ISSN 1682—0525

*М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л*

# М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

*M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L*

2004 том 4 № 4 (14)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

*Министерство образования и науки Республики Казахстан*

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 4 № 4 (14) 2004

Периодичность — 4 номера в год



*Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304*
*Телефон 8-(3272)-91-20-03*, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 4, № 4 (14), 2004**

## ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 5 – 9*

*УДК 681.3.06*

# ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ЭЛЕКТРОННОЙ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ МЕТОДОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

К. А. Абдикаликов

Актюбинский гос.университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе ул. А.Молдагуловой, 34 Abdikalikov@mail.ru

Расширяющееся применение информационных технологий при создании, обработке, передаче и хранении документов требует в определенных случаях сохранения конфиденциальности их содержания, обеспечения полноты и достоверности.

Электронная цифровая подпись (ЭЦП) обеспечивает целостность сообщений, передаваемых по незащищенным телекоммуникационным каналам общего пользования в системах обработки информации различного назначения с гарантированной идентификацией ее автора.

Одной из особенностей ЭЦП класса Эль-Гамаля является временная несимметрия (разница) — существенное различие временных затрат на создание и верификацию подписи. Поясним это на примере алгоритма ГОСТ Р 34.10–94 [1].

**Процедура выработки подписи.** Текст сообщения, представленный в виде двоичной последовательности символов, подвергается обработке по определенному алгоритму, в результате которого формируется ЭЦП для данного сообщения.

ЭЦП включает следующие параметры:

$p$ — простое число, $2^{509} < p < 2^{512}$, либо $2^{1020} < p < 2^{1024}$;

$q$ — простое число $2^{254} < q < 2^{256}$ и $q$ является делителем для $(p-1)$;

$a$ — целое число, $1 < a < p-1$, при этом $a^q(\mathrm{mod} p) = 1$;

$k$ — целое число, $0 < k < q$;

$x$ — секретный ключ пользователя для создания подписи, $0 < x < q$;

$y$ — открытый ключ пользователя для верификации подписи, $y = a^q(\mathrm{mod} p)$.

Процедура подписи сообщения включает в себя следующие шаги.

1. Вычислить $h(M)$ — значение хэш-функции $h$ от сообщения $M$.
Если $h(M)(\mathrm{mod} q) = 0$, то присвоить $h(M)$ значение $\underbrace{00..01}_{255}$.

2. Выработать целое число $k$, $0 < k < q$.

3. Вычислить два значения: $r = a^k(\mathrm{mod} p)$, $r' = r(\mathrm{mod} q)$.

4. Если $r' = 0$, перейти к шагу 2 и выработать другое значение числа $k$.

Keywords: *privacy key, hash function, algorithm, program*
2000 Mathematics Subject Classification: 94B35, 94A60

5. С использованием секретного ключа $x$ пользователя (отправителя сообщения) вычислить значение $s = (xr' + kh(M))(\mathrm{mod} q)$.

6. Если $s = 0$, перейти к шагу 2, в противном случае закончить работу алгоритма.

Подписью для сообщения $M$ является вектор $< r' > 256 < s > 256$.

Отправитель направляет адресату цифровую последовательность символов, состоящую из двоичного представления текста сообщения и присоединенной к нему ЭЦП.

**Процедура верификации подписи.** Получатель должен проверить подлинность сообщения и подлинность ЭЦП, осуществляя ряд вычислений.

Это возможно при наличии у получателя открытого ключа отправителя, пославшего сообщение.

Процедура верификации подписи включает в себя следующие шаги.

1. Проверить условие $0 < s < q; \qquad 0 < r' < q$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то ЭЦП считается недействительной.

2. Вычислить $h(M_1)$ — значение хэш-функции $h$ от полученного сообщения $M_1$. Если $h(M_1)(\mathrm{mod} q) = 0$, то присвоить $h(M_1)$ значение $\underbrace{00..01}_{255}$.

3. Вычислить значение $\nu = h(M_1)^{q-2}(\mathrm{mod} q)$.

4. Вычислить значение $z_1 = s\nu(\mathrm{mod} q); \quad z_2 = (q - r')\nu(\mathrm{mod} q)$.

5. Вычислить значение $u = (a^{z_1} y^{z_2}(\mathrm{mod} p))(\mathrm{mod} q)$.

6. Проверить условие : $r' = u$.

Обозначим через $Q_{\text{ВС}}$ вычислительную сложность операции модульного возведения в степень $Z = X^Y(\mathrm{mod} N)$, где длины $X$ и $N$ составляют 512 бит, а длина $Y$ — 256 бит. Выразим через эту величину вычислительные сложности процедур создания и верификации цифровой подписи. При этом будем учитывать только операции возведения в степень, поскольку вычислительная сложность остальных операций мала по сравнению с ними. Вычислительной сложностью операции возведения в степень на шаге 3 также можно пренебречь, поскольку она эквивалентна вычислению обратного элемента $h(M_1)^{-1}(\bmod q)$. В результате получим, что вычислительная сложность создания подписи составляет

$$Q_{\text{СП}} \approx Q_{\text{ВС}}, \tag{1}$$

а вычислительная сложность верификации подписи —

$$Q_{\text{ВП}} \approx 2I_{\text{ВС}}, \tag{2}$$

поскольку на шаге 5 выполняются два возведения в степень.

Из выражений (1) и (2) следует, что алгоритм обладает несимметрией: время верификации подписи приблизительно в 2 раза больше времени ее создания.

Уменьшение несимметрии можно добиться за счет разработки специальных алгоритмов вычисления выражения вида

$$Z = X_1^{Y_1} X_2^{Y_2}(\mathrm{mod} N), \tag{3}$$

которое встречается на шаге 5 процедуры верификации подписи.

В работе рассматривается два алгоритма — модификации бинарного 1 [2, с.482] и блочного 2 алгоритмов возведения в степень [3]. Они выполняют вычисление произведения общего вида

$$Z = \prod_{i=1}^{k} X_i^{Y_i} \bmod N. \tag{4}$$

При описании алгоритмов используем следующие обозначения:

$X, Y, ...$ — числа многократной точности; $x, y, ...$ — числа однократной точности; $b$ — длина машинного слова в битах; $B = 2^b$ — количество чисел, представимых с однократной точностью; $L(X)$ — длина числа $X$ в битах, т.е. $2^{L(X)-1} \le X < 2^{L(X)}$; $l(X)$ — длина числа $X$ в словах, т.е. $B^{l(X)} \le X < B^{l(X)}$. Нумерация бит в числах производится от старших разрядов к младшим, начиная с 1.

**Алгоритм 1.** Исходные данные числа $X_i, Y_i, N; \quad N \ne 0;\ X_i < N; \quad i = \overline{1,k}$.

Результат $Z = \prod\limits_{i=1}^{k} X_i^{Y_i} \bmod N,\ l(Z) = l(N)$.

1. Вычислить значения $m = \max L(Y_i);\ Z = 1$.
2. Дополнить все $Y_i$ слева нулями до длины $m$ бит.
3. Для $j$, принимающего значения от 1 до $m$, выполнить шаги 4–7.
4. Вычислить значение $Z = Z^2 (\mathrm{mod} N)$.
5. Для $i$, принимающего значения от 1 до $k$, выполнить шаг 6.
6. Если $j$-й бит $Y_i$ равен 1, то вычислить $Z = ZX_i (\mathrm{mod} N)$.
7. Конец алгоритма.

При оценке вычислительной сложности данного алгоритма будем учитывать только наиболее трудоемкие операции — возведение в квадрат на шаге 4 и умножение на шаге 6. Шаг 4 всегда выполняется $m$ раз, а количество умножений на шаге 6 совпадает с количеством единичных бит в показателях $Y_i$.

Получим приближенную оценку вычислительной сложности алгоритма 1

$$Q_{MPOW_1}(l(N), m, k) = mQ_{MSQR}(l(N)) + \sum_{i=1}^{k} d_i Q_{MM}(l(N)), \tag{5}$$

где $m = \max L(Y_i);\ Q_{MSQR}(l)$ — вычислительная сложность модульного возведения в квадрат при длине модуля $l$ блоков; $d_i$ — количество единичных бит в показателе степени $Y_i; Q_{MM}(l)$ — вычислительная сложность модульного умножения двух чисел при длине модуля $l$ блоков.

Сравним алгоритм 1 с обычным бинарным алгоритмом, вычислительная сложность которого составляет [2],

$$Q_{b_1}(l(N), L(Y)) = L(Y) Q_{MSQR}(l(N)) + dQ_{MM}(l(N)).$$

Оценим выигрыш от использования алгоритма 1 при вычислении выражения (4)

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^{k} Q_{b1}(l(N), L(Y_i)) - l_{MPOW1}(l(N), m, k) == \left( \sum_{i=1}^{k} L(Y_i) - m \right) Q_{MSQR}(l(N)). \tag{6}$$

Выражение (6) приобретает наиболее простой вид при равных длинах $Y_i$: $\Delta Q = m(k - 1) Q_{MSQR}(l(N))$.

**Алгоритм 2**. В блочном алгоритме для уменьшения вычислительной сложности используется разбиение показателей степени $Y_i$ на блоки. Блоком называется:

- последовательность нулевых бит любой длины;

- последовательность, начинающаяся и оканчивающаяся на единичный бит, если ее длина не превышает некоторой константы $d_{\max}$.

Используем следующие обозначения: $geblk(Y_i, j)$ — операция выделения очередного блока из $Y_i$, начиная с $j$-го бита; $end(C_i)$ — номер в показателе $Y_i$, на котором заканчивается блок $C_i$.

Исходные данные: $X_i, Y_i, N; \quad N \ne 0;\ X_i < N; \quad i = \overline{1,k}$.

Результат $Z = \prod\limits_{i=1}^{k} X_i^{Y_i} \bmod N,\ l(Z) = l(N)$.

В алгоритме используется вспомогательная таблица $T\left[2^{d_{\max}}, k\right]$.

1. Вычислить значения $m = \max L(Y_i)) - 1;\ Z = 1$.

2. Дополнить $Y_i$ все слева нулями до длины $m$ бит.

3. Заполнить таблицу T для $i = \overline{1,k}$.; $j = \overline{1, 2^{d_{\max}} - 1}$.

$$T[i,j] = 0, \qquad \text{если} \quad j - \text{четное};$$

$$T[i,j] = X_i^j \bmod N, \qquad \text{если} \quad j - \text{нечетное}.$$

4. Выделить блоки: $C_i = geblk(Y_i, 1), \quad i = 1...k$.

5. Для $j$, принимающего значения от 1 до $m$, выполнить шаги 6–7.

6. Вычислить значение $Z = Z^2 (\mathrm{mod} N)$.

7. Для $i$, принимающего значения от 1 до $k$, выполнить шаги 8–9.

8. Если $j = end(C_i)$ и $C_i = 0$, то вычислить $Z = ZT[C_i, i] (\mathrm{mod} N)$.

9. Если $j = end(C_i)$, то вычислить $C_i = geblk(Y_i, 1 + j)$.

10. Конец алгоритма.

Алгоритм выполнения операции $C_i = geblk(Y_i, m)$.

1. Если $m$-й бит $Y_i$ равен нулю, то

1.1. Определить $n$ — номер первого единичного бита, стоящего справа от $m$-го бита.

1.2. $C_i = 0$.

1.3. $end(C_i) = n - 1$.

2. Если $m$-й бит $Y_i$ равен единице , то:

2.1. Выделить из $Y_i$ последовательность бит $\lambda$, начиная с $m$-го бита, обладающую свойствами а) $\lambda$ оканчивается на 1; б) $l(\lambda) \le d_{\max}$; в) для всех возможных последовательностей, удовлетворяющих свойствам а) и б), длина $\lambda$ максимальна.

2.2. $C_i = \lambda$.

2.3. $end(C_i) = m + l(\lambda) - 1$.

Оценку вычислительной сложности алгоритма 2 проведем с учетом только наиболее трудоемких операций (таб.1).

**Таблица 1.**

| No шага | Операция | Количество повторений |
|---|---|---|
| 3 | Умножение | $k\left[2^{d_{\max}-1}\right]$ |
| 6 | Возведение в квадрат | $m$ |
| 8 | Умножение | $\sum\limits_{i=1}^{k} \mu(Y_i)$ |

Через $\mu(Y_i)$ обозначено количество ненулевых блоков в показателе $Y_i$.

Таким образом, вычислительная сложность алгоритма 2 составляет

$$Q_{MPOW_2}(l(N), m, k) = mQ_{MSQR}(l(N)) + (k(2^{d_{\max}-1}) + \sum_{i=1}^{k} \mu(Y_i))Q_{MM}(l(N)). \tag{7}$$

По сравнению с обычным блочным алгоритмом с вычислительной сложностью

$$Q_{b_2}(l(N), L(Y)) = L(Y)Q_{MSQR}(l(N)) + (2^{d_{\max}-1} + \mu(Y))Q_{MM}(l(N))$$

алгоритм 2 дает выигрыш

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^{k} Q_{b_2}(l(N), L(Y_i)) - Q_{MPOW_2}(l(N), m, k) = \left(\sum_{i=1}^{k} L(Y_i) - m\right) Q_{MSQR}(l(N)).$$

Сравним (5) и (7), определим выигрыш алгоритма 2 относительно алгоритма 1:

$$\Delta Q_{12} = Q_{MPOW_1}(l(N), m, k) - Q_{MPOW_2}(l(N), m, k) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^{k} (d_i - \mu(Y_i)) - 2^{d_{\max}-1} \right) Q_{MM}(l(N)).$$

На основе предложенных алгоритмов разработано программное обеспечение для задач защиты информации. Для модульного умножения и возведения в квадрат использовались высокоскоростные арифметики [4, с.127].

Таким образом, при практической реализации параллельных алгоритмов возведение в степень удалось достигнуть уменьшения временной несимметрии и ускорения процедуры верификации цифровой подписи в 3-4 раза.

## Цитированная литература


1. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Процедуры выработки и проверки электронной цифровой подписи на базе асимметричного криптографического алгоритма. ГОСТ Р34.10-94.

2. **Кнут Д.Е.** Искусство программирования для ЭВМ. Т.2. М., 1977.

3. **Березовський А.І., Бесараб П.М., Задірака В.К., Шевчук Л.Б.** // Прикладная математика. 1998. Т.2, №337. С. 297–300.

4. **Абдикаликов К.А., Задирака В.К.** Быстрые ортогональные преобразования: теория и приложения. Алматы, 2003.


*Поступила в редакцию 10.12.2003 г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 10 — 19*

*УДК 517.518*

# О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МАРЦИНКЕВИЧА

Г. А. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
470074 г.Караганда ул.Университетская,28 akishev@kargu.krg.kz

В статье получены оценки порядков приближения классов С.М.Никольского $H_p^r$ и О.В.Бесова $B_{p,q}^r$ по норме анизотропного пространства Марцинкевича, а также найден порядок ортопоперечника класса $H_p^r$.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — $m$-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, ..., x_m)$ с действительными координатами и $I^m = [0, 2\pi)^m$ — $m$-мерный куб и даны $\bar{q} = (q_1, ..., q_m), \bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $1 \le q_j < +\infty$, $1 \le \theta_j < +\infty$, $\quad j = 1, ..., m$.

Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца измеримых по Лебегу $2\pi$-периодических функций $f(\bar{x})$, для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,...,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,...,*_m}(t_1, ..., t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной $x_j$ при фиксированных остальных переменных (сначала по $x_1$, затем по $x_2$ и т.д.) (см. [1], [2]).

Пусть $L^*_{\bar{q},\infty}(I^m)$ — пространство (Марцинкевича) функций, для которых

$$\|f\|_{\bar{q},\infty} = \sup_{\bar{t}\in I^m} \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{1}{q_j}} f^{*_1,...,*_m}(t_1, ..., t_m) < +\infty.$$

Пространство Лебега $L_{\bar{p}}(I^m)$, $p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$, со смешанной нормой состоит из всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, для которых (см. [3], стр. 128)

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int_0^{2\pi}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dx_m\right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty.$$

Keywords: *approximation, Marcinkiewicz space, orthowidth*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Известно, что пространства $L^*_{\bar{q},\bar{q}}(I^m)$ и $L_{\bar{q}}(I^m)$ не совпадают [2].

$L^\circ_{\bar{p}}(I^m)$ — множество всех функций $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x})dx_j = 0 \quad \forall j = 1, ..., m.$$

Через $\Delta^{l_j}_{h_j} f(\bar{x})$ обозначим разность порядка $l_j \in N$ по переменной $x_j$. Тогда смешанная разность определяется по формуле

$$\Delta^{\bar{l}}_{\bar{h}} f(\bar{x}) = \Delta^{l_m}_{h_m}(...(\Delta^{l_1}_{h_1} f(\bar{x}))...),$$

где $\bar{l} = (l_1, ..., l_m)$.

Известно,что для функции $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ смешанным модулем гладкости называется величина

$$\Omega_{\bar{l}}(f; \bar{t})_{\bar{p}} = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,...,m}} \|\Delta^{\bar{l}}_{\bar{h}} f(\cdot)\|_{\bar{p}}, \qquad \bar{t} \in [0,1]^m$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i<\bar{n},\bar{x}>},$$

где $< \bar{y}, \bar{x} >= \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$,

$$\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, ..., m\},$$

$a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной системе $\{e^{i<\bar{n},\bar{x}>}\}$.

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, ..., r_m), \quad r_j > 0, \quad j = 1, ..., m$. Рассмотрим класс С.М.Никольского $H^{\bar{r}}_{\bar{p}}$, состоящий из всех функций $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$, для которых

$$\Omega_{\bar{l}}(f, \bar{t})_{\bar{p}} \le \prod_{j=1}^{m} t_j^{r_j}, \quad \bar{t} \in [0,1]^m,$$

где $l_j > r_j$, $j = 1, ..., m$.

Класс О. В. Бесова [4]

$$B^{\bar{r}}_{\bar{p},\theta} = \{f \in L^\circ_{\bar{p}}(I^m) : \quad \|f\|_{\bar{p}} + \left[\sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} 2^{<\bar{s},\bar{r}>\theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^\theta_{\bar{p}}\right]^{\frac{1}{\theta}} \le 1\}, \qquad 1 \le \theta < +\infty.$$

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, ..., r_n)$. Положим $\bar{\gamma} = \frac{\bar{r}}{r_1}$, $r_j > 0$, $j = 1, ..., m$, и

$$Q^{\bar{\gamma}}_n = \bigcup_{<\bar{s},\bar{\gamma}> \le n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q^{\bar{\gamma}}_n) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q^{\bar{\gamma}}_n} b_{\bar{k}} e^{i<\bar{k},\bar{x}}\}.$$

Пусть $E^{(\bar{\gamma})}_n(f)_{\bar{q},\bar{\theta}}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q^{\bar{\gamma}}_n)$.

Теория вложения функциональных пространств $H^{\bar{r}}_{\bar{p}}, B^{\bar{r}}_{\bar{p},\theta}$ исследована С. М. Никольским [3], О. В. Бесовым [4], Т. И. Амановым [5] и другими математиками (см.библ. в [3], [5]). В пространствах Лебега с изотропной нормой порядки приближения $H-, B-$ классов тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов изучены в [6]–[17], а в пространствах со смешанной нормой — [18], [19], [20].

Пусть дано множество $F \subset L_{\bar{p}}$. Ортопоперечником множества $F$ называется следующая величина

$$d_M^{\perp}(F, L_{\bar{p}}) = \inf \sup_{f \in F} \|f - \sum_{j=1}^{M} \langle f, u_j \rangle \cdot u_j\|_{\bar{p}},$$

где inf берется по всем ортонормированным системам $\{u_j\}_{j=1}^M$ ограниченных функций (см. [21]) и $\langle f, u_j \rangle = \int_{I^m} f(\bar{x}) \cdot u_j(\bar{x}) d\bar{x}$.

Понятие ортопоперечника было введено В.Н.Темляковым [21]; им же рассмотрена тесно связанная с ортопоперечниками величина

$$d_M^B(F, L_{\bar{p}}) = \inf_{G \subset \mathbb{L}_m(B)_{\bar{p}}} \sup_{f \in F} \|f - Gf\|_{\bar{p}},$$

где $B \geq 1$, $\mathbb{L}_M(B)_{\bar{p}}$ — множество линейных операторов $G$, в область определения $D(G)$ которых входят все тригонометрические полиномы, а множество значений имеет размерность $M$, оно содержится в пространстве $L_{\bar{p}}$, и для всех $\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^M$ выполнено неравенство

$$\|Ge^{i<\bar{k}, \bar{x}>}\|_2 \leq B.$$

Операторы ортогонального проектирования на подпространство размерности $M$ содержатся в $\mathbb{L}_M(1)_2$.

Из определений $d^B$ и $d^{\perp}$ следует неравенство

$$d_M^B(F, L_{\bar{p}}) \leq d_M^{\perp}(F, L_{\bar{p}}).$$

Оценки ортопоперечников классов $H_p^{\bar{r}}$ изучены В. Н. Темляковым [8], [21], Н. Н. Пустовойтовым [22], Э. М. Галеевым [10].

В первом пункте настоящей заметки получены оценки сверху наилучшего приближения классов $H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, B_{\bar{p},\theta}^{\bar{r}}$ в пространстве Марцинкевича. Второй пункт посвящен оценке ортопоперечника класса $H_{\bar{p}}^{\bar{r}}$.

Положим $G_e(\bar{n}) = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in N^m : s_j \leq n_j, j \in e; s_j > n_j, j \notin e\}$, где $e \subset \{1, ..., m\}$.

$$f^{*,*}(\bar{t}) = \prod_{j=1}^{m} t_j^{-1} \int_0^{t_m} ... \int_0^{t_1} f^{*_1, ..., *_m}(x_1, ..., x_m) dx_1 ... dx_m.$$

В [20] доказаны следующие утверждения.

**Т е о р е м а А.** *Пусть* $1 \leq p_j < +\infty \, \forall j = 1, ..., m$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ *имеет место неравенство*

$$f^{\bar{*},\bar{*}}(\bar{t}) \leq C(p, m) \left\{ \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{s_m = n_m + 1}^{\infty} ... \sum_{s_1 = n_1 + 1}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{e \subset \{1, ..., m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\},$$

$t_j \in (2^{-n_j - 1}, 2^{-n_j}], \quad n_j = 0, 1, ...; \quad j = 1, ..., m.$

**Т е о р е м а Б.** *Пусть* $1 \le p_j < q_j < +\infty, \quad 1 \le \theta_j < +\infty$. *Если* $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ *и величина*

$$\sigma(f) \equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m \theta_m (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \left[ \cdots \left[ \sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1 (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}$$

*конечна, то* $f \in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}} \le C(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\theta}) \cdot \sigma(f).$$

Теперь изложим основные результаты статьи.

**1. О ц е н к и п о р я д к а п р и б л и ж е н и я к л а с с о в** $H^{\bar{r}}_{p}$, $B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$.

**Т е о р е м а 1.** *Пусть* $1 \le p_j < q_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$; $\bar{\gamma} = \frac{\bar{r}}{r_1}$, $r_1 = r_2 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$; $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$; $r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})$, $j = \nu + 1, ..., m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\sup_{f \in H^{\bar{r}}_{\bar{p}}} E^{(\bar{\gamma})}_n(f)_{\bar{q},\infty} \le C(p, q, r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu - 1}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Учитывая, что $f^{*_1, ..., *_m}$ не возрастает по каждой переменной, по теореме А будем иметь

$$\begin{aligned} \|f\|_{\bar{q},\infty} \le \sup\nolimits_{\bar{t} \in [0,2\pi]^m} \prod\nolimits_{j=1}^m t_j^{\frac{1}{q_j} - 1} \int_0^{t_m} dx_m ... \int_0^{t_1} f^{*_1, ..., *_m}(x_1, ..., x_m) dx_1 \le \\ \le C \cdot \sup\nolimits_{n_1, ..., n_m \ge 0} \Big\{ \prod\nolimits_{j=1}^m 2^{n_j (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \sum\nolimits_{s_1 = n_1}^{\infty} ... \sum\nolimits_{s_m = n_m}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} + \\ + \prod\nolimits_{j=1}^m 2^{-\frac{n_j}{q_j}} \sum\nolimits_{e \subset \{1, ..., m\}} \prod\nolimits_{j \notin e} 2^{\frac{n_j}{p_j}} \sum\nolimits_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod\nolimits_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \Big\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f, \bar{x})$ — частная сумма кратного ряда Фурье функции $f$ по тригонометрической системе с гармониками из ступенчатого гиперболического креста $Q^{\bar{\gamma}}_n$.

Применяя неравенство (1) к функции $f - S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f) \in L_{\bar{p}}(I_m)$, получим

$$\begin{aligned} \|f - S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f)\|_{\bar{q},\infty} \le C \cdot \sup_{k_1, ..., k_m \ge 0} \Big\{ \prod_{j=1}^m 2^{k_j (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \sum_{s_1 = k_1}^{\infty} ... \sum_{s_m = k_m}^{\infty} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f))\|_{\bar{p}} + \\ + \prod_{j=1}^m 2^{-\frac{k_j}{q_j}} \sum_{e \subset \{1, ..., m\}} \prod_{j \notin e} 2^{\frac{k_j}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{k})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f))\|_{\bar{p}} \Big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Положим $\Delta^{\bar{\gamma}}_n = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+ : \quad < \bar{s}, \bar{\gamma} > \le n\}$.

1. Пусть $\bar{k} \in \Delta^{\bar{\gamma}}_n$. Тогда

$$\delta_{\bar{s}}(f - S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f)) = \begin{cases} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}), & \bar{s} \in P_m(\bar{k})) \backslash \Delta^{\bar{\gamma}}_n, \\ 0, & \bar{s} \in P_m(\bar{k})) \cap \Delta^{\bar{\gamma}}_n, \end{cases} \tag{3}$$

$$\delta_{\bar{s}}(f - S_{Q^{\bar{\gamma}}_n}(f)) = \begin{cases} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}), & \bar{s} \in G_e(\bar{k})) \backslash \Delta^{\bar{\gamma}}_n, \\ 0, & \bar{s} \in \Delta^{\bar{\gamma}}_n, \end{cases}$$

где $P_m(\bar{k}) = \prod\limits_{j=1}^m [k_j, \infty)$.

Так как по условию $p_j < q_j$, то $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} > 0$. Поэтому

$$I_1 = \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \sum_{s_1=k_1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=k_m}^{\infty} \|\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f))\|_{\bar p} \le$$

$$\le \sum_{s_1=k_1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=k_m}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f))\|_{\bar p} = \sum_{\bar s \in P_m(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p}. \qquad (4)$$

Далее, учитывая определение множества $G_e(\bar n)$, будем иметь

$$I_2 = \prod_{j=1}^{m} 2^{-\frac{k_j}{q_j}} \sum_{e \subset \{1,\dots,m\}} \prod_{j \notin e} 2^{\frac{k_j}{p_j}} \sum_{\bar s \in G_e(\bar k)} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f))\|_{\bar p} \le$$

$$\le \sum_{e \subset \{1,\dots,m\}} \sum_{\bar s \in G_e(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$I_1 + I_2 \le C \cdot \Bigg\{ \sum_{\bar s \in P_m(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p} +$$

$$+ \sum_{e \subset \{1,\dots,m\}} \sum_{\bar s \in G_e(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p} \Bigg\} = C \cdot \sum_{<\bar s, \bar\gamma>>n} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p}, \qquad (6)$$

если $\bar k \in \Delta_n^{\bar\gamma}$.

2. Пусть $\bar k = (k_1, \dots, k_m) \notin \Delta_n^{\bar\gamma}$, т.е. $< \bar k, \bar\gamma >> n$. Тогда $\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f), \bar x) = \delta_{\bar s}(f, \bar x)$, если $\bar s \in \prod_{j=1}^{m} [1, k_j]) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}$, или $\bar s \in P_m(\bar k) = \prod_{j=1}^{m} [k_j, \infty)$, или $\bar s \in G_e(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}$, и

$$\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f)) = \delta_{\bar s}(f), \text{ если } \bar s \in G_e(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}, \text{ и } \delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f)) = 0, \text{ если } \bar s \in \Delta_n^{\bar\gamma}. \qquad (7)$$

Учитывая (7) и то, что $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} > 0 \ \forall j = 1, \dots, m$, будем иметь

$$I_1 = \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \sum_{s_1=k_1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=k_m}^{\infty} \|\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f))\|_{\bar p} \le$$

$$\le \sum_{\bar s \in P_m(\bar k)} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p} \qquad (8)$$

и

$$I_2 = \prod_{j=1}^{m} 2^{-\frac{k_j}{q_j}} \sum_{e \subset \{1,\dots,m\}} \prod_{j \notin e} 2^{\frac{k_j}{p_j}} \sum_{\bar s \in G_e(\bar k)} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar s}(f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f))\|_{\bar p} \le$$

$$\le \sum_{e \subset \{1,\dots,m\}} \sum_{\bar s \in G_e(\bar k)) \setminus \Delta_n^{\bar\gamma}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p}. \qquad (9)$$

В случае $\bar{k} \notin \Delta_n^{\bar{\gamma}}$, суммируя (8), (9), получим

$$I_1 + I_2 \le C \cdot \left\{ \sum_{\bar{s} \in P_m(\bar{k})} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{e \subset \{1,...,m\}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{k})) \setminus \Delta_n^{\bar{\gamma}}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\} \le$$

$$\le C \cdot \sum_{<\bar{s},\bar{\gamma}> \ge n} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}. \tag{10}$$

Таким образом (см.(1), (6), (10)), имеет место неравенство

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q},\infty} \le C \cdot \sum_{\substack{\bar{s}: \\ <\bar{s},\bar{\gamma}> \ge n}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \tag{11}$$

для любой функции $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$.

Пусть $f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}$. Тогда из (11) по лемме В [8] получим

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q},\infty} \le C \cdot \sum_{\substack{\bar{s}: \\ <\bar{s},\bar{\gamma}> \ge n}} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \le$$

$$\le C \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu - 1}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}} E_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)_{\bar{q},\infty} \le C(p,q,r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu - 1}.$$

Теорема доказана.

**Т е о р е м а 2.** *Пусть* $1 \le \theta < +\infty$, $1 < p_j < q_j < +\infty$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, ..., m$, $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\bar{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ *и* $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$; $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$; $r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})$, $j = \nu + 1, ..., m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\sup_{f \in B_{\bar{p},\theta}^{\bar{r}}} E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{q},\infty} \le C(p,q,r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\frac{\nu - 1}{\theta'}}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\theta - 1}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть $f \in B_{\bar{p},\theta}^{\bar{r}}$. К правой части неравенства (11) применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q},\infty} \le \|f\|_{B_{\bar{p},\theta}^{\bar{r}}} \cdot \left( \sum_{\substack{\bar{s}: \\ <\bar{s},\bar{\gamma}> \ge n}} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{12}$$

Положим $\gamma'_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}}$, $j = 1, ..., m$. По условию теоремы $r_1 = ... = r_\nu$ и $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$. Поэтому $\gamma'_j = 1$ $\forall j = 1, ..., \nu$. Из условия теоремы также следует, что $\gamma_j < \gamma'_j$, $j = \nu + 1, ..., m$.

Следовательно, по лемме Темлякова ([8], стр. 11) из (12) получим

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q},\infty} \le C(p,q,r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\frac{\nu - 1}{\theta'}}, \quad 1 < \theta < +\infty, \quad \forall f \in B_{\bar{p},\theta}^{\bar{r}}.$$

Если $\theta = 1$, то из (11) следует, что

$$\|f - S_{Q_n^{\bar\gamma}}(f)\|_{\bar q,\infty} \le C(p,q,r)\cdot 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}.$$

Теорема доказана.

**2. Оценка ортопоперечников.** Сначала докажем следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть* $p_1 = ... = p_\nu > p_{\nu+1} \ge ... \ge p_m \ge 1$, $1 \le \theta_j < \infty$, $\theta_j' = \frac{\theta_j}{\theta_j - 1}$, $j = 1,...,m$. *Тогда для ядра Дирихле* $D_{Q_n}(\bar x) = \sum\limits_{\bar k \in Q_n} e^{i<\bar k,\bar x>}$ *имеет место неравенство*

$$\|D_{Q_n}\|_{\bar p,\bar\theta} \le C\cdot 2^{\frac{n}{p_1}}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

**Доказательство.** Выберем число $p_0 \in (1, p_j)$ $\forall j = 1,...,m$ и применяем теорему Б

$$\|D_{Q_n}\|_{\bar p,\bar\theta} \le C\cdot\Bigg\{\sum_{s_m=1}^{n}\Bigg[\sum_{s_{m-1}=1}^{n-s_m}...\Big[\sum_{s_1=1}^{n-\sum\limits_{j=2}^{m}s_j}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_j})\theta_1}\times$$

$$\times\Big\|\prod_{j=1}^{m}\sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}e^{ix_js_j}\Big\|_{p_0}^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\Bigg]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}\Bigg\}^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

Далее, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1}e^{ikx}\Big|^{p_0}dx \asymp 2^{s(p_0-1)},\quad 1 < p_0 < +\infty$$

и $p_1 = ... = p_\nu$, будем иметь

$$\|D_{Q_n}\|_{\bar p,\bar\theta} \le C\cdot 2^{n(1-\frac{1}{p_1})}\cdot\Bigg\{\sum_{s_m=1}^{n}2^{s_m(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_m})\theta_m}\Bigg[\sum_{s_{m-1}=1}^{n-s_m}2^{s_{m-1}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_{m-1}})\theta_{m-1}}\times...\times$$

$$\times\Big[\sum_{s_{\nu+1}=1}^{n-\sum\limits_{j=\nu+2}^{m}s_j}2^{s_{\nu+1}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_{\nu+1}})\theta_{\nu+1}}(n-\sum_{j=\nu+1}^{m}s_j)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}\theta_{\nu+1}}\Big]^{\frac{\theta_{\nu+2}}{\theta_{\nu+1}}}...\Bigg]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}\Bigg\}^{\frac{1}{\theta_m}} \le$$

$$\le C\cdot 2^{n(1-\frac{1}{p_1})}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть* $1 \le p_j < \infty$, $1 < \theta_j \le \infty$, $\theta_j' = \frac{\theta_j}{\theta_j-1}$, $j = 1,...,m$ *и* $p_1 = ... = p_\nu < p_{\nu+1} \le ... \le p_m$. *Тогда для любого тригонометрического полинома вида*

$$t_n(\bar x) = \sum_{\bar k\in Q_n}c_{\bar k}e^{i<\bar k,\bar x>}$$

*имеет место неравенство*

$$\|t_n\|_\infty \le C\cdot\|t_n\|_{\bar p,\bar\theta}\cdot 2^{\frac{n}{p_1}}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** К интегралу

$$t_{Q_n}(\bar{x}) = (2\pi)^{-m} \int_{I^m} t_{Q_n}(\bar{y}) D_{Q_n}(\bar{x} - \bar{y}) d\bar{y}$$

применяя неравенства Гёльдера и пользуясь леммой 1, получим

$$|t_{Q_n}(\bar{x})| \le \|t_{Q_n}\|_{\bar{p},\bar{\theta}} \cdot \|D_{Q_n}\|_{\bar{p}',\bar{\theta}'} \le C \cdot \|t_{Q_n}\|_{\bar{p},\bar{\theta}} \cdot 2^{n(1-\frac{1}{p_1'})} \cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j'}} =$$

$$= C \cdot \|t_{Q_n}\|_{\bar{p},\bar{\theta}} \cdot 2^{\frac{n}{p_1}} \cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j'}}.$$

**З а м е ч а н и е 1.** *Оценки нормы ядра Дирихле $D_{Q_n}(\bar{x})$ в пространстве Лебега со смешанной нормой доказаны Э.Галеевым [23]. Его доказательство основано на аналоге теоремы Литтльвуда-Пэли, доказанном О.В.Бесовым [24].*

*В случае $p_1 = ... = p_m = \theta_1 = ... = \theta_m$ лемма 2 ранее доказана В.Н.Темляковым [8].*

**Т е о р е м а 3.** *Пусть $1 \le p_j < q_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$; $q_1 = ... = q_\nu < q_{\nu+1} \le ... \le q_m$; $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$; $r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})$, $j = \nu + 1, ..., m$. Тогда имеет место соотношение*

$$d_M^{\perp}(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty}) \asymp M^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} + 1)}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $M \asymp 2^n \cdot n^{\nu-1}$.

По определению ортопоперечника и теореме 1 имеем

$$d_M^{\perp}(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty}) \le \sup_{f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}} \|f - S_m(f)\|_{\bar{q},\infty} \le C \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu-1}. \tag{13}$$

Так как $M \asymp 2^n \cdot n^{\nu-1}$, то $\log_2 M \asymp \log_2(2^n \cdot n^{\nu-1})$. Поэтому

$$2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu-1} \asymp \left(\frac{1}{M}\right)^{r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}} \cdot (\log M)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} + 1)}.$$

Следовательно, из (13) получим

$$d_M^{\perp}(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty}) \le C \cdot M^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} + 1)}.$$

Докажем оценку снизу. Для этого оценим снизу величину $d_M^B(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty})$. Положим (см. [8], стр. 82)

$$\bar{\Phi}_{\bar{s}}(\bar{x}) = e^{i<\bar{k}^{\bar{s}},\bar{x}>} \cdot 2^m \cdot \prod_{j=1}^{m} \Phi_{2^{s_j - 2}}(x_j),$$

$$k_j^{\bar{s}} = \begin{cases} 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}, & s_j \ge 2, \\ 1, & s_j = 1 \end{cases}, \quad j = 1, ..., m,$$

где $\Phi_l(t)$ — ядро Фейера порядка $l - 1$, $\Phi_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}$.

Тогда $\|\bar{\Phi}_{\bar{s}}\|_1 = 1$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\bar{x}) = \sum_{\bar{s} \in \theta_n} \bar{\Phi}_{\bar{s}}(\bar{x}),$$

где $\theta_n = \{\bar{s} : \|\bar{s}\| = n\}$ и множество $Q_n = \bigcup\limits_{\bar{s} \in \theta_n} \rho(\bar{s})$.

Тогда для $\bar{k} \in Q_n$ будет $a_{\bar{k}}(\varphi) = 0$.

Пусть задан оператор $G \in \mathbb{L}_M(B)_{\bar{q},\infty}$. Рассмотрим оператор $A = (S_{n-1} - S_{n-2})$. Тогда $A \in \mathbb{L}(B)_{\bar{q},\infty}$. Натуральное число $n$ подберем так, чтобы выполнялись соотношения

$$C_m \cdot |Q_n| > 2 \cdot B \cdot (M \cdot |Q_n|)^{\frac{1}{2}}, \quad |Q_n| \asymp M.$$

В силу ограниченности оператора частичной суммы в пространстве $L_{\bar{q},\infty}$ для $f \in T(Q_n)$ имеем

$$\|f - Af\|_{\bar{q},\infty} = \|(S_{n-1} - S_{n-2})(f - Gf)\|_{\bar{q},\infty} \leq \|f - Gf\|_{\bar{q},\infty}. \tag{14}$$

Известно, что $\exists y^*$ (см. [8], стр. 83) такое, что

$$\|\varphi(\bar{x} - \bar{y^*}) - A(\varphi(\bar{x} - \bar{y^*}))\|_\infty \geq |Q_n| \asymp 2^n \cdot n^{m-1}.$$

Следовательно, пользуясь леммой 2, получим

$$\|\varphi(\bar{x} - \bar{y^*}) - A(\varphi(\bar{x} - \bar{y^*}))\|_{\bar{q},\infty} \geq C \cdot 2^{n(1-\frac{1}{q_1})} \cdot n^{m-\nu}. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g(\bar{x}) = C \cdot 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{2\nu-m-1} \cdot \varphi(\bar{x} - \bar{y^*}).$$

В силу (14) и (15) будем иметь

$$\sup_{f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}} \|f - Gf\|_{\bar{q},\infty} \geq \|g - Gg\|_{\bar{q},\infty} \geq \|g - Ag\|_{\bar{q},\infty} =$$

$$= 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{2\nu-m-1} \|\varphi(\bar{x} - \bar{y^*}) - A(\varphi(\bar{x} - \bar{y^*}))\|_{\bar{q},\infty} \geq C \cdot 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu-1}.$$

Так как $d_M^B(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty}) \leq d_M^\perp(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty})$, то из предыдущего неравенства получим

$$C \cdot 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu-1} \leq d_M^\perp(H_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_{\bar{q},\infty}).$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Пусть координаты векторов $\bar{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$ удовлетворяют условиям теорем 1 и 3 . Тогда имеет место соотношение*

$$E_n^{\bar{\gamma}}(H_{\bar{p}}^{\bar{r}})_{\bar{q},\infty} \equiv \sup_{f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}} E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{q},\infty} \asymp 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \cdot n^{\nu-1}.$$

**Доказательство.** Оценка сверху величины $E_n^{\bar{\gamma}}(H_{\bar{p}}^{\bar{r}})_{\bar{q},\infty}$ доказана в теореме 1. Нижняя оценка следует из теоремы 3 при $M \asymp 2^n \cdot n^{\nu-1}$.

## Цитированная литература


1. **Blozinski A.P.** // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V.263. P.146–167.

2. **Нурсултанов Е.Д.** // Известия РАН, серия математика. 2000. Т.64, №1. С.95–121.

3. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

4. **Бесов О.В.** // Труды МИАН СССР. 1961. Т.60. С.42–81.

5. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата, 1976.

6. **Бугров Я.С.** // Математический сборник. 1964. Т.64. С.410–418.

7. **Никольская Н.С.** // Сиб. матем. журнал 1974. С. 395–412.

8. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. С.112.

9. **Pustovoytov N.N.** // Anal. Math. 1994. V. 20. P.35–48.

10. **Галеев Э.М.** // Матем. заметки. 1996. Т.59, № 2. С.189–199.

11. **Динь Зунг.** // Матем. сб. 1986. Т.131, № 2. С.251–271.

12. **Бабенко К.И.** // ДАН СССР. 1960. Т.132, № 5. С. 982–985.

13. **Теляковский С.А.** // Матем. сб. 1964. Т.63. С.426–444.

14. **Романюк А.С.** //Укр. матем. журнал. 1991. Т.43. С.1398–1408.

15. **Белинский Э.С.** //Исслед.по теории функц. многих веществ.перемен. Ярославль, 1984. С.10–24.

16. **Кашин Б.С.,Темляков В.Н.** //Метрическая теория функ.и смежные вопросы анализа. М., 1999. С.69–99.

17. **Сихов М.** //Матем. журнал. 2002. Т.2. С.95–100.

18. **Акишев Г.** // Труды центра им. Н.И.Лобачевского. Казань, 2001. Т.8. С.10–11.

19. **Акишев Г.А. Усербеков М.И.** // Вестник КарГУ. 2002. № 3. С.4–13.

20. **Акишев Г.** //Труды межд. научно-практ. конф., посв. 80-летию чл.-корр. АН Каз.ССР, проф. Т.И. Аманова. Семипалатинск, 2003. С.21–24.

21. **Темляков В.Н.** //ДАН СССР. 1982. Т.267. С.314–317.

22. **Пустовойтов Н.Н.** // Изв.РАН, серия матем. 2000. Т.64. С.124–144.

23. **Галеев Э.М.** // Матем. сборник. 1982. Т.117. С.32–43.

24. **Бесов О.В.** //Труды МИАН СССР. 1984. Т.170. С.31–36.

*Поступила в редакцию 08.07.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 20 — 25*

*УДК 681.5*

# К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Е. Т.Аяганов

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 ayaganov@mail.ru

Рассматривается задача исследования устойчивости и оценки области устойчивости линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе прямого метода Ляпунова, подхода Разумихина и метода конечных приращений Лагранжа.

**Введение.** К настоящему времени обобщения на квазиполиномы известных теорем о расположении корней полинома известны для всех существующих аналитических и частотных критериев: критерий Рауса-Гурвица, частотные критерии Попова, Михайлова, Найквиста, метод Д-разбиений пространства параметров системы и т.д.

Известно, что критерии устойчивости для систем с запаздыванием, аналогичные критерию Рауса-Гурвица [1], основаны на результатах работ Л.С. Понтрягина [2], Н.Г. Чеботарева, Н.Н. Неймана [3] и В.Н. Капырина [4]. Среди частотных методов можно выделить два основных: 1) метод амплитудно-фазовых характеристик (АФХ), 2) метод Д-разбиения. Для систем с запаздыванием частотные методы были развиты в работах [5, 6, 7]. Наибольшее развитие метод АФХ применительно к системам с запаздыванием получил в работах Сетча [6] и Цыпкина [7]. Еще одним методом определения условий, при которых все корни характеристического квазиполинома лежат в левой полуплоскости, является метод Д-разбиений [8].

Наиболее общими методами анализа рассматриваемых систем являются метод В.М. Попова [9], метод описывающей функции [10], первый метод Ляпунова, прямой метод Ляпунова, развитый Н.Н. Красовским [11, 12], Б.С. Разумихиным [13], и другие.

Настоящая работа посвящена вопросу исследования устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе прямого метода Ляпунова, подхода Разумихина [14] и метода конечных приращений Лагранжа. Необходимо отметить, что полученный в работе результат позволяет установить зависимость между величиной запаздывания и наличием свойства устойчивости в исследуемой системе с запаздыванием, а также размером области устойчивости. Это обстоятельство можно отнести к достоинству настоящей работы.

---

Keywords: *object with delay, direct Lyapunov's method, differential equation with late argument, Razumikhin approach, scalar–optimization function*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

**П о с т а н о в к а  з а д а ч и.** Пусть математическая модель объекта с запаздыванием может быть представлена системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + A_h\,x(t-h),\ t \geq t_o, \\ x(t_o + \upsilon) = \varphi(\upsilon), \quad -h \leq \upsilon \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [t_o, \infty) \equiv J(t_0)$ — текущее время; $J(t_0)$ — временное множество; $x(t) \in R^n$ — вектор состояния объекта; $x(t-h) \in R^n$ — вектор состояния, запаздывающий на время h; $h = const > 0$ — величина запаздывания; $\varphi(\upsilon) \in C([-h,0], R^n)$ — непрерывная начальная векторная функция; $C([-h,0], R^n)$ — пространство непрерывных функций $\varphi(\upsilon)$ на отрезке [-h,0] с нормой $\parallel \varphi(\upsilon) \parallel_h = \max\limits_{-h \leq \upsilon \leq o} \parallel \varphi(\upsilon) \parallel$; $\parallel \varphi(\upsilon) \parallel$ — евклидова норма вектора $\varphi(\upsilon) \in R^n$; $\parallel \varphi(\upsilon) \parallel < \nu(t_o)$, $\nu(t_o) \in [t_o - h, t_o]$, $\nu(t_o)$ — некоторое число; $A$, $A_h \in R^{n \times n}$ — вещественные матрицы.

Дадим определение устойчивости тривиального решения системы (1), которое понадобится для дальнейших рассуждений.

**О п р е д е л е н и е**. *Будем говорить, что тривиальное решение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1) обладает свойством устойчивости, если для любого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \nu(t_0)$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из условия $\parallel \varphi(\upsilon) \parallel_h < \delta(\varepsilon, t_0)$ на начальном множестве следует $\parallel x(t, \varphi(\upsilon)) \parallel < \varepsilon$, $t \geq t_0$, где $\parallel \varphi(\upsilon) \parallel$ — непрерывная начальная функция, удовлетворяющая условию $\parallel \varphi(\upsilon) \parallel_h \leq \nu(t_0)$.*

В работе решается задача нахождения условия устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1) прямым методом Ляпунова с использованием подхода Разумихина и формулы конечных приращений Лагранжа.

**О с н о в н о й  р е з у л ь т а т.** Пусть существует вещественная, положительно-определенная функция $V$, для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} V = V(t,x), V : J \times R^n \to R^+, \\ V(t,0) = 0 \ \text{для всех}\ t \in J,\, V \in C(J \times R^n). \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $V \in C(J \times R^n)$ — некоторая функция, $W : R^n \to R^+$, $W \in C(R^+)$ — непрерывная, монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $W(0) = 0$. Если $W$ является строго монотонно возрастающей функцией, то она принадлежит классу $K$, выделяемому Ханом [15].

Предположим, что существуют функции $W_1, W_2 \in K$ такие, что для любых $(t,x)$ выполнены условия

$$\begin{gathered} a)\, V(t,x) \leq W_1(\|\, x\, \|), \\ b)\, V(t,x) \geq W_2(\|\, x\, \|),\ \text{причем}\ W_2 \to \infty\ \text{при}\ r \to \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде вещественной квадратичной формы

$$V(x) = x^T(t)\, H\, x(t), \tag{4}$$

где $H \in R^{n \times n}$ — вещественная, симметричная, положительно–определенная матрица, т.е. $H = H^T > 0$.

Аналогом производной функции Ляпунова (4), взятой в силу (1), является скалярно-оптимизационная функция $R(x)$ [14]

$$R(x) = sup\{\dot{V}(x_{th}) \mid x_{th} \in \mu_V(x,t)\}, \tag{5}$$

определяемая наибольшим значением функционала $\dot{V}(x_{th})$ на ограниченном множестве интегральных кривых

$$\mu_V(x,t) = \{x_{th} \mid V(x(\upsilon), \upsilon) \leq V(x,t),\, t - h \leq \upsilon \leq t,\, x(t) = x\}, \tag{6}$$

вдоль которых функция $V(x)$ не убывает.

При выбранной функции Ляпунова (4) тривиальное решение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1) является устойчивым, если выполняется условие

$$V(x) > 0,\ R(x) \leq 0\ \forall\ x(t, \varphi(\upsilon)) \neq 0. \tag{7}$$

Условие, обеспечивающее устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1), формулируется следующим образом.

**Т е о р е м а**. *При заданной функции Ляпунова (4), тривиальное решение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1) устойчиво, если выполнено следующее неравенство:*

$$A^T H + HA + 2HA_h - 2hH^2 - h(A_h A)^T A_h A + h(A_h^2)^T A_h^2 \leq 0. \tag{8}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вычислим полную производную от функции Ляпунова (4) в силу системы (1).

Тогда выражение для производной функции Ляпунова будет иметь вид

$$\dot{V}(x_{th}) = x^T(t)(A^T H + HA)x(t) + 2x^T(t)HA_h x(t-h). \tag{9}$$

Используем формулу Лагранжа

$$x(t-h) = x(t) - h\dot{x}(t - \sigma\, h),\ \sigma \in [0,\, 1] \tag{10}$$

для преобразования выражения (9).

После несложных преобразований выражение (9) с учетом (10) примет вид

$$\dot{V}(x_{th}) = x^T(t)(A^T H + HA)x(t) + 2x^T(t)HA_h(x(t) - h\dot{x}(t - \sigma\, h)) \tag{11}$$

или

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x_{th}) = x^T(t)(A^T H + HA + 2HA_h)x(t) - 2x^T(t)hHA_hA(x(t - \sigma\, h) - \\ &-2x^T hHA_h^2 x(t - (1+\sigma)h),\ \sigma \in\ [0,\, 1]. \end{aligned} \tag{12}$$

Введем следующие обозначения: $h_1 = \sigma\, h$, $h_2 = (1+\sigma)\, h$, тогда выражение (12) примет вид

$$\dot{V}(x_{th}) = x^T(t)(A^T H + HA + 2HA_h)x(t) - 2x^T(t)hHA_hAx(t-h_1) - 2x^T hHA_h^2 x(t-h_2). \tag{13}$$

Выражение для скалярно-оптимизационной функции будет иметь вид

$$\begin{aligned} &R(x) = sup\{x^T(t)(A^T H + HA + 2HA_h)x(t) - 2x^T(t)hHA_hAx(t-h_1) - \\ &-2x^T hHA_h^2 x(t-h_2) \mid x_{th} \in \mu_V(x,t)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Оценим слагаемые с $x(t-h_1)$, $x(t-h_2)$ в выражении (14) согласно [16]:

$$\begin{gathered} 2x^T(t)hHA_hAx(t-h_1) \leq hx(t)^T H^2 x(t) + hx(t-h_1)^T (A_hA)^T A_hAx(t-h_1) \leq \\ \leq hx^T(t)H^2x(t) + hx^T(t)A_h^T A_h x(t), \\ 2x^T(t)hHA_h^2 x(t-h_2) \leq hx(t)^T H^2 x(t) + hx(t-h_2)^T (A_h^2)^T A_h^2 x(t-h_2) \leq \\ \leq hx^T(t)H^2x(t) + hx^T(t)(A_h^T)^2 A_h^2 x(t). \end{gathered} \tag{15}$$

С учетом оценок (15) выражение для $R(x)$ примет вид

$$R(x) = x^T(t)(A^T H + HA + 2HA_h - 2hH^2 - h(A_hA)^T A_hA - h(A_h^2)^T A_h^2)x(t). \tag{16}$$

Отсюда в силу условия (7), получим неравенство (8), что и требовалось доказать.

**П р и м е р.** Рассмотрим задачу нахождения условия устойчивости и оценки области устойчивости тривиального решения системы интервальных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -b\,x_2(t) - a\,x_1(t-h), \\ x_i(t_o+\upsilon) = \varphi_i(\upsilon),\ -h \le \upsilon \le 0,\ i = \overline{1,2}, \end{cases}$$

где $h = const > 0$, $\varphi_i(\upsilon)$, $i = \overline{1,2}$ — начальные функции для компонент вектора состояний $x(t) \in R^2$.

Для нахождения условия устойчивости рассматриваемой системы зададимся функцией Ляпунова

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}(a\,x_1^2(t) + x_2^2(t)),$$

производная которой в силу исследуемой системы будет иметь вид

$$\dot{V}(x_1(t), x_2(t), x_1(t-h)) = a\,x_1(t)x_2(t) - a\,x_2(t)x_1(t-h) - b\,x_2^2(t).$$

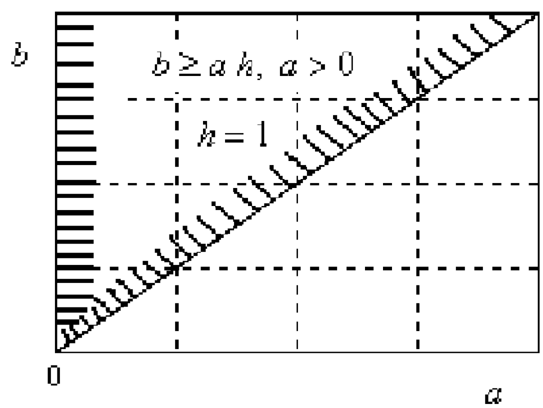


Рис. 1: Область устойчивости, определяемая условиями $b \ge a\,h$, $a > 0$, $h = 1$.

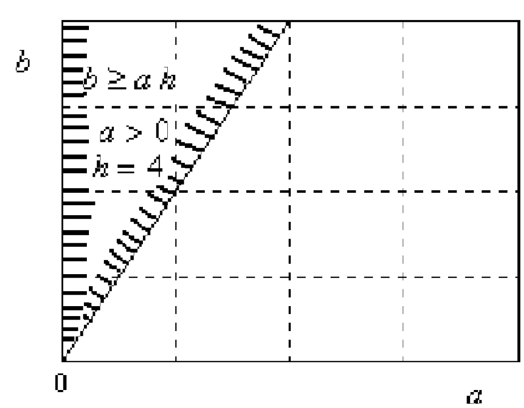


Рис. 2: Область устойчивости, определяемая условиями $b \ge a\,h$, $a > 0$, $h = 4$.

Используем формулу конечных приращений

$$x_1(t-h) = x_1(t) - hx_2(t-\tau),$$

где $\tau \in [0,\, h]$, получим следующее выражение для производной функции Ляпунова

$$\dot{V}(x_1(t), x_2(t), x_2(t-h)) = a\, x_2(t)x_2(t)hx_2(t-h) - b\, x_2^2(t).$$

Используя простейшую оценку $V(x(\upsilon), \upsilon) \leq V(x(t), t)$, получим следующее выражение для скалярно-оптимизационной функции:

$$R(x,t) = ha\, x_2^2(t) - b\, x_2^2(t) \leq 0.$$

Из последнего неравенства следуют условия устойчивости тривиального решения исследуемой системы с запаздыванием

$$ha\, x_2^2(t) \leq b\, x_2^2(t),\ a > 0,$$

или

$$b \geq a\, h,\ \ a > 0.$$

Приведенные выше наглядные рисунки с изображением областей устойчивости для различных величин запаздывания позволяют сделать вывод о том, что с увеличением запаздывания область устойчивости сужается.

**З а к л ю ч е н и е.** В работе получено условие устойчивости тривиального решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, которое в общем случае представляет собой аналитическое выражение в виде матричного неравенства. При рассмотрении конкретного случая при заданной матрице $H$ можно, используя условие теоремы, выяснить факт устойчивости тривиального решения исследуемой системы с запаздыванием. Здесь можно использовать известные алгебраические критерии, например, критерий Рауса-Гурвица.

Теоретическая важность и практическая ценность полученного результата заключается в возможности выяснения факта устойчивости и оценки области устойчивости с учетом величины запаздывания, что очень важно в разного рода исследованиях подобных объектов с запаздыванием.

## Цитированная литература


1. **Первозванский А. А.** Курс теории автоматического управления. М., 1986.

2. **Понтрягин Л. С.** // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91, № 6. С.I279–I280.

3. **Чеботарев Н. Г., Нейман Н. Н.** Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды Матем. института им. В. А. Стеклова. АН СССР. М., 1949. Т.XXVI. С. 56.

4. **Капырин В. Н.** К проблеме Гурвица для трансцендентных функций. Докт. диссертация. Казань. 1944. 257 с.

5. **Резван В.** Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М., 1983.

6. **Satche M.** //Journ. Appl. Mech. (ASME). 1949. P. 419–420.

7. **Цыпкин Я. З.** // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7, № 2. С.I07–I28.

8. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.

9. **Halanay A.** Differential equations, stability, oscillation, time lags, Chap. 4, Academic Press, New York. 1966.

10. **Corduneanu C.** //"Al. I. Cusa"din Lasi, Sec-tlunea I. a, Matematica, 1963. V. 2. P. 375.

11. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

12. **Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.** // Автоматика. Киев, 1990. № 4. С. 3–9.

13. **Ackerman J.** Sampled data control systems-analysis and synthesis. Robust system design. Berlin: Sprlnger-Verlag, 1985.

14. **Разумихин Б.С.** Устойчивость эредитарных систем. М., 1988.

15. **Кунцевич А.М., Лычак М.М.** Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. М., 1977.

16. **Цыкунов А.М.** Адаптивное управление объектами с последействием. М., 1984.

*Поступила в редакцию 25.03.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 26 — 32*

*УДК 517.925:62.50*

# МАТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ

С. С. Жуматов

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 marat207@math.kz

Построены системы сравнения для исследования устойчивости в окрестности программного многообразия. Получены достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости программного многообразия относительно заданной функции.

**В в е д е н и е.** Методы, основанные на отображениях пространства состояний исходной системы в пространстве состояний вспомогательных систем сравнения, сохраняющих исследуемые динамические свойства, широко применяются при решении разнообразных теоретических и прикладных проблем. Обычно в качестве систем сравнения используются дифференциальные уравнения в $R^n$, а основным достоинством метода сравнения считается возможность существенного понижения порядка исследуемых систем уравнений. Скалярное уравнение сравнения было применено Р.Конти [1] для исследования продолжимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. К.Кордуняну [2] использовал этот метод для установления устойчивости и асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений. В.М.Матросов [3–6], Р.Беллман [7] обобщили данный метод на случай векторного уравнения сравнения. Постников Н.С., Сабаев Е.Ф. в [8] анализ конечномерных динамических систем свели к исследованию систем сравнения, определенных в пространстве симметрических матриц. Майгарин Б.Ж. [9] применил матричное уравнение сравнения для исследования устойчивости динамических систем управления. В данной работе матричные уравнения сравнения используются для получения достаточных условий устойчивости программного многообразия систем автоматического управления.

**П о с т а н о в к а з а д а ч и.** Пусть дифференциальное уравнение [10]

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

описывает динамические процессы систем автоматического управления, где $x \in R^n$; $f(t,x)$ — вектор-функция состояния системы управления, обеспечивающая существование и единственность решения уравнения (1) на интервале $t \in I[t_0, \infty[$ и обладает $(n-s)$-мерным гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемым векторным уравнением

$$\omega(t, x) = 0, \tag{2}$$

Keywords: *comparison system, control system, programm manifold, stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29

где $\omega - s \leq n$-мерный вектор.

В пространстве $R^n$ выделим область $G(R)$

$$G(R) = \{(t, x) : t \geq 0 \wedge \|\omega(t, x) \leq r < \infty\|\}.$$

Относительно $x \in G(R)$ предполагается, что при всех $t \geq t_0$

1) вектор-функция непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$ в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области $G \subset R^n$, содержащей многообразие $\Omega(t)$;

2) $rank\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = s$ во всех точках многообразия $\Omega(t)$.

Заданная программа (2) точно выполняется лишь при условии, если начальные значения вектора состояния системы удовлетворяют условиям $\omega(t_0, x_0)$. Но эти условия не всегда могут быть точно выполнены. Поэтому при построении систем программного движения следует иметь в виду еще и требования устойчивости программного многообразия (2).

Построим систему дифференциальных уравнений (1), интегральное многообразие которой, заданное по формуле (2), обладало бы свойством устойчивости.

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1), имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} f(t, x) = F(t, \omega), \tag{3}$$

где $F(t, 0) \equiv 0$ — функция Еругина [11].

**П о с т р о е н и е   с и с т е м   с р а в н е н и я.** Введем пространство $\widetilde{R}^s$, элементами которого являются симметрические $(s \times s)$-матрицы :

$$\widetilde{R}^s = \{M = M^T = \|M_{ij}\|_0^T\}. \tag{4}$$

Полуупорядоченность элементов из $\widetilde{R}^s$ введем с помощью сферы $S_r^0$

$$S = S_r^+ = \{M : \omega^T M \omega < r^2 \ \forall \omega \in R^s\},$$

$$S_r^0 = \{M : \omega^T M \omega = r^2 \ \forall \omega \in R^s\},$$

$$S_r^- = \{M : \omega^T M \omega > r^2 \ \forall \omega \in R^s\}. \tag{5}$$

Введем матрицу

$$M(\omega) = D(\omega) M D(\omega). \tag{6}$$

Здесь

$$D(\omega) = diag\|\omega_1, \ldots, \omega_s\|. \tag{7}$$

Заметим, что если $M_{ij} = 1 \ \forall (i, j)_1^s$, то $M(\omega) = H(\omega) = \omega\omega^T$. Если для элементов пространства $S^s$ выполняются неравенства $M_1 \geq M_2 \wedge M_1 > M_2$, то соответственно будут означать, что

$$M_1 - M_2 \in S \wedge M_1 - M_2 \in int\, S.$$

Очевидно, если $M \in S \wedge M \in int\, S$, то

$$UMU^T \in S \wedge UMU^T \in int\, S \tag{8}$$

для произвольной невырожденной матрицы $U$. Если положим $U = M^{-1}$, где $M \in int\, S$, то в силу (8) $M^{-1} \in int\, S$. В пространстве $S^s$ введем норму

$$\|M\|_{U_0} = inf\{\alpha : -\alpha U_0 \leq M \leq \alpha U_0\}, \tag{9}$$

а в качестве нормы пространства $R^s$ будем использовать

$$\|\omega\| = (\omega^T U_0^{-1} \omega)^{1/2}. \tag{10}$$

Пусть в дальнейшем имеет место равенство

$$\|M(\omega)\|_{U_0} = \omega^T U_0^{-1} \omega = \|\omega\|^2. \tag{11}$$

В силу структуры матрицы $M(\omega)$ из (5) получим соотношения:

$$M(\omega) = det \left\| \begin{array}{cccc} M_{11}\omega_1^2 & M_{12}\omega_1\omega_2 & \cdots & M_{1s}\omega_1\omega_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{s1}\omega_s\omega_1 & M_{s2}\omega_s\omega_2 & \cdots & M_{ss}\omega_s^2 \end{array} \right\|, \tag{12}$$

$$detM(\omega) = \prod_{i=1}^{s} \omega_i^2 detM, \tag{13}$$

$$M(\omega) > 0 \Leftrightarrow M > 0 \ \forall \omega_i \neq 0, \tag{14}$$

где $\omega_i$ — вещественные переменные,

$$\frac{D(\omega)}{dt} = \dot{D}(\omega) = D[F(t,\omega)]. \tag{15}$$

В пространстве $R^s$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{K} = \Psi(t, K), \tag{16}$$

где $K$ — матрица порядка $s \times s, \Psi(t,K)$ — матрица, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения уравнения (16). Уравнение (16) называется системой сравнения (3), если в числе своих решений уравнение (16) содержит решение $K(t)$, связанное с решениями уравнения (3) соотношениями

$$M[\omega(t_0)] = K(t_0) \wedge M[\omega(t)] \leq K(t) \quad \text{при} \quad t > t_0. \tag{17}$$

Из неравенства (17) и соотношения (11) следует, что $\|\omega(t)\|^2 \leq \|K(t)\|_{U_0}$. Следовательно, устойчивость, асимптотическая устойчивость, диссипативность системы (3) следуют из аналогичных свойств системы сравнения (16).

Заметим, что уравнение (16) принадлежит классу $\Xi(\Psi \in \Xi)$, если для уравнения (16) справедлива теорема о дифференциальных неравенствах типа Чаплыгина [9], т.е., если $\dot{P} \leq \Psi(t,P)$, где $P$ — $(s \times s)$-матрица , то из $P(t_0) \leq K(t_0)$ следует $P(t) \leq K(t)$ при $t > t_9$, где $K(t)$ — любое решение (16).

Дифференцируя функцию $M(\omega)$ в силу уравнения (3) с учетом равенства (15), получим

$$\dot{M}(\omega) = D[F(t,\omega)]MD(\omega) + D(K)MDF(t,\omega). \tag{18}$$

Потребуем теперь, чтобы для некоторой функции $\Psi(t,K) \in \Xi$ на решениях уравнения (3) имели место неравенства

$$D[F(t,\omega)]MD(\omega) + D(K)MDF(t,\omega) \leq \Psi[t, M(\omega)]. \tag{19}$$

Тогда из (19) следует (17).

Уравнения класса $\Xi$ образуют наиболее простой по устройству фазового пространства класс дифференциальных уравнений.

**Л е м м а 1.** *Пусть $\Psi \in \Xi$. $\Psi(t,0)=0$ и существует непрерывная параметру $\alpha$ функция $M_0(\alpha)$, $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ такая, что $\alpha M_0(\alpha) > 0$ и*

$$\alpha\Psi[t, M_0(\alpha)] \leq -\varepsilon M_0(\alpha) \tag{20}$$

*при $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, $t \in I_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ устойчиво асимптотически относительно вектор-функии $\omega$, множества*

$$V_\alpha = \{K : M_0(-\alpha) \leq K \leq M_0(\alpha),\ \alpha \in ]0, \alpha_0]\} \tag{21}$$

*инвариантны относительно решения системы (16) и принадлежат области притяжения программного многообразия.*

Под инвариантностью множества $V_\alpha$ понимается, что $K(t) \in V_\alpha$ при $t > t_0$, если $K(t_0) \in V_\alpha$. Лемма 1 сводит исследование устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функии $\omega$ к решению матричных неравенств вида (20). При этом множества $V_\alpha$ индуцируют в фазовом пространстве исходной системы (3) множества

$$\widetilde{V}_\alpha = \{\omega : M(\omega) \leq K \leq M_0(\alpha),\ \alpha \in ]0, \alpha_0]\}, \tag{22}$$

инвариантные относительно решений уравнения (3) и принадлежащие области притяжения программного многообразия.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\dot{K} = KA^T(t) + A(t)K, \tag{23}$$

где $A(t)$ — непрерывная $(s \times s)$-матрица, определенная на интервале $t \in I_0$.

**Л е м м а 2.** *Пусть существует матрица $M \in int\, S$ такая, что $\forall t \in I_0$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$M_0 A^T(t) + A(t) M_0 \leq -\varepsilon M_0. \tag{24}$$

*Тогда нулевое решение уравнения*

$$\dot{\omega} = A(t)\omega \tag{25}$$

*устойчиво асимптотически. При этом для всех решений $K(t)$ уравнения (25) и $\alpha > 0$ имеют место неравенства*

$$-\alpha M_0 \leq K(t) \leq \alpha M_0 \tag{26}$$

*при $t > t_0$ , если они выполнены при $t = t_0$.*

**У с т о й ч и в о с т ь п р о г р а м м н о г о м н о г о о б р а з и я а в т о н о м н ы х с и с т е м.** Вместе с уравнением (1) рассмотрим систему управления вида

$$\dot{x} = f(t,x) - b\, f\,(\sigma)\,, \quad \sigma = c^T\omega. \tag{27}$$

Здесь $b$ и $c$ — постоянные векторы управления наблюдения, $\xi$ и $\sigma$ — скалярные величины, $\varphi(\sigma)$ — нелинейная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0 \wedge k_1\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) < k_2\sigma^2, \tag{28}$$

где $k_1$ и $k_2$ — некоторые постоянные.

Дифференцируя уравнения (2) по времени $t$, в силу системы уравнений (27), полагая $F(t,\omega) = -A\omega$, где $A$ — постоянная $(s \times s)$-матрица, получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - b\,\varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = c^T\omega. \tag{29}$$

Для системы (29) строим матрицу-функцию

$$M\left[\omega\left(t\right)\right]=H\left(\omega\right)+\alpha\,E_{n}\int\limits_{0}^{t}S\left(\tau\right)d\tau+\beta\int\limits_{0}^{\sigma}f\left(\sigma\right)d\sigma, \tag{30}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — неотрицательные постоянные, $H\left(\omega\right)$ — переменная матрица вида

$$H\left(\omega\right)=\omega\omega^{T}. \tag{31}$$

Дифференцируя функцию (30) в силу системы (29), находим

$$\begin{gathered}-\dot{M}\left[\omega\left(t\right)\right]=H\left(\omega\right)A^{T}+AH\left(\omega\right)+\left(H\left(\omega\right)\,cb^{T}+bc^{T}\,H\left(\omega\right)\right)\psi+\\+\alpha\,E_{n}\varphi^{2}\left(1-k_{1}\,\psi^{-1}\right)\left(\psi^{-1}-k_{2}^{-1}\right)+\beta\,E_{n}c^{T}Ax\,\varphi+\beta\,E_{n}c^{T}b\,\varphi^{2}\,,\end{gathered} \tag{32}$$

$\psi=\psi\left(\sigma,t\right)=\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)/\sigma\left(t\right),\quad \sigma\left(t\right)=c^{T}\omega\left(t\right),\quad \varphi=\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)$.

В качестве систем сравнения для уравнения (29) рассматриваются матричные дифференциальные уравнения (32), в которых $\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)$ — непрерывная функция $\omega$, вычисленная на исходном решении $\omega\left(t\right)$ уравнения (29).

Пусть существуют неотрицательные числа $\alpha$, $\beta$ и матрица $H_{0}\in\ int\,S$ такие, что

$$\begin{gathered}F_{0}=\left(H_{0}A^{T}+AH_{0}\right)+\left(H_{0}\,cb^{T}+bc^{T}H_{0}\right)\varphi\left(\sigma\right)+\alpha\,E_{n}\varphi_{0}^{2}\left(1-k_{1}\,\psi_{0}^{-1}\right)\times\\\times\left(\psi_{0}^{-1}-k_{2}^{-1}\right)+\beta\,E_{n}c^{T}A\omega_{0}\varphi_{0}+\beta\,E_{n}c^{T}b\,\varphi_{0}^{2}>0\end{gathered} \tag{33}$$

при всех $\varphi\left(\sigma\right)\in C_{]k_{1},\,k_{2}]}$.

Условие (33) будет выполнено, если $H_{0}$ определить из матричного неравенства

$$H_{0}A^{T}+AH_{0}>\frac{k_{2}}{2}gg^{T},\qquad H_{0}c+b=-g \tag{34}$$

и

$$\alpha\,E_{n}\varphi_{0}^{2}\left(1-k_{1}\psi_{0}^{-1}\right)\left(\psi_{0}^{-1}-k_{2}^{-1}\right)+\beta E_{n}c^{T}A\omega\,\varphi+\beta E_{n}c^{T}b\varphi_{0}^{2}\geq0.$$

С учетом (34) для всех $c\in R^{n}$, $c\neq0$ имеем

$$\begin{gathered}c^{T}F_{0}c>\tfrac{k_{2}}{2}\left[c^{T}g+\tfrac{2}{k_{2}}\left(c^{T}b\right)\,\psi\left(\sigma\right)\right]^{2}+2\left(c^{T}b\right)^{2}\psi^{2}\left(\psi^{-1}-k_{2}^{-1}\right)+\\+c^{T}\left[\alpha Ef^{2}\left(1-k_{1}\psi^{-1}\right)\left(\psi^{-1}-k_{2}^{-1}\right)+\beta Ec^{T}Ax\,\varphi+\beta Ec^{T}b\varphi^{2}\right]c\geq0\,.\end{gathered} \tag{35}$$

Соотношение (33) выполняется, если имеет место (35).

В силу того, что $\psi^{-1}=\sigma/\varphi\left(\sigma\right)=-W\left(i\varpi\right)=-c^{T}\left(A+i\varpi\,E\right)^{-1}b$, для выполнения условия (35) достаточно, чтобы

$$\Pi\left(\varpi\right)=k_{2}^{-1}+Rec^{T}\left(A+i\varpi\,E\right)^{-1}b>0\quad\forall\,\varpi\geq0, \tag{36}$$

$$\Pi_{1}\left(\varpi\right)=\alpha\,k_{2}^{-1}+\beta\,c^{T}b+\left(1+k_{1}k_{2}^{-1}\right)ReW\left(i\varpi\right)+k_{1}\,\alpha\left|W\left(i\omega\right)\right|^{2}>0. \tag{37}$$

**Т е о р е м а 1.** *Пусть матрица $A$ — гурвицева и выполняется неравенство (36). Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия в угле $]k_{1},\,k_{2}]$ достаточно выполнения неравенства (37) при некоторых постоянных $\alpha$ и $\beta$.*

**У с т о й ч и в о с т ь п р о г р а м м н о г о м н о г о б р а з и я н е а в т о н о м н ы х с и с т е м.** Теперь рассмотрим неавтономную систему управления вида

$$\dot{x}=f(t,x)-b(t)\xi,\quad \xi=\varphi(\sigma,t),\quad \sigma=c(t)^{T}\omega. \tag{38}$$

Здесь $b(t)$ и $c(t)$ — переменные векторы управления и наблюдения, $\xi$ и $\sigma$ — скалярные величины, $\varphi(\sigma,t)$ — нелинейная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0,t) \equiv 0 \quad \forall t \in I = [0,\infty[, \tag{39}$$

$$0 < \sigma\varphi(\sigma,t) < k\sigma^2 \ \forall\sigma \neq 0 \quad (k = k_2 - k_2), \tag{40}$$

где $k_1$ и $k_2$ — некоторые постоянные.

Дифференцируя уравнения (2) по времени $t$ в силу системы уравнений (38) и полагая $F(t,\omega) = -A(t)\omega$, где $A(t)$ — непрерывная ограниченная и дифференцируемая $(s \times s)$-матрица, получим

$$\dot{\omega} = -A(t)\omega - b(t)\,\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma,t), \quad \sigma = c(t)^T\omega. \tag{41}$$

Для системы (41) строим матрицу-функцию

$$V\,(\omega,t) = M\,(\omega) + \alpha\,E_n \int\limits_0^t S\,(\tau)d\tau \quad (\alpha \geq 0)\,, \tag{42}$$

где матрица $M\,(\omega)$ имеет вид (6), а $S\,(t) = \alpha(\sigma - k^{-1}\xi)\xi$. Тогда в силу(16), (41) и (42) получим

$$-\dot{V}\,(\omega,t) = W\,(\omega,\varphi)\ ,$$

где

$$W = -D\,(A\omega)\,MD\,(\omega) - D\,(b\varphi)\,MD\,(\omega) - \alpha\,E_n c^T\omega - D\,(x)\,MD\,(A\omega) +$$
$$+\frac{\alpha}{k}\,E_n\varphi^2 - D\,(\omega)\,MD\,(b\varphi)\,, \quad \varphi = \varphi\,(\sigma,t)\ .$$

**Т е о р е м а 2.** *Пусть $W \in \Xi$, $W\,(0,t) = 0$ в силу свойства $S \geq 0$ и существует непрерывная функция $\tilde{M}_0\,(\alpha)$ от параметра $\alpha \in [-\alpha_0,\ \alpha_0]$ такая, что $\alpha\,\tilde{M}_0\,(\alpha) > 0$ и*

$$\alpha\,W\left[\tilde{M}_0\,(\alpha)\,,t\right] \leq -\varepsilon\,\tilde{M}_0\,(\alpha) \tag{42}$$

*при $t \in I_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда программное многообразие асимптотически устойчиво относительно вектор-функции $\omega$ в угле $]0,\ k]$ при условиях (39), (40), множество (21) принадлежит области притяжения программного многообразия (2).*

Таким образом, условие устойчивости (42) сводится к нахождению условия Сильвестра относительно квадратичной формы векторов $\omega$ и $\varphi$.

## Цитированная литература


1. **Conti R.** //Boll. Un. Mat. Ital. 1956. № 11(3). P.510–514.
2. **Corduneanu C.** //An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza", Iasi. Sect I a Mat. № 6. P. 47–58.
3. **Матросов В.М.** //Автоматика и телемеханика. 1972. № 9. С.63–75.
4. **Матросов В.М.** //Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С.5–22.
5. **Матросов В.М.** //Дифференц. уравнения. 1974. Т.10, № 9. С.1547–1559.
6. **Матросов В.М.** //Дифференц. уравнения. 1975. Т.11, № 3. С.403–417.
7. **Bellman R.** //SIAM J. Control. Ser. A. I. 1962. P.32–34.
8. **Постников Н.С., Сабаев Е.Ф.** //Автоматика и телемеханика. 1980. № 4. С.24–34.
9. **Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.** Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы, 1999.

10. **Майгарин Б. Ж., Жуматов С. С.** // Изв. АН КазССР. Сер.физ.-мат. 1984. № 3. С. 40–42.
11. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др.** Построение систем программного движения. М., 1971.

*Поступила в редакцию 30.09.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 33 – 43*

*УДК 517.929.7*

# ПРИЗНАК ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н. Б. Искакова

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Рассматривается периодическая краевая задача для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В терминах исходных данных установлены необходимые и достаточные условия существования единственного решения исследуемой задачи и предложен алгоритм его нахождения.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием вида
$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t), \ x \in R^n, \tag{1}$$
где $(n \times n)$-матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $\tau \in (0;T)$ — постоянное запаздывание.

Пусть
$$\|x\| = \max_i \|x_i\|, \ \|A(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}(t)\| \le \alpha, \ \|B(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} \|b_{ij}(t)\| \le \beta,$$
$\alpha, \beta - const.$

Пусть на начальном множестве $[-\tau;0]$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))'$ такая, что $\varphi_i(0) = 1$, $i = 1, 2, ..., n$, где знак $'$ транспонированный вектор-строку.

Ставится задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего условию
$$x(z) = diag[x(0)]\varphi(z), \ z \in [-\tau; 0], \tag{2}$$

Keywords: *system of differential equations with delay argument, periodical boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K10, 34K13

где $diag[x(0)]$ — диагональная матрица с компонентами вектора $x(0)$ на главной диагонали, и периодическому краевому условию

$$x(0) = x(T). \tag{3}$$

Через $C([0;T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $x : [0;T] \to R^n$ с нормой

$$\|x(t)\|_1 = \max_{t\in[0;T]} \|x(t)\|.$$

Под решением краевой задачи (1)–(3) понимается непрерывная на $[-\tau;T]$, непрерывно дифференцируемая на $[-\tau;0)\bigcup(0;T]$ функция $x(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) и условиям (2), (3).

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом различными методами исследованы многими авторами [1–3]. Обзор и библиографию работ по теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом можно найти в [4–6]. В соответствии с применяемыми методами условия существования и единственности решения исследуемых задач получены в различных терминах. В настоящей работе вопросы об однозначной разрешимости и нахождения решения краевой задачи (1)–(3) исследуются методом параметризации [7].

Возьмем шаг $h = \tau > 0$ и произведем разбиение на отрезке $[0;T]$ следующим образом:

$$[0;T] = \left\{\bigcup_{r=1}^{N-1}[(r-1)\tau; r\tau)\right\}\bigcup\big[(N-1)\tau; T\big],$$

где расстояние от точки $t = (N-1)\tau$ до точки $t = T$ может быть меньше или равно $\tau$.

Сужение функции $x(t)$ на $r$-ый интервал $[(r-1)\tau; r\tau)$ обозначим через $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$. Введем обозначение: $\lambda_r = x_r((r-1)\tau)$ и на каждом интервале произведем замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [(r-1)\tau; r\tau)$, $r = \overline{1,N}$. Тогда получим краевую задачу с параметром

$$\begin{gathered}\frac{du_1}{dt} = A(t)(u_1 + \lambda_1) + B(t)diag[\varphi(t-\tau)]\lambda_1 + f(t),\ t \in [0;\tau),\\ u_1(0) = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + B(t)(u_{r-1}(t-\tau) + \lambda_{r-1}) + f(t),\ t \in [(r-1)\tau; r\tau),\ r = \overline{2,N},\\ u_r((r-1)\tau) = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\lambda_1 = \lambda_N + u_N(T), \tag{6}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to s\tau-0} u_s(t) = \lambda_{s+1},\ s = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

где $diag[\varphi(t)] \cdot \lambda_1 = x_0(t)$.

Если функция $x(t)$ является решением (1)–(3), то система пар $\big(\lambda, u(t)\big)$ с элементами

$$\lambda = \big(x(0), x(\tau), ..., x([N-1]\tau)\big)',$$

$$u(t) = \big(x(t) - x(0), x(t) - x(\tau), ..., x(t) - x([N-1]\tau)\big)'$$

будет решением задачи (4)–(7). И, наоборот, если $\big(\lambda_r, u_r(t)\big)$, $r = \overline{1,N}$, — решение задачи (4)–(7), то $x(t) = diag[\varphi(t)]\lambda_1$, $t \in [-\tau;0]$, $x(t) = \lambda_r + u_r(t)$, $t \in [(r-1)\tau; r\tau)$, $r = \overline{1,N}$, $x(T) = \lambda_N + u_N(T)$, есть решение (1)–(3). Однако задача (4)–(7) выгодно отличается тем, что здесь появились начальные условия $u_r((r-1)\tau)=0,\ r=\overline{1,N}$, которые позволяют определить $u_1(t)$ при фиксированном $\lambda_1$ из интегрального уравнения

$$u_1(t)=\int\limits_0^t A(s)[u_1(s)+\lambda_1]ds+\int\limits_0^t B(s)\Phi(s-\tau)\lambda_1 ds+\int\limits_0^t f(s)ds, \tag{8}$$

где матрица $\Phi(t-\tau)=diag[\varphi(t-\tau)]$, и последующие функции $u_r(t)$, $r=\overline{2,N}$, при фиксированных $\lambda_r$ из интегрального уравнения

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)\tau}^t A(s)[u_r(s)+\lambda_r]ds+\int\limits_{(r-1)\tau}^t B(s)[u_{r-1}(s-\tau)+\lambda_{r-1}]ds+\int\limits_{(r-1)\tau}^t f(s)ds, \tag{9}$$

где пара $(\lambda_1,u_1(t))$ удовлетворяет (8), а $(\lambda_{r-1},u_{r-1}(t)),\ r=3,4,...,N$ удовлетворяют уравнению

$$u_{r-1}(t)=\int\limits_{(r-2)\tau}^t A(s)[u_{r-1}(s)+\lambda_{r-1}]ds+\int\limits_{(r-2)\tau}^t B(s)[u_{r-2}(s-\tau)+\lambda_{r-2}]ds+\int\limits_{(r-2)\tau}^t f(s)ds,$$

$t\in[(r-2)\tau;(r-1)\tau)$.

Вместо $u_1(t)$ подставим соответствующую правую часть (8) и, повторив процесс $\nu$ ($\nu= =1,2,...$) раз, получим

$$u_1(t)=D_{\nu 1}(t)\cdot\lambda_1+E_{\nu 1}(t)\cdot\lambda_1+F_{\nu 1}(t)+G_{\nu 1}(u_1,t),\ t\in[0;\tau). \tag{10}$$

Аналогично, подставив $\nu$ ($\nu=1,2,...$) раз вместо функций $u_r(t),\ r=\overline{2,N}$, их соответствующие правые части из (9), получим

$$u_r(t)=D_{\nu r}(t)\cdot\lambda_r+H_{\nu r}(t)\cdot\lambda_{r-1}+F_{\nu r}(t)+G_{\nu r}(u_r,t)+P_{\nu r}(u_{r-1}(t-\tau),t),\ t\in[(r-1)\tau;r\tau), \tag{11}$$

где

$$D_{\nu r}(t)=\sum_{j=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)\tau}^t A(s_1)\dots\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_j} A(s_{j+1})ds_{j+1}\dots ds_1,$$

$$H_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)\tau}^t B(s_1)ds_1+\sum_{j=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)\tau}^t A(s_1)\dots\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_{j-1}} A(s_j)\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_j} B(s_{j+1})ds_{j+1}ds_j\dots ds_1,$$

$$F_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)\tau}^t f(s_1)ds_1+\sum_{j=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)\tau}^t A(s_1)\dots\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_{j-1}} A(s_j)\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_j} f(s_{j+1})ds_{j+1}ds_j\dots ds_1,$$

$$G_{\nu r}(u_r,t)=\int\limits_{(r-1)\tau}^t A(s_1)\dots\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_{\nu-2}} A(s_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_{\nu-1}} A(s_\nu)u_r(s_\nu)ds_\nu ds_{\nu-1}\dots ds_1,$$

$$P_{\nu r}(u_{r-1},t)=\int\limits_{(r-1)\tau}^t B(s_1)u_{r-1}(s_1-\tau)ds_1+$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)\tau}^t A(s_1)\dots\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_{j-1}} A(s_j)\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_j} B(s_{j+1})u_{r-1}(s_{j+1}-\tau)ds_{j+1}ds_j\dots ds_1,$$

$$E_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)\tau}^{t}B(s_1)\Phi(s_1-r\tau)ds_1+$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)\tau}^{t}A(s_1)\ldots\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_{j-1}}A(s_j)\int\limits_{(r-1)\tau}^{s_j}B(s_{j+1})\Phi(s_{j+1}-r\tau)ds_{j+1}ds_j\ldots ds_1,\ s_0=s,\ r=\overline{1,N}.$$

На интервале $[(r-1)\tau;r\tau)$ для функции $u_r(t)$ установим равенство путем подстановки в формулу (11) ранее найденных представлений функций $u_s(t)$ на интервалах $[(s-1)\tau;s\tau)$, $s= =r-1,r-2,...,2,1$,

$$u_r(t)=D_{\nu r}(t)\cdot\lambda_r+\big[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t]\big]\cdot\lambda_{r-1}+P_{\nu r}\big[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_{r-2}+$$
$$+P^2_{\nu r}\big[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_{r-3}+\ldots+P^{r-3}_{\nu r}\big[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_2+ \qquad (12)$$
$$+P^{r-2}_{\nu r}\big[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t)+E_{\nu r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_1+\sum_{j=1}^{r}P^{j-1}_{\nu r}\big[F_{\nu r}(t)+G_{\nu r}(u_j,t),t\big],$$

где

$$P^2_{\nu r}[y,t]=P_{\nu r}[P_{\nu r}[y,t],t],\quad P^3_{\nu r}[y,t]=P_{\nu r}[P^2_{\nu r}[y,t],t],\ \ldots,\quad P^N_{\nu r}[y,t]=P_{\nu r}[P^{N-1}_{\nu r}[y,t],t].$$

Переходя в правых частях $(10),(12)$ к пределу при $t\to r\tau-0$, находим

$$\lim_{t\to\tau-0}u_1(t)=D_{\nu1}(\tau)\cdot\lambda_1+E_{\nu1}(\tau)\cdot\lambda_1+F_{\nu1}(\tau)+G_{\nu1}(u_1,\tau),$$
$$\lim_{t\to r\tau-0}u_r(t)=D_{\nu r}(r\tau)\cdot\lambda_r+\big[H_{\nu r}(r\tau)+P_{\nu r}(D_{\nu r}(r\tau),r\tau)\big]\lambda_{r-1}+$$
$$+P_{\nu r}\big[H_{\nu r}(r\tau)P_{\nu r}[D_{\nu r}(r\tau),r\tau],r\tau\big]\lambda_{r-2}+P^2_{\nu r}\big[H_{\nu r}(r\tau)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(r\tau),r\tau],r\tau\big]\lambda_{r-3}+\ldots+$$
$$+P^{r-3}_{\nu r}\big[H_{\nu r}(r\tau)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(r\tau),r\tau],r\tau\big]\lambda_2+P^{r-2}_{\nu r}\big[H_{\nu r}(r\tau)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(r\tau)+E_{\nu r}(r\tau),r\tau],r\tau\big]\lambda_1+$$
$$+\sum_{j=1}^{r}P^{j-1}_{\nu r}\big[F_{\nu r}(r\tau)+G_{\nu r}(u_j,r\tau),r\tau\big],\ r=2,...,N.$$

Подставляя их значения в (6),(7) и умножая обе части (6) на $\tau>0$, получаем систему $nN$ уравнений относительно параметров $\lambda_{ri}$, $r=\overline{1,N}$, $i=\overline{1,n}$,

$$Q_\nu(\tau)\lambda=-\widetilde{F}_\nu(\tau)-\widetilde{G}_\nu(u,\tau) \qquad (14)$$

с $(Nn\times Nn)$-матрицей $Q_\nu(\tau)$. Матрицу $Q_\nu(\tau)$ представим в виде $\begin{pmatrix}Q_{11}(\tau) & Q_{12}(\tau)\\ Q_{21}(\tau) & Q_{22}(\tau)\end{pmatrix}$, где

$Q_{11}(\tau)=\big(\tau I-\tau P^{N-2}_{\nu N}\big[H_{\nu N}(T)+P_{\nu N}[D_{\nu N}(T)+E_{\nu N}(T),T],T\big]\big)$ — матрица размерности $(n\times n)$,

$Q_{12}(\tau)=\big(p_j\big)$ — матрица размерности $(n\times(N-1)n)$ с элементами

$$p_j=\begin{cases}-\tau P^{N-(j+2)}_{\nu N}\big[H_{\nu N}(T)+P_{\nu N}[D_{\nu N}(T),T],T\big], & \text{при}\quad j=\overline{1,N-2},\\ -\tau(I+D_{\nu N}(T)), & \text{при}\quad j=N-1,\end{cases}$$

$Q_{21}(\tau)=\big(p_i\big)'$ матрица размерности $((N-1)n\times n)$ с элементами

$$p_i=\begin{cases}I+D_{\nu1}(\tau)+E_{\nu1}(\tau), & \text{при}\quad i=1,\\ P^{i-2}_{\nu i}\big[H_{\nu i}(i\tau)+P_{\nu i}[D_{\nu i}(i\tau)+E_{\nu i}(i\tau),i\tau],i\tau\big], & \text{при}\quad i=\overline{2,N-1},\end{cases}$$

$Q_{22}(\tau) = \big(p_{ij}\big)$ — матрица размерности $((N-1)n \times (N-1)n)$ с элементами

$$p_{ij} = \begin{cases} -I, \quad \text{при} \quad i = j, \\ 0, \quad \text{при} \quad i < j, \\ I + D_{\nu i}(i\tau), \quad \text{при} \quad i - j = 1, \\ P_{\nu i}^{i-(j+2)}\big[H_{\nu i}(i\tau) + P_{\nu i}[D_{\nu i}(i\tau), i\tau], i\tau\big] \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$\lambda = (\lambda_{11}, ..., \lambda_{1n}, ..., \lambda_{r1}, ..., \lambda_{rn}, ..., \lambda_{N1}, ..., \lambda_{Nn})'$,
$\widetilde{F}_\nu(\tau) = \big(-\tau \widetilde{F}_{\nu N}(T), \widetilde{F}_{\nu 1}(\tau), \widetilde{F}_{\nu 2}(2\tau), ..., \widetilde{F}_{\nu, N-1}((N-1)\tau)\big)'$,
$\widetilde{G}_\nu(u, \tau) = \big(-\tau \widetilde{G}_{\nu N}(u, T), \widetilde{G}_{\nu 1}(u, \tau), \widetilde{G}_{\nu 2}(u, 2\tau), ..., \widetilde{G}_{\nu, N-1}(u, (N-1)\tau)\big)'$
и

$$\widetilde{F}_{\nu r}(r\tau) = \sum_{j=1}^{r} P_{\nu r}^{j-1}[F_{\nu r}(r\tau), r\tau], \quad \widetilde{G}_{\nu r}(u, r\tau) = \sum_{j=1}^{r} P_{\nu r}^{j-1}[G_{\nu r}(u_j, r\tau), r\tau].$$

Таким образом, для нахождения пар $\big(\lambda_r, u_r(t)\big)$, $r = 1, 2, ..., N$, имеем замкнутую систему уравнений (8), (9) и (14). Применяя метод последовательных приближений, находим решение краевой задачи (1)–(3).

Решение многоточечной краевой задачи с параметром (4)–(7) — систему пар $(\lambda_r, u_r(t)), r = = 1, 2, ..., N$, найдем по следующему алгоритму.

**Шаг 0.** a) Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(\tau)$, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_r^{(0)})'$ определяем из уравнения $Q_\nu(\tau)\lambda = -\widetilde{F}_\nu(\tau)$;

b) на отрезке $[0; \tau)$, решая задачу Коши (4) при $\lambda_1 = \lambda_1^{(0)}$, находим $u_1^{(0)}(t)$;

c) подставляя вместо $\lambda_r,\ \lambda_{r-1},\ u_{r-1}(t-\tau)$ соответственно $\lambda_r^{(0)},\ \lambda_{r-1}^{(0)},\ u_{r-1}^{(0)}(t-\tau)$ и решая задачу Коши (5) на отрезках $[(r-1)\tau; r\tau),\ r = \overline{2, N}$, находим $u_r^{(0)}(t)$.

**Шаг 1.** a) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$ в правую часть уравнения (14), из уравнения $Q_\nu(\tau)\lambda = -\widetilde{F}_\nu(\tau) - \widetilde{G}_\nu(u^{(0)}, \tau)$ определяем $\lambda^{(1)}$;

b) на отрезке $[0; \tau)$, решая задачу Коши (4) при $\lambda_1 = \lambda_1^{(1)}$, находим $u_1^{(1)}(t)$;

c) подставляя вместо $\lambda_r,\ \lambda_{r-1},\ u_{r-1}(t-\tau)$ соответственно $\lambda_r^{(1)},\ \lambda_{r-1}^{(1)},\ u_{r-1}^{(1)}(t-\tau)$ и решая задачу Коши (5) на отрезках $[(r-1)\tau; r\tau),\ r = \overline{2, N}$, находим $u_r^{(1)}(t)$. И так далее.

Продолжая процесс, на k-м шаге получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$. Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также оценку разности между точным и приближенным (получаемым через k шагов-итераций) решениями устанавливает

**Теорема 1.** *Пусть при некотором $\nu$ $(\nu = 1, 2, ...)$ матрица $Q_\nu(\tau) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства*

$$a)\ \|[Q_\nu(\tau)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(\tau); \tag{15}$$

$$b)\ q_\nu(\tau) = \gamma_\nu(\tau) \max(1, \tau) \frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!} \max_r \Bigg(\sum_{\rho=0}^{r-1} \frac{1}{\rho!} \cdot \Bigg(\beta\tau \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\Bigg)^\rho\Bigg) \cdot P(\tau) < 1, \tag{16}$$

*где*

$$P(\tau) = \max_r \sup_{t \in [(r-1)\tau; r\tau)} \Bigg\{\sum_{\rho=1}^{r} \Big[[t-(r-1)\tau]^{\rho-1} \beta^{\rho-1} e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\Big] - 1 +$$
$$+ [t-(r-1)\tau]^r \beta^r e^{r\alpha[t-(r-1)\tau]} \|\Phi(t - r\tau)\|\Bigg\}.$$

*Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\|x^*(t)-x^{(k)}(t)\| \le \frac{[q_\nu(\tau)]^k}{1-q_\nu(\tau)}\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\times$$

$$\times\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)\cdot M(\tau)\cdot(1+P(\tau)), \qquad (17)$$

*где*

$$M(\tau)=\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)\|f\|_1\tau\times$$

$$\times\max_r\sup_{t\in[(r-1)\tau;r\tau)}\left\{\sum_{\rho=1}^{r}\left[[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\right]-1+\right.$$

$$\left.+[t-(r-1)\tau]^r\beta^r e^{r\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\Phi(t-r\tau)\|\right\}+$$

$$+\|f\|_1\tau\max_r\sup_{t\in[(r-1)\tau;r\tau)}\sum_{\rho=1}^{r}[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из обратимости матрицы $Q_\nu(\tau)$ следует существование $\lambda^{(0)}$ и

$$\|\lambda^{(0)}\|=\max_r\|\lambda_r^{(0)}\|=\|[Q_\nu(\tau)]^{-1}\|\cdot\|\widetilde{F}_\nu(\tau)\|\le$$

$$\le\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)\|f\|_1\tau. \qquad (18)$$

При наших предположениях задача Коши (4) при $\lambda_1=\lambda_1^{(0)}$ имеет единственное решение

$$u_1^{(0)}(t)=\int_0^t A(s)[u_1^{(0)}(s)+\lambda_1^{(0)}]ds+\int_0^t B(s)\Phi(s-\tau)\lambda_1^{(0)}ds+\int_0^t f(s)ds$$

при $t\in[0;\tau)$. Тогда, используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим оценку

$$\|u_1^{(0)}(t)\|\le\left(e^{\alpha t}-1\right)\|\lambda_1^{(0)}\|+e^{\alpha t}t\beta\|\Phi(t-\tau)\|\cdot\|\lambda_1^{(0)}\|+e^{\alpha t}t\|f(t)\|. \qquad (19')$$

Подставляя в задачу Коши (5) вместо $\lambda_r,\ \lambda_{r-1},\ u_{r-1}(t-\tau)$ соответственно $\lambda_r^{(0)},\ \lambda_{r-1}^{(0)},\ u_{r-1}^{(0)}(t-$ $-\tau)$, однозначно определяем на отрезках $[(r-1)\tau;r\tau)$ функции $u_r^{(0)}(t)$, $r=2,3,...,N$, и, вновь применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим

$$\|u_r^{(0)}(t)\|\le\left(e^{\alpha[t-(r-1)\tau]}-1\right)\cdot\|\lambda_r^{(0)}\|+e^{\alpha[t-(r-1)\tau]}[t-(r-1)\tau]\beta\cdot\|\lambda_{r-1}^{(0)}\|+$$

$$+e^{\alpha[t-(r-1)\tau]}[t-(r-1)\tau]\beta\cdot\|u_{r-1}^{(0)}(t-\tau)\|+e^{\alpha[t-(r-1)\tau]}[t-(r-1)\tau]\cdot\|f(t)\|. \qquad (19'')$$

Путем подстановки в неравенство $(19'')$ ранее найденных оценок $\|u_{s-1}^{(0)}(t-\tau)\|,\ s=r-1,r-$ $-2,...,2,1$, получим

$$\|u_r^{(0)}(t)\|\le\sum_{\rho=1}^{r}\left\{[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\cdot\lambda_{r-(\rho-1)}^{(0)}\|\right\}-\|\lambda_r^{(0)}\|+$$

$$+[t-(r-1)\tau]^r\beta^r e^{r\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\Phi(t-r\tau)\|\cdot\|\lambda_1^{(0)}\|+$$

$$+[t-(r-1)\tau]\cdot\|f(t)\|\sum_{\rho=1}^{r}[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\le$$

$$\le\left\{\sum_{\rho=1}^{r}\left[[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\right]-1+[t-(r-1)\tau]^r\beta^r e^{r\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\Phi(t-r\tau)\|\right\}\|\lambda^{(0)}\|+$$

$$+[t-(r-1)\tau]\cdot\|f(t)\|\sum_{\rho=1}^{r}[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]},\ r=1,2,...,N,$$

откуда, учитывая (18), имеем

$$\|u^{(0)}(t)\|_2=\max_r\sup_{t\in[(r-1)\tau;r\tau)}\|u_r^{(0)}(t)\|\le M(\tau). \tag{19}$$

По алгоритму определяем $\lambda^{(1)}$ и оцениваем $\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|$:

$$\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|\le\gamma_\nu(\tau)\|\widetilde{G}_\nu(u,\tau)\|\le$$

$$\le\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)\|u^{(0)}(t)\|_2\le \tag{20}$$

$$\le\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)M(\tau).$$

Используя неравенство Гронуолла-Беллмана, оценим разность функций $u_r^{(1)}(t)$ и $u_r^{(0)}(t)$:

$$\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\|\le\sum_{\rho=1}^{r}\left[[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\lambda_{r-(\rho-1)}^{(1)}-\lambda_{r-(\rho-1)}^{(0)}\|\right]-$$

$$-\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\|+[t-(r-1)\tau]^r\beta^r e^{r\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\Phi(t-r\tau)\|\cdot\|\lambda_1^{(1)}-\lambda_1^{(0)}\|\le$$

$$\le\left\{\sum_{\rho=1}^{r}\left[[t-(r-1)\tau]^{\rho-1}\beta^{\rho-1}e^{\rho\alpha[t-(r-1)\tau]}\right]-1+\right.$$

$$\left.+[t-(r-1)\tau]^r\beta^r e^{r\alpha[t-(r-1)\tau]}\|\Phi(t-r\tau)\|\right\}\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|,\ r=1,2,...,N$$

или $\|u^{(1)}(t)-u^{(0)}(t)\|_2\le P(\tau)\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|$.

Продолжая итерационный процесс, находим последовательность системы пар $\left(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t)\right)$, $r=1,2,...,N,\ k=1,2,...$ Вновь используя неравенство Гронуолла-Беллмана, оцениваем разность решений задач Коши через разность параметров:

$$\|u^{(k)}(t)-u^{(k-1)}(t)\|_2\le P(\tau)\cdot\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|. \tag{21}$$

Из уравнения (14) следует, что

$$\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\|=\left\|[Q_\nu(\tau)]^{-1}\cdot\left(\widetilde{G}_\nu(u^{(k)},\tau)-\widetilde{G}_\nu(u^{(k-1)},\tau)\right)\right\|\le$$

$$\le\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)\|u^{(k)}(t)-u^{(k-1)}(t)\|_2.$$

Применяя оценку (21), получим

$$\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\| \leq q_\nu(\tau)\cdot\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|,\ k=1,2,... \tag{22}$$

В силу условия (16) и неравенств (20)–(22), последовательность $\left(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t)\right)$ сходится к $\left(\lambda_r^*, u_r^*(t)\right)$ при $k\to\infty$ и имеют место оценки

$$\|\lambda^*-\lambda^k\| \leq \frac{[q_\nu(\tau)]^k}{1-q_\nu(\tau)}\cdot\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)M(\tau),$$

$$\|u^*(t)-u^k(t)\| \leq \frac{[q_\nu(\tau)]^k}{1-q_\nu(\tau)}\cdot\gamma_\nu(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^\rho\right)M(\tau)P(\tau).$$

Так как $\left(\lambda_r^*, u_r^*(t)\right)$ является решением задачи (4)–(7), то функция $x^*(t)=diag[\varphi(t)]\lambda_1^*,\ t\in\in[-\tau;0],\ x^*(t)=\lambda_r^*+u_r^*(t),\ t\in[(r-1)\tau;r\tau),\ r=\overline{1,N},\ x_N^*(T)=\lambda_N^*+u_N^*(T)$ будет решением исходной задачи и справедлива оценка (17).

Докажем единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $x^*(t),\widetilde{x}(t)$ — два решения данной задачи. Тогда соответствующие им системы пар $\left(\lambda_r^*, u_r^*(t)\right)$, $\left(\widetilde{\lambda}_r, \widetilde{u}_r(t)\right)$, $r=\overline{1,N}$ будут решениями краевой задачи с параметром (4)–(7) и аналогично (20), (21)

$$\|u^*(t)-\widetilde{u}(t)\|_2 \leq P(\tau)\cdot\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|,$$

$\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\| \leq q_\nu(\tau)\cdot\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|$, где $q_\nu(\tau)<1$. Отсюда следует, что $\lambda_r^*=\widetilde{\lambda}_r$, $\quad u_r^*(t)=\widetilde{u}_r(t)$, то есть $x^*(t)=\widetilde{x}(t)$ при $t\in[0;T]$. Теорема 1 доказана.

Далее воспользуемся следующим утверждением.

**Лемма 1.** *Если $x^*(t)$ — решение задачи (1)–(3), то $\lambda^*=\left(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_N^*\right)'$ с компонентами $\lambda_r^*=x^*((r-1)\tau)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{1}{\tau}\cdot Q^*(\tau)\cdot\lambda=-F_*(A,B,f,\tau), \tag{23}$$

*где $Q^*(\tau)=\lim\limits_{\nu\to\infty}Q_\nu(\tau),\ F_*(A,B,f,\tau)=\dfrac{1}{\tau}\cdot\lim\limits_{\nu\to\infty}\widetilde{F}_\nu(\tau)$.*

*И, наоборот, если $\widetilde{\lambda}=\left(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N\right)'$ — решение (23), то функция $x(t)$, определяемая равенствами $x(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t),\ t\in[0;T],\ r=\overline{1,N}$, где $\widetilde{u}_1(t)$ — решение задачи Коши (4) при $\lambda_1=\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{u}_r(t),\ r=\overline{2,N}$ — решение задачи Коши (5) при $\lambda_r=\widetilde{\lambda}_r,\ \lambda_{r-1}=\widetilde{\lambda}_{r-1},\ u_{r-1}(t-\tau)=\widetilde{u}_{r-1}(t-\tau)$, будет решением задачи (1)–(3).*

**Доказательство.** Пусть $x^*(t)$ — решение задачи (1)–(3), а пара $\left(\lambda^*,u^*(t)\right)$ с компонентами $\lambda^*=\left(x(0),x(\tau),\ldots,x((N-1)\tau)\right)'$, $\quad u^*(t)=\left(x(t)-x(0),x(t)-x(\tau),\ldots,x(t)-x((N-1)\tau)\right)'$ — решение задачи с параметром (4)–(7). Тогда для любого $\nu\in N$ имеют место равенства

$$u_1^*(t)=D_{\nu 1}(t)\cdot\lambda_1^*+E_{\nu 1}(t)\cdot\lambda_1^*+F_{\nu 1}(t)+G_{\nu 1}(u_1^*,t), \tag{24$'$}$$

$$\begin{aligned}u_r^*(t)&=D_{\nu r}(t)\cdot\lambda_r^*+\left[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t]\right]\cdot\lambda_{r-1}^*+P_{\nu r}\left[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t],t\right]\cdot\lambda_{r-2}^*+\\&+P_{\nu r}^2\left[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t],t\right]\cdot\lambda_{r-3}^*+\ldots+P_{\nu r}^{r-3}\left[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t),t],t\right]\cdot\lambda_2^*+\\&+P_{\nu r}^{r-2}\left[H_{\nu r}(t)+P_{\nu r}[D_{\nu r}(t)+E_{\nu r}(t),t],t\right]\cdot\lambda_1^*+\sum_{j=1}^{r}P_{\nu r}^{j-1}\left[F_{\nu r}(t)+G_{\nu r}(u_j^*,t),t\right],\ r=\overline{2,N},\end{aligned} \tag{24$''$}$$

$$Q_\nu(\tau)\lambda^* = -\widetilde{F}_\nu(\tau) - \widetilde{G}_\nu(u^*,\tau). \tag{25}$$

Так как $\|\widetilde{G}_\nu(u^*,\tau)\|_1 \le \dfrac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max\limits_r\Bigg(\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\dfrac{1}{\rho!}\cdot\Bigg(\beta\tau\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{(\alpha\tau)^j}{j!}\Bigg)^\rho\Bigg)\|u^*\|_2$ и

$P_{\nu r}^{r-i}\big[H_{\nu r}(t),t\big]$, $P_{\nu r}^{r-i}\big[D_{\nu r}(t),t\big]$, $P_{\nu r}^{r-i}\big[E_{\nu r}(t),t\big]$, $P_{\nu r}^{r-i}\big[F_{\nu r}(t),t\big]$, $i=1,2,\ldots,r$, $r=1,2,\ldots,N$, равномерно сходятся к $P_{*,r}^{r-i}\big[H_{*,r}(t),t\big]$, $P_{*,r}^{r-i}\big[D_{*,r}(t),t\big]$, $P_{*,r}^{r-i}\big[E_{*,r}(t),t\big]$, $P_{*,r}^{r-i}\big[F_{*,r}(t),t\big]$, где

$$P_{*,r}^{r-i}\big[D_{*,r}(t),t\big] = \lim_{\nu\to\infty}P_{\nu r}^{r-i}\big[D_{\nu r}(t),t\big], \quad P_{*,r}^{r-i}\big[H_{*,r}(t),t\big] = \lim_{\nu\to\infty}P_{\nu r}^{r-i}\big[H_{\nu r}(t),t\big],$$

$$P_{*,r}^{r-i}\big[E_{*,r}(t),t\big] = \lim_{\nu\to\infty}P_{\nu r}^{r-i}\big[E_{\nu r}(t),t\big], \quad P_{*,r}^{r-i}\big[F_{*,r}(t),t\big] = \lim_{\nu\to\infty}P_{\nu r}^{r-i}\big[F_{\nu r}(t),t\big],$$

то, переходя к пределу при $\nu\to\infty$ в $(24')$, $(24'')$, (25) и разделив обе части (25) на $\tau>0$, получим

$$u_1^*(t) = D_{*,1}(t)\cdot\lambda_1^* + E_{*,1}(t)\cdot\lambda_1^* + F_{*,1}(t),\ t\in[0;\tau),$$

$$u_r^*(t) = D_{*,r}(t)\cdot\lambda_r^* + \big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t]\big]\cdot\lambda_{r-1}^* + P_{*,r}\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_{r-2}^* +$$
$$+P_{*,r}^2\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_{r-3}^* + \ldots + P_{*,r}^{r-3}\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_2^* +$$
$$+P_{*,r}^{r-2}\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t)+E_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\lambda_1^* + \sum_{j=1}^{r}P_{*,r}^{j-1}\big[F_{*,r}(t),t\big],\ t\in[(r-1)\tau;r\tau),\ r=\overline{2,N}$$

$$\frac{1}{\tau}\cdot Q^*(\tau)\cdot\lambda^* = -F_*(A,B,f,\tau),$$

то есть $\lambda^*$ удовлетворяет (23).

Пусть $\widetilde{\lambda} = \big(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N\big)'$ — решение уравнения (23), $\widetilde{u}_1(t)$ — решение задачи Коши (4) на интервале $[0;\tau)$ при $\lambda_1=\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{u}_r(t)$ — решение задачи Коши (5) на интервале $[(r-1)\tau;r\tau)$ при $\lambda_r=\widetilde{\lambda}_r,\ \lambda_{r-1}=\widetilde{\lambda}_{r-1},\ u_{r-1}(t-\tau)=\widetilde{u}_{r-1}(t-\tau)$ для $r=\overline{2,N}$. При наших предположениях существуют единственные

$$\widetilde{u}_1(t) = D_{*,1}(t)\cdot\widetilde{\lambda}_1 + E_{*,1}(t)\cdot\widetilde{\lambda}_1 + F_{*,1}(t),\ t\in[0;\tau),$$

$$\widetilde{u}_r(t) = D_{*,r}(t)\cdot\widetilde{\lambda}_r + \big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t]\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{r-1} + P_{*,r}\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{r-2} +$$
$$+P_{*,r}^2\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{r-3} + \ldots + P_{*,r}^{r-3}\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\widetilde{\lambda}_2 + \tag{26}$$
$$+P_{*,r}^{r-2}\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(t)+E_{*,r}(t),t],t\big]\cdot\widetilde{\lambda}_1 + \sum_{j=1}^{r}P_{*,r}^{j-1}\big[F_{*,r}(t),t\big],\ t\in[(r-1)\tau;r\tau),\ r=\overline{2,N}.$$

Таким образом, пара $\big(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{u}_1(t)\big)$ удовлетворяет (4) и пары $\big(\widetilde{\lambda}_r,\widetilde{u}_r(t)\big),\ r=\overline{2,N}$, удовлетворяют (5). Так как $\widetilde{\lambda}$ — решение (23), то имеют место равенства

$$\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_N + \big\{D_{*,r}(T)\cdot\widetilde{\lambda}_N + \big[H_{*,r}(T)+P_{*,r}[D_{*,r}(T),T]\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{N-1} + P_{*,r}\big[H_{*,r}(T)+$$
$$+P_{*,r}[D_{*,r}(T),T],T\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{N-2} + P_{*,r}^2\big[H_{*,r}(t)+P_{*,r}[D_{*,r}(T),T],T\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{N-3}+\ldots+$$
$$+P_{*,r}^{N-3}\big[H_{*,r}(T)+P_{*,r}[D_{*,r}(T),T],T\big]\cdot\widetilde{\lambda}_2 + P_{*,r}^{N-2}\big[H_{*,r}(T)+P_{*,r}[D_{*,r}(T)+E_{*,r}(T),T],T\big]\cdot\widetilde{\lambda}_1 +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}P_{*,r}^{j-1}\big[F_{*,r}(T),T\big]\big\},\widetilde{\lambda}_1 + \big\{D_{*,1}(\tau)\cdot\widetilde{\lambda}_1 + E_{*,1}(\tau)\cdot\widetilde{\lambda}_1 + F_{*,1}(\tau)\big\} = \widetilde{\lambda}_2,$$

$$\widetilde{\lambda}_s + \big\{D_{*,r}(s\tau)\cdot\widetilde{\lambda}_s + \big[H_{*,r}(s\tau)+P_{*,r}[D_{*,r}(s\tau),s\tau]\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{s-1} + P_{*,r}\big[H_{*,r}(s\tau)+P_{*,r}[D_{*,r}(s\tau),s\tau],s\tau\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{s-2}+$$

$$+P^2_{*,r}\big[H_{*,r}(s\tau)+P_{*,r}[D_{*,r}(s\tau),s\tau],s\tau\big]\cdot\widetilde{\lambda}_{s-3}+\ldots+P^{s-3}_{*,r}\big[H_{*,r}(s\tau)+P_{*,r}[D_{*,r}(s\tau),s\tau],s\tau\big]\cdot\widetilde{\lambda}_2+$$

$$+P^{s-2}_{*,r}\big[H_{*,r}(s\tau)+P_{*,r}[D_{*,r}(s\tau)+E_{*,r}(s\tau),s\tau],s\tau\big]\cdot\widetilde{\lambda}_1+\sum_{j=1}^{s}P^{j-1}_{*,r}\big[F_{*,r}(s\tau),s\tau\big]\big\}=\widetilde{\lambda}_{s+1},$$

$$s=\overline{2,N-1}.$$

Тогда в силу (26) выражения, стоящие в фигурных скобках в последних трех равенствах, равны соответственно $\widetilde{u}_N(T),\ \lim\limits_{t\to\tau-0}\widetilde{u}_1(t),\ \lim\limits_{t\to s\tau-0}\widetilde{u}_s(t),\ s=\overline{2,N-1}$, и поэтому пара $(\widetilde{\lambda}_r,\ \widetilde{u}_r(t))$, $r=\overline{1,N}$ удовлетворяет также (6),(7). Из эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(7) следует второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 являются не только достаточными, но и необходимыми.

**Теорема 2.** *Краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда существует $\nu$ $(\nu=1,2,...)$, при котором матрица $Q_\nu(\tau):R^{nN}\to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства (15), (16).*

**Доказательство.** Достаточность следует из теоремы 1.

Необходимость. Покажем обратимость матрицы $Q^*(\tau)$. Для этого достаточно установить, что уравнение $Q^*(\tau)\cdot\lambda=0$ имеет только нулевое решение. Допустим обратное: пусть найдется ненулевой вектор $\widetilde{\lambda}=\big(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N\big)'\in R^{nN}$ и $Q^*(\tau)\cdot\widetilde{\lambda}=0$. Тогда по лемме 1 функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t),\ t\in[0;T],\ r=\overline{1,N},\ \widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_N+\widetilde{u}_N(T)$, где $\widetilde{u}_1(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\widetilde{u}_1}{dt}=A(t)[\widetilde{u}_1+\widetilde{\lambda}_1]+B(t)\Phi(t-\tau)\widetilde{\lambda}_1,\ \widetilde{u}_1(0)=0,\ t\in[0;\tau),\qquad(*)$$

$\widetilde{u}_r(t),\ r=2,3,...,N,$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\widetilde{u}_r}{dt}=A(t)[\widetilde{u}_r+\widetilde{\lambda}_r]+B(t)[\widetilde{u}_{r-1}(t-\tau)+\widetilde{\lambda}_{r-1}],\ \widetilde{u}_r((r-1)\tau)=0,\ t\in[(r-1)\tau;r\tau),\qquad(**)$$

где $\widetilde{u}_1(t)$ удовлетворяет (*), а $\widetilde{u}_{r-1}(t),\ r=\overline{3,N}$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\widetilde{u}_{r-1}}{dt}=A(t)[\widetilde{u}_{r-1}+\widetilde{\lambda}_{r-1}]+B(t)[\widetilde{u}_{r-2}(t-\tau)+\widetilde{\lambda}_{r-2}],\ \widetilde{u}_{r-1}((r-2)\tau)=0,\ t\in[(r-2)\tau;(r-1)\tau),$$

будет ненулевым решением однородной краевой задачи

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau),\ t\in[0;T],$$

$$x(z)=diag[x(0)]\varphi(z),\ z\in[-\tau;0],$$

$$x(0)=x(T),$$

что противоречит однозначной разрешимости задачи (1)–(3), так как данная задача имеет и решение $x(t)\equiv 0$. Поэтому матрица $Q^*(\tau)$ обратима и $\|[Q^*(\tau)]^{-1}\|\le\gamma_*(\tau)$. Учитывая неравенство

$$\|Q^*(\tau)-Q_\nu(\tau)\|\le\max(1,\tau)\left(e^{\alpha\tau}-1-\alpha\tau-\ldots-\frac{(\alpha\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)\times$$

$$\times\max\left\{\alpha\tau+\beta\tau\|\Phi(t-\tau)\|,\quad\max_{r=\overline{2,N}}\left[\beta\tau\sum_{\rho=0}^{r-2}\frac{1}{\rho!}\beta^\rho\tau^\rho\left(e^{\alpha\tau}-1-\alpha\tau-\ldots-\frac{(\alpha\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)^\rho+\right.\right.$$

$$+\alpha\tau\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\beta^{\rho}\tau^{\rho}\left(e^{\alpha\tau}-1-\alpha\tau-\ldots-\frac{(\alpha\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)^{\rho}+$$

$$\left.\left.+\beta\tau\|\Phi(t-r\tau)\|\frac{1}{(r-1)!}\beta^{r-1}\tau^{r-1}\left(e^{\alpha\tau}-1-\alpha\tau-\ldots-\frac{(\alpha\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)^{r-1}\right]\right\},$$

где правая часть стремится к нулю при $\nu\to\infty$ , и используя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов, найдем $\overline{\nu}$ такое, что

$$\gamma_*(\tau)\cdot\|Q^*(\tau)-Q_\nu(\tau)\|<\frac{1}{2},\ \text{для}\ \forall\ \nu\geq\overline{\nu}.$$

Причем матрица $Q_\nu(\tau)$ будет обратимой и выполняется оценка

$$\left\|[Q_\nu(\tau)]^{-1}\right\|\leq\frac{\gamma_*(\tau)}{1-\gamma_*(\tau)\cdot\|Q^*(\tau)-Q_\nu(\tau)\|}\leq\frac{\gamma_*(\tau)}{1-\frac{1}{2}}=2\gamma_*(\tau)=\gamma_{\overline{\nu}}(\tau),$$

то есть условие a) теоремы 1 выполняется для всех $\nu\geq\overline{\nu}$. Так как

$$q_\nu(\tau)\leq 2\gamma_*(\tau)\max(1,\tau)\frac{(\alpha\tau)^\nu}{\nu!}\max_r\left(\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{1}{\rho!}\cdot\left(\beta\tau\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha\tau)^j}{j!}\right)^{\rho}\right)\cdot P(\tau),\ \nu\geq\overline{\nu},$$

то, выбирая $\overline{\overline{\nu}}\geq\overline{\nu}$, удовлетворяющее неравенству $q_{\overline{\overline{\nu}}}(\tau)<1$, получим, что условия a), b) теоремы 1 будут выполнены при $\nu=\overline{\overline{\nu}}$. Теорема 2 доказана.

## Цитированная литература


1. **Самойленко А. М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1992.

2. **Ронто Н.И.** // Укр. мат. журн. 1983. Т.35, №6. С.788–792.

3. **Теняев В.В.** Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: Автореф. дис. канд.физ.-мат.наук. Рязань, 2002. 16с.

4. **Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1971.

5. **Мышкис А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.

6. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.

7. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.



*Поступила в редакцию 01.03.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 44 – 48*

УДК 517.95

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

Т. Ш. Кальменов, Б. Д. Кошанов

ЦФМИ (Центр физико-математических исследований МОН РК)
480100 г.Алматы ул.Шевченко, 28

В работе изучены спектральные свойства уравнений смешанного типа, в частности, в случае симметрической области для уравнения Лаврентьева-Бицадзе доказана полнота корневых векторов задачи Трикоми.

## 1. Бесконечномерность корневого подпространства задачи Трикоми.

Ввиду большой теоретической и прикладной важности спектральные вопросы задачи Трикоми представляют большой научный интерес, а из-за отсутствия методов исследования эта проблема начала изучаться сравнительно недавно. Отметим, что спектральные вопросы уравнений смешанного типа впервые были сформулированы А.В.Бицадзе [1] в начале 70-х годов прошлого столетия. Далее, в работе [2] впервые с помощью нового принципа экстремума доказана непустота спектра задачи Трикоми, а в работах [3],[4] спектральная задача Трикоми сведена к сложной нелинейной спектральной задаче для эллиптических уравнений.

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой $\sigma$, а при $y < 0$ — характеристиками $AC: \ x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = -1$, $BC: \ x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$ уравнения

$$Lu = -yu_{xx} - u_{yy} = f. \tag{1.1}$$

**С п е к т р а л ь н а я з а д а ч а Т р и к о м и.** Найти собственные и присоединенные функции уравнения (1.1), удовлетворяющие краевому условию

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0. \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что кривая $\sigma$ оканчивается малыми дугами нормальной кривой $\sigma_0: \ x^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}$.

Имеет место

Keywords: *Tricomi problem, mixed equation, completeness of root-vectors*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

**Т е о р е м а 1.1.** *Собственные и присоединенные функции (корневые функции) задачи Трикоми образуют бесконечномерное корневое подпространство.*

Через $L_T$ и $L_{T^*}$ обозначим замыкание оператора (1.1) в $L_2(\Omega)$ соответственно на подмножествах функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u|_{\sigma\cup AC} = 0$ и $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v|_{\sigma\cup BC} = 0$. Обратимость операторов $L_T$ и $L_{T^*}$ на всем $L_2(\Omega)$ и полная непрерывность их обратных $L_T^{-1}$ и $L_{T^*}^{-1}$ доказана в [6]. Под корневыми функциями задачи (1.1),(1.2) будем понимать корневые векторы оператора $L_T$.

Пусть число корневых векторов оператора $L_T$ $\{u_i\}$, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_i\}$, конечно, то есть $i = 1, 2, \ldots, N$. В дальнейшем будем использовать разложение пространства $L_2(\Omega)$ в виде [5]

$$L_2 = L_{\lambda,T^*} \oplus L^{\perp}_{\lambda,T^*}, \quad L_2 = L_{\lambda,T} \oplus L^{\perp}_{\lambda,T}, \tag{1.3}$$

где $L_{\lambda,T^*}$, $L_{\lambda,T}$ — корневые пространства $L_{T^*}$ и $L_T$ соответственно, то есть линейные векторные пространства, натянутые на корневые векторы $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, а $L^{\perp}_{\lambda,T^*}$, $L^{\perp}_{\lambda,T}$ — их ортогональные дополнения в $L_2(\Omega)$.

Имеет место

**Л е м м а 1.1.** *Корневые векторы $u_i$ оператора $L_T$ принадлежат $C^\infty(\Omega) \cap C^\gamma(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < \frac{1}{6}$.*

Пользуясь свойствами сингулярных интегральных уравнений [6], можно установить неравенства

$$\|u\|_{C^{\gamma+\varepsilon}(\overline{\Omega})} \le C\|f\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})}, \quad 0 < \gamma + \varepsilon < \frac{1}{6}, \tag{1.4}$$

$$\|u\|_{C^{l+\gamma}(\overline{\Omega}_1)} \le C\|f\|_{C^l(\overline{\Omega}_1)}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{6}, l = 0, 1, \ldots, \tag{1.5}$$

$\Omega_1$ — произвольная внутренняя область $\Omega$ с гладкой границей $\partial\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\partial\Omega_1 \in C^\infty$. Справедливость леммы следует из неравенств (1.4)–(1.5).

**Л е м м а 1.2.** *Пусть $u_i(x)$ — произвольный корневой вектор оператора $L_T$, а область $\Omega_0 \subset \Omega$ такова, что $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, $\partial\Omega_0 \subset C^\infty$. Тогда существует продолжение $\tilde{u}_i(x)$ функции $u_i(x)$ из $\Omega\backslash\Omega_0$ в $\Omega_0$, определяемое формулой*

$$\tilde{u}_i(x) = \begin{cases} u_i(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_0, \\ u_i^+(x), & x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

*такое, что*

$$\|L_T^k \tilde{u}_i\|_{L_2(\Omega)} \le CM^k, \quad k = 0, 1, \ldots, S, \tag{1.7}$$

*где постоянная $M$ зависит от абсолютных величин собственных значений $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_N$ и от нормы корневых векторов $u_1$, …, $u_N$.*

Отметим, что в качестве $u_i^+$ можно взять решение следующей задачи Дирихле:

$$(-\Delta + M_0 I)^{2(S+1)} u_i^+ = f_i^+, x \subset \Omega_0, \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial^j}{\partial n^j} u_i^+\right|_{\partial\Omega_0} = \left.\frac{\partial^j}{\partial n^j} u_i\right|_{\partial\Omega_0}, \ j = 0, ..., S. \tag{1.9}$$

Неравенство (1.7) является обобщением антиаприорных оценок для корневых векторов, введенных В.А.Ильиным [8].

Имеет место

**Л е м м а 1.3.** *Существуют элементы $c_i$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{N} |c_i| \neq 0$ и функция, задаваемая формулой*

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \tilde{u}_i(x), \tag{1.10}$$

*удовлетворяет соотношениям*

$$L^k \tilde{u} \in L^{\perp}_{\lambda,T^*}, \quad (L^k_T \tilde{u}, v_j) = 0, \tag{1.11}$$

$$\|L^k \tilde{u}\|_0 \leq CM^k, \quad k = 0, 1, \ldots, S. \tag{1.12}$$

*Здесь $v_j(x)$ — корневые векторы сопряженного оператора $L_{T^*}$.*

Пользуясь вольтерровой инвариантностью оператора $L_T$ на $L^{\perp}_{\lambda,T^*}$ и неравенством (1.12), из соотношения

$$\tilde{u} = L_T^{-k} L_T^k \tilde{u} \tag{1.13}$$

в силу произвольности $\Omega_0$ и числа $k$ можно показать, что $\tilde{u} \equiv 0$, $u_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Это показывает, что оператор $L_T$ не может иметь конечного числа корневых векторов, что и доказывает теорему.

Пусть теперь $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ гладкой кривой $\sigma_0 : \{x^2 + y^2 = 1\}$, а при $y < 0$ — характеристиками $AC: \ x + y = -1$, $BC: \ x - y = 1$ уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv -sgn\, y\, u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \tag{1.14}$$

Пусть угол подхода кривой $\sigma$ к оси $y = 0$ меньше, чем $\frac{\pi}{4}$.

Через $L_T$ и $L_{T^*}$ обозначим замыкания дифференциального выражения (1.14) в $L_2(\Omega)$ соответственно на подмножествах функций $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $u|_{\sigma \cup AC} = 0$ и $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $v|_{\sigma \cup BC} = 0$.

Имеет место

**Т е о р е м а 1.2.** *Корневые векторы $u_i$ оператора $L_T$ полны в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда их следы $u_j|_{BC}$ полны в пространстве $L_2(BC)$.*

Необходимость условия теоремы 1.2 доказана в [7]. Пусть $L_{\lambda,T}$ и $L_{\lambda,T^*}$ — корневые подпространства операторов $L_T$ и $L_{T^*}$ соответственно. Пусть оператор $L_{S,T}$ задается формулой

$$L_{S,T} = \frac{L_T^{-1} - L_{T^*}^{-1}}{2i}. \tag{1.15}$$

**Л е м м а 1.4.** *Пусть $Ker\ L_{S,T}$ и $R(L_{S,T})$ – ядро и область значений оператора $L_{S,T}$. Тогда имеет место соотношение*

$$R(L_{S,T}) \subset L_{\lambda,T}. \tag{1.16}$$

Действительно, если $\tilde{h} = L_{S,T} h = \frac{L_T^{-1} - L_{T^*}^{-1}}{2i} h$ и $(\tilde{h}, Lu_i)_0 = 0$, то непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$(L\tilde{h}, u_i)_0 - (\tilde{h}, Lu_i)_0 = \int\limits_{BC} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial S} \tilde{u}_i(S) dS = 0. \tag{1.17}$$

Отсюда в силу полноты $u_j|_{BC}$ в $L_2(BC)$ следует, что $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial S} = 0$. Из единственности решения задачи Трикоми следует $\tilde{h} \equiv 0$, что и доказывает лемму 1.4.

Так как $L_{S,T}$ — самосопряженный оператор, то $R^{\perp}(L_{S,T}) = Ker\ L_{S,T}$. Поэтому из (1.16) следует, что

$$L_{\lambda,T}^{\perp} \subset Ker\ L_{S,T} = R^{\perp}(L_{S,T}). \tag{1.18}$$

Поскольку оператор $L_{T^*}$ вольтерров на $L_{\lambda,T}^{\perp}$ и в силу соотношения (1.18) самосопряжен на $L_{\lambda,T}^{\perp}$, то $L_{\lambda,T}^{\perp} \equiv 0$, что доказывает теорему 1.2.

## 2. Полнота корневых векторов задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.

Пусть область $\Omega$ симметрична относительно оси $x = 0$, а оператор $P$ такой, что

$$(Pf)(x, y) \equiv f(-x, y). \tag{2.1}$$

Имеет место

**Л е м м а 2.1.** *Операторы $L_T^{-1}$ и $L_{T^*}^{-1}$ связаны соотношением*

$$L_{T^*}^{-1} f = P L_T^{-1} P f \tag{2.2}$$

В силу обратимости операторов $L_T$ и $L_{T^*}$ на всем $L_2(\Omega)$ для доказательства леммы 2.1 достаточно применить оператор $L_{T^*}$ к обеим частям равенства (2.2).

Отметим, что формулировку леммы 2.1 авторам впервые сообщил академик АН РК М. Отелбаев.

**Т е о р е м а 2.1.** *Пусть область $\Omega$ симметрична относительно оси $x = 0$. Тогда корневые векторы оператора $L_T$ (задачи Трикоми) полны в $L_2(\Omega)$.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о**. Предположим противное, что система корневых векторов $\{u_n\}$ оператора $L_T$ не полна в $L_2(\Omega)$. Тогда согласно теореме 1.2 следы $\{u_n|_{BC}\}$ не полны в $L_2(BC)$, т.е. существует функция $\Psi(y) \in L_2(y_c, 0)$, где $y_c$ — ордината точки $C(0, y_c)$ такая, что

$$\int\limits_{BC} \Psi(y) u_n(y) dy = \int\limits_{y_c}^{0} \Psi(y) u_n(y) dy = 0. \tag{2.3}$$

Легко проверить, что решение $v(x, y)$ сопряженной задачи Трикоми

$$Lv = -sgny v_{xx} - v_{yy} = 0, v|_{\sigma} = 0, v|_{BC} = \psi \tag{2.4}$$

в силу соотношения

$$(Lv, u_n)_0 - (v, Lu_n)_0 = \int\limits_{BC} \Psi(y) u_n(y) dy \tag{2.5}$$

ортогонально ко всем $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$, т.е. удовлетворяет тождеству

$$(v, u_n)_0 = 0, n = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Точно также убеждаемся в том, что четная часть функции $v(x, y)$, определяемая формулой

$$v^+(x, y) = \frac{v(x, y) + Pv(x, y)}{2} = \frac{v(x, y) + v(-x, y)}{2}, \tag{2.7}$$

тоже является ортогональной ко всем $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$.

Из-за выполнения необходимого условия ортогональности следующая сопряженная задача Трикоми:

$$Lv - \lambda v = 0, v|_{BC} = \int\limits_0^y \Psi(t)dt \tag{2.8}$$

разрешима при любом комплексном $\lambda$ и ее решение ортогонально всем $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому четная часть $v(x,y)$, определяемая формулой

$$v^+(x,y) = \frac{v(x,y) + v(-x,y)}{2}, \tag{2.9}$$

удовлетворяет соотношениям

$$Lv^+ - \lambda v^+ = 0, v^+|_{AC} = \int\limits_0^y \Psi(t)dt, v^+|_{BC} = \int\limits_0^y \Psi(t)dt. \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует

$$Jm(Lv^+, v^+)_0 = \lambda_2(v^+, v^+)_0 = \int\limits_{BC} \Psi(y) \int\limits_0^y \Psi(t)dtdy, \; \lambda_2 = Jm\lambda. \tag{2.11}$$

Из hfdtycndf (2.11) нетрудно показать неравенство

$$\|v^+\|_0 \leq \frac{c\|\Psi\|_0}{| \; Jm\lambda \; |}. \tag{2.12}$$

Отсюда в силу произвольности $\lambda$ следует $v^+(x,y) \equiv 0$, что противоречит предположению $\Psi(y) \neq 0$. Теорема 2.1 доказана.

Авторы благодарят академика РАН В.А.Ильина, академика АН РК М.Отелбаева за ценные советы.

## Цитированная литература

1. **Бицадзе А.В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.

2. **Кальменов Т.Ш.** // Дифф. уравнения. 1977. Т.15, №.8. С.14–18, С.14–25.

3. **Моисеев Е.И.** Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.

4. **Пономарев С.М.** Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе. Автореферат докторской диссертации. М., МГУ. 1981.

5. **Келдыш М.В.** // Успехи матем. наук. 1971. Т.26., № 4. С. 1–41.

6. **Кальменов Т.Ш.** О регулярности краевых задач и спектре для уравнения гиперболического и смешанного типов. Автореферат докторской диссертации. М., МГУ. 1982.

7. **Кальменов Т.Ш., Бименов М.А.** // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С.339–343.

8. **Ильин В.А.** // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 5, № 6. С.13–14, С.13–20.

9. **Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Роговой А.В.** //Вычислительные технологии. 2004. Т.9. Спец. выпуск. С.25–30.

*Поступила в редакцию 28.09.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 49 — 55*

*УДК 532.526*

# ТЕЧЕНИЯ СИСТЕМЫ СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЙ В СПУТНОМ ПОТОКЕ

А. Ж. Найманова

Институт математики Министерства образования и науки
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

Приведены результаты численного исследования распространения системы круглых сверхзвуковых струй в спутном потоке. Исходными являются параболизованные уравнения Навье-Стокса. Исследовано влияние числа Маха потока на характеристики течения.

Истечение сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой (дозвуковой) поток вызывает образование сложной структуры течения с распространяющимися скачками уплотнения. Исследованию этого явления посвящено значительное число экспериментальных работ [1,2]. Теоретически рассмотрено истечение сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток. Основной трудностью теоретического изучения истечения сверхзвуковой струи с дозвуковыми областями является то, что исходные уравнения Навье–Стокса в сверхзвуковых областях являются гиперболо–параболическими, а в дозвуковых областях — эллиптическая. Эти проблемы ограничивают возможность эффективного использования методов численного анализа. На основе разработанного ранее автором [3] метода численно изучено истечение системы трехмерных сверхзвуковых струй в спутный сверхзвуковой (дозвуковой) поток.

**Постановка задачи.** Рассматривается истечение системы пространственных сверхзвуковых турбулентных струй из круглого сопла (рис.1) в спутный сверхзвуковой (дозвуковой) поток. Принимается, что струи и спутный поток распространяются вдоль оси $x$, а оси $y$ и $z$ перпендикулярны к потоку. Струи расположены симметрично как вдоль горизонтали, так и по вертикали. Так как система струй периодически повторяющаяся, то можно выделить квадрат со стороной $L$, ограниченный плоскостями симметрии струи и потока, и рассматривать решение задачи в этой заштрихованной области, заменив отброшенную часть условиями симметрии.

Во всей области течения газ считается совершенным, вязким, а режим течения — турбулентным.

Для описания рассматриваемого течения используются параболизованные уравнения Навье–Стокса (ПУНС), которые получаются из полных уравнений Навье–Стокса путем

Keywords: *Mach number, supersonic jet, subsonic flow, Mach-Disk, pressure*
2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

отбрасывания несущественных вязких членов — вторых производных по продольной координате [4]

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \left(\vec{F} - \vec{F}_v\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\vec{G} - \vec{G}_v\right)}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Здесь векторы $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$, $\vec{F}_v, \vec{G}_v$ задаются следующими выражениями:

$$\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p)\ u \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)\ v \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)\, w \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{F_v} = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y)^T\,,$$
$$\overrightarrow{G_v} = (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z)^T\,,$$

$$p = (\gamma - 1)\ \left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2\right)\right], \quad c_v = \frac{1}{\gamma\,(\gamma - 1)\, M_a^2},$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v}\right)\ \left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2\right)\right].$$

Система уравнений (1) записана в безразмерной консервативной форме. В качестве безразмерных параметров приняты характеристики на срезе сопла $\rho_0,\ u_0,\ T_0$, при этом для полной энергии $E_t \sim \rho_0 u_0^2$, давления $p \sim \rho_0 u_0^2$.

Здесь $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ — отношение удельных теплоемкостей, $c_p$, $c_v$ — теплоемкости при постоянных давлении и объеме, $M_a$ — число Маха струи.

В системе (1) тензоры напряжения турбулентного трения представляются в следующем виде: $\tau = \mu_t \left(\partial \vec{U} / \partial y\right)$, здесь $\mu_t$ — коэффициент турбулентной вязкости, который определяется с помощью известной алгебраической модели Болдуина–Ломакса [4]

$$\mu_t = I^k \rho l^2 |\Omega|,$$

где завихренность $|\Omega| = \sqrt{\Omega \cdot \Omega} = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$,

$$\Omega = rot\,\vec{V}, \quad \vec{V} = (u,\ v,\ w)\,, \quad \Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Длина перемешивания $l$ определяется следующим образом

$$l = (u_{max} - u_{min}) \Big/ \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{max}.$$

Ограничивающий множитель $I^k$ определяется выражением

$$I^k = \frac{1}{kRe \cdot (1 - 0.0025x)}, \quad k = const.$$

Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид
в начальном сечении при $x = 0$:

- в струе $u = 1$ , $T = 1$ , $\rho = 1$, $\upsilon = w = 0$,
- в потоке $T = 1$, $u = \frac{M_a}{M_\infty}\sqrt{T}$, $p = \frac{1}{\gamma n M_a^2}$, $\upsilon = w = 0$;

при $x > 0$ задаются условия симметрии:

$$\upsilon = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } \quad y = 0\,, L,$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } \quad z = 0\,, L\,.$$

Для численного решения системы уравнений (1) используется метод решения, ранее разработанный автором и приведенный в работе [3], который позволяет единым образом проводить расчеты как сверхзвуковых, так и дозвуковых областей.

Поскольку детальное описание этого метода применительно к задаче распространения системы сверхзвуковых струй эллиптической конфигурации изложено в [3], приведем лишь методику решения.

1. Определяются промежуточные величины потоков относительно $\vec{E}^*$ трехшаговой схемой Уорминга–Катлера–Ломакса.

2. Производится вычисление векторов $\vec{U} = [\rho,\, \rho u,\, \rho\upsilon,\, \rho w,\, E_t]^T$ в сверхзвуковой и дозвуковой областях по способу [3].

3. Окончательное значение вектора $\vec{U}$, т.е. вычисление диффузионного обмена производится с помощью матричной прогонки.

Для подавления осцилляций в решении вектор потока $\vec{U}^{n+1}$ сглаживается явным образом, как в работе [5]. Коэффициент искусственной вязкости $\mu_i$ для направления $y$ при этом имеет вид

$$\mu_i = \in_i \left| \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}} \right|.$$

Константа $\in_i$ варьировалась в таком же диапазоне, как и в работе [5] $(0 \leq \in_i \leq 0.3)$ с максимумом на стыке сверхзвуковой и дозвуковой областей.

**А н а л и з   р е з у л ь т а т о в.** Численные исследования проведены со следующими параметрами: $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.71$, $1 \leq M_a \leq 3$, $0.05 \leq M_\infty \leq 7$, $1 \leq n \leq 10$. В процессе счета шаг по маршевой координате варьировался в диапазоне $\Delta\, x = 0.0035 \div 0.005$, в поперечных направлениях $\Delta\, y = \Delta\, z = 0.1 \div 0.15$.

Влияние числа Маха спутного потока изучено экспериментально, теоретически этот вопрос не рассматривался. Экспериментально Авдуевским и др. [1] установлены особенности истечения системы сверхзвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток для $M_\infty \leq 2$ и $M_\infty > 2$. Основная отличительная особенность состоит в том, что структура сверхзвуковой струи для $M_\infty \leq 2$ аналогична затопленной, т.е. граница струи имеет бочкообразную форму и около оси струи на участке торможения появляется прямой скачок уплотнения, получивший название диска Маха, за которым скорость течения становится дозвуковой. На рис.2-4 приведены результаты численных экспериментов влияния числа Маха потока на картину взаимодействия системы струй для парметров $M_a = 3$, $n = 10$, $T_0 = T_\infty = 1$. Из графиков изобар и их 3-мерного вида в сечениях $x$ для $M_\infty = 2$(рис.2A) и $M_\infty = 7$ (рис.2B) видно, что скорость распространения ударных волн при меньших числах Маха потока существенно больше: так, например, при

$M_\infty = 2$ ударная волна в сечении $x = 12.7$ (рис.2А,в) достигает оси компоновки, в то время, как при $M_\infty = 7$ (рис.2В,в) она по-прежнему распространяется в сторону спутного потока.

Численные эксперименты показывают, что при $M_\infty = 2$ граница струи имеет бочкообразную форму, которая отчетливо видна из линии изомах (рис.3а) и изолинии завихренности (рис.3б). Для $M_\infty = 7$, как следует из рисунка 3в,г, граница струи практически линейно возрастает с увеличением расстояния от среза сопла.

Следует отметить, что в численном эксперименте диск Маха для $M_\infty = 2$ не наблюдается, скорость потока во всем поле течений является сверхзвуковой. Дальнейшее уменьшение входных чисел Маха струи и потока приводит к тому, что диск Маха обнаруживается при следующих параметрах: $M_a = 1.35$, $M_\infty = 0.05$, $n = 2$, $T_0 = T_\infty = 1$ (рис.4).

Также проведено сравнение численных результатов с экспериментальными данными при истечении сверхзвуковой струи в дозвуковой поток. Получено удовлетворительное согласование между расчетом и опытными данными.

Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают, что требуется дальнейшее изучение (теоретическое и экспериментальное) особенностей течения при $M_\infty \leq 2$ для установления точных условий образования дисков Маха.

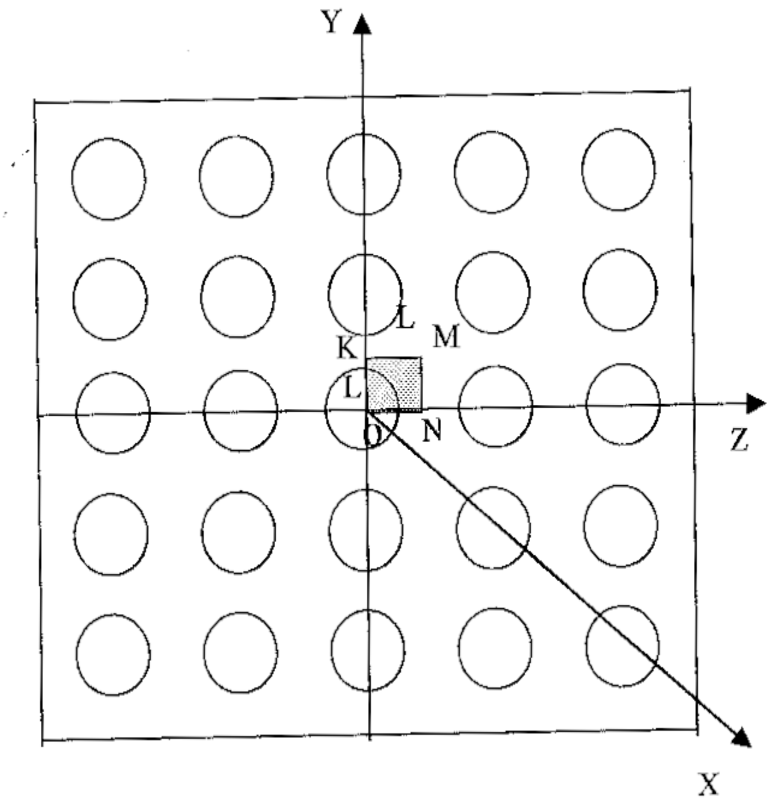


Рис. 1: Схема течения

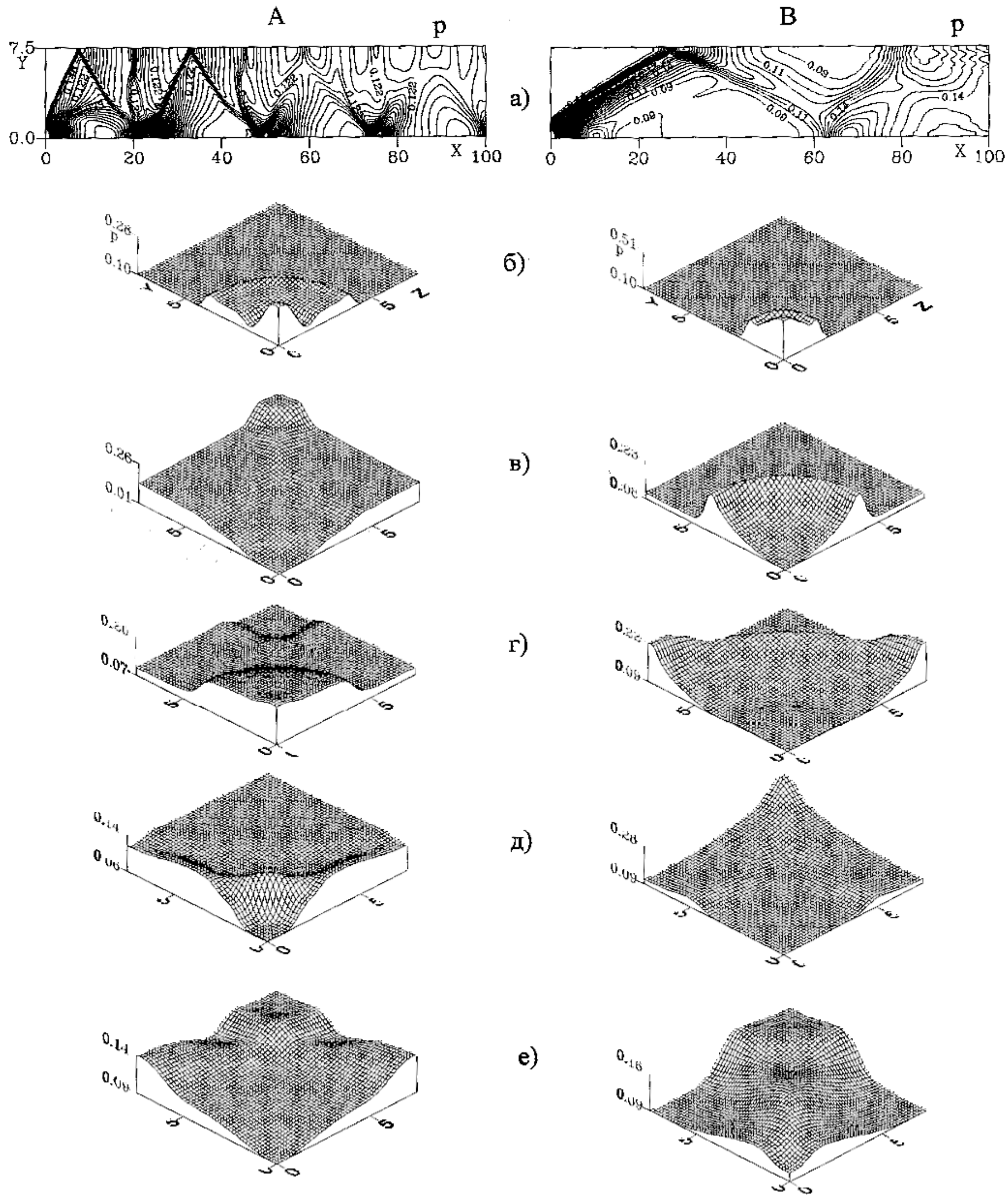

Рис. 2: а) изобары в плоскости XOY; профили давления в сечениях: б) $x = 3.2$, в) 12.7, г) 28.7, д) 44.6, е) 60.5;

А. $M_\infty = 2$; В. $M_\infty = 7$

$M_a = 3, \quad n = 10, \quad T_0 = T_\infty = 1$

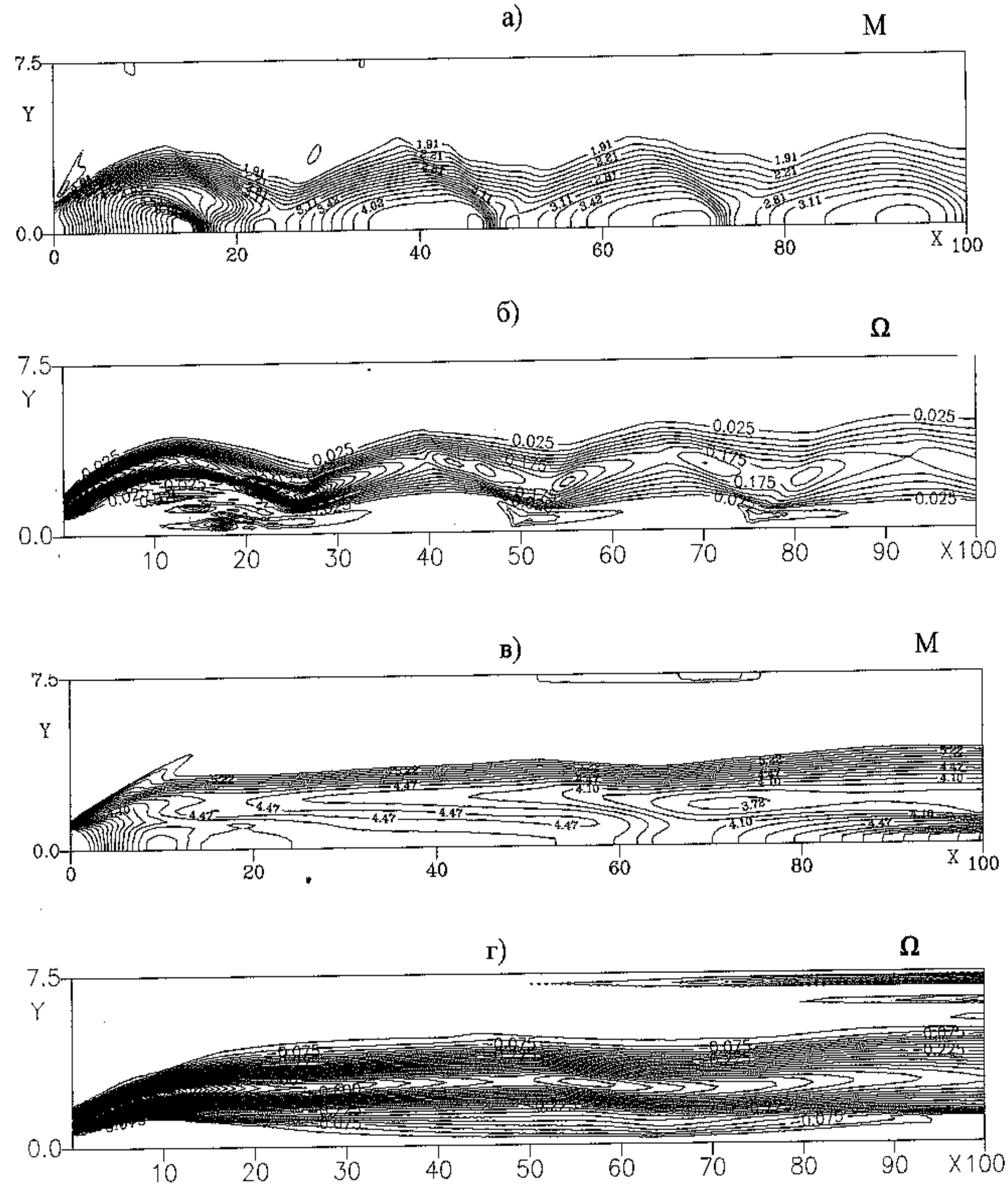


Рис. 3: а), в)Изомахи; б), г)изолинии завихренности в плоскости XOY;
а), б) $M_\infty = 2$, в), г) $M_\infty = 7$
$M_a = 3,\ n = 10,\ T_0 = T_\infty = 1$

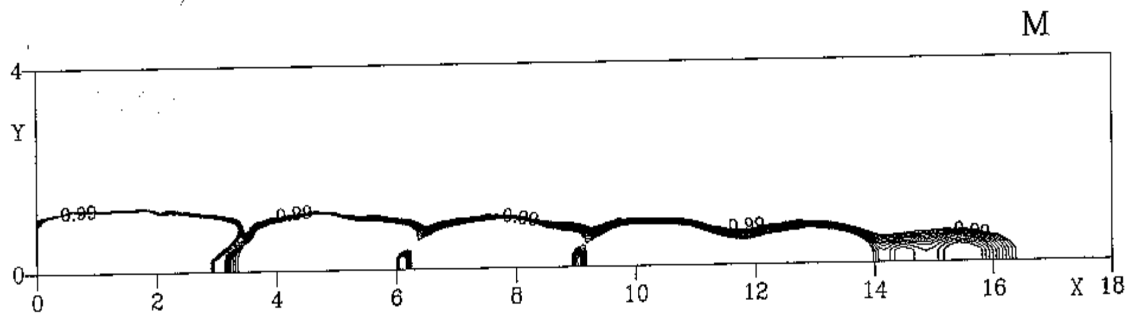


Рис. 4: $M_a = 1.35, \quad M_\infty = 0.05, \quad n = 2, \quad T_0 = T_\infty = 1$

## Цитированная литература

1. **Авдуевский В.С., Иванов А.В., Карпман И.М., Трасковский В.Д., Юделович М.Я.** // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа. 1972. № 3. С.15–29.

2. **Авдуевский В.С., Иванов А.В., Карпман И.М., Трасковский В.Д., Юделович М.Я.** //Известия АН СССР, Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С.63–69.

3. **Ершин Ш.А., Макашева А.П., Найманова А.Ж.** //Доклады НАН РК. Алматы, 2001. № 6. С.16–25.

4. **Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1,2. М., 1990.

5. **Синха Н. Д., Дэш С.М.** //Аэрокосмическая техника. 1988. № 7. С.48–60.

*Поступила в редакцию 10.11.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 56 – 63*

*УДК 517.926*

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Д. Н. Нургабыл

Жезказганский университет им. О.А. Байконурова
477000 г.Жезказган пр.Алашахана,1-б

В работе доказывается теорема об асимптотических оценках решения и его производных. Определены начальные скачки.

Многие прикладные задачи описываются дифференциальными уравнениями, содержащими параметры. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих неизвестные параметры, рассматривались в работах [1–5]. В этих работах по известной структуре дифференциального уравнения и по дополнительной информации решается задача восстановления правой части дифференциального уравнения. Сингулярно возмущенные краевые задачи, обладающие явлениями начального скачка, рассматривались в работах [6–8], в которых для построения асимптотики решения краевой задачи заранее постулируется рост производной от искомого решения при стремлении малого параметра к нулю.

Однако для построения асимптотических решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач [9] возникает вопрос об определении характера роста производных искомого решения при стремлении малого параметра к нулю. Такие случаи характерны для задач химической кинетики. При определенных условиях возникает явление начального скачка концентрации реагента при выходе вследствие большой скорости реакции, что является важным обстоятельством, учитываемым при прогнозировании реакции.

Следовательно, возникает вопрос о выделении класса сингулярно возмущенных краевых задач с параметром, обладающих явлением начального скачка. Именно это и является целью настоящей работы.

**1. Постановка задачи.** Пусть $R = (-\infty\,;\ +\infty)$, $T = [\,0, 1\,]$, $\lambda \in R$. Рассмотрим уравнение

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} A_k(t) y^{(n-k)} = \lambda\, h(t), \quad t \in (0,1) \tag{1}$$

Keywords: *asymptotic evaluations, singularly perturbed boundary value problem with parameter*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B08

с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
&y^{(m_j)}(0,\varepsilon)=a_j,\quad j=\overline{1,p},\qquad y^{(r_j)}(1,\varepsilon)=b_j,\quad j=\overline{1,l},\quad p+l=n,\\
&\alpha_0 y(0,\varepsilon)+\alpha_1 y'(0,\varepsilon)+...+\alpha_m y^{(m)}(0,\varepsilon)=a,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, $n>1$, $\alpha_j$, $\beta_j$, $a_j$, $b_j$, $a\in R$, $\lambda\in R$. Краевые условия (2) упорядочены относительно параметров $m_j$, $r_j$, $m$ так, что $m_1>m$, $n-1>m_1>...>m_p$, $n-1>r_1>...>r_l$.

Потребуем выполнения следующих условий.

$1^0$. Пусть $A_i(t)\in C^{n-1}(T)$, $i=\overline{1,n}$, $h(t)\in C^1(T)$;

$2^0$. Пусть функция $A_1(t)$ удовлетворяет неравенству

$$A_1(t)\geq\gamma>0,\quad t\in T,$$

где $\gamma$ — независящая от $t$ и $\varepsilon$ постоянная.

В настоящей работе, используя модификацию конструктивного метода [10] построения решения линейных задач для достаточно малых $\varepsilon>0$, доказаны существование и единственность пары $(y(t,\lambda(\varepsilon),\varepsilon);\ \lambda(\varepsilon))$ — решения задачи (1), (2); получены асимптотические оценки $y(t,\lambda(\varepsilon),\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ и разности между решениями вырожденной и исходной задач; установлен характер роста производных искомого решения; выделен класс краевых задач (1), (2), обладающих явлением начального скачка; определены начальные скачки.

**2. Построение вспомогательных функций.** Выпишем однородное невозмущенное уравнение

$$L_0\bar y=0,\tag{3}$$

соответствующее уравнению (1). Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\dots$, $u_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (3) и $\overline{W}(t)$ — ее вронскиан.

Рассмотрим однородное уравнение

$$L_\varepsilon y=0,\tag{4}$$

соответствующее уравнению (1). Известно [11], [12, с.30], что при достаточно малых $\varepsilon>0$ уравнение (4) имеет фундаментальную систему решений

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ ...,\ y_n(t,\varepsilon),\tag{5}$$

достаточно гладких, удовлетворяющих на $[0,1]$ соотношениям

$$y_i^{(q)}(t,\varepsilon)=u_i^{(q)}(t)+O(\varepsilon),\qquad i=1,...,n-1;\quad q=0,1,...n-1,\tag{6}$$

$$y_n^{(q)}(t,s)=\frac{1}{\varepsilon^q}\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu(x)dx\right)\cdot(\,u_n(t)\mu^q(t)+O(\varepsilon)\,),\qquad q=0,1,...n-1,$$

где $\mu(t)=-A_1(t)$; $u_n(t)=(A_1(0)/A_1(t))^{n-1}\exp\left(\int\limits_0^t(A_2(x)/A_1(x))\,dx\right)$. Построение функций $u_i(t)$, $i=1,...,n$ проводится с помощью обычного алгоритма (см., например, [9]).

Составим определитель Вронского $W(t,\varepsilon)$ фундаментальной системы решений (5). С учетом (6) для $W(t,\varepsilon)$ в первом приближении получим

$$W(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\bar W(t)\cdot u_n(t)\cdot\mu^{n-1}(t)\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu(x)dx\right)(1+O(\varepsilon))\neq0.\tag{7}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$K(t,s,\varepsilon) = P(t,s,\varepsilon)/W(s,\varepsilon), \qquad 0 \le t, s \le 1, \tag{8}$$

где $P(t,s,\varepsilon)$ — определитель $n$-го порядка, получаемый из $W(s,\varepsilon)$ заменой $n$-ой строки строкой (5). Очевидно, функция $K(t,s,\varepsilon)$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений (5) уравнения (4). Из (8) следует, что $K(t,s,\varepsilon)$, как функция переменной $t$, удовлетворяют уравнению (4) и условиям

$$K(s,s,\varepsilon) = 0, \;\; K_t'(s,s,\varepsilon) = 0, ..., \;\; K_t^{(n-2)}(s,s,\varepsilon) = 0, \quad K_t^{(n-1)}(s,s,\varepsilon) = 1. \tag{9}$$

Решение задачи (4), (9) называется функцией Коши уравнения (4).

Рассмотрим $K_t^{(q)}(t,s,\varepsilon)$. Раскладываем $P_t^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ по элементам $n$-го столбца. Тогда в первом приближении для $K_t^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ получим

$$\begin{gathered} K_t^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon \left( \overline{K}_t^{(q)}(t,s) + \frac{\varepsilon^{n-2}}{\varepsilon^q} \frac{u_n(t)\mu^q(t)}{u_n(s)\mu^{n-1}(s)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(x)dx} + \right. \\ \left. + O\left( \varepsilon + \varepsilon^{n-1-q} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(x)dx} \right) \right) \text{ при } 0 \le s \le t \le 1, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\overline{K}_t^{(q)}(t,s) = \overline{P}_t^{(q)}(t,s) \Big/ \overline{W}(s)\, A_1(s), \quad 0 \le t, s \le 1, \tag{11}$$

$\overline{P}(t,s)$ — определитель $n-1$-го порядка, который получается из $\overline{W}(s)$ заменой $n-1$ строки строкой $u_1(t), \ldots, u_{n-2}(t), u_{n-1}(t)$. Очевидно, функция $\overline{K}(t,s)$ по переменной $t$ удовлетворяет уравнению (3) и условиям

$$\overline{K}(s,s) = 0, \quad \bar{K'}_t(s,s) = 0, \; \ldots, \; \bar{K}_t^{(n-3)}(s,s) = 0, \quad \bar{K}_t^{(n-2)}(s,s) = 1/A_1(s). \tag{12}$$

Следовательно, функция $\overline{K}(t,s)$ представляет собою функцию Коши вырожденного уравнения

$$L_0 \bar{y} = \lambda\, h(t), \tag{13}$$

соответствующего уравнению (1).

Отмеченные результаты сформулируем в виде следующей леммы.

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия $1^0$–$2^0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon$ для функции $K(t,s,\varepsilon)$ и ее производных справедливы следующие оценки*

$$\left| K_t^{(q)}(t,s,\varepsilon) \right| \le C\varepsilon \left( 1 + \varepsilon^{n-q-2} \exp\left( -\frac{\nu(t-s)}{\varepsilon} \right) \right), \; s \le t, \quad q = 0, ..., n-1,$$

*где $C > 0$ и $\nu > 0$ — независящие от $t$ и $\varepsilon$ постоянные.*

Введем определитель $n$-го порядка $J(\varepsilon) = \det \| \delta_{ij} \|$, элементы которого составлены на основе фундаментальной системы решений (5) и краевых условий (2) и имеют вид $\delta_{ij} = y_j^{(m_i)}(0,\varepsilon)$ при $\quad i = \overline{1,p},\, j = \overline{1,n}, \quad \delta_{ij} = y_j^{(m_i)}(0,\varepsilon)$ при $\quad j = \overline{1,n},\, i = \overline{1,l}$.

Исследуем асимптотическое представление $J(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. С этой целью подставим (6) в $J(\varepsilon)$. Тогда определитель $J(\varepsilon)$ в первом приближении представим в виде $J(\varepsilon) = (-1)^{1+n} \frac{1}{\varepsilon^{m_1}} \cdot$ $\cdot\, u_n(0)\mu^{m_1}(0) \left( \bar{J}_{1n} + O(\varepsilon) \right)$, где $\bar{J}_{1n} = \det \| c_{ij} \|$ — определитель $n-1$-го порядка с элементами $c_{ij} = u_j^{(m_i)}(0)$ при $j = \overline{1,\, n-1}\,,\; i = \overline{2,p}; \quad c_{ij} = u_j^{(r_i)}(1)$ при $j = \overline{1, n-1},\, i = \overline{1,l}$.

$3^0$. Пусть $\overline{J}_{1n} \neq 0$.

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$J(\varepsilon) \neq 0. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_k(t,\varepsilon) = J_k(t,\varepsilon)/J(\varepsilon), \qquad k = 1\,, ..., \, n, \tag{15}$$

где $J_k(t,\varepsilon)$ — определитель, полученный из $J(\varepsilon)$ заменой $k$ строки строкой (5). Очевидно, функция $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = 1\,, ..., \, n$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений (5) уравнения (4).

Непосредственно из (15) можно установить, что функции $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = 1, ..., \, n$ удовлетворяют уравнению (4) и краевым условиям

$$\begin{gathered}\Phi_k^{(m_i)}(0,\varepsilon) = 1, \quad k = i, \; i = \overline{1,p}; \quad \Phi_k^{(m_i)}(0,\varepsilon) = 0, \quad k \neq i, \quad k = \overline{1,\, n}, \; i = \overline{1,p}, \\ \Phi_k^{(r_i)}(1,\varepsilon) = 1, \; k = p+i, \; i = \overline{1,l}; \;\; \Phi_k^{(r_i)}(1,\varepsilon) = 0, \; k \neq p+i, \; k = \overline{1,\, n}, \; i = \overline{1,l}.\end{gathered} \tag{16}$$

Решения $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = 1, ..., n$ задач (4), (16) назовем граничными функциями возмущенной задачи (1), (2).

Рассмотрим $\Phi_k^{(q)}(t,\varepsilon) = J_k^{(q)}(t,\varepsilon) \Big/ J(\varepsilon), \quad k = 1, ..., n, \quad q = 0, 1, ..., n-1.$

Разложим $J_k^{(q)}(t,\varepsilon)$ по элементам $n$-го столбца. Тогда с учетом (6) и (14) при достаточно малых $\varepsilon$ получим

$$\begin{gathered}\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{m_1}}{\varepsilon^q} \cdot \frac{u_n(t)\mu^q(t)}{u_n(0)\mu^{m_1}(0)} \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu(x)dx\right) + \\ +O\left(\varepsilon^{m_1-m_2+1} + \varepsilon^{m_n+1-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu(x)dx\right)\right), \quad t \in T, \;\; q = 0, 1, ..., n-1, \\ \Phi_k^{(q)}(t,\varepsilon) = \overline{\Phi}_{k-1}^{(q)}(t) + (-1)^{k+1}\frac{u_n(t)\mu^q(t)}{u_n(0)\mu^{m_1}(0)}\frac{\varepsilon^{m_1}}{\varepsilon^q}\frac{\overline{J}_{kn}}{\overline{J}_{1n}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu(x)dx\right) + \\ +O\left(\varepsilon + \varepsilon^{m_1+1-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu(x)dx\right)\right), \; t \in T, \quad k = 2, ..., n, \quad q = 0, 1, ..., n-1,\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\overline{\Phi}_{k-1}^{(q)}(t) = \overline{J}_{1n\,k-1}^{(q)}(t) \Big/ \overline{J}_{1n}, \qquad k = 2, ..., n, \quad q = 0, 1, ..., n-1, \tag{18}$$

$\overline{J}_{1n\,k-1}^{(q)}(t)$ — определитель $n-1$-го порядка, получаемый из $\overline{J}_{1n}$ заменой $k-1$-й строки строкой $u_1^{(q)}(t)$, $u_2^{(q)}(t)$, $\ldots$, $u_{n-1}^{(q)}(t)$, $\overline{J}_{kn}$ получается из $\overline{J}$ вычеркиванием $k$-ой строки и $n$-го столбца.

Ясно, что функции $\bar{\Phi}_i\,(t)\,,\; i = 1, ..., n$, определяемые по формуле (18) удовлетворяют однородному уравнению (3) и условиям

$$\begin{aligned} &\overline{\Phi}_k^{(m_i)}(0) = 1, && k = i-1, \; i = \overline{2,p}, \\ &\overline{\Phi}_k^{(m_i)}(0) = 0, && k \neq i-1, \quad k = \overline{1,\, n}-1\,, \; i = \overline{2,p}, \\ &\overline{\Phi}_k^{(r_i)}(1) = 1, && k = p-1+i, \; i = \overline{1,l}, \\ &\overline{\Phi}_k^{(r_i)}(1) = 0, && k \neq p-1+i, \quad k = \overline{1,\, n-1}\,, \; i = \overline{1,l}. \end{aligned} \tag{19}$$

Следовательно, $\overline{\Phi}_i(t)$, $i = 1, ..., n$ являются граничными функциями невозмущенной задачи для уравнения (13).

Из формул (17), (18) в силу условия $2^0$ следует справедливость следующего утверждения.

**Лемма 2.** *Если выполнены условия $1^0$–$3^0$, то при достаточно малых $\varepsilon$ для граничных функций $\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)$ при $0 \le t \le 1$ справедливы неравенства*

$$\left|\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C \cdot \left(1 + \varepsilon^{m_1 - q} \exp\left(-\frac{\nu\, t}{\varepsilon}\right)\right), \quad i = 2, ..., n, \ \ q = 0, 1, ..., n-1,$$

$$\left|\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C \cdot \varepsilon^{m_1 - q} \cdot \exp\left(-\frac{\nu\, t}{\varepsilon}\right), \quad q = 0, 1, ..., n-1,$$

*где $C > 0$ и $\nu > 0$ — некоторые постоянные, независящие от $t$ и $\varepsilon$.*

**3. Построение решений и их оценка.** Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(t,\lambda,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} c_i \Phi_i(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{l} c_{p+i}\Phi_{p+i}(t.\varepsilon) + \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)h(s)ds, \tag{20}$$

где $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k = 1, ..., n$ — граничные функции, $K\,(t,s,\varepsilon)$ — функция Коши, $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ — неизвестные постоянные, $\lambda$ — искомый параметр. Легко убедиться, что функция $y(t,\lambda,\varepsilon)$, определяемая по формуле (20), тождественно удовлетворяет уравнению (1). Подставляя (20) в краевые условия (2) и принимая во внимание (16), получим систему линейных уравнений относительно $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$, $\lambda$

$$c_i = a_i, \qquad i = 1\,, ..., p, \tag{21}$$

$$c_{p+i} = b_i - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^1 K_t^{(r_i)}(1,s,\varepsilon)h(s)ds, \qquad i = 1, ..., l, \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\lambda\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 K_t^{(r_i)}(1,s.\varepsilon)h(s)ds\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon) = \\ = \sum_{i=1}^{p} a_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\Phi_i^{(j)}(0,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{l} b_i\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon) - a.\end{gathered} \tag{23}$$

Исследуем в (23) коэффициент при $\lambda$ и правую часть этого уравнения как функцию от $\varepsilon$. Тогда с учетом (10), (17) получим

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 K_t^{(r_i)}(1,s.\varepsilon)h(s)ds\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon) = \\ = \sum_{i=1}^{l}\int_0^1 \overline{K}_t^{(r_i)}(1,s)h(s)ds\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\bar{\Phi}_{p+i-1}^{(j)}(0) + O(\varepsilon),\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{p} a_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\Phi_i^{(j)}(0,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{l} b_i\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon) = \\ = \sum_{i=2}^{p} a_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\bar{\Phi}_{i-1}^{(j)}(0) + \sum_{i=1}^{l} b_i\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\overline{\Phi}_{p+i-1}^{(j)}(0) + O(\varepsilon).\end{gathered} \tag{25}$$

$4^0$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{l}\int_0^1 \bar{K}_t^{(r_i)}(1,s)h(s)ds\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\bar{\Phi}_{p+i-1}^{(j)}(0)\neq 0. \tag{26}$$

Тогда, при достаточно малых $\varepsilon>0$

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\Phi_i^{(j)}(0,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{l}b_i\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon)\neq 0. \tag{27}$$

Поэтому при достаточно малых $\varepsilon$ уравнение (23) однозначно разрешимо в виде

$$\lambda=\widetilde{\lambda}(\varepsilon)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j\Phi_i^{(j)}(0,\varepsilon)+\sum\limits_{i=1}^{l}b_i\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon)-a}{\sum\limits_{i=1}^{l}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1 K_t^{(r_i)}(1,s.\varepsilon)h(s)ds\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j\Phi_{p+i}^{(j)}(0,\varepsilon)}, \tag{28}$$

причем для него будет справедливо

$$\widetilde{\lambda}(\varepsilon)=\lambda_0+O(\varepsilon), \tag{29}$$

где

$$\lambda_0=\frac{\sum\limits_{i=2}^{p}a_i\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j\bar{\Phi}_{i-1}^{(j)}(0)+\sum\limits_{i=1}^{l}b_i\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j\bar{\Phi}_{p+i-1}^{(j)}(0)-a}{\sum\limits_{i=1}^{l}\int\limits_0^1 \bar{K}_t^{(r_i)}(1,s)h(s)ds\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j\bar{\Phi}_{p+i-1}^{(j)}(0)}. \tag{30}$$

Теперь, подставляя (28) в (2), однозначно определим

$$c_{p+i}=b_i-\frac{\widetilde{\lambda}(\varepsilon)}{\varepsilon}\int_0^1 K_t^{(r_i)}(1,s,\varepsilon)h(s)ds,\quad i=1,...,l. \tag{31}$$

Используя (21), (28), (31), из (20) получим представление решения задачи (1), (2)

$$\begin{gathered}y(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p}a_i\Phi_i(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{l}b_i\Phi_{p+i}(t.\varepsilon)-\\ -\sum_{i=1}^{l}\Phi_{p+i}(t,\varepsilon)\frac{\tilde{\lambda}}{\varepsilon}\int_0^1 K_t^{(r_i)}(1,s.\varepsilon)h(s)ds+\frac{\tilde{\lambda}}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)h(s)ds.\end{gathered} \tag{32}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия $1^0$–$4^0$. Тогда при малых $\varepsilon>0$ в достаточно малой окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ найдется единственное значение $\lambda=\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ такое, что пара $\left(y\left(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon\right),\widetilde{\lambda}(\varepsilon)\right)$ является единственным решением краевой задачи (1), (2), где $y\left(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon\right)$ выражается формулой (32), а $\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ — формулой (28).*

Рассмотрим далее вырожденное уравнение (13). Сравнивая граничные функции возмущенной задачи (1), (2) и граничные функции искомой невозмущенной задачи для уравнения (13), заключаем, что краевые условия для решения вырожденного уравнения (13) можно получить из (2) путем исключения первого условия

$$\begin{gathered}\bar{y}^{(m_j)}(0) = a_j, \quad j = \overline{2,p}, \qquad \bar{y}^{(r_j)}(1) = b_j, \;\; j = \overline{1,l}, \\ \alpha_0 \bar{y}(0) + \alpha_1 \bar{y}'(0) + ... + \alpha_m \bar{y}^{(m)}(0) = a.\end{gathered} \tag{33}$$

По аналогии с теоремой 1 устанавливается

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия $1^0$–$4^0$. Тогда пара $(\bar{y}(t,\lambda_0), \lambda_0)$ является единственным решением неоднородной краевой задачи (13), (33), где $\lambda_0$ выражается формулой (30), а $\bar{y}(t,\lambda_0)$ — формулой*

$$\begin{gathered}\bar{y}(t,\lambda_0) = \sum_{i=2}^{p} a_i \overline{\Phi}_{i-1}(t) + \sum_{i=1}^{l} b_i \overline{\Phi}_{p+i-1}(t) - \\ -\lambda_0 \sum_{i=1}^{l} \overline{\Phi}_{p+i-1}(t) \int_0^1 \overline{K}_t^{(r_i)}(1,s) h(s) ds + \lambda_0 \int_0^t \overline{K}(t,s) h(s) ds.\end{gathered} \tag{34}$$

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия $1^0$–$4^0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для решения $y(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) и его производных на отрезке $0 \le t \le 1$ справедлива следующая оценка*

$$\left| y^{(q)}(t,\varepsilon) \right| \le C \left( \sum_{i=2}^{p} |a_i| + \sum_{i=1}^{l} |b_i| + |\lambda_0| \max_{0 \le t \le 1} |h(t)| + \varepsilon + \varepsilon^{m_1 - q} \exp\left( -\frac{\gamma t}{\varepsilon} \right) \right), \; q = \overline{1, n-1}. \tag{35}$$

Справедливость оценок (35) непосредственно следует из (32) и лемм 1, 2.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия $1^0$–$4^0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на отрезке $0 \le t \le 1$ справедлива следующая оценка*

$$\left| y^{(q)}(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon) - \bar{y}^{(q)}(t,\lambda_0) \right| \le C \left( \varepsilon + \varepsilon^{m_1 - q} \exp\left( -\frac{\gamma\, t}{\varepsilon} \right) \right), \quad q = \overline{0, n-1}, \tag{36}$$

*где $y(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)$ — решение задачи (1),(2), $\bar{y}(t,\lambda_0)$ — решение задачи (13), (33).*

**Доказательство.** Введем функцию $u(t,\varepsilon) = y^{(q)}(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon) - \bar{y}^{(q)}(t,\lambda_0)$. Подставляя функцию $y(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)$ в задачу (1), (2), получаем задачу

$$L_\varepsilon u = F(t,\varepsilon), \quad u^{(m_1)}(0,\varepsilon) = a_1 - \bar{y}^{(m_1)}(0),$$

$$u^{(m_i)}(0,\varepsilon) = 0, \; i = \overline{2,p}, \;\; u^{(r_i)}(1,\varepsilon) = 0, \; i = \overline{1,l}, \; \sum_{i=0}^{m} \alpha_i u^{(i)}(0,\varepsilon) = 0, \tag{37}$$

где $F(t,\varepsilon) = (\lambda - \lambda_0) h(t) - \varepsilon \bar{y}^{(n)} = O(\varepsilon)$. Применяя теорему 3 к краевой задаче (37), получим оценку (36).

Таким образом, из теоремы 4 непосредственно следует, что решение $y(t,\tilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)$ задачи (1), (2) при стремлении малого параметра $\varepsilon$ к нулю стремится к решению $\bar{y}(t,\lambda_0)$ вырожденной задачи (13), (33), т.е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 \le t \le 1 \text{ при } \quad q < m_1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon)=\bar{y}^{(q)}(t), \quad 0<t\le 1 \text{ при } \quad m_1\le q\le n-1, \tag{38}$$

Заметим, что предельные переходы (38) не являются равномерными в окрестности точки $t=0$. Для выяснения характера роста производных решения задачи (1), (2) в окрестности точки $t=0$ воспользуемся формулой (32). Из (32) с учетом (10), (17), (34) получим следующее асимптотическое представление

$$y^{(q)}(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)=\bar{y}^{(q)}(t,\lambda_0)+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{\varepsilon^{m_1}}{\varepsilon^q}\frac{u_n(t)\mu^q(t)}{u_n(0)\mu^{m_1}(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)(D_0-\lambda_0D_1)+$$

$$+\lambda_0\frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^q}\left(-\frac{h\left(t\right)\cdot\mu^q\left(t\right)}{\mu^n\left(t\right)}+h\left(0\right)\cdot\frac{u_n\left(t\right)\cdot\mu^q\left(t\right)}{u_n\left(0\right)\mu^n\left(0\right)}\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx}+O\left(\varepsilon\right)\right), \tag{39}$$

где $q=0,1,...,n-1$; $D_0$ — определитель $n$-го порядка, полученный из $\overline{J}$ заменой элементов $n$-го столбца столбцом $[a_1,...,a_p,b_1,...,b_l]$, $D_1$ — определитель, полученный из $\overline{J}$ заменой элементов $n$-го столбца столбцом $\underbrace{0,...,0}_{p}$, $d_1$, ..., $d_l$, $d_i=\int\limits_0^1 h(s)\overline{K}^{(r_i)}(1,s)ds.$

$5^0$. Пусть $D_0-\lambda_0D_1\ne 0$.

Тогда из (39) получим

$$y^{(m_1)}(0,\tilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)=\bar{y}^{(m_1)}(0,\lambda_0+D_0-\lambda_0D_1+O(\varepsilon);$$

$$[y^{(m_1+j)}(0,\tilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)=\frac{\mu^j(0)}{\varepsilon^j}\left(D_0-\lambda_0D_1+O(\varepsilon)\right), \quad j=1,...,\ n-1-m_1.$$

В этом случае будем говорить, что задача (1), (2) обладает явлением начального скачка $m_1$-го порядка в точке $t=0$. Это означает, что $y^{(m_1)}(t,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)$ в пределе при $\varepsilon\to 0$ имеет скачок, равный $\Delta=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y^{(m_1)}(0,\widetilde{\lambda}(\varepsilon),\varepsilon)-\bar{y}^{(m_1)}(0,\lambda_0)=D_0-\lambda_0D_1$.

## Цитированная литература


1. **Hikosaka-Nobory** //Proc. Phys. Math. Soc., Japan. 1929. V.3, № 2. P. 73—83.
2. **Takahaschi S.** // Tohoku Math. Journal. 1931. V. 34. P.249—256.
3. **Zwirner G** .// Rend. Sem. Mat. Padovo. 1946. V.15. P.33—39.
4. **КибенкоА.В., Перов А.М.** // Докл. АН УССР. 1961. № 10. С.1259—1265.
5. **Джумабаев Д.С** .// Изв. МН и ВО РК. НАН РК. Сер. физ.-мат.наук. 1999. № 1. С.31—37.
6. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** // ДАН СССР. 1960. Т.132, № 6. С.1242—1245.
7. **Касымов К.А.** // ДАН СССР. 1968. Т.179, № 2. С.275—278.
8. **Жакупов Ж.Н** .// Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 5. С.42—49.
9. **Нургабыл Д.Н.** // Вестник Кирг. Гос. Нац. Унив. 2001. Сер.3, вып.6. С.173—177.
10. **Абильдаев Е.А., Касымов К.А.** // Дифф. уравн. 1992. Т.28, № 10. С.1659—1668.
11. **Разумейко.** // Дифференц. уравнения. 1970. Т.6, № 8. С.1366—1377.
12. **Ломов С. А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.


*Поступила в редакцию 25.09.2003 г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 64 – 74*

*УДК 517.956*

# ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. Т. Орумбаева

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина,125 anar@math.kz

Предлагается двухпараметрическое семейство алгоритмов нахождения решения полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи, одновременно обеспечивающие сходимость алгоритмов.

На $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u = (u_1, ..., u_n)$ $(n \times n)$ — матрицы $A(x,t), B(x,t)$, $n$-мерный вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, $n$-мерный вектор-функция $\psi(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$.

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \qquad \|A(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|.$$

Краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами [1–5]. В работе [6] более общая нелокальная задача исследовалась методом введения функциональных параметров. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи в терминах коэффициентов и предложен алгоритм нахождения ее решения.

Keywords: *system of hyperbolic equation, semi periodical boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

В настоящей работе путем введения новой функции задача (1)–(3) сведена к задаче, состоящей из семейства периодических краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального соотношения. Предложен алгоритм нахождения решения задачи, состоящей из семейства периодических краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального соотношения, где в отличие от ранее предложенных алгоритмов нет необходимости нахождения решения задачи Коши на каждом шаге алгоритма.

Пусть $C(J, R^n)$ — множество непрерывных на $J$ ($J \subset R^1$ или $J \subset R^2$) функций $u : J \to R^n$. Функция $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in$ $\in C(\overline{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}$ и на характеристике $x = 0$ принимает заданные значения $\psi(t)$, $t \in [0,T]$, на характеристиках $t = 0$, $t = T$ имеет равные значения при всех $x \in [0, \omega]$.

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ и задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + B(x,t)u(x,t) + f(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$v(x,0) = v(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi, \qquad t \in [0,T], \quad x \in [0,\omega]. \tag{6}$$

Здесь мы свели задачу нахождения решения полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального соотношения. Задачи (1)–(3) и (4)–(6) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $(v(x,t), u(x,t))$ будет решением задачи (4)–(6) и, наоборот, если пара $(\widehat{v}(x,t), \widehat{u}(x,t))$ — решение задачи (4)–(6), то $\widehat{u}(x,t)$ — решение задачи (1)–(3).

Для решения задачи (4)–(6) применяется метод параметризации.

По шагу $h > 0 : Nh = T$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh), N \geq 2$. При этом область $\Omega$ разбивается на $N$ частей. Через $v_r(x,t), u_r(x,t)$ обозначим соответственно сужение функций $v(x,t), u(x,t)$ на $\Omega_r = [0,\omega] \times [(r-1)h, rh)$, $\quad r = \overline{1,N}$.

Тогда задача (4)–(6) будет эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + B(x,t)u_r(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_r, \tag{7}$$

$$v_1(x,0) - \lim_{t \to T-0} v_N(x,t) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{8}$$

$$u_r(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v_r(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$$\lim_{t \to sh-0} v_s(x,t) = v_{s+1}(x,sh), \qquad s = \overline{1,N-1}, \tag{10}$$

где (10) — условие склеивания решения во внутренних линиях разбиения. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t = (r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h)$, и сделаем замену $\widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x)$, $r = \overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\widetilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r(x) + B(x,t)u_r(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_r, \tag{11}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h)=0, \quad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,N}, \tag{12}$$

$$u_r(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x \widetilde{v}_r(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x \lambda_r(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N}, \tag{13}$$

$$\lambda_1(x)-\lambda_N(x)-\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N(x,t)=0, \quad x\in[0,\omega], \tag{14}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\widetilde{v}_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0, \quad x\in[0,\omega], \quad s=\overline{1,N-1}. \tag{15}$$

Задачи (7)–(10) и (11)–(15) эквивалентны в том смысле, что если система пар $\{v_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (7)–(10), то система троек $\{\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h);$ $\widetilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-v_r(x,(r-1)h),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (11)–(15) и, наоборот, если $\{\lambda_r(x),\ \widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, — решение задачи (11)–(15), то пара $\{\lambda_r(x)+\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}, r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (7)–(10).

Задача (11),(12) при фиксированных $\lambda(x),u_r(x,t)$ является семейством задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x\in[0,\omega]$. Оно эквивалентно интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau)d\tau\cdot\lambda_r(x)+\int\limits_{(r-1)h}^t [B(x,\tau)u_r(x,\tau)+f(x,\tau)]d\tau. \tag{16}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(x,\tau)$ подставим соответствующую правую часть (16) и, повторив этот процесс $\nu$ ($\nu=1,2,...$) раз, получим

$$\widetilde{v}_r(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r(x)+F_{\nu r}(x,t,u_r)+G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r), \quad r=\overline{1,N}, \tag{17}$$

где

$$D_{\nu r}(x,t)=\sum_{j=0}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau_1)d\tau_1...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(x,\tau_{j+1})d\tau_{j+1}...d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(x,t,u_r)=\int\limits_{(r-1)h}^t \big[B(x,\tau_1)u_r(x,\tau_1)+f(x,\tau_1)\big]d\tau_1+$$

$$+\sum_{j=0}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(x,\tau_j)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j}\big[B(x,\tau_{j+1})u_r(x,\tau_{j+1})+f(x,\tau_{j+1})\big]d\tau_{j+1}d\tau_j...d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r)=\int\limits_{(r-1)h}^t A(x,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$\tau_0=t, r=\overline{1,N}.$$

Переходя к пределу при $t\to rh-0$ в уравнении (17), имеем

$$\lim_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r(x,t)=D_{\nu r}(x,rh)\lambda_r(x)+F_{\nu r}(x,rh,u_r)+G_{\nu r}(x,rh,\widetilde{v}_r), \quad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,N}.$$

Подставляя в (14),(15) вместо $\lim\limits_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r(x,t)$, $\quad r=\overline{1,N}$, соответствующие им правые части и умножая обе части уравнения (14) на $h>0$, для неизвестных функций $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$, получим систему функциональных уравнений:

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x)=-F_\nu(x,h,u)-G_\nu(x,h,\widetilde{v}), \tag{18}$$

где

$$Q_\nu(x,h)=\begin{vmatrix} hI & 0 & \dots & 0 & -h[I+D_{\nu N}(x,Nh)] \\ I+D_{\nu 1}(x,h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(x,2h) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu,N-1}(x,(N-1)h) & -I \end{vmatrix},$$

$$F_\nu(x,h,u)=(-hF_{\nu N}(x,Nh,u_N),F_{\nu 1}(x,h,u_1),...,F_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,u_{N-1})),$$

$$G_\nu(x,h,\widetilde{v})=(-hG_{\nu N}(x,Nh,\widetilde{v}_N),G_{\nu 1}(x,h,\widetilde{v}_1),...,G_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,\widetilde{v}_{N-1})).$$

Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}, r=\overline{1,N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (18),(17) и (13). Функции $\lambda_r(x)$, $\widetilde{v}_r(x,t)$, $u_r(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, находим как пределы соответствующих последовательностей $\{\lambda_r{}^{(k)}(x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\}$, $\{u_r{}^{(k)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, при $k\to\infty$, определяемые по следующему алгоритму.

**Шаг 0.** Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18), где $u_r(x,t)=\psi(t),\widetilde{v}_r(x,t)=0$, находим $\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),...,\lambda_N^{(0)}(x))'$, т.е.

$$\lambda^{(0)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,\psi)+G_\nu(x,h,0)\big\}.$$

Используя уравнение (17), при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$ найдем функции $\{\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$,

$$\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(0)}(x)+F_{\nu r}(x,t,\psi)+G_{\nu r}(x,t,0).$$

Функции $u_r^{(0)}(x,t),r=\overline{1,N}$, определяются из соотношений

$$u_r^{(0)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x\widetilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r.$$

**Шаг 1.** Учитывая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при $x\in[0,\omega]$, функцию $\lambda^{(1)}(x)=$ $=(\lambda_1^{(1)}(x),\lambda_2^{(1)}(x),...,\lambda_N^{(1)}(x))'$ определяем как решение системы уравнений (18), где $u_r(x,t)=$ $=u_r^{(0)}(x,t)$, $\quad\widetilde{v}_r(x,t)=\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, $\quad r=\overline{1,N}$, т.е.

$$\lambda^{(1)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\Big\{F_\nu(x,h,u^{(0)})+G_\nu(x,h,\widetilde{v}^{(0)})\Big\}.$$

Вновь используя уравнение (17) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\{\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$,

$$\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(1)}(x)+F_{\nu r}(x,t,u_r^{(0)})+G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r^{(0)}).$$

Функции $u_r^{(1)}(x,t),r=\overline{1,N}$, определим из соотношений

$$u_r^{(1)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x\widetilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r.$$

Продолжая процесс, на $k$-м шаге получаем систему трех функций $\{\lambda_r^{(k)}(x), \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t), u_r^{(k)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$.

Условия следующего утверждения обеспечивают равномерную относительно $(x,t)\in\Omega_r, r = =\overline{1,N}$, сходимость предложенного алгоритма к решению краевой задачи с неизвестными функциями (11)–(15).

**Теорема 1.** *Пусть при некоторых $h>0: Nh=T, N=2,3,...$ и $\nu,\nu\in\mathbb{N}$, $(nN\times nN)$ — матрица $Q_\nu(x,h)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются неравенства*
*а) $\|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\|\le\gamma_\nu(x,h)$;*
*б) $q_\nu(x,h)=\dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\displaystyle\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\le\mu<1$,*
*где $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|, \quad \mu-const$.*

*Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(3).*

**Доказательство.** При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|F_\nu(x,h,u)\|\le h\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\big[\beta(x)\|u_r(x,t)\|+\|f(x,t)\|\big],$$

где $\beta(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|B(x,t)\|$,

$$\|G_\nu(x,h,\widetilde{v})\|\le\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r(x,t)\|,$$

$$\|D_{\nu r}(x,rh)\|\le\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1.$$

Из нулевого и первого шагов алгоритма вытекают следующие оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\|\le\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}[\beta(x)\|\psi((t)\|+\|f(x,t)\|],$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\le\max_{r=\overline{1,N}}\|D_{\nu r}(h,x)\|\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(0)}(x)\|+$$
$$+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F_{\nu r}(h,x,\psi(t))\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|G_{\nu r}(h,x,0)\|\le$$
$$\le\left[\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1\right]\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\|+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\big[\beta(x)\|\psi((t)\|+\|f(x,t)\|\big],$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\|\le\int\limits_0^x\big[\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\|\big]d\xi,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(1)}(x)-\lambda_r{}^{(0)}(x)\|\le\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\times$$

$$\times\left[h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\|+\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{(\nu!)}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\right],$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\leq\max_{r=\overline{1,N}}\|D_{\nu r}(x,rh)\|\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F_{\nu r}(x,rh,u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t))\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|G_{\nu r}(x,rh,\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t))\|\leq\left[\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1\right]\max_{r=\overline{1,N}}\|{\lambda_r}^{(1)}(x)-{\lambda_r}^{(0)}(x)\|+$$

$$+h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\beta(x)[\|u_r^{(0)}(x,t)-\psi(t)\|]+\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|.$$

Для систем разностей ${\lambda_r}^{(k+1)}(x)-{\lambda_r}^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)$, $u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, $k=0,1,2,...$ справедливы оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|{\lambda_r}^{(k+1)}(x)-{\lambda_r}^{(k)}(x)\|\leq$$

$$\leq\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\left[h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\|+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|\right],\tag{19}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|\leq\max_{r=\overline{1,N}}\|D_{\nu r}(x,rh)\|\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(k+1)}(x)-\lambda_r^{(k)}(x)\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F_{\nu r}(x,rh,u_r^{(k)}-u_r^{(k-1)})\|+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|G_{\nu r}(x,rh,\widetilde{v}_r^{(k)}-\widetilde{v}_r^{(k-1)})\|\leq$$

$$\leq\left\{1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\left[\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1\right]\right\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\|+\left\{1+\right.$$

$$\left.+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\left[\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1\right]\right\}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|,\tag{20}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\|\leq\int\limits_0^x\sigma^{(k+1)}(\xi)d\xi,$$

где $\sigma^{(k+1)}(x)=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|{\lambda_r}^{(k+1)}(x)-{\lambda_r}^{(k)}(x)\|.$

Суммируя соответственно левые и правые части неравенств (19),(20), имеем

$$\sigma^{(k+1)}(x)\leq\left\{\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)+\right.$$

$$+\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1\right\}\right]h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\right\}\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\|+$$

$$+\left\{\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}-1\right\}\right]\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right\}\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\int_0^x\sigma^{(k)}(\xi)d\xi+\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\Bigg[1+$$

$$+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\Bigg]\sigma^{(k)}(x)\leq\rho(x)\int_0^x\sigma^{(k)}(\xi)d\xi+q_\nu(x,h)\sigma^{(k)}(x),\qquad(21)$$

где $\rho(x)=h\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\beta(x)\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]$.

Для функции $\sigma^{(k+1)}(x)$ на основе (21) установим неравенство

$$\sigma^{(k+1)}(x)\leq\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!j!}\cdot\mu^{k-j}\cdot\frac{1}{j!}\left(\max_{x\in[0,\omega]}\rho(x)\right)^j\cdot\max_{x\in[0,\omega]}\sigma^{(1)}(x)\leq$$

$$\leq\mu^k\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!j!}\cdot\frac{1}{j!}\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\mu}\right)^j\cdot\widetilde{\sigma},\qquad(22)$$

где $\widetilde{\rho}=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\rho(x),\widetilde{\sigma}=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\sigma^{(1)}(x)$. Так как $\mu\in(0,1)$, то, выбрав число $\theta\in(0,(1-\mu)/\mu)$, из $\lim\limits_{k\to\infty}(\widetilde{\rho}/(\theta\mu))^k/k!=0$ согласно предельному соотношению п. $6^0$ $[7,c.327]$ имеем

$$z_k=\frac{1}{(1+\theta)^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!j!}\theta^j\frac{1}{j!}\left(\frac{\widetilde{\rho}}{\theta\mu}\right)^j\to0\quad\text{при}\quad k\to\infty.$$

Тогда существует число $d>0$, ограничивающее последовательность $z_k$, и из (22) получим основную оценку $\sigma^{(k+1)}(x)\leq\mu^k(1+\theta)^k\cdot z_k\cdot\widetilde{\sigma}\leq\mu_1^k\cdot d\cdot\widetilde{\sigma}$, где $\mu_1=\mu(1+\theta)<1$. Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma^{(k+1)}(x)$ при $x\in[0,\omega]$, обеспечивающая равномерную сходимость последовательностей ${\lambda_r}^{(k)}(x)$ к непрерывной на $x\in[0,\omega]$ функции ${\lambda_r}^*(x)$ при всех $r=\overline{1,N}$. Из (17),(13) следует равномерная относительно $(x,t)\in\Omega_r$ сходимость последовательностей $\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t),u_r^{(k)}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, соответственно к функциям $\widetilde{v}_r^*(x,t),u_r^*(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, принадлежащим $C(\Omega_r,R^n)$. Очевидно, что функция $v^*(x,t)=\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, и функция $u^*(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x v^*(\xi,t)d\xi$ принадлежат $C(\overline{\Omega},R^n)$ и являются решением задачи (4)–(6). Таким образом, функция $u^*(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3).

Докажем единственность решения задачи (1)–(3). Пусть существуют два классических решения $u^*(x,t),u^{**}(x,t)$. В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(6) существуют пары $(v^*(x,t), u^*(x,t))$, $(v^{**}(x,t), u^{**}(x,t))$, которые являются решениями задачи (4)–(6). Тогда соответствующие им системы $(\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(x,t), u_r^*(x,t))$, $(\lambda_r^{**}(x)+\widetilde{v}_r^{**}(x,t), u_r^{**}(x,t))$, $r=\overline{1,N}$, будут решениями краевой задачи (11)–(15). Аналогично соотношению (21) для разностей $\lambda_r{}^*(x)-\lambda_r{}^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)$, $u_r^*(x,t)-u_r^{**}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ получим

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^*(x)-\lambda_r{}^{**}(x)\|\equiv\sigma^*(x)\le\rho(x)\int_0^x\sigma^*(\xi)d\xi+\mu\sigma^*(x),$$

отсюда $\sigma^*(x)\le\dfrac{\rho(x)}{1-\mu}\displaystyle\int_0^x\sigma^{(*}(\xi)d\xi$. С помощью неравенства Беллмана-Гронуолла имеем $\sigma^*(x)=0$. Откуда вытекает, что $\lambda_r{}^*(x)=\lambda_r{}^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(x,t)=\widetilde{v}_r^{**}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$. Из неравенства

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{u}_r^*(x,t)-\widetilde{u}_r^{**}(x,t)\|\le$$

$$\le\int_0^x\left[\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(\xi,t)-\widetilde{v}_r^{**}(\xi,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^*(\xi)-\lambda_r{}^{**}(\xi)\|\right]d\xi$$

получим $\widetilde{u}_r^*(x,t)=\widetilde{u}_r^{**}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3).

**Определение 1.** *Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, непрерывной на $[0,T]$ функции $\psi(t)$ она имеет единственное классическое решение $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ и справедливо неравенство*

$$\max\left\{\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|u(x,t)\|,\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\left\|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\|\right\}\le K_1\max\{\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|\},$$

*где $K_1-const$, не зависящая от $f(x,t),\psi(t)$.*

Из теоремы 3 [8,с.2248] следует, что краевая задача (1)-(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима периодическая краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(x,t)v+F(x,t),\qquad (x,t)\in\overline{\Omega},\tag{23}$$

$$v(x,0)=v(x,T),\qquad x\in[0,\omega].\tag{24}$$

Функция $v(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, имеющая непрерывную производную, называется решением задачи (23),(24), если она удовлетворяет системе (23) и периодическому условию (24).

**Определение 2.** *Краевая задача (23),(24) называется корректно разрешимой, если для любого $F(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ она имеет единственное решение и справедливо неравенство*

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|v(x,t)\|\le K_2\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|F(x,t)\|,\tag{25}$$

*где $K_2-const$, не зависящая от $F(x,t)$.*

Пусть $v^*(x,t)$ — решение задачи (23),(24). Тогда а) пара $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*(x,[t]))$ с компонентами $\lambda_r^*(x) = \widetilde{v}^*(x,(r-1)h), \widetilde{v}_r^*(x,t) = v^*(x,t) - v^*(x,(r-1)h), \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}$, будет решением задачи

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)\widetilde{v}_r + A(x,t)\lambda_r(x) + F(x,t), \quad \widetilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{26}$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t \to T-0} \widetilde{v}_N(x,t) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{27}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \to sh-0} \widetilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1, N-1}; \tag{28}$$

б) существуют такие числа $\chi_1, \chi_2 > 0$, что $\|\lambda_r^*(x)\| \leq \chi_1, \|\widetilde{v}_r^*(x,t)\| \leq \chi_2, \quad (x,t) \in \Omega_r, r = \overline{1,N}$;
в) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\widetilde{v}_r^*(x,t) = D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^*(x) + \widetilde{F}_{\nu r}(x,t) + G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r^*), \quad r = \overline{1,N}, \tag{29}$$

$$Q_\nu(x,h)\lambda^*(x) = -\widetilde{F}_\nu(x,h) - G_\nu(x,h,\widetilde{v}^*). \tag{30}$$

Так как $\|G_{\nu r}(x,h,\widetilde{v}^*)\| \leq \dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\chi_2$ и $D_{\nu r}(x,t), \widetilde{F}_{\nu r}(x,t)$ при $\nu \to \infty$ на $\Omega_r$ равномерно сходятся к

$$D_{*r}(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1 \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(x,\tau_{j+1})d\tau_{j+1}\ldots d\tau_1,$$

$$\widetilde{F}_{*r}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(x,\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)\ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(x,\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} F(x,\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j\ldots d\tau_1, \quad \tau_0 = t, r = \overline{1,N},$$

то переходя к пределу при $\nu \to \infty$ в (29),(30) и разделив обе части (30) на $h > 0$, получим

$$\widetilde{v}_r^*(x,t) = D_{*r}(x,t)\lambda_r^*(x) + \widetilde{F}_{*r}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{31}$$

$$\frac{1}{h}Q_*(x,h)\lambda^*(x) = -\widetilde{F}_*(A,F,x,h), \quad x \in [0,\omega], \tag{32}$$

где $\widetilde{F}_*(A,F,x,h) = (-\widetilde{F}_{*N}(x,Nh), \frac{1}{h}\widetilde{F}_{*1}(x,h), \ldots, \frac{1}{h}\widetilde{F}_{*,N-1}(x,(N-1)h))$.

Таким образом, если $v^*(x,t)$ — решение задачи (23),(24) при $F(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, то $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \ldots, \lambda_N^*(x))' \in C([0,\omega], R^{nN})$ будет решением уравнения (32).

**Т е о р е м а 2.** *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых $h > 0 : Nh = T, N = 2,3,\ldots$, и $\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, $(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(x,h)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При выполнении условий корректная разрешимость задачи (1)–(3) следует из теоремы 1.

Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Тогда по теореме 3 [8,с.2248] задача (23),(24) корректно разрешима с константой $K_2$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{h}Q_*(x,h)\lambda(x) = b(x), \quad b(x), \lambda(x) \in C([0,\omega], R^{nN}). \tag{33}$$

Число $h > 0$ выберем удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{(\overline{\alpha}h)}[e^{\overline{\alpha}h} - 1 - \overline{\alpha}h] \leq \frac{1}{6},$$

где $\overline{\alpha} = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|A(x,t)\|$. Теперь для всех $b(x) \in C([0,\omega], R^{nN})$ на основе леммы [9,с.57] можно построить функцию $F_b(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, обладающую свойствами:

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|F_b(x,t)\| \leq 3 \max_{x\in[0,\omega]} \|b(x)\|,$$

$$\widetilde{F}_*(A, F_b, x, h) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h F_b(x,t)dt + \frac{1}{h}\int\limits_0^h A(x,t)\int\limits_0^t F_b(x,\tau)d\tau dt +$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^h A(x,t)\int\limits_0^t A(x,\tau)\int\limits_0^\tau F(x,\tau_1)d\tau_1 d\tau dt + ... = b(x), \quad x \in [0,\omega].$$

По предположению задача (23),(24) имеет решение при любом $F(x,t)$. Поэтому уравнение

$$\frac{1}{h}Q_*(x,h)\lambda(x) = -\widetilde{F}_*(A, F_b, x, h), \tag{34}$$

как показано выше, для любого $F_b$ имеет решение $\lambda_b(x) \in C\big([0,\omega], R^{nN}\big)$:

$$\frac{1}{h}Q_*(x,h)\lambda_b(x) = -\widetilde{F}_*(A, F_b, x, h). \tag{35}$$

Отсюда, учитывая равенство $-\widetilde{F}_*(A, F_b, x, h) = b(x)$, получаем, что уравнение (33) имеет решение $\lambda_b(x) \in C\big([0,\omega], R^{nN}\big)$ при всех $b(x) \in C\big([0,\omega], R^{nN}\big)$ и справедлива оценка

$$\max_{x\in[0,\omega]} \|\lambda_b(x)\| \leq \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|v_b(x,t)\| \leq K_2 \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|F_b(x,t)\| \leq 3K_2 \max_{x\in[0,\omega]} \|b(x)\|,$$

т.е. оператор $\frac{1}{h}Q_*(\cdot,h) : C\big([0,\omega], R^{nN}\big) \to C\big([0,\omega], R^{nN}\big)$ имеет правый обратный и

$$\left\|\left[\frac{1}{h}Q_*(\cdot,h)\right]_r^{-1}\right\|_{L(C([0,\omega],R^{nN}))} \leq 3K_2,$$

где $L(C([0,\omega], R^{nN}))$ — пространство линейных ограниченных операторов $L : C([0,\omega], R^{nN}) \to$ $\to C([0,\omega], R^{nN})$. Тогда в силу соотношений $\left[\frac{1}{h}Q_*(x,h)\right]_r^{-1} = h[Q_*(x,h)]_r^{-1}$ имеем

$$\|[Q_*(\cdot,h)]_r^{-1}\|_{L(C([0,\omega],R^{nN}))} \leq \frac{3K_2}{h}.$$

Так как при любом фиксированном $\overline{x} \in [0,\omega]$ уравнение $\frac{1}{h}Q_*(\overline{x},h)\lambda = b$ имеет решение $\lambda_b =$ $= \lambda_b(\overline{x})$ для любого $b \in R^{nN}$, то матрица $Q_*(\overline{x},h)$ обратима и $[Q_*(x,h)]_r^{-1} = [Q_*(x,h)]^{-1}$ для любого $x \in [0,\omega]$ и $\|[Q_*(x,h)]^{-1}\| = \|[Q_*(x,h)]_r^{-1}\| \leq \dfrac{3K_2}{h}$.

Принимая во внимание неравенство

$$\|Q_*(x,h) - Q_\nu(x,h)\| \leq \max\{1,h\}\left(e^{\overline{\alpha}h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\overline{\alpha}h)^j}{j!}\right)$$

и используя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов, найдем $\overline{\nu}$ такое, что $\dfrac{3K_2}{h}\max\{1,h\}\left(e^{\overline{\alpha}h}-\sum\limits_{j=0}^{\overline{\nu}}\dfrac{(\overline{\alpha}h)^j}{j!}\right)\leq\dfrac{2}{5}$. Тогда матрица $Q_\nu(x,h)$ будет обратимой и выполняются оценки

$$\|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\|\leq\frac{3K_2/h}{1-2/5}=\frac{5K_2}{h},\quad q_\nu(x,h)\leq\frac{(\overline{\alpha}h)^\nu}{\nu!}\left[1+\frac{5K_2}{h}\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\overline{\alpha}h)^j}{j!}\right]\quad\forall\nu\geq\overline{\nu}.$$

Отсюда следует существование $\overline{\overline{\nu}}\geq\overline{\nu}$ такого, что а) $\|[Q_{\overline{\overline{\nu}}}(x,h)]^{-1}\|\leq\dfrac{5K_2}{h}$, б) $q_{\overline{\overline{\nu}}}(x,h)<1$. Теорема 2 доказана.

## Цитированная литература


1. **Cesari L.** //Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Киев. 1963. Т. 2. С. 440–457.

2. **Vejvoda O.** et al. Patrial differential equations: time-periodic solutions. Hague; Boston; London, 1982.

3. **Пташник Б. И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев,1984.

4. **Кигурадзе Т.И.** //Дифференц.уравнения. 1993. Т.23, № 29. С. 281–297.

5. **Митропольский Ю.А., Хома Г.П, Громяк М. И.** Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев, 1991.

6. **Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1673–1685.

7. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 1969.

8. **Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.** //Дифференц.уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 2243–2254.

9. **Джумабаев Д.С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.


*Поступила в редакцию 8.10.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 75 – 80*

*УДК 681.324*

# КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЗАЩИТЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОГНОЗОВ

М. О. Отелбаев, Е. Н. Сейткулов

Казахстанский филиал МГУ им.М.В.Ломоносова
473033 г.Астана ул. Мунайтпасова, 5 erj@mail.ru

В статье рассматривается проблема интерполяции вектор-функции, заданной в некоторых точках, и задача прогнозирования с сохранением секретности некоторых параметров. Такие проблемы возникают в связи с развитием процесса глобализации в экономике, социологии, а также во многих других отраслях.

Традиционные задачи криптографии имеют целью обслуживание тайного обмена информациями. Их изучению посвящены многочисленные монографии и статьи (см., например, [1–10]). В связи с быстрыми темпами развития процесса глобализации возникает новый класс задач, некоторые из которых были рассмотрены в работе [11].

Итак, через $A$ обозначим нашу сторону и будем предполагать, что $A$ не в состоянии собственными силами справиться с задачей из-за отсутствия соответствующих вычислительных средств, а через $C$ обозначим совокупность вычислительных средств, все виды общественной связи и партнера, который может быть противником или же своим (возможно, недобросовестным) сотрудником.

Во многих прикладных задачах требуется по некоторым дискретным данным найти зависимость, отражающую картину в целом. Особенно часто такие проблемы возникают в экономических задачах, например, (см. [11]), построение карты распределения полезных ископаемых на всем участке по известным данным в некоторых точках этого участка. Решая эту задачу с помощью $C$, в наших интересах по экономическим соображениям было обеспечение секретности этих данных и самой карты распределения этих залежей. Часто задачи прикладного характера распадаются на два типа: а) даны значения функции в отдельных точках и требуется доопредлить эту функцию в промежуточных точках (интерполяция) и б) прогнозирование на основе предшествующих данных.

В этой статье, которая является продолжением работы [11], мы занимаемся разработкой шифрования и решения с помощью $C$ задач типа а) и б). В пунктах 2–4 решается задача прогнозирования параметров состояния экономики, если известны несколько предшествовавших значений этих параметров. При этом задача решается с помощью $C$, причем партнеру не

Keywords: *cryptography, information protection*
2000 Mathematics Subject Classification: 94A60

должны быть доступны параметры состояния экономики. С этой задачей тесно связаны задачи интерполяции, одну из которых мы рассмотрим в пункте 1. Хотя статья нацелена на задачи экономического прогнозирования, методы работы могут быть использованы как приемы защиты ряда других задач прогнозирования.

**1.** Рассмотрим следующую задачу интерполяции. Пусть заданы $n+1$ точек на отрезке $[a,b]$ : $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и векторные значения в этих точках: $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$, где $f(x) = (f_1(x), ..., f_k(x))$. Интерполирующую функцию $s(x)$ будем строить в виде кубических кусочных полиномов (сплайнов). Эти построения нам должен проделать $C$, не зная значения векторов $y_0, ..., y_n$. Вектор-функция $s(x)$ должна удовлетворять условиям:

*a*) $s(x) \in C^2[a,b]$,

*b*) $s(x)$ — к-мерный вектор-многочлен степени не выше 3 при $x \in [x_{j-1}, x_j]$,

*c*) $s(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, ..., n$.

Обозначим

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad s_j^i = s^{(i)}(x_j), \quad i = 0,1,2, \quad j = 0,1,...,n.$$

Здесь $s_j^i$ — $i$-ая производная функции $s(x)$ в точке $x_j$. Тогда получаем систему уравнений

$$s_{j-1}^2 \frac{h_j}{6} + s_j^2 \frac{h_j + h_{j+1}}{3} + s_{j+1}^2 \frac{h_{j+1}}{6} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \ \ (j = 1, 2, ..., n-1), \tag{1}$$

относительно $k(n+1)$ неизвестных $s_0^2, s_1^2, ..., s_n^2$. Для однозначного их определения добавим еще 2k уравнений

$$s_0^1 = y_0' = f'(x_0),$$
$$s_n^1 = y_n' = f'(x_n),$$

видоизменив которые, получим

$$\begin{cases} s_0^2 \frac{h_1}{3} + s_1^2 \frac{h_1}{6} = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0', \\ s_{n-1}^2 \frac{h_n}{6} + s_n^2 \frac{h_n}{3} = -\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + y_n'. \end{cases} \tag{2}$$

Объединив (1) и (2), получим алгебраическую систему из $k(n+1)$ уравнений, содержащую $k(n+1)$ незвестных $s_0^2, s_1^2, ..., s_n^2$:

$$\begin{cases} s_{j-1}^2 \frac{h_j}{6} + s_j^2 \frac{h_j + h_{j+1}}{3} + s_{j+1}^2 \frac{h_{j+1}}{6} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \quad j = 1, ..., n-1, \\ s_0^2 \frac{h_1}{3} + s_1^2 \frac{h_1}{6} = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0', \\ s_{n-1}^2 \frac{h_n}{6} + s_n^2 \frac{h_n}{3} = -\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + y_n'. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь секретные данные $y_0, ..., y_n$ наличествуют только в правой части системы. Для того, чтобы найти решение этой системы с помощью $C$, применяем метод, предложенный в [11]. Пусть $L$ — матрица этой системы. Тогда система (3) имеет вид

$$Lv = b,$$

где $v = (s_0^2, s_1^2, ..., s_n^2) - (n+1)k$-мерный неизвестный вектор, $b$ — правая часть системы (3). Пусть элемент $w$ — произвольный вектор, который держим в секрете. Вычислим $Lw$ (предположим, что сами можем это сделать). Обозначим через $g$ вектор

$$g \equiv b - Lw.$$

Теперь $C$ решает уравнение

$$Lz = g.$$

Поскольку $L(v-w) = b - Lw = g$, то искомое решение дается формулой

$$v = z + w.$$

Так как $w$ выбран нами, то из последней формулы получаем $v$. $C$ не может определить $v$, так как он получает одно уравнение с двумя неизвестными. Таким образом, мы нашли $v = (s_0^2, s_1^2, ..., s_n^2)$ и, тем самым, интерполяционную вектор-функцию $s(x)$.

**2. Линейное прогнозирование.** Задача, которую теперь рассмотрим, связана с прогнозированием событий, главным образом, зависящих от показателей последних нескольких единиц времени в зависимости от характера рассматриваемой задачи. Пусть n-1, n-2, n-3,..., n-$l$,... — убывающая последовательность единиц времени и определены соответственно в каждый момент времени вектора $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, ..., b_{n-l}, ...$, где $b_j = (b_{j,1}, ..., b_{j,k})$ — векторный показатель в $j$-ый момент времени. Фиксируем число $l$ как можно большим таким образом, чтобы у нас были все данные с $n-1$ до $n-kl$ моментов времени. Обозначим

$$b(i) = (b_{n-i,1}, ..., b_{n-i,k}, b_{n-i-1,1}, ..., b_{n-i-1,k}, ..., b_{n-i-l+1,1}, ..., b_{n-i-l+1,k}).$$

Длина вектора $b(i)$ равна $kl$. Введем прямоугольную матрицу $X$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,kl} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,kl} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{k,kl} \end{pmatrix}.$$

Матрица $X$ имеет $k$ строк и $kl$ столбцов. Эту матрицу будем искать так, чтобы выполнялись равенства

$$b_{n-i} = X \cdot b(i+1).$$

Данные равенства показывают зависимость вектора $b_r$ от предыдущих $l$ векторов $b_{r-1}, b_{r-2}, b_{r-3}, ..., b_{r-l}$. Поэтому матрицу $X$ назовем прогнозирующей матрицей. Здесь матрица $X$ имеет $k^2 l$ неизвестных элементов, поэтому для их определения нужно составить столько же уравнений

$$b_{n-i} = X \cdot b(i+1), \;\; i = 1, ..., kl. \tag{4}$$

Систему (4) приведем к удобному виду. Обозначая через $x$ вектор длины $k^2 l$

$$x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1,kl}, ..., x_{k1}, x_{k2}, ... x_{k,kl}),$$

перепишем (4) в виде

$$B \cdot x = g, \tag{5}$$

где через $B$ обозначили матрицу системы (4), а через $g$ — свободные члены. Предположим, что определитель матрицы $B$ не равен нулю (см. замечание 1 ниже ниже). Это условие необходимо для однозначной разрешимости системы (5).

Уравнение (5) — линейное и можно было бы использовать известный метод из работы [11], но матрица $B$ имеет в качестве своих элементов секретные данные. Чтобы обойти и эту проблему, возьмем произвольную квадратную невырожденную матрицу $P$ и держим ее в секрете. Умножим слева уравнение (5) на эту матрицу $P$. Тогда получим

$$P \cdot B \cdot x = P \cdot g \equiv f.$$

Произведения $P \cdot B \equiv Y$ и $P \cdot g \equiv f$ вычисляем сами. В результате получим уравнение

$$Yx = f.$$

Чтобы решить последнее уравнение с помощью $C$, можно использовать тот же прием решения для линейных уравнений, описанный в конце пункта 1. Но мы мы покажем еще один способ решения уравнения (5). Пусть $D$ — ортогональная матрица, К — произвольная невырожденная матрица, и их держим в секрете. Перепишем (5) в виде

$$K \cdot B \cdot D^{-1} \cdot D \cdot x = K \cdot g$$

обозначим

$$L = K \cdot B \cdot D^{-1}, \quad f^* = K \cdot g, \quad q = D \cdot x.$$

В результате получим уравнение

$$L \cdot q = f^*.$$

Последнее уравнение мы без изменений отправляем $C$ и он возвращает нам $q$. Так как $C$ не знает матрицы $K$ и $D$ , то он не сможет определить $B$ и $g$. Так как $D$ — ортогональная матрица, то мы $x$ находим по формуле

$$x = D^{-1} \cdot q = D^* \cdot q,$$

где $D^*$ — матрица, сопряженная к $D$.

По вектору $x$ легко восстановить матрицу $X$. Зная матрицу $X$, теперь можно прогнозировать параметры состояния экономики или же другие, сводимые к такой же математической модели, на следующие $n, n+1, n+2$ и т.д единицы времени по рекуррентной формуле

$$b_n = X \cdot b(1),\ b_{n+1} = X \cdot b(0),\ b_{n+2} = X \cdot b(-1),\ b_{n+3} = X \cdot b(-2) \quad \text{и т.д.}$$

**3. Квадратичное прогнозирование.** Можно несколько модифицировать рассмотренную задачу добавлением еще нескольких параметров в вектор $b(i)$. Для этого определим вектор $b(i)$ следующим образом:

$$b(i) = (b_{n-i,1}, ..., b_{n-i,k}, b_{n-i-1,1}, ..., b_{n-i-1,k}, ..., b_{n-i-l+1,1}, ..., b_{n-i-l+1,k}, a_{kl+1,i}, ....a_{C_{kl}^2+kl,i}),$$

где числа $a_{kl+1,i}, ..., a_{C_{kl}^2+kl,i}$ определяются как всевозможные произведения по два элемента из совокупности

$$\{b_{n-i,1}, ..., b_{n-i,k}, b_{n-i-1,1}, ..., b_{n-i-1,k}, ..., b_{n-i-l+1,1}, ..., b_{n-i-l+1,k}\}.$$

Длина вектора $b(i)$ равна $C_{kl}^2 + 2kl$, где $C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$. Например, при $i = 3$ и $k = l = 2$ имеем

$$b_2 = \begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \end{pmatrix}$$

и

$$b(3) = (b_{2,1}, b_{2,2}, b_{1,1}, b_{1,2}, (b_{2,1})^2, (b_{2,2})^2, (b_{1,1})^2, (b_{1,2})^2, b_{2,1}b_{2,2}, b_{2,1}b_{1,1}, b_{2,1}b_{1,2},$$

$$b_{2,2}b_{1,1}, b_{2,2}b_{1,2}, b_{1,1}b_{1,2}).$$

Длина этого вектора $b(3)$ равна $C_{2\cdot 2}^2 + 2\cdot 2\cdot 2 = 14$. Для дальнейшего будет удобно предположить, что квадраты

$$\{(b_{n-i,1})^2, ..., (b_{n-i-l+1,k})^2\}$$

в векторе $b(i)$ находятся сразу после элемента $b_{n-i-l+1,k}$, как в рассмотренном примере при $i = 3$ и $k = l = 2$, а дальше все остальные элементы — в определенной последовательности. Далее ищется матрица $X$, имеющая $k$ строк и $C_{kl}^2 + 2kl$ столбцов, из системы

$$b_{n-i} = X \cdot b(i+1),\ i = 1, ..., C_{kl}^2 + 2kl. \tag{4'}$$

Можно было бы решать систему ($4'$) по той же схеме, что и в предыдущем пункте, приводя ее к удобному виду

$$B\cdot x=g,$$

где $x$ — вектор длины $k(C^2_{kl}+2kl)$.

Однако можно представить систему ($4'$) в ином виде. Для этого обозначим через $x^j$ $(j=1,...,k)$ вектор, составленный из $j$-й строки матрицы $X$

$$x^j=(x_{j,1},...,x_{j,C^2_{kl}+2kl}).$$

Тогда систему ($4'$) можно переписать в следующем виде

$$B_jx^j=g_j,\ \ j=1,...,k. \tag{$5'$}$$

где $B_j$ — квадратная матрица порядка $C^2_{kl}+2kl$. Предположим, как во втором пункте, что все матрицы $B_j$ невырожденны (см. замечание 1).

Решим систему ($5'$) с помощью $C$ при каждом $j=1,...,k$. Сделаем невырожденную линейную замену неизвестных

$$x^j=R_jy^j$$

где $R_j$ — невырожденные матрицы, которые составляем сами и держим в секрете (см. замечание 2).

Вычислим сами $B_j\cdot R_j\equiv T_j$ и методом, изложенным в работе [11], решим уравнение

$$T_j\cdot y^j=g_j$$

при $j=1,...,k$. Теперь находим каждый $x^j$, используя проделанную замену.

**4.** Теперь перейдем к общему случаю. В пунктах 2 и 3 мы искали матрицу $X$, используя вектора $b(i)$ специального вида. Более общо прогнозирующую матрицу $X$ можно искать из системы

$$b_{n-i}=X\cdot b(i+1),\ \ i=1,...,kl+s$$

где вектор $b(i)$ имеет вид

$$b(i)=(b_{n-i,1},...,b_{n-i,k},b_{n-i-1,1},...,b_{n-i-1,k},...,b_{n-i-l+1,1},...,b_{n-i-l+1,k},f_{1,i}(w),...,f_{s,i}(w)),$$

$$w=(b_{n-i,1},...,b_{n-i,k},b_{n-i-1,1},...,b_{n-i-1,k},...,b_{n-i-l+1,1},...,b_{n-i-l+1,k}).$$

Здесь $f_{1,i},...,f_{s,i}$ — функции, зависящие от векторов $b_{n-i},...,b_{n-i-l+1}$. Необходимость добавления таких функций определяются специалистами и экспертами.

**Замечание 1.** В пунктах 2–3 мы предположили, что системы (5) и ($5'$) однозначно разрешимы. Если это условие не выполняется и если предположить существование решения, то $x$ можно искать как вектор, для которого

$$\inf_y|By-g|^2=|Bx-g|^2.$$

Так как при решении системы (5) или ($5'$) мы воспользуемся услугами $C$, скрыв от него матрицы $B$ или $B_j$, то надо умножить систему (5) или ($5'$) на невырожденные матрицы, которые держим в секрете.

**Замечание 2.** При выборе секретных матриц мы считали, что каждый элемент этих матриц недоступен $C$. Однако, можно было бы считать, что некоторые элементы этих матриц известны $C$. Например, в задаче квадратичного прогнозирования (п.3) заметим, что группа чисел $a_{kl+1,i},...,a_{C^2_{kl}+kl,i}$ состоит из попарных произведений секретных данных, первые из которых представляют квадраты $(b_{n-i,1})^2, ..., (b_{n-i-l+1,k})^2$. Если допустим, что отличные от нуля числа $u_1$, $u_2$ — секреты, а $C$ знает их произведение $u_1 * u_2$, то все же определить $u_1$ и $u_2$ он не сможет. Если произведение чисел $u_1$, $u_2$ равно нулю, то $C$ определяет только с вероятностью 0.5, что, по крайней мере, одно из них равно нулю. Используя это обстоятельство, обозначим через $a(i)$ вектор, состоящий из вектора $b(i)$, в котором удалены числа $a_{kl+1,i}, ..., a_{C_{kl}^2+kl,i}$ кроме квадратов $(b_{n-i,1})^2, ..., (b_{n-i-l+1,k})^2$. То есть

$$a(i) = (b_{n-i,1}, ..., b_{n-i,k}, b_{n-i-1,1}, ..., b_{n-i-1,k}, ..., b_{n-i-l+1,1}, ..., b_{n-i-l+1,k}, (b_{n-i,1})^2, ..., (b_{n-i-l+1,k})^2).$$

В системе $(5')$ в матрице $B_j$ каждая строка состоит из одного вектора $b(t)$ при некотором вполне определенном $t$, первые $2kl$ компонентов которых составляют вектор $a(t)$. Остальные элементы матрицы $B_j$ представляют всевозможные попарные произведения секретных данных. Используя этот момент, можно выбрать матрицы $R_j$ так, что некоторые элементы этих матриц считать для $C$ известными.

## Цитированная литература


1. **Диффи У., Хелмэн М.** //ТИИЭР. 1976. Т. 67, № 3. С. 71–109.
2. **Заурбеков С.С., Отелбаев М.** Защита информации и основы криптографии (каз.). Астана, 2003.
3. **Нечаев В.И.** Элементы криптографии. Основы теории защиты. М., 1999.
4. **ГрушоА.А., Тимонина Е.Е.** Теоретические основы защиты информации. М., 1996.
5. **Ю.В.Кузнецов, С.А.Шкарин** "Коды Рида-Маллера (обзор публикации)". М., 1996.
6. **В.М.Сидельников** // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 2., С.3–20.
7. **М.А.Черепнев** // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 3., С.10–15.
8. **Ященко В.В.** Введение в криптографию. С.-П., 2001.
9. **A.Menezes, P. van Oorschot and S. Vanstone** Handbook of Applied Cryptography. CRC Press, 1996.
10. **V.M.Sidelnikov, S.O Shestakov** //Discrete Mathematics and Applications. 1992.
11. **Отелбаев М., Сейткулов Е.Н.** //Мат. журнал. 2004. Т.4, № 2. С. 60–67.


*Поступила в редакцию 26.06.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 81 — 85*

*УДК 517.958*

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Сакабеков

Казахстанско-Британский технический университет
480091 г.Алматы ул.Толе би, 59 K_math@KBTU.KZ

В работе доказаны существование и единственность глобального решения смешанной задачи для одномерной нелинейной СМУ (системы моментных уравнений) Больцмана во втором приближении в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственному переменному.

В этой работе мы изучим смешанную задачу для уравнения Больцмана, записанного в случае плоского слоя, при помощи соответствующей задачи для моментных уравнений. При этом смешанная задача для нелинейной системы моментных уравнений Больцмана сводится к симметрической гиперболической полулинейной системе уравнений с диссипативными граничными условиями.

Известно, что гидродинамического описания недостаточно для многих приложений, например, для описания движения аппарата в разреженных слоях атмосферы, в вакуумной технологии, в плазменных установках и необходимо пользоваться либо кинетическим описанием, либо описанием, выходящим за пределы гидродинамических приближений. Использование кинетического описания требует решения той или иной задачи для уравнения Больцмана. А решение уравнения Больцмана в общем случае означает определение функции распределения, которая зависит от семи независимых переменных и представляет очень трудную задачу. Поэтому здесь представляется естественным пользоваться моментным уравнением, которое является промежуточным между гидродинамическим приближением и приближением, основанным на полном использовании уравнения Больцмана. Следовательно, вопрос существования и единственности решения смешанной задачи для системы линейных уравнений Больцмана является актуальной.

Рассмотрим смешанную задачу для нестационарного нелинейного однородного уравнения Больцмана в плоском слое [1, 2]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+|v|\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}=L\varphi+I(\varphi,\varphi),\qquad (t,x,v)\in(o,T)\times(-a,a)\times R_3, \tag{1}$$

Keywords: *nonlinear system of Boltsmann's moment equations, mixed value problem, global solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35F30

$$\varphi\left(t,x,v\right)|_{t=0}=\varphi_0(x,v),(x,v)\in(-a,a)\times R_3, \tag{2}$$

$$\varphi\left(t,\pm a,v\right)=0,\quad (v,n_{\partial G})<0, \tag{3}$$

где $\varphi(t,x,v)$ — отклонение функции распределения частиц от максвелловского распределения, т.е. функция распределения частиц $f$ и отклонение $\phi$ связаны соотношением $f=f_0(1+\phi)$, $f_0$ — максвелловское распределение; $L$ — одномерный линеаризованный оператор столкновений; $I(\phi,\phi)$ — интеграл столкновений; $\phi_0(x,v)$ — заданная функция (начальное распределение частиц по скоростям); $n_{\partial G}$ — единичный нормальный вектор области $G=(-a,a)$. Задача (1)–(3) изучается в плоском слое $[-a,a]$. Учитывая (3), относительно функции распределения частиц получим следующее граничное условие:

$$f(t,\pm a,v)=f_0(\alpha\,|v|),\quad (v,n_{\partial g})<0,$$

т.е. извне в плоский слой $[-a,a]$ поступает максвелловский поток.

Приближенное решение задачи (1)–(3) построим при помощи моментного метода, который является частным случаем метода Галеркина. В качестве базисных функций берем собственные функции линеаризованного оператора $L$ [1,2]:

$$q_{n\ell}(\alpha)=\left(\frac{\sqrt{\pi}n!(2\ell+1)}{2\Gamma(n+\ell+3/2)}\right)^{1/2}\left(\frac{\alpha|v|}{\sqrt{2}}\right)^{\ell}S_n^{\ell+1/2}\left(\frac{\alpha^2|v|^2}{2}\right)P_\ell(\cos\theta),\qquad 2n+\ell=0,1,2,...,$$

где $S_n^{\ell+1/2}\left(\frac{\alpha^2|v|^2}{2}\right)$ — полиномы Сонина, $P_\ell(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

Определим приближенное решение задачи (1)–(3) следующим образом [3, 4]:

$$\varphi_k(t,x,v)=\sum_{2n+\ell=0}^{k}\varphi_{n\ell}(t,x)q_{n\ell}(\alpha v), \tag{4}$$

$$\int\limits_{R_3}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\varphi_t}+|v|\cos\theta\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}-L\varphi_k-I(\varphi_k,\varphi_k)\right)f_0q_{n\ell}(\alpha v)dv=0, \tag{5}$$

$$2n+\ell=0,1,...,k,\quad (t,x)\in(0,T]\times(-a,a),$$

$$\int\limits_{R_3}(\varphi_k(0,x,v)-\varphi_{0k}(x,v))f_0q_{n\ell}(\alpha v)dv=0, \tag{6}$$

$$2n+\ell=0,1,...,k,\quad x\in(-a,a),$$

$$\int\limits_{(v,n_{\partial G})<0}(v,n_{\partial G})\varphi_{2N+1}(t,\pm a,v)f_0q_{n,2\ell}(\alpha v)dv=0, \tag{7}$$

$$2(n+\ell)=0,1,...,2N,\quad t\in(0,T],$$

при $k=2N+1$,

$$\int\limits_{(v,n_{\partial G})<0}(v,n_{\partial G})\varphi_{2N}(t,\pm a,v)f_0q_{n,2\ell+1}(\alpha v)dv=0, \tag{8}$$

$$2(n+\ell)+1=0,3,...,2N-1,\quad t\in(0,T],$$

при $k=2N$, где $n_{\partial G}=(0,0,1)$ при $x=a$ и $n_{\partial G}=(0,0,-1)$ при $x=-a$;

$$\varphi_{n\ell}=\int\limits_{R_3}\varphi_k(t,x,v)f_0q_{n\ell}(\alpha v)dv,\qquad \varphi_{0k}(x,v)=\sum_{2n+\ell=0}^{k}\mathring{\varphi}_{n\ell}(x)q_{n\ell}(\alpha v),$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_{n\ell}(x) = \int\limits_{R_3} \varphi_{0k}(x,v) f_0 q_{n\ell}(\alpha v) dv.$$

Условия (7), (8) называют обобщенными граничными условиями Владимирова-Маршака [3, 4]. Вопросы корректности поставленных граничных условий (7), (8), аппроксимирующих исходное граничное условие (3), для уравнения Больцмана обсуждены в [5–7].

Существование и единственность локального решения смешанной задачи для системы моментных уравнений (СМУ) Больцмана в пространстве $C([0,T]; L^2(G\times R_3)$ доказаны в [3, 4], где $T \approx ||\phi_{0k}||^{-1}_{L^2(G\times R_3)}$.

В этой работе мы докажем существование и единственность глобального решения смешанной задачи для одномерной нелинейной СМУ (системы моментных уравнений) Больцмана во втором приближении в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственному переменному. Рассмотрим задачу (4)–(6), (8) при $k=2$ и запишем ее в векторно–матричной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1' \frac{\partial w}{\partial x} + \Lambda_0 u = I(w,u), \qquad (t,x) \in (0,T] \times (-a,a), \tag{9}$$

$$w\,|_{t=0} = w_0(x), \quad u\,|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [-a,a], \tag{10}$$

$$(A_1 u \mp B_1 w)\,|_{x=\pm a} = 0, \quad t \in (0,T], \tag{11}$$

где $w = \varphi_{01}$, $\quad u = (\varphi_{00}, \varphi_{02}, \varphi_{10})'$, $\quad \Lambda_0 = diag(0, -\lambda_{02}, 0)$, $\quad I(w,u) = (0, I_{02}, 0)'$, $A_1 = \frac{1}{2}(1 \quad 2/\sqrt{3} \quad -\sqrt{2/3})$ — матрица строка, $B_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{\pi}}\right)$, $A_1'$ — транспонированная к $A_1$ матрица, $\alpha > 0$, $\alpha$ — const, $\lambda_{02}$ — собственное значение линеаризованного оператора $L$ (отрицательное число), $I_{02} = \sigma_0(\varphi_{00}\varphi_{02} - \varphi_{01}^2/\sqrt{3})/2$ — момент интеграла столкновений, вычисленный при $\sigma(x) = \sigma_0 - const$, $\quad w_0(x) = \varphi_{01}^{(0)}(x)$, $u_0(x) = (\varphi_{00}^{(0)}(x), \varphi_{02}^{(0)}(x), \varphi_{10}^{(0)}(x))$ — заданные начальные функции.

Первое, второе и четвертое уравнения системы (9) — однородные, которые соответствуют законам сохранения импульса, массы и энергии соответственно. Правая часть 3-го уравнения представлена квадратичной формой, содержащей искомые функции. Поэтому система уравнений (9) является полулинейной симметрической гиперболической системой с диссипативным граничным условием (11).

Для задачи (9)–(11) справедлива теорема.

**Т е о р е м а 1.** *Пусть $\sigma(x) = \sigma_0 > 0$, $\quad \sigma_0 - const$, $U_0 = (w_0, u_0)' \in L^2[-a,a]$ и возмущенная плотность неотрицательна. Тогда задача (9)–(11) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $C([0,+\infty], L^2[-a,a])$,*

$$\|U\|_{C([0,+\infty);L^2[-a,a])} \le C_1 \|U_0\|_{L^2[-a,a]}, \tag{12}$$

*где $C_1$ — постоянная, независящая от $U = (w,u)'$.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Введем в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1' & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \Lambda_1 \end{pmatrix}$$

и вектор $I(U) = (0, I(w,u))$; задачу (9)–(11) запишем в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \Lambda U = I(U), \qquad (t,x) \in (0,T) \times (-a,a), \tag{13}$$

$$U\,|_{t=0} = U_0(x), \qquad x \in [-a, a], \tag{14}$$

$$(\pm B_1 \ A)U\,|_{x=\pm a} = 0. \tag{15}$$

Сначала докажем справедливость оценки (12).

Пусть $U_0 \in L^2[-a,a]$. Обе части системы (13) скалярно умножим на $U$ и проинтегрируем по отрезку $[-a,a]$:

$$\int\limits_{-a}^{a} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + \Lambda U \right), U \right) dx = \int\limits_{-a}^{a} (I(U), U)\, dx.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая граничное условие (15), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{-a}^{a}(U,U)dx + \int\limits_{-a}^{a}(\Lambda U, U)dx + (BU,U)\,|_{x=a} + (BU,U)\,|_{x=-a} = \int\limits_{-a}^{a}(I(U),U)dx, \tag{16}$$

где $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $(BU,U)\,|_{x=a} + (BU,U)\,|_{x=-a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(\varphi_{01}\,|_{x=a})^2 + (\varphi_{01}\,|_{x=-a})^2\right] \geq 0$,

$$\int\limits_{-a}^{a}(\Lambda U, U)dx = -\lambda_{02}\int\limits_{-a}^{a}\varphi_{02}^2 dx \geq 0.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(I(U),U) = -\frac{\sigma_0}{2}\varphi_{00}\varphi_{02}^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{00}\varphi_{02}}\right),$$

где $\varphi_{00} = \int f_0 \varphi_3(t,x,v)dv = \rho$, $\varphi_{01} = \int f_0 q_{01}(\alpha v)\varphi_3(t,x,v)dv = \alpha\rho V$, $\varphi_{02} = \int f_0 q_{02}(\alpha v)\varphi_3(t,x,v)dv = \dfrac{\alpha^2}{\sqrt{3}}(P_{33} + \rho V^2)$, $\rho$ — возмущенная плотность, $V$ — средняя скорость газа, $P_{33}$ — тензор напряжений, причем $P_{33} \geq 0$.

Тогда $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{00}\varphi_{02}} = 1 - \dfrac{\rho V^2}{P_{33} + \rho V^2} \geq 0$ при условии, что $\rho \geq 0$.

При этом

$$\int\limits_{-a}^{a}(I(U),U)dx = -\frac{\sigma_0}{2}\int\limits_{-a}^{a}\varphi_{00}\varphi_{02}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\varphi_{01}^2}{\varphi_{00}\varphi_{02}}\right)dx \leq 0 \quad \forall t, x.$$

Из (15) вытекает следующее неравенство:

$$\int\limits_{-a}^{a}(U(t,x),U(t,x))dx \leq \int\limits_{-a}^{a}(U_0,U_0)dx, \qquad t \in [0,+\infty).$$

Отсюда следует оценка (12). Таким образом, имеет место глобальная оценка (12) в предположении, что возмущенная плотность газа неотрицательна.

Существование решения можно показать методом Галеркина. Сначала докажем существование решения в прямоугольнике $[0,T] \times [-a,a]$ по методике работ [3, 4], затем, пользуясь оценкой (12), продолжим это решение до произвольного $T$. Единственность решения можно доказать методом от противного.

## Цитированная литература


1. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978.
2. **Коган М.Н.** Динамика разреженного газа . М.,1967.
3. **Сакабеков А.** // Сиб. Матем. журнал. 1992. Т.33, №1. С. 105–114.
4. **Сакабеков А.** // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, №5. С. 892–900.
5. **Сакабеков А.** // Изв. АН КазССР, сер физ.-мат. 1990. №3. С.30–35.
6. **Сакабеков А.** // Изв. АН КазССР, сер физ.-мат. 1991. №3. С.49–53.
7. **Сакабеков А.** // Доклады АН СССР. 1991. Т.316, №4. С.890–893.



*Поступила в редакцию 29.10.2004 г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 86 — 92*

*УДК 517.925.5:519.216*

# ОБ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДИФФУЗИЕЙ

М. И. Тлеубергенов, Г. Т. Ибраева

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 marat207@math.kz
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
463000 г.Актобе пр. А.Молдагуловой, 34

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости основной по классификации А.С. Галиуллина обратной задачи в классе стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса винеровских процессов и вырождающейся относительно части переменных диффузией.

**В в е д е н и е.** Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1–7] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2–7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [7].

В работах [8–10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, решены: 1) **основная обратная задача динамики** — построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) **задача восстановления уравнений движения** — построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) **задача замыкания уравнений движения** — построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Keywords: *inverse problem, stochastic differential equation, integral manyfold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, в основе которой лежит

**Л е м м а 1** [7, с.12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n},\ m \leq n, \tag{1}$$

*где матрица $H$ имеет ранг, равный $m$, определяется выражением*

$$v = sv^\tau + v^\nu, \tag{2}$$

*здесь $s$ — произвольная скалярная величина,*

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

*есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $e_k$ — единичные орты пространства $R^n$, $v^\tau = (v_k^\tau)$, где*

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},\ v^\nu = H^+ g,$$

*$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, $H^T$ — матрица, транспонированная к $H$.*

**1. Постановка общей задачи построения стохастических дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией и ее решение.** Пусть задано множество

$$\Lambda(t):\ \lambda(y, z, t) = 0,\ \text{где}\ \lambda \in R^m,\ \lambda = \lambda(y, z, t) \in C^{121}_{yzt}. \tag{3}$$

Требуется построить систему стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot y = f_1(y, z, t), \\ \dot z = f_2(y, z, t) + \sigma(y, z, t)\dot\xi. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $y \in R^l$, $z \in R^p$, $l + p = n$, $\sigma$ — $(p \times k)$-матрица $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ — система независимых винеровских процессов [11], заданная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, U, P)$. Искомые для решения поставленной задачи вектор-функции $f_1$, $f_2$ и матрица $\sigma$ предполагаются из класса функций $\mathbf{L}$-непрерывных по $t$ и липшицевых по $y$ и $z$.

Поставленная задача обобщает рассмотренную в [8] задачу построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot x = f(x, \dot x, t) + \sigma(x, \dot x, t)\dot\xi \tag{4'}$$

по заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m,\ \lambda = \lambda(x, \dot{x}, t) \in C^{121}_{x\dot{x}t}, \tag{3'}$$

так, чтобы множество (3′) было интегральным многообразием уравнения (4′).

Для решения поставленной задачи построения системы уравнений (4) по заданному интегральному многообразию (3) по правилу Ито дифференцирования сложной функции [11] $\lambda = \lambda(y, z, t)$ в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) f_1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) f_2 + S + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) \sigma \dot{\xi}, \tag{5}$$

где $S = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} : \sigma\sigma^T\right]$, а под $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} : D, \quad D = \sigma\sigma^T$, следуя [11], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y, z, t)$ вектора по компонентам $z$ на матрицу $D$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} : D = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} D\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2 \lambda_m}{\partial z^2} D\big) \end{bmatrix}.$$

Далее вводятся произвольные типа Н.П. Еругина [3] $m$-мерная вектор-функция $A$ и $(m \times k)$ — матрица $B$, которые обладают свойствами $A(0, y, z, t) \equiv 0, \quad B(0, y, z, t) \equiv 0$ и связаны уравнением

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, y, z, t) + B(\lambda, y, z, t)\dot{\xi}. \tag{6}$$

Сравнивая выражения (5) и (6), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right) f_1 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right) f_2 + S = A, \\ \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial t}\right) \sigma = B. \end{cases} \tag{7}$$

Если ввести вектор $x = (y^T, z^T)^T$ и обозначить через $\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right) f$ выражение $\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right) f = \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right) f_1 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right) f_2$, то формулы (7) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right) f = A - \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} - S, \\ \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right) \sigma = B. \end{cases} \tag{8}$$

Из соотношений (8) при помощи леммы 1 определим вектор-функцию $f$ и матрицу $\sigma$ в виде

$$f = s_1\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) C\right] + \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\right)^+ (A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - S), \tag{9}$$

$$\sigma_i = s_2\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) C\right] + \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\right)^+ B_i, \tag{10}$$

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}C\right]=\begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,n} \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

где $\sigma_i=(\sigma_{1i},\sigma_{2i},...,\sigma_{ni})^T$ — $i$-ый столбец матрицы $\sigma=(\sigma_{\nu j})$ $(\nu=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,k})$; $B_i==(B_{1i},B_{2i},...,B_{mi})^T$ — $i$-ый столбец матрицы $B=(B_{\mu l})$ $(\mu=\overline{1,m},\ l=\overline{1,k})$.

Следовательно, справедлива

**Т е о р е м а 1**. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение типа Ито (4) имело заданное интегральное многообразие (3), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f$ и матрица $\sigma$ уравнения (4) имели соответственно вид (9) и (10).*

**2. Л и н е й н ы й с л у ч а й о б щ е й з а д а ч и.** По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t):\lambda\equiv G_1(t)y+G_2(t)z+l(t)=0,\quad \lambda\in R^m,\quad y\in R^l,\quad z\in R^p \tag{11}$$

требуется построить линейную стохастическую систему уравнений первого порядка с вырожденной по части переменных диффузией вида

$$\begin{cases} \dot y=\Phi_1(t)y+\Psi_1(t)z+b_1(t), \\ \dot z=\Phi_2(t)y+\Psi_2(t)z+b_2(t)+T\dot\xi, \end{cases} \tag{12}$$

для которой множество (11) являлось бы интегральным многообразием, т.е. по заданным матрицам $G_1(t)$, $G_2(t)$ и $m$-мерной функции $l(t)$ определить матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и вектор-функции $b_1(t)$ и $b_2(t)$, а также матрицу $T(t)$ так, чтобы для построенной системы уравнений (12) заданные свойства (11) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (5) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot\lambda=\dot G_1(t)y+\dot G_2(t)z+\dot l(t)+G_1(t)\,[\,\Phi_1(t)y+\Psi_1(t)z+b_1(t)\,]+ \\ +G_2(t)\,[\Phi_2(t)y+\Psi_2(t)z+b_2(t)]+G_2T\dot\xi,\end{gathered} \tag{13}$$

а с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A=A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции $B_1$ со свойством $B_1(0,y,z,t)\equiv 0$ имеем

$$\dot\lambda=A_1\lambda+B_1\dot\xi. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) следуют равенства

$$\begin{cases} \dot G_1(t)y+\dot G_2(t)z+\dot l(t)+G_1(t)\Phi_1(t)y+G_1(t)\Psi_1(t)z+G_1(t)b_1(t)+ \\ +G_2(t)\Phi_2(t)y+G_2(t)\Psi_2(t)z+G_2(t)b_2(t)=A_1\,[G_1(t)y+G_2(t)z+l(t)], \\ G_2(t)T(t)=B_1, \end{cases}$$

которые преобразуются к виду

$$\begin{cases} G_1(t)\Phi_1(t) + G_2(t)\Phi_2(t) = A_1 G_1(t) - \dot{G}_1(t), \\ G_1(t)\Psi_1(t) + G_2(t)\Psi_2(t) = A_1 G_2(t) - \dot{G}_2(t), \\ G_1(t)b_1(t) + G_2(t)b_2(t) = A_1 l(t) - \dot{l}(t), \\ G_2(t)T(t) = B_1. \end{cases} \tag{15}$$

Если ввести $G = (G_1, G_2)$, $G_1 - (m \times l)$, $G_2 - (m \times p)$, $G - (m \times n)$ — матрицы; $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ — матрицы, $b = (b_1, b_2)^T$ — вектор-функции и обозначить через

$$\begin{cases} G(t)\Phi(t) = G_1(t)\Phi_1(t) + G_2(t)\Phi_2(t), \\ G(t)\Psi(t) = G_1(t)\Psi_1(t) + G_2(t)\Psi_2(t), \\ G(t)b(t) = G_1(t)b_1(t) + G_2(t)b_2(t), \end{cases}$$

то соотношение (15) можно переписать в виде

$$\begin{cases} G(t)\Phi(t) = A_1 G_1(t) - \dot{G}_1(t), \\ G(t)\Psi(t) = A_1 G_2(t) - \dot{G}_2(t), \\ G(t)b(t) = A_1 l(t) - \dot{l}(t), \\ G_2(t)T(t) = B_1. \end{cases}$$

Далее, из равенств (15) с использованием леммы 1 имеем

$$b(t) = s_1 [GC] + (G)^+(A_1 l(t) - \dot{l}(t)), \tag{16}$$

$$\Phi(t) = s_2 [GC] + (G)^+(A_1 G_1(t) - \dot{G}_1(t)), \tag{17}$$

$$\Psi(t) = s_3 [GC] + (G)^+(A_1 G_2(t) - \dot{G}_2(t)), \tag{18}$$

$$T_i = s_4 [G_2 C] + (G_2)^+ B_{1i}, \tag{19}$$

где $T_i$ — $i$-ый столбец матрицы $T = (T_{\nu j})$ $(\nu = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,k})$; $B_{1i}$ — $i$-ый столбец матрицы $B_1 = (B_{\mu l})$ $(\mu = \overline{1,m},\ \ l = \overline{1,k})$. Здесь $s_\mu (\mu = 1,2,3,4)$ — произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

**Теорема 2.** *Для того, чтобы стохастическая система линейных дифференциальных уравнений первого порядка Ито (12) имела заданное линейное интегральное многообразие (11), необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\Psi(t)$, $\Phi(t)$ и вектор-функция $b(t)$ имели соответственно вид (16)–(19).*

**3. Скалярный нелинейный случай общей задачи (стохастическая задача Еругина на плоскости).** Пусть $\varphi \in R^1$ и интегральная кривая задана в виде

$$\Lambda(t) : \eta(x_1, x_2, t) = 0, \text{ где } \quad \eta \in R^1, \tag{20}$$

по которой требуется построить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + \gamma(x_1, x_2, t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{21}$$

где $\xi = \xi(t, \omega)$ — скалярный винеровский процесс [11].

Задача заключается в определении функций $f_1(x_1, x_2, t)$, $f_2(x_1, x_2, t)$ и $\gamma(x_1, x_2, t)$ по заданной функции $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$ так, чтобы множество (20) было интегральным многообразием уравнения (21).

Дифференцируя сложную функцию $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [11] в случае винеровского процесса, имеем

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} f_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma \dot{\xi}. \tag{22}$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем скалярные функции $a = a(\eta, x_1, x_2, t)$ и $b = b(\eta, x_1, x_2, t)$ такие, что $a(0, x_1, x_2, t) \equiv b(0, x_1, x_2, t) \equiv 0$, и имеет место равенство

$$\eta = a + b\dot{\xi}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следуют соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} f_2 + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 = a, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma = b. \end{cases} \tag{24}$$

Обозначив
$$\frac{\partial \eta}{\partial x} f = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} f_2,$$

перепишем систему (24) в виде (25)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} f = a - \dfrac{\partial \eta}{\partial t} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma = b. \end{cases} \tag{25}$$

Из (25) в предположении, что $\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^{-1} \neq 0$ и на основе (2) имеем

$$\begin{cases} f = s_1 \left[\dfrac{\partial \eta}{\partial x} C\right] + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^+ \left(a - \dfrac{\partial \eta}{\partial t} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2\right), \\ \gamma = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)^{-1} b. \end{cases} \tag{26}$$

Согласно лемме 1 справедливы равенства применение которых в (26) приводит к следующим выражениеям

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial x} C\right] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \vec{e}_1 - \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \vec{e}_2,$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)^2\right]^{-1},$$

$$
\begin{cases}
f_1 = s_1\dfrac{\partial\eta}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x_1}\left[\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_2}\right)^2\right]^{-1}\left(a - \dfrac{\partial\eta}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2}\gamma^2\right),\\
f_2 = s_2\left(-\dfrac{\partial\eta}{\partial x_2}\right) + \dfrac{\partial\eta}{\partial x_1}\left[\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_2}\right)^2\right]^{-1},\\
\gamma = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_2}\right)^{-1} b.
\end{cases} \tag{27}
$$

Соотношения (27) представляют собой решение стохастической задачи Еругина — задачи построения уравнений (21) по заданному интегральному многообразию (20).

Таким образом, в основной обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях построены множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией и обладающих заданным интегральным многообразием.

## Цитированная литература


1. **Еругин Н. П.** //ПММ. 1952. Т.10, вып.16. С.659–670.

2. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.** Построение систем программного движения. М., 1971.

3. **Галиуллин А. С.** //Дифференциальные уравнения. 1981. Т.XYII, № 8. С.1487–1489.

4. **Галиуллин А. С.** //Дифференциальные уравнения, 1982. Т.XYIII, № 5. С.744–748.

5. **Галиуллин А. С.** Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.

6. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** //Вестник РУДН. Сер. прикл. математика и информатика. 1994. № 1. С.5–21.

7. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М., 1986.

8. **Тлеубергенов М. И.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". 1999. № 1. С.48–51.

9. **Тлеубергенов М. И.** //Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, № 5. С.714–716.

10. **Тлеубергенов М. И.** //Доклады МН–АН РК. 1999. № 1. С.53–60.

11. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.


*Поступила в редакцию 01.09.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 93 – 102*

*УДК 519.624*

# ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. Б.Тлеулесова

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Устанавливается признак однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием в терминах матрицы $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$, составляемой по правой части дифференциального уравнения, граничному условию и условию скачка.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0,T]\backslash\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}, \quad \theta_i \in (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i x(\theta_i - 0) - C_i x(\theta_i + 0) = p_i, \quad p_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где матрица $A(t)$, вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $B$, $C$, $B_i$, $C_i$ $(i = \overline{1,m})$ — постоянные матрицы. Решением задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор функция $x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) на $[0,T]$ кроме точек $t = \theta_i$, а также условиям (2) и (3). Пусть $\|x(t)\| = \max\limits_j |x_j(t)|$, $||A(t)|| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}(t)| \le \alpha$. Через $\widetilde{C}([0,T], R^n)$ обозначим пространство кусочно-непрерывных на $[0,T]$ функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{i=\overline{0,m}} \sup\limits_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} \|x(t)\|$, где $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = T$.

Задача (1)–(3) исследовалась в статьях [1, 2], в которых условия разрешимости приведены в терминах функций Грина. В работе автора [3] методом параметризации, разработанным в [4], в терминах исходных данных получены условия однозначной разрешимости частного случая задачи (1)–(3), а именно: периодической краевой задачи для линейных систем ОДУ с импульсным воздействием.

---

Keywords: *ordinary differential equation, two-point boundary-value problem, impulse influence, parametrization's method*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

В настоящей статье метод параметризации применяется к двухточечной краевой задаче с импульсным воздействием (1)–(3), на основе которого устанавливаются существование и единственность ее решения.

Пусть выбраны шаги $h_1 > 0 : N_1 h_1 = \theta_1$, $h_2 > 0 : N_2 h_2 = \theta_2 - \theta_1, \ldots, h_{m+1} > 0 : N_{m+1} h_{m+1} = T - \theta_m$, $N_1 + N_2 + \ldots + N_{m+1} = N$, где $N_i$ $(i = \overline{1, m+1})$ — натуральные числа, и произведем по ним разбиение $[0, T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = 0$, $t_{r-1} = \theta_i + (r-1)h_{i+1}$, $r = \overline{k_i + 1, k_{i+1}}$, $k_0 = 0$, $k_1 = N_1$, $k_2 = N_1 + N_2$, $\ldots$, $k_m = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$, $k_{m+1} = N$, $i = \overline{0, m}$, $\theta_0 = 0$. Через $x_r(t)$ обозначим сужение функции $x(t)$ на $r$-й интервал и задачу (1)–(3) сведем к многоточечной краевой задаче с импульсным воздействием:

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \tag{4}$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \to T-0} x_N(t) = d, \tag{5}$$

$$B_i \lim_{t \to \theta_i - 0} x_{k_i - 1}(t) - C_i x_{k_i}(\theta_i) = p_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$\lim_{t \to t_s - 0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \qquad s = \{\overline{1, N-1}\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}. \tag{7}$$

Здесь (7) — условия "сшивания" решения во внутренних точках разбиения. Если $x(t)$ — решение задачи (1)–(3), то система сужений $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))'$ функции $x(t)$ является решением задачи (4)-(7). Действительно, каждая функция $x_r(t)$ системы сужений $x[t]$ удовлетворяет на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, дифференциальному уравнению (4) в силу (1). Условия сшивания (7) имеют место ввиду непрерывности функций $x(t)$ на $[0, T] \backslash \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$, а соотношение (6) вытекает из (3). Наоборот, пусть $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_N(t))'$ — решение задачи (4)–(7). С помощью функции $\tilde{x}_r(t)$ на $[0, T]$ определим функцию $\tilde{x}(t)$ равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{x}_N(t)$. Ввиду (4)–(7) функция $\tilde{x}(t)$ кусочно-непрерывна на $[0, T]$ и удовлетворяет условиям (2):

$$B\tilde{x}(0) + C\tilde{x}(T) = B\tilde{x}_1(0) + C \lim_{t \to T-0} \tilde{x}_N(t) = d$$

и (3):

$$B_i \tilde{x}(\theta_i - 0) - C_i \tilde{x}(\theta_i + 0) = B_i \lim_{t \to \theta_i - 0} \tilde{x}_{k_i - 1}(t) - C_i \tilde{x}_{k_i}(\theta_i) = p_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

В силу (4) функция $\tilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) на $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$ :

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{d\tilde{x}_r}{dt} = A(t)\tilde{x}_r(t) + f(t) = A(t)\tilde{x}(t) + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Из (4) в силу непрерывности $A(t)$, $f(t)$ и свойств непрерывной функции $\widetilde{x}(t)$ на множестве $[0, T] \backslash \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$ следует, что функция $\tilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную в точках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, N}$, и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in [0, T] \backslash \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$.

Обозначим через $\lambda_r$ значение функций $x_r(t)$ в точке $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, N}$, и на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Тогда задача (4)–(7) сведется к эквивалентной краевой задаче с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \tag{8}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$$B\lambda_1 + C \lim_{t \to T-0} u_N(t) + C\lambda_N = d, \tag{10}$$

$$B_i \lim_{t \to \theta_i - 0} u_{k_i - 1}(t) + B_i \lambda_{k_i - 1} - C_i \lambda_{k_i} = p_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \{\overline{1, N-1}\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}. \tag{12}$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)' \in R^{nN}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_N(t))'$, — решение задачи (8)–(12), то система функции $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \ldots, \lambda_N + u_N(t))'$ будет решением задачи (4)–(7). И, наоборот, если $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_N(t))$ — решение (4)–(7), то пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(h_1), \ldots, \tilde{x}_N(N_{m+1}h_{m+1}))'$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_2(h_1), \ldots, \tilde{x}_{N-1}(t) - \tilde{x}_{N-1}((N_{m+1}-1)h_{m+1}), \tilde{x}_N(t) - \tilde{x}_N(N_{m+1}h_{m+1}))'$, будет решением задачи (8)–(12). Однако задача (8)–(12) от задачи (4)–(7) отличается тем, что здесь появились начальные условия (9) в точках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1,N}$, которые позволяют определить $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}. \tag{13}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (13) и повторив этот процесс $\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) раз, получим представление функции $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u_r, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \tag{14}$$

где

$$D_{\nu,r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u,t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_\nu} A(\tau_{\nu+1}) u_r(\tau_{\nu+1}) d\tau_{\nu+1} \ldots d\tau_1, \quad \tau_0 = t, \quad r = \overline{1,N}.$$

Из (14) находим

$$\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t) = D_{\nu r}(t_r)\lambda_r + F_{\nu r}(t_r) + G_{\nu r}(u, t_r), \quad r = \overline{1,N}. \tag{15}$$

Подставляя соответствующие правые части (15) в условия (10), (11), (12) и умножая (10), (11) на соответствующие $h_i$, $i = \overline{1, m+1}$, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ :

$$h_{m+1}B\lambda_1 + h_{m+1}C[I + D_{\nu,N}(t)]\lambda_N = dh_{m+1} - h_{m+1}CF_{\nu,N}(t_N) - h_{m+1}CG(u, t_N), \tag{16}$$

$$h_i B_i [I + D_{\nu, k_i - 1}(t_{k_i - 1})]\lambda_{k_i - 1} - h_i C_i \lambda_{k_i} =$$
$$= h_i p_i - h_i B_i F_{\nu, k_i - 1}(t_{k_i - 1}) - h_i B_i G_{\nu, k_i - 1}(u, t_{k_i - 1}), \quad i = \overline{1,m}, \tag{17}$$

$$[I + D_{\nu,s}(t_s)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{\nu,s}(t_s) - G_{\nu,s}(u, t_s), \quad s = \{\overline{1, N-1}\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}, \tag{18}$$

которую запишем в виде

$$Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})\lambda=-F_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})-G_\nu(u,h_1,h_2,\dots,h_{m+1}),\quad \lambda\in R^{nN},\tag{19}$$

где $Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})$ — $(nN\times nN)$-матрица, соответствующая левой части систем уравнений (16),(17),(18):

$$F_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})=\Big(-dh_{m+1}+h_{m+1}CF_{\nu,N}(T),F_{\nu,1}(h_1),\dots,h_1p_1-h_1B_1F_{\nu,k_1}(\theta_1),$$

$$F_{\nu,k_1+1}(\theta_1+h_2),\dots,h_mp_m+h_mF_{\nu,k_m}(\theta_m),F_{\nu,k_m+1}(\theta_m+h_{m+1}),\dots,F_{\nu,k_{m+1}-1}(T-h_{m+1})\Big),$$

$$G_\nu(u,h_1,h_2,\dots,h_{m+1})=\Big(h_{m+1}CG_{\nu,N}(u,T),G_{\nu,1}(u,h_1),\dots,G_{\nu,k_1-1}(u,\theta_1-h_1),h_1B_1G_{\nu,k_1}(u,\theta_1),$$

$$G_{\nu,k_1+1}(u,\theta_1+h_2),\dots,h_mB_mG_{\nu,k_m}(u,\theta_m),G_{\nu,k_m+1}(u,\theta_m+h_{m+1}),\dots,$$

$$G_{\nu,N-1}(u,T-h_{m+1})\Big)'\in R^{nN}.$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda,u[t])$ — решения задачи (8)–(12) имеем замкнутую систему уравнений (13), (19). Если известен параметр $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)'$, то из (13) найдем систему решений задач Коши — $u[t]$. Если известна система функций $u[t]$, то из уравнения (19) находим $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)$. Так как неизвестными являются и $\lambda$ и $u[t]$, то для нахождения решения задачи (8)–(12) применяется метод последовательных приближений. Пара $(\lambda,u[t])$ — решение задачи (8)–(12), находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $\quad k=0,1,2,\dots$, определяемой по следующему алгоритму.

**0-шаг.** а) Предполагая, что при выбранных $h_1>0$, $h_2>0$, $\dots$, $h_{m+1}>0: N_1h_1=\theta_1$, $N_2h_2==\theta_2-\theta_1$, $\dots$, $N_{m+1}h_{m+1}=T-\theta_m$, $\nu\in\mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1}):R^{nN}\to R^{nN}$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_N^{(0)})'\in R^{nN}$ определяем из уравнения

$$Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})\lambda=-F_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1}),$$

т.е $\lambda^{(0)}=-[Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})]^{-1}F_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)}\in R^{nN}$ и решая задачи Коши (8), (9) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ на интервалах $[t_{r-1},t_r)$, находим функции $u_r^{(0)}(t),r=\overline{1,N}$.

**1-шаг.** а) В правой части (12) вместо $u$ подставляя $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),\dots,u_N^{(0)}(t))'$, первое приближение по параметру $\lambda^{(1)}$ определяем из уравнения

$$Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})\lambda=-F_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})-G_\nu(u^{(0)},h_1,h_2,\dots,h_{m+1}).$$

Ввиду обратимости матрицы $Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})$ получим

$$\lambda^{(1)}=-[Q_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})]^{-1}[F_\nu(h_1,h_2,\dots,h_{m+1})+G_\nu(u^{(0)},h_1,h_2,\dots,h_{m+1})].$$

б) Используя $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\dots,\lambda_N^{(1)})'\in R^{nN}$ и решая задачу Коши (8), (9) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$ на интервалах $[t_{r-1},t_r)$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,N}$. И т.д.

Продолжая процесс, на **k−ом шаге** получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,N}$, $k=0,1,2,\dots$. По выбранным $h_1>0,h_2>0,\dots,h_{m+1}>0$ составим блочно-диагональную матрицу $H=diag\Big(\underbrace{Ih_{m+1},I,\dots,I}_{N_1},\underbrace{Ih_1,I,\dots,I}_{N_2},\dots,\underbrace{Ih_m,I,\dots,I}_{N_{m+1}},\Big)$ размерности $(nN\times nN)$, $I$ — единичная матрица размерности $n$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма устанавливает

**Т е о р е м а 1.** *Пусть при некоторых* $h_1 > 0, h_2 > 0, \ldots, h_{m+1} > 0 : N_1 h_1 = \theta_1, N_2 h_2 = \theta_2 - \theta_1, \ldots, N_{m+1} h_{m+1} = T - \theta_m$ *и* $\nu, \nu \in \mathbb{N}$, *матрица* $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) : R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима и выполняются неравенства:*

$$\text{а)}\quad ||[Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})]^{-1}|| \le \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}),$$

$$\text{б)}\quad q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) = \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \max(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i \|B_i\|, h_{m+1}\|C\|) \times$$

$$\times \Big[ \exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!} (\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^j \Big] < 1.$$

*Тогда последовательность пар* $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ *при* $k \to \infty$ *сходится к* $(\lambda^{(*)}, u^{(*)}[t])$, *— единственному решению задачи (8)–(12) и справедливы оценки:*

$$\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \le \frac{[q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{{}_N})]^{(k)}}{1 - q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le \frac{[q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}]^k}{1 - q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})} \times$$

$$\times \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \max(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i \|B_i\|, h_{m+1}\|C\|) \frac{1}{\nu!} (\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^\nu L_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}), \quad (20)$$

$$\|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\| \le \big[\exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) - 1\big] \frac{[q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})]^k}{1 - q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})} \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \times$$

$$\times \max\big(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i \|B_i\|, h_{m+1}\|C\|\big) \frac{1}{\nu!} \big(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i\big)^\nu L_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}), \quad r = \overline{1, N}, \quad (21)$$

*где*

$$L_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) = \Big[ \exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) - 1 \Big] \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \times$$

$$\times \max\Big\{ 1 + h_{m+1}\|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} (\alpha h_{m+1})^j, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} (\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^j, 1 + \max_{i=\overline{1,m}} \|B_i\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} (\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^j \Big\} \times$$

$$\times \max(\|d\|, \|f\|_1, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i\|) \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i + \exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) \|f(t)\|_1 \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из обратимости $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ и неравенства $a)$ следуют существование $\lambda^{(0)}$ и оценка

$$||\lambda^{(0)}|| = \max_r \|\lambda_r^{(0)}\| \le \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \|F_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})\| \le \gamma_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \times$$

$$\times \max\Big\{ 1 + h_{m+1}\|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\Big(\alpha h_{m+1}\Big)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\Big(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i\Big)^j}{j!}, 1 + \max_{i=\overline{1,m}} \|B_i\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\Big(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i\Big)^j}{j!} \Big\} \times$$

$$\times \max(\|d\|, \|f\|_1, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i\|) \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i. \quad (22)$$

Задача Коши (8),(9) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ имеет единственное решение

$$u_r^{(0)}(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r^{(0)}(\tau) + \lambda_r^{(0)}] d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

По неравенству Гронуолла-Беллмана имеем

$$\|u_r^{(0)}(t)\| \le [e^{\alpha[t-t_{r-1}]}-1]\|\lambda_r^{(0)}\| + e^{\alpha[t-t_{r-1}]} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|f(t)\| \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i, \quad r=\overline{1,N}.$$

Учитывая (22), получаем

$$\|u^{(0)}\|_2 = \max_r \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r^{(0)}(t)\| \le L_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}). \tag{23}$$

По первому шагу алгоритма определим $\lambda^{(1)}$ из уравнения

$$Q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\lambda = -F_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}) - G_\nu(u^{(0)},h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})$$

и оценим норму разности $\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}$ :

$$\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\| \le \gamma_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\|G_\nu(u^{(0)},h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\| \le \gamma_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\times$$

$$\times \max(1,\max_{i=\overline{1,m}} h_i\|B_i\|, h_{m+1}\|C\|)\frac{(\alpha \max\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^\nu}{\nu!} \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r^{(0)}(t)\|. \tag{24}$$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательность системы пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,\ldots$, и, применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, оцениваем разность решений задач Коши через разность параметров:

$$\Big\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\Big\| \le \Big[\exp(\alpha[t-t_{r-1}])-1\Big]\Big\|\lambda_r^{(k)}-\lambda_r^{(k-1)}\Big\|, \quad r=\overline{1,N}, \quad k=1,2,\ldots \tag{25}$$

Так как $\lambda^{(k+1)}$, $\lambda^{(k)}$ являются решениями уравнения (19), при соответствующих правых частях, то для нормы их разности справедливо неравенство:

$$\big\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\big\| = \Big\|\big[Q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_N)\big]^{-1} G_\nu(u^{(k)}-u^{(k-1)},h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\Big\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}) \max\left\{ h_{m+1}\|C\| \int\limits_{T-h_{m+1}}^{T} \alpha \ldots \int\limits_{T-h_{m+1}}^{\tau_{\nu-1}} \alpha\|u_N^{(k)}(\tau_\nu)-u_N^{(k-1)}(\tau_\nu)\|d\tau_\nu\ldots d\tau_1, \right.$$

$$\max_{i=\overline{1,m+1}} \max_{s=\overline{k_{i-1},k_i-1}} \int\limits_{\theta_{i-1}+(s-1)h_i}^{\theta_{i-1}+sh_i} \alpha \ldots \int\limits_{\theta_{i-1}+(s-1)h_i}^{\tau_{\nu-1}} \alpha\|u_s^{(k)}(\tau_\nu)-u_s^{(k-1)}(\tau_\nu)\|d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$\left.\max_{i=\overline{1,m}} h_i\|B_i\| \int\limits_{\theta_i-h_i}^{\theta_i} \alpha \ldots \int\limits_{\theta_i-h_i}^{\tau_{\nu-1}} \alpha\|u_{k_i}^{(k)}(\tau_\nu)-u_{k_i}^{(k-1)}(\tau_\nu)\|d\tau_\nu\ldots d(\tau_1)\right\}, \quad k_i=\sum_{j=1}^{i} N_j, \quad i=\overline{1,m+1}.$$

Подставляя вместо $\Big\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\Big\|$, подставляя правую часть неравенства (25) и вычисляя повторные интегралы, имеем

$$\big\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\big\| \le q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\big\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\big\|, \quad k=1,2,\ldots \tag{26}$$

Из неравенства (25) вытекает оценка

$$\Big\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\Big\| \le \Big(\exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)-1\Big)\big\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\big\|. \tag{27}$$

В силу условия $q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) < 1$ из (26),(27) следует сходимость последовательностей $\lambda^{(k)} \in R^{nN}$ к $\lambda^* \in R^{nN}$, $u_r^{(k)}(t)$ к $u_r^*(t)$, $r = \overline{1,N}$ и справедливость оценок (20),(21).
Докажем единственность. Пусть существует $(\widetilde{\lambda}_r, \widetilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1,N}$, — еще одно решение задачи (8)–(12). Аналогично (25),(26) получим оценки:

$$\left\|u_r^*(t) - \widetilde{u}_r(t)\right\| \leq \left[e^{\alpha[t-t_{r-1}]} - 1\right] \left\|\lambda_r^* - \widetilde{\lambda}_r\right\|, \quad r = \overline{1,N}, \quad \lambda^*, \tilde{\lambda} \in R^{nN}, \tag{28}$$

$$\left\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\right\| \leq q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \left\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\right\|.$$

Так как $q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) < 1$, то отсюда вытекают равенства $\lambda_r^* = \widetilde{\lambda}_r$, $u_r^*(t) = \widetilde{u}_r(t)$, $r = \overline{1,N}$. Теорема 1 доказана. В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (8)–(12) из теоремы 1 следует

**Т е о р е м а 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1)–(3) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка*

$$||x^*||_1 \leq L_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \max(\|d\|, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i\|, ||f||_1), \tag{29}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Существование и единственность пары $(\lambda^*, u^*[t])$ — решения многоточечной краевой задачи с импульсным воздействием (8)–(12) показаны в теореме 1. Из эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(7) следует, что краевая задача (1)–(3) также имеет единственное решение $x^*(t)$, определяемое равенствами $x^* = \lambda_r^* + \lim\limits_{t \to t_r - 0} u_r^*(t)$, $r = \overline{1,N}$, $x_N^* = \lambda_N^* + \lim\limits_{t \to T-0} u_N^*(t)$. Из неравенств $\|\lambda^*\| \leq \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(0)}\|$, $\|u^*\|_2 \leq \|u^* - u^{(0)}\|_2 + \|u^{(0)}\|_2$ и оценок (22),(23) (при $k = 0$) из теоремы 1 получим справедливость (29). Теорема 2 доказана.

Чтобы доказать необходимость условий теоремы 1 для однозначной разрешимости задачи (1)–(3), мы построим уравнение относительно параметров $\lambda$, решение которого совпадает со значениями точного решения задач (1)–(3) в точках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1,N}$. Из непрерывности вектор-функций $f(t)$ и из кусочной непрерывности $x(t)$ на $[0,T]$ следует, что $\|f(t)\| \leq \beta$, $\|x(t)\| \leq \beta_1$. Так как $\lambda_r = x(t_{r-1})$, $r = \overline{1,N}$, то $\|\lambda\| \leq \beta_1$. Вектор-функцию $u_r(t)$ оценим по лемме Гроноулла-Беллмана: $\|u_r(t)\| \leq [\exp^{\left(\alpha \max\limits_{i=\overline{m+1}} h_i\right)} - 1]\beta_1 + \max\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i \beta \exp^{\left(\alpha \max\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i\right)} \leq \beta_2$, $r = \overline{1,N}$. Нетрудно установить равномерную на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, сходимость $D_{\nu,r}(t)$, $F_{\nu,r}(t)$ при $\nu \to \infty$ к

$$D_{*,r}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N},$$

$$F_{*,r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1,N},$$

а $G_{\nu,r}(u, h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ стремится к нулю в силу оценки

$$\|G_{\nu,r}(u, h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})\| \leq \max(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i \|B_i\|, h_{m+1}\|C\|) \frac{1}{\nu!} (\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^\nu \beta_2.$$

Тогда, переходя к пределу при $\nu \to \infty$ в уравнениях (13),(19) и умножив обе части уравнения (19) на матрицу $H^{-1}$, получим

$$u_r(t) = D_{*,r}(t)\lambda_r + F_{*,r}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N},$$

$$H^{-1}Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\lambda=-F_*(A,B_1,\ldots,B_m,C,f,d,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}), \tag{30}$$

$$Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})=\lim_{\nu\to\infty}Q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}),$$

$$F_*(A,B_1,\ldots,B_m,C,f,d,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})=-H^{-1}\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(A,B_1,\ldots,B_m,C,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}).$$

Пусть $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)\in R^{nN}$ — решение системы уравнений

$$h_{m+1}B\tilde{\lambda}_1+h_{m+1}C[I+D_{\nu,N}(T)]\tilde{\lambda}_N=dh_{m+1}-h_{m+1}F_{\nu,N}(T)-h_{m+1}G_{\nu,N}(u,T), \qquad (31))$$

$$h_iB_i[I+D_{\nu,k_i-1}(t_{k_i})]\tilde{\lambda}_{k_i-1}-h_iC_i\tilde{\lambda}_{k_i}=h_ip_i-h_iF_{\nu,k_i-1}(t_{k_i})-h_iG_{\nu,k_i-1}(u,t_{k_i}), \quad i=\overline{1,m}, \tag{32}$$

$$[I+D_{\nu,s}(t_s)]\tilde{\lambda}_s-\tilde{\lambda}_{s+1}=-F_{\nu,s}(t_s)-G_{\nu,s}(t_s), \quad s=\{\overline{1,N-1}\}\setminus\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}, \tag{33}$$

и $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t),\ldots,\tilde{u}_N(t))'$ — система решений задач Коши на $[t_{r-1},t_r)$, при $\lambda_r=\tilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,N}$. Так как $\tilde{u}_r(t)$ — решение задачи Коши (8),(9) при $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$, при $\lambda_r=\tilde{\lambda}_r$, то из равенства (24) и единственности решения задачи Коши (8),(9) при фиксированных значениях параметров $\lambda_r$ следует, что

$$\tilde{u}_r(t)=D_{*,r}(t)\tilde{\lambda}_r+F_{*,r}(t), \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}. \tag{34}$$

Перепишем систему уравнений (31)–(33), учитывая равенство (34),

$$h_{m+1}B\tilde{\lambda}_1+h_{m+1}C\lim_{t\to T-0}\tilde{u}_N(t)+h_{m+1}C\tilde{\lambda}_N=h_{m+1}d,$$

$$h_iB_i\lim_{t\to\theta_i-0}\widetilde{u}_{k_i-1}(t)+h_iB_i\tilde{\lambda}_{k_i-1}-h_iC_i\tilde{\lambda}_{k_i}=h_ip_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\tilde{\lambda}_s+\lim_{t\to t_s-0}\tilde{u}_s(t)=\tilde{\lambda}_{s+1}, \quad s=\{\overline{1,N-1}\}\setminus\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}.$$

Следовательно, пара $(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t])$ удовлетворяет краевому условию (10), условию скачка (11) и условию склеивания (12). Так как $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\ldots,\tilde{\lambda}_N)$ — решение уравнения (21), а соответствующие им $\widetilde{u}_r(t)$ — решения задач Коши (8),(9) на $[t_{r-1},t_r)$ при $\lambda_r=\tilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,N}$, то, склеивая систему функций $(\tilde{\lambda}_r+\tilde{u}_r(t))$ на $[0,T]$ получаем $\tilde{x}(t)$ — решение краевой задачи с импульсным воздействием (1)–(3). Теперь пусть $x^*(t)$ — решение краевой задачи (1)–(3). Тогда пара $(\lambda^*,u^*[t])$ с элементами $\lambda^*_r=x^*[t_{r-1}]$, $u^*_r(t)=x^*(t)-x^*[t_{r-1}]$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (8)–(12), и, следовательно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{du^*_r}{dt}=A(t)(u^*_r+\lambda^*_r)+f(t), \quad r=\overline{1,N}, \tag{35}$$

$$u^*_r[t_{r-1}]=0, \quad r=\overline{1,N}, \tag{36}$$

краевому условию

$$B\lambda^*_1+C\lim_{t\to T-0}u^*_{N}(t)+C\lambda^*_{N}=d, \tag{37}$$

условию скачка

$$B_i\lim_{t\to\theta_i-0}u^*_{k_i-1}(t)+B_i\lambda^*_{k_i-1}-C_i\lambda^*_{k_i}=p_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{38}$$

и условию "склеивания"

$$\lambda^*_s+\lim_{t\to t_s-0}u^*_s(t)=\lambda^*_{s+1}, \quad s=\{\overline{1,N-1}\}\setminus\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}. \tag{39}$$

Из (32) получаем

$$u_r^*(t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r^*(\tau)+\lambda_r^*]d\tau+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau,\quad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N}. \tag{40}$$

Подставляя вместо $u_r^*(\tau)$ соответствующую правую часть (40) и повторив $\nu(\nu=1,2,\ldots)$ раз, получим представление функции $u_r^*(t)$ вида

$$u_r^*(t)=D_{\nu,r}(t)\lambda_r^*+F_{\nu,r}(t)+G_{\nu,r}(u^*,t),\quad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N}. \tag{41}$$

Определив значения функции $u_r^*(t)$ при $t\to t_{r-1}-0$, подставим их в граничные условия (37), условия скачка (38) и условия "склеивания" (39). Полученную систему уравнений относительно параметров $\lambda_r^*, r=\overline{1,N}$, запишем в виде

$$Q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\lambda^*=-F_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})-G_\nu(u^*,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}),\quad \lambda^*\in R^{nN}. \tag{42}$$

Таким образом, пара $(\lambda^*,u^*[t])$ удовлетворяет уравнениям (40),(42) при любом $\nu(\nu=1,2,\ldots)$. Так как

$$\|G_{\nu,r}(u^*,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\|\le\max\bigl(1,\max_{i=\overline{1,m}}h_i\|B_i\|,h_{m+1}\|C\|\bigr)\frac{1}{\nu!}(\alpha\max_{i=\overline{1,m+1}}h_i)^\nu\beta_2,$$

$D_{\nu,r}(t)$, $F_{\nu,r}(t)$ равномерно сходятся на $[t_{r-1},t_r)$ к $D_{*,r}(t)$, $F_{*,r}(t)$, то, переходя к пределу при $\nu\to\infty$ на $[t_{r-1},t_r)$ в равенствах (40),(42) и умножив обе части (42) на $H^{-1}$, получим

$$u_r^*(t)=D_{*,r}(t)\lambda_r^*+F_{*,r}(t),\quad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N},$$

$$Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\lambda^*=-F_*(A,B_1,\ldots,B_m,C,f,p_1,\ldots,p_m,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})$$

где $Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})=\lim\limits_{\nu\to\infty}Q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})$,

$$F_*(A,B_1,\ldots,B_m,C,f,d,p_1,\ldots,p_m,h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})=H^{-1}\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}),\quad i=\overline{1,m}.$$

Итак, мы показали, что существование решения задачи (1)–(3) эквивалентно существованию решения уравнения (30) и при этом вектор $\lambda^*\in R^{nN}$, составленный из значений решения задачи (1)–(3) в точках $t=t_{r-1}$, $r=\overline{1,N}$, является решением уравнения (30). Следующее утверждение устанавливает необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи (1)–(3) при фиксированных $h_1>0: N_1h_1=\theta_1$, $h_2>0: N_2h_2=\theta_2-\theta_1$, $\ldots,h_{m+1}>0: N_{m+1}h_{m+1}=T-\theta_m$.

**Т е о р е м а 3.** *Краевая задача с импульсным воздействием (1)–(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для некоторых* $h_1>0$, $N_1h_1=\theta_1$, $h_2>0$, $N_2h_2==\theta_2-\theta_1,\ldots,h_{m+1}>0: N_{m+1}h_{m+1}=T-\theta_m$ *существует* $\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}),\nu\in\mathbb{N}$, *матрица* $Q_\nu(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}): R^{nN}\to R^{nN}$ *обратима и выполняются неравенства а),б) теоремы 1.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима. Возьмем шаги $h_1>0: N_1h_1=\theta_1$, $h_2>0: N_2h_2=\theta_2-\theta_1$, $\ldots,h_{m+1}>0: N_{m+1}h_{m+1}=T-\theta_m$. Рассмотрим матрицу $Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1}): R^{nN}\to R^{nN}$ и докажем ее обратимость. Для этого достаточно установить, что уравнение $Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\lambda=0$ имеет только нулевое решение. Допустим обратное: найдется $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)'\in R^{nN}$ такой, что $\|\widetilde{\lambda}\|\ne0$, $Q_*(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})\widetilde{\lambda}=0$.
Тогда, как было показано выше, система пар $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{u}[t]$ — система решений задач Коши

(8),(9) на $[t_{r-1}, t_r)$ при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r, r = \overline{1,N}$, является ненулевым решением однородной многоточечной краевой задачи с импульсным воздействием и функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{u}_N(t) + \widetilde{\lambda}_N$, $\|\widetilde{x}(t)\| \neq 0, t \in [0,T]$, будет ненулевым решением двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \in [0,T], \tag{43}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = 0, \tag{44}$$

$$B_i x(\theta_i - 0) - C_i x(\theta_i + 0) = 0, \tag{45}$$

что противоречит однозначной разрешимости задачи (1)–(3), т.к. $x = 0$ также является решением задачи (43)–(45). Поэтому $Q_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ обратима и

$$\|[Q_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})]^{-1}\| \le \gamma_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}).$$

Так как

$$\|Q_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) - Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})\| \le$$

$$\le \max(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i\|B_i\|, h_{m+1}\|C\|)\Big[\exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!}(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^j\Big]$$

и правая часть неравенства стремится к нулю при $\nu \to \infty$, то по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [6,с.142] найдется $\overline{\nu} = \overline{\nu}(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ такое, что

$$\gamma_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \max(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i\|B_i\|, h_{m+1}\|C\|)\Big[\exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) - \sum_{j=0}^{\overline{\nu}} \frac{1}{j!}(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^j\Big] < \frac{1}{2},$$

матрица $Q_{\overline{\nu}}(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ обратима и выполняются соотношения

$$\|[Q_{\overline{\nu}}(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})]^{-1}\| \le 2\gamma_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) = \gamma_{\overline{\nu}}(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$$

и

$$q_{\overline{\nu}}(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) = \gamma_{\overline{\nu}}(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}) \times \max(1, \max_{i=\overline{1,m}} h_i\|B_i\|, h_{m+1}\|C\|)\times$$

$$\times\Big[\exp(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i) - 1 - \alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i - \ldots - \frac{1}{\overline{\nu}!}(\alpha \max_{i=\overline{1,m+1}} h_i)^{\overline{\nu}}\Big] < 1,$$

т.е. выполнены условия теоремы 1. Теорема 3 доказана.

## Цитированная литература


1. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев,1986.

2. **Самойленко А. М., Перестюк Н. А.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.

3. **Тлеулесова А. Б.** // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 5. С. 114–122.

4. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.

5. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 1. С. 5–63.

6. **Треногин В. В.** // Функциональный анализ. М., 1980.


*Поступила в редакцию 27.09.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 4 (14) . С. 103—104*

## ХРОНИКА

# БАЯХМЕТ ЖУМАГАЛИЕВИЧ МАЙГАРИН

29 ноября 2004г. исполнилось 70 лет со дня рождения видного ученого в области теории устойчивости и теории систем автоматического управления Баяхмета Жумагалиевича Майгарина.

Он родился 29 ноября 1934 года в г.Петропавловске. В 1953 году окончил Энбекскую среднюю школу Ленинского района Северо-Казахстанской области и в том же году поступил на физико-математический факультет Казахского Государственного университета им. С. М. Кирова, который успешно закончил в 1958 году по специальности "математика".

Свой трудовой путь Б.Ж.Майгарин начал с должности старшего лаборанта в Секторе математики и механики Академии наук КазССР, преобразованного в 1965 году в Институт математики и механики.

С 1960 по 1963г.г. он учился в аспирантуре Института автоматики и телемеханики АН СССР под руководством члена-корр. АН СССР А.М.Летова. В 1964 году на объединенном ученом совете Отделения физико-математических наук АН КазССР защитил кандидатскую диссертацию на тему "Некоторые вопросы исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования". В диссертационной работе на основе алгебраического и частотного методов им получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости основной системы управления третьего порядка и систем с жесткой и тахометрической обратными связями. Доказано, что для системы непрямого управления с жесткой обратной связью критерий Попова шире, чем критерий Лурье. Определены дополнительные условия, при выполнении которых частотный критерий Попова дает не только достаточные, но и необходимые условия. Показана эффективность введения тахометрической обратной связи для установления устойчивого положения равновесия.

После защиты диссертации Майгарин был зачислен младшим научным сотрудником в Сектор математики и механики АН КазССР, а в 1966 году проведен по конкурсу на должность старшего научного сотрудника Института математики и механики АН КазССР. С этих пор и до конца своей жизни Баяхмет Жумагалиевич работал в лаборатории дифференциальных уравнений этого института, где с 1984 года занимал должность ведущего научного сотрудника.

Б.Ж.Майгарин по праву считается одним из основателей направления теории устойчивости систем автоматического управления в Казахстане. Труды ученого в области теории устойчивости управляемых систем были высоко оценены в Советском Союзе. Он работал в тесном контакте с такими выдающимися учеными, как А.С. Галиуллин, В.И. Зубов, В.М. Матросов, Р.А. Нелепин, В.В. Румянцев, неоднократно выступал на руководимых ими семинарах. Им проведены глубокие исследования устойчивости управляемых систем, основанные на втором методе Ляпунова, частотном методе, по решению матричных уравнений Ляпунова. В частности, им предложены новые конструктивные методы построения функций Ляпунова для линейных автономных систем, усилены и модифицированы некоторые теоремы о существовании функций Ляпунова, выделены широкие классы систем автоматического управления, для которых проблема гурвицевости решается положительно. Обобщена теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия и найдены частотные условия абсолютной неустойчивости систем управления. Получены как алгебраические, так и частотные условия асимптотической устойчивости в целом в условиях неопределенности для систем с обратными связями по координате, скорости и ускорению исполнительного органа. Найдены достаточные условия асимптотической устойчивости при допустимых отклонениях программного многообразия систем с нелинейным объектом управления. Получены оценки амплитуды и времени переходного процесса и найдены условия быстродействия регулятора, перерегулирования и монотонного затухания переходного процесса нелинейных систем управления в условиях неопределенности. Установлен интегральный критерий качества переходного процесса систем прямого управления. Все эти результаты отражены в докторской диссертации на тему "Устойчивость и качество динамических систем автоматического управления в условиях неопределенности", представленной к защите в диссертационном совете Ленинградского государственного университета по специальности 05.13.02 - автоматическое управление и регулирование, которую он, к сожалению, не успел защитить.

Талантливый ученый кандидат, физико-математических наук Баяхмет Жумагалиевич Майгарин ушел из жизни 3 мая 1989 г.

Им опубликовано около 60 научных работ в союзных и республиканских изданиях, из них две монографии: "Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления"(1980), "Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением"(1999г).

Б.Ж.Майгарин являлся активным участником многих Всесоюзных совещаний по автоматическому управлению и математической кибернетике, Всесоюзных конференций по качественной теории дифференциальных уравнений, устойчивости движения, а также всех республиканских математических конференций за период с 1968 по 1985гг.

Б.Ж.Майгарин активно занимался педагогической деятельностью. Он читал лекции в Казахском Национальном университете имени Аль-Фараби, Казахском Национальном университете имени К.И.Сатпаева. Участвовал в подготовке высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством подготовлены и защищены пять кандидатских диссертаций. Был членом специализированного совета при ИММ АН КазССРР по защите кандидатских диссертаций, председателем научно-методического совета по распространению знаний при Республиканском обществе "Знание" Казахской ССР.

За заслуги в области математики и за вклад в ее развитие он был награжден юбилейной медалью "100 лет со дня рождения В.И.Ленина", медалью "Ветеран труда" и почетными грамотами и медалями Республики Казахстан.

## РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70

A b d i k a l i k o v K. A. **Optimization of electric and digital signature algorithms by arithmetics operations parallel calculation method** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.5–9.

Optimization of electric and digital signature algorithms by arithmetics operations parallel calculation method is studied in this work.
References — 4.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70

Ә б д і қ а л ы қ о в Қ. Ә. **Арифметикалық амалдарды параллель есептеу әдісімен электронды цифрлы қолтаңбаның алгоритмдерін тиімдендіру** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.5–9.

Жұмыста электронды цифрлы қолтаңбаның алгоритмдерін параллель есептеулер қолдану арқылы тиімдендіру мәселелері қарастырылады.
Библ. — 4.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

A k i s h e v G. **On orders of approximation of functional classes in Marcinkiewz space** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.10–19.

In this paper the estimates of the orders of approximation of S.M.Nikol‘ski class $H_p^r$ and O.V. Besov class $B_{p,q}^r$ in the of norm of anisotropic Marcinkiewicz space are obtained. The order of orthowidth of class $H_p^r$ is found also well.
References — 24.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

А к и ш е в Г. **Марцинкевич кеңістігінде функционалды кластардың жуықтауының реті туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б. 10–19.

Анизотропты Марцинкевич кеңістігінің нормасы бойынша С.М.Никольский $H_p^r$ және О.В.Бесов $B_{p,q}^r$ кластарының жуықтау реттерінің бағалары алынды $H_p^r$ класының ортоколденеңдігінің реті табылды.
Библ. — 24.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

A y a g a n o v E . T . **By the question of stability of differential equations with late argument** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P. 20–25.

The research problem of stability and estimation of area of stability of linear differential equations with late argument is observed on the basis of direct Lyapunov's method, Razumikhin approach and method of finite Lagrange increments.

References — 16.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

А я ғ а н о в Е . Т . **Кешігулі аргументті дифференциалдық теңдеулердің орнықтылық мәселесіне**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б. 20–25.

Ляпуновтың тура әдісі, Разумихин тәсілі және Лагранждық ақырлы өсімше әдісі негізінде сызықты дифференциалдық теңдеулердің орнықтылығын зерттеу есебі және орнықтылық облысының бағалары қарастырылады.

Библ. — 16.

УДК: 517.925:62.50 2000 MSC: 34K29

Z h u m a t o v S . S . **Matrix comparison systems and stability program manifold**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.26–32.

Comparison systems are constructed to investigate stability in neighbourhood of program manifold. The sufficient conditions of program manyfold absolute asymptotical stability are obtained with respect to given function.

References — 11.

УДК: 517.925:62.50 2000 MSC: 34K29

Ж ұ м а т о в С . С . **Матрицалық салыстыру жүйелері және бағдарламалық көпбейненің орнықтылығы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.26–32.

Бағдарламалық көпбейненің төңірегінде орнықтылықты зерттеу үшін салыстыру жүйелері құрылды. Берілген функцияға қарасты бағдарламалық көпбейненің абсолютті, асимптотикалық орнықтылығының қажетті шарттары алынды.

Библ. — 11.

УДК: 517.929.7 2000 MSC: 34K10, 34K13

I s k a k o v a N . B . **Criterion of unique solvability of periodical boundary value problem for the system of differential equations with delay**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.33–43.

The periodical boundary value problem for the system of differential equations with delay argument is considered. Necessary and sufficient conditions of existence of unique solution of this problem are established in the term of initial data. An algorithm of its finding is offered.

References — 7.

УДК: 517.929.7 2000 MSC: 34K10, 34K13

Ы с қ а қ о в а Н. Б. **Кешігуі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есептің бірмәнді шешілімдігінің нышаны**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.33–43.

Кешігулі аргументті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің жалқы шешімі болуының қажетті және жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалды және оларды табудың алгоритмі ұсынылды.

Библ. — 7.

УДК: 517.95 2000 MSC: 42A16

K a l m e n o v T. Sh., K o s h a n o v B. D. **Spectral properties of root-vector spaces for Tricomi problem**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.44–48.

Spectral properties of mixed type equations are under consideration. In particular, a completeness of root-vector space of Tricomi problem for Lavrentyev–Bitzadze equation in symmetric domain is proved.

References — 9.

УДК: 517.95 2000 MSC: 42A16

К ә л м е н о в Т. Ш., Қ о ш а н о в Б. Д. **Трикоми есебінің тамыр кеңістіктерінің спектралдық қасиеттері**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.44–48.

Бұл жұмыста аралас типті теңдеулердің спектрлық қасиеттері зерттелген. Дербес жағдайда, Лаврентьев–Бицадзе теңдеуі үшін Трикоми есебіне симметриялы облыста түбірлі векторлардың толықтығы дәлелденген.

Библ. — 9.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

N a i m a n o v a A. Zh. **Flows of supersonic jets system in co-flow stream**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.49–55.

Results of numerical investigation of round supersonic jet system distribution in co-flow stream are adduced, using the original equations are parabolized Navier–Stokes ones. Influence of Mach number of the stream on characteristics of a flow is analyzed.

References — 5.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

Н а й м а н о в а А. Ж. **Серіктес ағындағы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынша жүйелерінің ағысы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.49–55.

Жоғары дыбысты ағыншадан серіктес ағынға ағып шығатын ағынша жүйелерін сандық зерттеу нәтижелері келтірілген. Негізі ретінде Навье-Стокстың параболалық теңдеулер жүйесі алынған. Серіктес ағындағы Мах санының ағынға әсері зерттелген.

Библ. — 5.

УДК: 517.926 2000 MSC: 34B08

N u r g a b y l D. N. **Asymptotic evaluations of solutions of singularly perturbed boundary value problems with parameter**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.56–63.

In this paper the theorem on the asymptotic estimates of the solution and its derivatives is proved. The initial jump is defined.

References — 12.

УДК: 517.926 2000 MSC: 34B08

Н ұ р ғ а б ы л Д. Н. **Параметрі бар ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық бағамдары**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.56–63.

Бұл жұмыста шешімнің және оның туындысының асимптотикалық бағамдары туралы теорема дәлелденген. Шешімнің бастапқы мәніндегі секірістері анықталған.

Библ. — 12.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

O r u m b a y e v a N. T. **On one approach method of solving of semi periodical boundary value problem for the system of hyperbolic equations**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.64–74.

Two parametric family of algorithm of finding solution semi periodical boundary value problem for hyperbolic equations is offered. There are obtained necessary and sufficient conditions of unique solvability of investigated problem which guarantee convergence of the algorithms.

References — 9.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

О р ы н б а е в а Н. Т. **Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің шешімін табудың бір жуықтау әдісі туралы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.64–74.

Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің шешімін табудың қоспараметрлі алгоритмдер әулеті ұсынылады. Зерттелініп отырған есептің бірмезгілде алгоритмдердің жинақтылығын қамтамасыз ететін, бір мәнді шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Библ. — 9.

УДК: 681.324 2000 MSC: 94A60

O t e l b a e v M., S e i t k u l o v E. N **Cryptographical methods of economic forecast protection**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.75–80.

In this paper interpolation problem of a vector-function given in some points and forecasting problem with some secret parameters are under consideration.

References — 11.

УДК: 681.324 2000 MSC: 94A60

Отелбаев М., Сейтқұлов Е.Н. **Экономиканың болашақ мәндерін қорғау криптографиялық әдістері** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.75–80.

Бұл мақалада вектор-функцияның кейбір нүктелерде берілген құпия сақтай отырып интерполяциялау және болашақ мәндерін болжау проблемалары қарастырылады. Мұндай проблемалар экономикада, социологияда және де қоғам өмірінің тағы да көптеген салаларында туындауы жаһандану процесіне байланысты жиілеп барады.
Библ. — 11.

УДК: 517.958 2000 MSC: 35M10, 35P15

Sakabekov A. **Mixed value problem for one dimensional nonlinear Boltsmann's moment system equations in second approximation**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.81–85.

Existence and uniqueness of the global solution of mixed value problem for one dimensional nonlinear of system Boltsmann's moment equations in second approximation are proved in the function space, which are continuous in time and square summable in $x$.
References — 7.

УДК: 517.958 2000 MSC: 35M10, 35P15

Сақабеков А. **Больцманның бір өлшемді сызықсыз моменттік теңдеулер жүйесінің 2-ші жуықтауы үшін аралас есеп** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.81–85.

Мақалада бір өлшемді сызықсыз моменттік теңдеулер жүйесінің 2-ші жуықтауы үшін қойылған аралас есептің уақыт бойынша үзіліссіз, ал $x$ бойынша квадрат қосындыланатын функциялар кеңістігінде жалғыз глобал шешуі бар екендігі дәлелденген.
Библ. — 7.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. **On basic inverse problem of differential systems with diffusion degenerated with respect to a part of variables**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.86–92.

The necessary and sufficient conditions of basic according to A.S. Galiullin classification inverse problem into the class of Ito stochastic first order differential systems with random disturbances are received.
References — 11.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Тілеубергенов М.Ы., Ибраева Г.Т. **Диффузиясы айнымалыларының бір бөлігі бойынша азғындалатын дифференциалдық жүйелердің негізгі кері есебі туралы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.86–92.

Винер үрдістері класында кездейсоқ түрткілі және диффузиясы бөлігіне қарасты азғындалатын бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық жүйелерінің класында А.С. Галиуллин классификациясы бойынша негізгі кері есептің шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.
Библ. — 11.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Tleulesova A.B. **On unique solvability of two-points boundary value problem with impulse influence** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 4 (14). P.93–102.

Criterion of unique solvability of linear two-points boundary value problem with impulse influence in the term of the matrix $Q_\nu(h_1, h_2, \dots, h_{m+1})$ composing under right part of differential equation, boundary condition and condition of jump is established.

References — 6.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Тілеулесова А.Б. **Екі нүктелі импульстік әсері бар шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 4 (14). Б.93–102.

Дифференциалдық теңдеудің оң жағы, шектік шарт пен секіру шарттары арқылы құрылған сызықтық шеттік есептің шешілімділігінің белгісі $Q_\nu(h_1, h_2, \dots, h_{m+1})$, матрицасының терминінде тағайындалған.

Библ. — 6.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   **Цитированная литература**

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.