leq \bar{c}_{\theta_1\theta_2} A_s, \tag{11}$$

где константа  $\bar{c}_{\theta_1\theta_2} > 0$  не зависит от  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Далее, поскольку по условию теоремы ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \{\log_2(n + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_n^{\theta_2}(f)_{q\theta_1}$  сходится, то на основании оценки (11) сходится и ряд  $\sum_{k=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1}$ . Поэтому согласно теореме 3 функция  $f \in L_{q\theta_2}(G)$ ,  $1 < q < +\infty$ ,  $1 < \theta_2 < \theta_1 \leq +\infty$ , и имеет место неравенство:

$$\|f\|_{q\theta_2} \leq c_{q\theta_1\theta_2} \left\{ \|f\|_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right\}.$$

Так как по определению  $B_s$  при  $s = 1, n = 1$ ,

$$B_1 = \{\log_2(l_2 + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_1(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=2}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}},$$

тогда, в силу (11) находим:

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{q\theta_2} &\leq \left\{ \|f\|_{q\theta_1} + \{\log_2(l_1 + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_1(f)_{q\theta_1} + \{\log_2(l_2 + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_{l_1}(f)_{q\theta_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \sum_{k=2}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right\} \leq (1 = l_0 < l_1) \leq \\
 &\leq [2\{\log_2(l_1 + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} \|f\|_{q\theta_1} + B_1] \leq b_{\theta_1\theta_2} \{\|f\|_{q\theta_1} + B_1\} \leq b'_{\theta_1\theta_2} \{\|f\|_{q\theta_1} + A_1\} = \\
 &= b''_{\theta_1\theta_2} \left[ \|f\|_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \{\log_2(k + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right].
 \end{aligned}$$

Теперь перейдем к оценке наилучших приближений функции  $f$ .

Пусть  $l_n \leq s < l_{n+1}$ . Тогда, с помощью теоремы 3 получим:

$$\begin{aligned}
E_s(f)_{q\theta_2} &\leq c_{\theta_1\theta_2} \left[ \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \right. \\
&+ \left. \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_{l_k}^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right] = B_s \leq c_{\theta_1\theta_2} A_s = \\
&= c_{\theta_1\theta_2} \left[ \{\log_2(s + 1)\}^{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}} E_s(f)_{q\theta_1} + \left\{ \sum_{k=s+1}^{+\infty} \{\log_2(k + 1)\}^{1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}} E_k^{\theta_2}(f)_{q\theta_1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \right],
\end{aligned}$$

тем самым теорема полностью доказана.

## Цитированная литература

1. **Конюшков А. А.** // Матем. сборник. 1958. №1. С. 53 – 84.
2. **Ульянов П. Л.** // Матем. сборник. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 104 – 131.
3. **Тазабеков С., Смаилов Е. С.** Тригонометрические ряды Фурье с квазимонотонными коэффициентами. Деп. в ВИНТИ АН СССР. 30.06.88. № 5255-В 88.
4. **Тазабеков С., Смаилов Е. С.** // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1989. № 5. С. 50 – 55.
5. **Акишев Г. А.** // Вестник АН КазССР. 1982. № 7. С. 72 – 75.
6. **Акишев Г. А.** // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора ф.-м. наук. 2009. С. 1 – 36.
7. **Гольдман М. Л.** // Доклад АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 72 – 75.
8. **Темиргалиев Н. Т.** // Изв. ВУЗ. матем. 1980. № 6. С. 83 – 85.
9. **Смаилов Е. С., Бимендина А. У.** // Вестник КарГУ. Сер. Математика. 2008. №2(50). С. 75 – 83.
10. **Голубов Б. И., Ефимов А. Б., Скворцов В. А.** Ряды и преобразования Уолша. М., 1987. С. 28 – 39.
11. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. М., 1974.
12. **Смаилов Е. С., Бимендина А. У.** // Вестник КарГУ. Сер. Математика. 2008. №4(52). С. 94 – 99.
13. **Коляда В. И.** // Матем. заметки. 1992. выпуск 3, Т. 51. С. 16 – 23.

*Поступила в редакцию 26.01.2009г.*

УДК 517.962

## ОБ ОБЛАСТИ СЖИМАЕМОСТИ НЕУСТОЙЧИВЫХ РДС И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

К. Б. БОПАЕВ, С. К. БОПАЕВА

Институт математики МОН РК  
050010 г.Алматы ул.Пушкина,125 v-gulmira@math.kz

Исследуются бифуркации типа "седловой точки" и показаны возникающие в результате столкновения (бифуркаций) устойчивой и неустойчивой фиксированных точек, в результате которого обе исчезают (уходят из области), т.е. переходят в хаос.

**Введение.** Слово "хаос" происходит от греческого " $\chi\alpha\omicron\varsigma$ ". Первоначально оно означало бесконечное пространство, существовавшее до появления всего остального. Позднее римляне интерпретировали хаос как изначальную сырую бесформенную массу, в которую создатель привнес порядок и гармонию. В современном понимании хаос означает состояние беспорядка и нерегулярность физических процессов, которое называется гидродинамической и плазменной турбулентностью.

Теория турбулентности, казалось бы, должна полностью основываться на классических макроскопических уравнениях: уравнениях Навье-Стокса, газодинамики и др., однако вывести основные характеристики турбулентного движения из макроскопических уравнений пока не представляет возможным и приходится прибегать к дополнительным соображениям.

До последнего времени в теории возникновения турбулентности безраздельно господствовала гипотеза Ландау, высказанная им в 1944 г. [1,2]. В 1948 г. аналогичные соображения были выдвинуты Хопфом [3].

Теория Ландау связывает возникновение турбулентности с неустойчивостью. Это, безусловно, верно, но то как она это делает, потребует существенных уточнений. С точки зрения новых воззрений теория Ландау не полна [2]. Она указывает лишь на один из возможных вариантов возникновения турбулентности и, по-видимому, далеко не самый важный. Современная теория бифуркаций предлагает много других путей [3-11]. Это новые, отличные от указываемых Ландау, пути хаотизации и стохатизации движения жидкости. По Ландау возникновение турбулентности происходит в результате последовательной серии потери устойчивости состоянием равновесия, возникшим периодическим движением, появившимся двояко периодическим движением и т.д., в результате чего движение становится многопериодическим:

$$V(t) = f(w_0t, w_1t, \dots, w_nt),$$

---

Keywords: *Bifurcation, saddle point*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© К. Б. Бопаяев, С. К. Бопаяева, 2009.

где  $w_0, w_1, \dots, w_n$  – частоты. А функция  $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  как функция переменных  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – периодическая по каждому из них с периодом  $2\pi$ . Рюэль и Такенс [10] обратили внимание на то, что путь, указанный Ландау, не общий, что общая возможность – это образование странного аттрактора [7]. Но как возникает странный аттрактор, они не исследовали. Высказывания Ю.И. Неймарка [12] о турбулентности – результат исследования им гомоклинических структур, открытых еще А. Пуанкаре [13]. Описание турбулентности на фоне теории хаоса, благодаря своей особой красоте и значимости, особенным образом выделяется один результат-каскад удвоения периода, открытый Лос-Аламоссским физиком Митчеллом Фейгенбаумом [6,7]. Один интересный аспект каскада удвоения периода или вилообразной бифуркации (Сценарий Фейгенбаума) состоит в том, что когда вы заметите его в ходе эксперимента, то не спутаете ни с чем другим. Кроме того, известно, что за каскадом существует хаос. Следовательно, наблюдение каскада Фейгенбаума в гидродинамике является особенно убедительным доказательством того, что моды должны уступать хаосу. В предлагаемой работе исследуются бифуркации типа "седловой точки" и показаны возникающие в результате столкновения (бифуркаций) устойчивой и неустойчивой фиксированных точек, в результате которого обе исчезают (уходят из области) т.е. переходят в хаос. Применение метода нормализации для выявления точки бифуркации используется впервые для РДС неустойчивых в смысле Ляпунова [14,15].

### 1. Преобразование линейных систем в случае неустойчивости.

**1. Невозможность приведения к специальному виду.** Рассмотрим линейную систему

$$x_{n+1} = Ax_n(x_n = x_n^1, \dots, x_n^m) \in R^m.$$

Без нарушения общности можно считать матрицу  $A$  диагональной и ограничиться уравнением для одной компоненты:

$$x_{n+1} = \lambda x_n x_n \in R^1, \quad |\lambda| < 1. \quad (1)$$

С помощью аналитических отображений в окрестности точки  $x = 0$  [4]:

$$x = y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^2 \equiv \varphi(y); \quad y = x + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^2 \equiv \varphi^{-1}(x), \quad (2)$$

преобразуем (1) к виду

$$y_{n+1} = \lambda y_n - a y_n^2. \quad (3)$$

Вычислим коэффициенты  $\alpha_k$  обратного преобразования  $\varphi^{-1}(x)$ :

$$\begin{aligned} y &= \sum_0^{\infty} y^x a_k + \alpha_2 (\sum_0^{\infty} y^x a_k)^2 + \alpha_3 (\sum_0^{\infty} y^x a_k)^3 + \dots \\ &= y + (a_2 + \alpha_2) y^2 + (a_3 + 2a_2 \alpha_2 + \alpha_3) y^3 + (a_4 + 3a_2 \alpha_3 + \alpha_2 (a_2^2 + 2a_3) + \alpha_4) y^4 + \dots; \\ \alpha_2 &= -a_2; \alpha_3 = 2a_2^2 - a_3; \alpha_4 \alpha = -a_4 - a_2 (a_2^2 + 2a_3) + 3a_2 (a_3 - 2a_2^2); \dots \end{aligned}$$

Из (3) находим  $a_2 \equiv a$ :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \lambda y_n - a \lambda (\lambda - 1) y_n^2 + (a_3 \lambda - 2a^2 \lambda^2 + 2\lambda^3 a^2 - \lambda^3 a_3) y_n^3 + \dots, \\ a_3 \lambda - 2a^2 \lambda^2 + 2\lambda^3 a^2 - \lambda^3 a_3 &= 0, \end{aligned}$$

т.е. если  $a_k \neq 0$ , то формально (1) можно привести к (3).

Если отображения (2),  $x = \varphi(y)$ ;  $y = \varphi^{-1}(x)$  невырождены в окрестности точки  $x = 0$ , то любой траектории уравнения (3) соответствует единственная траектория  $\{x_n\}$  уравнения (1) и обратно.

Рассмотрим траекторию  $\{y_n\} \in (3)$ ;  $y_0 = \frac{\lambda}{a}$  :

$$y_1 = y_0(\lambda - a y_0) = 0, \quad y_k = 0, \quad k \geq 1.$$

Тогда  $x_0 = \varphi(y_0) \neq 0, x_1 = \lambda\varphi(y_0) = \varphi(y_1) = \varphi(0) = 0$ , что невозможно.

Пусть  $\{y_n\} \in (3)$  такова, что  $\mu_0 \leq |y_n| \leq \mu_1 n$ . Тогда  $x_0 = \varphi(y_0) \neq 0, x_2 = \lambda\varphi(y_0), \dots, x_{n+1} = \lambda^n \varphi(y_0)$ , т.е. при  $n \rightarrow \infty$  имеем  $x_n \rightarrow \infty$ . Доказано.

**Теорема 1.** Для невырожденных преобразований (2) траектории  $\{y_n\} \in (3)$  из окрестности  $y = 0$  не могут отображаться в траектории  $\{x_n\} \in (1)$  в окрестности  $x = 0$ .

Таким образом, топология окрестности  $y = 0$  системы (3) не преобразуется в топологию системы (1) окрестности  $x = 0$ .

Окрестность  $y = 0$  системы (3) очень интересна:

$$|\lambda - ay_n| < 1 : \begin{cases} 0 \leq \lambda - ay_n < 1, \\ 0 \leq ay_n - \lambda < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{зоны устойчивости;}$$

$$|\lambda - ay_n| > 1 : \begin{cases} \lambda - ay_n > 1, \\ ay_n - \lambda > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{зоны неустойчивости.}$$

Особые точки системы (3):  $t_1 = \frac{\lambda-1}{a}, t_2 = \frac{\lambda}{a}, t_3 = \frac{\lambda+1}{a}$ . Как показано выше, если траектория  $\{y_n\} \in (3)$  попадает при некотором  $n$  в нейтральную особую точку  $t_2 = \frac{\lambda}{a}$  т.е.  $t_n = \frac{\lambda}{a}$ , то эта траектория отправляется в точку  $y_n = 0 : \{y_n = \frac{\lambda}{a}, y_{n+k} = 0, k \geq 1\}$ . В системе (1) таких траекторий нет.

Рассмотрим более общий случай: пусть (1) преобразуется в

$$y_{n+1} = (\lambda - ay_n^{2p})y_n; z_{n+1} = (\lambda - az_n^{2p})z_n; |y_n|^{2p} = z_n. \tag{4}$$

Пусть преобразование вида (2),  $x = \varphi(z)$  преобразует окрестность  $z = 0$  в окрестность  $x = 0$  взаимнооднозначно. Тогда, в частности, траектория  $\{z_n \in (4)\}; z_0 = \frac{\lambda}{a}; z_k = 0, k \geq 1$ , перейдет в траекторию  $x_0 = \varphi(\frac{\lambda}{a}) \neq 0, x_1 = \lambda\varphi(\frac{\lambda}{a}) = \varphi(y_1) = \varphi(0) = 0$ , что невозможно. Аналогично и с траекториями  $\mu_0 \leq z_n \leq \mu_1 \forall n$  имеем  $x_0 = \varphi(z_0) \neq 0, x_{n+1} = \lambda_n \varphi(z_0), n > 1$ , откуда  $x_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , поскольку  $\lambda > 1$ . И в этом случае справедлива теорема 1.

Таким образом, в окрестности точки  $x = 0$  система (1) не может быть приведена к виду (3) или (4) с помощью невырожденных преобразований (2).

Итак, получено следующее противоречие: с одной стороны формально (1) можно привести к (3) (в общем случае к (4)) преобразованием (2), а с другой стороны согласно утверждению (1) это невозможно.

**2. Причины противоречия.** Поскольку речь идет о преобразовании окрестности точки  $x = 0$  в окрестность  $y = 0$  (в общем случае  $z = 0$ ), то достаточно рассмотреть преобразования

$$x = y + ay^2 \equiv \varphi(y); y = \frac{1}{2a}(\sqrt{1+4ax} - 1) \equiv \varphi^{-1}(x); |ax| \leq 1, \tag{5}$$

откуда  $y = x - ax^2 + 2a^3x^3 + \alpha_4 a^3 x^4 + \dots \equiv \varphi^{-1}(x)$ .

При этом (1) приводится к виду

$$y_{n+1} \equiv \gamma_1 y_n + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k (a\lambda)^{k-1} y_n^k; \gamma_1 = \lambda - \lambda(\lambda - 1)ay_n. \tag{6}$$

Чтобы отображение (6) было сжимающим в окрестности  $y = 0$ , т.е. при

$$y_{n+1} \equiv \gamma_1 y_n + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k (a\lambda)^{k-1} y_n^k; \gamma_1 = \lambda - \lambda(\lambda - 1)ay_n,$$

должны выполняться неравенства:

$$\omega : ay_n > 0, |\gamma_1| = \lambda|1 - (\lambda - 1)ay_n| < 1. \tag{7}$$

При этом в силу  $|y_n| < 1$  члены  $y = 0$  в (6) должны быть малыми по сравнению с  $\{\gamma_1 y^n\}$ . С другой стороны в силу (7), имеем

$$a) 0 \leq \lambda - \lambda(\lambda - 1)|ay_n| < 1;$$

$$b) 0 \leq \lambda - \lambda(\lambda - 1)|ay_n| - \lambda < 1,$$

откуда находим:

$$a) \{\gamma_1 y_n\};$$

$$b) \lambda |ay_n| \geq \frac{\lambda}{\lambda - 1} > 1, \text{ т.е. } (\lambda |ay_n|)^k > 1, \forall k \geq 3.$$

Но тогда в (6):  $|\gamma_k|(|\lambda ay_n|)^{k-1}|y_n| > |\gamma_k||y_n|$ , т.е. все члены в разложении (6) сравнимы с первым членом  $(\gamma_1 y_n)$ .

**3. Непосредственное исследование отображения (5).** Исходя из (5) система (1) преобразуется к виду

$$y_{n+1} = \frac{1}{2a}(\sqrt{1 + \Delta_n} - 1), \Delta_n = 4\lambda[ay_n + a^2 y_n^2]. \quad (8)$$

Выясним, когда отображение (8) является сжимающим в окрестности  $y = 0$ , т.е. выполняется неравенство

$$|y_{n+1}| = \frac{1}{2|a|}|\sqrt{1 + \Delta_n} - 1| < \gamma|y_n|, y \in \omega, \forall n \gg 1. \quad (9)$$

Рассмотрим все возможные варианты: (i)  $ay_n > 0$ , тогда  $\Delta_n \geq 0$ . Уточним получение оценки в (i):

$$|y_{n+1}| = \frac{2\lambda|y_n|(1 + |ay_n|)}{1 + \sqrt{1 + \Delta_n}} < \gamma|y_n|, \gamma < 1,$$

откуда находим:

$$2\lambda(1 + z) < \gamma(1 + \sqrt{1 + \Delta_n}), \Delta_n = 4\lambda(z + z^2), z = |ay_n|. \quad (*)$$

Положим  $\alpha = \frac{2\lambda}{\gamma} - 1 = \frac{2\lambda - \gamma}{\gamma} > \frac{2\lambda - \lambda}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma} > 1, a > 1$ . Неравенство (\*) принимает вид  $(\alpha + 2\lambda z) < 1 + 4\lambda(z + z^2), (\alpha^2 - 1) + 4\lambda z(\alpha - 1) + 4\lambda z^2(\lambda - 1) < 0$ , что невозможно, ибо

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\gamma} - 1 = \frac{2\lambda - \gamma}{\gamma} > \frac{2\lambda - \lambda}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma} > 1, a > 1,$$

т.е.

$$|y_{n+1}| = \frac{1}{2|a|} \frac{|\Delta_n|}{1 + \sqrt{1 + \Delta_n}} < \lambda(|y_n| + |a|y_n^2) < \gamma|y_n|, \gamma < 1,$$

невозможно, так как  $\lambda > 1$ .

$$(ii) ay_n < 0, \Delta_n > 0.$$

Тогда  $ay_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + |\Delta_n|} - 1) > 0, \Delta_n > 0$ , что в силу (i) невозможно.

$$(iii) ay_n < 0, \Delta_n > 0,$$

(но обязательно  $1 + \Delta_n \geq 0$ ). Тогда

$$|y_{n+1}| = \frac{1}{2|a|}|\sqrt{1 + |\Delta_n|} - 1| = \frac{|\Delta_n|}{2|a|(1 + \sqrt{1 + |\Delta_n|})} < \gamma|y_n|,$$

откуда имеем (при  $y_n \neq 0$ ):

$$\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} \equiv \frac{2\lambda(1 - |ay_n|)}{1 + \sqrt{1 - |\Delta_n|}} < \gamma < 1,$$

т.е.

$$\lambda(1 - |ay_n|) \leq \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \gamma < 1.$$

Таким образом  $|y_n| \geq \alpha_0 = \frac{1}{|a|}(1 - \frac{\gamma}{\lambda}) > 0 \forall n \gg 1$ , что противоречит сжимаемости отображения на множество (8) условию (9), т.е. справедлива

**Теорема 2.** *Отображение (8) не является сжимающим в окрестности  $y = 0$ .*

## II. Аналитические РДС и аналитические гомеоморфизмы.

### 1. Изоморфизмы РДС. Рассмотрим РДС в $R^1$ :

$$x_{n+1} = \lambda z_n + X(x_n); X(x_n) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k, \quad (1)$$

где функция  $X(x_n)$  аналитична в окрестности  $x = 0$ . Применим к (1) аналитический гомеоморфизм  $x = \varphi(y)$  окрестности точки  $y = 0$  [15]:

$$x = \varphi(y) \equiv y + \Phi(y); \Phi = \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k, \quad (2)$$

$$y = \varphi^{-1}(x) \equiv x + \Psi(x); \Psi(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k,$$

где  $\Phi(y)$  и  $\Psi(x)$  аналитичны соответственно в окрестностях  $y = 0$  и  $x = 0$  и коэффициенты  $a_k$  разложения  $\Psi(x)$  однозначно определяются через  $a_k$  в  $\Phi(y)$ . В новых переменных система (1) примет вид:

$$y_{n+1} = \lambda y_n + \chi(y_n); \chi(y) = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k y^k. \quad (3)$$

Здесь  $\chi(y)$  аналитична в окрестности  $y = 0$  и ее коэффициенты  $\beta_k$  однозначно определяются через  $b_k$  в (1) и  $a_k$  в (2).

Системы (1) и (3) будем называть изоморфными относительно аналитического гомеоморфизма (2) или просто изоморфными.

**2.  $\omega$  – сжимающие РДС.** Систему (1) назовем  $\omega$  – сжимающей, если существует неизвестное множество  $\omega \subset M : |x| < \varepsilon$ , на котором (1) является сжимающим многообразием:

$$|x_{n+1}| \leq \gamma |x_n|, 0 < \gamma < 1; x_n \in \omega \forall n \gg 1. \quad (4)$$

Очевидно, при  $|\lambda| < 1$  (устойчивый случай) система (1) является сжимающей в окрестности  $M : |x| < \varepsilon$ , т.е.  $\omega = M = \{x | |x| < \varepsilon\}$ .

Выделим следующий нетривиальный класс неустойчивых РДС ( $|\lambda| > 1$ ):

$$x_{n+1} = (\lambda - ax_n^q)x_n + X(x_n); X = \sum_{k=0}^{q+2} b_k x_n^k, q \geq 1. \quad (5)$$

В окрестности  $M : |x| < \varepsilon$  введем множество:

$$\omega = \{x / |\lambda - ax^q| < 1, |x| < \varepsilon\}. \quad (6)$$

Очевидно, что в неустойчивом случае ( $|\lambda| > 1$ ) множество  $\omega$  не содержат точки  $x = 0$ , а система (5) является  $\omega$  – сжимающей, если  $\omega \neq \emptyset$ .

Пусть для определенности  $\lambda > 0$ , тогда  $|\lambda - ax^q| < 1$ :

$$a) 0 \leq \lambda - ax^q < 1;$$

$$0 \leq ax^q - \lambda < 1.$$

Положим  $p \equiv (\frac{\lambda}{|a|})^{\frac{1}{q}}$ ,  $\underline{p} \equiv (\frac{\lambda-1}{|a|})^{\frac{1}{q}}$ ,  $\bar{p} \equiv (\frac{\lambda+1}{|a|})^{\frac{1}{q}}$ . Если выполнено условие

$$p \equiv (\frac{\lambda}{|a|})^{\frac{1}{q}} < \varepsilon, \quad (7)$$

то

$$\omega = \underline{\omega} = \{x/0 < \underline{p} = (\frac{\lambda-1}{|a|})^{\frac{1}{q}} \leq |x| \leq p \equiv (\frac{\lambda}{|a|})^{\frac{1}{q}} \equiv \bar{p} < \varepsilon\}, \text{ где } \underline{\omega} \neq \emptyset.$$

Если выполняется более сильное условие

$$\bar{p} \equiv (\frac{\lambda+1}{|a|})^{\frac{1}{q}} < \varepsilon, \quad (8)$$

то  $\omega = \underline{\omega}U\bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega} = \{x/p \leq |x| \leq \bar{p} < \varepsilon\} \neq \emptyset$ . Таким образом при выполнении одного из условий (7) или (8) РДС (5) является  $\omega$  сжимающей.

В I доказано, что (5) не является изоморфной линейной системе (1) в  $(X(x) \equiv 0)$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Если РДС (5)  $\omega$  сжимающая, то она изоморфна системе*

$$y_{n+1} = (\lambda - ay_n^p)y_n, \forall p \geq 1. \quad (9)$$

Рассмотрим общий случай системы (1) при  $x_n \in R^m$ ,  $m \geq 1$ . Доказательство проведем в два этапа.

I. Докажем сначала, что (5) может быть приведено к (9). Для любого  $q$  – фиксированного (при этом  $b \equiv a$ ) последовательным применением преобразований:

$$x = y + \gamma_i y^{q+i} \equiv \varphi_i(y), i \geq 2. \quad (10)$$

Начнем со случая  $i = 2$  и вычислим обратное преобразование:

$$\begin{aligned} y \equiv \varphi_2^{-1}(x) &= x + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = (y + \gamma_2 y^{q+2}) + \alpha_2 (y + \gamma_2 y^{q+2}) + \dots = \\ &= y + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_{q+1} y^{q+1} + (\gamma_2 + \alpha_{q+2}) y^{q+2} + \dots, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\alpha_k = 0, k = \overline{2, q+1}; \quad \alpha_{q+2} = -\gamma_2.$$

Подставляя преобразования  $\varphi_2(y)$  и  $\varphi_2^{-1}(x)$  в (5), получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{n+1}^k = \lambda x_n - ax_n^{q+2} + X_*(x_n)^3 - \gamma_2 (\lambda x_n - ax_n^{q+1} + X(x_n))^{q+2} = \\ &= \lambda x_n - ax_n^{q+1} + (b_0 - \lambda^{q+2} \gamma_2) x_n^{q+2} + x_n^{q+3} X^*(x_n), \end{aligned}$$

где  $X^*(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^* x_n^k$ ,  $X_*(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_n^k$ . Итак

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \lambda(y_n + \gamma_2 y_n^{q+2}) - a(y_n + \gamma_2 y_n^{q+2})^{q+1} + (b_0 - \lambda^{q+2} \gamma_2)(y_n + \gamma_2 y_n^{q+2})^{q+2} + \\ &+ y_n^{q+3} Y(y_n) = \lambda y_n - ay_n^{q+1} + (b_0 + \gamma_2(\lambda - \lambda^{q+2})) y_n^{q+2} + y_n^{q+3} Y(y_n). \end{aligned}$$

Полагая  $\gamma_2 = -(\lambda - \lambda^{q+2})^{-1} b_0$ , приходим к РДС вида (5):

$$y_{n+1} = (\lambda - ay_n^q)y_n + y_n^{q+3} Y(y_n); \quad Y = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k y_n^k.$$

Применяя к полученной РДС преобразование (10) при  $i = 3$   $y = z + \gamma_3 z^{q+3} \equiv \varphi_3(z)$ , получим аналогично  $z_{n+1} = (\lambda - az_n^q)z_n + z_n^{q+4}Z(z_n)$  и т.д. Как обычно методом Ньютона доказываются сходимость этого бесконечного процесса "уничтожения" членов разложения  $X(x_n)$  в (5). Отметим, что в  $Y(y_n)$  не входят растущие степени "большого" параметра  $|a| \gg 1$ .

II. Покажем, что система:

$$x_{n+1} = (\lambda - ax_n^q)x_n; \omega(x) \neq \emptyset, \omega(x) \neq \emptyset, \omega = \{x | \lambda - ax^q < 1, |x| < \varepsilon\} \tag{11}$$

приводится к следующей:

$$y_{n+1} = (\lambda - by_n^q)y_n + y_n^{q+3}Y(y_n); \omega(y) \neq \emptyset, \tag{12}$$

при помощи преобразования  $x = y + \gamma_1 y^{q+1} + \gamma_2 y^{q+2} \equiv \varphi(y)$ . Отметим, что для существования  $\varphi^{-1}(x)$  окрестность точки  $y = 0$  должна быть настолько малой, чтобы  $|\gamma_1 y^{q+1} + \gamma_2 y^{q+2}| \leq |y|\mu$ . Рассмотрим обратное преобразование  $y = x + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k x^k \equiv \varphi^{-1}(x)$ . Как и ранее убеждаемся, что  $\tilde{\alpha}_k = 0, k = \overline{2, q}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(x) = y = x + \alpha_1 x^{q+1} + \alpha_2 x^{q+2} + \alpha_3 x^{q+3} + \dots = (y + \gamma_1 y^{q+1} + \gamma_2 y^{q+2}) + \\ + \alpha_1 (\varphi)^{q+1} + \alpha_2 (\varphi)^{q+2} + \alpha_3 (\varphi)^{q+3} + \dots = y + (\gamma_1 + \alpha_1) y^{q+1} + (\gamma_2 + \alpha_2) y^{q+2} + \dots \end{aligned}$$

Откуда находим  $\alpha_k = -\gamma_k, k = 1, 2$ , и тем самым  $y = x + \gamma_1 x^{q+1} + \gamma_2 x^{q+2} + \dots = \varphi^{-1}(x)$ . Подстановкой  $\varphi(y)$  и  $\varphi^{-1}(x)$  в (11) получим:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = (\lambda - ax_n^q)x_n - \gamma_1 (\lambda - ax_n^q)^{q+1} x_n^{q+1} - \gamma_2 (\lambda - ax_n^q)^{q+2} x_n^{q+2} + \dots = \\ = \lambda x_n - (a + \gamma_1 \lambda^{q+1}) x_n^{q+1} - \lambda^{q+2} \gamma_2 x_n^{q+2} + \dots = \lambda (y_n + \gamma_1 y_n^{q+1} + \gamma_2 y_n^{q+2}) - \\ - (a + \gamma_1 \lambda^{q+1}) (\varphi(y_n))^{q+1} - \gamma_2 \lambda^{q+2} (\varphi(y_n))^{q+2} + \dots = \lambda y_n + ((\lambda - X^{q+1}) \gamma_1 - a) y_n^{q+1} + \\ + (\lambda - X^{q+2}) \gamma_2 y_n^{q+2} + \dots \end{aligned}$$

Полагая  $\gamma_1 = (\lambda - \lambda^{q+1})^{-1} a$  и  $(\lambda - \lambda^{q+2}) \gamma_2 \equiv -b$ , получим (12) с произвольным  $b$  (вместе с произвольным  $\gamma_2$ ), что и позволяет получить:

$$\omega(y) \neq \emptyset,$$

$$\omega = \{y | |\lambda - by^{q+1}| < 1, |y| < \delta\}.$$

Отметим, что в силу  $\omega$  - сжимаемости рассматриваемых РДС (условия (7), (8)) имеем  $|\gamma_1| \gg 1$ . Аналогично условия  $\omega$  - сжимаемости (12) приводят к соотношению  $|\gamma_2| \gg 1$ . Поэтому при доказательстве сходимости разложений нужно выделить растущие степени величин  $p = |\lambda - ax_n^q| < 1$  и  $\mu = |\lambda - ay_n^{q+1}| < 1$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Можно рассматривать полиномиальные РДС:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{p-1} a_k x_n^k + x_n^p X_p(x_n), \tag{13}$$

где непрерывная в окрестности точки  $x = 0$  функция  $X_p(x)$  равномерно ограничена:

$$|X_p(x)| \leq M, |x| < \varepsilon.$$

Система (13) превращается в аналитическую, если  $X_p(x)$  аналитична в окрестности  $x = 0$ , т.е. ряд  $X_p(x) = \sum_{k=0}^x b_k x^k$  сходится при  $|x| < \varepsilon$ . Аналогично можно рассматривать полиномиальные гомеоморфизмы  $x = \varphi(y)$  окрестности  $y = 0$  на окрестность  $x = 0$ :

$$x = y + \sum_{k=2}^{p-1} \gamma_k y_k + \Phi_p(y) \equiv \varphi(y); \quad y = x + \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k x^k + \chi_p(x) \equiv \varphi^{-1}(x),$$

где функции  $\Phi_p(y)$  и  $\chi_p(x)$  непрерывны, т.е. равномерно ограничены соответственно в окрестностях  $y = 0$  и  $x = 0$ .

При этом исчезает необходимость доказательства сходимости рядов в окрестности точек  $y = 0$  и  $x = 0$ .

### Цитированная литература

1. Ландау Л. Д. // ДАН СССР. 1999. Т.7. №44.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., 1986.
3. Норф Е. // Pure Appl. Math. 1948. V.1. P. 303 – 322.
4. Арнольд В. И. // УМН. 1963. Т.18. С. 5 – 13.
5. Арнольд В. И., Авоц А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск, 1999.
6. Feigenbaum M. J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. J.Stat. Phys.19,25. 1978.
7. Feigenbaum M. J. The Universal Properties of Nonlinear Transformations. J. Stat. Phys.21. 1974. P.669.
8. Lorenz E.N. // Lect.Nots math. 1979. Vol.755. P. 53 – 75.
9. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, Physica 10.1980. 219.
10. Ruelle O., Takens F. On the Nature of Turbulence, Commun. Math. Phys. 20.1971.167p.
11. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984.
12. Неймарк Ю. И. // Тр.5. Летней мат.школы. Киев. АН УССР. 1968. С. 400 – 433.
13. Пуанкаре А. Избранные Труды. М., Т.II. 1972.
14. Бопаев К. Б. Устойчивость РДС в критических и близко к критическим случаях. ДСС. Вып.114. Новосибирск. 1999.
15. Бопаев К. Б. Нормализация систем нелинейных разностных уравнений. гр.№21 КазГУ и НГУ. Алматы-Новосибирск. 1995.

*Поступила в редакцию 22.08.2008г.*

УДК 517.5

## SMOOTHING OF SOURCEWISE MULTIVARIATE FUNCTIONS

A. A. ZHENSYKBAEV

Institute of Mathematics  
050010 Almaty Pushkin str., 125 azh@math.kz

The smoothing problem of information operator on a set of convolution type multivariate functions is considered. In particular, the methods of linear and nonlinear smoothing of scattered data are given.

### 1. Introduction

Remind the optimal recovery problem. Let us given a set  $M$ , metric space  $Y$ , normed spaces  $Z$ , an operator  $U : M \rightarrow Z$  and a multivalued mapping  $\mathcal{I} : M \rightarrow Y$ . Any one-valued map  $S : \mathcal{I}(M) \rightarrow Z$  is called the recovery method of the operator  $U$  on the set  $M$  by the information  $\mathcal{I}$ . The error of recovery is defined as

$$R(M, U, \mathcal{I}, S) = \sup(R(x, U, \mathcal{I}, S) \mid x \in M),$$

where

$$R(x, U, \mathcal{I}, S) = \sup(\|U(x) - S(y)\| \mid y \in \mathcal{I}(x)).$$

The problem of optimal recovery of the operator  $U$  on the set  $M$  by the family  $\{S\}$  of methods  $S$  using the information  $\mathcal{I}$  is that we should find the quantity

$$E(M, U, \mathcal{I}, \{S\}) = \inf(R(M, U, \mathcal{I}, S) \mid S \in \{S\})$$

and an operator  $S_E \in \{S\}$ , for which

$$R(M, U, \mathcal{I}, S_E) = E(M, U, \mathcal{I}, \{S\}).$$

This problem is connected with the best approximation of multivalued mapping by one-valued maps. Let  $\mathcal{F} : G \rightarrow Z$  be a given multivalued mapping defined on same set  $G$  and  $\{S\}$  – a family of one-valued maps  $S : G \rightarrow Z$ . The error of approximation is

$$\mathcal{R}(G, \mathcal{F}, S) = \sup(\mathcal{R}(y, \mathcal{F}, S) \mid y \in G),$$

where

$$\mathcal{R}(y, \mathcal{F}, S) = \sup(\|z - S(y)\| \mid z \in \mathcal{F}(y))$$

---

Keywords: *smoothing, optimal recovery, information, convolution, minimization of functional*

2000 Mathematics Subject Classification: 41A46

© A. A. Zhensykbayev, 2009.

The best approximation of  $\mathcal{F}$  by the family  $\{S\}$  is the quantity

$$\mathcal{E}(G, \mathcal{F}, \{S\}) = \inf \mathcal{R}(G, \mathcal{F}, S) \mid S \in \{S\}.$$

The connection these two problems is presented as the equalities

$$\mathcal{R}(M, U, \mathcal{I}, S) = \mathcal{R}(\mathcal{I}(M), \mathcal{U}, S)$$

and

$$E(M, U, \mathcal{I}, \{S\}) = \mathcal{E}(\mathcal{I}(M), \mathcal{U}, \{S\}),$$

where the mapping  $\mathcal{U} : \mathcal{I}(M) \rightarrow Z$  is defined as

$$\mathcal{U}(y) = U(M(y)), \quad M(y) = \{x \in M : y \in \mathcal{I}(x)\}.$$

Thus, for solution of the optimal recovery problem often we need to describe the sets  $\mathcal{I}(x)$  and  $\mathcal{I}(M)$  and than to find the Chebyshev's center and Chebyshev's radius of the set  $M(y)$ . The information  $\mathcal{I}$  is called accurate if it is a one-valued operator, otherwise it is inaccurate. Usually the information  $\mathcal{I}(x)$  is given as a ball of radius  $\varepsilon(x)$  with a center  $I(x)$ :

$$\mathcal{I}(x) = \{y \in Y : \rho(y, I(x)) \leq \varepsilon(x)\},$$

where  $\rho$  is the metric of  $Y$ . If  $\varepsilon(x) = 0$  for all  $x \in M$  then the information  $\mathcal{I}$  is accurate.

We consider these problems on the following classes of functions.

Let  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  be the linear independent on the given set  $G \subset \mathbb{R}_d$  system of functions,  $\Phi_m = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ ,  $\Phi_0 = \{0\}$ ,  $F_{mk}$  - the set of all sourcewise functions:

$$F_{mk} = \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^m a_i(f) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) K_i(x, t) d\mu_i \right\},$$

where  $f_i \in L_{p_i}(G_i)$ , domains  $G_i \subset \mathbb{R}_{d_i}$  are measurable, kernels  $K_i \in L_{p'_i}(G_i, \mu_i)$  for each fixed  $x \in G$ ,  $L_{p'_i}(G_i, \mu_i)$  - Lebesgue space of functions on  $G_i$  with positive measure  $\mu_i$  and ordinary norm  $\|\cdot\|_{p_i}$ ,  $1/p_i + 1/p'_i = 1$  ( $i = 1 : k$ ).

Let the information about the elements of  $F_{mk}$  be given via the operator  $\mathcal{I}_n : F_{mk} \rightarrow \mathbb{R}_n$ ,  $\mathcal{I}_n = (I_1, \dots, I_n)$ , with the error  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ,  $\varepsilon_i \geq 0$ ,

$$I_j(f) = \sum_{i=1}^m a_i(f) I_j(\varphi_i) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) K_{ij}(t) d\mu_i,$$

where

$$I_j(\varphi_i) \in \mathbb{R}, \quad K_{ij}(t) = I_j(K_i(\cdot, t)) \in L_{p'_i}(G_i, \mu_i).$$

The error of information has block-type measurement. Namely, the distance  $|\cdot, \cdot|_{\varepsilon q}$  in  $\mathbb{R}_n$  we define as the sum of  $l$  types of measurements ( $l \geq 1$ ). Let us fix  $l$  integers

$$1 = n_0 < n_1 < \dots < n_l = n$$

and set

$$|x, y|_{\varepsilon q} = \sum_{i=0}^l |x, y|_i, \quad |x, y|_{\varepsilon q}^* = \sum_{i=1}^l \frac{1}{q_i} (|x, y|_i)^{q_i},$$

where

$$|x, y|_i = \left( \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} (|x_j - y_j|/\varepsilon_j)^{q_i} \right)^{1/q_i} \quad (1 < q_i < \infty, \quad i = 1 : l),$$

$a/b = 0$  if  $a = b = 0$  and  $a/b = +\infty$  if  $a \neq 0, b = 0$ . So the distance  $|x, y|_{\varepsilon q}^* < \infty$  if and only if  $x_j = y_j$  for such  $j$  that  $\varepsilon_j = 0$ .

Now we define the information operator on the set  $F_{mk}$ :

$$\mathcal{I}_{\varepsilon n}^q(f) = \{y \in \mathbb{R}_n : |y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q} \leq 1\}$$

and for each  $y \in \mathbb{R}_n$  with respect to dual recovery problem introduce the set

$$F_{mk}(y) = \{f \in F_{mk} : |y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q} \leq 1\}.$$

Note that  $|y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q} < \infty$  if and only if

$$I_j(f) = y_j \quad \text{for } \varepsilon_j = 0. \quad (1)$$

This operator coincides with  $\mathcal{I}_n$  (i.e. it is accurate) if  $\varepsilon = 0$ .

Also

$$|y_j - I_j(f)| \leq 2\varepsilon_j \quad \forall y \in \mathcal{I}_{\varepsilon n}^q(f), \quad \forall f \in F_{mk}(y) \quad (j = 1 : n).$$

Indeed, for  $j \in [n_{i-1} + 1, n_i]$  we have

$$\frac{1}{\varepsilon_j} |y_j - I_j(f)| \leq |y, \mathcal{I}_n(f)|_i \leq \frac{1}{q_i} (|y, \mathcal{I}_n(f)|_i)^{q_i} - \frac{1}{q_i} + 1 < |y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q} + 1 \leq 2.$$

Here we used known inequality

$$t^\alpha \leq \alpha t - \alpha + 1 \quad \forall t > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Below we describe the information field  $\mathcal{I}_{\varepsilon n}(F_{mk})$ , in particular, find its dimension. Assume that the dimension

$$\dim \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} = r \quad (r \leq m),$$

where

$$v_i = (I_1(\varphi_i), \dots, I_n(\varphi_i)).$$

For definiteness without loss of generality suppose that the vectors  $v_1, \dots, v_r$  are linear independent and

$$v_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij} v_j \quad (i = 1 : m). \quad (2)$$

From each system of functions  $\{K_{i1}, \dots, K_{in}\}$  extract a linear independent on  $G_i$  subsystem

$$\{K_{ii_1}, \dots, K_{ii_{N_i}}\} \quad (i = 1 : k), \quad \sum_{i=1}^k N_i =: N, \quad (3)$$

such that

$$K_{i\mu} = \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{i\mu}^{(j)} K_{ii_j} \quad (i = 1 : k, \quad \mu = 1 : n) \quad (4)$$

(naturally, in (2)  $\beta_{ij} = \delta_{ij}$  if  $i \leq r$ , and in (4)  $\alpha_{i\mu}^{(j)} = \delta_{s_j}$  if  $\mu = i_s$ ;  $\delta_{ij}$  is Kronecker's symbol).

## 2. Minimization of the functional

For given  $\varepsilon$  and fixed  $y \in \mathbb{R}_n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , we introduce the functional

$$\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f) = \|f\|_p^* + |y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q}^*, \quad \|f\|_p^* = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} (\|f_i(t)\|_{p_i})^{p_i},$$

on the set  $F_{mk}$  and the quantity

$$\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq} = \inf (\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f) \mid f \in F_{mk}). \quad (5)$$

The problem of minimization of the functional  $\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f)$  was considered for some particular cases in many papers (see, for example, [1-4]). For one-dimensional case  $d = d_1 = 1$ ,  $k = 1$ ,  $p_1 = 2$ ,  $G = G_1 = [0, 1]$ ,  $d\mu_1 = dt$ , and

$$K_1(x, t) = (x - t)_+^{r-1}, \quad \mathcal{I}_n(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n)),$$

where  $0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$ , quantity (5) coincides with well known minimization problem of  $r$ -derivative in  $L_2$ -norm among functions interpolate given values  $y_i$  at the given points  $x_i$ .

Assume that  $1 < p_i < \infty$  ( $i = 1 : k$ ) and extract from  $F_{mk}$  the following subset

$$S_{rk}^n = \{s \in F_{rk} \quad : \quad s_i(t) = |\sigma_i(t)|^{p_i'-1} \operatorname{sgn} \sigma_i(t) \quad (i = 1 : k)\},$$

where

$$\sigma_i(t) = \sum_{j=1}^n c_j K_{ij}(t),$$

coefficients  $c_j = c_j(s)$  are arbitrary. It is easy to calculate:

$$\|s_i\|_{p_i}^{p_i} = \|\sigma_i\|_{p_i'}^{p_i'}. \quad (6)$$

**Theorem 1.** *If for given  $y \in \mathbb{R}_n$  there exists an element  $s \in S_{pn}^r$ , which satisfies the requirements*

$$I_j(s) + |c_j(s)|^{q_i'-1} \operatorname{sgn} c_j(s) \varepsilon_j^{q_i'} = y_j, \quad (j = n_{i-1} + 1 : n_i, \quad i = 0 : l), \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j(s) I_j(\varphi_\nu) = 0, \quad (\nu = 1 : r), \quad (8)$$

where  $1/q_i + 1/q_i' = 1$ , then

$$\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(s) = \mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}.$$

If  $\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f) = \mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}$ , then almost everywhere on  $G_i$

$$f_i(t) = s_i(t), \quad (i = 1 : k),$$

and

$$\sum_{i=1}^m \beta_{ij} a_i(f) = a_j(s), \quad (j = 1 : r), \quad (9)$$

where  $a_k(f)$  and  $a_i(s)$  are the coefficients of polynomial part in the representations of  $f$  and  $s$  respectively,  $\beta_{ij}$  are defined in (2).

**Proof.** In view of (8) for arbitrary function  $f$  from  $F_{mk}$  we have:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j y_j &= \sum_{j=1}^n c_j (y_j - I_j(f)) + \sum_{j=1}^n c_j I_j(f) = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} c_j(s) \varepsilon_j (y_j - I_j(f)) / \varepsilon_j + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) \sigma_i(t) d\mu_i. \end{aligned}$$

Here we ought to consider such  $f \in F_{mk}$  that  $\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f) < \infty$ . It means that  $I_j(f) = y_j$  if  $\varepsilon_j = 0$ . All such type functions we denote by  $F_{mk}(y)$ :

$$F_{mk}(y) = \{f \in F_{mk} : \mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f) < \infty\}.$$

Using Holder inequality and equalities (7), (6) we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j y_j &\leq \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} |c_j(s) \varepsilon_j|^{q'_i} \right)^{1/q'_i} \left( \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} (|y_j - I_j(f)| / \varepsilon_j)^{q_i} \right)^{1/g_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i} \|\sigma_i\|_{p'_i} = \sum_{i=1}^l |y, \mathcal{I}_n(s)|_i^{q_i-1} |y, \mathcal{I}_n(f)|_i + \sum_{i=1}^k \|s_i\|_{p_i}^{p_i-1} \|f_i\|_{p_i}. \quad (10) \end{aligned}$$

On other hand by (7) and (8)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j y_j &= \sum_{j=1}^n c_j I_j(s) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} |c_j(s) \varepsilon_j|^{q'_i} = \\ &= \sum_{i=1}^l |y, \mathcal{I}_n(s)|_i^{q_i} + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} |\sigma_i(t)|^{p'_i} d\mu_i = \sum_{i=1}^l |y, \mathcal{I}_n(s)|_i^{q_i} + \sum_{i=1}^k \|s_i\|_{p_i}^{p_i}. \quad (11) \end{aligned}$$

Thus, from (10) and (11) we find

$$0 \leq \sum_{i=1}^k \|s_i\|_{p_i}^{p_i-1} (\|f_i\|_{p_i} - \|s_i\|_{p_i}) + \sum_{i=1}^l |y, \mathcal{I}_n(s)|_i^{q_i-1} (|y, \mathcal{I}_n(f)|_i - |y, \mathcal{I}_n(s)|_i).$$

Applying the well known inequality (see, for example, [5], p. 53)

$$a^c - b^c \geq cb^{c-1}(a - b) \quad \forall a, b \geq 0, \quad c > 1, \quad (12)$$

we obtain

$$\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(s) \leq \mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f) \quad \forall f \in F_{mp}.$$

If  $\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(s) = \mathcal{N}_{\varepsilon y}^{pq}(f)$  for some  $f \in F_{mp}$  then the sing of equality must be hold in (10). It is possible when

$$c_j(s)(c_j - I_j(f)) \geq 0,$$

$$\alpha_i |c_j(s) \varepsilon_j|^{q'_i} = \beta_i (|y_j - I_j(f)| / \varepsilon_j)^{q_i}, \quad j = n_{i-1} + 1 : n_i, \quad i = 1 : l,$$

i.e. when

$$(y_j - I_j(f))(y_j - I_j(s)) \geq 0, \quad \alpha_j |y_j - I_j(f)| = \beta_j |y_j - I_j(s)|,$$

and almost everywhere on  $G_i$

$$f_j(t) \sigma_j(t) \geq 0, \quad a_j |f_j(t)|^{p_i} = b_j |\sigma_j(t)|^{p'_i}, \quad j = 1 : k,$$

i.e.

$$f_j(t)s_j(t) \geq 0, \quad a_j|f_j(t)| = b_j|s_j(t)|, \quad j = 1 : k,$$

where  $\alpha_i, \beta_i, a_j, b_j$  are some nonnegative constants and

$$\alpha_i + \beta_i > 0, \quad a_j + b_j > 0, \quad i = 1 : l, \quad j = 1 : k.$$

Note also that in (12) the sing of equality is attained iff  $a = b$ . Hence

$$|y, \mathcal{I}_n(f)|_i = |y, \mathcal{I}_n(s)|_i, \quad \|f_j\|_{p_j} = \|s_j\|_{p_j}, \quad i = 1 : l, \quad j = 1 : k.$$

Thus, all  $\alpha_i = \beta_i, a_j = b_j$  and

$$I_i(f) = I_i(s) \quad (i = 1 : n), \tag{13}$$

$f_j(t) = s_j(t)$  almost everywhere on  $G_j$  ( $i = 1 : k$ ). Therefore

$$0 = I_j(f) - I_j(s) = \sum_{i=1}^m a_i(f)I_j(\varphi_i) - \sum_{i=1}^r a_i(s)I_j(\varphi_i), \quad j = 1 : n.$$

Using(2) and linear independence of vectors  $v_1, \dots, v_r$ , we obtain (9). Theorem 1 is proved.

An element  $s \in S_{pm}^r$  satisfying (7) – (8) is called smoothing  $y \in \mathbb{R}_n$ . Note that in view of (8) and (2) for any polynomial  $P(x) \in \Phi_m$

$$\sum_{j=1}^n c_j(s)I_j(P) = 0. \tag{14}$$

### 3. Description of the information field $\mathcal{I}_{\varepsilon n}(F_{mk})$ .

Let's analyse the possibility of solving the problem (7) – (8). Without loss of generality suppose that

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{N_0} = 0, \quad \text{and} \quad \varepsilon_i > 0 \quad (i = N_0 + 1 : n),$$

where  $0 \leq N_0 \leq n$ . Note that for  $N_0 = 0$  all  $\varepsilon_i > 0$ , for  $N_0 = n$  all  $\varepsilon_i = 0$  ( $i = 1 : n$ ).

Naturally, we suppose that  $|y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q}^* < \infty$  and by (1)

$$I_i(f) = y_i \quad (i = 1 : N_0).$$

For  $y = 0$  ( $y_i = 0, i = 1 : n$ ) the function  $g(x) \equiv 0 \in F_{mk}$ , i.e.

$$g_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1 : k) \quad \text{and} \quad a_j(g) = 0 \quad (j = 1 : m),$$

has the minimal norm:

$$\mathcal{N}_{\varepsilon 0}^{pq}(g) = 0.$$

In view of the theorem 1 the function  $s(x) \in S_{rk}^n$  satisfying (7) – (8) for  $y = 0$  also has zeros norm,  $\mathcal{N}_{\varepsilon 0}^{pq}(s) = 0$ :

$$\sum_{i=1}^l |0, \mathcal{I}_n(s)|_i^{q_i} + \sum_{j=1}^k \|s_j\|_{p_j}^{p_j} = 0.$$

Hence

$$I_i(s) = 0, \quad \|s_j\|_{p_j} = 0 \Rightarrow s_j(t) \equiv 0, \quad a_\nu = 0 \quad (i = 1 : n; j = 1 : k; \nu = 1 : r)$$

( $a_\nu = 0$  because vectors  $v_1, \dots, v_r$  are linear independent). From (7) we conclude that

$$c_j = 0 \quad (j = N_0 + 1 : n) \quad (15)$$

and in view of (4)

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^n c_j K_{ij}(t) = \sum_{\mu=1}^{N_i} \left( \sum_{j=1}^{N_0} c_j \alpha_{ij}^{(\mu)} \right) K_{ii_\mu}(t) \equiv 0 \quad (i = 1 : k). \quad (16)$$

If  $N_0 = 0$  (i.e. all  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = 1 : n$ ) then the system (7)-(8) for  $y = 0$  has a unique solution

$$c_1 = \dots = c_n = a_1 = \dots = a_r = 0.$$

Assume that  $N_0 > 0$ . Since the systems (3) are linear independent on  $G_i$  the identities (16) hold if its corresponding coefficients equal to zero. And in view of (8) and (15) we obtain following system of linear equations with respect to  $c_j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_0} c_j \alpha_{ij}^{(\mu)} &= 0 & (\mu = 1 : N_i, i = 1 : k) \\ \sum_{j=1}^{N_0} c_j I_j(\varphi_\nu) &= 0 & (\nu = 1 : r). \end{aligned}$$

The matrix  $M$  of this system of equations has  $N_0$  columns and  $N + r$  rows. Assign its columns as  $\gamma_j$  ( $j = 1 : N_0$ ).

The rank of the matrix  $M$  we denote as  $\rho$ ,  $\text{rank } M = \rho$ . Without loss of generality suppose that first  $\rho$  columns are linear independent and

$$\gamma_\nu = \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} \gamma_j \quad (\nu = 1 : N_0),$$

where the constants  $d_{\nu j}$  do not depend on  $y$  and  $f$ .

If  $\rho < N_0$  for any function  $f \in F_{mk}$  in view of (2) and (4) we obtain:

$$\begin{aligned} I_\nu(f) &= \sum_{k=1}^m a_k \varphi_{k\nu} + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) K_{i\nu}(t) d\mu_i = \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \left( \sum_{l=1}^r \beta_{kl} \varphi_{l\nu} \right) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) \sum_{s=1}^{N_i} \alpha_{i\nu}^{(s)} K_{ii_s}(t) d\mu_i = \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \left( \sum_{l=1}^r \beta_{kl} \left( \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} \varphi_{lj} \right) \right) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) \sum_{s=1}^{N_i} \left( \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} \alpha_{ij}^{(s)} \right) K_{ii_s}(t) d\mu_i = \\ &= \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} \left( \sum_{k=1}^m a_k \sum_{l=1}^r \beta_{kl} \varphi_{lj} + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) \sum_{s=1}^{N_i} \alpha_{ij}^{(s)} K_{ii_s}(t) d\mu_i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} \left( \sum_{k=1}^m a_k \varphi_{kj} + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) K_{ij}(t) d\mu_i \right). \end{aligned}$$

and

$$I_\nu(f) = \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} I_j(f) \quad \forall f \in F_{mk} \quad (\nu = 1 : N_0). \quad (17)$$

Suppose that  $1 \leq \rho < N_0$ . For arbitrary fixed  $f \in F_{mk}$  consider its image  $\mathcal{I}_{\varepsilon n}^q(f)$ . If  $y \in \mathcal{I}_{\varepsilon n}^q(f)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , then in view of (17) and (1)

$$y_\nu = I_\nu(f) = \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} I_j(f) = \sum_{j=1}^{\rho} d_{\nu j} y_j \quad (\nu = \rho + 1 : N_0).$$

Hence

$$\dim \mathcal{I}_{\varepsilon n}^q(F_{mk}) = n - (N_0 - \rho).$$

Thus, if we suppose that the dimension of the information  $\mathcal{I}_{\varepsilon n}^q(F_{mk})$  is equal to  $n$ , we must require equality  $\rho = N_0$ , i.e. the matrix  $M$  has maximal rank:

$$\text{rank } M = N_0.$$

**Theorem 2.** For arbitrary  $y \in \mathbb{R}_n$  in the set  $S_{rp}^n$  there exists no more than one element, satisfying the system of equations (7) – (8).

**Proof.** Assume that for some  $y \in \mathbb{R}_n$  two elements  $\bar{s}, \hat{s} \in S_{rp}^n$  satisfy (7) – (8),

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^r \bar{a}_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} \bar{s}_i(t) K_i(x, t) d\mu_i,$$

and

$$\hat{s}(x) = \sum_{i=1}^r \hat{a}_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} \hat{s}_i(t) K_i(x, t) d\mu_i,$$

according to the theorem 1  $\bar{a}_i = \hat{a}_i$  ( $i = 1 : r$ ) and  $\bar{s}_j(t) \equiv \hat{s}_j(t)$  ( $j = 1 : k$ ). From (13) and (14) it follows that

$$\bar{c}_\mu = \hat{c}_\mu \quad (\mu = N_0 + 1 : n).$$

$$\sum_{i=1}^{N_j} \left( \sum_{\mu=1}^{N_0} (\bar{c}_\mu - \hat{c}_\mu) \alpha_{j\mu}^{(i)} \right) K_{jj_i} \equiv 0.$$

Since the systems of function (3) are linear independent

$$\sum_{\mu=1}^{N_0} (\bar{c}_\mu - \hat{c}_\mu) \alpha_{j\mu}^{(i)} = 0 \quad (j = 1 : k, i = 1 : N_j).$$

Since  $\text{rank } M = N_0$  last system of linear equations has unique trivial solution:  $\bar{c}_\mu - \hat{c}_\mu = 0$  ( $\mu = 1 : N_0$ ). Thus,  $\bar{s}(x) \equiv \hat{s}(x)$ . Theorem 2 is proved.

The existence of element  $s \in S_{rp}^n$  satisfying the requirements (7) – (8) is proved by similar methods as in [3] (see also [4, ch.4]) using the properties of algebraic mapping.

**Theorem 3.** If the sets  $G_i$  are bounded, then for arbitrary  $y \in \mathbb{R}_n$  in the set  $S_{rp}^n$  ( $1 < p_i < \infty$ ,  $i = 1 : k$ ) there exists an unique element, satisfying the system of equations (7) – (8).

#### 4. Minimization of the functional in the space $L_2$ .

Consider the Hilbert space  $L_2$ . The distance in  $\mathbb{R}_n$  we define as

$$2|x, y|_{\varepsilon_2}^* = \sum_{j=1}^n (|x_j - y_j|/\varepsilon_j)^2.$$

In this case the functional  $\mathcal{N}_{\varepsilon y}^{22}(f)$  equals

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\varepsilon y}^{22}(f) &= \frac{1}{2}d_{\varepsilon}^2(f, y), \\ d_{\varepsilon}^2(f, y) &:= \sum_{j=1}^n (|I_j(f) - y_j|/\varepsilon_j)^2 + \sum_{i=1}^k \|f_i(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

**Theorem 4.** *If  $p_i = 2$  ( $i = 1 : k$ ), then for arbitrary  $y \in \mathbb{R}_n$  in the set  $S_{rp}^n$  there exists a unique element  $s_y$ , satisfying the system of equations (7) – (8). And for any  $y \in \mathbb{R}_n$  the following equalities are true*

$$\begin{aligned} d_{\varepsilon}^2(f - s_y, 0) &= d_{\varepsilon}^2(f, y) - d_{\varepsilon}^2(s_y, y), \\ d_{\varepsilon}(2s_y - f, y) &= d_{\varepsilon}(f, y). \end{aligned} \quad (18)$$

**Proof.** The existence and uniqueness follows from the theorem 2 and linearity of the system of  $n + r$  equations (7) – (8) with respect of  $n + r$  coefficients  $a_k$  and  $c_j$ :

$$I_j(s) + c_j(s)\varepsilon_j^2 = y_j \quad (j = 1 : n), \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j(s)I_j(\varphi_{\nu}) = 0 \quad (\nu = 1 : r). \quad (20)$$

Prove now the equalities. Elements from the set  $S_{rk}^n$  have the representation

$$S_{rk}^n = \{s \in F_{rk} \quad : \quad s_i(t) = \sum_{j=1}^n c_j K_{ij}(t) \quad (i = 1 : k)\}.$$

In view of (20)

$$\sum_{j=1}^n c_j(I_j(f) - I_j(s)) = \sum_{i=1}^k \int_{G_i} (f_i(t) - s_i(t))s_i(t)d\mu_i(t) = \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t)s_i(t)d\mu_i(t) - \|s\|_2^2.$$

On other hand using (19) we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j(I_j(f) - I_j(s)) &= \sum_{j=1}^n (I_j(f) - I_j(s))(y_j - I_j(s))/\varepsilon_j^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n (I_j(s) - y_j)^2/\varepsilon_j^2 - \sum_{j=1}^n (I_j(f) - y_j)(I_j(s) - y_j)/\varepsilon_j^2. \end{aligned}$$

Hence,

$$\sum_{j=1}^n (I_j(f) - y_j)(I_j(s) - y_j)/\varepsilon_j^2 + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t)s_i(t)d\mu_i(t) = \sum_{j=1}^n (I_j(s) - y_j)^2/\varepsilon_j^2 + \|s\|_2^2. \quad (21)$$

Now consider the distance  $d_\varepsilon^2(f - s_y, 0)$ . In view of last equality we find

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^2(f - s_y, 0) &= \sum_{j=1}^n (I_j(f) - I_j(s) \pm y_j)^2 / \varepsilon_j^2 + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} (f_i(t) - s_i(t))^2 d\mu_i(t) = \\ &= d_\varepsilon^2(f, y) + d_\varepsilon^2(s_y, y) - 2 \sum_{j=1}^n (I_j(f) - y_j)(I_j(s) - y_j) / \varepsilon_j^2 - 2 \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) s_i(t) d\mu_i(t) = \\ &= d_\varepsilon^2(f, y) - d_\varepsilon^2(s_y, y). \end{aligned}$$

Prove second equality: in view of (21)

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^2(2s_y - f, y) &= \sum_{j=1}^n (2(I_j(s) - y_j) - (I_j(f) - y_j))^2 / \varepsilon_j^2 + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} (2s_i(t) - f_i(t))^2 d\mu_i(t) = \\ &= 4 \sum_{j=1}^n (I_j(s) - y_j)^2 / \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^n (I_j(f) - y_j)^2 / \varepsilon_j^2 - 4 \sum_{j=1}^n (I_j(s) - y_j)(I_j(f) - y_j) / \varepsilon_j^2 + \\ &\quad + 4 \sum_{i=1}^k \int_{G_i} s_i^2(t) d\mu_i(t) + \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i^2(t) d\mu_i(t) - 4 \sum_{i=1}^k \int_{G_i} f_i(t) s_i(t) d\mu_i(t) = d_\varepsilon^2(f, y). \end{aligned}$$

Theorem 4 is proved.

**Remark.** Theorem 4 is the generalization the known statements for one variable polynomial splines and information  $\mathcal{I}$  as the values of function at given points (see for example [1, ch. 5], [2, ch. 11]).

## 5. Recovery of operators.

Obtained results are applicable to the solution of the optimal recovery problems like it was done in [4, ch. 4]. As an example consider the recovery of operator  $U : F_{mp} \rightarrow Z$  ( $Z$  is normed space with some norm  $\|\cdot\|$ ) on the class

$$\mathbb{F}_{mp}^* = \{f \in F_{mp} : \|f\|_p^* \leq 1\},$$

using the operator of information

$$\mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}(f) = \{y \in \mathbb{R}_n : |y, \mathcal{I}_n(f)|_{\varepsilon q}^* \leq 1 - \|f\|_p^*\}.$$

For each  $y \in \mathbb{R}_n$  we respond its smoothing element  $s_y \in S_{pn}^r$  (i.e. satisfying requirements (7) – (8)).

**Theorem 5.** For the method  $S_\varepsilon$ ,  $S_\varepsilon(y) = U(s_y)$ , of recovery  $U$  on the class  $\mathbb{F}_{mp}^*$  by the information  $\mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}$  the following estimation is true

$$R(\mathbb{F}_{mp}^*, U, \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}, S_\varepsilon) \leq 2E(\mathbb{F}_{mp}^*, U, \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}), \quad (22)$$

where  $E(M, U, \mathcal{I}) = E(M, U, \mathcal{I}, \{S\})$  and  $\{S\}$  is the set of all one-valued operators  $S : \mathbb{R}_n \rightarrow Z$ .

**Proof.** Let  $r(y)$  be the Chebyshev's radius of the set  $U(\mathbb{F}_{mp}^*(y))$ ,

$$\mathbb{F}_{mp}^*(y) = \{f \in \mathbb{F}_{mp}^* : y \in \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}(f)\}.$$

By the theorem 1 for any  $y \in \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}(f)$

$$N_{\varepsilon y}^{pq}(s_y) \leq N_{\varepsilon y}^{pq}(f) \leq 1.$$

Therefore  $s_y \in \mathbb{F}_{mp}^*(y)$  and

$$\|U(f) - U(s_y)\| \leq \text{diam} U(\mathbb{F}_{mp}^*(y)) \leq 2r(y) \quad \forall y \in \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{q*}(\mathbb{F}_{mp}^*).$$

Inequality (22) follows now from the known equality

$$E(M, U, \mathcal{I}) = \sup (r(y) \mid y \in \mathbb{R}_n).$$

Theorem 5 is proved.

In particular case  $p_1 = \dots = p_k = 2$  corresponding class we denote by  $\mathbb{F}_{m2}^*$ , and  $\mathcal{I}_{\varepsilon n}^{2*}$  is the information operator of with  $q_1 = \dots = q_l = 2$ .

**Theorem 6.** *If the operator  $U : \mathbb{F}_{m2}^* \rightarrow Z$  satisfies the inequality*

$$\|U(f) - U(g)\| \leq \|U(f - g)\|$$

*and conserves the symmetry than  $S_\varepsilon$  is an optimal recovery method  $U$  on the class  $\mathbb{F}_{m2}^*$  by information  $\mathcal{I}_{\varepsilon n}^{2*}$ . The method  $S_\varepsilon$  is the central algorithm and*

$$E(U, \mathbb{F}_{m2}^*, \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{2*}) = R(U, \mathbb{F}_{m2}^*, \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{2*}, S_\varepsilon) = r_\varepsilon,$$

where

$$r_\varepsilon = \sup (\|U(f)\| \mid f \in \mathbb{F}_{m2}^* : 0 \in \mathcal{I}_{\varepsilon n}^{2*}(f)).$$

**Proof.** Note first of all that in view of the theorem 4 the set  $\mathbb{F}_{mp}^*(y)$  is  $s_y$ -symmetric. In particular, the set  $\mathbb{F}_{mp}^*(0)$  is 0-symmetric. And also by the same reason for any  $f \in \mathbb{F}_{mp}^*(y)$  the element  $f - s_y \in \mathbb{F}_{mp}^*(0)$ . Hence

$$\|U(f) - U(s_y)\| \leq \|U(f - s_y)\| \leq r_\varepsilon.$$

On other hand

$$E(U, \mathbb{F}_{mp}^*, \mathcal{I}_n) = \sup (r(y) \mid y \in \mathcal{I}_n(\mathbb{F}_{mp}^*)) \geq r_\varepsilon.$$

Thus,  $E(U, \mathbb{F}_{mp}^*, \mathcal{I}_n) = r_\varepsilon$ , and the method  $S_\varepsilon$  is optimal.

Since the operator  $U$  conserves the property of symmetry the sets  $U(\mathbb{F}_{mp}^*(y))$  are  $U(s_f)$ -symmetric. Therefore  $U(s_y)$  is a Chebychev's center of  $U(\mathbb{F}_{mp}^*(y))$ , and  $S_\varepsilon$  is the central algorithm. Theorem 6 is proved.

## References

1. **Alberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** The Theory of Splines and Their Applications. New York, London, 1967.
2. **Laurent P.-J.** Approximation et optimization. Paris, 1972.
3. **Zhensykbayev A. A.** / East J. Approx. 1995. № 1,2. P. 197 – 220.
4. **Zhensykbayev A. A.** Problems of recovery of operators. Moscow-Izhevsk, 2003.
5. **Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.** Inequalities. London, 1934.

*Received May 25, 2009*

УДК 519.624

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ж. М. КАДИРБАЕВА

МКТУ имени Х.А.Ясави

г.Туркестан ул.Саттарханова Университетский городок apelman86pm@mail.ru

Методом параметризации с разными шагами разбиения интервала исследуется двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения и получены достаточные условия его сходимости к единственному решению рассматриваемой задачи.

На отрезке  $[0, T]$  рассматривается линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=0}^m M_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad \|x\| = \max_{k=1, n} |x_k|, \quad (2)$$

где матрицы  $A(t)$ ,  $M_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , размерности  $(n \times n)$  и  $n$  – вектор-функция  $f(t)$  непрерывны на  $[0, T]$ ,  $B, C$  –  $(n \times n)$  – матрицы.

Через  $C([0, T], R^n)$  обозначим пространство непрерывных на  $[0, T]$  функций  $x : [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой  $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ .

Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1-4]. В работах [3,4] линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений исследуется методом параметризации [5]. Однако в этих работах не учитывается поведение  $\|A(t)\|$ ,  $t \in [0, T]$ , и интервалы  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  разбиваются на одинаковое число  $l$  при всех  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ .

В настоящей работе задача (1),(2) также исследуется методом параметризации. При этом разбиение между точками нагружения осуществляется с учетом значений  $\|A(t)\|$ ,  $t \in [0, T]$ .

Keywords: *loaded ordinary differential equation, parametrization method, two-point boundary value problem, unique solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

© Ж. М. Кадирбаева, 2009.

Пусть  $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$ ,  $\|M_j(t)\| \leq \beta_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , и функции  $\alpha(t)$ ,  $\beta_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , непрерывны на  $[0, T]$ . Возьмем число  $a > 0$  и произведем разбиение интервала  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ,  $i = \overline{1, m}$ , следующим образом.

За  $\theta_{i-1,0}$  возьмем  $\theta_{i-1}$  и  $\theta_{i-1,1} \in [\theta_{i-1,0}, \theta_i]$  выберем удовлетворяющим неравенству  $\int_{\theta_{i-1,0}}^{\theta_{i-1,1}} \alpha(\tau) d\tau \leq a$ . Следующую точку  $\theta_{i-1,2} \in [\theta_{i-1,1}, \theta_i]$  также выберем удовлетворяющим неравенству  $\int_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_{i-1,2}} \alpha(\tau) d\tau \leq a$ . Через  $k_i$  обозначим натуральное число, при котором  $\int_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_i} \alpha(\tau) d\tau \leq a$ .

Введем следующие обозначения  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = k_0$ ,  $p_2 = k_0 + k_1, \dots, p_m = k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1}$ ,  $p_{m+1} = k_0 + k_1 + \dots + k_{m-1} + k_m$ . Тогда  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{p_{m+1}} [t_{r-1}, t_r)$ , где  $t_0 = \theta_0 = 0$ ,  $t_1 = \theta_{0,1}$ ,  $t_2 = \theta_{0,2}$ ,  $\dots, t_{p_1} = \theta_1$ ,  $t_{p_1+1} = \theta_{1,1}$ ,  $\dots, t_{p_2} = \theta_2$ ,  $\dots, t_{p_{m+1}} = T$ .

Через  $C([0, T], t_r, R^{np_{m+1}})$  обозначим пространство систем функции  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{p_{m+1}}(t))'$ , где функции  $x_r : [t_{r-1}, t_r) \rightarrow R^n$  непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы  $\lim_{t \rightarrow t_r-0} x_r(t)$  при всех  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , с нормой  $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$ .

Сужение функции  $x(t)$  на  $r$ -ый интервал  $[t_{r-1}, t_r)$   $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , обозначим через  $x_r(t)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ . При этом задача (1),(2) сводится к многоточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r(t) + \sum_{j=0}^m M_j(t)x_{p_j}(\theta_j) + f(t), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \tag{3}$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \rightarrow T-0} x_{p_{m+1}}(t) = d, \tag{4}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \tag{5}$$

Здесь (5) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения.

Введя дополнительные параметры  $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$   $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , и на каждом интервале  $[t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , произведя замену  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , получим краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + \sum_{j=0}^m M_j(t)\lambda_{p_j} + f(t), \tag{6}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \tag{7}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{p_{m+1}} + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_{p_{m+1}}(t) = d, \tag{8}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \tag{9}$$

Если пара  $(\lambda, u[t])$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{m+1}})' \in R^{np_{m+1}}$ ,  $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{p_{m+1}}(t))'$  – решение задачи (6) – (9), то функция  $x(t)$ , определяемая равенствами  $x(t) = \lambda_r + u_r(t)$ ,  $t \in [t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ ,  $x(T) = \lambda_{p_{m+1}} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{p_{m+1}}(t)$ , является решением задачи (1),(2). И наоборот, если  $\tilde{x}(t)$  решение задачи (1),(2), то пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ , где  $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(0), \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$  будет решением задачи (6) – (9).

Появление начальных условий  $u_r(t_{r-1}) = 0$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , позволяют при фиксированных  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{m+1}})$  определить функции  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , из интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{t_{r-1}}^t \sum_{j=0}^m M_j(\tau)\lambda_{p_j}d\tau + \\ + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}. \quad (10)$$

В уравнении (10) вместо  $u_r(\tau)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$  подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) раз, получим представление функции  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , вида:

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t)\lambda_r + \sum_{j=0}^m H_{\nu r}^j(t)\lambda_{p_j} + F_{\nu r}(t) + G_{\nu r}(u, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \quad (11)$$

где

$$D_{\nu r}(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \\ H_{\nu r}^j(t) = \int_{t_{r-1}}^t M_j(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} M_j(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \quad j = \overline{0, m}, \\ F_{\nu r}(t) = \int_{t_{r-1}}^t f(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \\ G_{\nu r}(u, t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, p_{m+1}}.$$

Переходя в правой части (11) к пределу при  $t \rightarrow t_r - 0$ , подставив соответствующие им выражения в условия (8),(9) и умножив (8) на  $(T - t_{p_{m+1}-1})$ , получим систему уравнений относительно неизвестных параметров  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_{m+1}})'$ :

$$(T - t_{p_{m+1}-1})B\lambda_1 + (T - t_{p_{m+1}-1})C \left[ I + D_{\nu p_{m+1}}(T) \right] \lambda_{p_{m+1}} + (T - t_{p_{m+1}-1})C \times \\ \times \sum_{j=0}^m H_{\nu p_{m+1}}^j(T)\lambda_{p_j} = (T - t_{p_{m+1}-1})d - (T - t_{p_{m+1}-1})CF_{\nu p_{m+1}}(T) - \\ - (T - t_{p_{m+1}-1})CG_{\nu p_{m+1}}(u_{p_{m+1}}, T), \quad (12)$$

$$\left[ I + D_{\nu s}(t_s) \right] \lambda_s + \sum_{j=0}^m H_{\nu s}^j(t_s)\lambda_{p_j} - \lambda_{s+1} = -F_{\nu s}(t_s) - G_{\nu s}(u_s, t_s), \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \quad (13)$$

где  $I$  – единичная матрица размерности  $(n \times n)$ . Обозначив через  $Q_\nu(a)$  матрицу, соответствующую левой части системы (12),(13) и введя векторы

$$F_\nu(a) = \left( (T - t_{p_{m+1}-1})d + (T - t_{p_{m+1}-1})CF_{\nu p_{m+1}}(T), F_{\nu 1}(t_1), \dots, F_{\nu p_{m+1}-1}(t_{p_{m+1}-1}) \right)',$$

$$G_\nu(u, a) = \left( (T - t_{p_{m+1}-1})CG_{\nu p_{m+1}}(u_{p_{m+1}}, T), G_{\nu 1}(u_1, t_1), \dots, G_{\nu p_{m+1}-1}(u_{p_{m+1}-1}, t_{p_{m+1}-1}) \right)'$$

запишем ее в виде:

$$Q_\nu(a)\lambda = -F_\nu(a) - G_\nu(u, a), \quad \lambda \in R^{np_{m+1}}. \tag{14}$$

Таким образом, для нахождения неизвестной пары  $(\lambda, u[t])$  имеем замкнутую систему уравнений (10),(14). Пара  $(\lambda, u[t])$  – решение задачи (6) – (9) – находится как предел последовательности пар  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранных  $a \in \mathbb{R}$  и  $\nu \in \mathbb{N}$  матрица  $Q_\nu(a)$  обратима, начальное приближение по параметру  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^{(0)})' \in R^{np_{m+1}}$  определим из уравнения  $Q_\nu(a)\lambda = -F_\nu(a)$ , т.е.  $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(a)]^{-1}F_\nu(a)$ .

б) Используя компоненты вектора  $\lambda^{(0)} \in R^{np_{m+1}}$  и решая задачу Коши (6),(7) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ ,  $\lambda_{p_j} = \lambda_{p_j}^{(0)}$ ,  $j = \overline{0, m}$ , на интервалах  $t \in [t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , находим функции  $u_r^{(0)}(t)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ .

1-шаг. а) Подставляя найденные  $u_r^{(0)}(t)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , в правую часть (14), из уравнения

$$Q_\nu(a)\lambda = -F_\nu(a) - G_\nu(u^{(0)}, a)$$

определим  $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^{(1)})' \in R^{np_{m+1}}$ .

б) На отрезках  $t \in [t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$  решая задачу Коши (6),(7) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ ,  $\lambda_{p_j} = \lambda_{p_j}^{(1)}$ ,  $j = \overline{0, m}$ , находим функции  $u_r^{(1)}(t)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ . И т.д.

Продолжая процесс, на  $k$ -ом шаге получаем систему пар  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра  $\lambda_r$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ , решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале  $t \in [t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, p_{m+1}}$ .

Достаточные условия сходимости алгоритма, существование единственного решения задачи (1),(2) и его оценку дает следующая теорема.

**Теорема.** Пусть при некоторых  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , матрица  $Q_\nu(a) : R^{np_{m+1}} \rightarrow R^{np_{m+1}}$  обратима и выполняются неравенства:

$$\|[Q_\nu(a)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(a), \tag{15}$$

$$q_\nu(a) = \gamma_\nu(a) \max [1, (T - t_{p_{m+1}-1})\|C\|] \left\{ e^a - 1 - a - \dots - \frac{a^\nu}{\nu!} + \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \left[ e^a - 1 - a - \dots - \frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] \right\} < 1. \tag{16}$$

Тогда двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1),(2) имеет единственное решение  $x^*(t)$  и для него справедлива оценка:

$$\|x^*\|_1 \leq K_\nu(a) \max(\|f\|_1, \|d\|), \tag{17}$$

где

$$K_\nu(a) = \left\{ e^a \|f\|_1 \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}) + [e^a - 1 + e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau] \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \gamma_\nu(a) \max \left[ 1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}) \} \times \\ & \times \left\{ \left[ e^a + e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \right] \frac{1}{1 - q_\nu(a)} \gamma_\nu(a) \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \frac{a^\nu}{\nu!} + 1 \right\} + \\ & + \gamma_\nu(a) \max \left[ 1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** При предположениях теоремы из нулевого шага алгоритма определим и оценим  $\lambda^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(0)}\| &= \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \|\lambda_r^{(0)}\| \leq \gamma_\nu(a) \|F_\nu(a)\| \leq \gamma_\nu(a) \max \left[ (T - t_{p_{m+1}-1}) \|d\| + \right. \\ & \left. + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \|f\|_1 (T - t_{p_{m+1}-1}), \max_{r=\overline{1, p_{m+1}-1}} \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \|f\|_1 (t_r - t_{r-1}) \right] \leq \\ & \leq \gamma_\nu(a) \max \left[ 1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max(\|f\|_1, \|d\|) \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя неравенство Гронуолла-Беллмана [6, с.75], получим:

$$\begin{aligned} \|u_r^{(0)}(t)\| &\leq \left[ \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{j=0}^m \beta_j(\tau) d\tau \|\lambda_{p_j}^{(0)}\| + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \|f(\tau)\| d\tau \right] e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} + \\ & + \left( e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} - 1 \right) \|\lambda_r^{(0)}\|, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \end{aligned} \quad (19)$$

откуда, учитывая (18) получим:

$$\begin{aligned} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 &= \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|u_r^{(0)}(t)\| \leq e^a \|f\|_1 \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}) + \\ & + \left[ e^a - 1 + e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \right] \gamma_\nu(a) \max \left[ 1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \times \right. \\ & \left. \times \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max(\|f\|_1, \|d\|) \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

По первому шагу алгоритма определим  $\lambda^{(1)}$  и оценим норму разности  $\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|$ :

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| &\leq \gamma_\nu(a) \|G_\nu(u^{(0)}, a)\| \leq \gamma_\nu(a) \times \\ & \times \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \frac{a^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив  $\lambda = \lambda^{(1)}$  в правую часть (10) и решая задачу Коши найдем  $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_{p_{m+1}}^{(1)}(t)) \in C([0, T], t_r, R^{np_{m+1}})$ .

Продолжая итерационный процесс на  $k$ -ом шаге получим пару  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_{p_{m+1}}^{(k)})$ ,  $u^{(k)}[t] = (u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t), \dots, u_{p_{m+1}}^{(k)}(t)) \in C([0, T], t_r, R^{np_{m+1}})$ .

Так как  $\lambda^{(k+1)}, \lambda^{(k)}$  являются решениями уравнения (14) при соответствующих правых частях, то для их разности справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| &\leq \| [Q_\nu(a)]^{-1} \| \| G_\nu(u^{(k)}, a) - G_\nu(u^{(k-1)}, a) \| \leq \gamma_\nu(a) \| G_\nu(u^{(k)}, a) - G_\nu(u^{(k-1)}, a) \| \leq \\ &\leq \gamma_\nu(a) \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \left\{ \int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} \alpha(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} \alpha(\tau_\nu) \times \right. \\ &\quad \left. \times \|u_r^{(k)}(\tau_\nu) - u_r^{(k-1)}(\tau_\nu)\| d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 \right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Вновь используя неравенство Гронуолла-Беллмана, разность решений задач Коши оцениваем через разность параметров:

$$\begin{aligned} \|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| &\leq \left[ e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} - 1 + e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} \times \right. \\ &\quad \left. \times \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \right] \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя (23) в правую часть (22) и вычисляя повторные интегралы, получим:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| &\leq \gamma_\nu(a) \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \times \\ &\quad \times \int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} \alpha(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} \alpha(\tau_\nu) \left[ e^{\int_{t_{r-1}}^{\tau_\nu} \alpha(\tau_{\nu+1}) d\tau_{\nu+1}} - 1 + e^{\int_{t_{r-1}}^{\tau_\nu} \alpha(\tau_{\nu+1}) d\tau_{\nu+1}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{j=0}^m \beta_j(\tau) d\tau \right] d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \leq q_\nu(a) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{24}$$

В силу условия  $q_\nu(a) < 1$ , неравенств (23),(24) при  $k \rightarrow \infty$  последовательность  $\lambda^{(k)}$  сходится к  $\lambda^*$ , последовательность систем функции  $u^{(k)}[t]$  по норме пространства  $C([0, T], t_r, R^{np_{m+1}})$  сходится к  $u^*[t]$  и справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| &\leq \frac{[q_\nu(a)]^k}{1 - q_\nu(a)} \gamma_\nu(a) \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \frac{a^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2, \\ \|u^*[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\|_2 &\leq \left[ e^a - 1 + e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau \right] \frac{[q_\nu(a)]^k}{1 - q_\nu(a)} \times \\ &\quad \times \gamma_\nu(a) \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \frac{a^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Используя эти неравенства при  $k = 0$  и учитывая установленные оценки (18),(20) получим:

$$\|x^*\|_1 = \|\lambda^* + u^*[\cdot]\|_2 \leq \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| + \|u^*[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \|\lambda^{(0)}\| + \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ e^a \|f\|_1 \max_{r=1, p_{m+1}} (t_r - t_{r-1}) + [e^a - 1 + e^a \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau] \right\} \times \\
&\times \gamma_\nu(a) \max \left[ 1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \left[ \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max_{r=1, p_{m+1}} (t_r - t_{r-1}) \right] \left\{ [e^a + e^a \times \right. \\
&\times \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau] \frac{1}{1 - q_\nu(a)} \gamma_\nu(a) \max \left[ 1, (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \right] \frac{a^\nu}{\nu!} + 1 \left. \right\} \max(\|f\|_1, \|d\|) + \\
&+ \gamma_\nu(a) \max \left[ 1 + (T - t_{p_{m+1}-1}) \|C\| \left[ \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{a^i}{i!} \right] \max_{r=1, p_{m+1}} (t_r - t_{r-1}) \right] \max(\|f\|_1, \|d\|).
\end{aligned}$$

Покажем единственность. Пусть  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{\tilde{x}}(t)$  два решения задачи (1),(2). Тогда соответствующие им системы пар  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ ,  $(\tilde{\tilde{\lambda}}, \tilde{\tilde{u}}[t])$ , где  $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(t_0), \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$ ,  $\tilde{\tilde{\lambda}} = (\tilde{\tilde{x}}(t_1), \tilde{\tilde{x}}(t_1), \dots, \tilde{\tilde{x}}(t_{p_{m+1}-1}))$ ,  $\tilde{\tilde{u}}[t] = (\tilde{\tilde{x}}(t) - \tilde{\tilde{x}}(0), \tilde{\tilde{x}}(t) - \tilde{\tilde{x}}(t_1), \dots, \tilde{\tilde{x}}(t) - \tilde{\tilde{x}}(t_{p_{m+1}-1}))$  являются решениями краевой задачи с параметрами (6) – (8) и удовлетворяют соотношениям (10) – (14). Аналогично оценкам (23),(24) устанавливаются оценки:

$$\|\tilde{u}[\cdot] - \tilde{\tilde{u}}[\cdot]\|_2 \leq [e^a - 1 + e^a \max_{r=1, p_{m+1}} \sum_{j=0}^m \int_{t_{r-1}}^{t_r} \beta_j(\tau) d\tau] \|\tilde{\lambda} - \tilde{\tilde{\lambda}}\|,$$

$$\|\tilde{\lambda} - \tilde{\tilde{\lambda}}\| \leq q_\nu(a) \|\tilde{\lambda} - \tilde{\tilde{\lambda}}\|.$$

Так как  $q_\nu(a) < 1$ , то из этих оценок следуют  $\tilde{\lambda} = \tilde{\tilde{\lambda}}, \tilde{u}[t] = \tilde{\tilde{u}}[t]$ , т.е.  $\tilde{x}(t) = \tilde{\tilde{x}}(t)$  при  $t \in [0, T]$ .

Теорема доказана.

## Цитированная литература

1. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96 – 105.
2. Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1585 – 1595.
3. Бакирова Э. А. // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2005. № 3. С. 95 – 102.
4. Бакирова Э. А. // Математический журнал. 2005. Т. 5, № 3. С. 25 – 34.
5. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
6. Филатов А. Н. // Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, 1971.

Поступила в редакцию 15.01.2009 г.

УДК 539.22

## ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ МАГНИТНОГО ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

И. А. КАНЫМГАЗИЕВА

ЕНУ им. Л.Н.Гумилёва

0100010 Астана ул.Мунайпасова,4 v-gulmira@math.kz

Получены точные аналитические решения уравнений Максвелла для излучения точечного магнитного диполя в одноосной анизотропной среде. Построены диаграммы направленности излучения точечного магнитного диполя при параллельном и перпендикулярном направлениях оси кристалла.

В последние годы анизотропные материалы нашли большое применение в микросхемах, работающих на сверхвысоких частотах. Тонкие пленки из монокристаллов эффективно используются как волноводные системы на частотах порядка 1-10 ГГц. А более сложные функциональные элементы уже используются как смесители и преобразователи частоты, фазовращатели и усилители мощности сверхвысокочастотных сигналов.

На сегодняшний день существует большое количество научных работ, посвященных расчету электромагнитных полей в анизотропных средах. Но большинство этих работ решались с помощью теории потенциалов.

Теория потенциалов разработана только для класса гладких функций. Когда поля терпят скачки, могут быть разрывы, тогда могут возникнуть математические трудности.

Феноменологическая электромагнитная теория распространения света в однородных анизотропных средах, теория отражения и преломления света на поверхности таких сред, теория распространения плоских волн в прозрачных немагнитных и магнитно-анизотропных средах систематически изложена в [1]. В работах [2-4] рассмотрены более сложные виды анизотропии, в частности, ферриты. Излагаются вопросы электродинамики сред с тензорными параметрами, к которым принадлежат намагнитченные ферромагнитные полупроводники.

В настоящее время на достаточно высоком уровне разработан математический аппарат теории обобщенных функций. Класс обобщенных функций содержит разрывные, скачкообразные и сингулярные функции. В данной работе на основе метода обобщенных функций получены точные аналитические решения уравнений Максвелла для магнитного диполя в одноосной анизотропной среде и исследованы диаграммы направленности (ДН) излучения при разной степени анизотропии среды.

---

Keywords: *Diagrams of direction, magnetic moment of dipole, anisotropic medium, isotropic medium, Poynting vector, intensities of the electromagnetic field, Maxwell's equations, a one-axis crystal, vector of current density, dielectric permeability tensor*

2000 Mathematics Subject Classification: 83C50, 74E10, 74E15, 76F05, 74N05

© И. А. Канымгазиева, 2009.

### 1. Решение уравнений Максвелла для одноосной анизотропной среды.

В [5,6] рассмотрены уравнения Максвелла для одноосной анизотропной ЭМ-среды стационарных процессов:

$$\begin{cases} i\omega\mathbf{D} + \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \\ \text{rot}\mathbf{E} - i\omega\mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

которые можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{J}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} i\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\omega\mathbf{I} & \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_0 & -i\mu_0\mu\omega\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\omega = \text{const}$ ,  $\mathbf{M}$  – оператор Максвелла,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  – напряжённости электрического и магнитного полей,  $\mu$  – коэффициент магнитной проницаемости, в вакууме  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – электрическая и магнитная постоянные,  $\mathbf{j}$  – вектор плотности тока.

В анизотропной диэлектрической среде линейная связь между индукцией и напряжённостью электрического поля имеет вид [7]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (3)$$

а вектор магнитной индукции:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}.$$

Если выбрать систему координат, совпадающую с главными осями тензора диэлектрической проницаемости, материальное уравнение (3) запишется в виде:

$$D_x = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_x, \quad D_y = \varepsilon_0\varepsilon E_y, \quad D_z = \varepsilon_0\varepsilon E_z.$$

Элементы тензора диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}$  соответствуют одноосному кристаллу. Ось кристалла направлена вдоль оси  $x$ .

Там же получены два вида решений, описывающие напряжённости электромагнитного поля с помощью функций волновых потенциалов  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$  и вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} (k_0^2(\mathbf{j}_\perp * \Psi_0 + \mathbf{j}_0 * \Psi_1 + \text{grad}_\perp \text{div} \mathbf{j}_\perp * \Psi_2) + \text{grad} \text{div} \mathbf{j} * \Psi_1), \quad (4)$$

или

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} (k_0^2(\mathbf{j}_0 * \Psi_1 - \text{rot}(\mathbf{i}(\text{rot} \mathbf{j}_\perp * \Psi_2))) + \text{grad} \text{div} \mathbf{j} * \Psi_1 + k_n^2 \mathbf{j}_\perp * \Psi_1), \quad (5)$$

и

$$\mathbf{H} = -\text{rot}(\mathbf{j}_\perp * \Psi_0 + \mathbf{j}_0 * \Psi_1 - \mathbf{i}(\partial/\partial x) \text{div} \mathbf{j}_\perp * \Psi_2), \quad (6)$$

где  $E, H$  – вектора электрической и магнитной напряженности ЭМ-поля,

$$\Psi_0 \equiv -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 r)}{r}, \quad (7)$$

$$\Psi_1 \equiv -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}} \frac{\exp(ik_n r')}{r'}, \quad (8)$$

$$\Psi_2 \equiv (\varepsilon_1/\varepsilon - 1) \Psi_0 * \Psi_1, \quad (9)$$

$$r' = \sqrt{(\varepsilon/\varepsilon_1) \cdot x^2 + y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{grad}_\perp = \text{grad} - \mathbf{i}(\partial/\partial x),$$

где символ "\*" обозначает свертку по координатам  $x, y, z$ .

Определим напряженности электромагнитного поля для сосредоточенного магнитного диполя при параллельном и перпендикулярном направлении к оси кристалла в анизотропной среде и построим диаграммы направленности для обоих случаев.

## 2. Магнитный дипольный момент в анизотропной ЭМ-среде.

Рассмотрим это решение в одноосном кристалле для точечного излучателя – диполя, помещенного в начало системы координат, с колеблющимся магнитным моментом:

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} p_m \exp(-i\omega t) \quad (p_m = \text{const}). \quad (10)$$

Плотность электрического тока определяется с помощью  $\delta$  – функции Дирака:

$$\mathbf{j} = -[\mathbf{p}, \nabla] \delta(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Откуда компоненты плотности тока (8) имеют вид:

$$\mathbf{j} = \{ \mathbf{e}_x (p_z \frac{\partial}{\partial y} - p_y \frac{\partial}{\partial z}) + \mathbf{e}_y (p_x \frac{\partial}{\partial z} - p_z \frac{\partial}{\partial x}) + \mathbf{e}_z (p_y \frac{\partial}{\partial x} - p_x \frac{\partial}{\partial y}) \} \delta(x, y, z). \quad (12)$$

Параллельная составляющая плотности тока:

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{e}_x \{ p_z \frac{\partial}{\partial y} - p_y \frac{\partial}{\partial z} \} \delta(x, y, z), \quad (13)$$

и перпендикулярная составляющая плотности тока:

$$\mathbf{j}_\perp = \{ \mathbf{e}_y (p_x \frac{\partial}{\partial z} - p_z \frac{\partial}{\partial x}) + \mathbf{e}_z (p_y \frac{\partial}{\partial x} - p_x \frac{\partial}{\partial y}) \} \delta(x, y, z), \quad (14)$$

где  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – единичные векторы координатных осей.

Магнитный дипольный момент  $\mathbf{p}$  можно выразить в виде суммы двух магнитных моментов диполя:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_\perp, \quad \mathbf{p}_0 = (p_x, 0, 0), \quad \mathbf{p}_\perp = (0, p_y, p_z). \quad (15)$$

Связь между плотностью электрического тока  $\mathbf{j}_\perp$  и магнитным моментом диполя  $\mathbf{p}_0$  в анизотропной среде определяется из (11):

$$\mathbf{j}_\perp = p_x (\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial y}) \delta(x, y, z). \quad (16)$$

Откуда,

$$\text{div} \mathbf{j}_\perp = p_x \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) = 0. \quad (17)$$

Так как решения (1) и (2) есть напряженность электрического поля, то можно для дальнейшего решения задач использовать любое из них.

*Параллельный сосредоточенный магнитный момент.* С учетом равенства (14), из решения (1) и (3) определяются напряженности электромагнитного поля магнитного дипольного момента в случае, когда магнитный дипольный момент  $\mathbf{p}_0$  направлен по оси кристалла  $x$  (рис.1):

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} k_0^2 \text{rot}(\Psi_0 \mathbf{p}_0), \\ \mathbf{H} = \text{rot}(\text{rot}(\Psi_0 \mathbf{p}_0)). \end{cases} \quad (18)$$

В этом случае выражения (15) соответствуют уравнениям электромагнитного поля в изотропных средах[8].

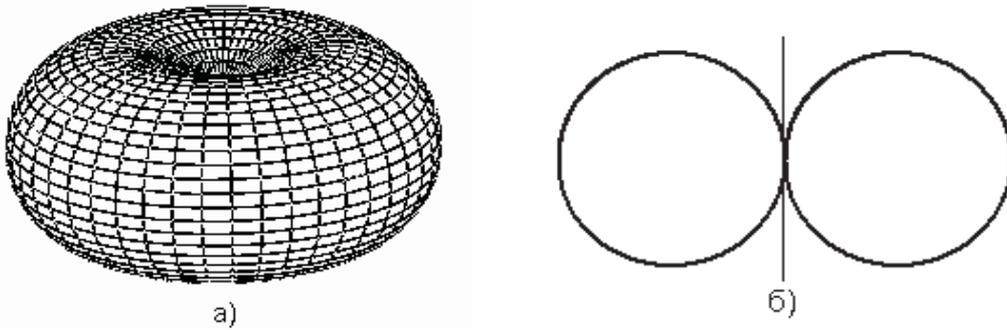


Рис. 1: ДН изотропной среды.  $\varepsilon_1/\varepsilon = 1$

Из выражения (9) определяется связь между плотностью электрического тока  $\mathbf{j}$  и магнитным моментом диполя  $\mathbf{p}_\perp$  :

$$\mathbf{j} = p_z (\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial x}) \delta(x, y, z). \quad (19)$$

Чтобы подсчитать поток энергии через поверхность сферы радиуса  $r$  с центром, надо вычислить вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}], \quad (20)$$

и проинтегрировать это выражение по сфере:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Pi_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (21)$$

где

$$\Pi_r = (\mathbf{\Pi}, \mathbf{e}_r),$$

$\bar{\mathbf{H}}$  – комплексное сопряженное  $\mathbf{H}$ .

*Перпендикулярный сосредоточенный магнитный момент.* Для точечного магнитного момента диполя  $\mathbf{p}_\perp$ , перпендикулярного оси кристалла, из решения (1) и (3) определяются компоненты напряженностей электромагнитного поля :

$$\begin{cases} E_x = -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}p_zk_0^2\frac{\partial}{\partial y}\Psi_1, \\ E_y = \frac{i}{\varepsilon_0\varepsilon\omega}p_zk_0^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi_2\right), \\ E_z = \frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}p_zk_0^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\Psi_2, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} H_x = -p_z\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\Psi_0, \\ H_y = -p_z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\Psi_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_2\right), \\ H_z = p_z\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Psi_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_2\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_0\right). \end{cases} \quad (23)$$

3. ДН излучения сосредоточенного магнитного момента

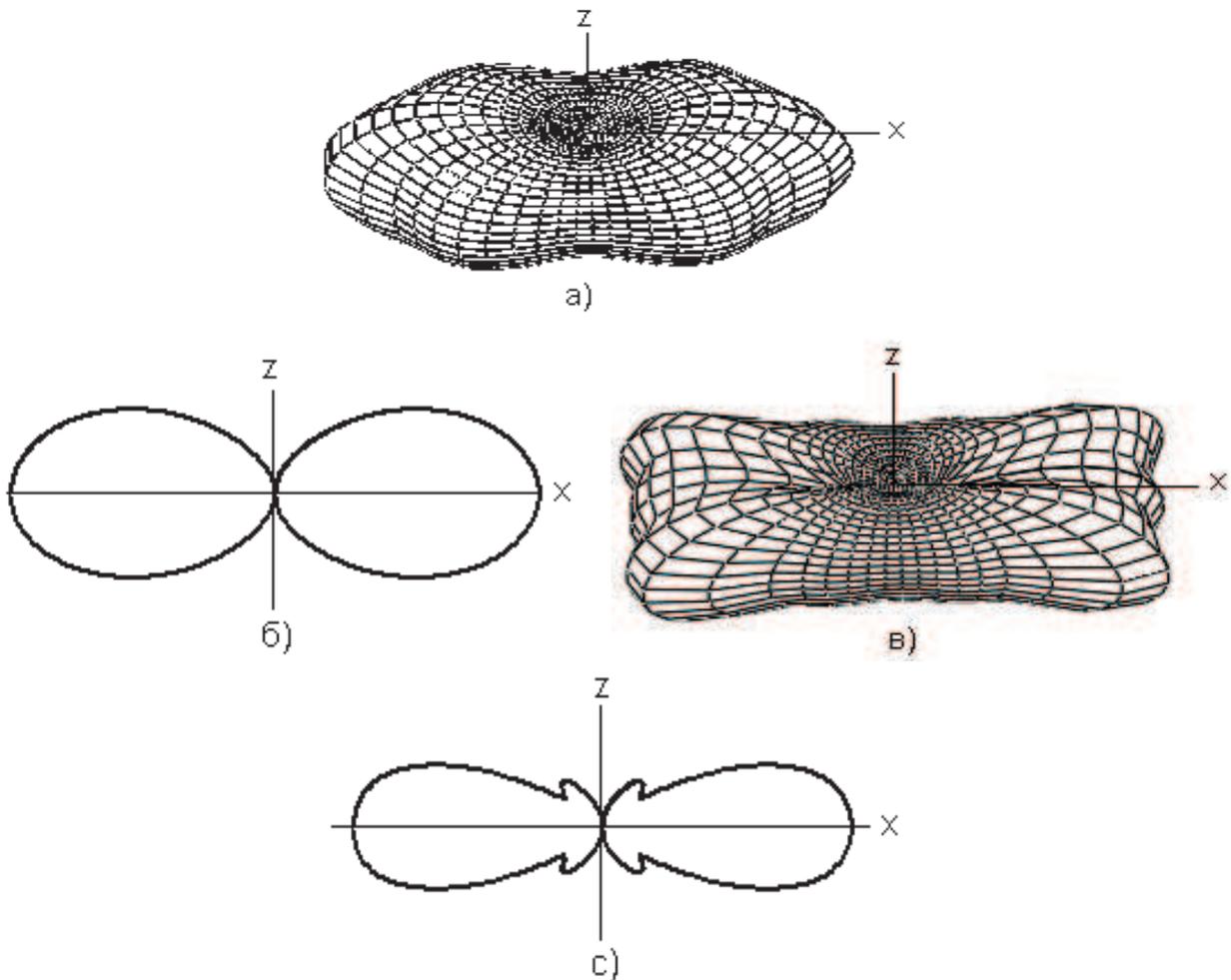


Рис. 2: ДН магнитного дипольного момента  $\mathbf{p}_\perp$  и ее сечение плоскостью, содержащей ось диполя: а,б)  $r = 3$ , в,г)  $r = 8$ .

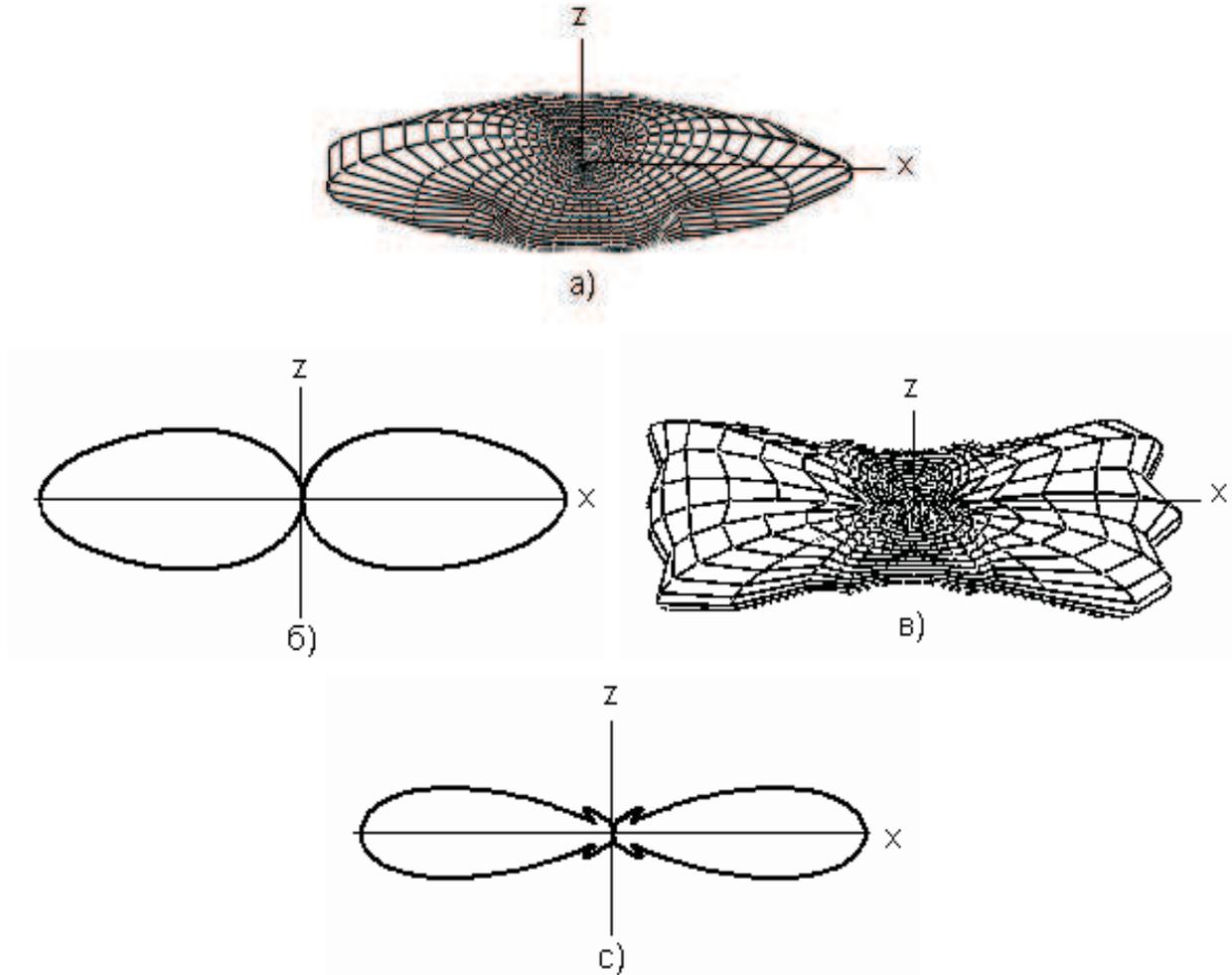


Рис. 3: ДН магнитного дипольного момента  $\mathbf{p}_\perp$ , перпендикулярного оси кристалла  $x$ .  $\varepsilon_1/\varepsilon = 15$ , а)  $r = 1$ , б), с) сечение ДН плоскостью, содержащей ось диполя, в)  $r = 5$ .

Для построения диаграммы направленности (ДН) излучения вычисляется плотность потока вектора Пойнтинга на сфере:

$$\mathbf{\Pi} = \text{Re}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}]\right), \quad (24)$$

$$X = r \sin \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta,$$

На рис.1 изображена ДН магнитного дипольного момента в случае, когда магнитный момент направлен параллельно оси кристалла. Данная ДН совпадает с ДН параллельно направленного электрического диполя в гиротропной среде, а также с ДН изотропной среды. Эта диаграмма имеет вид тороида, ось которого параллельна оси провода или диполя, а для рамки – перпендикулярна ее плоскости. Сечения диаграммы плоскостью, проходящей через ось тороида, имеют вид восьмерки; перпендикулярные к оси тороида сечения представляют собой окружности.

На рис. 2. и 3 показаны диаграммы направленности магнитного дипольного момента перпендикулярного оси кристалла при разных значениях радиуса, но при одинаковом значении диэлектрической проницаемости. Диэлектрическая проницаемость среды равны соответственно

$\varepsilon_1/\varepsilon = 6$  и  $\varepsilon_1/\varepsilon = 15$ . Магнитный диполь направлен по оси  $z$ , а ось кристалла – по  $x$ . Из рисунков видно, что излучение по направлению магнитного диполя не происходит, оно распространяется по направлению оси кристалла: чем больше анизотропия, тем больше излучение происходит по оси кристалла.

Направление максимума главного лепестка диаграммы называют направлением главного излучения магнитного момента, поскольку интенсивность излучения магнитного момента максимальна именно в этом направлении.

Предлагаемые ДН совпадают с ДН перпендикулярно направленного электрического диполя в гиротропной среде [9].

Достоверность полученных результатов проверена численным методом с помощью закона сохранения потока энергии и предельного перехода из анизотропной среды  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon$  в изотропную среду.

## Цитированная литература

1. **Kozyrev A., Van der Weide W.** // IEEE Microwave Theory and Techniques Society (IEEE MTT-S). International Microwave Symposium (IMS). Fort Worth. Tex., June 6-11. 2004.
2. **Сайбель А. Г., Фатеев В. Ф.** // Авиакосм. Приборостр. 2004. № 7, С. 70 – 72, 74.
3. **Demir Veysel, Elsherbeni Atef, Worasawate Denchai, Arvas Ercument** // A graphical user interface (GUI) for plane - wave scattering from a conducting, dielectric, or chiral sphere. IEEE Antennas and Propag. Mag. 2004. 46, № 5. С. 94 – 99.
4. **Савченко А. О., Савченко О. Я.** // Журнал технической физики. 2005. Т. 75, Вып. 10. С. 118 – 121.
5. **Саутбеков С. С., Канымгазиева И. А.** // Математический журнал. Алматы. 2007. Т. 7, № 3 (25). С. 62 – 68.
6. **Саутбеков С. С., Канымгазиева И. А.** // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот (к 75-летию со дня рождения и 50-летию научно-педагогической деятельности профессора Е.И. Нефёдова). Материалы XI - Международной Школы - семинар конференции. Москва. 2007. Т. XV, Вып.1 (43). С. 141 – 145.
7. **Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.** Сборник задач по электродинамике. М., 1970.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М., 1973.
9. **Канымгазиева И. А., Саутбеков С. С., Кожалепесова А. Б., Максут Ж.** // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия физическая. Астана. 2007. № 4 (56). С. 60 – 67.

*Поступила в редакцию 15.12.2008г.*

УДК УДК 517.946

## О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. И. КОЖАНОВ, Л. С. ПУЛЬКИНА

\* Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН

630090 Новосибирск Россия пр. ак. Коптюга, 4 kozhanov@math.nsc.ru

\*\* Самарский государственный университет

443011 Самара Россия ул. Академика Павлова, 1 pulkina@ssu.samara.ru

Настоящая работа представляет собой исследование разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для одномерных гиперболических уравнений. В этих задачах краевые условия представляют собой комбинацию нелокального граничного условия А.А. Самарского с переменными коэффициентами и граничного условия интегрального вида.

**Введение.** Граничная задача с общим нелокальным условием А.А. Самарского для одномерных линейных гиперболических уравнений ранее изучались в работе [1] для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x)u = f(x, t).$$

Существенным моментом в этой работе было использование метода Фурье, что диктовало специальный вид уравнения, постоянство коэффициентов граничных условий, а также весьма жесткие ограничения для этих коэффициентов. В настоящей работе будет использоваться другой метод, и этот метод позволит существенно расширить класс уравнений (в частности, можно будет отказаться от самосопряженного вида пространственной части), а также существенно ослабить требования на коэффициенты граничных условий. Более того, полученные результаты будут новыми и для случая постоянных коэффициентов в граничных условиях.

Краевые задачи для гиперболических уравнений с интегральными граничными условиями активно изучаются в последнее время. Как наиболее близкие к настоящей работе, отметим статьи [2 – 8]; в то же время отметим, что задачи с комбинацией граничных условий А.А. Самарского и условий интегрального вида ранее не изучались.

---

Keywords: *Linear hyperbolic equation, boundary value problem, nonlocal problem*

2000 Mathematics Subject Classification: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

© А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, 2009.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 09-01-00422а, и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала» (код проекта АХ-23/11 пр. от 12 декабря 2008 г.).

**1. Постановка задач.** Пусть  $\Omega$  есть интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  есть прямоугольник  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ . Далее, пусть  $c(x, t)$ ,  $K_1(x, t)$ ,  $K_2(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$  и  $\beta_2(t)$  есть заданные функции, опеределенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

Краевая задача I: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t) + \int_{\Omega} K_1(x, t)u(x, t) dx, \quad 0 < t < T, \quad (1.3)$$

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t) + \int_{\Omega} K_2(x, t)u(x, t) dx, \quad 0 < t < T. \quad (1.4)$$

Краевая задача II: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t) + \int_{\Omega} K_1(x, t)u(x, t) dx, \quad 0 < t < T, \quad (1.5)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t) + \int_{\Omega} K_2(x, t)u(x, t) dx, \quad 0 < t < T. \quad (1.6)$$

Краевая задача III: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t) + \int_{\Omega} K_1(x, t)u(x, t) dx, \quad 0 < t < T, \quad (1.7)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t) + \int_{\Omega} K_2(x, t)u(x, t) dx, \quad 0 < t < T. \quad (1.8)$$

Уточним, что в рассматриваемых задачах функция  $\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)$  может обращаться в нуль на отрезке  $[0, T]$ , в том числе и тождественно.

**2. Разрешимость краевой задачи I.** Определим пространства  $V_0$ ,  $W_0$ ,  $V_1$  и  $W_1$ :

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; W_2^1(\Omega)),$$

$$v_t(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

$$W_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, \quad v_x(x, t) \in V_0\},$$

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\},$$

$$W_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_1, \quad v_x(x, t) \in V_1\};$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}, \quad \|v\|_{W_0} = \|v\|_{V_0} + \|v_x\|_{V_0},$$

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{W_1} = \|v\|_{V_1} + \|v_x\|_{V_1}.$$

Осуществим некоторые формальные построения, предполагая выполненным условие:

$$c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^2([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^2([0, T]), \quad K_i(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Определим функцию  $\Delta_0(t)$ :  $\Delta_0(t) = \alpha_2(t) + \beta_2(t) - 2$ ; будем считать, что выполняется условие

$$\Delta_0(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

Далее положим:

$$\varphi_0(t) = \frac{1 - \beta_2(t)}{\Delta_0(t)}, \quad \varphi_1(t) = \frac{\beta_2(t) - 2}{\Delta_0(t)}, \quad \psi_0(t) = \frac{1 - \alpha_2(t)}{\Delta_0(t)}, \quad \psi_1(t) = -\frac{\alpha_2(t)}{\Delta_0(t)},$$

$$N_1(x, t) = \varphi_0(t)K_1(x, t) + \psi_0(t)K_2(x, t), \quad N_2(x, t) = \varphi_1(t)K_1(x, t) + \psi_1(t)K_2(x, t),$$

$$K(x, y, t) = x^2N_1(y, t) + xN_2(y, t).$$

Определим оператор  $M$ :

$$(Mu)(x, t) = u(x, t) - \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy;$$

для удобства действие оператора  $M$  на функции  $u(x, t)$  будем также обозначать  $\bar{u}(x, t)$ . Поскольку оператор  $M$  есть интегральный оператор Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром, то нетрудно указать условия его обратимости (ниже обратимость оператора  $M$  будет существенно использоваться). Положим

$$R_1(t) = 1 - \int_{\Omega} x^2N_1(x, t) dx, \quad R_2(t) = - \int_{\Omega} xN_1(x, t) dx,$$

$$S_1(t) = - \int_{\Omega} x^2N_2(x, t) dx, \quad S_2(t) = 1 - \int_{\Omega} xN_2(x, t) dx,$$

$$\Delta_1(t) = R_1(t)S_2(t) - R_2(t)S_1(t),$$

$$K_0(x, y, t) = \frac{1}{\Delta_1(t)} \{ [x^2S_2(t) - xS_1(t)]N_1(y, t) - [x^2R_2(t) - xR_1(t)]N_2(y, t) \}.$$

При выполнении условия

$$\Delta_1(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

справедливо равенство

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \int_{\Omega} K_0(x, y, t)\bar{u}(y, t) dy,$$

которое и определяет обратный оператор  $M^{-1}$ .

Определим функцию  $\Phi(x, t, u)$  ( $u = u(x, t)$ ):

$$\Phi(x, t, u) = -2 \int_{\Omega} K_t(x, y, t)u_t(y, t) dy + \int_{\Omega} \{ K(x, y, t)[c(y, t) - c(x, t)] -$$

$$-K_{tt}(x, y, t) + K_{xx}(x, y, t)\}u(y, t) dy - \int_{\Omega} K(x, y, t)u_{yy}(y, t) dy.$$

Пусть  $g(x, t)$  есть функция  $\bar{f}(x, t)$ . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lv - \Phi(x, t, M^{-1}v) = g(x, t) \quad (2.4)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$v_x(0, t) = \alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (2.5)$$

$$v_x(1, t) = \beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (2.6)$$

**Утверждение 1.** Пусть выполняются условия (2.1) – (2.3). Тогда, если функция  $v(x, t)$  является решением из пространства  $V_0$  краевой задачи (2.4), (1.2), (2.5), (2.6), то функция  $u = M^{-1}v$  будет решением из пространства  $V_0$  краевой задачи  $I$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что из принадлежности функции  $v(x, t)$  пространству  $V_0$  вытекает принадлежность тому же пространству и функции  $u(x, t)$ . Далее, выполнение условий (1.2) – (1.4) для функции  $u(x, t)$  очевидно. Имеет место равенство

$$M(Lu - f) = 0.$$

Из этого равенства и из условия (2.3), дающего однозначную обратимость оператора  $M$ , и следует, что функция  $u(x, t)$  является решением уравнения (1.1). Утверждение доказано.

Продолжим преобразования. Положим

$$a_i(x, t) = \frac{\beta_i(t) - \alpha_i(t)}{2}x^2 + \alpha_i(t)x, \quad i = 1, 2, \quad \Delta_2(t) = 1 - a_2(1, t).$$

Пусть далее выполняется условие

$$\Delta_2(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Определим функции  $b_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ :

$$b_1(x, t) = a_1(x, t) + \frac{a_2(x, t)a_1(1, t)}{\Delta_2(t)}, \quad b_2(x, t) = \frac{a_2(x, t)}{\Delta_2(t)}.$$

По заданной функции  $v(x, t)$  определим функцию  $w(x, t)$ :

$$w(x, t) = v(x, t) + a_1(x, t)v(0, t) + a_2(x, t)v(1, t).$$

Имеет место равенство:

$$v(x, t) = w(x, t) + b_1(x, t)w(0, t) + b_2(x, t)w(1, t).$$

Положим

$$B_i(x, t) = b_i(x, t) + \int_{\Omega} K_0(x, y, t)b_i(y, t) dy, \quad i = 1, 2,$$

$$\Phi_1(x, t, w(x, t)) = \Phi(x, t, w(x, t)) + B_1(x, t)w(0, t) + B_2(x, t)w(1, t) + \int_{\Omega} K_0(x, y, t)w(y, t) dy).$$

Если  $v(x, t)$  является решением краевой задачи (2.4), (1.2), (2.5), (2.6), принадлежащим пространству  $V_0$ , то для функции  $w(x, t)$  выполняются условия:

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.8)$$

а также равенство

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) + c(x, t)w(x, t) = g(x, t) - b_1(x, t)w_{tt}(0, t) - b_2(x, t)w_{tt}(1, t) - \\ - 2b_{1t}(x, t)w_t(0, t) - 2b_{2t}(x, t)w_t(1, t) + [b_{1xx}(x, t) - b_{1tt}(x, t) - b_1(x, t)c(x, t)]w(0, t) + \\ + [b_{2xx}(x, t) - b_{2tt}(x, t) - b_2(x, t)c(x, t)]w(1, t) + \Phi_1(x, t, w). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полагая в (2.9) вначале  $x = 0$ , затем  $x = 1$ , нетрудно получить равенства:

$$w_{tt}(0, t) = w_{xx}(0, t) + [b_{1xx}(0, t) - c(0, t)]w(0, t) + \Phi(0, t, w(0, t)) + g(0, t), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} w_{tt}(1, t) = \{-b_1(1, t)w_{xx}(0, t) + w_{xx}(1, t) - 2b_{1t}(1, t)w_t(0, t) - 2b_{2t}(1, t)w_t(1, t) + \\ + (b_{1xx}(1, t) - b_{1tt}(1, t) - b_1(1, t)c(1, t) - b_1(1, t)[b_{1xx}(0, t) - c(0, t)])w(0, t) + \\ + [b_{2xx}(1, t) - b_{2tt}(1, t) - b_2(1, t)c(1, t)]w(1, t) + \\ + \Phi(1, t, w(1, t)) + B_1(1, t)w(0, t) + B_2(1, t)w(1, t)\} - \\ - b_1(1, t)\Phi(0, t, w) + g(1, t) - b_1(1, t)g(0, t)\} \Delta_2(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Заменим в (2.9) функции  $w_{tt}(0, t)$  и  $w_{tt}(1, t)$  их представлениями по формулам (2.10) и (2.11). Получим следующее равенство:

$$w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) + c(x, t)w(x, t) = \tilde{g}(x, t) + A_1(x, t)w_{xx}(0, t) + A_2(x, t)w_{xx}(1, t) + F(x, t, w), \quad (2.12)$$

в котором  $\tilde{g}(x, t)$ ,  $A_1(x, t)$  и  $A_2(x, t)$  есть функции

$$\tilde{g}(x, t) = g(x, t) - [b_1(x, t) - b_2(x, t)b_1(1, t)\Delta_2(t)]g(0, t) - b_2(x, t)\Delta_2(t)g(1, t),$$

$$A_1(x, t) = [b_2(x, t)b_1(1, t) - b_1(x, t)]\Delta_2(t), \quad A_2(x, t) = -b_2(x, t)\Delta_2(t),$$

$F(x, t, w)$  представляет собой линейную форму от функций  $w(0, t)$ ,  $w(1, t)$ ,  $w_t(0, t)$  и  $w_t(1, t)$ , а также от некоторых интегралов от функций вида  $\varphi(y, t)w(y, t)$ ,  $\psi(y, t)w_t(y, t)$ ,  $\chi(y, t)w_{yy}(y, t)$ .

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (2.12) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2.13)$$

**Утверждение 2.** Пусть выполняются условия (2.1) – (2.3). Тогда, если функция  $w(x, t)$  является решением из пространства  $V_0$  краевой задачи (2.12), (1.2), (2.13), то функция  $u(x, t)$ , определенная с помощью равенств

$$u = M^{-1}v, \quad v(x, t) = w(x, t) + b_1(x, t)w(0, t) + b_2(x, t)w(1, t),$$

будет решением из пространства  $V_0$  краевой задачи  $I$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что условие (2.7) выполняется вследствие выполнения условия (2.2). Далее, из принадлежности функции  $w(x, t)$  пространству  $V_0$  вытекает принадлежность функции  $v(x, t)$  тому же пространству. В уравнении (2.12) положим вначале  $x = 0$ , затем  $x = 1$  (вследствие принадлежности функции  $w(x, t)$  пространству  $V_0$  это

возможно). Несложные вычисления показывают, что функция  $w(x, t)$  будет решением уравнения (2.9). Но тогда функция  $v(x, t)$ , определенная указанным в формулировке утверждения образом, будет решением из пространства  $V_0$  краевой задачи (2.4), (1.2), (2.5), (2.6). Согласно утверждению 1, функция  $u(x, t)$ , определенная равенством  $u = M^{-1}v$ , будет решением из пространства  $V_0$  краевой задачи  $I$ . Утверждение доказано.

Из утверждений 1 и 2 очевидным образом следует, что для доказательства разрешимости в пространстве  $V_0$  краевой задачи  $I$  достаточно установить разрешимость в этом пространстве краевой задачи (2.12), (1.2), (2.13).

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (2.1) – (2.3) и пусть выполняются включения  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_x(x, t) \in L_2(Q)$ . Тогда краевая задача  $I$  имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ .

**Доказательство.** Покажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (2.12), (1.2), (2.13) имеет решение  $w(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ . Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть  $\varepsilon$  есть положительное число,  $\lambda$  есть число из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию  $w(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$w_{tt} - w_{xx} + c(x, t)w - \varepsilon w_{xxt} = \tilde{g}(x, t) + \lambda[A_1(x, t)w_{xx}(0, t) + A_2(x, t)w_{xx}(1, t) + F(x, t, w)] \quad (2.12_{\varepsilon, \lambda})$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2) и (2.13). Покажем, что для фиксированного  $\varepsilon$  данная краевая задача при выполнении условий теоремы разрешима в пространстве  $W_1$  для всех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ .

Заметим прежде всего, что функции  $\tilde{g}(x, t)$  и  $\tilde{g}_x(x, t)$  принадлежат пространству  $L_2(Q)$  — это следует из принадлежности функций  $f(x, t)$  и  $f_x(x, t)$  пространству  $L_2(Q)$ , из представления функции  $\tilde{g}(x, t)$  и из условия (2.1). Как обычно, это делается при применении метода продолжения по параметру, обозначим через  $\Lambda$  множество тех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ , для которых краевая задача (2.12 $_{\varepsilon, \lambda}$ ), (1.2), (2.13) при выполнении условий теоремы разрешима в требуемом пространстве для любой функции  $\tilde{g}(x, t)$  такой, что  $\tilde{g}(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $\tilde{g}_x(x, t) \in L_2(Q)$ . Если мы покажем, что это множество не пусто, одновременно открыто и замкнуто, то получим, что оно будет совпадать со всем отрезком  $[0, 1]$ . Совпадение множества  $\Lambda$  со всем отрезком  $[0, 1]$  и даст разрешимость краевой задачи (2.12 $_{\varepsilon, \lambda}$ ), (1.2), (2.13) при фиксированных  $\varepsilon$  и всех  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ .

Тот факт, что множество  $\Lambda$  не пусто, очевиден, поскольку число  $0 \in \Lambda$  [9, 10]. Открытость и замкнутость множества  $\Lambda$  устанавливаются с помощью априорных оценок. Покажем их наличие.

Пусть  $\gamma$  есть фиксированное положительное число, величина которого будет уточнена ниже. Рассмотрим равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (w_{x\tau\tau} - w_{xxx} + cw_x + c_x w - \varepsilon w_{xxx\tau}) [w_{x\tau} - (x - \frac{1}{2})w_{xx} - \varepsilon\gamma w_{xxx\tau}] dx d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \{ \tilde{g}_x + \lambda[A_{1x}w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}w_{xx}(1, \tau) + F_x(x, \tau, w)] \} [w_{x\tau} - (x - \frac{1}{2})w_{xx} - \varepsilon\gamma w_{xxx\tau}] dx d\tau. \end{aligned}$$

Следующее равенство является его следствием:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \frac{\gamma\varepsilon}{2} \int_{\Omega} [w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t)] dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau = \\
= & -\lambda \gamma \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau) w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}(x, \tau) w_{xx}(1, \tau)] w_{xxx\tau} dx d\tau + \int_{\Omega} (x - \frac{1}{2}) w_{xt}(x, t) w_{xx}(x, t) dx + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} [\tilde{g}_x - c w_x - c_x w + \lambda F_x] [w_{xx} - (x - \frac{1}{2}) w_{xx} - \gamma \varepsilon w_{xxx\tau}] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2] dx d\tau - \\
& - \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (x - \frac{1}{2}) w_{xx} w_{xxx\tau} dx d\tau + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau) w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}(x, \tau) w_{xx}(1, \tau)] \cdot \\
& \cdot [w_{x\tau} - (x - \frac{1}{2}) w_{xx}] dx d\tau. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части равенства (2.7) оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \gamma \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} [A_{1x}(x, \tau) w_{xx}(0, \tau) + A_{2x}(x, \tau) w_{xx}(1, \tau)] w_{xxx\tau} dx d\tau \right| \leq \\
\leq & \frac{\gamma \varepsilon^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \gamma \max_Q [A_{1x}^2(x, t)] \int_0^t w_{xx}^2(0, t) dt + \gamma \max_Q [A_{2x}^2(x, t)] \int_0^t w_{xx}^2(1, \tau) d\tau. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого правой части (2.14) имеет место оценка:

$$\left| \int_{\Omega} (x - \frac{1}{2}) w_{xt}(x, t) w_{xx}(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xt}^2(x, t) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_{xx}^2(x, t) dx. \tag{2.16}$$

Далее, используя представления функций  $\tilde{g}(x, t)$  и  $F(x, t, w)$ , неравенство Юнга и элементарные интегральные неравенства, нетрудно показать, что оставшиеся слагаемые правой части равенства (2.14) оцениваются сверху величиной:

$$\begin{aligned}
& \delta \left\{ \gamma \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau + \right. \\
& \left. + R_1 \left[ \int_0^t \int_{\Omega} (w_{xx}^2 + w_{x\tau}^2) dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} (\tilde{g}^2 + \tilde{g}_x^2) dx d\tau \right] \right\}
\end{aligned}$$

с произвольным положительным числом  $\delta$  и числом  $R_1$ , определяющимся функциями  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ ,  $K_1(x, t)$ ,  $K_2(x, t)$ , а также числами  $\delta$  и  $\gamma$ .

Выберем число  $\gamma$  так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\gamma \max \left\{ \max_Q [A_{1x}^2(x, t)], \max_Q [A_{2x}^2(x, t)] \right\} < \frac{1}{4}.$$

Зафиксировав число  $\gamma$ , используя неравенства (2.15) и (2.16), а также подбирая число  $\delta$  малым, нетрудно теперь получить, что следствием равенства (2.14) будет неравенство:

$$\int_{\Omega} [w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t)] dx + \varepsilon \int_{\Omega} [w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t)] dx + \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \\ + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau \leq R_2 \left[ \int_0^t \int_{\Omega} (w_{x\tau}^2 + w_{xx}^2) dx d\tau + \int_Q (\tilde{g}^2 + \tilde{g}_x^2) dx d\tau \right],$$

в котором число  $R_2$  определяется лишь функциями  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ ,  $K_1(x, t)$  и  $K_2(x, t)$ . Из этого неравенства с помощью леммы Гронуолла нетрудно получить первую априорную оценку решений краевой задачи (2.12 $_{\varepsilon, \lambda}$ ), (1.2), (2.13):

$$\int_{\Omega} \{w_{xt}^2(x, t) + w_{xx}^2(x, t) + \varepsilon[w_{xxt}^2(x, t) + w_{xxx}^2(x, t)]\} dx + \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\Omega} w_{xxx\tau}^2 dx d\tau + \\ + \int_0^t [w_{xx}^2(0, \tau) + w_{xx}^2(1, \tau)] d\tau \leq R_3 \int_Q (\tilde{g}^2 + \tilde{g}_x^2) dx d\tau, \quad (2.17)$$

постоянная  $R_3$  в которой определяется числом  $T$ , а также функциями  $c(x, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ ,  $K_1(x, t)$  и  $K_2(x, t)$ . Используя далее уравнения (2.12 $_{\varepsilon, \lambda}$ ) и продифференцированное по переменной  $x$  уравнение (2.12 $_{\varepsilon, \lambda}$ ), нетрудно получить вторую априорную оценку:

$$\int_0^t \int_{\Omega} [w_{\tau\tau}^2 + \varepsilon w_{x\tau\tau}^2] dx d\tau \leq R_4 \int_Q (\tilde{g}^2 + \tilde{g}_x^2) dx d\tau, \quad (2.18)$$

постоянная  $R_4$  в которой определяется лишь числом  $T$  и функциями  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ ,  $K_1(x, t)$ ,  $K_2(x, t)$ .

Оценок (2.17) и (2.18) уже вполне достаточно для доказательства открытости и замкнутости множества  $\Lambda$ . Действительно, эти оценки означают, что при фиксированном  $\varepsilon$  имеет место неравенство

$$\|w\|_{W_1} \leq R_0 (\|\tilde{g}\|_{L_2(Q)} + \|\tilde{g}_x\|_{L_2(Q)}).$$

Применяя теперь стандартные приемы доказательства открытости и замкнутости множества  $\Lambda$  (см. [11]; конкретную реализацию в близкой ситуации см. [7]), с помощью данного неравенства нетрудно установить требуемое.

Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества  $\Lambda$  дают совпадение  $\Lambda$  со всем отрезком  $[0, 1]$ . Следовательно, краевая задача (2.12 $_{\varepsilon, \lambda}$ ), (1.2), (2.13) при выполнении условий теоремы будет разрешима в пространстве  $W_1$  для любого фиксированного числа  $\varepsilon$ .

Для семейства  $\{w^\varepsilon(x, t)\}$  решений краевой задачи (2.12 $_{\varepsilon, 1}$ ), (1.2), (2.13) по-прежнему имеют место оценки (2.17) и (2.18). Выбирая теперь последовательность  $\{\varepsilon_n\}$  такую, что  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , далее стандартным образом выбирая сходящиеся последовательности, нетрудно показать существование предельной функции  $w(x, t)$ , принадлежащей пространству  $V_0$  и являющейся решением краевой задачи (2.12), (1.2), (2.13) (пример осуществления подобной процедуры см. [7]). Разрешимость этой краевой задачи в пространстве  $V_0$ , утверждения 1 и 2 и дают разрешимость исходной краевой задачи I в том же пространстве. Теорема доказана.

**3. Разрешимость краевых задач II и III.** Доказательство разрешимости краевых задач II и III будет проведено с помощью описанной выше схемы, а также с помощью метода регуляризации. Будем считать, что выполняются необходимые условия гладкости (точные условия будут даны в формулировках соответствующих теорем).

Рассмотрим вначале краевую задачу II. Построим оператор  $M$  того же вида, что в п. 2, преобразующий эту задачу в начально-краевую задачу с граничными условиями без интегральных слагаемых, но для уравнения с интегродифференциальными членами. Функцию  $K(x, y, t)$ , определяющую этот оператор, будем искать в виде:

$$K(x, y, t) = [x\varphi_0(t) + \varphi_1(t)]K_1(y, t) + [x\psi_0(t) + \psi_1(t)]K_2(y, t).$$

Пусть выполняется условие

$$\Delta_0(t) = [\alpha_2(t) - 1][\beta_1(t) - 1] - \alpha_1(t)[\beta_2(t) - 1] \neq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (3.1)$$

Функции  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\psi_0(t)$  и  $\psi_1(t)$  определим равенствами:

$$\varphi_0(t) = \frac{1 - \beta_1(t)}{\Delta_0(t)}, \quad \varphi_1(t) = \frac{\beta_2(t) - 1}{\Delta_0(t)}, \quad \psi_0(t) = -\frac{\alpha_1(t)}{\Delta_0(t)}, \quad \psi_1(t) = \frac{1 - \alpha_2(t)}{\Delta_0(t)}.$$

Функция  $K(x, y, t)$ , определенная по этим функциям и функциям  $K_1(x, t)$  и  $K_2(x, t)$  указанным выше образом, и будет искомой.

Положим

$$N_1(x, t) = \varphi_0(t)K_1(x, t) + \psi_0(t)K_2(x, t), \quad N_2(x, t) = \varphi_1(t)K_1(x, t) + \psi_1(t)K_2(x, t),$$

$$R_1(t) = 1 - \int_{\Omega} xN_1(x, t) dx, \quad R_2(t) = - \int_{\Omega} N_1(x, t) dx,$$

$$S_1(t) = - \int_{\Omega} xN_2(x, t) dx, \quad S_2(t) = 1 - \int_{\Omega} N_2(x, t) dx.$$

Пусть выполняется условие

$$\Delta_1(t) \equiv R_1(t)S_2(t) - R_2(t)S_1(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

Тогда имеют место равенства:

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t) dy, \quad u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \int_{\Omega} K_0(x, y, t)\bar{u}(y, t) dy$$

(второе равенство определяет оператор  $M^{-1}$ ).

Определим функцию  $\Phi(x, t, u)$  прежним образом, но по построенной выше функции  $K(x, y, t)$ .

Вновь рассмотрим краевую задачу типа задачи (2.4), (1.2), (2.6), (2.7): найти функцию  $v(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lv - \Phi(x, t, M^{-1}v) = \bar{f}(x, t) \quad (3.3)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$v_x(0, t) = \alpha_1(t)v(0, t) + \alpha_2(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.4)$$

$$v(1, t) = \beta_1(t)v(0, t) + \beta_2(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.5)$$

**Утверждение 3.** Пусть выполняются условия (2.1), (3.1), (3.2). Тогда, если функция  $v(x, t)$  является решением из пространства  $V_0$  краевой задачи (3.3), (1.2), (3.4), (3.5), то функция  $u = M^{-1}v$  будет решением из пространства  $V_0$  краевой задачи II.

Доказательство этого утверждения проводится вполне аналогично доказательству утверждения 1.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (3.1) и (3.2), а также условия

$$c(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^3([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^3([0, T]), \quad K_i(x, t) \in C^3(\overline{Q}); \quad (3.6)$$

$$\alpha_2(t) \geq -1, \quad \beta_2(t) \leq 0, \quad t \in [0, T]; \quad (3.7)$$

$$\exists \mu_0 \in (0, 2) : \{ \mu_0[1 + \alpha_2^2(t)] - 6\beta_2'(t) \} \xi_1^2 + 4[\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi_1\xi_2 + \mu_0\xi_2^2 \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad \xi \in \mathbf{R}^2. \quad (3.8)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{xt}(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f(x, 0) \equiv 0$  при  $x \in \Omega$ , краевая задача II имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ .

**Доказательство.** Покажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (3.3), (1.2), (3.4), (3.5) имеет решение  $v(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ .

Пусть  $\varepsilon$  есть положительное число. Положим  $\beta_{2\varepsilon}(t) = \beta_2(t) - \varepsilon$ . Рассмотрим следующую вспомогательную начально-краевую задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (3.3) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), (3.4), а также условие

$$v(1, t) = \beta_1(t)v(0, t) + \beta_{2\varepsilon}(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.5_\varepsilon)$$

Покажем, что данная краевая задача для любой функции  $f(x, t)$ , удовлетворяющей условиям теоремы, и для любого фиксированного числа  $\varepsilon$  при выполнении условий (3.6) и (3.7) имеет решение  $v(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V_0$ ,  $v_t(x, t) \in V_0$ . Действительно, условия (3.4) и (3.5<sub>ε</sub>) можно записать в виде условий краевой задачи I:

$$v_x(0, t) = \left[ \alpha_1(t) - \frac{\alpha_2(t)\beta_1(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} \right] v(0, t) + \frac{\alpha_2(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} v(1, t), \quad (3.4')$$

$$v_x(1, t) = -\frac{\beta_1(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} v(0, t) + \frac{1}{\beta_{2\varepsilon}(t)} v(1, t). \quad (3.5'_\varepsilon)$$

Функция  $\Delta_0(t)$  из п. 2 для этой задачи имеет вид  $\Delta_0(t) = \frac{\alpha_2(t) + 1}{\beta_{2\varepsilon}(t)} - 2$ ; условие (3.7) дает выполнение условия  $\Delta_0(t) \neq 0$  при  $t \in [0, T]$ . Это условие, а также условие (3.6) означают, что от задачи (3.3), (1.2), (3.4'), (3.5'<sub>ε</sub>) вновь можно эквивалентным образом перейти к задаче вида (2.12), (1.2), (2.13); для последней же задачи, повторяя все рассуждения доказательства теоремы 1, нетрудно установить разрешимость в пространстве  $V_0$ . Более того, если вместо задачи (3.3), (1.2), (3.4'), (3.5'<sub>ε</sub>) рассмотреть «продифференцированную по  $t$ » задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$v_{ttt} - v_{xxt} + c(x, t)v_t + c_t(x, t)v = \bar{f}_t(x, t) + (\Phi(x, t, M^{-1}v))_t$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$v_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v_{xt}(0, t) = \left[ \alpha_1(t) - \frac{\alpha_2(t)\beta_1(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} \right] v_t(0, t) + \frac{\alpha_2(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} v_t(1, t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \alpha_1(t) - \frac{\alpha_2(t)\beta_1(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} \right]_t v(0, t) + \left[ \frac{\alpha_2(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} \right]_t v(1, t), \quad 0 < t < T, \\
v_{xt}(1, t) & = -\frac{\beta_1(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} v_t(0, t) + \frac{1}{\beta_{2\varepsilon}(t)} v_t(1, t) - \left[ \frac{\beta_1(t)}{\beta_{2\varepsilon}(t)} \right]_t v(0, t) + \left[ \frac{1}{\beta_{2\varepsilon}(t)} \right]_t v(1, t), \quad 0 < t < T,
\end{aligned}$$

то нетрудно показать, что данная краевая задача при выполнении условий теоремы и указанных в формулировке теоремы включений для функции  $f(x, t)$  имеет решение  $v(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V_0$ ,  $v_t(x, t) \in V_0$ .

Вернемся к краевой задаче (3.3), (1.2), (3.4), (3.5 $_{\varepsilon}$ ). Как следует из сказанного выше, эта задача имеет решение  $v_{\varepsilon}(x, t)$  такое, что  $v_{\varepsilon}(x, t) \in V_0$ ,  $v_{\varepsilon t}(x, t) \in V_0$ . Обозначим  $u_{\varepsilon} = M^{-1}v_{\varepsilon}$ . Рассмотрим равенство:

$$\int_0^t \int_{\Omega} (v_{\varepsilon\tau\tau\tau} - v_{\varepsilon xxt} + cv_{\varepsilon\tau} + c_{\tau}v_{\varepsilon} - \bar{f}_{\tau} - (\Phi(x, \tau, u_{\varepsilon}))_{\tau}) [v_{\varepsilon\tau\tau} - \mu(x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon x\tau}] dx d\tau = 0,$$

в котором  $\mu$  есть произвольное число из интервала  $(\mu_0, 2)$ . После интегрирования по частям это равенство преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} [v_{\varepsilon tt}^2(x, t) + v_{\varepsilon xt}^2(x, t)] dx + \frac{\mu}{4} \int_0^t [v_{\varepsilon\tau\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon\tau\tau}^2(1, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(1, \tau)] d\tau + \\
& + \int_0^t v_{\varepsilon x\tau}(0, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(0, \tau) d\tau - \int_0^t v_{\varepsilon x\tau}(1, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(1, \tau) d\tau = \mu \int_{\Omega} (x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon xt}(x, t)v_{\varepsilon tt}(x, t) dx + \\
& + \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} [v_{\varepsilon\tau\tau}^2 + v_{\varepsilon x\tau}^2] dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} [\bar{f}_{\tau} - cv_{\varepsilon\tau} - c_{\tau}v_{\varepsilon}] [v_{\varepsilon\tau\tau} - \mu(x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon x\tau}] dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ -2 \int_{\Omega} K_{\tau}(x, y, \tau)u_{\varepsilon\tau\tau}(y, \tau) dy - 2 \int_{\Omega} K_{\tau\tau}(x, y, \tau)u_{\varepsilon\tau}(y, \tau) dy + \right. \\
& \int_{\Omega} (K(x, y, \tau)[c(y, \tau) - c(x, \tau)] - K_{\tau\tau}(x, y, \tau) + K_{xx}(x, y, \tau)) u_{\varepsilon\tau}(y, \tau) dy + \\
& \left. \int_{\Omega} (K(x, y, \tau)[c(y, \tau) - c(x, \tau)] - K_{\tau\tau}(x, y, \tau) + K_{xx}(x, y, \tau))_{\tau} u_{\varepsilon}(y, \tau) dy \right\} \times \\
& \times [v_{\varepsilon\tau\tau} - \mu(x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon x\tau}] dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} K_y(x, y, \tau)u_{\varepsilon y\tau}(y, \tau) dy + \right. \\
& \left. + \int_{\Omega} K_{y\tau}(x, y, \tau)u_{\varepsilon y}(y, \tau) dy \right] [v_{\varepsilon\tau\tau} - \mu(x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon x\tau}] dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} [K(x, 0, \tau)u_{\varepsilon y\tau}(0, \tau) - K(x, 1, \tau)u_{\varepsilon y\tau}(1, \tau)] [v_{\varepsilon\tau\tau} - \mu(x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon x\tau}] dx d\tau +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} [K_{\tau}(x, 0, \tau)u_{\varepsilon y}(0, \tau) - K_{\tau}(x, 1, \tau)u_{\varepsilon y}(1, \tau)][v_{\varepsilon\tau\tau} - \mu(x - \frac{1}{2})v_{\varepsilon x\tau}] dx d\tau. \quad (3.9)$$

Для интегралов по интервалам  $(0, 1)$  прямых  $x = 0$  и  $x = 1$  вследствие краевых условий имеет место равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4} \int_0^t [v_{\varepsilon\tau\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon\tau\tau}^2(1, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(1, \tau)] d\tau + \int_0^t v_{\varepsilon x\tau}(0, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(0, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^t v_{\varepsilon x\tau}(1, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(1, \tau) d\tau = \int_0^t \left\{ \frac{\mu}{4} [1 + \alpha_2^2(\tau)]v_{\varepsilon x\tau}^2(1, \tau) + \right. \\ & + [\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)]v_{\varepsilon x\tau}(1, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(0, \tau) + \frac{\mu}{4}v_{\varepsilon\tau\tau}^2(0, \tau) \left. \right\} d\tau + \frac{\mu}{4} \int_0^t v_{\tau\tau}^2(1, \tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{2}\beta_2(t)v_{\varepsilon xt}^2(1, t) + \frac{\mu}{4} \int_0^t \{ [\alpha_1(\tau)v_{\varepsilon\tau}(0, \tau) + \alpha_1'(\tau)v_{\varepsilon}(0, \tau) + \alpha_2'(\tau)v_{\varepsilon x}(1, \tau)]^2 + \\ & + 2[\alpha_1(\tau)v_{\varepsilon\tau}(0, \tau) + \alpha_1'(\tau)v_{\varepsilon}(0, \tau) + \alpha_2'(\tau)v_{\varepsilon x}(1, \tau)]\alpha_2(\tau)v_{\varepsilon x\tau}(1, \tau) \} d\tau + \\ & + \int_0^t \{ \alpha_1(\tau)v_{\varepsilon\tau}(0, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(0, \tau) + \alpha_1'(\tau)v_{\varepsilon}(0, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(0, \tau) + \alpha_2'(\tau)v_{\varepsilon x}(1, \tau)v_{\varepsilon\tau\tau}(0, \tau) - \\ & - 2\beta_1'(\tau)v_{\varepsilon\tau}(0, \tau)v_{\varepsilon x\tau}(0, \tau) - \beta_1''(\tau)v_{\varepsilon}(0, \tau)v_{\varepsilon x\tau}(1, \tau) - \beta_2''(\tau)v_{\varepsilon x}(1, \tau)v_{\varepsilon x\tau}(1, \tau) \} d\tau. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Далее, правую часть равенства (3.9) нетрудно оценить, используя неравенство Юнга, представление функции  $u_{\varepsilon}(x, t)$  через функцию  $v_{\varepsilon}(x, t)$  и простейшие интегральные неравенства, величиной

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4} \int_{\Omega} [v_{\varepsilon xt}^2(x, t) + v_{\varepsilon tt}^2(x, t)] dx + \delta \int_0^t [v_{\varepsilon x\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(1, \tau)] d\tau + \\ & + C_1 \left[ \int_0^t \int_{\Omega} (v_{\varepsilon x\tau}^2 + v_{\varepsilon\tau\tau}^2) dx d\tau + \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt \right] \end{aligned}$$

с произвольным положительным числом  $\delta$  и с числом  $C_1$ , определяющимся функциями  $c(x, t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $K_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , а также числом  $\delta$ . Учитывая условия (3.7) и (3.8), вновь используя интегральные оценки младших производных через старшие, подбирая число  $\delta$  малым и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получаем, что следствием равенств (3.9) и (3.10) является априорная оценка

$$\int_{\Omega} [v_{\varepsilon tt}^2(x, t) + v_{\varepsilon xt}^2(x, t)] dx + \int_0^t [v_{\varepsilon\tau\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon\tau\tau}^2(1, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon x\tau}^2(1, \tau)] d\tau \leq C_2 \quad (3.11)$$

с постоянной  $C_2$ , определяющейся лишь числом  $T$ , функциями  $f(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $K_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ . Из этой оценки и из самого уравнения (3.3) следует, что имеет место вторая априорная оценка

$$\int_{\Omega} v_{\varepsilon xx}^2(x, t) dx + \int_0^t [v_{\varepsilon xx}^2(0, \tau) + v_{\varepsilon xx}^2(1, \tau)] d\tau \leq C_3 \quad (3.12)$$

с постоянной  $C_2$ , вновь определяющейся лишь числом  $T$ , функциями  $f(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $K_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Оценок (3.11) и (3.12) вполне достаточно для осуществления процедуры предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в задаче (3.3), (1.2), (3.4), (3.6 $_{\varepsilon}$ ); собственно же предельный переход осуществляется стандартным образом с использованием свойства рефлексивности гильбертова пространства. Предельная функция  $v(x, t)$  будет принадлежать пространству  $V_0$  и будет представлять собой решение задачи (3.3), (1.2), (3.4), (3.5 $_0$ ), функция же  $u(x, t)$ , определенная равенством  $u = M^{-1}v$ , будет принадлежать тому же пространству и будет представлять собой искомое решение краевой задачи II. Теорема доказана.

Обратимся теперь к краевой задаче III.

Вновь построим оператор  $M$ , преобразующий задачу с интегральными условиями в задачу для интегродифференциального уравнения. Этот оператор определяется функциями  $\Delta_0(t)$ ,  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_1(t)$  и  $K(x, y, t)$ :

$$\Delta_0(t) = -1 - \alpha_1(t) - \alpha_2(t) + \beta_1(t) + \beta_2(t), \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{\Delta_0(t)}, \quad \varphi_1(t) = \frac{\beta_1(t) + \beta_2(t) - 1}{\Delta_0(t)},$$

$$\psi_0(t) = -\frac{1}{\Delta_0(t)}, \quad \psi_1(t) = -\frac{\alpha_1(t) + \alpha_2(t)}{\Delta_0(t)},$$

$$K(x, y, t) = [x\varphi_0(t) + \varphi_1(t)]K_1(y, t) + [x\psi_0(t) + \psi_1(t)]K_2(y, t);$$

чтобы эти функции были корректно определены, необходимо выполнение условия

$$\Delta_0(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

Определим функции  $N_1(x, t)$ ,  $N_2(x, t)$ ,  $R_1(t)$ ,  $R_2(t)$ ,  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  так же, как определяли их ранее:

$$N_1(x, t) = \varphi_0(t)K_1(x, t) + \psi_0(t)K_2(x, t), \quad N_2(x, t) = \varphi_1(t)K_1(x, t) + \psi_1(t)K_2(x, t),$$

$$R_1(t) = 1 - \int_{\Omega} xN_1(x, t) dx, \quad R_2(t) = - \int_{\Omega} N_1(x, t) dx,$$

$$S_1(t) = - \int_{\Omega} xN_2(x, t) dx, \quad S_2(t) = 1 - \int_{\Omega} N_2(x, t) dx.$$

Условием, гарантирующим обратимость оператора  $M$ , вновь будет условие

$$\Delta_1(t) \equiv R_1(t)S_2(t) - R_2(t)S_1(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

Вновь рассмотрим краевую задачу типа задачи (2.4), (1.2), (2.6), (2.7): найти функцию  $v(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$Lv - \Phi(x, t, M^{-1}v) = \bar{f}(x, t) \quad (3.15)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$v(0, t) = \alpha_1(t)v_x(0, t) + \alpha_2(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.16)$$

$$v(1, t) = \beta_1(t)v_x(0, t) + \beta_2(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.17)$$

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (3.6), (3.13) и (3.14), а также условия

$$\alpha_1(t) \geq 0, \quad \beta_2(t) \leq 0, \quad \alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (3.18)$$

$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (3.19)$$

$$\alpha_2(t) + \beta_1(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (3.20)$$

$$\exists \mu \in (0, 2) : \quad [\mu_0 + 6\alpha'_1(t)]\xi_1^2 + 12\alpha'_2(t)\xi_1\xi_2 + [\mu_0 - 6\beta'_2(t)]\xi_2^2 \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad \xi \in \mathbf{R}^2. \quad (3.21)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  такой, что  $f(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f_{xt}(x, t) \in L_2(Q)$ ,  $f(x, 0) \equiv 0$  при  $x \in \Omega$ , краевая задача III имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ .

**Доказательство.** Покажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (3.15), (1.2), (3.16), (3.17) имеет решение  $v(x, t)$ , принадлежащее пространству  $V_0$ . Пусть  $\varepsilon$  есть положительное число. Положим  $\alpha_{1\varepsilon}(t) = \alpha_1(t) + \varepsilon$ ,  $\beta_{2\varepsilon}(t) = \beta_2(t) - \varepsilon$ . Рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу: найти функцию  $v(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (3.15) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$v(0, t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)v_x(0, t) + \alpha_2(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.22)$$

$$v(1, t) = \beta_1(t)v_x(0, t) + \beta_{2\varepsilon}(t)v_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.23)$$

Покажем, что данная краевая задача для любой функции  $f(x, t)$ , удовлетворяющей условиям теоремы, и для любого фиксированного положительного числа  $\varepsilon$  при выполнении условий (3.6), (3.18), (3.19) имеет решение  $v(x, t)$  такое, что  $v(x, t) \in V_0$ ,  $v_t(x, t) \in V_0$ .

Положим  $\gamma_\varepsilon(t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)$ . Заметим, что вследствие условия (3.18) при  $t \in [0, T]$  выполняется неравенство  $\gamma_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon^2$ . Следовательно, условия (3.22) и (3.23) эквивалентны условиям краевой задачи I:

$$v_x(0, t) = \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\gamma_\varepsilon(t)}v(0, t) - \frac{\alpha_2(t)}{\gamma_\varepsilon(t)}v(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3.22')$$

$$v_x(1, t) = -\frac{\beta_1(t)}{\gamma_\varepsilon(t)}v(0, t) + \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\gamma_\varepsilon(t)}v(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.23')$$

Функция  $\Delta_0(t)$  из п. 2 этой задачи есть функция  $\frac{\alpha_1(t) - \alpha_2(t) + \varepsilon}{\gamma_\varepsilon(t)} - 2$ ; согласно условию (3.19), она не обращается в нуль на отрезке  $[0, T]$ . Значит, краевая задача (3.15), (1.2), (3.22), (3.23) будет разрешима в пространстве  $V_0$ . Вновь переходя к продифференцированной по  $t$  задаче (3.15), (1.2), (3.22'), (3.23'), нетрудно установить, что решение задачи (3.15), (1.2), (3.22), (3.23) дополнительно будет обладать свойством  $v_t(x, t) \in V_0$ .

Итак, задача (3.15), (1.2), (3.22), (3.23) для любого фиксированного положительного числа  $\varepsilon$  имеет решение  $v_\varepsilon(x, t)$  такое, что  $v_\varepsilon(x, t) \in V_0$ ,  $v_{\varepsilon t}(x, t) \in V_0$ . Для семейства функций  $\{v_\varepsilon(x, t)\}$  имеют место равномерные по  $\varepsilon$  оценки (3.11) и (3.12), что доказывается полностью аналогично изложенному выше доказательству, но с использованием условий (3.20) и (3.21). Предельный переход в задаче (3.15), (1.2), (3.22), (3.23) осуществляется стандартным образом; предельная функция  $v(x, t)$  будет принадлежать пространству  $V_0$  и будет представлять собой

решение краевой задачи (3.15), (1.2), (3.16), (3.17). Функция  $u(x, t)$ , определенная равенством  $u = M^{-1}v$ , даст искомое решение краевой задачи III. Теорема доказана.

**Дополнение.** 1. Утверждения теорем 1 – 3 справедливы и для более общих уравнений вида

$$u_{tt} - A(x, t)u_{xx} + a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t),$$

при выполнении условия  $A(x, t) \geq a_0 > 0$  при  $(x, t) \in \bar{Q}$ , а также необходимых условий гладкости.

2. Условия (2.2), (3.1) и (3.13) заведомо выполняются, если коэффициенты  $\alpha_i(t)$  и  $\beta_i(t)$  малы по абсолютной величине. Условия (2.3), (3.2) и (3.14) заведомо выполняются, если функции  $K_1(x, t)$  и  $K_2(x, t)$  малы по абсолютной величине. Вместе с тем очевидно, что условия малости не являются единственными условиями, обеспечивающими выполнимость условий (2.2), (3.1), (3.13), (2.3), (3.2) и (3.14).

3. В случае  $K_1(x, t) \equiv 0$ ,  $K_2(x, t) \equiv 0$  условия (3.1) и (3.13) не являются необходимыми.

4. Условия  $f(x, 0) \equiv 0$  теорем 2 и 3 является техническим, и от него вполне можно отказаться.

5. Единственность решений краевых задач I – III в пространстве  $V_0$  при выполнении условий теорем 1 – 3 очевидна.

## Цитированная литература

1. Лажетич Н. Л. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1072 – 1077.
2. Bouziani A. // Bulletin de la Classe des Sciences. Academie Royale de Belgique. 1997. V. VIII. P. 53 – 70.
3. Beilin S. // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. № 76. P. 1–8.
4. Пулькина Л. С. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 279 – 280.
5. Пулькина Л. С. Смешанная задача с нелокальным условием для гиперболического уравнения // В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Изд. ИМ им.С.Л.Соболева СО РАН. Новосибирск: 2002. С. 176 – 184.
6. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. // Докл. РАН. 2005. Т. 104, № 5. С. 589 – 592.
7. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166 – 1179.
8. Пулькина Л. С. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 8. С. 1084 – 1089.
9. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку, 1985.
10. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht, the Netherlands: VSP. 1999.

Поступила в редакцию 10.01.2009г.

УДК 517.956

## ЗАДАЧИ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРЯЖЕННЫЕ ИМ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

Р. Б. СЕИЛХАНОВА

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана  
Уральск, Казахстан

В работе для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина исследованы задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи. Доказана корректность рассмотренных задач.

В [1] для уравнения колебания струны изучались задачи Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на исследование таких задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2]. С использованием изложенного в [3] метода в данной работе для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина исследованы задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи.

**1. Постановка задач и основные результаты.** Пусть  $D_\beta$  – конечная область евклидова пространства  $E_{m+1}$  точек  $(x_1, \dots, x_m, t)$ , ограниченная коноидами  $\beta|x| = \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi$ ,  $|x| = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi$  и плоскостью  $t = 0$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $t_0 : \frac{\beta}{1+\beta} = \int_0^{t_0} \sqrt{g(\xi)} d\xi$ , где  $|x|$  – длина вектора  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , а  $0 < \beta = const < 1$ . Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial D_\beta$  области  $D_\beta$ , обозначим через  $S_\beta$ ,  $S_1$  и  $S$  соответственно.

В области  $D_\beta$  рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0, \quad (1)$$

$$L^*v \equiv g(t)\Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i v_{x_i} - bv_t + dv = 0, \quad (1^*)$$

---

Keywords: *degenerating, multidimensional, hyperbolic equations, the characteristics, the conjugate problems, the concreteness, the criterion, the theorem.*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

© Р. Б. Сеилханова, 2009.

где  $\Delta_x$  – оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_m$ ,  $m \geq 2$ ,  $g(t) > 0$  при  $t > 0$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(t) \in C^2((0, t_0)) \cap C([0, t_0])$ ,  $d(x, t) = c - \sum_{i=1}^m a_{ix_i} - b_t$ .

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** Найти в области  $D_\beta$  решение уравнения (1) из класса  $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), u|_{S_\beta} = \sigma(x), \quad (2)$$

или

$$u_t|_S = v(x), u|_{S_\beta} = \sigma(x), \quad (3)$$

а также рассмотрим сопряженные ей задачи Дирихле и Пуанкаре.

**Задача 2.** Найти в области  $D_\beta$  решение уравнения (1\*) из класса  $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = \tau(x), v|_{S_\beta} = \sigma(x), v|_{S_1} = \varphi(x), \quad (4)$$

или

$$v_t|_S = v(x), v|_{S_\beta} = \sigma(x), v|_{S_1} = \varphi(x). \quad (5)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат  $x_1, \dots, x_m, t$  к сферическим координатам  $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_i < \pi$ ,  $i = 2, 3, \dots, m-1$ .

Пусть  $\Omega_\beta$  – проекция области  $D_\beta$  на плоскость  $(r, t)$  с границами  $\Gamma_\beta$ :  $\beta r = \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi$ ,

$\Gamma_1$ :  $r = 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi$  и  $\Gamma$ :  $t = 0$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ;  $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$  – система линейно независимых сферических функций порядка  $n$ ,  $1 \leq k \leq k_n$ ,  $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ ,  $W_2^l(S)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , – пространство Соболева, а  $\tilde{S}_\beta = \left\{ (r, \theta) \in S, 0 < r < \frac{1}{1+\beta} \right\}$ .

Имеет место

**Лемма [4].** Пусть  $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$ . Если  $l \geq m-1$ , то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка  $p \leq l - m + 1$ , сходятся абсолютно и равномерно.

Через  $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$ ,  $a_{in}^k(r, t)$ ,  $\tilde{b}_n^k(r, t)$ ,  $\tilde{c}_n^k(r, t)$ ,  $\tilde{d}_n^k(r, t)$ ,  $\rho_n^k$ ,  $\bar{\tau}_n^k(r)$ ,  $\bar{v}_n^k(r)$ ,  $\bar{\sigma}_n^k(r)$ ,  $\bar{\varphi}_n^k(r)$  обозначим коэффициенты разложения в ряд (6) функций  $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$ ,  $a_i \frac{x_i}{r} \rho$ ,  $b(r, \theta, t)\rho$ ,  $c(r, \theta, t)\rho$ ,  $d(r, \theta, t)\rho$ ,  $\rho(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\tau(r, \theta)$ ,  $v(r, \theta)$ ,  $\sigma(r, \theta)$ ,  $\varphi(r, \theta)$  соответственно, причем  $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ ,  $H$  – единичная сфера в  $E_m$ .

Введем множество функций  $B^l(S) = \{f(r, \theta) : f \in W_2^l(S)$ ,

$$\left. \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left( \|f_n^k(r)\|_{C^2((0,1))}^2 + \|f_n^k(r)\|_{C^1([0,1])}^2 \right) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, l > m-1 \right\}.$$

Пусть  $a_i(x, t), b(x, t), c(x, t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $l \geq m+1$ , и  $\tau(r, \theta) = r^3 \tau^*(r, \theta)$ ,  $v(r, \theta) = r^3 v^*(r, \theta)$ ,  $\sigma(r, \theta) = r^2 \sigma^*(r, \theta)$ ,  $\tau^*(r, \theta), v^*(r, \theta) \in B^l(S)$ ,  $\sigma^*(r, \theta) \in B^l(\tilde{S}_\beta)$ ,  $\varphi(r, \theta) \in B^l(S \setminus \tilde{S}_\beta)$ .

Тогда справедливы

**Теорема 1.** Задача 1 однозначно разрешима.

**Теорема 2.** Задача 2 имеет единственное решение.

**п.2. Разрешимость задачи 1.** Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение 1 имеет вид:

$$g(t) \left( u_{rrr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u \right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0, \quad (7)$$

где  $\delta \equiv - \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right)$ ,  $g_1 = 1$ ,  $g_j = (\sin \theta_1, \dots, \sin \theta_{j-1})^2$ ,  $j > 1$ .

При этом известно [4], что спектр оператора  $\delta$  состоит из собственных чисел  $\lambda_n = n(n + m - 2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , каждому из которых соответствует  $k_n$  ортонормированных собственных функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$ .

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу  $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ , то его можно искать в виде:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (8)$$

где  $\bar{u}_n^k(r, t)$  – функции, которые будут определены ниже.

Подставим (8) в (7), умножим полученное выражение на  $\rho(\theta) \neq 0$  и проинтегрировав по единичной сфере  $H$ , для  $\bar{u}_n^k$  получим [3]:

$$\begin{aligned} &g(t) \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left( \frac{m-1}{r} g(t) \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{ g(t) \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left( \frac{m-1}{r} g(t) \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \\ &+ [\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} g(t) + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k)] \bar{u}_n^k \} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$g(t) \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} g(t) \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &g(t) \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} g(t) \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1^k}{r^2} g(t) \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left( \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, k = \overline{1, k_1}, \\ &g(t) \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} g(t) \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n^k}{r^2} g(t) \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right. \\ &+ [\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \left. \right\}, \quad k = 1, \bar{k}_n, n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что если  $\{\bar{u}_n^k\}$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , – решение системы (10) – (11), то оно является и решением уравнения (9).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$  (см.[4]), из краевых условий (2), (3) в силу (8) будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^k|_{\Gamma} &= \bar{\tau}_n^k(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta} = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{1+\beta}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ \bar{u}_{nt}^k|_{\Gamma} &= \bar{\nu}_n^k(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta} = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{1+\beta}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач в области  $\Omega_\beta$  для уравнений (10) – (11). Теперь будем находить решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10) – (11) можно представить в виде:

$$g(t)\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}g(t)\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\bar{u}_n^k = f_n^k(r, t), \quad (13)$$

где  $f_n^k(r, t)$  определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом  $f_0^1(r, t) \equiv 0$ .

Выполнив в (13) замену переменных  $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2}u_n^k(r, t)$  и положив затем  $r = r$ ,  $y = \left(\frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi\right)$ , будем иметь:

$$yu_{nrr}^k - u_{nyy}^k + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}u_n^k - b(y)u_{ny}^k = \bar{f}_n^k(r, y), \quad (14)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad b(y) = \frac{1}{2g} \left[ \frac{dg}{dy} - \frac{g}{y} \right], \quad \bar{f}_n^k(r, y) = r^{(m-1)/2} \frac{f_n^k(r, t)}{y^2}.$$

Полагая  $u_n^k = \omega_n^k \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^y b(\xi) d\xi \right]$ , уравнение (14) приводим к виду:

$$y\omega_{nrr}^k - \omega_{nyy}^k + \frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}\omega_n^k = c(y)\omega_n^k + \tilde{f}_n^k(r, y), \quad (15)$$

$$c(y) = -\frac{1}{4}(b^2 + 2b'_y) \in C(y > 0), \quad \tilde{f}_n^k = \bar{f}_n^k(r, y) \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^y b(\xi) d\xi \right].$$

Уравнение (15), в свою очередь, с помощью замены переменных  $r = r$ ,  $x_0 = \frac{2}{3}y^{3/2}$  переходит в уравнение:

$$\omega_{nrr}^k - \omega_{nx_0x_0}^k - \frac{1}{3x_0}\omega_{nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega_n^k = g_n^k(r, x_0), \quad (16)$$

$$g_n^k(r, x_0) = \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-2/3} \left\{ c \left[ \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3} \right] \omega_n^k \left[ r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3} \right] + \tilde{f}_n^k \left[ r, \left(\frac{3x_0}{2}\right)^{2/3} \right] \right\}.$$

При этом краевые условия (12) запишутся в виде:

$$\omega_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad \omega_n^k(r, \beta r) = \sigma_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial x_0} \omega_n^k = \nu_n^k(r), \quad \omega_n^k(r, \beta r) = \sigma_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$\tau_n^k(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \nu_n^k(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\nu}_n^k(r), \quad \sigma_n^k(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\sigma}_n^k(r).$$

Наряду с уравнением (16) рассмотрим уравнение:

$$L_\alpha \omega_{\alpha, n}^k \equiv \omega_{\alpha, nrr}^k - \omega_{\alpha, nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} \omega_{\alpha, nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \omega_{\alpha, n}^k = g_{\alpha, n}^k(r, x_0), \quad (19_\alpha)$$

$$L_0 \omega_{0, n}^k \equiv \omega_{0, nrr}^k - \omega_{0, nx_0x_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \omega_{0, n}^k = g_{0, n}^k(r, x_0), \quad (19_0)$$

$$g_{\alpha, n}^k(r, x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} \left\{ c \left[ \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \right] \omega_{\alpha, n}^k \left[ r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \right] + \tilde{f}_n^k \left[ r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \right] \right\},$$

$$g_{0, n}^k(r, x_0) = c(x_0) \omega_{\alpha, n}^k(r, x_0) + \tilde{f}_n^k(r, x_0), \quad 0 < \alpha = const < 1.$$

Уравнение (16) совпадает с (19<sub>α</sub>) при  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

Как доказано в [3] (см. также [5]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (19<sub>α</sub>) и (19<sub>0</sub>).

1. Если  $\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши для уравнения (19<sub>0</sub>), удовлетворяющее условию

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (20)$$

то функция

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv 2^{-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D_{0x_0^2}^{-\alpha/2} \left[ \frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0^2} \right] \quad (21)$$

при  $\alpha > 0$  является решением уравнения (19<sub>α</sub>) с данными (20).

2. Если  $\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$  является решением задачи Коши для уравнения (19<sub>0</sub>), удовлетворяющим условию

$$\omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0,$$

то при  $0 < \alpha < 1$  функция

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) &= \gamma_{2-\alpha+2q} \left( \frac{1}{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^q \left[ x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 \omega_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \equiv \\ &\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1} \Gamma\left(q - \frac{\alpha}{2} + 1\right) D_{0,x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1} \left[ \frac{\omega_{0,n}^{k,1}(r, x_0)}{x_0} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

является решением уравнения (19<sub>α</sub>) с данными

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r),$$

где  $\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$ ,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция,  $D_{0t}^\alpha$  – оператор Римана-Лиувилля ([6]), а  $q \geq 0$  – наименьшее число, удовлетворяющее неравенству  $2 - \alpha + 2q \geq m - 1$ .

При этом функции  $g_{\alpha,n}^k(r, x_0)$ ,  $g_{0,n}^k(r, x_0)$  связаны формулами (21) в случае связи 1 и (22) в случае связи 2.

Теперь будем решать задачу (19<sub>α</sub>), (17). Ее решение ищем в виде:

$$\omega_{\alpha,n}^k(r, x_0) = \omega_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0) + \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0),$$

где  $\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши (19<sub>α</sub>), (20), а  $\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$  – решение краевой задачи для уравнения

$$L_\alpha \omega_{\alpha,n}^{k,2} = \left( \frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} c \left( \left( \frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right) \omega_{\alpha,n}^{k,2} \quad (23)$$

с условием

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta r) = \sigma_n^k(r) - \omega_{\alpha,n}^{k,1}(r, \beta r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Учитывая формулы (21), (22), а также обратимость оператора  $D_{0t}^\alpha$  (см.[6]), задачи (19<sub>α</sub>), (20) и (23), (24) соответственно сводим к задаче (19<sub>0</sub>), (20) и к задаче для уравнения

$$L_0 \omega_{0,n}^{k,1} = c(x_0) \omega_{0,n}^{k,1} \quad (25)$$

с данными

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \omega_{0,n}^{k,1}(r, \beta r) = \psi_n^k(r), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

где  $\psi_n^k(r)$  – функция, выражающаяся через  $\tau_n^k(r)$ ,  $\sigma_n^k(r)$ .

Задача Коши (19<sub>0</sub>), (20), аналогично [7, 8], сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Следовательно, задача Коши (19<sub>α</sub>), (20) также однозначно разрешима.

В [9] показано, что задача (25), (26) имеет единственное решение. Значит, решение задачи (23), (24) также находится единственным образом.

Следовательно, задача (19<sub>α</sub>), (17) однозначно разрешима. Аналогично доказывается однозначная разрешимость задачи (19<sub>α</sub>), (18).

Таким образом, сначала решив задачу (10), (12) ( $n = 0$ ), а затем (11), (12) ( $n = 1$ ) и т.д., найдем последовательно все  $\bar{u}_n^k(r, t)$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Итак, показано, что

$$\int_H \rho(\theta) LudH = 0. \quad (27)$$

Пусть  $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ , причем  $R(r) \in V_0$ -плотна в  $L_2\left(\left(\frac{1}{\beta} \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi, 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)} d\xi\right)\right)$ ,  $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ -плотна в  $L_2(H)$ , а  $T(t) \in V_1$ -плотна в  $L_2((0, t_0))$ . Тогда  $f(r, \theta, t) \in V$ ,  $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ -плотна в  $L_2(D_\beta)$  (см. [10]).

Отсюда и из (27) следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r, \theta, t) LudD_\beta = 0, Lu = 0 \forall (r, \theta, t) \in D_\beta.$$

Таким образом, задача (1), (2) имеет решения вида:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (28)$$

где  $u_n^k(r, t)$  определяются из двумерных задач.

Следовательно, решение задачи (1), (2) построено. Аналогичным образом в виде (28) строятся решения задачи (1), (3).

Учитывая ограничения на заданные функции  $\tau(r, \theta)$ ,  $\nu(r, \theta)$ ,  $\sigma(r, \theta)$ , как и в [3, 11] можно доказать, что полученное решение  $u(r, \theta, t)$  (28) принадлежит искомому классу.

Таким образом, разрешимость задачи 1 доказана.

**3. Единственность решения задачи 2.** Сначала рассмотрим задачу (1\*), (4). Для этого построим  $u(r, \theta, t)$  – решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(r, \theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), u|_{S_\beta} = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (29)$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in V$ , где  $V$  – множество функций  $\tau(r)$  из класса  $C^2(0 < r < 1) \cap C^1(0 \leq r \leq 1)$ . Очевидно, что множество  $V$  плотно всюду в  $L_2((0, 1))$ . Функцию  $u(r, \theta, t)$  будем искать в виде (8). Тогда для  $\bar{u}_n^k(r, t)$  получим уравнение (13) с краевыми условиями

$$\bar{u}_n^k|_\Gamma = \bar{\tau}_n^k(r), \bar{u}_n^k|_{\Gamma_\beta} = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots \quad (30)$$

Как показано в п.2, задача (13), (30) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1), (29) в виде (28) построено, где  $u_n^k(r, t)$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , определяются из двумерных задач.

Из определения сопряженных операторов [12]:

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = g(t) \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i) - u_t \cos(N^\perp, t), \quad Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos(N^\perp, x_i) + b \cos(N^\perp, t),$$

а  $N^\perp$  – внутренняя нормаль к границе  $\partial D_\beta$ , по формуле Грина имеем:

$$\int_{D_\beta} (vLu - uL^*v) \partial D_\beta = \int_{\partial D_\beta} \left[ \left( v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} M \right) + uvQ \right] ds, \quad (31)$$

где  $\frac{\partial}{\partial N}$  – конормаль к  $\partial D_\beta$ , а  $M^2 = g^2(t) \sum_{i=1}^m \cos^2(N^\perp, x_i) + \cos^2(N^\perp, t)$ .

Из (31), принимая во внимание граничные условия (4) и тот факт, что на характеристическом коноиде  $S_1$  конормальная производная  $\frac{\partial}{\partial N}$  совпадает с производной по касательному направлению [12], получим  $\int_S \tau(r, \theta) v_t(r, \theta, 0) dS = 0$ . Отсюда, поскольку линейная оболочка системы функций  $\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$  плотна в  $L_2(S)$  [10], заключаем, что  $v_t(r, \theta, 0) = 0, \forall (r, \theta) \in S$ .

Следовательно, в силу единственности задачи Коши (см.[12]) вида:  $L^*v = 0, v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$ , будем иметь  $v(x, t) = 0 \forall (x, t) \in D_\beta$ .

Единственность решения задачи (1\*), (4) показана. Аналогичным образом доказывается единственность решения задачи (1\*), (5).

**4. Разрешимость задачи 2.** Сначала рассмотрим задачу (1\*), (4). Ее решение будем искать в виде ряда (8). Тогда, как в случае задачи (1), (2), функции  $\bar{v}_n^k(r, t)$  будут удовлетворять системе уравнений (10)-(11), где  $a_{in}^k, \tilde{a}_{in}^k, \tilde{b}_n^k$  заменены соответственно на  $-a_{in}^k, -\tilde{a}_{in}^k, -\tilde{b}_n^k$ , а  $\tilde{c}_n^k$  на  $\bar{d}_n^k, i = 1, \dots, m, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$ .

Из краевого условия (4) имеем:

$$\bar{v}_n^k|_\Gamma = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k|_{\Gamma_\beta} = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k|_{\Gamma_1} = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Далее, рассмотрим уравнение (19 $_\alpha$ ), к которому сводится каждое уравнение системы (10)-(11), при этом условии (32) запишется в виде:

$$\omega_{\alpha,n}^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad \omega_{\alpha,n}^k(r, \beta r) = \sigma_n^k(r), \quad \omega_{\alpha,n}^k(r, 1-r) = \varphi_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (33)$$

$$\varphi_n^k(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\varphi}_n^k(r).$$

Теперь будем решать задачу (19 $_\alpha$ ), (33). Ее решение ищем в виде  $\omega_{\alpha,n}^k(r, x_0) = \omega_{\alpha,n}^{k,1} + \omega_{\alpha,n}^{k,2}$ , где  $\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши (19 $_\alpha$ ), (20), а  $\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$  – решение задачи для уравнения (23) с данными

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta r) = \sigma_n^k(r) - \omega_{\alpha,n}^{k,1}(r, \beta r), \quad \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r, 1-r) = \varphi_n^k(r) - \omega_{\alpha,n}^{k,1}(r, 1-r), \quad (34)$$

$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя формулы (21), (22), а также обратимость оператора  $D_{0t}^\alpha$ , задачи (19 $_\alpha$ ), (20) и (23), (34) соответственно сводим к задаче Коши (19 $_0$ ), (20) (см.[7, 8]) и к краевой задаче для (19 $_0$ ) с данными  $\frac{\partial}{\partial x_0} \omega_{0,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \omega_{0,n}^{k,2}(r, \beta r) = \psi_{1n}^k(r), \omega_{0,n}^{k,2}(r, 1-r) = \psi_{2n}^k(r)$ , которые однозначно разрешимы (см.[13]), где  $\psi_{1n}^k(r), \psi_{2n}^k(r)$  – функции, выражающиеся через  $\tau_n^k(r), \sigma_n^k(r)$  и  $\bar{\tau}_n^k(r), \bar{\varphi}_n^k(r)$  соответственно.

Следовательно, задача  $(19_\alpha)$ , (33) имеет единственное решение.

Таким образом, ряд (28) является решением задачи  $(1^*)$ , (4), где  $v_n^k(r, t)$ ,  $k = \overline{1, k_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , находятся из двумерных задач.

Аналогичным образом в виде (28) строится решение задачи  $(1^*)$ , (5).

Разрешимость задачи 2 установлена.

**5. Единственность решения задачи 1.** Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Для этого построим  $v(r, \theta, t)$  – решение уравнения  $(1^*)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = \tau(r, \theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), v|_{S_\beta \cup S_1} = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (35)$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in V$ . Функцию  $v(r, \theta, t)$  будем искать в виде (8). Тогда, для  $\omega_{\alpha,n}^k(r, x_0)$  получим уравнение  $(19_\alpha)$  с краевыми условиями

$$\omega_{\alpha,n}^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \omega_n^k(r, \beta r) = 0, \omega_n^k(r, 1 - r) = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots. \quad (36)$$

В п.4 показано, что задача  $(19_\alpha)$ , (36) имеет единственное решение. Значит, решение задачи  $(1^*)$ , (35) в виде (28) построено.

Далее, была показана единственность решения задачи  $(1^*)$ , (4) в п.3, завершается доказательство единственности решения задачи (1), (3).

При  $\beta = 1$  в [14] доказана.

**Теорема 3.** *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Пусть теперь  $0 < \beta \leq 1$ . Тогда, из теорем 1 и 3 вытекает справедливость следующего критерия: задача 1 однозначно разрешима  $\Leftrightarrow \beta < 1$ .

**Замечание.** В теореме 1 принадлежность заданных функций к множеству  $B_1^l(S)$  существенна. Как показывают примеры, построенные в [3], при нарушении этого условия, решение задачи 1 даже для многомерного волнового уравнения может не существовать.

## Цитированная литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Protter М. Н. // J.Rational Mech. and Analysis. 1954. Vol. 3, №4. P. 435 – 446.
3. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.
4. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
5. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973.
6. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1985.
7. Алдашев С. А. //Укр.матем.журнал. 2003. Т.55, №1. С. 100 – 107.
8. Алдашев С. А. //Укр.матем.журнал. 2000. Т.52, №5. С. 590 – 595.
9. Сеилханова Р. Б. //Известия НАН РК, сер. физ.-мат. наук. Алматы. 2008. №1. С. 13 – 18.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теорий функций и функционального анализа. М., 1976.
11. Алдашев С. А. // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34, №1. С. 64 – 68.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 4-х т., Т.4, ч.2. М., 1981.
13. Сеилханова Р. Б. //Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. Алматы. 2007. №3(54). С. 27 – 36.

14. Алдашев С. А. //Известия вузов. Математика. 2006. №9(532). С. 3 – 9.

*Поступила в редакцию 26.12.2008г.*

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОДНОМЕРНЫХ СТРУКТУР

А. А. СЫДЫКОВ

Казахский государственный женский педагогический университет  
г.Алматы ул.Айтеке би, 99 alisher@mail.ru

На основе линейной теории распространения упругих волн произведены расчет напряженного состояния горных пород вблизи выработок, обработка сейсмических данных и интерпретация сейсмической информации в горном деле.

### 1. Введение в проблематику и актуальность темы исследования.

Хорошо разработана линейная теория распространения упругих волн. На ее основе производился расчет напряженного состояния горных пород вблизи выработок, обработка сейсмических данных и интерпретация сейсмической информации в горном деле. При этом считалось, что горный массив – это однородная среда. В последние годы мнение ученых по поводу строения горных массивов, ее однородности полярно поменялись, чему способствовал комплекс натуральных исследований по изучению особенностей горного давления, проявляющихся при обработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах, а также реакции горных пород на взрывные воздействия различной мощности. В результате стали предлагаться различные математические модели процессов распространения упругих волн в породном неоднородном массиве. Преобладает мнение, что неоднородность строения геосреды связана с блочно-иерархическим строением горных пород [1]. Согласно этой концепции горный массив представляет систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня. Анализ размеров блоков в масштабах от кристаллов, фракций породного массива до геоблоков земной коры показал, что отношение размеров блоков, соседних по масштабу,  $a = \frac{l_{N+1}}{l_N}$ , обладает определенной устойчивостью, хотя однозначного определения этого коэффициента нет. По данным работы [1] величина  $a$  порядка 2,5, а по данным работы [2] величина  $a$  примерно равна 1,4. Согласно мнению исследователей блоки соседних уровней отделены друг от друга прослойками породы с ослабленными механическими свойствами. Важным экспериментально найденным статистическим инвариантом блочной структуры является  $\mu$ , отношение толщины

---

Keywords: *modeling, wave effect, mining, of motion*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

© А. А. Сыдыков, 2009.

прослойки между блоками одного масштаба к характерному размеру блока. Согласно данным работы [2] для пород некоторых рудников величина  $\mu$  меняется в диапазоне от  $0,5 \cdot 10^{-2}$  до  $2 \cdot 10^{-2}$ . При физическом моделировании распространения сейсмических волн в блочном массиве с прослойками пользуются двумя периодическими одномерными системами: силикатные кирпичи чередовались прослойками из резины (пластилина и т.д.). В работах [3-5] экспериментально показано, что в блочной среде наблюдается распространение групп волн со скоростями намного меньше скорости продольных волн в материале блоков, так называемых маятниковых волн. Подобные волны возникают вследствие взаимодействия податливых прослоек. Представляет интерес теоретическое исследование указанных явлений. В настоящей работе подобные исследования проводятся на одномерной блочной модели.

**2. Математическое моделирование волн в среде с двумя периодическими одномерными системами.**

Рассмотрим одномерную периодическую структуру. Пусть точечные частицы одинаковой массы  $m$  расположены вдоль продольной оси  $x$  на единичном расстоянии друг от друга и последовательно соединены упругими безинерционными пружинами жесткости  $c$  так, что каждая частица взаимодействует только со своими ближайшими соседями слева и справа.

Перемещение  $n$ -ой массы вдоль оси обозначим через  $u_n$ . Считаем, что движение происходит за счет продольных сил  $Q(t)$ , где  $t$  – время. Начальное состояние выбираем нулевым, то есть пружины не напряжены и скорости масс – нулевые. Уравнение движения системы в таком случае имеет вид:

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} - c(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = Q(t)\delta(n), \tag{1}$$

причем справедливы начальные условия

$$u_n(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}u_n(0) = 0,$$

где  $\delta(n)$  – дельта функция Дирака:

$$\delta(0) = 1, \quad \delta(n) = 0, \quad n \neq 1. \tag{2}$$

Как обычно введем обозначение:  $k^2 = \frac{c}{m}$ .

Решим уравнение (1) с начальными условиями (2), когда нагрузка представляет собой импульс длительности  $t_0$ :

$$Q(t) = \begin{cases} P(t), & \text{при } 0 < t < t_0, \\ 0, & \text{при } t_0 < t, \end{cases} \tag{3}$$

где  $P(t)$  – форма импульса, который мы будем варьировать. Для изучения маятниковых волн надо найти асимптотическое поведение решений задачи (1),(2) в длинноволновом приближении.

Перепишем уравнения движения в виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), & n \neq 0, \\ \frac{d^2 u_0}{dt^2} = k^2(u_1 - 2u_0 + u_{-1}) + Q(t). \end{cases}$$

Умножив обе части уравнения на  $e^{iqn}$  и сложив соответствующие части всех уравнений, получим:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)e^{iqn} \right) = Q(t) + k^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)(e^{iq(n+1)} - 2e^{iqn} + e^{iq(n-1)}). \tag{4}$$

Обозначим через  $v(q, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)e^{iqn}$ . Принимая во внимание

$$e^{iq(n+1)} - 2e^{iqn} + e^{iq(n-1)} = e^{iqn}(e^{iq} - 2 + e^{-iq}) = e^{iqn}(2 \cos q - 2) = -4 \sin^2 \frac{q}{2} e^{iqn},$$

соотношение (4) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 v(q, t)}{dt^2} + 4 \sin^2 \frac{q}{2} v(q, t) = Q(t). \quad (5)$$

Из начальных условий (2) вытекают начальные условия для  $v(q, t)$ :

$$v(q, 0) = 0, \quad \frac{dv(q, 0)}{dt} = 0. \quad (6)$$

Решим задачу (5),(6). В результате имеем:

$$v(q, t) = \int_0^t \frac{\sin[2 \sin \frac{q}{2}(t - \tau)]}{2 \sin \frac{q}{2}} Q(\tau) d\tau. \quad (7)$$

$u_n(t)$  представляет коэффициент Фурье функции  $v(q, t)$ , которая задается правой частью соотношения (7), поэтому

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(q, t) e^{-iqn} dq = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^t \frac{\sin[2 \sin \frac{q}{2}(t - \tau)]}{2 \sin \frac{q}{2}} Q(\tau) d\tau \right) e^{-iqn} dq = \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(t, \tau) Q(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$K(t, \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[2 \sin \frac{q}{2}(t - \tau)]}{2 \sin \frac{q}{2}} e^{-iqn} dq.$$

Преобразуем ядро к виду:

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[2 \sin \frac{q}{2}(t - \tau)]}{2 \sin \frac{q}{2}} e^{-iqn} dq = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin[2 \sin \xi(t - \tau)]}{2 \sin \xi} e^{-i2\xi n} d\xi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[2 \sin \xi(t - \tau)]}{\sin \xi} e^{-2i\xi n} d\xi + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[2 \sin \xi(t - \tau)]}{\sin \xi} e^{2i\xi n} d\xi = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[2 \sin \xi(t - \tau)]}{\sin \xi} \cos 2\xi n d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, представление (8) можно записать так:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[2 \sin \xi(t - \tau)]}{\sin \xi} \cos 2\xi n d\xi \right] P(\tau) d\tau, \quad \text{при } t < t_0, \\ u_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[2 \sin \xi(t - \tau)]}{\sin \xi} \cos 2\xi n d\xi \right] P(\tau) d\tau, \quad \text{при } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для выяснения поведения решения произведем численные расчеты при  $P(t) = 2 \sin(\frac{\pi t}{5})$ ,  $t_0 = 5$ . В этом случае нас интересует вторая ветвь формулы (9):

$$u_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \left[ \int_0^1 \frac{\sin[2\eta(t - \tau)]}{\eta} \cdot \frac{\cos[2n(\arcsin \eta)]}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta \right] P(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \left[ \int_0^1 (\sin 2\eta t \cos 2\eta \tau - \cos 2\eta t \cdot \sin 2\eta \tau) \frac{\cos(2n(\arcsin \eta))}{\eta \sqrt{1 - \eta^2}} d\eta \right] P(\tau) d\tau.$$

Из полученных численных результатов видно, как с удалением от места воздействия, результаты расчетов приближаются к решению непрерывной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(t)\delta(x).$$

### Цитированная литература

1. Садовский М. А. // ДАН СССР. 1979. Т. 247, №4. С. 829 – 831.
2. Курленя М. В., Опарин В. Н., Еременко А. А. // ФТПРПИ. 1993. №3. С. 3 – 9.
3. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. // ФТПРПИ. 1996. №3.
4. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. // ФТПРПИ. 1996. №4.
5. Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И. // ФТПРПИ. 1996. №5.

*Поступила в редакцию 22.01.2009 г.*

УДК 539.3

## О ТРАНСПОРТНОМ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА СТОХАСТИЧЕСКИ-ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Е. И. УРАЗАКОВ

Институт математики МОН РК  
050010 г. Алматы ул.Пушкина, 125 erlik@math.kz

Решена задача о распространении потока плотности энергии поверхностных упругих волн вдоль стохастической слабо шероховатой поверхности.

Для энергетических характеристик упругих волн в одном предельном случае коэффициент ослабления определяется транспортным временем релаксации, отражающим малоэффективность процессов рассеяния на небольшие углы, по сравнению с первоначальным направлением распространения.

В работе [1] рассматривалось распространение рэлеевской волны по шероховатой поверхности упругого изотропного полупространства. Поверхность упругой среды предполагалась случайной, а отклонение этой случайной поверхности от плоскости  $x = 0$  считалось малым по сравнению с длиной распространяющейся по поверхности рэлеевской волны. Вычислялся вектор смещения среды, усредненный по ансамблю случайных поверхностей. Появившееся затухание  $\tau$  было следствием рассеяния рэлеевской волны во вторичные рэлеевские и объемные волны.

Подобные задачи рассматривались ранее в работах [2] и [3] другим методом, однако при этом учитывалось лишь рассеяние рэлеевской волны в объемные волны. В ряде случаев затухание вследствие возбуждения вторичных рэлеевских волн, как показано в [1], является главным. Рассмотренное в [1] затухание вычислялось как смещение полюса усредненной по шероховатостям гриновской функции уравнений упругости с соответствующим граничным условием. По этой причине  $\tau$  определялось амплитудой рассеяния волны на шероховатостях и при увеличении корреляционного радиуса шероховатостей  $d$  не стремилось к нулю.

С другой стороны, увеличение  $d$  означает приближение поверхности к идеально плоской, и затухание в этом случае должно было бы убывать.

Для выяснения этого вопроса в настоящей работе вычисляется физически наблюдаемая величина – плотность потока энергии, усредненная по шероховатостям. Показано, что в пределе больших  $d$  затухание определяется транспортным временем  $\tau_{tr}$ , убывающим при больших  $d$ .

---

Keywords: *A density energy flow of elastic waves, a statistically rough surface, a transport coefficient of relaxation*  
2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

© Е. И. Уразаков, 2009.

Причина замены  $\tau$  на  $\tau_{tr}$  связана с тем, что рассеяние на нулевой угол не вносит вклада в затухание. При вычислении потока наряду с гриновскими функциями требуется рассматривать вершинные диаграммы, что и приводит к появлению  $\tau_{tr}$ . Решаемая нами задача близка к задаче о скин-эффекте на шероховатой поверхности [4]. Другой пример – сопротивление сплавов [5].

**1. Постановка задачи.** Плотность потока энергии  $\mathbf{q}(x, s, t)$  в звуковой волне определим исходя из уравнения непрерывности:

$$\frac{d\varepsilon(x, s, t)}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q}(x, s, t),$$

где плотность энергии определяется выражением:

$$\varepsilon = \rho c_t^2 u_{ik}^2 + \frac{\rho}{2} (c_l^2 - 2c_t^2) u_{jj}^2 + p_i \frac{u_i^2}{2}, \quad (1)$$

$u_{ik}$  – тензор деформации,  $\mathbf{s}$  – двумерный вектор с координатами  $y, z$ . Используя уравнения движения

$$\ddot{u}_i = c_t^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2)$$

получим для  $q(x, s, t)$  выражение:

$$q_j(x, s, t) = - [2\rho c_t^2 \dot{u}_i u_{ij} + \rho (c_l^2 - 2c_t^2) \dot{u}_j u_{ii}]. \quad (3)$$

Из уравнения (2) и граничных условий

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = P_\alpha(x, s, t), \quad (4)$$

которые должны быть выполнены на случайной поверхности  $x = \xi(s)$ , которая является случайной по координате  $s$  ( $\sigma_{\alpha\beta}$  – тензор напряжений), определяются компоненты смещения  $u_\alpha(x, s, t)$ . Мы предполагаем, что сила  $P_\alpha(x, s, t)$  отлична от нуля в некоторой малой области на поверхности и вычисляем поток на больших расстояниях от места возбуждения.

**2. Решение задачи.** Решение уравнений (2), разложенное по  $t$  и  $s$  в интеграл Фурье, запишем в виде:

$$u_\alpha(x, \mathbf{p}, \omega) = \sum_\gamma u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega) C_\gamma(\mathbf{p}, \omega) e^{ip_x x}, \quad (5)$$

где  $u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega)$  – собственные решения уравнений (2),

$$u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega) = \begin{pmatrix} p_x^{(x)} & ip_y & ip_z \\ -ip_y & -p_x^{(y)} & 0 \\ -ip_z & 0 & p_x^{(z)} \end{pmatrix}, \quad p_x^{(\gamma)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_\gamma^2} - p^2}, \quad (6)$$

Индекс  $\gamma$  столбца матрицы (6) нумерует три независимых решения, скорость распространения  $c_\gamma$  совпадает со скоростью поперечных волн при  $\gamma = y, z$  и со скоростью продольных волн  $\gamma = x$ . Вектор  $\mathbf{C}(\mathbf{p}, \omega)$  определяется из граничного условия (4), которое после разложения в интеграл Фурье и подстановки (5) в (4) принимает вид (векторные индексы опускаем):

$$H^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) \mathbf{C}(\mathbf{p}, \omega) + \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} [\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathbf{V}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] \mathbf{C}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \omega), \quad (7)$$

где

$$H_{\alpha\gamma}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = i \left( p_x^{(\gamma)} u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega) + p_\alpha u_x^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega) + \delta_{\alpha x} \left( \frac{c_l^2}{c_t^2} - 2 \right) p_\beta u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega) \right),$$

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{V}_\alpha^{(1)}(p, q) &= \xi(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left[ \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathbf{q} u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) + (p - q)_\beta q_\alpha u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{c_t^2}{c_l^2} - 2 \right) (p - q)_\alpha q_\beta u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) - q_x^{(\gamma)^2} u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) + \right. \\
&+ \left. q_\alpha q_x^{(\gamma)} u_x^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) + \left( \frac{c_t^2}{c_l^2} - 2 \right) \delta_{\alpha x} q_x^{(\gamma)} q_\beta u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) \right], \\
\mathbf{V}_{\alpha\gamma}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= i \int \frac{d^2 q'}{(2\pi)^2} \xi(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{q}') \xi(\mathbf{q}') q_x^{(\gamma)} \left[ \left( qq' - \frac{q_x^{(\gamma)^2}}{2} \right) u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) + \right. \\
&+ \left. \left( q'_{\beta\delta} - \delta_{\beta x} \frac{q_x^{(\gamma)}}{2} \right) q_\alpha^{(\gamma)} u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) + \left( \frac{c_t^2}{c_l^2} - 2 \right) \left( q'_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha x} \frac{q_x^{(\gamma)}}{2} \right) q_\beta^{(\gamma)} u_\beta^{(\gamma)}(\mathbf{q}, \omega) \right].
\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В формулах (8)  $p_{\alpha\delta} = 0$  при  $\alpha = x$ ,  $p_\alpha = p_y$ ,  $p_z$  при  $\alpha = y, z$ . Как и в [1], считаем амплитуду шероховатости  $\xi(\mathbf{s})$  малой по сравнению с длиной звуковой волны  $\lambda$ , поэтому при выводе (7) левая часть граничного условия (4) разложена по  $\xi$  с точностью до членов второго порядка.

Для вычисления потока требуется подставить (5) в (3). Находим:

$$\begin{aligned}
q_s(x, \mathbf{p}, \omega) &= -\frac{\rho c_t^2}{(2\pi)^3} \int \omega' d\omega' d^2 p' \left\{ (p - p')_{s'} \left[ u_k^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_k^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \delta_{s's} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. u_{s'}^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_s^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') + \left( \frac{c_l^2}{c_t^2} - 2 \right) u_s^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_{s'}^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \right] + \right. \\
&+ \left. p_x^{(\beta)}(p - p') u_x^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_s^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') + \right. \\
&\left. \left( \frac{c_l^2}{c_t^2} - 2 \right) p_x^{(\beta)}(p - p') u_s^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_x^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \right\} \times \\
&\times C_\gamma(\mathbf{p}', \omega') C_\beta(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \exp \left\{ i \left( p_x^{(\gamma)}(p') + p_x^{(\beta)}(p - p') \right) x \right\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

В интересующем нас потоке на больших расстояниях от места возбуждения член с  $p_x^{(\beta)}(p - p')$  с помощью условий (4) можно привести к виду, содержащему  $(p - p')_{s'}$ , после чего выражение (9) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
q_s(x, \mathbf{p}, \omega) &= -\frac{\rho c_t^2}{(2\pi)^3} \int \omega' d\omega' d^2 p' (p - p')_{s'} C_\gamma(\mathbf{p}', \omega') C_\beta(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \times \\
&\times T_{ss'}^{(\gamma\beta)}(\mathbf{p}', \omega', \mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \exp \left\{ i \left( p_x^{(\gamma)}(p') + p_x^{(\beta)}(p - p') \right) x \right\}, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T_{ss'}^{(\gamma\beta)}(\mathbf{p}', \omega', \mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') &= u_k^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_k^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \delta_{s's} + \\
&+ u_{s'}^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_s^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') - 2u_s^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_{s'}^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') - \\
&- u_x^{(\gamma)}(\mathbf{p}', \omega') u_x^{(\beta)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega') \delta_{s's}.
\end{aligned}$$

Для вычисления  $\mathbf{C}$  требуется решить уравнение (7). В силу малости  $\xi(\mathbf{s})$ , будем решать уравнение (7) итерациями по  $\mathbf{V}^{(1)}$  и  $\mathbf{V}^{(2)}$ .

В нулевом приближении:

$$\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = H^{(0)-1}(\mathbf{p}, \omega) P(\mathbf{p}, \omega).$$

Подставляя  $\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega)$  в (5), получим решение на идеально ровной поверхности:

$$u_\alpha(x, \mathbf{p}, \omega) = u_\alpha^{(\gamma)}(\mathbf{p}, \omega) H_{\gamma\beta}^{(0)-1}(\mathbf{p}, \omega) P_\beta(\mathbf{p}, \omega) e^{ip_x^{(\gamma)}x}. \quad (11)$$

Полюса  $u_\alpha(x, p, \omega)$  (11), определяемые из условия

$$\det H^{(0)}(p, \omega) = \left(2p^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^2 + 4p^2 p_x^y p_x^x = 0,$$

дают известный спектр рэлеевских волн на идеальной поверхности

$$p = p_0(\omega) = \frac{\omega}{c_R}.$$

Усредненный по времени поток плотности энергии, определяемый интегрированием выражения (10) по  $p$  с множителем  $e^{i\mathbf{p}\mathbf{s}}$ , должен вычисляться при  $\omega = 0$ . На идеальной поверхности результат интегрирования на больших расстояниях определяется полюсами и ветвлениями выражения (11), а также перевальными точками экспоненты в (9). Последние определяют вклад объемных волн в поток энергии. При интегрировании по углу между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{s}$  имеются две перевальные точки, отвечающие двум направлениям распространения.

Найдем вклад полюсов, т.е. рэлеевских волн, в поток энергии. Записывая обратную матрицу  $\mathbf{H}^{(0)-1}(\mathbf{p}, \omega)$  вблизи полюса в виде:

$$\mathbf{H}_{\gamma\beta}^{(0)-1}(\mathbf{p}, \omega) = (p^2 - p_0^2(\omega) + i\delta)^{-1} R_{\gamma\beta}(\mathbf{p}), \quad (12)$$

где  $R_{\gamma\beta}(\mathbf{p})$  не имеет особенности, получаем для вклада рэлеевских волн в поток энергии следующую оценку:

$$\mathbf{q}^{(s)}(0, s, 0) \sim \frac{\rho}{s} \int d\omega' \omega'^3 p^2(\omega'). \quad (13)$$

Вклад перевальной точки  $p_\gamma = \frac{\omega}{c_\gamma} \left(s / \sqrt{(x^2 + s^2)}\right)$ , имеющейся в интеграле по модулю  $p$ , оценивается следующим образом:

$$\mathbf{q}^{(s)}(x, s, 0) \sim \frac{\rho c_t x^3}{(x^2 + s^2)^{5/2}} \int d\omega' \omega'^2 p^2(\omega'). \quad (14)$$

Легко видеть, что вклад ветвлений на больших расстояниях пропорционален  $1 / (x^2 + s^2)^{5/4}$ , что мало по сравнению с (14).

Возвращаясь к случаю шероховатой поверхности на  $n$ -ом шаге итерации, находим:

$$C^{(n)}(\mathbf{p}, \omega) = - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} H^{(0)-1}(\mathbf{p}, \omega) \left[ \mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathbf{V}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] C^{(n-1)}(\mathbf{p}, \omega). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10) и усредняя по шероховатостям, видим, что возникают слагаемые двух типов. В слагаемых первого типа среднее от произведения  $C_\gamma(\mathbf{p}', \omega')$   $C_\beta(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega')$  разбивается на произведение средних. Вычисление среднего от  $C_\gamma(\mathbf{p}', \omega')$ , подробно описанное в [1], приводит к следующему результату:

$$\langle C_\gamma(p, \omega) \rangle = H_{\gamma\alpha}^{-1}(p, \omega) P_\alpha(p, \omega),$$

$$H_{\gamma\alpha}(\mathbf{p}, \omega) = H_{\gamma\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left( \left\langle \mathbf{V}_{\gamma\beta}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) H_{\beta\delta}^{(0)-1}(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{V}_{\delta\alpha}^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{V}_{\gamma\alpha}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right\rangle \right). \quad (16)$$

Члены с  $\mathbf{V}$  изменяют спектр рэлеевских волн. Вблизи полюса  $H^{-1}$  можно представить в виде, аналогичном (12):

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{p}, \omega) = (p^2 - p_0^2(\omega) + i/\tau c_R)^{-1} R(\mathbf{p}). \quad (17)$$

Асимптотические выражения для  $(\tau c_R)^{-1}$  приведены в [1]. Отметим, что формула (16) позволяет вычислять затухание лишь во втором порядке по  $\xi/\lambda$ , в котором оно определяется бинарной корреляционной функцией

$$\left\langle \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{V}^{(1)} \right\rangle \sim \xi_2 \sim \langle \xi(\mathbf{p}) \xi(\mathbf{p}') \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \xi_2(\mathbf{p}).$$

Легко убедиться, что в то время как  $\mathbf{V}^{(1)}$  определяет как затухание, так и смещение собственных частот,  $\left\langle \mathbf{V}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right\rangle$  вклад в затухание не дает. По этой причине в дальнейшем  $\left\langle \mathbf{V}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right\rangle$  рассматривать не будем.

Несводящееся к произведению средних выражение во втором порядке по  $\xi$  изображено на рисунке.

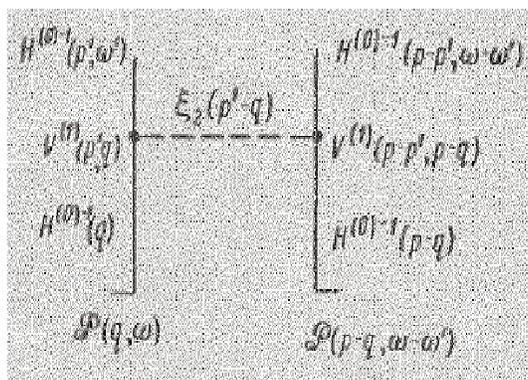


Рис. 1: Диаграмма второго порядка

Тонкая линия начинается с  $H^{(0)-1}(\mathbf{p}', \omega')$  и оканчивается  $P(\mathbf{q}, \omega')$ , либо начинается с  $H^{(0)-1}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega - \omega')$  и оканчивается  $P(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \omega - \omega')$ , а пунктирной линии соответствует бинарная корреляционная функция  $\xi_2$ , в вершине появляется множитель  $\mathbf{V}^{(1)}$ . Произведя суммирование итерационного ряда для среднего

$$\langle C_\gamma(\mathbf{p}', \omega') C_\beta^*(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) (p' - p)_s \rangle \equiv \prod_{\gamma\beta s}(\mathbf{p}', \omega', \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega),$$

в лестничном приближении получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \prod_{\gamma\beta s}(\mathbf{p}', \omega', \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) &= H_{\gamma\alpha}^{-1}(\mathbf{p}', \omega') H_{\beta\delta}^{-1*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) \times \\ &\times [P_\alpha(\mathbf{p}', \omega') P_\delta^*(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega)] (p' - p)_s + \\ &+ \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left\langle \mathbf{V}_{\alpha\mu}^{(1)}(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \mathbf{V}_{\delta\alpha}^{(1)*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) \right\rangle \prod_{\mu\alpha s}(\mathbf{q}, \omega', \mathbf{q} - \mathbf{p}, \omega' - \omega). \end{aligned} \quad (18)$$

В дальнейшем нас будет интересовать в основном случай, когда корреляционный радиус  $d$  (область, в которой  $\xi_2$  заметно отлична от нуля) велик по сравнению с характерной длиной рэлеевских волн. При выводе (18) мы пренебрегли членами порядка  $\lambda/d$ . Средний по времени поток  $\mathbf{q}(x, \mathbf{p}, \omega)$  на больших расстояниях определяется  $\mathbf{p}$  и  $\omega$ , малыми по сравнению с характерными частотами и длинами рэлеевских волн. По этой причине интеграл

$$\int \frac{d^2 t}{(2\pi)^2} \left\langle \mathbf{V}_{\alpha\mu}^{(1)}(\mathbf{p}', \mathbf{t}) \mathbf{V}_{\beta\nu}^{(1)*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{t} - \mathbf{p}) \right\rangle \prod_{\mu\nu s}(\mathbf{t}, \omega', \mathbf{t} - \mathbf{p}, \omega' - \omega) = p'_s \mathbf{K}_{\alpha\beta}(\omega, \omega') \quad (19)$$

будем вычислять при малых  $p$  и  $\omega$ , а  $p'$  соответствует длине возбуждаемых рэлеевских волн. Для решения уравнения (18) умножим его на  $\left\langle \mathbf{V}_{\alpha\gamma}^{(1)}(\mathbf{l}, \mathbf{p}') \mathbf{V}_{\delta\beta}^{(1)*}(\mathbf{l} - \mathbf{p}, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right\rangle$  и проинтегрируем по  $p'$ . Получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_s \mathbf{K}_{\alpha\delta}(\omega, \omega') &= \int \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \left\langle \mathbf{V}_{\alpha\gamma}^{(1)}(\mathbf{l}, \mathbf{p}') \mathbf{V}_{\delta\beta}^{(1)*}(\mathbf{l} - \mathbf{p}, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right\rangle \times \\ &\times H_{\gamma\mu}^{-1}(\mathbf{p}', \omega') H_{\beta\gamma}^{-1*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) [P_\mu(\mathbf{p}', \omega') P_\gamma^*(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) + \mathbf{K}_{\mu\gamma}(\omega, \omega')] p'_s. \end{aligned} \quad (20)$$

Характер решений уравнений (20) определяется тем, какая из функций

$$\xi_2(\mathbf{l} - \mathbf{p}') \sim \left\langle \mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{l}, \mathbf{p}') \mathbf{V}^{(1)*}(\mathbf{l} - \mathbf{p}, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right\rangle$$

или

$$H^{-1}(\mathbf{p}', \omega') H^{-1*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega)$$

является при интегрировании по  $p'$  более острой. Первая существенно меняется при изменении модуля в интервале порядка  $1/d$ , а вторая – в интервале  $1/\tau c_R$ . Соответствующие интервалы угла вектора  $\mathbf{p}'$ :  $1/dp_0(\omega')$  для  $\xi_2(\mathbf{l} - \mathbf{p}')$  и  $1/\sqrt{\tau c_R p}$  для  $H^{-1}(\mathbf{p}', \omega') H^{-1*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega)$ . Умножая (20) скалярно на  $\mathbf{l}$  и используя (18), видим, что имеются следующие предельные случаи.

а) Корреляционный радиус  $d$  по сравнению с  $\tau c_R$ . Интегрирование по вектору  $\mathbf{p}'$  в (20) выполняется с помощью острой функции  $\xi_2(\mathbf{l} - \mathbf{p}')$ , и полюсные знаменатели  $H^{-1}$  могут быть вынесены при  $\mathbf{p}' = \mathbf{l}$ . В этом случае использованное лестничное приближение неприменимо, потому что опущенные при выводе (18) диаграммы велики по параметру  $(ap')^{-2}$ .

б) При меньших значениях корреляционного радиуса  $d < \tau c_R$  интегрирование по модулю  $\mathbf{p}$  выполняется с помощью полюсных знаменателей, а интегрирование по углу  $\theta'$  – между  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{l}$  с помощью функции  $\xi_2$  при условии

$$\frac{p}{p_0(\omega') d} \ll \frac{1}{\tau c_R}. \quad (21)$$

Выделяя полюсной знаменатель  $b \equiv (p \cos \theta + p_0(\omega) - i/\tau c_R)^{-1}$ , где  $\theta$  – угол между  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{l}$ , и вводя не имеющую особенностей матрицу

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{l}, \mathbf{p}') = \frac{\mathbf{V}_{\alpha\delta}^{(1)}(\mathbf{l}, \mathbf{p}') R_{\delta\beta}(\mathbf{p}')}{2p_0(\omega')},$$

получаем:

$$K_{\alpha\delta}(\omega, \omega') = i\pi b \left[ \left\langle - \int M_{\alpha\mu} M_{\delta\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \right\rangle P_\mu P_\gamma^* + \left\langle - \int M_{\alpha\mu} M_{\delta\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \right\rangle K_{\mu\gamma}(\omega, \omega') \right]. \quad (22)$$

Решая (22), находим:

$$K_{\mu\gamma}(\omega, \omega') = [\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\gamma} - i\pi b \langle -\int M_{\mu\beta}M_{\nu\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \rangle]^{-1} \times \langle -\int M_{\beta\alpha}M_{\gamma\delta}^* \cos \theta' d\theta' \rangle i\pi b P_{\alpha}P_{\delta}^*$$

Подставляя значение  $K_{\alpha\delta}$  из (22) в выражение для поляризованного оператора  $\Pi_{\gamma\beta s}$  (18), получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma\beta s} &= H_{\gamma\alpha}^{-1} H_{\beta\delta}^{-1*} p'_s \left\{ P_{\alpha}P_{\delta}^* + \left[ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} - i\pi b \langle -\int M_{\alpha\beta}M_{\delta\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \rangle \right]^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times i\pi b \langle -\int M_{\beta\mu}M_{\nu\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \rangle P_{\mu}P_{\nu}^* \right\} \end{aligned}$$

Представляя обратную матрицу в виде:

$$\begin{aligned} &\left[ \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\gamma} - i\pi b \langle -\int M_{\mu\beta}M_{\nu\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \rangle \right]^{-1} = \\ &= \det \left[ \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\gamma} - i\pi b \langle -\int M_{\mu\beta}M_{\nu\gamma}^* \cos \theta' d\theta' \rangle \right] N_{\mu\beta, \nu\gamma} \end{aligned}$$

где  $N_{\mu\beta, \nu\gamma}$  не имеет особенностей, находим:

$$\begin{aligned} &\Pi_{\gamma\beta s}(\mathbf{p}', \omega', \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) = \\ &= H_{\gamma\alpha}^{-1}(\mathbf{p}', \omega') H_{\beta\delta}^{-1*}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega' - \omega) p'_s \left\{ \frac{-p \cos \theta - p_0(\omega) + \frac{i}{\tau_{tr} c_R}}{-p \cos \theta - p_0(\omega) + \frac{i}{\tau_{tr} c_R}} \right\} N_{\mu\alpha, \nu\delta} P_{\mu}P_{\nu}^*, \quad (23) \end{aligned}$$

где  $\frac{1}{\tau_{tr}} = \pi c_R \langle -\int Sp\mathbf{M} Sp\mathbf{M}^* (\cos \theta' - 1) d\theta' \rangle$ .

Последний интеграл определяется областью углов  $|\theta'| < 1/p_0(\omega')d$  и мы получаем следующую оценку:

$$\tau_{tr}^{-1} \sim \frac{a^2 p_0^2(\omega')}{d} c_R. \quad (24)$$

Из формулы (24) видно, что с ростом  $d$  время  $\tau_{tr}$  растет. Асимптотика потока энергии в этом случае дается выражением:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}(0, s, 0) &\sim \exp \left\{ -\frac{s}{\tau_{tr} c_R} \right\} s^{-1} \rho \int \omega'^3 P^2(\omega') d\omega', \\ (\tau c_R)^{-1} &< d^{-1} < \frac{p_0(\omega')}{\sqrt{\tau c_R p}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

в) В случае  $p/p_0(\omega')d^2 \gg (\tau c_R)^{-1}$  оценка решения уравнения (18) дается первым слагаемым в правой части. В этом случае затухание определяется по порядку величины тем же  $\tau$ , что и смещение полюсов гриновской функции  $H^{-1}(\mathbf{p}, \omega)$ . Соответствующие асимптотические формулы приведены в работе [1].

Таким образом, транспортное время затухания прямо пропорционально длине плоских участков  $-d$  для случая даваемого оценкой (24), что в ряде случаев определяет физический характер ослабления потока плотности энергии поверхностных волн на стохастически-шероховатой поверхности.

## Цитированная литература

1. Уразаков Е. И., Фальковский Л. А. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 2297.

2. **Бреховских Л. М.** // Акуст. журнал. 1959. Т. 5. С. 3.
3. **Лалин Л. Д.** // Акуст. журнал. 1969. Т. 5. С. 3.
4. **Фальковский Л. А.** // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 838.
5. **Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.** Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., 1964.
6. **Гуань-динь Хуа** // Акуст. журнал. 1961. Т. 8, С. 4.

*Поступила в редакцию 15.04.2009г.*

УДК 517.518

## ИСПРАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ “О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА”

Г. АКИШЕВ

Карагандинский государственный университет им.Е.А. Букетова  
г. Караганда ул. Университетская, 28 akishev@ksu.kz

В моей статье опубликованной в журнале “Математический журнал”, 2002, том. 2, №3, стр. 5 – 13 в доказательстве теоремы 3 использована теорема 2, где на фундаментальную функцию накладывается дополнительное условие. Поэтому формулировка теоремы 3 должна быть в следующей формулировке.

**Теорема 3.** Пусть дан модуль непрерывности  $\omega(\delta)$ ,  $\delta \in [0, 1]$ ,  $X(\varphi)$  – сепарабельное симметричное пространство,  $1 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < 2$  и система Хаара  $\chi\{p_n\}$  определена ограниченной последовательностью  $\{p_n\}$ . Тогда для того, чтобы для любой функции  $f \in H^\omega$  ряд (2) равномерно сходил на  $[0, 1]$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n\varphi(n^{-1})]^{-1} \omega(n^{-1}) < +\infty. \quad (5)$$

Доказательство остается без изменения.

Карагандинский государственный  
университет им. Е.А. Букетова

Поступила в редакцию 22.08.2008г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

A k i s h e v G . **On expansion coefficients with respect to systems similar to orthogonal** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 5 – 14.

In this paper are proved the estimate of expansions coefficients with respect to similar orthogonal systems of elements of Marcinkiewicz, Lorentz spaces and theorems Hardy-Littluwuda for systems similar.

References – 13.

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

А қ ы ш е в Г . **Ортогоналдыққа ұқсас жүйе бойынша жіктеу коэффициенттері туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 5 – 14.

Функцияларды ортогональ жүйеге ұқсас жүйе бойынша жіктеу коэффициенттерімен оның Лоренц, Марцинкевич кеңістіктерінің мөлшерінің арасындағы байланыс орнатылған.

Библ. – 13.

УДК: 517.6:539.3

2000 MSC: 74B05,35E05

A l e x e y e v a L . A . **Generalized solutions of the BVP of elastodynamics in the case of subsonic running loads** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 15 – 23.

The boundary value problems are considered for elastic medium, bounded by cylindrical surface, on which the load moves with constant subsonic velocity, which type is not changed in the course of time. This class of problems is model for dynamics of underground constructions, type of the transport subways, as well as overland road transport. The generalized functions method is developed for solving BV problems. The dynamic analogues of Green formulas are built. On their base the singular border integral equations and generalized decisions is defined.

References – 8.

УДК: 517.6:539.3

2000 MSC: 74B05,35E05

А л е к с е е в а Л . А . **Қума жүктемелердің дыбысқа дейінгі икемді динамиканың шекті есептердің жағдайындағы талдап қорытылған шешімдері** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 15 – 23.

Түрі уақыт ағынымен өзгермейтін, цилиндрлік бетпен шектелген тұрақты дыбысқа дейінгі жылдамдық арқылы қозғалатын жүктеменің серпімді орта үшін шеткі есептері қарастырылады. Берілген класс есептері жер асты құрылыстарының модельді динамикасы үшін, сонымен

қатар транспорттық тоннельдерде және жер үсті жол транспорттарында қолданылады. Шеткі есептерді шешу үшін талдап қорытылған функциялық әдістер дамытылуда. Қойылған шекті есептерді шешетін Грин формуласына аналогтық динамикалық формулалар құрылған және олардың негізінде сингулярлы шекті интегралды теңдеулер алынды.

Библ. – 8.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Belosludtsev O. M., Makarenko N. G., Pak A. A. **Diagnostics of synchronous patterns in geophysical time series with the help of symbolic dynamics** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 24 – 34.

In this paper we research mutual correlations between distinct geophysical signals which are seen simultaneously on geophysical observatories of Almaty test-site. We use method of symbolic dynamics that gives us several advantages: First, this approach allows analyzing heterogenic data without pre-norming. Second, it has a tolerance for errors of estimations. With the help of the method we detected the general synchronization of various geophysical samples. A probable result explanation is the existence of a single seismological scenario that is related to the movement of geophysical joints.

References – 13.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Белослюдцев О. М., Макаренко Н. Г., Пак А. А. **Символикалық динамика әдісі бойынша геофизикалық берілімдердің уақытты қатарларындағы синхрондық паттерндер диагностикасы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 24 – 34.

Алматы болжамдық сынақ алаңындағы геофизикалық обсерваторияларында синхронды түрде бақыланатын әртүрлі геофизикалық дабылбелгілер арасындағы өзара байланыс зерттеледі. Ол үшін біріншіден әртүрлі жаратылысты берілімдерді алдынала шамалаусыз-ақ талдауға жағдай жасайтын, екіншіден өлшеу қателеріне толерантты қасиеті бар символикалық динамиканың апараты қолданылады. Әдіс әр түрлі жаратылысты дабылбелгілер санақбасын жалпылай синхрондауды табуды қамтамасыз етті. Нәтиженің мүмкін түсініктемесі - геологиялық ортаның бөлшектерінің қозғалысымен байланысты бірыңғай сейсмикалық сценарийдық болуында.

Библ. – 13.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42C10, 46E25

Bimendina A. U., Smailov E. S. **Sufficient condition of investment in Lorenz's space by weak parameter** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 35 – 44.

In this article are considered correlations between the best approximations by means of linear aggregates of Price systems in different metrics of Lorenz's space by weak metrical parameter.

References – 13.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42C10, 46E25

Бимендина А. У., Смаилов Е. С. **Лоренц кеңістігіне функцияның енгізілуінің жеткілікті шарты** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 35 – 44.

Мақалада Лоренц кеңістіктерінде Прайс көпмүшеліктерімен алынған ең жақсы жуықталар арасындағы қатынастар қарастырылып, енгізілу шарттары әлсіз параметрлермен анықталған.

Библ. – 13.

УДК: 517.962

2000 MSC: 42A10

Вораев К. В., Вораева С. К. **About area of compressibility unstable RDS and the determined chaos**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 45 – 52.

Steady and not steady points collide during bifurcation, which subsequently are destroyed and positions pass in chaos.

References – 15.

УДК: 517.962

2000 MSC: 42A10

Бопаев К. Б., Бопаева С. К. **Орнықсыз айырымдық динамикалық жүйені қысу аймағы және детерминантты хаос**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 45 – 52.

Бифуркация барысында орнықты және орнықсыз нүктелер соқтығысып, оның нәтижесінде екеуіде өздерінің мағынасын жоғалтып хаосқа айналады.

Библ. – 15.

УДК: 517. 5

2000 MSC: 41A46

Женсыкбаев А. А. **Сглаживание истокообразных функций многих переменных** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 53 – 63.

Рассматриваются проблемы сглаживания оператора информации на множестве функций типа свертки. В частности, даны методы линейного и нелинейного сглаживания хаотических данных.

References – 5.

УДК: 517. 5

2000 MSC: 41A46

Женсыкбаев А. Ә. **Көп айнымалы бастаутәрізді функцияларды тегістеу**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 53 – 63.

Орама тәрізді функциялар жиынында ақпараттық операторды тегістеу мәселелері қарастырылады. Дербес жағдайда, хостық берілімдерді сызықты және бейсызық тегістеу әдістері берілген.

Библ. – 5.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B37

Кадирбаева Ж. М. **One algorithm of a finding of the solution of two points boundary value problem loaded differential equations** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 64 – 70.

Two points boundary value problem of loaded differential equations is investigated by method of parametrization with different paces of decomposition of an interval. The algorithm of finding approximate solution is offered and sufficient conditions of algorithm convergence to unique solution of considering problem are obtained.

References – 6.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B37

Кадырбаева Ж. М. **Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің шешімін табудың бір алгоритмі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 64 – 70.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есеп интервалды әр түрлі қадамдармен бөлуімен параметрлеу әдісі арқылы зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылған және ол алгоритмнің жалғыз шешімге жинақтылығының жеткілікті шарттары алынған.

Библ. – 6.

УДК: 539.22

2000 MSC: 83C50, 74E10, 74E15, 76F05, 74N05

Канумгазиева И. А. **Diagrams of direction magnetic moment of dipole in anisotropic medium** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 71 – 77.

The exact analytical solutions of Maxwell's equations for radiation of point magnetic dipole in anisotropic medium are received. The directivity diagrams of point magnetic dipole radiation at parallel and perpendicular directions of crystal axis are obtained.

References – 9.

УДК: 539.22

2000 MSC: 83C50, 74E10, 74E15, 76F05, 74N05

Канымгазиева И. А. **Анизотропиялық ортадағы магниттік диполь моменінің бағытталу диаграммасы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 71 – 77.

Бір ості анизотропиялық ортада нүктелік диполдің магнит моментінің сәулеленуі үшін Максвелл теңдеулерінің нағыз аналитикалық шешімі алынды. Оның кристалл осіне параллель және перпендикуляр бағытталу диаграммасы салынды.

Библ. – 9.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

Kozhanov A. I., Pul'kina L. S. **About solvability of some boundary value problems with shifting for the linear hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 78 – 92.

Theorems of solvability of some spacially non-local boundary value problems for the one-dimensional hyperbolic equations when boundary conditions represent a combination of Samarskii's non-local boundary conditions with variable coefficients and a integral boundary condition are established.

References – 10.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

Кожанов А. И., Пулькина Л. С. **Сызықты гиперболалық теңдеулер үшін кейбір ысырылмасы бар шекаралық есептердің шешілетінділігі туралы** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 78 – 92.

Шекаралық шарттары айнымалы коэффициентті А.А.Самарскийдің локалсыз шарттары мен интегралдық түрдегі шарттардың комбинациясынан құрылған бір өлшемді гиперболалық теңдеулер үшін кеңістік бойынша локалсыз шекаралық есептердің шешілетінділігі туралы теоремалар алынған.

Библ. – 10.

УДК: 517.956

2000 MSC: 34K29,60H10

Seilkhanova R. B. **Darbu's problem with deviation from characteristic and conjugate problems for degenerating multidimensional hyperbolic equations with operator Chaplign** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 93 – 101.

In the work Darbu's problem with deviation from the characteristic and conjugate problems for degenerating multidimensional hyperbolic equations with operator Chaplign are investigated. The concreteness of the considered problem is proved.

References – 14.

УДК: 517.956

2000 MSC: 34K29,60H10

Сейілханова Р. Б. **Азғындалған көп өлшемді Чаплығын операторы бар гиперболалық теңдеулерге сипаттамадан ауытқыған Дарбу есептері мен олардың түйіндес есептері**// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 93 – 101.

Мақалада азғындалған көп өлшемді Чаплығын операторы бар гиперболалық теңдеулерге сипаттамадан ауытқыған Дарбу есептері мен олардың түйіндес есептері зерттелген. Қарастырылған есептердің шешімі бар және жалғыздығы дәлелденген.

Библ. – 14.

УДК: 539.3

2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

Sydykov A. A. **Modeling of wave effect by means of periodical one-dimensional structures**// Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P. 102 – 105.

On the basis of the linear theory of spalling of elastic waves are made calculation of the tense state of rock near to developments also date of the seismic processing and interpretation of of the seismic information in the mining.

References – 5.

УДК: 539.3

2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

Сыдыков А. А. **Периодты біржақты құрылымдардың көмегімен толқындық құбылысты модельдеу** // Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б. 102 – 105.

Серпінді толқын таралуының сызықты теориясы жасалынды. Соның негізінде өндіру орнының маңында тау жынысының кернеулі күйінің есептелуі жүргізілді, сейсмикалық берілімдер кен ісі ақпаратының түсініктемесі берілді.

Библ. – 5.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H10

Urazakov E. E. **To a transport time of relaxation of energetic characteristic on surface waves on a statistically weak a rough surfaces** // Mathematical journal. 2009. Vol. 9. № 2 (32). P.106 – 113.

The stream of density of energy of the elastic waves extending on statistically weak to a rough surface is calculated. For power characteristic of superficial waves in one limiting case the easing

factor is defined by the transport time of a relaxation defining absence of processes of dispersion on small corners, in comparison with an initial direction of distribution.

References – 6.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74H10

**О р а з а қ о в Е . Е . Стохастикалық тегіс емес шекараның жазықтық толқындардың энергетикалық сипаттамаларының транспорттық уақытының тыныштығы**  
// Математикалық журнал. 2009. Т. 9. № 2 (32). Б.106 – 113.

Энергетикалық сипаттамалар үшін жазықтық толқындардың кему коэффициенті бір шекті кезде транспорттық уақыттың тыныштық күйінде анықталған. Оның мәнісі бастапқы бағытпен салыстырғанда аз-мазға таралған бұрыштардың процессінің жоқтығын шағылыстырады.

Библ. – 6.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту. Необходимо указать организацию, от которой направлена статья, адрес и e-mail (при наличии).
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в  $\text{\LaTeX}$ -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в  $\text{\LaTeX}$ ) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

### Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
  - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
  - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами.
  9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 9 № 2 (32) 2009

*Главный редактор:*

А.А.Женсыкбаев

*Заместители главного редактора:*

М.Т.Дженалиев, М.И.Глеубергенов

*Редакционная коллегия:*

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г. Бияшев, Н.К.Блиев,  
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,  
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий,  
С.Н.Харин,  
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),  
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

*Адрес редколлегии и редакции:*

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304

тел.: 8(727)2-72-01-66, [journal@math.kz](mailto:journal@math.kz), <http://www.math.kz>

Подписано в печать 31.03.2009г.

Тираж 300 экз. Объем 122 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: [print\\_express@bk.ru](mailto:print_express@bk.ru)