ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2012, том 12, № 3 (45)

Институт математики МОН РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №3 (45), 2012

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),

факс: 8 (727) 2 72 70 24,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12 **№ 3 (45)** **2012**

CONTENTS

Volume 12 **No. 3 (45)** **2012**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 3 (45).*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

МУХТАРБАЙ ОТЕЛБАЕВ
(к 70-летию со дня рождения)

В октябре этого года исполняется 70 лет выдающемуся казахстанскому математику, академику НАН РК Мухтарбаю Отелбаеву.

Мухтарбай Отелбаев родился 3 октября 1942 годы в селе Каракемер Курдайского района Жамбылской области. Трудовую деятельность он начал механизатором в родном ауле. Окончив в 1962 году вечернюю школу в с. Караконыз (ныне с. Масанчи), поступил в Киргизский государственный университет в г. Фрунзе (ныне г. Бишкек). После службы в 1962-1965 г.г. в рядах Советской Армии он продолжает учебу на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, который заканчивает в 1969 году. В том же году поступает в аспирантуру МГУ, его научные руководители - известные математики, профессора Б.М. Левитан и А.Г. Костюченко, в 1972 году защищает кандидатскую диссертацию на тему "О спектре некоторых дифференциальных операторов".

В 1973 году М. Отелбаев приезжает в Алма-Ату, поступает на работу в Институт математики и механики Академии наук Казахской ССР, работает младшим научным сотрудником, старшим научным сотрудником, заведующим лабораторией.

В 1978 году блестяще защищает докторскую диссертацию на тему "Оценки спектра эллиптических операторов и теоремы вложения, связанные с ними" в диссертационном совете мех-мата МГУ, возглавляемом выдающимся математиком, академиком АН СССР А.Н. Колмогоровым.

В 1989 году М. Отелбаев избирается членом-корреспондентом Академии наук Казахской ССР, а в 2004 году становится действительным членом Национальной Академии наук Республики Казахстан.

М. Отелбаев, математик разносторонних научных интересов, получил признание далеко за пределами страны как крупный специалист в области функционального анализа и его приложений. Он – автор 3 монографий и более 200 оригинальных научных работ и изобретений. Более 70 его статей опубликованы в рейтинговых международных научных журналах с импакт - фактором ISI или входящих в базу SCOPUS.

Приведем здесь наиболее крупные научные достижения М. Отелбаева.

I Спектральная теория дифференциальных операторов

М. Отелбаев разработал новые методы изучения спектральных свойств дифференциальных операторов, являющиеся результатом последовательного и искусного проведения в жизнь общей идеи о локализации рассматриваемых задач. В частности, им была изобретена конструкция усреднения коэффициентов, хорошо отражающая те особенности их поведения, которые влияют на спектральные свойства дифференциального оператора. Эта конструкция, известная под названием q^*, позволила ответить на многие актуальные вопросы спектральной теории оператора Шредингера и его обобщений.

Функция q^*, а также ее различные варианты обладают рядом замечательных свойств, позволивших применить ее в других вопросах, о чем будет сказано ниже. Здесь же мы отметим некоторые задачи, впервые решенные М. Отелбаевым с помощью функции q^* на основе тонкого анализа свойств дифференциальных операторов:

1) найден критерий принадлежности резольвенты оператора типа Шредингера с неотрицательным потенциалом классу $\sigma_p, 1 \le p \le \infty$ и получены двусторонние оценки собственных чисел этого оператора при минимальных условиях гладкости коэффициентов;

2) доказан общий принцип локализации задачи о самосопряженности и о максимальной диссипативности (одновременно с американским математиком П. Черновым), позволивший получить существенное продвижение теории в этих вопросах;

3) приведены примеры, показывающие, что, с одной стороны, клас-

сическая формула Карлемана-Титчмарша распределения $N(\lambda)$ собственных значений оператора Штурма-Лиувилля не всегда верна даже в классе монотонных потенциалов, с другой стороны, предложена новая формула, справедливая для всех монотонных потенциалов;

4) принципиально важен следующий результат М. Отелбаева: для $N(\lambda)$ *не существует универсальной асимптотической формулы*;

5) начиная со времен Карлемана, нашедшего асимптотику $N(\lambda)$ и затем перешедшего к асимптотике самих собственных чисел, все математики вычисляли асимптотику $N(\lambda)$ и в результате не могли избавиться от так называемых тауберовых условий. М. Отелбаев первым отказался от промежуточного шага - вычисления асимптотики $N(\lambda)$, что привело к избавлению от всех несущественных для этой задачи условий, в том числе и тауберовых;

6) для оператора Дирака впервые найдена двусторонняя асимптотика $N(\lambda)$, когда $N_-(\lambda)$ и $N_+(\lambda)$ не эквивалентны.

Результаты М. Отелбаева по спектральной теории отдельными главами вошли в ставшие классическими монографии Б.М. Левитана и И.С. Саргсяна "*Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*" М.: "Наука" , 1985, и А.Г. Костюченко и И.С. Саргсяна "*Распределение собственных значений*" М.: "Наука" , 1979.

II Теоремы вложения и теория аппроксимации

Эта область математики как отдельное направление сложилась, начиная с работ С.Л. Соболева 1930-х годов. Работами Л.Д. Кудрявцева (около 1960г.) начался новый период теории весовых функциональных пространств, применяемых в теории дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. М. Отелбаев занялся исследованиями в этой области, будучи уже зрелым математиком и сумел создать новый метод получения теорем вложения, по форме и по сути выражающий локальный подход к такого рода проблемам. В теории таких наиболее употребительных пространств Соболева (с весом), он получил следующие основополагающие результаты:

1) критерий вложения и компактности вложения;

2) двусторонние оценки нормы оператора вложения;

3) двусторонние оценки поперечников по Колмогорову вложения и ап-

проксимативных чисел оператора вложения и критерий принадлежности оператора вложения классам $\sigma_p, 1 \leq p \leq \infty$. Оказалось, что один из вариантов функции q^* является адекватным аппаратом для описания точных условий вложения. Для приложений особенно важно, что все оценки даются в терминах весовых функций и позволяют учитывать особенности их локального поведения.

III Разделимость и коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов

Термин "разделимость" примерно в 1970 году предложили известные английские математики Эверитт и Гирц, исследовавшие гладкость решения оператора Штурма-Лиувилля. Вскоре в исследования по этой теме подключился М. Отелбаев, который разработал новый метод, позволяющий изучать разделимость более общих, многомерных операторов и операторов переменного типа, а также гладкость решения нелинейных уравнений. В частности, этим методом можно исследовать разделимость общих дифференциальных операторов в весовых, не обязательно гильбертовых пространствах. Со свойственным ему стремлением решать задачи в наиболее общей постановке, М. Отелбаев получил:

1) весовые оценки промежуточных, а не только старших, производных решений широкого класса линейных и нелинейных дифференциальных уравнений;

2) оценки аппроксимативных чисел разделимых операторов, точные в некотором классе коэффициентов.

IV Общая теория краевых задач

Классическая постановка краевой задачи такова: дано уравнение и краевое условие. Необходимо исследовать разрешимость этой задачи и свойства решения, если оно существует (в смысле принадлежности некоторому пространству). Начиная с работы М.И. Вишика (1951г.), существует другой, более общий подход: задано уравнение и пространство, которому должны принадлежать правые части уравнений и краевых условий и решение. Нужно описать все краевые условия, для которых задача корректно разрешима в данном пространстве. И здесь М. Отелбаев, несмотря на имеющиеся многочисленные исследования, получил новые, замечательные по глубине и прозрачности результаты. Богатая математическая интуиция, глубина мышления и обширные познания в сочетании с отказом от традиционных ограничений на рассматриваемые операторы и пространства позволили ему разработать абстрактную теорию расширения и сужения (необязательно линейных) операторов в линейных топологических пространствах. С помощью этой теории М. Отелбаевым, его учениками и последователями впервые были описаны все корректные краевые задачи для таких "патологических" операторов, как оператор Бицадзе–Самарского, ультрагиперболический оператор, псевдопараболический оператор, оператор типа Коши–Римана и другие. При этом для некоторых из них ранее не было известно ни одной корректной краевой задачи! Рассмотрение велось в негильбертовых пространствах типа L_p, $p \neq 2$ и C. Данная теория также позволила описать структурные свойства спектра корректных сужений заданного дифференциального оператора.

V Теория обобщенных аналитических функций

В построенной известным ученым, академиком АН СССР И.Н. Векуа теории обобщенных аналитических функций основными являются следующие факты: а) теорема о представлении решения, б) теорема о непрерывности решения, в) теорема о фредгольмовости. Все остальные факты теории устанавливаются из а), б), в). Различные авторы постепенно расширяли класс пространств, в которых справедлива теория Векуа. М. Отелбаев среди пространств, близких к т.н. идеальным пространствам, нашел самое широкое пространство, которому должны принадлежать коэффициенты и правые части уравнений и граничных условий, чтобы оставались справедливыми факты а), б) и в).

VI В области вычислительной математики М. Отелбаевым предложен новый численный метод решения краевых задач (а также общих операторных уравнений), который. Используя теоремы вложения и теоремы о продолжении, поставленную краевую задачу он сводит к минимизации некоторого функционала. При этом граничные условия, а также нелинейности удается "упрятать" в интегральные выражения. Кроме того, указанным методом заодно решается проблема "выбора базиса", которая долгое время интересовала многих видных математиков. Метод М. Отелбаева достаточно просто алгоритмизируется, позволяет найти решение с требуемой точностью и реализует численное решение уравнения устойчиво. Эффективность метода подтвердили численные расчеты, проведенные его учениками и учениками профессора Шалтая Смагулова.

М. Отелбаевым разработан метод приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов несамосопряженных матриц, основанный на вариационном принципе. Метод сводит проблему к аналогичной задаче для самосопряженных матриц, для которых имеется продвинутая теория. В отличие от других методов, например, метода максимального градиента, данный метод 1) обеспечивает глобальную сходимость; 2) удобен при вычислении начального приближения; 3) позволяет вычислить собственные значения с наименьшей действительной частью; 4) может применяться в общем случае компактного несамосопряженного оператора.

М. Отелбаевым получена двусторонняя оценка наименьшего собственного числа одного разностного оператора, что имеет важное значение для вычислительной математики. В связи с необходимостью проведения громоздких вычислений в мире активно разрабатываются методы их распараллеливания. М. Отелбаевым предложен эффективный алгоритм распараллеливания при приближенном решении краевых задач и задачи Коши для различных классов дифференциальных уравнений.

VII Нелинейные эволюционные уравнения

В гидродинамике для описания ламинарных течений жидкости, а также турбулентных движений используется начально-краевая задача для системы уравнений Навье - Стокса, существование глобального решения которой без требований малости данных задачи до сих пор не доказано. М. Отелбаев свел проблему существование глобального решения задачи для уравнений Навье - Стокса к другим эквивалентным задачам, в частности, к вопросу существования т.н. "разделяющей функции". Он получил критерий сильной разрешимости нелинейных эволюционных уравнений, близких к уравнению Навье - Стокса, а также построил примеры не сильно разрешимых в целом уравнений, к которым сводятся системы типа Навье-Стокса.

VIII М.Отелбаев получил ряд интересных математических результатов в области теоретической физики:

а) получил явные формулы движения n-частиц в пространстве (в рамках теории относительности Эйнштейна);

б) вывел интегральную формулу движения материи;

в) предложил новое преобразование типа известного преобразования Лоренца, которое имеет место как при $|\nu| < C$, так и при $|\nu| > C$. При $|\nu| < C$ преобразование М. Отелбаева совпадает с преобразованием Лоренца;

г) доказал, что результаты физики, вытекающие из специальной теории относительности Эйнштейна, можно получить на основе классической волновой теории.

IX Исследования в других областях

Научные интересы М. Отелбаева весьма и весьма разносторонни. Следующие темы завершают их неполную характеристику.

1) М. Отелбаевым был выбран один нелинейный интегральный оператор, для которого он доказал критерий непрерывности. Этот оператор оказался важной моделью в теории интегральных нелинейных операторов, на которой можно разрабатывать и испытывать новые методы. Благодаря этому М. Отелбаев совместно с профессором Р. Ойнаровым получили необходимое и достаточное условие липшицевости (сжимаемости) оператора Урысона в пространствах суммируемых и непрерывных функций.

2) Им установлены спектральные характеристики и гладкость решения уравнений смешанного типа. Найден критерии совпадения обобщенной задачи Неймана и задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения.

3) В последние годы модной в математике стала тема осцилляторности и неосцилляторности решений дифференциальных уравнений. М. Отелбаевым еще в конце 80-х годов прошлого столетия получено близкое к необходимому достаточное условие неосцилляторности решения уравнения Штурма-Лиувилля.

3) М. Отелбаев исследовал задачу управления лазерным источником тепла, показал, что при обычной постановке она не имеет даже обобщенного решения и предложил новую постановку задачи с учетом "заказа" и "допуска точности" при обработке поверхности. Доказал разрешимость

этой задачи в такой постановке и решил некоторые оптимизационные задачи без использования известных методов оптимального управления. Кроме того, им совместно с профессором А. Хасаноглы решена обратная задача идентификации неизвестного временного источника на основе измеряемых выходных данных, когда граничные условия задаются в виде Дирихле, Неймана, а также в виде финального переопределения.

Подводя итог обзору научного творчества М. Отелбаева, в качестве характерных черт его деятельности можно выделить разносторонность его научных интересов, фундаментальность исследований, стремление решать задачи в наиболее общей постановке и доводить решения до уровня критериев. Большое количество опубликованных работ М. Отелбаева характеризует его высокую работоспособность, трудолюбие и научную продуктивность.

М. Отелбаев ведет большую работу по подготовке высококвалифицированных научно-педагогических кадров. Он более 35 лет читает лекции для студентов различных вузов республики, им организован ряд семинаров и кружков для аспирантов, стажеров, PhD докторантов, магистрантов и студентов. Хорошо известны разработанные им спецкурсы "Расширения и сужения дифференциальных операторов", "Теория разделимости", "Теоремы вложения", "Современные численные методы" и многие другие.

Академиком М. Отелбаевым создана крупная научная математическая школа в Казахстане. Под его руководством более 70 человек защитили кандидатские диссертации, из которых 9 стали докторами наук.

М. Отелбаев внес существенный вклад в организацию и развитие науки и образования в Казахстане. В 1985–1986 годы он работал ректором Джамбулского педогогического института, с 1991 по 1993 годы организовал и работал директором вновь открытого Института прикладной математики Академии наук и Министерства образования Республики Казахстан в г. Караганда, в 1994–1995 годы заведовал отделом Аэрокосмического агентства республики, а с 2001 года является заместителем директора Казахстанского филиала МГУ им. М.В. Ломоносова. Одновременно с 2004 года М. Отелбаев – главный научный сотрудник РГП "Институт математики, информатики и механики" КН МОН РК.

М. Отелбаев в течение ряда лет работал членом редколлегии журнала "Известия Академий наук РК. Серия физико-математическая" и научного журнала "Applied and Computational Mathematics" национальной Академии наук Азербайджана. Он является членом редколлегии научного "Математического журнала", издаваемого Институтом математики МОН РК с 2001 года. Был одним из организаторов и редактором "Евразийского математического журнала", издаваемом ЕНУ им. Л.Н. Гумилева совместно с МГУ им. М.В. Ломоносова. С 2010 года является редактором "Eurasian mathematical journal", издаваемого на английском языке.

В 2007 года он был избран вице-президентом Математического общества тюркского мира.

В 2007 году академику Мухтарбаю Отелбаеву была присуждена Государственная Премия Республики Казахстан в области науки и техники.

В 2004 году он стал лауреатом премии Организации экономического сотрудничества в номинации "Наука и технологии". М. Отелбаеву в 2006 году и в 2011 году присужден государственный грант "Лучший преподаватель вуза".

Мухтарбай Отелбаевич находится в расцвете творческих сил для активной научной и научно-организационной деятельности на благо общества, развития науки и математического образования Республики Казахстан.

Редакция "Математического журнала" поздравляет с юбилеем замечательного человека и выдающегося математика — академика Национальной академии наук Республики Казахстан Мухтарбая Отелбаевича Отелбаева и желает ему долгих лет плодотворной творческой работы, счастья и больших успехов.

Редакционная коллегия

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.95

М. Отелбаев
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева
Казахстан, 010008, Астана, ул.Мунайтпасова 5, e-mail: otelbaevm@mail.ru

КРАТКИЙ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ МОИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В этой статье я привожу краткий обзор некоторой части моих работ, и работ близких моим исследованиям.
Ключевые слова: *спектр, расширение и сужение операторов.*

1 О распределении спектра. Оценки спектра операторов типа Шредингера

Пусть L - оператор Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \tag{1}$$

рассматриваемый в пространстве $L_2(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. К (1) еще необходимо присоединить некоторые граничные условия; мы их не будем записывать, но учтем этот факт.

Оператор L, помимо самостоятельного значения, большую роль играет как модельный оператор, на котором, как правило, разрабатываются и испытываются новые методы в теории эллиптических уравнений.

Keywords: *Spectrum, expansion and contraction operators*
2010 Mathematics Subject Classification: 35P15; 35P20

Если $Imq(x) = 0$ и $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$, то оператор L будет самосопряженным и его спектр будет дискретным, а резольвента – компактным оператором. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ – собственные числа оператора L, занумерованные в порядке неубывания, с учетом кратности. Для функции распределения собственных чисел $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} 1$ известна классическая формула

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda>q(x)} \sqrt{\lambda - q(x)}dx. \tag{2}$$

Эта формула называется формулой *Карлемана–Титчмарша* и она была доказана при выполнении ряда условий Титчмарша–Левитана.

Были многочисленные попытки доказать формулу (2) при произвольном потенциале $q(x)$, стремящемся к $+\infty$ при $|x| \to \infty$. Но мне вместе с моим другом Я. Султанаевым удалось построить пример функции $q(x) \geq 1$, для которой формула (2) не верна [1]. Позже я показал, что, вообще говоря, не существует эффективной формулы распределения справедливой для всех $q(x) \geq 0$, стремящихся к $+\infty$ при $|x| \to \infty$ [2, с. 158 – 164, 269 – 277].

Для многих задач механики и теоретической физики были важны не сами асимптотические формулы, а следствия этих формул, приводящие к оценкам собственных чисел. По этой причине я исследовал *возможность прямого получения оценки* собственных чисел.

Пусть $q(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. Для $x \in (-\infty, +\infty)$ положим

$$q^*(x) = inf_{\infty>d>0}\Big\{d^{-2} : d^{-1} \geq \int_{x-d}^{x+d} q(\eta)d\eta\Big\}.$$

Мною были получены двусторонние оценки [3-8]:

$$M(C^{-1}\lambda) \leq N(\lambda) \leq M(C\lambda), \tag{3}$$

верные, если $q^*(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$.

Здесь C – не зависит от λ и $q(x)$; а $M(\lambda) = \sqrt{\lambda}\, mes\{x : q^*(x) \leq \lambda\}$.

В последствии Р. Ойнаровым, Л. Кусаиновой, Я. Султанаевым, М. Муратбековым, К. Оспановым, а также мною введены различные варианты и обобщения функции $q^*(x)$, обслуживающие вопросы спектральной теории дифференциальных операторов и теории вложений весовых пространств

[9 – 32]. Имеются варианты $q^*(x)$, обслуживающие задачи разделимости линейных и нелинейных уравнений, а также проблемы осцилляторности дифференциальных уравнений. Существует и дискретный аналог функции $q^*(x)$ (см., например, [17]), хорошо обслуживающий соответствующее разностное уравнение Штурма – Лиувилля.

Из (3) вытекают важные оценки

$$C^{-1}F(n) \leq \lambda_n \leq CF(n), n = 1, 2, ..., \tag{4}$$

которые верны, если $q^*(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. Здесь C – не зависит от n и $q(x) \geq 0$, а $F(\cdot)$ – функция, обратная к $M(\cdot)$ в смысле преобразования.

Из оценки (4) получается критерий (т.е. совпадающие необходимые и достаточные условия) принадлежности классам σ_p $(0 < p < \infty)$, в частности критерий ядерности и Гильберта–Шмидтовости.

Отметим также интересное неравенство, приведенное в [7]:

$$C^{-1}q^*(x)^{-1/2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_n(x)|^2}{\lambda_n} < Cq^*(x)^{-1/2},$$

где C – не зависит от $x \in (-\infty, \infty)$ и $q(x) \geq 0$.

Приведенные выше для оператора Штурма–Лиувилля результаты обобщены на случай общих самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных операторов многих переменных (см. [9-32]). Отличие лишь в том, что в случае несамосопряженных операторов вместо собственных чисел фигурируют s-числа (сингулярные числа).

В этих исследованиях в основном использованы вариационные методы. Поэтому решаемые мною задачи связали нас с теорией вложений весовых пространств.

Для некоторого класса весовых пространств в [9-32] получены:

а) критерий вложения весового пространства в пространства Рисса;

б) критерий компактности вложения весового пространства в пространства Рисса;

в) двухсторонние оценки (в метрике пространств Рисса) поперечников по Колмогорову единичного шара весового пространства.

Эти очень кратко описанные результаты изложены в статьях [1], [3-30], а также в монографиях [2], [31] и [32]. Монографию [31] я написал самолично (кроме дополнений), а монографию [32] практически полностью написал К. Мынбаев.

Во времена работ в области этих тем я непрерывно чувствовал поддержку и внимание моих дорогих учителей Б.Н. Левитана, А.Г. Костюченко, И.С. Саргсяна, М.Г. Гасымова, Т.И. Аманова, В.В. Жикова, В.А. Садовничего, П.И. Лизоркина, а также своих коллег и друзей Т.Ш. Кальменова, Я.Т. Султанаева, А.А. Шкаликова, Ш.С. Смагулова, Т.К. Нурекенова, Е.С. Смаилова, К.А. Касымова.

Я, не ограничиваясь исследованиями в области спектральной теории, много исследовал весовые теоремы вложений. Этому способствовали мои близкие контакты с моими учителями Т.И. Амановым и П.И. Лизоркиным.

В 1972–1991 годы я с некоторыми из моих учителей (Т.И. Аманов, Б.Н. Левитан, П.И. Лизоркин) и друзьями-коллегами (Т. Кальменов, В. Мазья, Л. Ценд, Я. Султанаев, Г. Суворченкова и др.), а также учениками (Р. Ойнаров, М. Муратбеков, К. Оспанов, А. Шыныбеков, Б. Кокебаев, К. Мынбаев и др.) написал и опубликовал достаточно большое число работ.

2 О расширениях и сужениях операторов

Теория расширений симметрических операторов была построена Дж. фон Нейманом [33]. Дальнейшее развитие эта теория получила в работе М.И. Вишика [34], в которой основные идеи Неймана были реализованы для случая несамосопряженных задач. В этих работах изучались и описывались расширения L минимального оператора L_0, являющиеся одновременно сужением максимального оператора L_m, т.е. $L_0 \subset L \subset L_m$.

Напомним, что линейный оператор L_m, рассматриваемый в банаховом пространстве H, называется *максимальным*, если выполнены условия:

а) L_m - замкнут,

б) уравнение $L_m u = f$ имеет решение $u \in D(L_m) \subset H$ для любого $f \in H$, где $D(\cdot)$ - область определения.

Оператор L_0 - называется *минимальным*, если уравнение $L_0 u = f \in H$ имеет единственное решение из $D(L_0)$ для всех $f \in R(L_0)$ и выполнена оценка $\|u\| \leq C_0 \|f\|$, где C_0 – не зависит от f.

Напомним также, что запись $A \subset B$ означает, что $D(A) \subset D(B)$ и, если $x \in D(A)$, то $Ax = Bx$.

Т. Кальменов заметил, что теория Неймана – Вишика не охватывает широкий круг корректных задач и сообщил (на семинаре), что вне теории Неймана – Вишика остается известная задача А.В. Бицадзе – А.А. Самарского [35]. А это подтолкнуло меня на построение теории всех корректных сужений максимального оператора (не обязательно являющихся расширением одного фиксированного минимального оператора). Я также принялся строить теорию всех корректных расширений минимального оператора (не обязательно содержащихся в одном фиксированном максимальном).

Оказалось, что описание расширений или сужений можно проводить в терминах обратных операторов и это позволяет достаточно эффективно использовать эти теории при изучении краевых задач (см. [36] – [45]).

Я приведу свои основные результаты, касающиеся теории сужений максимального оператора.

Определение 1. *Сужение L максимального оператора L_m - назовем* корректным*, если L имеет ограниченный обратный L^{-1}, определенный на всем H, т.е. если уравнение $Lu = f \in H$ имеет единственное решение $u \in D(L)$ при любом f из H.*

Напомним, что *ядром оператора L_m* называется максимальное линейное многообразие $N = KerL_m$ такое, что $N \subset D(L_m)$ и, если $x \in N$, то $L_m x = 0$.

Теорема 1. *Пусть L_Φ - есть некоторое корректное сужение максимального оператора L_m, тогда справедливы утверждения а) и б):*

а) Если K - ограниченный оператор, действующий из H в ядро $KerL_m$ оператора L_m, то оператор $[L_\Phi^{-1} + K]^{-1}$ – является корректным сужением максимального оператора L_m;

б) Наоборот, если $\widetilde{L}$ – корректное сужение максимального оператора L_m, то существует оператор K, действующий из H в $KerL_m$ и верна формула $\widetilde{L}^{-1} = L_\Phi^{-1} + K$, т.е. $\widetilde{L} = [L_\Phi^{-1} + K]^{-1}$.

Эта формула описывает ***все*** корректные сужения максимального оператора, в частности, все обратимые сужения, описанные М.И. Вишиком (см. [36] – [39]). Если L_Φ^{-1} – самосопряжен (неотрицателен), то беря самосопряженные (неотрицательные) операторы K, получаем корректные самосопряженные (неотрицательные) сужения оператора L_m.

Следует отметить, что если M – множество всех ограниченных операторов, действующих из H в $D(L_m)$, то области значений всех операторов из множества $\widetilde{M} = \{K : \ K = (E - L_{\Phi}^{-1} L_m)G, \ G \in M\}$ совпадают с ядром оператора L_m. Поэтому в Теореме 2.1. в качестве K можно взять оператор $K = (E - L_{\Phi}^{-1} L_m)G$, где $\widetilde{M}$ – множество непрерывных операторов действующих из H в $D(\widetilde{L})$, E - единичный оператор, а L_{Φ} - фиксированное корректное сужение.

Некоторые интересные применения теории сужений и расширений найдены в работах Т. Кальменова, Р. Ойнарова, М. Садыбекова, Б. Кангужина, И. Парасиди и Б. Биярова. Приведем два легко запоминающихся результата, понравившихся мне и легко вытекающих из теории.

Теорема 2. *(Отелбаев М.) Любое нормальное расширение симметрического оператора – самосопряженно.*

Напомним, что оператор называется *нормальным*, если его резольвента перестановочна со своим сопряженным.

Теорема 3. *(Бияров Б.) Пусть Ω – область R^n с липшицевой границей $\partial\Omega$, а L_m – максимальный оператор, порожденный оператором Лапласа. Если L – корректное сужение максимального оператора L_m и $D(L) \subset W_2^l(\Omega)$, где $l \geq 1/2$ при $n \geq 3$ и $l > 1$ при $n = 2$, то L^{-1} – не вольтерров.*

Оказалось возможным описать все корректные сужения операторов, которых И.Г. Петровский назвал патологическими.

Отметим, что для описания расширений минимального оператора можно пользоваться тем, что если L – корректное сужение L_{max}, то из $L_{max} \supset L$ вытекает $L^* \supset (L_{max})^*$ и оператор $(L_{max})^*$ – есть минимальный оператор, а L^* – его корректное расширение. В работах [37 - 39] приведены приемы, позволяющие любые корректные сужения максимального дифференциального оператора записать в виде граничной задачи.

Наша теория, являющаяся продолжением теории Неймана-Вишика, проще своей предшественницы и более эффективна в применении.

При создании этой теории, я систематически опирался на мнение своего друга Кальменова Т.Ш., который бескорыстно помогал мне.

Для меня также важны были активная работа Р. Ойнарова, Б. Кангужина, И. Парасиди, Б. Кокебаева, А. Шыныбекова, Б. Биярова, М. Садыбекова и других математиков, обучавшихся у меня и у Т. Кальменова.

К сожалению, из-за ограничения объема статьи, я не смог на должном уровне остановиться на исследованиях Т. Кальменова, Р. Ойнарова, Б. Кангужина, Б. Биярова, М. Садыбекова и их многочисленных учеников, которые написали очень много работ, посвященных различным следствиям и применениям теории сужений и расширений.

Исследования в этой области позволили мне и Т. Кальменову (при активном содействии Р. Ойнарова, К. Мынбаева, Б. Кангужина, М. Муратбекова и М. Садыбекова) организовать в Казахстане крупную школу по дифференциальным операторам.

3 Разделимость линейных и нелинейных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = f(x) \in L_2(0, +\infty), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение (5) называется *разделимым* в $L_2(0, +\infty)$, если из $f \in L_2(0, +\infty)$ вытекает $y'' \in L_2(0, +\infty)$.

Термин разделимость введен в работах [46], [47]. В Советском Союзе начиная с 1972 г. проблемой разделимости начал заниматься К. Бойматов, который написал ряд фундаментальных работ. К. Бойматов использовал известный метод Титчмарша оценки резольвенты. Метод Титчмарша в [48] был мною модернизирован. Поэтому мне удалось получить результаты в $L_p(0, +\infty)$ и обобщить их на многомерные случаи [48 – 57]. Чуть позже я придумал *формулу локализации резольвенты* для общих дифференциальных и псевдодифференциальных операторов.

Основные результаты по проблеме разделимости, полученные мною и К. Бойматовым, опираются на мою формулу локализации и ее различные варианты [54].

Пользуясь одной идей Р. Ойнарова, мне вместе с одним учеником удалось доказать, что уравнение (5) разделимо в $L_1(0, +\infty)$, если $q(x) \geq 0$. Такой результат был обобщен на многомерные уравнения типа Шредингера, а также на их разностные аналоги [31, 53].

Исследования на *разделимость нелинейных уравнений* потребовали новых подходов. Такие новые подходы появились благодаря моим неудачным попыткам решить проблему существования сильного решения уравнений

Навье-Стокса. Основные мои и моих учеников результаты о разделимости нелинейных уравнений содержатся в работах [48-60].

Работы [61-67] посвящены абстрактным уравнениям типа Навье-Стокса. Отметим, что полученные теоремы разделимости и результаты, описанные в этом пункте, позволяет получить двухсторонние оценки (поперечников) множеств вида $M = \{g : \ u = L(g), |u| \leq C\}$, где $L(\cdot)$ – нелинейный оператор (например, $L(g) = -g'' + q(x)g^3, \ g(0) = 0, \ q(x) \geq 1$).

Направления, связанные с проблемами разделимости линейных или нелинейных эллиптических, параболических и гиперболических операторов получили и получают дальнейшее развитие в работах М. Муратбекова, К. Оспанова и их учеников.

4 О проблемах численного решения уравнений

Если A – ограниченное непрерывное преобразование в гильбертовом пространстве H, то проблему решения уравнения $Au = f$ можно свести к проблеме минимизации функционала $J(u) = |A(u) - f|^2$, где $|\cdot|$ - норма в H.

Пусть $\xi \in (0, \infty)$ - параметр. Определим вектор-функцию $u(\xi)$ как решение уравнения

$$u_\xi(\xi) = -B_u^*\big(A(u) - f\big), \ 0 < \xi < \infty; \ u(0) = 0.$$

Здесь B_u' – производная по Гато преобразования $A(\cdot)$ в точке u, а B_u^* – оператор, сопряженный к B_u' (при каждом $u \in H$). Для $J(u)$ имеем

$$J\big(u(\xi)\big) = J\big(u(0)\big) - \int_0^\xi \Big|B_u^*\big(A(u) - f\big)\Big|^2 d\eta.$$

Поэтому при выполнении некоторых простых условий, мы получим, что $u(\xi)$ стремится к решению уравнения $A(u) - f = 0$ при $\xi \to \infty$.

В моих работах, относящихся к области вычислительной математики, некоторые из которых выполнены совместно с известными специалистами в области вычислительной математики Ш. Смагуловым, Б. Рысбайулы, Ж. Балдыбек, используется выше описанная идея. Кроме того, эффективно используются оценки коэрцитивности, теоремы продолжения и вложения, с которыми я имел дело в работах [1 – 32].

Продемонстрируем разработанный метод на примере одного нелинейного уравнения. Пусть Ω – ограниченная область в R^2 с гладкой границей $\partial\Omega$. Можно считать, что $\Omega \subset Q$, где Q - единичный куб с центром в нуле. Пусть существует достаточно гладкая периодическая в Q функция $F(x)$, что $|gradF(x)| \geq C_0 > 0$ и $F(x) < 0$ в Ω, $F(x) > 0$ вне Ω и $F(x) = 0$ на $\partial\Omega$.

Рассмотрим *задачу Дирихле*: $-\triangle u + q(x,u)u = f$ в Ω и $u(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, где $q(x,u)$ – бесконечно гладкая неотрицательная функция. Тогда хорошо известно, что если $f(x) \in W_2^k(\Omega)$, то $u(x) \in W_2^{k+2}(\Omega)$. Поэтому легко доказать, что верно представление $u(x) = F(x) \cdot v(x)$, где $v(x) \in W_2^{k+2}(\Omega)$. Но, по теореме о продолжении, $v(x)$ можно продолжить на всю Q так, чтобы $v(x)$ была периодической функцией из класса $v(x) \in W_2^{k+2}(Q)$. Тогда приближение $v_N(x)$ к $v(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше N, $N < \infty$ можно искать в виде $v_N(x) = K_N * g(x)$, где K_N – тригонометрический полином, у которого все коэффициенты Фурье порядка $\leq N$ не нули.

Подставляя $u_N = F(x) \cdot v_N = F(x)\big(K_N * g(x)\big)$ в уравнение $-\triangle u + P_N q(x,u)u(x) - P_N f(x) = 0$, где P_N - ортогональный проектор на подпространство тригонометрических полиномов порядка $\leq N$, получаем уравнение, приближающее исходную задачу с ограниченными операторами.

Для u_N граничные условия выполняются автоматически. Получили приближение исходной задачи системой из N алгебраических уравнений.

Такую простую идею оказалось можно использовать для широкого круга задач (см. [67] – [79]).

К числу моих работ, относящихся к вычислительной математике, я отношу работы, связанные с вопросами распараллеливания процесса решения уравнений. Известные в этой области работы, как правило, распараллеливают линейные алгебраические системы с ленточными матрицами (например, трёх- или четырёх- диагональными) или редкоэлементными матрицами. Надо сказать, что даже в этих случаях предлагаемые варианты распараллеливания не всегда удачны.

Придуманный мною способ распараллеливает алгебраическую систему с произвольной матрицей. Причем, затрачиваемое время при параллельной работе n одинаковых компьютеров примерно будет в n раз меньше, чем если бы работал один компьютер. Это весьма важно при использовании супер-компьютеров со многими процессорами.

Моя идея проста – нужно использовать итерационный метод. Тогда на каждом шагу основной работой будет вычисление действия матрицы на элемент, а это эффективно распараллеливается [80– 82]. И этот метод можно легко реализовать в "железках".

5 К абстрактным теоремам вложений и о нелилейных интегральных уравнениях

В этом параграфе кратко сообщу о некоторых своих результатах, которыми я занимался кратковременно, под влиянием временных обстоятельств.

Хорошо известна классическая *теорема Арчеля* о компактности множества в пространстве непрерывных функций. Теорема Арчеля была обобщена на случай пространств Рисса (Теорема Фреше - Колмогорова). Мне вместе с моим другом Л. Цендом удалось распространить теорему Фреше - Колмогорова на случай общих пространств, в которых оператор сдвига сильно непрерывен [83]. Более того, если пространство H порождено по аналогии с пространствами Соболева или Никольского–Бесова с помощью инфенитезимального оператора сильно непрерывной полугруппы, то в H верна теорема – аналог теоремы Фреше–Колмогорова (доказано в [83]). Результаты вышеуказанных работ не привожу из-за недостатка места.

Мною, совместно с Лхамсурэн Цендом, был получен и следующий результат

Теорема 4. *Пусть H – гильбертово пространство периодических на n-мерном замкнутом кубе Q функций. Предположим, что норма в H инвариантна относительно сдвига. Тогда:*

а) пространство H вложено в пространство непрерывных периодических функций $C(Q)$, если и только, если для любого $x \in Q$ выполнено

$$l(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left|\psi_n(x)\right|^2 < \infty;$$

б) Если H вложено в $C(Q)$, то $l(x) \equiv l(o) < \infty$.

Эта теорема содержится в [32]. Она легко обобщается на случай, когда вместо Q выступает любая компактная группа.

Мною получены некоторые результаты для нелинейных интегральных операторов в работе [84] (соавтор Г. Суворченкова) и в работах [85, 86] (соавтор Р. Ойнаров). В [86] главные результаты принадлежат Р. Ойнарову. Знакомству с этой тематикой я обязан моему старшему товарищу Т.К. Нурекенову, который посвятил много работ теории нелинейных интегральных операторов.

Главным результатом работы [86] является *критерий Липшицевости* интегрального оператора из L_1 в L_p $(p \geq 1)$ и вычисление коэффициента Липшица. Основные идеи этих работ мною были использованы при написании работ [87, 88]. В [88] я указал необходимое и достаточное условие, чтобы пространство было пространством Векуа.

6 О проблемах самосопряженности и о теории относительности

Хорошо известно, что для многих операторов, используемых в теоретической физике, весьма важны вопросы существенной самосопряженности. Поэтому я, под влиянием моих учителей (М.Г. Гасымов, А.Г. Костюченко и Б.М. Левитан), некоторое время занимался самосопряженностью операторов Дирака и Шредингера с операторным потенциалом. Главным моим результатом был "*принцип локальности*", который всегда имеет место для оператора Дирака, а для оператора Шредингера – при выполнении дополнительного условия полуограниченности.

Приведем принцип локальности для оператора Шредингера.

Теорема 5. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, а $L_{2,H}(R^n)$ – пространство суммируемых с квадратом нормы функций со значениями в H. Предположим, что $Q(x)$ – самосопряженный неотрицательный сильно непрерывный оператор в H с областью определения $D\big(Q(x)\big) \supseteq \widehat{D}$, где $\widehat{D}$ – плотное в H линейное многообразие. Пусть L – есть замыкание в $L_{2,H}(R^n)$ оператора $Lu = -\triangle u + Q(x)u$, первоначально определенного на множестве $C_0^2(\widehat{D})$ дважды непрерывно дифференцируемых функций со значениями в $\widehat{D}$.*

Тогда оператор L – будет самосопряженным, если для любого $x_0 \in R^n$ найдется $\varepsilon >$ о такое, что самосопряжен оператор $L_{x_0,\varepsilon}$. Здесь $L_{x_0,\varepsilon}$ – замыкание в $L_{2,H}(R^n)$ оператора $-\triangle u + \chi_\varepsilon(x-x_0)Q(x)u$, где $\chi_\varepsilon(x-x_0)$ – характеристическая функция шара с центром в x_0, радиусом равным ε.

Эту теорему можно эффективно использовать. Она позволила получить новые результаты уже в случае скалярных уравнений [89 – 91].

Постановка вопросов о самосопряженности операторов Дирака и Шредингера на самом деле лежит довольно далеко от первоначального возникновения их в теоретической физике.

Но они меня толкнули к исследованиям [92, 93] и [94], которые относятся к теоретической физике. В [94], пользуясь псевдонимом *"Шойкара"*, я рассматривал физику, в которой законы инвариантны относительно преобразования Лоренца. В такой физике частицы могут двигаться со скоростью большей, чем скорость света. Здесь словосочетание "скорость света" на самом деле означает скорость передачи информации.

Причем все частицы можно делить на два класса:

а) *быстрые*, движущиеся со скоростью быстрее, чем скорость света;

б) *медленные*, движущиеся со скоростью меньшей, чем скорость света.

При любом преобразовании Лоренца быстрые переходят в быстрые, а медленные - в медленные. *Если пролетающая частица – быстрая, то наблюдателю кажется, что в какой-то точке из ничего возникли две разлетающиеся частицы.*

Оказалось, что можно, оставаясь в пределах физики Ньютона–Галилея, получить результаты, к которым приводит теория относительности. Но при этом необходимо придерживаться волновой теории, а частицы считать, чем-то типа устойчивых "вихрей". Мечтаю к этой тематике вернуться, пополнив свои познания в области физики.

Конечно, теория относительности (так же, как и теория Ньютона–Галилея) есть всего лишь модель Мироздания, которая не противоречит накопленным экспериментальным данным. В будущем, безусловно, появятся новые экспериментальные факты, которые потребуют построения новых моделей Мироздания.

Удивительна наивность многих известных физиков, которые верят, что Мироздание возникло согласно теории большого взрыва и в возможность существования модели, адекватно описывающей Мироздание.

Наконец скажу, что любая правильная модель, безусловно, имеет аксиоматическую базу. Поэтому, так как любая аксиоматизированная теория есть некая математическая теория, то теоретическая физика есть просто математика.

И, следовательно, любая правильная модель Мироздания, окажется просто математикой! Мы, создавая модель Мироздания, пытаемся "угадать" замысел Всевышнего. Я считаю, что Всевышний создал Мироздание и контролирует законы неживой и живой природы. А тем, кому он подарил разум, он заодно подарил и сектор свободы. В этом секторе мы, разумные создания Всевышнего, творим добро или зло. Всевышний всегда может вмешаться в развитие любых событий в секторе свободы, но он это делает крайне редко.

В силу нехватки места мне пришлось промолчать о многих моих результатах в области проблем защиты информации, а также о работах, посвященных управлению лазерным источником тепла. В таких работах моими соавторами были Хасаноглы Алемдар, Молдабеков С., Болеева М. (см. [95-100]) и другие.

К сожалению, не хватило места и для изложения содержания моих изобретений, относящихся к инженерным наукам.

Надеюсь, что еще найду для этого время и место.

Литература

1 Отелбаев М., Султанаев Я. К формулам распределения собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, №3. – С. 361-368.

2 Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М: Наука, 1979. – 450 с.

3 Отелбаев М. Двусторонние оценки поперечников и их применения // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 231, №4. – С. 810-813.

4 Отелбаев М. Оценки собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20, №6. – С. 859-867.

5 Отелбаев М. Двусторонние оценки собственных чисел оператора Штурма-Луивилля // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20, №6. С. 859-867.

6 Отелбаев М. Оценки s-чисел и условия полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля // Матем. заметки. – 1979. Т. 25, №3. – С. 409-418.

7 Отелбаев М. Критерий ядерности резольвенты Штурма-Лиувилля // Матем. заметки. – 1979. – Т. 20, №3. – С. 569-572.

8 Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Труды МИАН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 265-305.

9 Кусаинова Л.К. Оценки поперечников единичного шара функционального пространства в L_p // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 251, №4. – С. 791-794.

10 Кусаинова Л.К., Мынбаев К.Т. К теоремам вложения и компактности для анизотропных весовых пространств Соболева // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 263, №5. – С. 1050-1053.

11 Ойнаров Р., Отелбаев М. Критерий дискретности спектра общего оператора Штурма–Лиувилля и теоремы вложения, связанные с ними // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, №4. – С. 584-591.

12 Ойнаров Р. О разделимости оператора Шредингера в пространстве суммируемых функций // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 285, №5. – С. 1062-1064.

13 Ойнаров Р. Критерии ограниченности и компактности одного разностного вложения // Матем. заметки. – 1991. – Т. 50, №5. – С. 54-60.

14 Отелбаев М., Оспанов К. Н. Об обобщенной системе Коши-Римана с негладкими коэффициентами // Изв. Вузов. Математика. – 1989. №3. – С. 48-56.

15 Оспанов К.Н. Коэрцетивная разрешимость обобщенной системы Коши-Римана в пространстве $L_p(E)$ // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, №11. – С. 1564-1569.

16 Отелбаев М. Критерий совпадения расширений эллиптического оператора, соответствующего задачам Дирихле и Неймана // Матем. заметки. – 1981. – Т. 29, №6. – С. 867-875.

17 Отелбаев М., Муслимов Б. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма-Лиувилля // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1981. – Т. 21, №6. – С. 1430-1434.

18 Отелбаев М., Аманов Т. Теоремы вложения для одного семейства весовых пространств // Тр. межд. конф. по теории приближений. – Москва, 1976. – С. 5.

19 Отелбаев М. Критерий дискретности спектра одного вырожденного оператора и некоторые теоремы вложения // Дифференц. уравнения. – 1977. Т. 13, №1. – С. 111-120.

20 Отелбаев М. Оценки поперечников по Колмогорову для одного класса весовых пространств // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 235, №6. – С. 1270-1273.

21 Отелбаев М. О весовых теоремах вложения // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234, №6. – С. 1265-1268.

22 Отелбаев М., Мазья В.Г. О теоремах вложения и спектре одного псевдодифференциального оператора // Сиб. мат. журнал. – 1977. – Т. 18, №5. – С. 1073-1087.

23 Отелбаев М., Лизоркин П.И. Теоремы вложения для одного класса весовых пространств и их применения / Теор. кубат. формул и выч. мат. // Тр.конф.по диф. ур-м и выч.мат. – Новосибирск, 1978. – С. 220-224.

24 Отелбаев М., Лизоркин П.И. Теоремы вложения и компактности для пространств Соболевкого типа с весами. ч. 1 // Математический сборник. – 1979. – Т. 108, №3. – С. 358-377.

25 Отелбаев М., Апышев О.Д. О спектре одного класса вырожденных дифференциального операторов и некоторые теоремы вложения // Известия АН СССР. серия физ.-мат. – 1979. – Т. 43, №4. – С. 739-764.

26 Отелбаев М., Апышев О.Д. О спектре одного класса двучленных операторов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248, №2. – С. 265-268.

27 Отелбаев М. Оценки аппроксимативных чисел операторов, связанных с эллиптическими уравнениями // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248, №4. – С. 783-787.

28 Отелбаев М., Лизоркин П.И. Теоремы вложения и компактности для пространств Соболевского типа. ч.2 // Математический сборник. – 1980. – Т. 112, №5. – С. 154-183.

29 Отелбаев М., Лизоркин П.И. Асимптотика собственных чисел оператора Штурма–Ливилля II // Известия АН КазССР. серия физ.-мат. – 1980. – №1. – С. 48-52.

30 Отелбаев М. К асимптотическим формулам собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 259, №1. – С. 42-44.

31 Отелбаев М. Оценки спектра оператора Штурма–Лиувилля. – Алма-Ата: Ғылым, 1990. – 191 с.

32 Отелбаев М., Мынбаев К.Т. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М: Наука, 1988. – 288 с.

33 J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktional operatoren // Math. Ann. – 1929. – V. 102. – P. 49-131.

34 Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1952. – №1. – С. 187-246.

35 Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, №4. – С. 739-740.

36 Отелбаев М., Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, №5. – С. 863-875.

37 Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе–Самарского // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 265, №4. – С. 815-819.

38 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. О расширениях и сужениях операторов в банаховом пространстве // Успехи матем. наук. – 1982. – Т. 37, №4. – С. 116.

39 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов // Изв. АН КазССР. сер.физ.-мат. – 1982. – №5. – С. 24-26.

40 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов II // Изв. АН КазССР. сер.физ.-мат. – 1983. №1. – С. 24-26.

41 Отелбаев М., Кокебаев Б.К. Об одном классе общих граничных задач // Прим. методов теор. функц. и ФАН к задачам мат.физ. Сб. докл. 7 Сов.-Чех. семин. – Ереван, 1982. – С. 153-156.

42 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, №6. – С. 1307-1310.

43 Бияров Б.Н. About the spectrum of the Laplace operator // Eurasian mathematical journal. – 2011. – V. 2, №2. – P. 145-148.

44 Бияров Б.Н. Спектральные свойства корректных сужений и расширений. Монография. Международное Издательство (LAP) LAMBERT Academic Publishing. – Saarbrucken, Germany (2012-02-15).

45 Burenkov V.I., Otelbaev M. On the singular numbers of correct restrictions of non-selfadjoint elliptic differential operators // Eurasian mathematical journal. – 2011. – V. 2, №1. – P. 145-148.

46 Everittw H., Giertz M. Some properties of the domains certain differential operators // Proc. London Math. Soc. – 1971. – V. 23, №3. – P. 301-324.

47 Everittw H., Giertz M. Some inequalities associated with certain differential operator // Mathematica. – 1972. – V. 126. – P. 308-326.

48 Отелбаев М. К методу Титчмарша оценки резольвенты // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 211, №4. – С. 153-157.

49 Отелбаев М. О гладкости решения дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. серия физ.-мат. – 1977. – №5. – С. 45-48.

50 Отелбаев М. О гладкости решения псевдодифференциальных уравнений и разделимости псевдодифференциальных операторов // Тр. Всес. конф. по уравн. в част. произв., посвящен. 75-летию акад. И.Г. Петровского. – Москва, 1978. – С. 191-193.

51 Отелбаев М., Кальменов Т.Ш. О гладкости решения одного класса самосопряженных операторов // Известия АН КазССР. серия физ.-мат. – 1978. – №3. – С. 33-37.

52 Отелбаев М., Муратбеков М.Б. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Известия вузов. Математика. – 1989. – №3. – С. 44-47.

53 Отелбаев М. О коэрцитивных оценках решения разностных уравнений // Труды МИАН СССР. – 1988. – Т. 181. – С. 241-249.

54 Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234, №3. – С. 540-543.

55 Отелбаев М., Бияров Б.Н. Описание нормальных расширений // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, №5. – С. 21-28.

56 Отелбаев М., Кальменов Т.Ш. О гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, №7. – С. 1244-1255.

57 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Тр. МИАН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 195-217.

58 Отелбаев М., Оспанов К.Н. Краевые задачи для обобщенной системы Коши–Римана с негладкими коэффициентами // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 283, №1. – С. 46-49.

59 Отелбаев М., Лизоркин П.И. Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств Соболевского типа с весами // Труды МИАН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 213-232.

60 Отелбаев М., Ойнаров Р. О количестве решений одного вырожденного оператора // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. – №1. – С. 56-61.

61 Отелбаев М., Жапсарбаева Л.К. Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и от начальных данных // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, №6. – С. 818-849.

62 Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. III // Труды МИ РАН. – 2008. – Т. 260. – С. 202-212.

63 Отелбаев М., Сейткулов Е.Н., Махмеджанов Г., Оразбеков М. Моделирование процесса экспорта при наличии коррупции // Вестник КазНУ. Сер. матем., мех., информ. – 2007. – Т. 52, №1. – С. 117-120.

64 Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. I // Сиб. мат. журнал. – 2008. – Т. 49, №3. – С. 620-634.

65 Отелбаев М. Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье–Стокса // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, №5. – С. 771-779.

66 Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения (в целом) одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. – 2006. – Т. 408, №4. – С. 446-449.

67 Отелбаев М., Балдыбек Ж., Смагулов Ш. Об одном приближенном методе решения начально-краевой задачи уравнений Навье–Стокса // Доклады РАН. – 2002. – Т. 386, №4. – С. 439-442.

68 Отелбаев М., Болеева М.К., Утемаганбетов З.С. О приближенном решении одного класса нелинейных уравнений // Известия МН-АН РК. – 1996. – №3. – С. 33-37.

69 Отелбаев М., Болеева М.К., Утемаганбетов З.С. О нахождении начального приближения при итерационном процессе // Вестник НАН РК. – 1997. – №3. – С. 35-48.

70 Отелбаев М., Кангужин Б.Е. О минимуме функционалов по точной или приближенной информации о глобальном экстремуме // Матер. научно-метод. конф. "Мат. мод. и инф. техн. в образов. и науке", посв. 70-летию АГУ им. Абая. – 1998. – С. 75-76.

71 Отелбаев М., Мухамбетжанов А.Т., Смагулов Ш. Об одном методе фиктивной области нелинейных краевых задач // Вычисл. техн. СО РАН. – Новосибирск, 1998. – Т. 3, №4. – С. 41-64.

72 Отелбаев М., Рысбайулы Б. Приближенный метод решения уравнений течения вязкой несжимаемой жидкости // Матер. казахстанско-российской конференции. – Алматы, 1998. – С. 142.

73 Otelbaev M., Rsbaiuly B. The application of embedding theorems in the dummy domain method for solution of boundary problems // I-st Turk world Math Symposium. – 1999. – P. 16.

74 Otelbaev M., Rsbaiuly B. One variational method of a solution of the nonlinear boundary value problems // Journal of sc. and eng. – 1999. – P. 331-333.

75 Отелбаев М., Смагулов Ш.С., Байжуманов М. Метод фиктивных областей для спектральной задачи оператора Стокса // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, №2. – С. 45-56.

76 Отелбаев М., Смагулов Ш. О новом методе приближенных решений краевых задач в произвольной области // Доклады РАН. – 2001. – Т. 378, №4. С. 452-455.

77 Отелбаев М., Балдыбек Ж., Смагулов Ш. Метод дополнительных областей для одной краевой задачи океана // Тр. межд. науч. конф. "Асимпт., топ. и комп. мет. в матем.". – 2001. – С. 35-36.

78 Отелбаев М., Оспанов К.Н., Смагулов Ш. Об одном методе численного решения краевых задач // Докл. межд. научно-техн. конф. "Теория функций, функц. анализ и их прил.". – Семипалатинск, 2003. – С. 306-313.

79 Отелбаев М., Рысбайулы Б., Суранчиев А.Ж. Вычисление собственных чисел и собственных векторов несамосопряженных матриц // Доклады РАН. – 2003. – Т. 390, №2. – С. 162-164.

80 Отелбаев М., Жусупова Д., Тулеуов Б.И. Распараллеливание процесса решения одной алгебраической системы с плохо обусловленной матрицей // Материалы межд. конференции "Спектральная теория и ее приложения". – Уфа, 2011. – С. 72.

81 Otelbaev M., Tuleuov B., Zhusupova D. Parallel commutation of solving linear system with ill-conditioned matrix // Book of abstracts. IV Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Baku, 2011. – P. 29.

82 Отелбаев М., Балдыбек Ж.А. Задачи распараллеливания. Математический журнал. – 2009. – Т. 9, №4(34). – С. 35-42.

83 Отелбаев М., Ценд Л. К теоремам о компактности // Сиб. матем. журнал. – 1972. – Т. 13, №4. – С. 67-78.

84 Отелбаев М., Суворченкова Г.А. Необходимое и достаточное условие ограниченности и непрерывности одного класса оператора Урысона // Сиб. матем. журнал. – 1979. – Т. 20, №2. – С. 428-432.

85 Отелбаев М., Ойнаров Р. Критерий сжимаемости оператора Урысона // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 255, №6. – С. 1316-1318.

86 Отелбаев М., Ойнаров Р. Критерии липшицевости и сжимаемости нелинейных интегральных операторов // Сиб. мат. журнал. – 1984. – Т. 25, №6. – С. 116-127.

87 Отелбаев М., Байдельдинов Б.Л. Гауссовы меры и аппроксимативные характеристики операторов // Известия АН КазССР. Сер. физ-мат. – 1988. – №5. – С. 6-9.

88 Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций Векуа // "Прим. методов ФАН к задачам мат. физ. и выч. мат."/ Материалы шк.-семин. – Новосибирск, 1978. – С. 80-89.

89 Отелбаев М., Левитан Б.М. Об условиях самосопряженности операторов Шредингера и Дирака // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1981. – Т. 42. – С. 142-159.

90 Отелбаев М., Касымов Е.А. О существенной самосопряженности одного дифференциального оператора // Известия АН КазССР. Сер. физмат. – 1979. – №1. – С. 20-23.

91 Отелбаев М. Об асимптотике спектра оператора переноса в плоскопараллельном случае // Доклады АН СССР. – 1985. – Т. 284. – №1. – С. 51-53.

92 Отелбаев М. Один математический результат о законе сохранения импульса. Часть 1 // Известия МН-АН РК. – 1996. – №4. – С. 37-50.

93 Отелбаев М. Один математический результат о законе сохранения импульса. Часть 2 // Известия МН-АН РК. – 1996. – №5. – С. 25-32.

94 Отелбаев М. (М. Шойкара) К математическим вопросам теории относительности Эйнштейна // Евразийский математический журнал. – 2004. – №1. – С. 40-70.

95 Отелбаев М., Гасанов А., Акпаев Б. Об одной задаче управления точечным источником тепла // Доклады РАН. – 2010. – Т. 435, №3. – С. 317-319.

96 Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2011. – V.19, №7. – P. 985-1006.

97 Otelbaev M. , Hasanov A., Akpayev B. A source identification problem related to mathematical model of laser surface heating // Applied Mathematics Letters. – 2012. – V.25, №10. – P. 1480-1485.

98 Өтелбаев М., Зәуірбеков С. Ақпаратты қорғау мен криптография негіздері. – Астана: Нұржол, 2003. – 128 б.

99 Отелбаев М., Сейткулов Е.Н. Математические методы защиты информации при использовании вычислительных систем // Математический журнал. – 2004. – Т. 4, №2(12). – С. 60-67.

100 Отелбаев М., Сейткулов Е.Н. Криптографические методы защиты экономических прогнозов // Математический журнал. – 2004. – Т. 4. – №4(14). – С. 75-80.

Статья поступила в редакцию 07.08.12

Өтелбаев М. МЕНІҢ КЕЙБІР ЗЕРТТЕУЛЕРІМЕ ҚЫСҚАША ШОЛУ

Бұл мақалада жұмыстарымның кейбір бөліктеріне және менің зерттеулеріммен ұштасатын еңбектерге қысқаша шолу келтірдім.

Otelbaev M. OVERVIEW OF SOME OF MY RESEARCHES

In this paper I present the overview of some of my works and the works close to my researches.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.51

Г. Акишев
Карагандинский государственный университет им.Е.А. Букетова
Казахстан, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Глубокоуважаемому академику Отелбаеву М. посвящается

Рассматривается анизотропное пространство Лоренца периодических функций. Установлена оценка сверху приближения обобщенного класса Никольского–Бесова–Аманова частичными суммами кратного ряда Фурье.
Ключевые слова: *пространство Лоренца, приближение функции, класс Никольского–Бесова.*

Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и $1 \leq \theta_j, q_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, имеющих период 2π по каждой переменной, для которых конечна величина

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(\bar{t})\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

Здесь $f^{*_1,\dots,*_m}(\bar{t})$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]). Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in \rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

Keywords: *Lorentz space, function approximation, Nikol'skii - Besov's class*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

где $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \overline{n}, \bar{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$,

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}.$$

Рассмотрим для заданной функции типа смешанного модуля гладкости $\Omega(\bar{t})$ множества $Q(N) = \cup_{\bar{s}\in\Gamma(N)} \rho(\bar{s})$, где

$$\Gamma(N) = \left\{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_m}) \geq \frac{1}{N}\right\},$$

и для функции f — ее соответствующие частичные суммы ряда Фурье$S_{Q(N)}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q(N)} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle}$. .

Рассматривается обобщенный класс Никольского – Бесова

$$S^{\Omega}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}} B = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p}, \overline{\theta}}(I^m) : \left\| \left\{ \Omega^{-1}(2^{-\bar{s}}) \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|^{*}_{\overline{p}, \overline{\theta}} \right\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \leq 1 \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \leq p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$ и $\Omega(2^{-\bar{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_m})$.

Если $\Omega(\bar{t}) = \prod_{j=1}^{m} t_j^{r_j}$ этот класс обозначается $S^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}} B$ и называется *классом Никольского – Бесова* или *Никольского – Бесова – Аманова.*

Класс $S^{\Omega}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}} B$ в случае $\bar{p} = \bar{\theta}$ и $\Omega(\bar{t}) = \prod_{j=1}^{m} t_j^{r_j}, r_j < l$, при $\tau_j = +\infty, j = 1, ..., m$ впервые определен С.М. Никольским [2], а при $1 \leq \tau_j < +\infty, j = 1, ..., m$ – Т.И. Амановым [3].

Пространства Лоренца имеют важные применения в анализе. Так, например, М. Отелбаев [4] получил интересные приложения в теории уравнений в частных производных.

Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К.И. Бабенко. Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С.А. Теляковский , Б.С. Митягин, Я.С. Бугров, Н.С. Никольская, Э.М. Галеев, В.Н. Темляков, Динь Зунг, Э.С. Белинский (см. обзор [5]), А.С. Романюк [6], Б.С. Кашин, R.A. De Vore, S.V. Konyagin, V.N. Temlyakov (см., например, обзор [7]), H.-J. Schmeisser, W. Sickel, Д.Б. Базарханов [8].

Для классов Никольского – Бесова обобщенной смешанной гладкости эту задачу исследовали Н.Н. Пустовойтов [9], Sun Yongsheng and Wang Heping [10], С.А. Стасюк [11] и другие.

Точные порядки приближения класса $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ в метрике пространства Лоренца установлены автором [12] и К.А. Бекмаганбетовым [13]. Основная цель работы – найти точный порядок величины

$$\sup_{f\in S^{\Omega}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B}\|f-S_{Q(N)}(f)\|^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}.$$

Приведем формулировки некоторых наших результатов для случая, когда $\Omega(\overline{t})=\Omega(t_1,...,t_m)$ при $t_j\geq 0, j=1,...,m$, задана по формуле :

$$\Omega(\overline{t})=\prod_{j=1}^{m}t_j^{r_j}\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_{+}^{b_j},$$

если $t_j>0, j=1,...,m$, и $\Omega(\overline{t})=0$, если $\prod\limits_{j=1}^{m}t_j=0$, где $r_j>0, b_j>0,\ \ j=1,...,m$.

Основные результаты

Справедливы следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть* $1<p_j<q_j<\infty$, $1\leq\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}<+\infty$, $j=1,...,m$, $r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\leq...\leq r_m$, $\gamma_j=\frac{r_j}{r_1}$, $j=1,...,m$, $r_1\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)=r_j\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right), j=1,...,\nu$, *и* $r_1\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)<r_j\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right), j=\nu+1,...,m$ *и* $r_j>\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}$, $j=1,...,m$.

1) Если $b_j\theta_j^{(2)}<1$, $j=1,...,\nu$, *и* $\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\sum\limits_{j=1}^{\nu}b_j\geq 0$, *то*

$$\sup_{f\in S^{\Omega}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)}}H}\|f-S_{Q(N)}(f)\|^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}^{(2)}}\leq CN^{-\frac{1}{r_1}(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}(\log_2 N)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\sum\limits_{j=1}^{\nu}b_j}.$$

2) Если $b_j\theta_j^{(2)}>1, j=1,...,\nu$, *то*

$$\sup_{f\in S^{\Omega}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)}}H}\|f-S_{Q(N)}(f)\|^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}^{(2)}}\leq CN^{-\frac{1}{r_1}(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_j < q_j < \infty$, $1 \le \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < +\infty$, $j = 1, ..., m$, $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, ..., m$, $r_1\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) = r_j\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), j = 1, ..., \nu$, *и* $r_1\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) < r_j\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), j = \nu+1, ..., m$ *и* $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $j = 1, ..., m$.

1) Пусть $\theta_j^{(2)} < \tau_j, j = 1, ..., m$. *Если* $b_j < \frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j}, j = 1, ..., \nu$, *то*

$$\sup_{f \in S^{\Omega}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} B} \|f - S_{Q(N)}(f)\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \le C N^{-\frac{1}{r_1}\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log_2 N)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j}\right) - \sum\limits_{j=1}^{\nu} b_j}.$$

Если $b_j > \frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j}, j = 1, ..., \nu$, *то*

$$\sup_{f \in S^{\Omega}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} B} \|f - S_{Q(N)}(f)\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \le C N^{-\frac{1}{r_1}\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)}$$

2) Пусть $\tau_j \le \theta_j^{(2)} < +\infty, j = 1, ..., m$. *Тогда*

$$\sup_{f \in S^{\Omega}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} B} \|f - S_{Q(N)}(f)\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \le C \sup_{\bar{s} \in \Gamma^{\perp}(N)} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \Omega(2^{-\bar{s}}).$$

Замечание 1. . *В частности, из этих теорем только в случае* $p_j = \theta_j = p$, $q_j = \theta_j = q$, $j = 1, ..., m$, *следуют результаты Н.Н. Пустовойтова [9] и С.А. Стасюка [11].*

Литература

1 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, №1. – С. 22-25.

2 Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. матем. журн. – 1963. – Т. 4, №6. – С. 1342-1364.

3 Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^r_{p,\theta}B(R^n)$ и $S^r_{p,\theta} * B$ // Тр. МИАН СССР. – 1965. – Т. 77. – С. 143-167.

4 Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций Векуа // Сб. "Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики". – Новосибирск, 1979. – С. 80-99.

5 Тихомиров В.М. Теория приближений. Современные проблемы математики. – М., 1987. – С. 103-270.

6 Романюк А.С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43, №1. – С. 1398-1408.

7 Temlyakov V.N. Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. – 2003. – V. 3. – P. 33-107.

8 Базарханов Д.Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИ РАН. – 2010. – Т. 269. – С. 8-30.

9 Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Analysis Math. – 1994. – Т. 20. – С. 35-48.

10 Sun Yongsheng, Wang Heping Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. МИ РАН. – 1997. – V. 219. – P. 356-377.

11 Стасюк С.А. Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, №1. – С. 108-121.

12 Акишев Г. Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Матем. сборник. – 2006. – Т. 197, №8. – С. 17-40.

13 Бекмаганбетов К.А. О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфим. матем. журн. – 2009. – Т. 1, №2. – С. 9-16.

Статья поступила в редакцию 10.07.12

Ақышев Ғ. ФУНКЦИОНАЛДЫҚ КЛАСТАРДЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНДЕ ЖУЫҚТАУ РЕТІ ТУРАЛЫ

Тәуелсіз ұш айнымалысы бар бірінші текті Вольтерраның сызықты емес интегралдық теңдеуі

Бұл жұмыста тәуелсіз ұш айнымалысы бар бірінші текті Вольтерраның сызықты емес интегралдық теңдеуі үшін М.М. Лаврентьев бойынша жүйелі операторлары құрылған және жалғыздық теоремасы дәлелденген.

Akishev G. ON THE ORDERS OF APPROXIMATION OF FUNCTIONALS CLASSES IN A LORENTZ SPACE

In this paper considered the anisotropic Lorentz space of periodic functions. In the paper is obtained the estimate of approximation function Nikol'skii – Besov's – Amanov's generalized classes in the space Lorentz.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.5

Д. Б. Базарханов
Институт математики, информатики и механики
Казахстан, 050010, Алматы, ул.Пушкина, 125, e-mail: dauren.mirza@gmail.com

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

*Посвящается академику НАН РК М. Отелбаеву
в связи с его семидесятилетием*

Получены представления и характеризации периодических пространств Никольского – Бесова $B^{\mathtt{smt}}_{p\,q}$ и Лизоркина – Трибеля $L^{\mathtt{smt}}_{p\,q}$ через φ–преобразование, "локальные средние" и максимальные функции Петре, а также пространств Лизоркина – Трибеля $L^{\mathtt{smi}}_{\infty\,q}$, $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}$, с помощью всплесков.
Ключевые слова: *функциональное пространство, смешанная гладкость, представление, эквивалентная норма.*

1 Введение

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_m = \mathbb{N} \cap [1, m]$, $m \in \mathbb{N}$; для $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ пусть $xy = x_1 y_1 + ... + x_m y_m$, $\|x\| = \sqrt{xx}$, $x \le y \Leftrightarrow x_\kappa \le y_\kappa, \kappa \in \mathrm{z}_m$, $|x| = |x_1| + ... + |x_m|$, $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| : \kappa \in \mathrm{z}_m\}$; для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{N}_0^m$ $\partial^\lambda = \partial_1^{\lambda_1} \cdots \partial_m^{\lambda_m}$, где ∂_κ — частная производная по κ–й переменной, $\kappa \in \mathrm{z}_m$ (здесь, как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел).

Пусть $\mathcal{S}^{\mathtt{r}} = \mathcal{S}^{m\mathtt{r}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'^{\mathtt{r}} = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений на $\mathbb{R}^m$ соответственно; $\widehat{f} = \mathcal{F}_m(f)$ и

Keywords: *function space, mixed smoothness, representation, equivalent norm*
2010 Mathematics Subject Classification: 42B25, 42C40, 42B35

$\mathcal{F}_m^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{r}}$; $\mathcal{S}^{\mathtt{t}} = \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех гладких функций $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ с топологией равномерной сходимости всех производных; $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m–мерный тор; далее, $\mathcal{S}'^{\mathtt{t}} = \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1–периодических по каждой переменной распределений из $\mathcal{S}'^{\mathtt{r}}$; пространство $\mathcal{S}'^{\mathtt{t}}$ естественно отождествляется с пространством, топологически сопряженным с $\mathcal{S}^{\mathtt{t}}$.

Для функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ зададим ее периодизацию $\widetilde{f} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ как (формальную) сумму

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^m} f(x + \lambda).$$

По формуле суммирования Пуассона легко видеть, что $\phi \in \mathcal{S}^{\mathtt{r}} \Rightarrow \widetilde{\phi} \in \mathcal{S}^{\mathtt{t}}$.

Пусть $L_p(\mathbb{I}^m)(0 < p \leq \infty)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, с обычной квазинормой $\|f \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|$; здесь $\mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$.

Ясно, что для $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in L_1(\mathbb{T}^m)$ ($\operatorname{supp} \widehat{g} \subset \mathbb{Z}^m$ для $g \in \mathcal{S}'^{\mathtt{t}}$)

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \xi \in \mathbb{R}^m, \ \widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^m} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Далее, пусть $\ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ $(0 < q \leq \infty,\ n \in \mathbb{N})$ — пространство числовых последовательностей $(a_\alpha) = (a_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$ с конечной квазинормой $\|(a_\alpha) \,|\, \ell_q\|$,

$$\|(a_\alpha) \,|\, \ell_q\| = \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \ (q < \infty), \quad \|(a_\alpha) \,|\, \ell_\infty\| = \sup(|a_\alpha| \,:\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n).$$

Для функциональной последовательности $(g_\alpha(x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$, $x \in \mathbb{I}^m$, введем квазинормы (здесь $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}^\dagger$)

$$\| \, (g_\alpha) \,|\, \ell_q(L_p^{m\mathtt{i}}) \, \| = \| \, (\| \, g_\alpha \,|\, L_p(\mathbb{I}^m) \, \|) \,|\, \ell_q \, \|,$$

$$\| \, (g_\alpha) \,|\, L_p^{m\mathtt{i}}(\ell_q) \, \| = \| \|(g_\alpha(\cdot)) \,|\, \ell_q\| \,|\, L_p(\mathbb{I}^m) \|).$$

Фиксируем числа $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$, вектор $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|\mathfrak{m}| = m$ и представление $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где

†Здесь и всюду далее в формулах, определениях, теоремах и замечаниях символы $\mathbb{I}$ и $\mathtt{i}$ одновременно принимают значения $\mathbb{R}$ и $\mathtt{r}$ либо $\mathbb{T}$ и $\mathtt{t}$ соответственно.

$x^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}, \nu \in \mathrm{z}_n$. Для $t \in \mathbb{R}_+$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^m$ положим $t^z = (t^{z_1}, \ldots, t^{z_n})$, $z \cdot x = (z_1 x^1, \ldots, z_n x^n)$.

Выберем функции $\eta_0^\nu \in \mathcal{S}^{m_\nu \mathtt{r}}$ такие, что $0 \leq \widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu) \leq 1$, $\xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu) = 1$, если $|\xi^\nu|_\infty \leq 1$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu) = 0$, если $|\xi^\nu|_\infty \geq 3/2$; положим $\eta^\nu(x^\nu) = \mathcal{F}^{-1}_{m_\nu}(\widehat{\eta_0^\nu}(2^{-1}\,\cdot) - \widehat{\eta_0^\nu}(\,\cdot\,))(x^\nu)$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$; зададим наборы пробных функций

$$\{\eta^{\mathtt{r}}_\alpha(x) = \eta_\alpha(x) = \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} \eta^\nu_{\alpha_\nu}(x^\nu) \,|\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n\} \subset \mathcal{S}^{\mathtt{r}}, \tag{1}$$

$$\{\eta^{\mathtt{t}}_\alpha(x) = \widetilde{\eta}_\alpha(x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\} \subset \mathcal{S}^{\mathtt{t}}; \tag{2}$$

здесь $\eta^\nu_k(x^\nu) = 2^{(k-1)m_\nu}\eta^\nu(2^{k-1}x^\nu)$, $k \in \mathbb{N}$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$.

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$; $0 < q \leq \infty$; $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}$. *Пространство Никольского – Бесова* $B^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q} = B^{\mathfrak{s}\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ $(0 < p \leq \infty)$ *состоит из всех распределений* $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$, *для которых конечна квазинорма*

$$\|\, f \,|\, B^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q} \,\| \;=\; \|(\, 2^{\alpha\mathfrak{s}}\; \eta^{\mathtt{i}}_\alpha * f(\,\cdot\,)) \,|\, \ell_q(L^{m\mathtt{i}}_p)\|.$$

Пространство Лизоркина – Трибеля $L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q} = L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ $(0 < p < \infty)$ *состоит из всех распределений* $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$, *для которых конечна квазинорма*

$$\|\, f \,|\, L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q} \,\| \;=\; \|(\, 2^{\alpha\mathfrak{s}}\; \eta^{\mathtt{i}}_\alpha * f(\,\cdot\,)) \,|\, L^{m\mathtt{i}}_p(\ell_q)\|. \tag{3}$$

Пусть $\mathfrak{R}^{\mathtt{mr}}_\delta$ — множество всех полуоткрытых диадических параллелепипедов из $\mathbb{R}^m$ вида $P = P^{\mathtt{m}}_{\alpha\lambda} = \{\, x \in \mathbb{R}^m \;:\; 2^\alpha \cdot x - \lambda \in [\,0,1\,)^m\,\}$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \lambda \in \mathbb{Z}^m)$; $\mathfrak{R}^{\mathtt{mt}}_\delta = \{P \in \mathfrak{R}^{\mathtt{mr}}_\delta \,|\, P \subset [0,1)^m\}$. Ниже $x_P = 2^{-\alpha} \cdot \lambda$ и $\chi_P(\,\cdot\,)$ — соответственно "левая нижняя"вершина и характеристическая функция параллелепипеда $P = P^{\mathtt{m}}_{\alpha\lambda}$, $\alpha_P \equiv \alpha$; $|G|$ — m–мерная мера Лебега множества $G \subset \mathbb{R}^m$. Положим еще $\mathfrak{O}^{\mathtt{r}} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^m \,|\, \varnothing \neq \Omega$ — открытое множество с $|\Omega| < \infty\}$, $\mathfrak{O}^{\mathtt{t}} = \{\Omega \cap [0,1)^m \,|\, \Omega \in \mathfrak{O}^{\mathtt{r}} \,:\, \Omega \cap [0,1)^m \neq \varnothing\}$.

Для функциональной последовательности $(g_\alpha(x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$, $x \in \mathbb{I}^m$, зададим еще две квазинормы (здесь $0 < q < \infty$)

$$\|\,(g_\alpha(x))\,|\,{}^\delta\mathfrak{L}^{\mathtt{mi}}_q\,\| = \sup_{P \in \mathfrak{R}^{\mathtt{mi}}_\delta} \left(\frac{1}{|P|}\int\limits_P \sum_{\alpha \geq \alpha_P} |\,g_\alpha(x)\,|^q\,dx\right)^{1/q},$$

$$\|\,(g_\alpha(x))\,|\,\mathfrak{L}_q^{\mathtt{mi}}\,\| = \sup_{\Omega\in\mathfrak{O}^{\mathtt{i}}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}_\Omega^{\mathtt{i}}}|\,g_\alpha(x)\,|^q\,dx\right)^{1/q},$$

где $\mathrm{A}_\Omega^{\mathtt{i}} = \{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\,|\,\exists P\in\mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}\,:\,P\subset\Omega\,,\alpha_P=\alpha\}$ для $\Omega\in\mathfrak{O}^{\mathtt{i}}$ $(\mathtt{i}\in\{\mathtt{r},\mathtt{t}\})$.

Определение 2. *Пусть* $\mathfrak{s}=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^n$*;* $0<q<\infty$*;* $\mathtt{i}\in\{\mathtt{r},\mathtt{t}\}$.
$\mathtt{I.}$ *Пусть* $n=1(\Rightarrow\mathfrak{m}=m,\mathfrak{s}=s\in\mathbb{R})$. *Пространство Лизоркина – Трибеля* $L^{sm\mathtt{i}}_{\infty\,q}=L^{sm}_{\infty\,q}(\mathbb{I}^m)$ *состоит из всех распределений* $f\in\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$*, для которых конечна квазинорма*

$$\|\,f\,|\,L^{sm\mathtt{i}}_{\infty\,q}\,\| = \sup_{P\in\mathfrak{R}_\delta^{m\mathtt{i}}}\left(\frac{1}{|P|}\int\limits_{P}\sum_{\alpha\geq\alpha_P}|\,2^{\alpha s}\,\eta_\alpha^{\mathtt{i}}*f(x)\,|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

$\mathtt{II.}$ *Пусть* $n\geq 2$. $\mathtt{(a)}$ *Пространство* ${}^\delta L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}={}^\delta L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{m}}_{\infty\,q}(\mathbb{I}^m)$ *состоит из всех распределений* $f\in\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$*, для которых конечна квазинорма*

$$\|\,f\,|\,{}^\delta L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}\,\| = \|(\,2^{\alpha\mathfrak{s}}\;\eta_\alpha^{\mathtt{i}}*f(x)\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^n)\,|\,{}^\delta\mathfrak{L}_q^{\mathtt{mi}}\,\|.$$

$\mathtt{(b)}$ *Пространство Лизоркина – Трибеля* $L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}=L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{m}}_{\infty\,q}(\mathbb{I}^m)$ *состоит из всех распределений* $f\in\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$*, для которых конечна квазинорма*

$$\|\,f\,|\,L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}\,\| = \|(\,2^{\alpha\mathfrak{s}}\;\eta_\alpha^{\mathtt{i}}*f(x)\,|\,\alpha\in\mathbb{N}_0^n)\,|\,\mathfrak{L}_q^{\mathtt{mi}}\,\|.$$

$\mathtt{III.}$ *Положим также* $L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,\infty}=L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{m}}_{\infty\,\infty}(\mathbb{I}^m)\equiv B^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,\infty}$.

Замечание 1. *Наивное определение пространства* $L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}$ $(0<q<\infty)$ *через (3) с* $p=\infty$ *является неудовлетворительным, см. [1, п.2.3.4], [2, §5]. Естественное определение 2.*$\mathtt{I}$ *в случае* $\mathtt{i}=\mathtt{r}$ *дано в [2, §5]. Известно, что* $L^{0m\mathtt{i}}_{\infty 2}$ *совпадает с пространством* $BMO(\mathbb{I}^m)$ *функций ограниченной средней осцилляции [1], [2]. Обобщения* $L^{sm\mathtt{i}}_{\infty\,q}$ *на кратный* $(n\geq 2)$ *случай из определения 2* $\mathtt{II(a)}$, $\mathtt{II(b)}$ *имеют прототипами пространства* bmo *и* product–BMO *– "кратные" версии BMO; по* bmo, product–BMO *и близким пространствам см. обстоятельный обзор [3].*

2 Локальные усреднения и максимальные функции Петре

Выберем функции υ_0^ν, $\upsilon^\nu\in\mathcal{S}^{m_\nu\mathtt{r}}$, удовлетворяющие тауберовым условиям:

$\exists\, \epsilon_\nu > 0 \,:\, |\widehat{\upsilon_0^\nu}(\xi^\nu)| > 0$ при $|\xi^\nu|_\infty \le 2\epsilon_\nu$, $|\widehat{\upsilon^\nu}(\xi^\nu)| > 0$ при $\frac{\epsilon_\nu}{2} \le |\xi^\nu|_\infty \le 2\epsilon_\nu$; и моментным условиям: $\partial^{\lambda^\nu}\upsilon^\nu(0) = 0$, $\lambda^\nu \in \mathbb{N}_0^{m_\nu} \,:\, |\lambda^\nu| \le \varkappa_\nu$ $(\varkappa_\nu \in \mathbb{N}_0)$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$. Наборы $\{\upsilon_\alpha^{\mathtt{i}}(x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ $(\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\})$ определим как в (1),(2). С их помощью введем максимальные функции Петре для $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$

$$\upsilon_{\alpha\, a}^{\star\, \mathtt{i}}(f, x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \frac{|\upsilon_\alpha^{\mathtt{i}} * f(y)|}{\prod_{\nu \in \mathrm{z}_n}(1 + 2^{\alpha_\nu}|x^\nu - y^\nu|_\infty)^{a_\nu}}, \ \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

здесь вектор $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ фиксирован.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p\,, q \le \infty$; $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}^n, \varkappa \in \mathbb{N}_0^n : \varkappa_\nu + 1 > s_\nu, \nu \in \mathrm{z}_n$; $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}$. I. *Пусть* $a \in \mathbb{R}_+^n : a_\nu > m_\nu/p\,,\, \nu \in \mathrm{z}_n$. *Тогда для* $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ *имеем*

$$\|\, f \,|\, B_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}} \,\| \asymp \|\, (2^{\alpha\mathfrak{s}}\upsilon_\alpha^{\mathtt{i}} * f) \,|\, \ell_q(L_p^{m\mathtt{i}}) \,\| \asymp \|\, (2^{\alpha\mathfrak{s}}\upsilon_{\alpha\, a}^{\star\, \mathtt{i}}(f, \cdot)) \,|\, \ell_q(L_p^{m\mathtt{i}}) \,\|.$$

II. *Пусть* $a \in \mathbb{R}_+^n \,:\, a_\nu > m_\nu/\min(p, q)$, $\nu \in \mathrm{z}_n$. *Тогда для* $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ *при* $p < \infty, 0 < q \le \infty$ *верно соотношение*

$$\|\, f \,|\, L_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}} \,\| \asymp \|\, (2^{\alpha\mathfrak{s}}\upsilon_\alpha^{\mathtt{i}} * f) \,|\, L_p^{m\mathtt{i}}(\ell_q) \,\| \asymp \|\, (2^{\alpha\mathfrak{s}}\upsilon_{\alpha\, a}^{\star\, \mathtt{i}}(f, \cdot)) \,|\, L_p^{m\mathtt{i}}(\ell_q) \,\|,$$

а при $0 < q < \infty$ *и* $(A, \mathfrak{A}) \in \{(L, \mathfrak{L}), (^\delta L, {}^\delta\mathfrak{L})\}$ –

$$\|\, f \,|\, A_{\infty\, q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}} \,\| \asymp \|\, (2^{\alpha\mathfrak{s}}\upsilon_\alpha^{\mathtt{i}} * f) \,|\, \mathfrak{A}_q^{\mathtt{mi}} \,\| \asymp \|\, (2^{\alpha\mathfrak{s}}\upsilon_{\alpha\, a}^{\star\, \mathtt{i}}(f, \cdot)) \,|\, \mathfrak{A}_q^{\mathtt{mi}} \,\|.$$

Замечание 2. *В [4], [5] получены характеризации весовых изотропных пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля (с $p < \infty$) на $\mathbb{R}^m$ с помощью континуальных (интегральных) локальных средних. В [6] дано упрощенное доказательство дискретной версии этих характеризаций – теоремы 1 для $B_{p\,q}^{s\,m\mathtt{r}}$ и $L_{p\,q}^{s\,m\mathtt{r}}$ с $1 = n \le m$, включая $L_{\infty\, q}^{s\,m\mathtt{r}}$. Общий случай теоремы 1 для $\mathtt{i} = \mathtt{r}$ ($1 \le n \le m$; смешанные нормы) (за исключением $L_{\infty\, q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mr}}$ и ${}^\delta L_{\infty\, q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mr}}$) рассмотрен в [7], [8], см. также [9].*

3 φ–преобразование

Пусть функции $\varphi_0^\nu, \varphi^\nu \in \mathcal{S}^{m_\nu \mathtt{r}}$ удовлетворяют условиям $(\nu \in \mathrm{z}_n)$:

$$\mathrm{supp}\ \widehat{\varphi_0^\nu} \subset \{\xi^\nu \,:\, |\xi^\nu|_\infty \le 2\}, \ \ \mathrm{supp}\ \widehat{\varphi^\nu} \subset \{\xi^\nu \,:\, 1/2 \le |\xi^\nu|_\infty \le 2\}, \qquad (4)$$

$$|\widehat{\varphi_0^\nu}(\xi^\nu)| \ge c > 0 \text{ при } |\xi^\nu|_\infty \le \frac{5}{3}, \ \ |\widehat{\varphi^\nu}(\xi^\nu)| \ge c > 0 \text{ при } \frac{3}{5} \le |\xi^\nu|_\infty \le \frac{5}{3}. \quad (5)$$

Выберем функции $\psi_0^\nu, \psi^\nu \in \mathcal{S}^{m_\nu \mathtt{r}}$, удовлетворяющие условиям (4), (5) (с ψ вместо φ) и такие, что

$$\widehat{\breve{\varphi}_0^\nu}(\xi^\nu)\,\widehat{\psi_0^\nu}(\xi^\nu) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\breve{\varphi}^\nu}(2^{-k}\xi^\nu)\,\widehat{\psi^\nu}(2^{-k}\xi^\nu) = 1, \quad \xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu} \ (\nu \in \mathrm{z}_n) \qquad (6)$$

($\breve{g}(x) \equiv \bar{g}(-x)$, $\bar{z}$ — число, комплексно-сопряженное с $z \in \mathbb{C}$). Для $P = P_{\alpha\lambda}^{\mathtt{m}} \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}$ положим (функции $\varphi_\alpha^{\mathtt{i}}$ определяются как в (1), (2))

$$\varphi_P^{\mathtt{i}}(x) \equiv |P|^{1/2}\varphi_{\alpha_P}^{\mathtt{i}}(x - x_P) = 2^{-\alpha\mathtt{m}/2}\varphi_\alpha^{\mathtt{i}}(x - 2^{-\alpha}\cdot\lambda),$$

функции $\psi_P^{\mathtt{i}}$ определяются аналогично. Тогда в виду (6) нетрудно показать, что для любого $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ верно представление (в смысле $\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$)

$$f = \sum_{P\in\mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}} \langle f, \varphi_P^{\mathtt{i}}\rangle\,\psi_P^{\mathtt{i}} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\sum_{\alpha_P=\alpha} \langle f, \varphi_P^{\mathtt{i}}\rangle\,\psi_P^{\mathtt{i}} \quad (\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}). \qquad (7)$$

Введем прямое φ – преобразование $S_\varphi^{\mathtt{i}}$ на $\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ по правилу

$$S_\varphi^{\mathtt{i}} \ : \ \mathcal{S}'^{\mathtt{i}} \ni f \mapsto S_\varphi^{\mathtt{i}}(f) \equiv (\langle f, \varphi_P^{\mathtt{i}}\rangle \,|\, P \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}),$$

и (формально) левое обратное к $S_\varphi^{\mathtt{i}}$ φ – преобразование $T_\psi^{\mathtt{i}}$ по правилу

$$T_\psi^{\mathtt{i}} \ : \ (a_P) = (a_P \,|\, P \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}) \mapsto T_\psi^{\mathtt{i}}((a_P)) = \sum_{P\in\mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}} a_P\,\psi_P^{\mathtt{i}}.$$

Равенство (7) означает, что композиция $T_\psi^{\mathtt{i}} \circ S_\varphi^{\mathtt{i}}$ есть тождество на $\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$.

Определение 3. *Пусть* $0 < p, q \le \infty; \mathfrak{s} \in \mathbb{R}^n; \mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}$. *Для числовой последовательности* $(a_P) = (a_P \,|\, P \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}})$ *введем квазинормы*

$$\|(a_P)\,|\,\mathtt{B}_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}\| = \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} 2^{\alpha\mathfrak{s}\,q}\left(\sum_{\alpha_P=\alpha}\left(|P|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\,a_P|\right)^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (8)$$

$$\|(a_P)\,|\,\mathtt{L}_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}\| = \|\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} 2^{\alpha\mathfrak{s}\,q}\sum_{\alpha_P=\alpha}\left(|P|^{-\frac{1}{2}}|\,a_P|\right)^q\chi_P\right)^{\frac{1}{q}}|\,L_p(\mathbb{I}^m)\| \ (p < \infty) \quad (9)$$

(*естественная модификация, если* $p=\infty$ *и/или* $q=\infty$) *и* (*при* $q<\infty$)

$$\|(a_P)\,|\,{}^{\delta}\mathtt{L}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}\| = \sup_{Q\in\mathfrak{R}^{\mathtt{mi}}_{\delta}} \left(\frac{1}{|Q|}\sum_{P\subset Q}\big(2^{\alpha_P\,\mathfrak{s}}|P|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}|a_P|\,\big)^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{10}$$

$$\|(a_P)\,|\,\mathtt{L}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{\infty\,q}\| = \sup_{\Omega\in\mathfrak{O}^{\mathtt{i}}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\sum_{P\subset \Omega}\big(2^{\alpha_P\,\mathfrak{s}}|P|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}|a_P|\,\big)^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

Тогда $\mathtt{A}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q} = \{\,(a_P)\,:\,\|\,(a_P)\,|\,\mathtt{A}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}\,\|<\infty\,\}$, *где* $\mathtt{A}\in\{\mathtt{B},\mathtt{L},{}^{\delta}\mathtt{L}\}$.

Теорема 2. *Пусть* $0<p,q\le\infty;\mathfrak{s}\in\mathbb{R}^n$; $(A,\mathtt{A})\in\{(B,\mathtt{B}),(L,\mathtt{L}),({}^{\delta}L,{}^{\delta}\mathtt{L})\}$; $\mathtt{i}\in\{\mathtt{r},\mathtt{t}\}$. *Тогда распределение* $f\in\mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ *принадлежит* $A^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}$, *если и только если последовательность* $(\langle f,\varphi^{\mathtt{i}}_P\rangle\,|\,P\in\mathfrak{R}^{\mathtt{mi}}_{\delta})$ *принадлежит* $\mathtt{A}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}$; *при этом*

$$\|\,(\langle f,\varphi^{\mathtt{i}}_P\rangle)\,|\,\mathtt{A}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}\,\| \ \asymp\ \|\,f\,|\,A^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}\,\|.$$

Более того, операторы $S^{\mathtt{i}}_{\varphi}\,:\,A^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}\to\mathtt{A}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}$ *и* $T^{\mathtt{i}}_{\psi}\,:\,\mathtt{A}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}\to A^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}$ *ограничены и их композиция* $T^{\mathtt{i}}_{\psi}\circ S^{\mathtt{i}}_{\varphi}$ *есть тождество на* $A^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}_{p\,q}$.

Замечание 3. *Понятие* φ *– преобразования введено в [2], там же доказана теорема 2 в случае* $\mathtt{i}=\mathtt{r},1=n\le m$. *Случай* $\mathtt{i}=\mathtt{r},n=m=2,A=L$ *рассмотрен в [10], см. также [11]. Общий случай (*$\mathtt{i}=\mathtt{r}$*;* $1\le n\le m$*; смешанные нормы) (за исключением* $L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mr}}_{\infty\,q}$ *и* ${}^{\delta}L^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mr}}_{\infty\,q}$*) получен в [8].*

4 Всплеск – представление

Пусть $\mathtt{i}\in\{\mathtt{r},\mathtt{t}\}$, $\mathtt{I}^m\equiv\mathtt{I}^m(\mathtt{0})=\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^m$, $\mathtt{I}^m(\mathtt{1})=\mathtt{I}^m\setminus\{(\mathtt{0},\ldots,\mathtt{0})\}$, $\Lambda^{\mathtt{r}}(m,j)=\mathbb{Z}^m$, $\Lambda^{\mathtt{t}}(m,j)=\mathbb{Z}^m\cap[0,2^j-1]^m, j\in\mathbb{N}_0$. Пусть

$$\mathcal{W}^{m\mathtt{i}}\equiv\{\,w^{\iota\,\mathtt{i}}_{j\lambda}\mid\lambda\in\Lambda^{\mathtt{i}}(m,j),\,\iota\in\mathtt{I}^m(\operatorname{sign}j),\,j\in\mathbb{N}_0\}$$

— m–мерная система всплесков Мейера на $\mathbb{I}^m$, см. [12, ch. 3,§5], и

$$\mathcal{W}^{\mathfrak{m}\mathtt{i}}\equiv\{\,w^{\iota\,\mathtt{i}}_{\alpha\lambda}(x)=\prod_{\nu\in\mathrm{z}_n}w^{\iota^{\nu}\,\mathtt{i}}_{\alpha_\nu\,\lambda^\nu}(x^\nu)\mid\lambda\in\Lambda^{\mathtt{i}}(\mathfrak{m},\alpha),\,\iota\in\mathtt{I}^{\mathfrak{m}}(\alpha),\,\alpha\in\mathbb{N}^n_0\}$$

— соответствующая $\mathfrak{m}$ – кратная система всплесков на $\mathbb{I}^m$ (подробности см. в [13]); здесь $\mathtt{I}^{\mathfrak{m}}(\alpha)=\{\iota\in\mathtt{I}^m:\iota^\nu\in\mathtt{I}^{m_\nu}(\operatorname{sign}\alpha_\nu),\,\nu\in\mathrm{z}_n\}$, $\Lambda^{\mathtt{i}}(\mathfrak{m},\alpha)=$

$\{\lambda \in \mathbb{Z}^m \,|\, \lambda^\nu \in \Lambda^{\mathtt{i}}(m_\nu, \alpha_\nu),\, \nu \in \mathrm{z}_n\}$. Дадим более удобную здесь нумерацию всплесков из $\mathcal{W}^{\mathtt{mi}}$ посредством параллелепипедов из $\mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}$, а именно, положим $w_P^{\iota\,\mathtt{i}} = w_{\alpha\lambda}^{\iota\,\mathtt{i}}$, если $\iota \in \mathtt{I}^{\mathtt{m}}(\alpha_P)$, $P = P_{\alpha\lambda}^{\mathtt{m}} \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}$.

Тогда для любого распределения $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ верно представление

$$f = \sum_{P \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}}} \sum_{\iota \in \mathtt{I}^{\mathtt{m}}(\alpha_P)} \langle f, w_P^{\iota\,\mathtt{i}} \rangle \, w_P^{\iota\,\mathtt{i}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \Delta_\alpha^{w\mathtt{i}}(f),$$

здесь $\Delta_\alpha^{w\mathtt{i}}(f,x) = \sum_{\alpha_P = \alpha} \sum_{\iota \in \mathtt{I}^{\mathtt{m}}(\alpha_P)} \langle f, w_P^{\iota\,\mathtt{i}} \rangle \, w_P^{\iota\,\mathtt{i}}$ $(\mathtt{i} \in \{\mathtt{r},\mathtt{t}\})$.

Ниже в *теореме 3* для последовательностей вида $(a_P^{\iota\,\mathtt{i}} \,|\, \iota \in \mathtt{I}^{\mathtt{m}}(\alpha_P),\, P \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}})$ используются квазинормы $\| \cdot \,|\, \breve{\mathtt{A}}_{pq}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}} \|$, задаваемые как $\| \cdot \,|\, \mathtt{A}_{pq}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}} \|$, следует лишь в (8), (9) заменить $\sum_\alpha$ на $\sum_\alpha \sum_{\iota \in \mathrm{E}^{\mathtt{m}}(\alpha)}$, в (10), (11) — $\sum_{P \subset Q}$ на $\sum_{P \subset Q} \sum_{\iota \in \mathrm{E}^{\mathtt{m}}(\alpha_P)}$ и в (8) – (11) — a_P на $a_P^{\iota\,\mathtt{i}}$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < p\,, q \le \infty; \mathfrak{s} \in \mathbb{R}^n$; $(A, \mathtt{A}, \mathfrak{A}) \in \{(B, \mathtt{B}, \mathfrak{B}), (L, \mathtt{L}, \mathfrak{L}), ({}^\delta L, {}^\delta\mathtt{L}, {}^\delta\mathfrak{L})\}$; $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r},\mathtt{t}\}$. *Тогда для распределения* $f \in \mathcal{S}'^{\mathtt{i}}$ *следующие условия эквивалентны*:

I. f *принадлежит пространству* $A_{pq}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}$;

II. *для числовой последовательности* $(\langle f, w_P^{\iota\,\mathtt{i}} \rangle \mid \iota \in \mathtt{I}^{\mathtt{m}}(\alpha_P), P \in \mathfrak{R}_\delta^{\mathtt{mi}})$ *конечна величина*

$$\| (\langle f, w_P^{\iota\,\mathtt{i}} \rangle) \,|\, \breve{\mathtt{A}}_{pq}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}} \|; \tag{12}$$

III. *для последовательности* $(\Delta_\alpha^{w\mathtt{i}}(f,x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$ *конечна величина*‡

$$\| (\Delta_\alpha^{w\mathtt{i}}(f,x) \,|\, \mathfrak{A}_{pq}^{m\mathtt{i}} \|. \tag{13}$$

При этом функционалы (12) и (13) являются квазинормами пространства $A_{pq}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}$, *эквивалентными исходной.*

Замечание 4. *Для пространств* $A_{pq}^{\mathfrak{s}\,\mathtt{mi}}$ *из определения 1 с* $1 \le p, q \le \infty$ *и* $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}_+^n$ *теорема 3 получена в [13]; там же приведены история вопроса и библиография. Здесь лишь добавим, что для пространств Харди* $H_1(\mathbb{R}^n)$, *product–*$H_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *и двойственных им BMO*$(\mathbb{R}^n)$, *product–BMO* $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *утверждение* I $\Leftrightarrow$ II *теоремы 3 доказано P.– G. Lemarie (см. [12, ch.5, §8]) и независимо в [14] (в [14] использованы всплески*

‡обозначение $\mathfrak{A}_{pq}^{m\mathtt{i}}$ принято ради краткости : здесь $\mathfrak{B}_{pq}^{m\mathtt{i}} = \ell_q(L_p^{m\mathtt{i}})$; $\mathfrak{L}_{pq}^{m\mathtt{i}} = L_p^{m\mathtt{i}}(\ell_q)$ при $p < \infty$; $\mathfrak{A}_{\infty q}^{m\mathtt{i}} = \mathfrak{A}_q^{m\mathtt{i}}$ при $q < \infty$ для $\mathfrak{A} \in \{\mathfrak{L}, {}^\delta\mathfrak{L}\}$.

с компактным носителем). Отметим еще работы [15], [16], в которых установлена характеризация $\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^m)\big(= {}^{\delta}L^{\mathtt{01}}_{\infty 2}(\mathbb{T}^m)$ *с* $n = m$ *и* $\mathtt{0} = (\mathtt{0},\ldots,\mathtt{0}), \mathtt{1} = (\mathtt{1},\ldots,\mathtt{1}) \in \mathbb{N}^m_0\big)$*, аналогичная утверждению* I $\Leftrightarrow$ III *теоремы 3 с "пачками Валле – Пуссена" вместо* $\Delta^{w\mathtt{t}}_{\alpha}(f,x)$ *(одномерный случай,* $m=1$*, рассмотрен в [15], а кратный случай,* $m \geq 2$*, – в [16]).*

Литература

1 Трибель Х. Теория функциональных пространств. – М.:Мир, 1986. – 447 с.

2 Frazier M., Jawerth B. A discrete transform and decomposition of distribution spaces // J. Funct. Analysis. – 1990. – V. 93. – P. 34-170.

3 Sadosky C. The BMO extended family in product spaces // Contemp. Math. – 2006. – V. 411. – P. 63-78.

4 Bui H. – Q., Paluszynski M., Taibleson M. H. A maximal function characterization of weighted Besov-Lipschitz and Triebel – Lizorkin spaces // Studia Math. – 1996. – V. 119. – P. 219-246.

5 Bui H. – Q., Paluszynski M., Taibleson M. H. Characterization of the Besov – Lipschitz and Triebel – Lizorkin spaces. The case $q < 1$ // J. Fourier Analysis Appl. – 1997. – V. 3. – P. 837-846.

6 Рычков В. С. О теореме Буи, Палюшинского, Тейблсона // Тр. МИ РАН. – 1999. – Т. 227. С. 286-298.

7 Базарханов Д. Б. Характеризации функциональных пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля смешанной гладкости // Тр. МИ РАН. – 2003. – Т. 243. – С. 53-65.

8 Bazarkhanov D. B. $\varphi-$Transform characterization of the Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel function spaces with mixed smoothness // East J. Approx. – 2004. – V. 10. – P. 119-131.

9 Vybiral J. Function spaces with dominating mixed smoothness. Dissertationes mathematicae. – 2006. – V. 436.

10 Wang W. A discrete transform and Triebel–Lizorkin spaces on the bidisc // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 347, № 4. – P. 1351 – 1364.

11 Hochmuth R. A $\varphi-$transform result for spaces with dominating mixed smoothness properties // Results Math. – 1998. – V. 33. – P. 106-119.

12 Meyer Y. Wavelets and operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 37. – Cambridge: Univ. Press, 1992. – 223 p.

13 Базарханов Д. Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИ РАН. – 2010. – Т. 269. – С. 8-30.

14 Aguirre J., Escobedo M., Peral J. C., Tchamitchian Ph. Basis of wavelets and atomic decompositions of $H_1(\mathbb{R}^n)$ and $H_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 111, № 3. – P. 683-693.

15 Бочкарев С. В. Ряды Валле–Пуссена в пространствах BMO, L_1 и $H_1(D)$ и мультипликативные неравенства // Тр. МИ РАН. – 1995. – Т. 210. – С. 41-64.

16 Бочкарев С. В. Мультипликативные оценки L_1- нормы экспоненциальных сумм. Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. АФЦ. – М., 1999. – С. 57-68.

Статья поступила в редакцию 11.07.12

Базарханов Д.Б. КЕЙБІР ФУНКЦИЯЛАР КЕҢІСТІКТЕРІНІҢ ӨРНЕКТЕУЛЕРІ МЕН СИПАТТАМАЛАРЫ

Толқыншалар арқылы Лизоркин–Трибел $L^{\mathtt{smi}}_{\infty q}$, $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}$, кеңістіктерінің және φ–түрлендіру, "локалды орташалар" және Петре максималды функциялар арқылы периодты Никольский–Бесов $B^{\mathtt{smt}}_{pq}$ және Лизоркин–Трибель $L^{\mathtt{smt}}_{pq}$ кеңістіктерінің өрнектеулері мен сипаттамалары алынған.

Bazarkhanov D.B. REPRESENTATIONS AND CHARACTERIZATIONS FOR CERTAIN FUNCTION SPACES

Representations and characterizations are obtained for periodic Nikol'skii – Besov $B^{\mathtt{smt}}_{pq}$ and Lizorkin – Triebel $L^{\mathtt{smt}}_{pq}$ spaces by φ–transform, "local means" and Peetre maximal functions as well as for Lizorkin – Triebel $L^{\mathtt{smi}}_{\infty q}$ spaces, $\mathtt{i} \in \{\mathtt{r}, \mathtt{t}\}$, by means of wavelets.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.95

А. С. Бердышев
Казахский национальный педагогический университет имени Абая
Казахстан, 0500110, Алматы, ул. Толе-би, 80, e-mail: berdyshev@mail.ru

О ВОЛЬТЕРРОВОСТИ ЗАДАЧ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

70-летию нашего Наставника
академика М. Отелбаева посвящается

Для смешанного параболо–гиперболического уравнения третьего порядка сформулированы задачи с условиями типа Бицадзе–Самарского в гиперболической части области. Найдены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость в смысле регулярного и сильного решений, и установлена вольтерровость постановленных задач.
Ключевые слова: *уравнения параболо-гиперболического типа, свойства Бицадзе-Самарского, регулярная и сильная разрешимость, свойства Вольтерра.*

Введение

В 70-х годах прошлого века А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [1] сформулировали и изучали новую задачу для равномерно-эллиптического уравнения. В настоящее время такие задачи называются задачами Бицадзе–Самарского. Отличие этих задач состоит в том, что граничные значения

Keywords: *Equation of parabolic-hyperbolic type, properties of Bitsadze-Samarskii, regular and strong solvability, Volterra property*
2010 Mathematics Subject Classification: 35M12; 35M10; 35P05; 35A05.

искомого решения повторяются во внутренних точках области, где искомая функция должна удовлетворять уравнению.

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных задачам типа Бицадзе–Самарского для многих видов уравнений в различных формулировках, среди которых следует особо выделить работы М.Отелбаева [2], где исследованы корректные задачи Бицадзе–Самарского.

Несмотря на большое количество работ, посвященных вышеназванным задачам, задачи для уравнения смешанного типа с условиями, связывающим значения искомого решения или ее производной на характеристике и на произвольной монотонной кривой, лежащей строго внутри гиперболической части смешанной области в математической литературе не встречаются. В связи с этим возникают следующие естественные вопросы: *можно ли сформулировать аналогичные задачи для дифференциальных уравнении смешанного типа? Имеются ли среди таких задач вольтерровые задачи?*

Целью работы является установление вольтерровости задач типа Бицадзе–Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнение третьего порядка. Аналогичные задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка исследованы в [3].

Отметим, что Т.Ш. Кальменовым установлена полнота системы корневых функций (а, следовательно, не вольтерровость) широкого класса задач типа Бицадзе–Самарского для общих многомерных эллиптических уравнений [4].

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} lu = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} = f(x,y) \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных (x, y), ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x = 0, y = 1, x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками $AC : x+y = 0$ и $BC : x-y = 1$ уравнения (1). Пусть гладкая кривая $AD : y = -\gamma(x),\ 0 \leq x \leq l$, где $1/2 \leq l \leq 1,\ \gamma(0) = 0,\ l + \gamma(l) = 1$ расположена внутри характеристического треугольника $0 \leq x + y \leq x - y \leq 1$. Относительно кривой AD предположим, что $\gamma(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, а функции $x-\gamma(x)$ и $x+\gamma(x)$ монотонно возрастают; $0<\gamma'(0)<1,\, \gamma(x)>0,\ x>0.$

Задача TB_1. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u|_{AA_0\cup A_0B_0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{AA_0\cup AC}=0, \tag{2}$$

$$[u_x-u_y]\,(\theta_0(t))+\mu(t)[u_x-u_y]\,(\theta^*(t))=0. \tag{3_1}$$

Здесь $\theta_0(t)\big(\theta^*(t)\big)$ - *аффикс точки пересечения характеристики* AC*(кривой* AD*) с характеристикой, выходящей из точки* $(t,0),\ 0<t<1,$ n*-внутренняя нормаль,* $\mu(t)$*- заданная функция.*

Задача TB_2. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и*

$$[u_x-u_y]\,(\theta_0(t))+\mu(t)[u_x+u_y]\,(\theta^*(t))=0. \tag{3_2}$$

Задача TB_3. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и*

$$\frac{d}{dt}u[\theta_0(t)]+\mu(t)\frac{d}{dt}u[\theta^*(t)]=0. \tag{3_3}$$

Функцию $u(x,y)$ из класса $C^1(\overline{\Omega})$ будем называть *регулярным решением* задачи TB_i, если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1) в областях $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\}$ и $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, и в этих областях удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3_i).

Через W обозначим множество функций из класса $u\in C^1(\overline{\Omega})$, $u_{xx},u_{yyx}\in C(\overline{\Omega}_0),\ u_{xxx},u_{yyx}\in C(\overline{\Omega}_1)$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3_i). Так же, через $W_2^1(\Omega)$ обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l,\ W_2^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$ - пространство квадратично суммируемых функций.

Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* задачи TB_i, если существует последовательность функции $\{u_n\},\ u_n\in W$, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $\mu(t)\in C^2[0,1]$ *и* $\mu(t)\neq -1,\ 0\le t\le 1.$ *Тогда для любой функции* $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}),\ f(A)=0,$ *существует единственное регулярное решение задачи* TB_1*, которое удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1\le c\|f\|_0 \tag{4}$$

и представимо в виде

$$u(x,y)=\int_\Omega K_i(x,y;x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1,\ i=1,2,3, \tag{5_i}$$

где $K_i(x,y;x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$ *(для задачи* TB_1 $i=1$*).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любой функции* $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ *существует единственное сильное решение задачи* TB_1*. Это решение принадлежит классу*

$$C(\overline{\Omega})\cap W_2^1(\Omega)\cap W_2^{1,2}(\Omega_0), \tag{6}$$

удовлетворяет неравенству (4) и может быть представлено в виде (5_1).

Для корректности и вольтерровости задачи TB_2 в отличие от задачи TB_1 решающее значение имеет соотношение между коэффициентом "сжатия" $\mu(0)$ в начале координат производной по направлению характеристики BC и полярным углом α, образуемым кривой AD с осью абсцисс.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$\mu(t)\in C^2[0,1]\ \text{и}\ |\mu(0)|^2<tg(\alpha+\pi/4),-\pi/4<\alpha<0. \tag{7}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}),\ f(A)=0$*, существует единственное регулярное задачи* TB_2*, которое удовлетворяет неравенству (4) и представимо в виде* (5_i)*, при* $i=2$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (7). Тогда для любой функции* $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ *существует единственное сильное решение задачи* TB_2*. Это решение принадлежит классу (6), удовлетворяет неравенству (4) и может быть представлено в виде* (5_2).

Теорема 5. *Пусть* $\mu(t)\in C^2[0,1],\ \mu(t)\neq -1,\ 0\le t\le 1,$ *и*

$$\left|\frac{\mu(0)}{1+\mu(0)}\right|^2<ctg(\alpha+\pi/4),\ -\pi/4<\alpha<0. \tag{8}$$

Тогда для задачи TM_3 *справедливы все утверждения теорем 3 и 4.*

Через L_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W, элементы которого удовлетворяют условиям (2) и (3_i) $(i = 1, 2, 3)$, выражением (1).

Согласно определению сильного решения задачи TB_i $u(x, y)$ – сильное решение задачи тогда и только тогда, когда $u(x, y) \in D(L_i)$, где $D(L_i)$ – область определения оператора L_i. При выполнении соответствующих условий теорем каждый оператор L_i – замкнутый и его область определения плотна в $L_2(\Omega)$; обратный оператор L_i^{-1} существует, определен на всем $L_2(\Omega)$ и вполне непрерывный $(i = 1, 2, 3)$.

Поэтому возникает естественный вопрос о существовании собственных значений оператора L_i^{-1}, а следовательно, и задачи TB_i $(i = 1, 2, 3)$. Методами, развивающими методы работ [3] и [5] доказываются следующие теоремы об отсутствии собственных значений операторов L_i^{-1} $(i = 1, 2, 3)$, являющиеся основным результатом данной работы.

Теорема 6. *Пусть* $\mu(t) \neq -1,\ 0 \leq t \leq 1$. *Тогда интегральный оператор в правой части* (5_1) *является вольтерровым в* $L_2(\Omega)$ *(вполне непрерывным и квазинильпотентным).*

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (7). Тогда задача* TB_2 *является вольтерровой, т.е. для любого комплексного* λ *решение уравнения* $L_2 u - \lambda u = f(x, y)$ *существует и единственно при всех* $f(x, y) \in L_2(\Omega)$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда обратный оператор* L_3^{-1} *оператора задачи* TB_3 *является вольтерровым.*

Из теорем 1.3, 2.3, 3.2 легко следует пустота множества собственных значений задач TB_i $(i = 1, 2, 3)$.

Отметим, что для корректности (вольтерровости) задач TB_2 ,TB_3 условия (7) и (8) существенны. Например, при нарушении условия (7) решение задачи TB_2 не единственно, т.е. нуль является собственным значением задачи TB_2.

Литература

1 Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, №4. – С. 739-740.

2 Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 265, №4. – С. 815-819.

3 Бердышев А.С. О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Сибирский матем. журнал. – 2005. – Т. 46, №3. – С. 500-510.

4 Кальменов Т.Ш., Ерошенков Е.П. О полноте корневых векторов эллиптической задачи Бицадзе–Самарского // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 297, №3. – С. 528-531.

5 Садыбеков М.А, Тойжанова Г.Д. Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, №1. – С. 183-186.

Статья поступила в редакцию 10.07.12

Бердышев А.С. ҮШІНШІ РЕТТІ АРАЛАС ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ ТИПІНДЕГІ ЕСЕПТЕРТЕРДІҢ ВОЛЬТЕРЛІГІ ТУРАЛЫ

Үшінші ретті аралас парабола-гиперболалық типтегі теңдеу үшін аймақтың гиперболалық бөлігінде Бицадзе-Самарский шарттары берілген есептердің қойылуы келтірілген. Бұл есептердің регуляр және күшті шешім мағынасындағы бірмәнді шешілуіне, сондай-ақ вольтерлігін қамтамасыз ететін шарттар табылған.

Berdyshev A.S. THE VOLTERRA PROPERTY OF PROBLEMS OF BITSADZE-SAMARSKII TYPE FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION OF THIRD ORDER

Formulated problems with the Bitsadze-Samarskii type conditions in the hyperbolic part of region for a mixed parabolic-hyperbolic equation of third order. Found conditions providing the unique solvability in the sense of regular and strong solutions, and the volterra of posed problems.

УДК 517.95

Г. И. Бижанова
Институт математики МОН РК
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: galina_math@mail.ru

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РАССОГЛАСОВАНИИ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ДАННЫХ

Посвящается академику НАН РК М.О. Отелбаеву
по случаю его 70-летия

Рассмотрены краевые задачи для параболических уравнений при невыполнении условий согласования краевых и начальных данных. Показано, что рассогласование заданных функций на границе области в начальный момент времени в задачах приводит к возникновению сингулярных решений, установлен порядок их особенностей при $t \to 0$ в окрестности границы области.

Ключевые слова: *параболическое уравнение, согласование начальных и краевых данных, сингулярное решение, существование, единственность, оценка, пространство Гельдера.*

При решении краевых задач для параболических уравнений в пространствах Гельдера $C_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, l – положительное нецелое число, требуется выполнение условий согласования начальных и граничных данных, которые обеспечат непрерывность решения и его производных и ограниченность констант Гельдера старших производных в $\overline{\Omega}_T$. Эти условия согласования представляют собой функциональные равенства, связывающие

Keywords: *parabolic equation, incompatible initial and boundary data, singular solution, existence, uniqueness, estimate, Hölder space*
2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B25, 35C05

все заданные функции задачи на границе области при $t = 0$ и тем самым ограничивающие их произвольность.

При нахождении решений первой и второй краевых задач для параболических уравнений второго порядка в классах $C^{2,\,1}_{x\ \,t}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ и $C^{2,\,1}_{x\ \,t}(\Omega_T) \cap C^{1,\,0}_{x\ \,t}(\overline{\Omega}_T)$ соответственно уже предполагается, что в задачах выполнены условия согласования нулевого порядка, так как ищется непрерывное решение первой краевой задачи и непрерывное решение со всеми его производными первого порядка по пространственным переменным второй краевой задачи в замыкании области $\overline{\Omega}_T$.

Исследование краевых задач в весовых пространствах Гельдера $C^l_s(\Omega_T)$, $s \leq l$, введенных в рассмотрение В.С.Белоносовым , позволяет освободиться от одного условия согласования [1, 2, 3]. Однако при рассмотрении первой краевой задачи в этом пространстве необходимо выполнение условия согласования нулевого порядка.

Y. Martel и Ph. Souplet в [4] доказали, что если не выполнено условие согласования нулевого порядка в точке на границе области в первой краевой задаче, то ее решение не будет непрерывным в этой точке.

В работах [5–7] были изучены задачи для параболических уравнений с полным рассогласованием начальных и граничных данных. Было показано, что рассогласование заданных функций на границе области в начальный момент времени в задачах приводит к возникновению сингулярных решений, установлен порядок особенностей этих решений в окрестности границы области при $t \to 0$.

В настоящей работе будут рассмотрены первая и вторая краевые задачи в полупространствах $\mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$, и $\mathbb{R}^1_+$ при полном рассогласовании краевых и начальных данных. Приведены сингулярные решения этих задач в окрестности границы области при $t \to 0$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$. Определим весовое пространство Гельдера $C^l_s(D_T)$ с нормой [1, 2, 3]

$$|u|^{(l)}_{s,\Omega_T} =$$

$$= \sup_{t \leq T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{\Omega'_t} + \sum_{s<2k+|m|<l} \sup_{t \leq T} t^{\frac{2k+|m|-s}{2}} |\partial^k_t \partial^m_x u|_{\Omega'_t} + \begin{cases} |u|^{(s)}_{\Omega_T}, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

здесь $s \leq l$, l – положительное нецелое число, $\Omega'_t = \Omega \times [t/2, t]$, $|\,v\,|_{\Omega_T} =$

$\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} |\, v(x,t)\,|$,

$$[u]^{(l)}_{\Omega_T} = \sum_{2k+|m|=[l]} [\partial_t^k \partial_x^m u]^{(l-[l])}_{x,\Omega_T} + \sum_{0<l-2k-|m|<2} [\partial_t^k \partial_x^m u]^{\left(\frac{l-2k-|m|}{2}\right)}_{t,\Omega_T}, \tag{2}$$

$$[v]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} = \sup_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T} \bigl|v(x,t)-v(z,t)\bigr|\,|x-z|^{-\alpha}, \tag{3}$$

$$[v]^{(\alpha)}_{t,\Omega_T} = \sup_{(x,t),(x,t_1)\in\overline{\Omega}_T} \bigl|v(x,t)-v(x,t_1)\bigr|\,|t-t_1|^{-\alpha},\ \alpha\in(0,1), \tag{4}$$

$|u|^{(s)}_{\Omega_T}$ – норма классического пространства Гельдера $C^{s,\,s/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$ [8]

$$|u|^{(s)}_{\Omega_T} = \sum_{2k+|m|\le[s]} |\partial_t^k \partial_x^m u|_{\Omega_T} + \begin{cases} 0, & s \ \text{ целое}, \\ [u]^{(s)}_{\Omega_T}, & s \ \text{ нецелое}, \end{cases}$$

где $[u]^{(s)}_{\Omega_T}$ определяется по формулам (2) – (4).

При $s=l$ $C^l_l(\Omega_T)$ эквивалентно пространству $C^{l,\,l/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$.

Из определения нормы (1) мы видим, что при $s<l$ функция $u(x,t)$ имеет особенность по t при $t\to 0$ во всей области Ω вплоть до границы. Например, если начальная функция $u_0(x)$ в задаче Коши для параболического уравнения принадлежит пространству Гёльдера $C^s(\overline{\Omega})$, $s<l$, то решение этой задачи будет из $C^l_s(\Omega_T)$.

Пусть $D := \mathbb{R}^n_+ = \{x=(x',x_n)\,|\,x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n>0)\}$, $n\ge 2$, $R := \{x\,|\,x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ x_n=0\}$, $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, $D_T = D\times(0,T)$, $R_T = R\times[0,T]$.

Введем в рассмотрение весовое пространство $C^2_{s,\,\delta_0}(D_T)$, $\delta_0>0$, $2\le s\le 2+\alpha$, $C^2_{s,\,\delta_0}(D_T)$, $\delta_0>0$, $2\le s\le 2+\alpha$, функций $u(x,t)$ с нормой

$$\begin{gathered} |u|^{(2)}_{s,\delta_0,D_T} := \sup_{t\le T} t^{-1}\bigl|u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\bigr|_{D'_t} + \sum_{\mu=1}^{n-1}\sup_{t\le T} t^{\frac{1-s}{2}}\bigl|\partial_{x_\mu} u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\bigr|_{D'_t} \\ +\sup_{t\le T} t^{-1/2}\bigl|\partial_{x_n} u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\bigr|_{D'_t} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n-1}\sup_{t\le T} t^{\frac{2-s}{2}}\bigl|\partial^2_{x_i x_\mu} u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\bigr|_{D'_t} \\ +\bigl|\partial^2_{x_n x_n} u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\bigr|_{D_T} + \bigl|\partial_t u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\bigr|_{D_T}, \end{gathered} \tag{5}$$

и, в частности, при $s=2+\alpha$ получим

$$|u|^{(2)}_{2+\alpha,\delta_0,D_T} := \sup_{t\le T} t^{-1}\big|u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\big|_{D'_t} + \sum_{\mu=1}^{n-1}\sup_{t\le T} t^{-\frac{1+\alpha}{2}}\big|\partial_{x_\mu}u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\big|_{D'_t}$$
$$+\sup_{t\le T} t^{-1/2}\big|\partial_{x_n}u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\big|_{D'_t} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n-1}\sup_{t\le T} t^{-\frac{\alpha}{2}}\big|\partial^2_{x_ix_\mu}u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\big|_{D'_t} \tag{6}$$
$$+\big|\partial^2_{x_nx_n}u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\big|_{D_T} + \big|\partial_t u\,e^{\delta_0\frac{x_n^2}{t}}\big|_{D_T}.$$

Обозначим $|u|^{(2)}_{s,\delta_0,D_T} := M$. Из (5), (6) мы будем иметь

$$\big|\partial^2_{x_ix_\mu}u\big| \le M\,e^{-\delta_0\frac{x_n^2}{t}},\ i=1,...,n,\ \mu=1,...,n-1,\quad \text{при } s=2,$$
$$\big|\partial_t u(x,t)\big|,\ \big|\partial^2_{x_nx_n}u(x,t)\big| \le M\,e^{-\delta_0\frac{x_n^2}{t}} \text{ при } 2\le s\le 2+\alpha. \tag{7}$$

Пусть точка x находится внутри области D: $x_n \ge r_0 = \mathrm{const} > 0$, тогда из (7) мы получим, что производные $\partial^2_{x_ix_\mu}u$ при $s=2$, и $\partial_t u(x,t)$, $\partial^2_{x_nx_n}u(x,t)$ при $2\le s\le 2+\alpha$ стремятся к нулю экспоненциально при $t\to 0$, а на границе $x_n=0$ области D они ограничены, но могут не быть непрерывными функциями в $\overline{D}_T$.

В дальнейшем мы будем использовать специальные функции – повторные интегралы вероятности $\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta$, они определяются по формулам [9, гл. 7.2]:

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,z := \int_z^\infty \mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\,\zeta\,d\zeta,\ n=0,1,2,\dots, \tag{8}$$

$$\mathrm{i}^{-1}\mathrm{erfc}\,z := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-z^2},\ \mathrm{i}^0\mathrm{erfc}\,z := \mathrm{erfc}\,z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-\zeta^2}\,d\zeta,\ \mathrm{i}^1\mathrm{erfc}\,z := \mathrm{ierfc}\,z.$$

Рассмотрим две задачи. Требуется найти решение $u(x,t)$ первой краевой задачи – Задачи 1

$$\partial_t\,u - a\,\Delta\,u = f(x,t) \text{ в } D_T, \tag{9}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad\text{в}\quad D, \tag{10}$$

$$u|_{x_n=0} = \varphi(x',t) \text{ на } R_T, \tag{11}$$

и решение $u(x,t)$ второй краевой задачи – Задачи 2, удовлетворяющей уравнению (9), начальному условию (10) и граничному условию

$$\partial_{x_n} u|_{x_n=0} = \psi(x',t) \text{ в } R_T. \tag{12}$$

Здесь $a = \text{const} > 0$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_n} = \partial/\partial x_n$, $\Delta = \partial^2_{x_1x_1} + \ldots, \partial^2_{x_nx_n}$.

Определим условия согласования нулевого и первого порядков на границе $x_n = 0$ в Задачах 1 и 2.

Пусть

$$A_0(x') := \varphi(x',0) - u_0(x)\big|_{x_n=0},$$

$$A_1(x') := \partial_t\varphi(x',t)\big|_{t=0} - \big(a\,\Delta u_0(x) + f(x,0)\big)\big|_{x_n=0},$$

$$B_0(x') := \psi(x',0) - \partial_{x_n}u_0(x)\big|_{x_n=0}.$$

Условиями согласования нулевого и первого порядков на границе R в Задаче 1 (9) — (11) являются равенства $A_0(x') = 0$, $A_1(x') = 0$ на R и нулевого порядка в Задаче 2 (9), (10), (12) – $B_0(x') = 0$ на R. Очевидно невыполнение условий согласования нулевого и первого порядков в этих задачах означает, что $A_0(x') \neq 0$, $A_1(x') \neq 0$, $B_0(x') \neq 0$ на R.

Сформулируем основные результаты для Задач 1 и 2 [7].

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $s \in (\alpha, 2+\alpha]$. Для любых функций $u_0(x) \in C^s(\overline{D})$, $f(x,t) \in C^{\alpha}_{s-2}(D_T)$, $\varphi(x',t) \in C^{2+\alpha}_s(R_T)$, не удовлетворяющих на границе $x_n = 0$ области D условиям согласования нулевого порядка при $s \in (\alpha, 2)$ ($A_0(x') \neq 0$ на R) нулевого и первого порядков при $s \in [2, 2+\alpha]$ ($A_0(x') \neq 0$, $A_1(x') \neq 0$ на R), Задача 1 (9) – (11) имеет единственное решение $u(x,t) = V_0(x,t) + v_1(x,t)$ при $s \in (\alpha, 2)$ и $u(x,t) = V_0(x,t) + W_0(x,t) + V_1(x,t) + W_1(x,t) + v_2(x,t)$ при $s \in [2, 2+\alpha]$, где $V_j(x,t) = z_j(x',t)\, erfc\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$, $z_j \in C^{2+\alpha}_s(R_T)$, $W_j \in C^2_{s,\delta_0}(D_T)$, $j = 0,1$, $\delta_0 = \frac{1}{8a}$, $v_i \in C^{2+\alpha}_s(D_T)$, $i = 1,2$, и выполняются оценки*

$$|z_j|^{(2+\alpha)}_{s,R_T} \leq C_1|A_j|^{(s-2j)}_R, \ |W_j|^{(2)}_{s,\delta_0,D_T} \leq C_2|A_j|^{(s-2j)}_R, \ j = 0,1,$$

$$|v_i|^{(2+\alpha)}_{s,D_T} \leq C_3\Big(|u_0|^{(s)}_D + |f|^{(\alpha)}_{s-2,D_T} + |\varphi|^{(2+\alpha)}_{s,R_T}\Big), \ i = 1,2.$$

Из этой теоремы при $s = 2+\alpha$ имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Для любых функций* $u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $f(x,t)\in C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $\varphi(x',t)\in C_{x'\ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(R_T)$, $\alpha\in(0,1)$, *не удовлетворяющих на границе* $x_n=0$ *области* D *условиям согласования нулевого и первого порядков* ($A_0(x')\neq 0$, $A_1(x')\neq 0$ *на* R), *Задача 1* (9) – (11) *имеет единственное решение* $u(x,t)=V_0(x,t)+W_0(x,t)+V_1(x,t)+W_1(x,t)+v_2(x,t)$, *где* $V_j(x,t)=z_j(x',t)\,erfc\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$, $z_j\in C_{x'\ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(R_T)$, $W_j\in C^2_{2+\alpha,\delta_0}(D_T)$, $j=0,1$, $\delta_0=\frac{1}{8a}$, $v_2\in C_{x\ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$, *и выполняются оценки*

$$|z_j|_{R_T}^{(2+\alpha)}\le C_4|A_j|_R^{(2+\alpha-2j)},\ |W_j|^{(2)}_{2+\alpha,\delta_0,D_T}\le C_5|A_j|_R^{(2+\alpha-2j)}, j=0,1,$$

$$|v_2|_{D_T}^{(2+\alpha)}\le C_6\Big(|u_0|_D^{(2+\alpha)}+|f|_{D_T}^{(\alpha)}+|\varphi|_{R_T}^{(2+\alpha)}\Big).$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$, $s\in(\alpha,\,2+\alpha]$. *Для любых функций* $u_0(x)\in C^s(\overline{D})$, $f(x,t)\in C^\alpha_{s-2}(D_T)$, $\psi(x',t)\in C^{1+\alpha}_{s-1}(R_T)$ *при* $s\in(\alpha,1)$, *а если* $s\in[1,\,2{+}\alpha]$, *то для функций* u_0, f, ψ, *не удовлетворяющих на границе* $x_n=0$ *области* D *условиям согласования нулевого порядка* ($B_0(x'):=\psi(x',0)-\partial_{x_n}u_0(x)\big|_{x_n=0}\neq 0$ *на* R), *Задача 2* (9), (10), (12) *имеет единственное решение* $u(x,t)=v_1(x,t)$ *при* $s\in(\alpha,1)$, *а при* $s\in[1,\,2+\alpha]$ – $u(x,t)=-2\sqrt{at}\,z_2(x',t)ierfs\,\frac{x_n}{2\sqrt{at}}+v_2(x,t)$, *где* $z_2\in C^{2+\alpha}_{s-1}(R_T)$, $v_i\in C^{2+\alpha}_s(D_T)$, $i=1,2$, *и выполняются оценки*

$$|z_2|^{(2+\alpha)}_{s-1,R_T}\le C_7|B_0|_R^{(s-1)},$$

$$|v_i|^{(2+\alpha)}_{s,D_T}\le C_8\Big(|u_0|_D^{(s)}+|f|^{(\alpha)}_{s-2,D_T}+|\psi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}\Big),\ i=1,2. \tag{13}$$

Из этой теоремы при $s=2+\alpha$ вытекает

Теорема 4. *Для любых функций* $u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $f(x,t)\in C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $\psi(x',t)\in C_{x'\ t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$, *не удовлетворяющих на границе* $x_n=0$ *области* D *условиям согласования нулевого порядка* ($B_0(x')\neq 0$ *на* R), *Задача 2* (9), (10), (12) *имеет единственное решение* $u(x,t)=-2\sqrt{at}\,z_2(x',t)ierfs\,\frac{x_n}{2\sqrt{at}}+v_2(x,t)$, *где* $z_2\in C^{2+\alpha}_{1+\alpha}(R_T)$, $v_2\in C_{x\ t}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$, *и справедливы оценки*

$$|z_2|^{(2+\alpha)}_{1+\alpha,R_T}\le C_9|B_0|_R^{(1+\alpha)},\quad |v_2|^{(2+\alpha)}_{s,D_T}\le C_{10}\Big(|u_0|_D^{(2+\alpha)}+|f|_{D_T}^{(\alpha)}+|\psi|_{R_T}^{(1+\alpha)}\Big).$$

Замечание 1. *В теоремах 1 – 4 функции* $z_j(x',t)$, $z_2(x',t)$ *и* $W_j(x,t)$, $j = 0,1$, *вполне определяются как решения вспомогательных задач и, как видно из оценок решений в теоремах 1 – 4, зависят от функций* $A_0(x')$, $A_1(x')$, $B_0(x')$ *соответственно.*

Замечание 2. *Если в Задаче 1 условия согласования нулевого (первого) порядка выполняется, т.е.* $A_0(x') = 0$ $(A_1(x') = 0)$ *на* R*, тогда в теоремах 1, 2* $V_0(x,t) = 0$, $W_0(x,t) = 0$ $(V_1(x,t) = 0$, $W_1(x,t) = 0)$ *в* D_T.

Если в Задаче 2 условие согласования нулевого порядка выполняется, т.е. $B_0(x') = 0$ *на* R*, тогда в теоремах 3, 4* $z_2(x',t) = 0$ *на* R_T.

Согласно теоремам 1 и 2 особые решения Задачи 1 (9), (10), (11) $V_j(x,t) = z_j(x',t)\,\mathrm{erfc}\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$, $j = 0,1$, содержат функцию

$$h_0(x_n,t) := \mathrm{erfc}\frac{x_n}{2\sqrt{at}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_n}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi.$$

Нетрудно видеть, что функция $\mathrm{erfc}\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$ и ее производные

$$\partial_{x_n}h_0(x_n,t) = -\frac{1}{\sqrt{a\pi t}}\,e^{-\frac{x_n^2}{4at}}, \quad \partial_t h_0 = a\partial^2_{x_nx_n}h_0 = \frac{x_n}{2\sqrt{a\pi}t^{3/2}}\,e^{-\frac{x_n^2}{4at}}$$

разрывны, они имеют различные пределы при $(x_n,t) \to (0,0)$ в зависимости от пути стремления точки (x_n,t) к точке $(0,0)$.

Пусть $x_n \geq r_0$=const>0, тогда применяя оценки $|\xi|^\beta\,e^{-\xi^2} \leq C_\beta\,e^{-\xi^2/2}$, $\beta \geq 0$, $\mathrm{erfc}\,\zeta \leq \sqrt{2}\,\mathrm{erfs}\,\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\,e^{-\zeta^2/2} \leq \sqrt{2}\,e^{-\zeta^2/2}$, мы будем иметь

$$h_0(x_n,t) \leq C_{11}\,e^{-\frac{x_n^2}{8at}}, \quad |\partial_{x_n}h_0(x_n,t)| \leq C_{12}\frac{x_n}{\sqrt{t}}\frac{1}{x_n}\,e^{-\frac{x_n^2}{4at}} \leq C_{13}\frac{1}{r_0}\,e^{-\frac{x_n^2}{8at}},$$

$$|\partial_t h_0(x_n,t)|,\ |\partial^2_{x_nx_n}h_0(x_n,t)| \leq C_{14}\frac{1}{r_0^2}\,e^{-\frac{x_n^2}{8at}},\ x_n \geq r_0.$$

Эти неравенства показывают, что функция $h_0 = \mathrm{erfc}\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$ и ее производные $\partial_{x_n}h_0$, $\partial_t h_0$, $\partial^2_{x_nx_n}h_0$ стремятся к нулю экспоненциально при $t \to 0$ внутри области D: $x_n \geq r_0$.

По теоремам 3, 4 в Задаче 2 (9), (10), (12) сингулярной в решении является функция

$$h_1(x_n,t) := -2\sqrt{a\,t}\quad \operatorname{ierfs}\frac{x_n}{2\sqrt{at}},\ \operatorname{ierfs}\zeta = \int_\zeta^\infty \operatorname{erfs}\xi\,d\xi.$$

В окрестности границы $x_n = 0$ производная

$$\partial_{x_n} h_1(x_n,t) = \operatorname{erfs}\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$$

ограничена, но разрывна при $(x_n,t)\to(0,0)$, старшие производные

$$\partial h_1(x_n,t) = a\partial^2_{x_n x_n} h_1(x_n,t) = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x_n^2}{4at}}$$

стремятся к различным (конечным или бесконечным) пределам в зависимости от пути приближения точки (x_n,t) к точке $(0,\,0)$. Внутри области D: $x_n \ge r_0$=const>0 функция h_1 и ее производные $\partial_x h_1$, $\partial^2_{xx} h_1$, $\partial_t h_1$ стремятся к нулю при $t\to 0$ экспоненциально в силу оценок $\operatorname{erfs}\zeta \le \sqrt{2}\,\operatorname{erfs}\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\,e^{-\zeta^2/2}$, $\operatorname{ierfs}\zeta \le 2\ \operatorname{ierfs}\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\,e^{-\zeta^2/2}$.

Таким образом, невыполнение условий согласования нулевого $(A_0\ne 0)$ и первого $(A_1\ne 0)$ порядков в первой краевой задаче и нулевого порядка во второй краевой задаче $(B_0\ne 0)$ приводит к появлению сингулярных функций в решении, главными частями которых являются функции $V_j(x,t) = z_j(x',t)\operatorname{erfc}\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$, где $z_j\in C^{2+\alpha}_s(R_T)$, $|z_j|^{(2+\alpha)}_{s,R_T}\le C_1|A_j|^{(s-2j)}_R$, $j=0,1$, $s\in(\alpha,\,2+\alpha]$, в Задаче 1 и $V_2(x,t) = -2\sqrt{a\,t}\,z_2(x',t)\operatorname{ierfs}\frac{x_n}{2\sqrt{at}}$, где $z_2\in C^{2+\alpha}_{s-1}(R_T)$ и $|z_2|^{(2+\alpha)}_{s-1,R_T}\le C_7|B_0|^{(s-1)}_R$, $s\in[1,\,2+\alpha]$, в Задаче 2.

В работе [5] были изучены одномерные первая и вторая граничные задачи при рассогласовании начальных и граничных данных. Пусть $\Omega :=$ $\mathbb{R}^1_+ = \{x:\, x\in(0,\infty)\}$, $\Omega_T := \Omega\times(0,T)$, $\sigma_T := (0,\,T)$.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую параболическому уравнению

$$\partial_t\, u - a\,\partial^2_x\, u = f(x,t)\ \text{ в }\ \Omega_T, \tag{14}$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x)\ \text{ в }\ \Omega \tag{15}$$

и первому граничному условию в Задаче 3

$$u|_{x=0} = \varphi(t),\ t \in \sigma_T, \tag{16}$$

и второму граничному условию в Задаче 4

$$\partial_x u|_{x=0} = \psi(t),\ t \in \sigma_T. \tag{17}$$

Здесь $a = \mathrm{const} > 0$, $\partial_t^k = \partial^k/\partial t^k$, $\partial_x^k = \partial^k/\partial x^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Определим условия согласования начальных и граничных данных для Задач 3, 4. Введем обозначения $u^{(n)}(x) = \partial_t^n u(x,t)\big|_{t=0}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $u^{(0)}(x) = u_0(x)$, $\varphi^{(n)} = D^n\varphi(t)\big|_{t=0}$, $\psi^{(n)} = D^n\psi(t)\big|_{t=0}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, функции $u^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определяются из уравнения (14) и начального условия (15), т.е. $u^{(n)}(x) = \partial_t^{n-1}\big(a\,\partial_x^2 u(x,t) + f(x,t)\big)\big|_{t=0} = a\,\partial_x^2 u^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(x)$.

Пусть

$$A_n := \varphi^{(n)} - u^{(n)}(0),\ B_n := \psi^{(n)} - D_x u^{(n)}(x)\big|_{x=0},\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Условия согласования порядка n на границе $x = 0$ для Задачи 3 (14) – (16) имеют вид $A_n = 0$, для Задачи 4 (14), (15), (17) – $B_n = 0$.

В Задаче 3 при любых функциях $u_0(x) \in C^{2+k+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f(x,t) \in C^{k+\alpha,\ \frac{k+\alpha}{2}}_{x\ \ \ \ \ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, $\varphi(t) \in C^{1+\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и невыполнении условий согласования $0, 1, \ldots, 1 + [k/2]$–го порядков на границе $x = 0$ области Ω при $t = 0$ (для них $A_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots, 1 + [k/2]$, где A_n определяются по формулам (18)), сингулярное решение имеет вид

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{1+[k/2]} V_{2n}(x,t),\quad V_{2n}(x,t) = A_n \frac{1}{n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\, t^n\, \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,\frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

В Задаче 4 при любых функциях $u_0(x) \in C^{2+k+\alpha}(\overline{\Omega})$, $f(x,t) \in C^{k+\alpha,\ \frac{k+\alpha}{2}}_{x\ \ \ \ \ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, $\psi(t) \in C^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, не удовлетворяющих на границе $x = 0$ области Ω при $t = 0$ условиям согласования $0, \ldots, [\frac{1+k}{2}]$–го порядков (для них $B_n \neq 0$, $n = 0, \ldots, \big[\frac{1+k}{2}\big]$, где B_n, определяются по формулам (18)), сингулярные решения имеют вид

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]} V_{2n+1}(x,t),\ V_{2n+1}(x,t) = -B_n \frac{2\sqrt{a}}{n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\, t^{n+1/2}\, \mathrm{i}^{2n+1}\mathrm{erfs}\,\frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

Мы видим, что сингулярные решения Задач 3, 4 выражаются через повторные интегралы вероятности (см. формулу (8)).

В работе [6] изучена задача сопряжения для параболических уравнений с рассогласованием начальных и граничных данных. Были найдены сингулярные решения задачи, выражающиеся также через повторные интегралы вероятности.

Литература

1 Белоносов В.С. Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения // Матем. сб. – 1979. – Т. 110, №2. – С. 163-188.

2 Белоносов В.С., Зеленяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. – Новосибирск, 1975. – 155 с.

3 Солонников В.А. Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи / Препринт ЛОМИ № Р-2-77. – 1977.

4 Martel Y., Souplet Ph. Small time boundary behavior of solutions of parabolic equations with noncompatible data // J. Math. Pures Appl. – 2000. – V. 79. – P. 603-632.

5 Бижанова Г.И. Решение в пространствах Гельдера краевых задач для параболических уравнений при рассогласовании начальных и граничных данных // Современная математика. Фундаментальные исследования. – 2010. – Т. 36. – С. 12-23.

6 Bizhanova G.I. Classical solution of a nonregular conjunction problem for the heat equations // Mathem. Zhurnal. – 2010. – T. 10, №3 (37). – P. 9-11.

7 Bizhanova G.I. On the classical solvability of boundary value problems for parabolic equations with incompatible initial and boundary data // Progress in nonlinear differential equations and their applications. – 2011. – V. 80. – P. 57-80.

8 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967. – 736 с.

9 Справочник по специальным функциям под редакцией Абрамовица М. и Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Статья поступила в редакцию 11.09.12

Бижанова Г.И ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БАСТАПҚЫ ЖӘНЕ ШЕТТІК ШАРТТАРЫ ҮЙЛЕСТІРІЛМЕГЕН ЕСЕПТЕРІНІН СИНГУЛЯРЛЫ ШЕШІМДЕРІ

Параболалық теңдеулер үшін бастапқы және шеттік шарттары үйлесімсіз болатын шеттік есептер қарастырылған. Уақыттың бастапқы сәтінде берілген функциялардың облыстың шекарасында үйлесімсіз болуы мұндай есептердің сингулярлы шешімдерінің пайда болуына соқтыратындығы көрсетілген. $t \to 0$ шарты орындалғанда облыс шекарасының маңайында ол шешімдердің ерекшелік реті анықталған.

Bizhanova G.I. SINGULAR SOLUTIONS IN THE PROBLEMS FOR THE PARABOLIC EQUATIONS WITH A NON-CONCORDANCE OF THE INITIAL AND BOUNDARY DATA

There are considered the boundary value problems for the parabolic equations with the incompatible initial and boundary data. It is shown that a non-concordance of the given functions on the boundary of a domain at the initial moment in the problems leads to the appearance of the singular solutions, an order of their singularities in the vicinity of a boundary of a domain as $t \to 0$ is determined.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.983

Б. Н. Бияров
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
Казахстан, 010008, Астана, ул.Мунайтпасова 5, e-mail: splinekz@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ

Посвящается моему Учителю академику Мухтарбаю Отелбаеву по случаю семидесятилетия со дня рождения

В гильбертовом пространстве H рассматривается линейный положительный минимальный оператор L_0. Получены достаточные условия полноты системы корневых векторов для корректных сужений и расширений.
Ключевые слова: *правильное сужение, диссипативное расширения, полнота корневых векторов*

Сформулируем основной результат данной работы

Пусть L_0 — плотно определённый положительный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует самосопряженное положительное расширение по Фридрихсу L_F. В качестве максимального оператора $\widehat{L}$ берём L_0^*. Тогда $L_0 \subset L_F \subset \widehat{L}$. Описание обратных к всевозможным корректным сужениям представим в виде (см. [1, 2, 3])

$$L_K^{-1} f = L_F^{-1} f + K f, \quad \forall f \in H, \tag{1}$$

где K — произвольный линейный ограниченный оператор в H, с областью значений $R(K) \subset Ker\widehat{L}$. Будем считать, что такой ненулевой оператор K

Keywords: *Correct restriction, dissipative extension, completeness of the root vectors*
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 35P05; Secondary 58J50

существует. Это равносильно тому, что $Ker\widehat{L} \neq \{0\}$. Тогда существует хотя бы одно положительное самосопряжённое расширение, отличное от L_F. Например, достаточно взять оператор K в виде: $Kf = \varphi(\varphi, f), \quad \forall f \in H$, где $\varphi \in Ker\widehat{L}$. Тогда в силу [4] существует несамосопряженное аккретивное расширение у минимального оператора L_0. Поэтому целесообразно искать множество всех аккретивных корректных сужений максимального оператора $\widehat{L}$. Так как сопряженный к аккретивному оператору тоже аккретивный, то корректные аккретивные расширения найдутся автоматическии.

Теорема 1. *Корректное сужение L_K максимального оператора $\widehat{L}$ является аккретивным тогда и только тогда, когда оператор K в представлении* (1) *является аккретивным. Более того, аккретивными корректными сужениями окажутся только граничные корректные, т.е.* $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$.

Доказательство. Аккретивность прямого оператора L_K и его обратного L_K^{-1} равносильны. Заметим, что аккретивные корректные сужения или расширения являются максимально аккретивными автоматическии, так как $R(L_K) = H$. Из представления (1) переходим на реальные части

$$(L_K^{-1})_{\Re} = L_F^{-1} + K_{\Re}.$$

Если $K_{\Re} \geq 0$, т.е. K аккретивный оператор, то L_K аккретивный. Наоборот, если L_K аккретивный, то аккретивность оператора K следует из того факта, что L_F^{-1} есть наименьший [5] из положительных расширений оператора L_0^{-1}. Далее, из условия $K_{\Re} \geq 0$, и из [3, Лемма 6.1] следует, что $R(L_0) \subset KerK$. Для этого достаточно заметить, что $N = Ker\widehat{L}$ в Лемме 6.1 из [3]. Но из условий $R(K) \subset Ker\widehat{L}$ и $R(L_0) \subset KerK$ следует, что $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$. Теорема доказана.

Теперь легко доказать полноту системы корневых векторов при некоторых условиях на оператор K в представлений (1) для корректных сужений L_K максимального оператора $\widehat{L}$.

Теорема 2. *Система корневых векторов $\mathcal{G}(L_K)$ корректного сужения L_K максимального оператора $\widehat{L}$ является полной, если оператор K в представлении* (1) *является аккретивным и обладает ядерной мнимой компонентой.*

Доказательство. Из критерия аккретивности (Теорема 1) получаем, что из аккретивности оператора K следует аккретивность корректного сужения L_K. Теперь, в силу самосопряженности L_F^{-1}, из условий ядерности мнимой компоненты оператора K получим ядерность мнимой компоненты оператора L_K^{-1}. Далее, применяя Теорему 6.3 из [3], получим полноту L_K^{-1}. Тем самым теорема доказана.

Как мы заметили в Теореме 1, при выполнении условий Теоремы 2 мы получили некоторый класс граничных корректных, т.е. $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$, среди корректных сужений, т.е. среди $L_K \subset \widehat{L}$, которые обладают полнотой системы корневых векторов.

Следствие 1. *Система корневых векторов сопряженного оператора L_K^* также является полной.*

В работе [7] из Теоремы 4.1 [6, стр. 238] выведена следующая

Теорема 3. *Пусть оператор Q - неотрицательный компактный самосопряжённый оператор, а B - диссипативный ядерный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда система корневых векторов оператора $A = Q + B$ полна в H.*

Применение этой теоремы в нашем случае позволяет выделить другой класс полных граничных корректных, чем в Теореме 2. Тем самым верна

Теорема 4. *Если оператор K в представлении* (1) *для корректных сужений L_K является ядерным и диссипативным, то такие корректные сужения L_K являются полными граничными корректными.*

Следствие 2. *При выполнении условий Теоремы 4 система корневых векторов сопряжённого оператора L_K^* также полна.*

Следствие 3. *Если в представлении* (1) *для корректных сужений L_K оператор K аккретивный, а мнимая часть $K_{\mathfrak{I}}$ знакоопределена и $L_K^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H)$, т.е. является оператором Гильберта-Шмидта, то система корневых векторов корректного сужения L_K полна в H.*

Доказательство следствия легко получить, применяя Теорему 6.3 из монографии [6, стр. 250].

Замечание 1. *Во всех рассмотренных случаях для представления* (1) *оператор* L_K *считается с дискретным спектром, т.е.* $L_K^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.

Случай кососимметрического минимального оператора

Для симметрического плотно определённого оператора L_0 максимальный оператор $\widehat{L}$ определяется как сопряжённый оператор к оператору L_0, т.е. $\widehat{L} = L_0^*$. При рассмотрении кососимметрического плотно определённого оператора M_0 в качестве максимального оператора берётся $\widehat{M} = -M_0^*$.

Пусть существует самосопряжённое граничное корректное сужение L такое, что $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$, и кососамосопряжённое граничное корректное M ($M^* = -M$) такое, что $M_0 \subset M \subset \widehat{M}$. Тогда любое аккретивное или диссипативное расширение L_K (или M_K) оператора L_0 (или M_0), а также аккретивное или диссипативное сужение L_K (или M_K) максимального оператора $\widehat{L}$ (или $\widehat{M}$), является только граничным оператором, т.е. $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$ (или $M_0 \subset M_K \subset \widehat{M}$). Все это легко следует из [3, Лемма 6.1].

Легко показать, что если симметричности или кососимметричности нет, то существуют диссипативные (аккретивные) сужения максимального оператора $\widehat{L}$ или $\widehat{M}$, которые не являются расширениями минимального оператора L_0 или M_0, соответственно, и наоборот диссипативные (аккретивные) расширения минимального оператора L_0 или M_0, которые не являются сужениями максимального оператора $\widehat{L}$ или $\widehat{M}$, соответственно.

В доказанных выше теоремах о полноте мы попадали на граничный случай, т.е. $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$, из-за требования знакоопределённости той или иной самосопряжённой компоненты от оператора K.

Примеры аккретивных корректных сужений

Для наглядности выше сказанного приведём несколько простых примеров. Рассмотрим случай кососимметрического минимального оператора.

Пример 1 В гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим минимальный оператор L_0, порождённый дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv y' = f.$$

Тогда $D(L_0) = \mathring{W}_2^1(0,1)$. Формально сопряженному дифференциальному

выражению
$$l^*(v) \equiv -v' = g,$$
соответствует минимальный оператор M_0 с областью определения $D(M_0) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Тогда максимальный оператор $\widehat{L}$
$$\widehat{L} = M_0^* \quad \text{и} \quad D(\widehat{L}) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1),$$
а максимальный оператор $\widehat{M}$
$$\widehat{M} = L_0^* \quad \text{и} \quad D(\widehat{M}) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1).$$
Ясно, что L_0 — кососимметрический аккретивный оператор. В качестве максимального аккретивного фиксированного граничного корректного расширения рассмотрим оператор L, действующей как $l(y)$ на области определения
$$D(L) = \left\{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) :\ y(0) = 0\right\}.$$

Описание обратных L_K^{-1} ко всевозможным корректным сужениям L_K максимального оператора $\widehat{L}$ имеет вид
$$y \equiv L_K^{-1} f = \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t)\overline{\sigma(t)}dt,$$
где $\sigma(x) \in L_2(0,1)$ — произвольный элемент, определяющий оператор
$$Kf = \int_0^1 f(t)\overline{\sigma(t)}dt.$$
Легко проверить, что L_K является аккретивным тогда и только тогда, когда $\sigma(x) = \alpha$, где α - произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $Re\,\alpha \geq -1/2$. Тогда область определения:
$$D(L_K) = \left\{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) :\ (1+\overline{\alpha})y(0) = \overline{\alpha}y(1),\ Re\,\alpha \geq -1/2\right\}.$$
Получается, что аккретивные корректные сужения L_K являются граничными корректными, т.е. $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$.

Пример 2 Рассмотрим пример для случая, когда минимальный оператор L_0 не является ни симметрическим, ни кососимметрическим.

Пусть минимальный оператор L_0 порождается в гильбертовом пространстве дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv y' + y = f.$$

Тогда $l^*(v) = -v' + v = g$,

$$D(L_0) = D(M_0) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \quad D(\widehat{L}) = D(\widehat{M}) = W_2^1(0,1).$$

В качестве фиксированного аккретивного граничного корректного берём оператор L, действующей как дифференциальное выражение $l(y)$ на области определения

$$D(L) = \big\{ y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) : \ y(0) = 0 \big\}.$$

Заметим, что обратные ко всевозможным корректным сужениям имеют вид

$$y \equiv L_K^{-1} f = \int_0^x e^{-(x-t)} f(t) dt + e^{-x} \int_0^1 f(t) \overline{\sigma(t)} dt,$$

где $\sigma(x) \in L_2(0,1)$ — произвольный элемент, определяющий оператор

$$Kf = e^{-x} \int_0^1 f(t) \overline{\sigma(t)} dt.$$

Выделим всевозможные аккретивные корректные сужения. Получим, что L_K является аккретивным корректным сужением максимального оператора $\widehat{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sigma(x) \in W_2^1(0,1), \quad \sigma(0) \neq -1, \\ ||\sigma(x) - \sigma'(x)|| \leq \sqrt{2} \cdot (|1 + \sigma(0)|^2 - |\sigma(1)|^2)^{1/2}. \end{cases} \tag{2}$$

Тем самым, аккретивные корректные сужения L_K максимального оператора действуют как дифференциальное выражение $l(y)$ на области определения

$$D(L_K) = \Big\{ y \in W_2^1(0,1) : \ y(0) = \frac{\overline{\sigma}(1)}{1 + \overline{\sigma}(0)} y(1) + \int_0^1 \frac{\overline{\sigma}(t) - \overline{\sigma}'(t)}{1 + \overline{\sigma}(0)} y(t) dt \Big\},$$

где $\sigma(x)$ удовлетворяет условию (2). Очевидно, что $L_K \subset \widehat{L}$, но $L_0 \not\subset L_K$.

Если обозначим через M_K сопряженный оператор к аккретивному корректному сужению L_K максимального оператора $\widehat{L}$, то получим всевозможные аккретивные корректные расширения $M_K = L_K^*$ минимального оператора M_0. Оператор M_K действует

$$M_K\, v \equiv -v'(x) - \frac{\sigma(x) - \sigma'(x)}{1 + \sigma(0)} \cdot v(0) + v(x) = g(x),$$

на области определения

$$D(M_K) = \big\{v \in W_2^1(0,1):\ \sigma(1)v(0) = (1 + \sigma(0))v(1)\big\}.$$

Как мы видим, эти аккретивные корректные расширения M_K минимального оператора M_0 не являются сужениями максимального оператора $\widehat{M}$.

Пример приложения теорем о полноте

Пример 3 Рассмотрим минимальный симметрический оператор L_0, порождённый дифференциальным выражением

$$l(u) \equiv -\Delta u = -\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\Big)$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ из класса C^2. Ясно, что

$$D(L_0) = \mathring{W}_2^2(\Omega) \quad \text{и} \quad D(\widehat{L}) = \big\{u \in L_2(\Omega):\ l(u) \equiv \widehat{L}u \in L_2(\Omega)\big\}.$$

Обозначим через L_F оператор, соответствующий задаче Дирихле, с областью определения

$$D(L_F) = \big\{u \in W_2^2(\Omega):\ u\big|_{\partial\Omega} = 0\big\}.$$

Тогда описание обратных ко всевозможным корректным сужениям имеет вид

$$u \equiv L_K^{-1} f = L_F^{-1} f + K f,$$

где K произвольный ограниченный в $L_2(\Omega)$ оператор с $R(K) \subset Ker\widehat{L}$. Ясно, что $Ker\widehat{L}$ состоит из гармонических функций из $L_2(\Omega)$. Заметим, что граничное корректное L_F, соответствующее задаче Дирихле, является расширением Фридрихса. Тогда всевозможным аккретивным операторам K соответствуют всевозможные аккретивные корректные сужения L_K. В силу Теоремы 1, тогда оператор K удовлетворяет дополнительно условию

$$R(L_0) \subset KerK \quad \text{и} \quad (K_{\Re}f, f) \geq 0, \quad \forall f \in Ker\widehat{L}.$$

Тем самым мы выделили все аккретивные корректные сужения L_K. Если потребуем от оператора K ещё компактности для дискретности спектра корректного сужения и ядерности мнимой компоненты, т.е. $K_{\Im} \in \mathfrak{S}_1(L_2(\Omega))$, то в силу Теоремы 2 заключаем, что система корневых векторов таких граничных корректных L_K полна в $L_2(\Omega)$.

Применение к этим же корректным сужениям L_K максимального оператора $\widehat{L}$ Теоремы 4 даёт другой класс корректных сужений с полными системами корневых векторов в пространстве $L_2(\Omega)$ для оператора Лапласа. Это требует от оператора K диссипативности и ядерности, т.е.

$$K \in \mathfrak{S}_1(H) \quad \text{и} \quad (K_{\Im}f, f) \geq 0, \quad \forall f \in Ker\widehat{L}.$$

Выбирая такие операторы K, удовлетворяющие условию Теоремы 3 или Теоремы 4, получим граничные корректные, т.е. $L_0 \subset L_K \subset \widehat{L}$. В этом случае рассматриваемый оператор L_K действует как оператор Лапласа $-\Delta$ на области определения

$$D(L_K) = \left\{u \in D(\widehat{L}) : \left.(u - K\widehat{L}u)\right|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

и обладает полной системой корневых векторов в пространстве $L_2(\Omega)$.

Литература

1 Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 265, №4. – С. 815-819.

2 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. О расширениях и сужениях операторов в банаховом пространстве // Успехи математических наук. – 1982. – Т. 37, №4. – С. 116-123.

3 Бияров Б.Н. Спектральные свойства корректных сужений и расширений. Монография. LAMBERT Academic Publishing. – Saarbrucken, Germany, 2012.

4 Цекановский Э.Р. Несамосопряженные аккретивные расширения положительных операторов и теоремы Фридрихса-Крейна-Филлипса // Функц. анализ и его прил. – 1980. – Т. 14, №2. – С. 87-89.

5 Ando T., Nishio K. Positive selfadjoint extensions of positive symmetric operators // Tohoku Math. J. – 1970. – V. 22. – P. 65-75.

6 Gohberg I.C., Krein M.G. Introduction to Nonselfadjoint Operators. Translations of Mathematical Monographs. – V.18. – Amer. Math. Soc. Providence, 1969.

7 Ramm A.G. Eigenfunction expansion of a discrete spectrum in diffraction problems // Radio Eng. Electr. Phys. – 1973. – V. 18. – P. 364-369.

Статья поступила в редакцию 28.06.12

Бияров Б.Н. ТҮБІРЛІК ФУНКЦИЯЛАР СИСТЕМАСЫНЫҢ ТОЛЫҚТЫҒЫНЫҢ КЕЙБІР ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ Берілген Гильберт кеңістігінде оң сызықтық минималдық операторы қарастырылған. Корректі тарылулар мен кеңеюлер үшін түбірлік функциялар системасының толықтығының жеткілікті шарттары табылған.

Biyarov B.N. SOME SUFFICIENT CONDITIONS COMPLETENESS SYSTEM OF ROOT VECTORS In the Hilbert space H is considered a positive linear minimal operator L_0. Obtained some sufficient conditions for the completeness system of root vectors for the correct restrictions and extensions.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.51

Н. А. Бокаев, Т. Б. Ахажанов
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Казахстан, 010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: bokayev2011@yandex.ru

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОГРАНИЧЕННОЙ p–ФЛУКТУАЦИИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

Посвящается академику М.Отелбаеву
в связи с его 70-летним юбилеем

В работе вводится понятие класса функций двух переменных ограниченной p–флуктуации. Доказываются прямые и обратные теоремы приближения функций двух переменных ограниченной p–флуктуации полиномами Уолша по норме рассматриваемого пространства.
Ключевые слова: *система Уолша, p–флуктуация функции, наилучшее приближение.*

Пусть $1 \leq p < \infty$ и функция $f(x,y)$ определена на $[0,1)^2$. Через $osc\left(f,[a,b)^2\right)$ обозначим величину

$$\sup_{(x,y),(x',y')\in[a,b)^2} \left|f(x,y)-f(x',y')\right|.$$

Пусть $I_{j_1,j_2}^{(n_1,n_2)} = \left[\frac{j_1-1}{2^{n_1}}, \frac{j_1}{2^{n_1}}\right) \times \left[\frac{j_2-1}{2^{n_2}}, \frac{j_2}{2^{n_2}}\right)$. По определению,

$$\kappa_p(f,n_1,n_2) := \left(\sum_{j_1=1}^{2^{n_1}} \sum_{j_2=1}^{2^{n_2}} \left(osc\left(f, I_{j_1,j_2}^{(n_1,n_2)}\right)\right)^p\right)^{1/p}.$$

Keywords: *Walsh system, p-fluctuation of function, best approximation*
2010 Mathematics Subject Classification: 42B35

Если

$$V_p(f) := \sup_{\substack{n_1 \in P \\ n_2 \in P}} \kappa_p(f, n_1, n_2) < \infty,$$

то $f(x, y)$ называется *функцией ограниченной p–флуктуации.*

Существенно ограниченная на $[0,1)^2$ функция $f(x,y)$ принадлежит пространству $FV_p\,[0,1)^2$ $(1 \le p < \infty)$, если $V_p(f) < \infty$. Если же, кроме того, $V_p(f)_{n_1,n_2} \to 0$ при $n_1, n_2 \to \infty$, то она принадлежит пространству $FC_p\,[0,1)^2$ $(1 < p < \infty)$.

Далее эти пространства рассматриваются при указанных ограничениях с нормой $\|f\|_{p,F} = max\left(V_p(f), \|f\|_\infty\right)$, относительно которой они полны.

Введем флуктуационный модуль непрерывности функции f:

$$V_p(f)_{n_1,n_2} = \sup_{\substack{k_1 \ge n_1 \\ k_2 \ge n_1}} \kappa_p(f, k_1, k_2).$$

Система Уолша определяется следующим образом (см. [1]). Пусть $r_0(x)$ равна 1 на $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и -1 — на $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Продолжим ее периодически с периодом 1 на всю ось. Тогда функции $r_k(x) = r_0\left(2^k x\right)$ называются *функциями Радамахера*, $k = 1, 2, ...$

Положим $w_0(x) \equiv 1$. Рассмотрим двоичную запись числа $n \in N : n = \sum_{i=0}^{k(n)} \epsilon_i 2^i$, где $\epsilon_{k(n)} = 1$; $\epsilon_i = 0$ или $\epsilon_i = 1$, $0 \le i < k(n)$. Тогда

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^{k(n)} \left(r_i(x)\right)^{\epsilon_i}$$

— n–я функция Уолша.

Для $x, y \in [0,1)$ имеют место представления

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k},\ y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k},$$

где $x_k, y_k \in \{0, 1\}$. Сумма $x \oplus y$ определяются равенством

$$x \oplus y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_k + y_k)(mod2)}{2^k}.$$

Через $E_{2^m,2^n}(f)_{p,F}$ обозначим наилучшие приближения функций f полиномами по системе Уолша по норме пространства $FV_p\,[0,1)^2$. Введем еще один дискретный групповой модуль непрерывности, связанный с пространством $FC_p\,[0,1)^2$ $(1<p<\infty)$, формулой

$$V_p(f)^*_{n_1,n_2}=\sup_{0\le h_1<\frac{1}{2^{k_1}},0\le h_2<\frac{1}{2^{k_2}}}\left\|f(x_1\oplus h_1,x_2\oplus h_2)-f(x_1,x_2)\right\|_{p,F}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1\le p<\infty$, $f\in FV_p\,[0,1)^2$ *и* $n_1,n_2\in N$. *Тогда*

$$V_p(f)^*_{n_1,n_2}\le 2V_p(f)_{n_1,n_2}.$$

Доказательство. По определению

$$V_p(f)^*_{n_1,n_2}=\sup_{\substack{0\le h_1<\frac{1}{2^m}\\0\le h_2<\frac{1}{2^n}}}\sup_{\substack{k_1\\k_2}}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\sup_{\substack{(u_1,u_2)\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}\\(t_1,t_2)\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}}}A^p(f,u_1,u_2,t_1,t_2,h_1,h_2)\right)^{\frac{1}{p}},\tag{1}$$

где

$$A^p(f,u_1,u_2,t_1,t_2,h_1,h_2)=$$

$$\left|f(u_1\oplus h_1,u_2\oplus h_2)-f(u_1,u_2)-f(t_1\oplus h_1,t_2\oplus h_2)+f(t_1,t_2)\right|.$$

Разберем три случая. Пусть сначала $k_1\le n_1$, $k_2\le n_2,(u_1,u_2)$, $(t_1,t_2)\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}$. Тогда $(u_1\oplus h_1,u_2\oplus h_2)$ и (u_1,u_2) принадлежат одному прямоугольнику вида $I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}$ так же, как и $(t_1\oplus h_1,t_2\oplus h_2)$ и (t_1,t_2). При этом в каждый прямоугольник вида $I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}$ может попасть не более четырех точек, значения f в которых используются в сумме из (1). Поэтому в каждый прямоугольник вида $I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}$ может попасть не более двух пар вида $(u_1\oplus h_1,u_1)$.

Используя хорошо известное неравенство

$$(a+b)^p\le 2^{p-1}\left(a^p+b^p\right),a,b>0,p\ge 1,$$

мы можем оценить сумму из (1) следующим выражением:

$$2^p \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sup_{\substack{(u_1,u_2)\in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)} \\ (t_1,t_2)\in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}}} |f(u_1,u_2)-f(t_1,t_2)|^p \le 2^p V_p^p(f)_{n_1,n_2}.$$

Пусть теперь $k_1 > n_1, k_2 > n_2$, $h_1 < \frac{1}{2^{k_1}}$, $h_2 < \frac{1}{2^{k_2}}(u_1,u_2)$. Тогда если $(u_1,u_2),(t_1,t_2) \in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}$, то $(u_1\oplus h_1, u_2\oplus h_2),(t_1\oplus h_1, t_2\oplus h_2)$ также принадлежат $I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}$ и сумма из (1) оценивается сверху выражением

$$2^p \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sup_{\substack{(u_1,u_2)\in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)} \\ (t_1,t_2)\in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}}} |f(u_1,u_2)-f(t_1,t_2)|^p \le 2^p V_p^p(f)_{k_1,k_2} \le 2^p V_p^p(f)_{n_1,n_2}.$$

Наконец, пусть $k_1 > n_1, k_2 > n_2, \frac{1}{2^{k_1}} \le h_1 < \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{k_2}} \le h_2 < \frac{1}{2^{n_2}}$, тогда если $(u_1,u_2),(t_1,t_2) \in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}$, то $(u_1\oplus h_1, u_2\oplus h_2),(t_1\oplus h_1, t_2\oplus h_2) \in I_{j_1',j_2'}^{(k_1,k_2)}$, где $j_1' \ne j_1$, $j_2' \ne j_2$ в силу $h_1 \ge \frac{1}{2^{k_1}}, h_2 \ge \frac{1}{2^{k_2}}$. Поэтому любой прямоугольник вида $I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}$ имеет не более четырех точек (u_1,u_2), (t_1,t_2), $(u_1\oplus h_1, u_2\oplus h_2)$, $(t_1\oplus h_1, t_2\oplus h_2)$, значения f в которых входят в сумму из (1). В итоге эта сумма оценивается сверху выражением

$$2^p \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sup_{\substack{(u_1,u_2)\in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)} \\ (t_1,t_2)\in I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}}} |f(u_1,u_2)-f(t_1,t_2)|^p \le 2^p V_p^p(f)_{k_1,k_2} \le 2^p V_p^p(f)_{n_1,n_2}.$$

Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $f \in FV_p\,[0,1)^2$, $g \in L\,[0,1)^2$, $\varphi\left(x_1,x_2,y_1^0,y_2^0\right) \in FV_p\,[0,1)^2$ *при всех* $\left(y_1^0,y_2^0\right) \in [0,1)^2$. *Тогда верно неравенство*

$$\left\|\int_0^1\int_0^1 \varphi\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)dy_1dy_2\right\|_{p,F} \le \int_0^1\int_0^1 \left\|\varphi\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)\right\|_{p,F} dy_1dy_2. \tag{2}$$

Лемма доказывается применением обобщенного неравенства Минковского.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $n, m \in N$, $f \in FC_p\,[0,1)^2$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{1}{2}V_p(f)^*_{m,n} \le E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} \le V_p(f)^*_{m,n}. \tag{3}$$

Доказательство. Учитывая известное равенство для частичных сумм ряда Фурье-Уолша

$$S_{2^m,2^n}(f,x,y) = 2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x+u,y+v)dudv,$$

имеем

$$E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} \le \|f(x,y) - S_{2^m,2^n}(f,x,y)\|_{p,F} =$$

$$= \left\| f(x,y) - 2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x\oplus u, y\oplus v)dudv \right\|_{p,F} =$$

$$= \left\| 2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} \left(f(x,y) - f(x\oplus u, y\oplus v)\right)dudv \right\|_{p,F} =$$

$$= max\left(V_p\left(2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} \left(f(x,y) - f(x\oplus u, y\oplus v)\right)dudv\right), \right.$$

$$\left. \left\| 2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} \left(f(x,y) - f(x\oplus u, y\oplus v)\right)dudv \right\|_{\infty} \right).$$

Далее, применяя определение $V_p(g)$ и лемму 1, имеем

$$V_p\left(2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} \left(f(x,y) - f(x\oplus u, y\oplus v)\right)dudv\right) =$$

$$= 2^{m+n}\sup_{(k_1,k_2)\in P^2}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\sup_{\substack{(x,y)\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}\\ (x',y')\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}}}\left(\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} |f(x,y) - \right.\right.$$

$$f(x\oplus u,y\oplus v)-\big(f(x',y')-f(x'\oplus u,y'\oplus v)\big)\big|\,dudv\big)^{p}\big)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq 2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left(\sup_{(k_1,k_2)\in P^2}\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\left(\sup_{\substack{(x,y)\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}\\(x',y')\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}}}|f(x,y)-\right.\right.$$

$$f(x\oplus u,y\oplus v)-\big(f(x',y')-f(x'\oplus u,y'\oplus v)\big)\big|\big)^{p}\big)^{\frac{1}{p}}\,dudv\leq$$

$$\leq 2^{m+n}\sup_{u\in\left[0,\frac{1}{2^m}\right),v\in\left[0,\frac{1}{2^n}\right)}\sup_{(k_1,k_2)\in P^2}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\left(\sup_{\substack{(x,y)\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}\\(x',y')\in I^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}}}|f(x,y)-\right.\right.$$

$$-f(x\oplus u,y\oplus v)-\big(f(x',y')-f(x'\oplus u,y'\oplus v)\big)\big|\big)^{p}\big)^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}dudv=V(f)^*_{m,n}.$$

Кроме того, имеем

$$\inf_{k_1\leq 2^m,k_2\leq 2^n}\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}|f(x,y)-P_k(x,y)|\leq\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}|f(x,y)-S_{2^m,2^n}(x,y)|=$$

$$\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}\left|f(x,y)-2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}f(x+u,y+v)dudv\right|=$$

$$=\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}\left|2^{m+n}\int_0^{\frac{1}{2^m}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\left(f(x,y)-f(x+u,y+v)\right)dudv\right|\leq$$

$$\leq\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}\sup_{(u,v)\in\left[0,\frac{1}{2^m}\right)\times\left[0,\frac{1}{2^n}\right)}|(f(x,y)-f(x+u,y+v))|\leq$$

$$\leq\sup_{(u,v)\in\left[0,\frac{1}{2^m}\right)\times\left[0,\frac{1}{2^n}\right)}\sup_{(x,y)\in[0,1)^2}|(f(x,y)-f(x+u,y+v))|\leq V(f)^*_{m,n}.$$

Значит,

$$E_{2^m,2^n}(f)_{p,F}\leq V(f)^*_{m,n}.$$

Теперь докажем левое неравенство из (3). Для этого сначала отметим, что из свойств систем Уолша следует, что

$$0 \le h_1 \le \frac{1}{2^m}, 0 \le h_2 \le \frac{1}{2^n},$$

и $w_{k_1,k_2}(x \oplus h_1, y \oplus h_2) = w_{k_1}(x) w_{k_2}(y)$ при всех $k_1 = 0, 1, ..., 2^m - 1$, $k_2 = 0, 1, ..., 2^n - 1$.

Пусть

$$Q_{2^m,2^n}(f, x, y) = \sum_{k_1=0}^{2^m-1} \sum_{k_2=0}^{2^n-1} a_{k_1,k_2} w_{k_1}(x) w_{k_2}(y)$$

— полином, дающий наилучшее приближение функции f в метрике FV_p

$$E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} = \|f - Q_{2^m,2^n}\|_{p,F}.$$

Из вышесказанного следует, что

$$Q_{2^m,2^n}(f, x, y) = Q_{2^m,2^n}(f, x \oplus h_1, y \oplus h_2).$$

Поэтому для любых $0 \le h_1 \le \frac{1}{2^m}, 0 \le h_2 \le \frac{1}{2^n}$ мы имеем

$$\|f(x, y) - f(x \oplus h_1, y \oplus h_2)\|_{p,F} =$$

$$\|f(x, y) - Q_{2^m,2^n}(f, x, y) + Q_{2^m,2^n}(f, x \oplus h_1, y \oplus h_2) - f(x \oplus h_1, y \oplus h_2)\|_{p,F} \le$$

$$\|f(x, y) - Q_{2^m,2^n}(f, x, y)\|_{p,F} + \|Q_{2^m,2^n}(f, x \oplus h_1, y \oplus h_2) - f(x \oplus h_1, y \oplus h_2)\|_{p,F} =$$

$$= E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} + E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} = 2E_{2^m,2^n}(f)_{p,F}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{0 \le h_1 \le \frac{1}{2^m} \\ 0 \le h_2 \le \frac{1}{2^n}}} \|f(x, y) - f(x \oplus h_1, y \oplus h_2)\|_{p,F} \le 2E_{2^m,2^n}(f)_{p,F}.$$

Итак,

$$V(f)^*_{m,n} \le 2E_{2^m,2^n}(f)_{p,F}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $n, m \in N$, $f \in FC_p[0,1)^2$. *Тогда имеет место неравенство*

$$V_p(f)_{m,n} \leq E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} \leq 2V_p(f)_{m,n}. \qquad (4)$$

Доказательство. Правое неравенство (4) следует из (3) и теоремы 1. Для доказательства левого неравенства (4) отметим, что всякий полином $Q_{2^m,2^n} \in W_{2^m,2^n}$ постоянен на любом прямоугольнике $I_{j_1}^{(k_1)} \times I_{j_2}^{(k_2)}$, $j_1 = 1, 2, ..., 2^{k_1}$, $j_2 = 1, 2, ..., 2^{k_2}$, $k_1 \geq m$, $k_2 \geq n$, поэтому

$$osc\left(f, I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}\right) = osc\left(f - Q_{2^m,2^n}, I_{j_1,j_2}^{(k_1,k_2)}\right)$$

и при $k_1 \geq m$, $k_2 \geq n$ соответствующие суммы $\kappa_p(f - Q_{2^m,2^n}, k_1, k_2)$ и $\kappa_p(f, k_1, k_2)$ совпадают. Поэтому $V_p(f - Q_{2^m,2^n}) \geq V_p(f)_{m,n}$ для всех $Q_{2^m,2^n} \in W_{2^m,2^n}$. В частности,

$$E_{2^m,2^n}(f)_{p,F} \geq V_p(f)_{m,n}.$$

Теорема доказана.

Для функций одной переменной подобные результаты ранее были получены в [2] и [3].

Литература

1 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. – М.: Наука, 1987. – 235 с.

2 Волосивец С.С. Приближение функций ограниченной p-вариации полиномами по системам Хаара и Уолша // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, вып. 6. – С. 11-21.

3 Волосивец С.С. Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Anal. Math. – 1995. – Т. 21, вып. 1. – С. 61-77.

Статья поступила в редакцию 18.08.12

Боқаев Н.А., Ақажанов Т.Б ШЕНЕЛГЕН p-ФЛУКТУАЦИАЛЫ ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР КЛАССТАРЫ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯНЫ УОЛШ КӨПМҮШЕЛІКТЕРМЕН ЖУЫҚТАУ

Бұл жұмыста шенелген p–флуктуациалы екі айнымалы функциялар класстары енгізілген. p–шектелген флуктуациалы бар екі айнымалы функциялардың Уолш көпмүшеліктермен жуықтаудын туралы тура және кері теоремалары дәлелденген.

Bokayev N.A., Akhachanov T.B. THE CLASSES OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES OF BOUNDED p-FLUCTUATION AND APROXIMATION OF FUNCTION BY POLINOMIALS WITH RESPECT TO WALHS SYSTEMS

In this paper, we introduce the classes of functions of two variables of bounded p–fluctuation. The direct and inverse theorems of approximation of functions of two variables of bounded p–fluctuation by Walsh polynomials in the norm of the considering space are proved.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.956

М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов
Институт математики, информатики и механики
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, e-mail: muvasharkhan@gmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПО СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нашему дорогому Учителю
академику Мухтарбаю Отелбаеву посвящается

Дана постановка задачи по стабилизации решения нагруженного уравнения теплопроводности при помощи граничных условий. Доказана теорема о разрешимости граничной задачи. Разработан алгоритм приближенного построения граничных управлений.
Ключевые слова: *нагруженное уравнение теплопроводности, граничное управление, стабилизация, спектральная задача.*

1 Задача стабилизации

Найти такие функции $u_1(t),\ u_2(t) \in L_2(0,\infty)$, *чтобы решение* $y(x,t)$ *граничной задачи*

$$y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) + \alpha \cdot y(0,t) = 0, \tag{1}$$

$$y(-\pi/2,t) = u_1(t),\ y(\pi/2,t) = u_2(t),\ y(x,0) = y_0(x), \tag{2}$$

удовлетворяло условию

$$\|y(x,t)\|_{L_2(-\pi/2,\pi/2)} \le Ce^{-\sigma_0 t},\ t > 0, \tag{3}$$

Keywords: *Loaded heat operator, boundary controls, stabilization, spectral problem*
2010 Mathematics Subject Classification: 35B35; 35K20; 35R10

$Q = \{(x,t) : -\pi/2 < x < \pi/2, \; t > 0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$. C, σ_0*— заданные постоянные.*

Уравнения вида (1) называют нагруженными [1, 3].

2 О разрешимости граничной задачи (1)–(2)

Доказана следующая

Теорема 1. [3]. *Для любых заданных управлений* $u_1(t), u_2(t) \in L_2(0,\infty)$ *и любой начальной функции* $y_0(x) \in L_2(-\pi/2,\pi/2)$ *граничная задача (1)–(2) имеет единственное сильное решение* $y(x,t) \in L_2(Q)$. *Более того,* $y(x,t) \in W(0,\infty) \equiv \{v|\, v \in L_2(0,\infty; W_2^1(-\pi/2,\pi/2)),\; v_t \in L_2(0,\infty; W_2^{-1}(-\pi/2,\pi/2))\}$.

Сильная разрешимость задачи (1)–(2) в теореме 1 доказывается сведением ее к нагруженному интегральному уравнению:

$$y(x,t) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} y_0(\xi) G(x,\xi,t) d\xi - \alpha \int\limits_0^t y(0,\tau) \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} G(x,\xi,t-\tau) d\xi \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t u_1(\tau) H_1(x,t-\tau) d\tau - \int\limits_0^t u_2(\tau) H_2(x,t-\tau) d\tau, \tag{4}$$

где $G(x,\xi,t)$ — соответствующая функция Грина, а функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина.

3 К монотонности средних значений для решения задачи (1)–(2) при нулевых граничных условиях

Для задачи (1)–(2) с однородными граничными условиями справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в задаче (1)–(2) граничные функции* $u_j(t) = 0$, $j = 1,2$, α *— вещественное число и* $|\alpha| < \pi^{-2}$. *Тогда* $\psi(t) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |y(x,t)|^2 dx$ *является монотонно убывающей функцией аргумента* t *для* $t \geq 0$. *Кроме того,* $\max\limits_{-\pi/2 \leq x \leq \pi/2} |y(x,t)|$ *— монотонно убывающая функция для* $t \geq 0$.

Условия теоремы 2 показывают, что при малых значениях коэффициента α и однородных условиях Дирихле на границе L_2-среднее значение решения задачи (1)–(2) монотонно убывает.

Однако соотношение (3) требует выбора таких граничных функций, которые обеспечили бы убывание L_2-среднего значения решения не медленнее некоторой заданной экспоненты по времени.

Метод Фурье обеспечивает данное требование выбором тех экспонент $\{\exp\{-\lambda_k t\},\ k\in\mathbb{Z}\}$ в представлении решения с помощью ряда, где числа λ_k, определяемые положительными собственными значениями соответствующей спектральной задачи, и которые не меньше, чем показатель убывания в экспоненте условия (3).

Таким образом, поставленная обратная задача (1)–(3) будет решена, если мы найдем способ построения функций $u_j(t),\ j=1,2$, обеспечивающих наличие в представлении решения в виде ряда только таких экспонент из $\{\exp\{-\lambda_k t\},\ k\in\mathbb{Z}\}$, для которых $\lambda_k\geq\sigma_0$.

4 Задача с расширенной областью независимых переменных

Рассмотрим в $Q_1=\{(x,t):\ -\pi<x<\pi,\ t>0\}$ вспомогательную задачу

$$z_t(x,t)-z_{xx}(x,t)+\alpha\cdot z(0,t)=0, \tag{5}$$

$$z^{(j)}(-\pi,t)=z^{(j)}(\pi,t),\ j=0,1,\ z(x,t)|_{t=0}=z_0(x), \tag{6}$$

где $z_0(x)$ — функция, требующая своего определения.

Решение задачи (5)–(6) будем искать в виде

$$z(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Z_k(t)\varphi_k(x). \tag{7}$$

$\{\varphi_k(x),\ k\in\mathbb{Z}\}$ — базис пространства $L_2(-\pi,\pi)$ и $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,...\}$.

Рассмотрим для (5)–(6) спектральную задачу

$$-\varphi''(x)+\alpha\cdot\varphi(0)=\lambda\varphi(x),\ \varphi^{(j)}(-\pi)=\varphi^{(j)}(\pi),\ j=0,1. \tag{8}$$

Обозначим $\mathbb{Z}'=\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Для (8) рассматриваются случаи:

1^0. *Нет такого числа $k \in \mathbb{Z}$, что $\alpha = k^2$*. Решение задачи (8):

$$\{\varphi_k(x),\ \lambda_k;\ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{1,\ \lambda_0 = \alpha;\ e^{ikx} + \frac{\alpha}{k^2 - \alpha},\ \lambda_k = k^2,\ k \in \mathbb{Z}'\right\}; \quad (9)$$

и соответствующая ему биортогональная последовательность

$$\{\psi_k(x),\ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{-\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha} \cdot e^{inx},\ e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}'\right\}, \quad (10)$$

(по теореме Пэли-Винера [4]) образуют полные системы функций $\{\varphi_k(x),\ \psi_k(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$ в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ и для любого элемента $f \in L_2(-\pi,\pi)$ его биортогональные разложения

$$f = \sum (f,\varphi_k)\psi_k,\ \ f = \sum (f,\psi_k)\varphi_k$$

сходятся.

2^0. *Существует число $k_0 \in \mathbb{Z}$, что $\alpha = k_0^2$*. Решение задачи (8):

$$\{\varphi_k(x),\ \lambda_k;\ k \in \mathbb{Z}\} = \Bigg\{1,\ e^{\pm ik_0x},\ \lambda_0 = k_0^2 = \alpha;$$
$$e^{ikx} + \frac{\alpha}{k^2 - \alpha},\ \lambda_k = k^2,\ k \in \mathbb{Z}'\backslash\{\pm k_0\}\Bigg\}. \quad (11)$$

и соответствующая ему биортогональная последовательность

$$\{\psi_k(x),\ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{-\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{\pm k_0\}} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha} \cdot e^{inx},\ e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}'\right\} \quad (12)$$

также образуют полные системы функций $\{\varphi_k(x),\ \psi_k(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$ в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$.

5 Решение задачи стабилизации (1)–(3)

Для Фурье-коэффициентов разложения (7) имеем задачу Коши:

$$Z_k'(t) + \lambda_k Z_k(t) = 0,\ \ Z_k(0) = z_{0k},\ \ k \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

где z_{0k} — коэффициенты разложения функции $z_0(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$.

Используя (13), получим решение граничной задачи (5) — (6):

$$z(x,t) = z_{00}e^{-\alpha t}\varphi_0(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}'} z_{0k}e^{-k^2 t}\varphi_k(x), \tag{14}$$

где

$$z_{0k} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k(x)} z_0(x)dx, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

— коэффициенты Фурье функции $z_0(x)$, где $\psi_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, определены соответственно формулами (10) и (12).

Из (14) непосредственно следует, что если

$$\underline{z_{0k} = 0 \;\text{ при }\; k^2 < \sigma_0,} \tag{15}$$

и

$$\underline{\begin{cases} z_{00} \neq 0 \;\text{ при }\; \operatorname{Re}\alpha \geqslant \sigma_0, \\ z_{00} = 0 \;\text{ при }\; \operatorname{Re}\alpha < \sigma_0; \end{cases}} \tag{16}$$

то решение (14) задачи (5) — (6) будет удовлетворять неравенству

$$\|z(x,t)\|_{L_2(-\pi,\pi)} \leq Ce^{-\sigma_0 t}, \; t > 0. \tag{17}$$

С помощью операторов сужения $\zeta_{-\pi/2}$ и $\zeta_{\pi/2}$ находим искомые управления

$$\underline{u_1(t) = \zeta_{-\pi/2}\{z(x,t)\}, \;\; u_2(t) = \zeta_{\pi/2}\{z(x,t)\}.}$$

Остается построить такой оператор продолжения функции $y_0(x)$ до функции $z_0(x)$, определенного на интервале $(-\pi,\pi)$,

$$E: \; L_2(-\pi/2,\pi/2) \to L_2(-\pi,\pi), \;\text{ т.е. }\; (\zeta_{(-\pi/2,\pi/2)}Ey_0)(x) \equiv y_0(x), \tag{18}$$

так, чтобы коэффициенты Фурье z_{0k} функции $z_0 = Ey_0$ (18) удовлетворяли бы условиям (15) и (16). Существование требуемого оператора продолжения (18) гарантирует следующая

Лемма 1. [2]. *Для* $\forall\ \sigma_0 > 0\ \exists$ *такой оператор продолжения* E *(18), что при* $\forall\ y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$ *было бы выполнено соотношение*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k(x)}(Ey_0)(x)dx = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_0. \tag{19}$$

6 Стабилизация решения неоднородного уравнения

В области $Q = \{x \in (-\pi/2, \pi/2),\ t \in (0, +\infty)\}$ рассматривается граничная задача

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) + \alpha y(0,t) = f(x), \\ y(x,0) = y_0(x),\ y(-\pi/2,t) = u_1(t),\ y(\pi/2,t) = u_2(t), \end{array} \right. \tag{20}$$

где $f \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$.

Требуется: *найти такие граничные функции* $u_1(t),\ u_2(t)$, *чтобы решение* $y(x,t)$ *граничной задачи (20) удовлетворяло условию*

$$\|y(x,t) - \hat{y}(x)\|_{L_2(-\pi/2,\pi/2)} \le C_1 e^{-\sigma_0 t},\ t > 0, \tag{21}$$

где функция $\hat{y}(x)$ *является решением стационарной задачи (соответствующей (20)):*

$$-\hat{y}''(x) + \alpha\hat{y}(0) = f(x),\ x \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{22}$$

Решение задачи (22) продолжим на отрезок $(-\pi, \pi)$, чтобы оно удовлетворяло условиям периодичности:

$$\hat{y}^{(j)}(-\pi) = \hat{y}^{(j)}(\pi),\ j = 0, 1, \tag{23}$$

причем, функцию $f(x)$ (как приняли выше) продолжим нулем вне отрезка $(-\pi/2, \pi/2)$.

Записывая начальную функцию из задачи (20) в виде:

$$y_0(x) = \hat{y}(x) + z_0(x),\ x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

(где $\hat{y}(x)-$ решение задачи (22)) в области $Q_1 = \{x \in (-\pi, \pi),\ t \in (0, +\infty)\}$ рассматриваем граничную задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_t(x,t) - \tilde{y}_{xx}(x,t) + \alpha\tilde{y}(0,t) = f(x), \\ \tilde{y}(x,0) = y_1(x),\ \tilde{y}^{(j)}(-\pi,t) = \tilde{y}^{(j)}(\pi,t),\ j = 0, 1, \end{array} \right. \tag{24}$$

где $y_1(x) = \hat{y}(x) + \mathrm{E}\{z_0(x)\}$,

$$\mathrm{E}\{z_0(x)\} = \begin{cases} z_0(x),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ z_1(x),\ x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases} \tag{25}$$

и функция $f(x)$ продолжена нулем вне отрезка $(-\pi/2, \pi/2)$.

Обозначим: $\tilde{y}(x,t) = \hat{y}(x) + z(x,t)$. Тогда для функции $z(x,t)$ в области $Q_1 = \{x \in (-\pi, \pi),\ t \in (0, +\infty)\}$ получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) + \alpha z(0,t) = 0, \\ z(x,0) = \mathrm{E}\{z_0(x)\},\ z^{(j)}(-\pi,t) = z^{(j)}(\pi,t),\ j = 0,1. \end{cases} \tag{26}$$

Требуется: *найти продолжение $E\{z_0(x)\}$, чтобы решение $z(x,t)$ граничной задачи (26) удовлетворяло условию*

$$\|z(x,t)\|_{L_2(-\pi,\pi)} \leq C_1 e^{-\sigma_0 t},\ t > 0, \tag{27}$$

где $\|z(x,t)\|_{L_2(-\pi,\pi)} = \|\tilde{y}(x,t) - \hat{y}(x)\|_{L_2(-\pi,\pi)}$.

Осталось решить задачу (26)–(27), аналогичную задаче (5)–(6) с условием (17). Алгоритм решение последней нами уже построен в п. 5.

Заметим, что общее решение уравнения (22) имеет вид:

$$\hat{y}(x) = C_0 + C_1(x+\pi/2) + C_2\frac{\alpha(x+\pi/2)^2}{2} - \int\limits_{-\pi/2}^{x} (x-\xi) f(\xi)\, d\xi,\ x \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{28}$$

Решение (28) можно продолжить на интервал $(-\pi, \pi)$, удовлетворяющих условиям периодичности (23), если коэффициенты $C_j,\ j = 0,1,2$, в представлении (28) будут определены соответствующим образом.

Заключение

Полученные результаты обобщаются для точки нагрузки $\overline{x} \in (-\pi/2, \pi/2)$, отличной от $\overline{x} = 0$. Более интересная задача: *рассмотреть случай нагрузки вида: $y_{xx}(0,t)$, которая не является слабым возмущением для оператора теплопроводности.* Здесь даже не известно: какой класс управлений по границе может обеспечить требуемую стабилизацию?

Литература

1 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

2 Фурсиков А.П. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, №4. – С. 115-160.

3 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 325 с.

4 Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

Статья поступила в редакцию 20.07.12

Жиенәлиев М.Т., Рамазанов М.Ы. ЖҮКТЕЛГЕН ЖЫЛУӨТКІЗГІШ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІН СТАБИЛИЗАЦИЯЛАУДЫҢ БІР ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Шекаралық шарттар арқылы жүктелген жылуөткізгіш теңдеуінің шешімін стабилизациялау кері есебінің қойылымы берілген. Шекаралық есептің шешілетіндігі туралы теорема дәлелденген. Шекаралық басқаруларды жуықтап құру алгоритмы жасалды.

Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. ABOUT ONE PROBLEM OF SOLUTION STABILIZATION OF THE LOADED HEAT EQUATION

Statement is given a problem of solution stabilization of the loaded heat equation with help of the boundary conditions. It is proved the solvability theorem of the boundary value problem. It is developed algorithm of approximate construction of boundary controls.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.956.225

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган
Институт математики, информатики и механики
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, e-mail: kalmenov.t@mail.ru

ОБЩИЙ ВИД КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Нашему дорогому Другу и Учителю академику Мухтарбаю Отелбаеву посвящается

Для двумерного оператора Лапласа рассмотрены все корректные коэрцитивно регулярные краевые задачи. Дано представление всех корректных краевых условий в интегральной форме.
Ключевые слова: *оператор Лапласа, краевые задачи, корректное расширение, интегральные краевые условия.*

Постановка задачи

В конечной односвязной области $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей $\partial\Omega \subset C^{1+\alpha}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

Задача R. Найти решение уравнения

$$Lu \equiv -\Delta u = f(x), \ x = (x_1, \ x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$(Q_0 u_0)(x) + (Q_1 u_1)(x) = 0, x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Keywords: *Laplace operator, boundary problems, correct extension, integral boundary conditions*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05; 35J25

Здесь $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$; Q_0 и Q_1 - заданные линейные операторы, определенные на функциях

$$u_0(x) = u\big|_{x\in\partial\Omega},\ u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{x\in\partial\Omega}, \tag{3}$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по единичной внешней нормали к $\partial\Omega$.

На сегодняшний день уже хорошо известно, что задача (1), (2) являет собой общий вид граничных задач для оператора Лапласа. Более точно – из работ М.И. Вишика [1], М.Отелбаева [2], А.А. Дезина [3] следует, что любая корректная граничная задача для уравнения (1) может быть эквивалентно сведена к краевой задаче (1), (2) с некоторыми линейными операторами Q_0 и Q_1. Глобальность этих работ заключается именно в том, что краевые условия (2) – это самый общий вид граничных условий. И других корректных нет. Это доказано методом теории регулярных расширений и сужений дифференциальных операторов.

Целью настоящей работы является представление общего вида краевых условий (2) в более простой – интегральной форме.

О корректных сужениях и расширениях дифференциальных операторов

Через L_0 обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного выражением (1) на подмножестве функций $C_0^\infty(\Omega)$, а через L_0^* – сопряженный к нему оператор. Норму пространства $L_2(\Omega)$ будем обозначать $\|\cdot\|$. Оператор L_0 называют *минимальным* оператором, а оператор L_0^* - *максимальным*. В нашем конкретном случае легко показать, что $D(L_0) \subset W_2^2(\Omega)$, а $D(L_0^*) = W_2^2(\Omega)$.

Согласно работам М.Отелбаева и его учеников [2, 4, 5] оператор L_s называют *корректным сужением* максимального оператора L_0^*, если выполнены следующие два условия:

1) $L_s \subset L_0^*$, то есть $D(L_s) \subset D(L_0^*)$ и $L_s u = L_0^* u$ для всех $u \in D(L_s)$;

2) существует ограниченный обратный оператор L_s^{-1}.

Аналогично вводится понятие *корректного расширения* минимального оператора L_0. Оператор, являющийся одновременно корректным сужением максимального и корректным расширением минимального, называют *регулярным расширением.*

В работах [2, 4, 5] дано абстрактное представление элементов области определения корректных сужений $u \in D(L_s)$ для широкого класса дифференциальных операторов в терминах произвольных линейных отображений $K : KerL_0^* \to KerL_0^*$. В одномерном случае это дает эффективный аппарат.

Для примера - все корректные сужения L_s в $L_2(a, b)$ максимального оператора двукратного дифференцирования $L_0^* u = -u''(x), D(L_0^*) = W_2^2(a, b)$ задаются дифференциальным выражением $L_s u = -u''(x)$ и условиями

$$u(a) = \int_a^b u''(x)\sigma_0(x)dx,\ u'(a) = \int_a^b u''(x)\sigma_1(x)dx, \qquad (4)$$

где $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ - функции из $L_2(a, b)$, однозначно определяемые оператором L_s.

Основываясь на представлениях общих сужений обыкновенных дифференциальных операторов были получены существенные результаты. В частности, в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Но на этом в настоящей работе мы не будем останавливаться.

В многомерном же случае такого представления, удобного для дальнейшей работы, получено не было. Даже для случая регулярных расширений. В этом направлении следует отметить работу [6], в которой дано описание области определения произвольного корректного сужения $u \in D(L_s)$ для широкого класса дифференциальных операторов в банаховом пространстве L_p. Полученное интегральное представление элементов области определения корректного сужения в одномерного случае совпадает в пространстве $L_2(a, b)$ с результатами [2, 4, 5]. Однако это интегральное представление элементов из области определения (даже для случая регулярных расширений) еще не дает эффективного представления общего вида краевых условий, аналогичного (4).

Устранению данного пробела для частного случая уравнения (1) посвящена настоящая работа.

Формулировка основного результата

Задачу (1) – (2) будем называть *регулярно коэрцитивной*, если для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи существует, единственно, принадлежит классу $u \in W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть задача (1) – (2) и ее сопряженная краевая задача - одновременно коэрцитивно регулярные. Тогда существуют такие функции $q_0(x,y) \in L_2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ и $q_1(x,y) \in L_2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ такие, что краевые условия (2) эквивалентны интегральным краевым условиям:*

$$\oint_{\partial\Omega} \Big(q_0(x,y)u_0(y) + q_1(x,y)u_1(y) \Big) dy = 0, x \in \partial\Omega. \tag{5}$$

В заключение авторы выражают признательность профессору М.А. Садыбекову, дискуссии с которым существенно повлияли на общий вид окончательного результата.

Литература

1 Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Матем. о-ва. – М., 1952. – №1. – С. 187-246.

2 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, №6. – С. 1307-1310.

3 Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 345 с.

4 Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 265, №4. – С. 815-819.

5 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теории сужений и расширений операторов // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1982. – №5. – С. 24-26.

6 Кальменов Т.Ш., Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Об интегральном представлении корректных сужений и регулярных расширений дифференциальных операторов // Доклады РАН. – 2010. Т. 430, №5. – С. 589-591.

Статья поступила в редакцию 12.06.12

Кальменов Т.Ш., Сураган Д. ЕКІ ӨЛШЕМДІ ЛАПЛАС ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ШЕТТІК ШАРТТАРДЫҢ ЖАЛПЫ ТҮРІ

Екі өлшемді Лаплас операторы үшін барлық корректілі коэрцитивті регулярлы шеттік есептер қарастырылған. Барлық корректілі шеттік шарттар интегралдық форма түрінде сипаттары келтірілген.

Kalmenov T.Sh., Suragan D. GENERAL APPEARANCE THE BOUNDARY CONDITIONS FOR TWO-DIMENSIONAL LAPLACE OPERATOR

For two-dimensional Laplace operator considered all valid regular coercive boundary value problems. We give a correct representation of all the boundary conditions in integral form.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.927.25

Б. Е. Кангужин, Д. Б. Нурахметов
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Казахстан, 050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: kanbalta@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

Нашему дорогому Учителю
академику Мухтарбаю Отелбаеву посвящается

В работе с каждым нелокальным внутренне краевым оператором связываем свое преобразование Фурье и свертку. Вводится класс пробных функции и указанные преобразование Фурье и свертка продолжаются на соответствующие распределения. В качестве применения вводится специальная алгебра символов псевдодифференциальных операторов, порождаемая нелокальным внутренне краевым оператором.
Ключевые слова: *дифференциальный оператор, внутренне краевая задача, преобразование Фурье, алгебра символов псевдодифференциальных операторов.*

Введение

В начале 80-х годов прошлого столетия благодаря усилиям М. Отелбаева и его учеников были предъявлены широкие классы корректных краевых задач для различных дифференциальных уравнений. При этом большинство корректных задач для дифференциальных операторов задаются с помощью нелокальных внутренне краевых условий. Дальнейший прогресс

Keywords: *Differential operator, inner boundary-value problems, Fourier transform, algebra of symbols of pseudodifferential operators*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05; 34B24; 34L10

связан с исследованием тонких спектральных свойств таких операторов и основан на специальном математическом аппарате, позволяющем учитывать специфику нелокальных внутренне краевых условий.

Конечно, некоторые нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений изучались ранее другими средствами. В частности, теория периодических краевых задач достаточно продвинута. Хотя периодические задачи и являются нелокальными, но они не будут внутренне краевыми. Поэтому возникла необходимость разработки специальных математических средств, которые давали бы возможность получать результаты спектрального характера для нелокальных внутренне краевых задач.

Достижения спектрального анализа нелокальных внутренне краевых задач для широкого класса дифференциальных операторов позволяют с иных позиций посмотреть на классические разделы теории многомерных краевых задач. Известно какую роль играют понятия обобщенного решения дифференциальных уравнений. Оказывается, что нелокальные внутренне краевые операторы порождают свой индивидуальный класс пробных функций. В связи с чем возникают новые классы обобщенных функций, которые отражают специфику нелокальных внутренне краевых условий.

В данной работе с каждым нелокальным внутренне краевым оператором мы связываем свое преобразование Фурье и свертку. Затем вводится класс пробных функции и указанные преобразование Фурье и свертка продолжаются на соответствующие распределения. В качестве применения вводится специальная алгебра символов псевдодифференциальных операторов, порождаемая нелокальным внутренне краевым оператором.

1 Спектральные свойства нелокальных дифференциальных операторов на отрезке

Рассмотрим в функциональном гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(0, 1)$ дифференциальный оператор L, заданный выражением

$$Ly(x) = -i\frac{dy(x)}{dx}, 0 < x < 1$$

с областью определения

$$D(L) = \{y \in \mathbb{W}_2^1[0,\,1] : ay(0) + by(1) + \int_0^1 y(x)q(x)dx = 0\},$$

где a, b - отличные от нуля числа, $q(\cdot) \in C^1[0,1]$.

В дальнейшем считаем, что $a + b + \int_0^1 q(x)dx = 1$. Это условие гарантирует существование ограниченного обратного оператора L^{-1}. Хорошо известны многие спектральные свойства оператора L. Для полноты изложения сформулируем их в одной теореме.

Теорема 1. *a) Оператор L имеет дискретный спектр и собственные значения оператора L можно пронумеровать так, что будет справедлива асимптотика*

$$\lambda_k = -i\ln(-\frac{a}{b}) + 2k\pi + \alpha_k, k \in \mathbb{Z},$$

причем $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^{1+\varepsilon} < \infty$ при $\varepsilon > 0$/
b) Система собственных и присоединенных фунций оператора L является минимальной системой в функциональном пространстве $\mathbb{L}_2(0,\,1)$, причем биортогональная система выписывается по формулам

$$h_{ks}(x) = \lim_{\lambda\to\lambda_k} \frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\lambda^s}\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}{\Delta(\lambda)}(ibe^{i\lambda(1-x)} + i\int_x^1 e^{i\lambda(t-x)}q(t)dt)\right),$$

где $s = \overline{0, m_k - 1}$, m_k - кратность собственного значения λ_k.
c) Система собственных и присоединенных функций оператора L является квадратически близкой в $\mathbb{L}_2(0,\,1)$ к ортонормированной полной системе $\{e^{i2k\pi x}, k \in \mathbb{Z}\}$, то есть

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|e^{i\lambda_k x} - e^{i2k\pi x}\|^2 < \infty.$$

d) Система собственных и присоединенных функций оператора L есть базис Рисса в пространстве $\mathbb{L}_2(0,\,1)$.
e) Если функция $f(x)$ из области определения оператора L, то $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по его собственным и присоединенным функциям оператора L.

Доказательство проводится непосредственным вычислением со стандартным применением теоремы Руше.

2 Преобразование Фурье и свертка, порождаемые оператором L

Каждой функции $f(\cdot)$ из $\mathbb{L}_2(0,\,1)$ поставим в соответствие последовательность ее коэффициентов Фурье по системе собственных и присоединенных функций $\left\{e^{i\lambda_k x}, \frac{ix}{1!}e^{i\lambda_k x}, \ldots, \frac{(ix)^{m_k-1}}{(m_k-1)!}e^{i\lambda_k x}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ оператора L:

$$f\to\widehat{f}\equiv\left\{\int_0^1 f(t)h_{k,m_k-s-1}(t)dt, k\in\mathbb{Z}, s=0,1,\ldots,m_k-1\right\},$$

где система $\{h_{k,s}(t)\}$ - биортогональная система функций и выписана в теореме 1. Заметим, что для определения коэффициентов Фурье здесь требуется биортогональная система функций $\{h_{k,s}(t)\}$. Это следствие того, что система функций $\left\{e^{i\lambda_k x}, \frac{ix}{1!}e^{i\lambda_k x}, \ldots, \frac{(ix)^{m_k-1}}{(m_k-1)!}e^{i\lambda_k x}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ может быть не ортогональной, но обязательно минимальна в пространстве $\mathbb{L}_2(0,\,1)$. Поскольку эта система функций - базис Рисса в пространстве $\mathbb{L}_2(0,\,1)$, то последовательность коэффициентов Фурье $\{\widehat{f}_{ks}\}$ элемента $f(\cdot)$ из $\mathbb{L}_2(0,\,1)$ удовлетворяет неравенствам

$$m\|f\|^2\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{m_k-1}|\widehat{f}_{ks}|^2\le M\|f\|^2$$

при некоторых m и M. Это следует из известной теоремы Н.К. Бари.

Введем пространство последовательностей $X=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\mathbb{C}^{m_k}$, где $\mathbb{C}^{m_k}=\{(z_0,\ldots,z_{m_k-1}), z_j\in\mathbb{C}\}$. Считаем, что элементы пространства X имеют конечную l_2 - норму. Итак, преобразование Фурье функции из $\mathbb{L}_2(0,\,1)$ по системе собственных и присоединенных функций определяется согласно формуле

$$f\in\mathbb{L}_2(0,\,1)\to^{\wedge}\widehat{f}\in X,$$

где X - пространство последовательностей с l_2 - нормой.

В пространстве $\mathbb{L}_2(0,\,1)$ введем свертку по формуле

$$(g*f)(x)=-ib\int_x^1 g(1+x-t)f(t)dt+ia\int_0^x g(x-t)f(t)dt+$$

$$+i\int_0^1\int_\xi^x g(x+\xi-t)q(\xi)f(t)dtd\xi.$$

Лемма 1. *Введенная свертка при любых $f, g \in \mathbb{L}_2(0,\,1)$ билинейна, коммутативна и ассоциативна.*

Доказательство. Билинейность следует из определения. Коммутативность проверяется непосредственно. Ассоциативность означает, что выполняется равенство $(u*v)*\omega = u*(v*\omega)$ и проверяется аналогично коммутативности свертки.

Покажем связь между сверткой и оператором L.

Следствие 1. *Резольвента оператора L имеет сверточное представление $(L-\lambda I)^{-1}f(x) = (g*f)(x)$, где $g(x) = e^{i\lambda x}/\Delta(\lambda)$.*

Следствие 2. *Свертка двух функции принадлежит области определения оператора L, если хотя бы одна из них принадлежит $\mathbb{W}_2^1[0,1]$.*

Доказательство следствия 2. Обозначим через $y(x) = (g*f)(x)$. Считаем, что $g \in \mathbb{W}_2^1[0,1]$. Вычисляя производную $y(x)$, имеем

$$y'(x) = ibg(1)f(x) + iag(0)f(x) + i\int_0^1 g(\xi)q(\xi)d\xi\cdot f(x) + (g'*f)(x). \quad (5)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что функция $y \in \mathbb{W}_2^1[0,1]$ и $by(1)+ay(0)+\int_0^1 y(x)q(x)dx = 0$. Следовательно, функция $y(\cdot) \in D(L)$.

Из формулы (5) сразу вытекает справедливость следующего следствия.

Следствие 3. *Если $g \in \mathbb{W}_2^1[0,1]$, то $(g*f) \in D(L)$ и*

$$L(g*f)(x) = ((Lg)*f)(x) + f(x)\left(bg(1)+ag(0)+\int_0^1 g(\xi)q(\xi)d\xi\right).$$

В частности, если $g(\cdot) \in D(L)$, то $L(g*f)(x) = ((Lg)*f)(x)$.

Лемма 2. *Свертка, порождаемая оператором L, – без аннуляторов. То есть, если при всех $g \in \mathbb{L}_2(0,\,1)$ справедливо $(g*f)(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть для всех $g \in \mathbb{L}_2(0,1)$ свертка $(g * f)(x) \equiv 0$. Возьмем $g = \exp(i\lambda x)/\Delta(\lambda)|_{\lambda=0} = 1$. Согласно следствию 1, свертка $(1 * f)(x)$ означает $L^{-1}f(x)$. Если $L^{-1}f(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Приведем одно полезное тождество.

Лемма 3. *Для любых λ и β справедливо соотношение*

$$exp(i\lambda x) * exp(i\beta x) = \frac{exp(i\beta x)\Delta(\lambda) - exp(i\lambda x)\Delta(\beta)}{\beta - \lambda}.$$

Доказательство. Рассмотрим свертку и, непосредственно вычисляя интегралы, получаем необходимую цепочку равенств

$$exp(i\lambda x) * exp(i\beta x) = -ib \cdot \int_x^1 e^{i\lambda(1+x-t)} \cdot e^{i\beta t}dt + ia \cdot \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} \cdot e^{i\beta t}dt +$$

$$+i\int_0^1 \int_\xi^x e^{i\lambda(x+\xi-t)} \cdot e^{i\beta t} q(\xi)dtd\xi =$$

$$= -ib \cdot e^{i\lambda(1+x)} \cdot \left. \frac{e^{i(\beta-\lambda)t}}{i(\beta-\lambda)} \right|_{t=x}^{t=1} + ia \cdot e^{i\lambda x} \left. \frac{e^{i(\beta-\lambda)t}}{i(\beta-\lambda)} \right|_{t=0}^{t=x} +$$

$$+i\int_0^1 q(x) \cdot e^{i\lambda(x+\xi)} \cdot \left. \frac{e^{i(\beta-\lambda)t}}{i(\beta-\lambda)} \right|_{t=\xi}^{t=x} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\beta-\lambda} \cdot e^{i\beta x}\left(-be^{i\beta} - \int_0^1 q(x) \cdot e^{i\beta\xi}d\xi - a\right) +$$

$$+\frac{1}{\beta-\lambda} \cdot e^{i\lambda x}\left(be^{i\lambda} + \int_0^1 q(\xi) \cdot e^{i\lambda\xi}d\xi + a\right) =$$

$$= \frac{e^{i\beta x} \cdot \Delta(\lambda) - e^{i\lambda x}\Delta(\beta)}{\beta-\lambda}.$$

Теперь в пространстве последовательностей $X = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^{m_k}$ введем внутреннюю свертку Коши. Пусть $\xi = \{\xi_{k\,0}, \xi_{k\,1} \ldots, \xi_{k\,m_k-1}, k \in \mathbb{Z}\}$ и $\eta = \{\eta_{k\,0}, \eta_{k\,1} \ldots, \eta_{k\,m_k-1}, k \in \mathbb{Z}\}$ – элементы $X = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^{m_k}$, тогда их сверткой назовем последовательность $\theta = \{\theta_{k\,0}, \theta_{k\,1} \ldots, \theta_{k\,m_k-1}, k \in \mathbb{Z}\}$, где

$$\theta_{k\,0} = \xi_{k\,0} \cdot \eta_{k\,0},\ \theta_{k\,1} = \xi_{k\,0} \cdot \eta_{k\,1} + \xi_{k\,1} \cdot \eta_{k\,0}, \ldots\ldots,$$

$$\theta_{k\,m_k-1} = \xi_{k\,0} \cdot \eta_{k\,m_k-1} + \xi_{k\,1} \cdot \eta_{k\,m_k-2} + \cdots + \xi_{k\,m_k-1} \cdot \eta_{k\,0}.$$

Полученную таким образом свертку будем обозначать через $\xi *_X \eta := \theta$. Свертки $*_X$ и $*$ связаны между собой через преобразование Фурье.

Лемма 4. *Для любых двух элементов $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ из $\mathbb{L}_2(0,\,1)$ справедливо равенство*

$$(f * g)^\wedge = \widehat{f} *_X \widehat{g}.$$

Доказательство этой леммы приведено в работе [1].

3 Пробные функции, связанные с оператором L

При определении распределений на $\mathbb{R}$ важную роль играет выбор класса пробных функций. В качестве пробных функции на $\mathbb{R}$ могут выступать бесконечно дифференцируемые с компактными носителями функции. Когда изучаются периодические процессы, то роль пробных функций играют периодические бесконечно дифференцируемые функции. В нашем случае, когда область определения оператора L состоит из функции $y(x)$, удовлетворяющих нелокальному внутренне краевому условию

$$ay(0) + by(1) + \int_0^1 q(x)y(x)dx = 0,$$

в качестве пробных функций рассматриваем класс $D(L^\infty) = \bigcap_{m=1}^\infty D(L^m)$, где $D(L^m)$ - область определения оператора L^m при $m \geq 1$. Таким образом, бесконечно дифференцируемая функция $y(x)$ из $D(L^\infty)$ удовлетворяет условиям

$$a(L^m y)(0) + b(L^m y)(1) + \int_0^1 q(x)L^m y(x)dx = 0, m = 1,\,2,\,\ldots$$

Вопрос о существовании пробных функций из $D(L^\infty)$ решает

Лемма 5. *Если $g \in D(L^\infty)$, то при всех $f(\cdot) \in \mathbb{L}_2(0,\,1)$ свертка*

$$(g * f)(x) \in D(L^\infty).$$

Доказательство следует из утверждений следствий 2 и 3.

Согласно лемме 5 достаточно построить одну функцию $g \in D(L^\infty)$, чтобы получить бесконечно много других из $D(L^\infty)$. В качестве $g(\cdot)$ могут выступать собственные и присоединенные функции оператора L. Нам необходимо выбрать, может быть, конечный набор функций $g_1, g_2, \ldots$ из $D(L^\infty)$ так, чтобы замыкание линейной оболочки $span\{(g_s * f)(x) : s = 1, 2, \ldots, f \in \mathbb{L}_2(0, 1)\}$ совпадало с $D(L^\infty)$.

Для определения замыкания надо ввести топологию в линейном пространстве $D(L^\infty)$. Будем говорить, что последовательность функций $y_j(\cdot)$ из $D(L^\infty)$ *сходится в смысле топологии* $D(L^\infty)$ *к нулю* при $j \to \infty$, если при всех $m = 1, 2, \ldots$

$$L^m y_j \rightrightarrows^{[0,1]} 0, j \to \infty,$$

где $\rightrightarrows^{[0,1]}$ - означает равномерную на [0, 1] сходимость.

Пусть m - фиксированное натуральное число. Отметим, что согласно утверждению e) теоремы 1, функция $H(x) = L^m y(x)$ при $y(\cdot) \in D(L^\infty)$ разлагается в равномерно на [0, 1] сходящийся ряд Фурье по системе собственных и присоединенных функций оператора L, то есть

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} \widehat{H_{ks}} \frac{(ix)^s}{s!} e^{i\lambda_k x} \rightrightarrows H(x).$$

Поэтому сходимость в смысле топологии $D(L^\infty)$ к нулю последовательности $\{y_j(x) \in D(L^\infty) : j = 1, 2, \ldots\}$ можно эквивалентным образом определить, как равномерную на [0, 1] сходимость к нулю некоторой последовательности частичных сумм рядов Фурье при $m = 1, 2, \ldots$ и при $j \to \infty$:

$$\sum_{k=-N_{mj}}^{N_{mj}} \sum_{s=0}^{m_k-1} (\widehat{L^m y_j})_{ks} \cdot \frac{(ix)^s}{s!} \cdot e^{i\lambda_k x}.$$

В заключение отметим, что функции $y(x)$ на [0, 1] с условием $y(0) = y(1)$ периодически продолжаются на всю ось $\mathbb{R}$. Тем самым можно рассматривать соответствие между функциями на торе $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ и 1-периодическими функциями на оси $\mathbb{R}$. Точно также в нашем случае функция $y(x)$, определенная на [0, 1] и принадлежащая области определения

$D(L)$ оператора L, может быть продолжена на всю ось $\mathbb{R}$. Действительно, поскольку $y(x) \in D(L)$, то ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} \widehat{y}_{ks} \frac{(ix)^s}{s!} e^{i\lambda_k x} \rightrightarrows^{[0,\,1]} y(x).$$

Однако ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} \widehat{y}_{ks} \frac{(ix)^s}{s!} e^{i\lambda_k x}$ сходится не только на $[0,\,1]$, он сходится в $\mathbb{L}_2[\mathbb{R}]$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Этот факт следует из того, что $a \cdot b \neq 0$ и теоремы 2.1.1 из работы А.М. Седлецкого [2] о распространении сходимости с $[0,\,1]$ на $\mathbb{R}$. Таким образом, функция $y(x)$, определенная на $[0,\,1]$, продолжается с помощью ряда Фурье на всю ось $\mathbb{R}$. В случая когда $\{\lambda_k = 2\pi k, m_k = 1,\, k \in \mathbb{Z}\}$ это продолжение совпадает с продолжением по периоду равным единице. В работе [3] приведен конструктивный способ продолжения функции с $[0,\,1]$ на ось $\mathbb{R}$ в случае многоточечных краевых условий. В нашем случае также возможно конструктивно описать продолжение.

Продолжим функцию с отрезка $[0,\,1]$ на отрезок $[0,\,2]$. Возьмем точку $1 < x \leq 2$. Запишем интегральное уравнение Вольтерра

$$by(x) + \int_1^x q(t-1)y(t)dt = g(x), 1 < x \leq 2,$$

где $g(x) = -ay(x-1) - \int_{x-1}^{1} q(t)y(t)dt$.

Поскольку функция $y(x)$ на $[0,\,1]$ задана, то значения $g(x)$ также известны на $[1,\,2]$. Решая интегральное уравнение Вольтерра найдем значения $y(x)$ на $(1,\,2]$. Заметим, что продолженная на $[1,\,2]$ таким образом функция $y(x)$ удовлетворяет условию $ay(1) + by(2) + \int_1^2 q(t-1)y(t)dt = 0$. Указанный процесс продолжается до тех пор, пока функция не будет определена на $\mathbb{R}$.

Далее по стандартной методике вводятся распределения в виде линейных непрерывных функционалов над пространством пробных функций $D(L^\infty)$. Оказывается, что можно на распределениях определить продолжения преобразования Фурье и свертки. В качестве применения вводим алгебру символов псевдодифференциальных операторов, порождаемую нелокальным внутренне краевым оператором.

Литература

1 Кангужин Б.Е., Гани С.Н. Свертки, порождаемые дифференциальными операторами на отрезке // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2004. – №1. – С. 29-33.

2 Седлецкий А.М. Биортогональные разложения функций в ряд экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. – 1982. – Т. 37, №5(227). – С. 51-95.

3 Кангужин Б.Е., Кожатаева М.Ж. Формула Даламбера в случае многоточечной задачи // Доклады НАН РК. – 1998. – №5. – С. 29-33.

Статья поступила в редакцию 17.08.12

Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАР ҮШІН ЛОКАЛЬДІ ЕМЕС ІШКІ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРМЕН БАЙЛАНЫСТЫ КЕЙБІР ҚҰРУЛАР

Бұл жұмыста әрбір локальді емес ішкі шекаралық оператормен өзінің Фурье түрлендіруі мен үйыртқысын байланыстырамыз. Сынамалы функциялар класы енгізіледі және оның бойында Фурье түрлендіруі мен үйыртқы коррект анықталған. Одан кейін оларды сәйкес үлестірімдер класына стандартты түрде кеңейтуге болады. Көрнекілік үшін локальді емес ішкі шекаралық операторлардан туындайтын псевдодифференциалдық операторлардың арнайы символдар алгебрасы қарастырылады.

Kanguzhin B.E.,Nurakhmetov D.B. NON-LOCAL INNER BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL OPERATORS AND SOME CONSTRUCTIONS ARE CONTACTS OF ITS

In this paper, each non-local operator with inner boundary-value conditions are contacts of its Fourier transform and convolution. Then introduced the class of test functions and these Fourier transform and convolution continue on the corresponding distributions. As an illustration, we consider a special algebra of symbols of pseudodifferential operators generated by non-local operator with inner boundary-value conditions.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.95

Б. Д. Кошанов
Институт математики, информатики и механики
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, e-mail: koshanov@list.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Моему дорогому Учителю
академику Мухтарбаю Отелбаеву посвящается

Для неоднородных полигармонических уравнений найдены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач с постоянными коэффициентами на границе. Даны представления функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре без ограничений на число пространственных переменных и порядок уравнения, а также описаны корректные краевые задачи.
Ключевые слова: *полигармонические уравнения, функция Грина, задача Дирихле, условия разрешимости.*

1 Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения

Пусть m и n– натуральные числа. В единичном шаре $\Omega = \{x : |x| < 1 \} \subseteq R^n$ рассмотрим неоднородное полигармоническое уравнение

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

Keywords: *Polyharmonic equations, Green function, Dirichlet problem, solvability conditions*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05; 35J25

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^{k_j} u}{\partial n_x^{k_j}}\right|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_j(x),\ \ x \in S,\ \ j = \overline{1,m};\ 0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1. \quad (2)$$

Под *регулярным решением* задачи (1)-(2) будем понимать функцию $u(x) \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям (2).

Обычно для существования регулярного решения на исходные данные $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ накладываются ограничения двух типов [1-4]: 1) требуется некоторая их гладкость; 2) некоторые условия типа ортогональности к решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

В данной работе удается сформулировать критерий разрешимости задачи (1)-(2) в исходных терминах. Введем в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1=\frac{0!}{0!} & 1=\frac{2!}{2!} & 1=\frac{4!}{4!} & 1=\frac{6!}{6!} & \ldots & \frac{(2m-4)!}{(2m-4)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-2)!} \\ 0 & \frac{2!}{1!} & \frac{4!}{3!} & \frac{6!}{5!} & \ldots & \frac{(2m-4)!}{(2m-5)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-3)!} \\ 0 & \frac{2!}{0!} & \frac{4!}{2!} & \frac{6!}{4!} & \ldots & \frac{(2m-4)!}{(2m-6)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-4)!} \\ 0 & 0 & \frac{4!}{1!} & \frac{6!}{3!} & \ldots & \frac{(2m-4)!}{(2m-7)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-5)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{(2m-4)!}{0!} & \frac{(2m-2)!}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{(2m-2)!}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{(2m-2)!}{0!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_s(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$, $s = \overline{1,m}$. *Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (1)-(2) в классе* $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при произвольном* m *и любом наборе*

$0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$ *является условие:*

$$rang\, A(k_1, k_2, ..., k_m) = rang\, \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \widehat{\vec{F}} \right). \tag{3}$$

Здесь через $A(k_1, k_2, ..., k_m)$ *обозначена матрица размерности* $m \times m$, *в которой сохраняются строки матрицы* A *(размерности* $2m \times m$*) с номерами, равными* $k_1, k_2, ..., k_m$*; а* $\widehat{\vec{F}}$ *– вектор-столбец (размерности* $m \times 1$*) с элементами:*
$\vec{F} = (\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_1(x) - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x,\ ...,\ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left[\varphi_m(x) - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x)^T.$

Если ввести обозначение $\vec{U} = (u_0(0), u_1(0), ..., u_{m-1}(0))^T$ то условие (3) означает, что ранг матрицы $A(k_1, k_2, ..., k_m)$ совпадает с рангом расширенной матрицы системы: $A(k_1, k_2, ..., k_m)\widehat{\vec{U}} = \widehat{\vec{F}}$.

2 Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре

В частном случае, когда $k_1 = 0, k_2 = 1, ..., k_m = m-1$, задача (1)-(2) является задачей Дирихле для уравнения (1) с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^j}{\partial n_x^j} u\right|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_j(x),\ \ j = \overline{0, m-1}. \tag{4}$$

В этом случае ранг матрицы $A_0 = A(k_1, k_2, ..., k_m)$ равен m, и эта задача (1), (4) однозначно разрешима. Ее решение представляется с помощью функции Грина [5, 6], явный вид которой приводится в следующей теореме.

Теорема 2. *а) В случае нечетного* n*, а также при четных* n*, если* $2m < n$ *функция Грина задачи Дирихле (1), (4) представима в виде:*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^0_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=1}^{m-1} g^k_{2m,n}(x,y), \tag{5}$$

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}|x-y|^{2m-n},\ g^0_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left|x - \frac{y}{|y|^2}r^2\right|\right]^{2m-n},$$

$$g^k_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n)\cdot\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,r^2\right|\right]^{2m-n-2k}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k\left(\frac{r^2}{-2}\right)^k\frac{1}{k!},\quad k=1,2,...,m-1, \tag{6}$$

причем

$$d_{2m,n}=\frac{1}{(m-1)!\,(2m-n)(2(m-1)-n)...(4-n)(2-n)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^m\pi^{n/2}}\,.$$

$\Gamma(\cdot)$– *Гамма функция.*
б) В случае четного n при $2m\geqslant n$ функция Грина задачи Дирихле (1), (4) представима в виде:

$$G_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^0_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{m-1}g^k_{2m,n}(x,y),$$

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\cdot\ln|x-y|, \tag{7}$$

$$g^0_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]^{2m-n}\cdot\ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right], \tag{8}$$

$$g^k_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]^{2m-n-2k}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k(r)^{2k}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(-2)^k}{k!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n)\cdot\ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2k}}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(k-j)+2)}{2}\right)\right],k=\overline{1,m-1}, \tag{9}$$

причем

$$d_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot2^{2m-1}\pi^{n/2}},$$

$y^*=\dfrac{y}{|y|^2}r^2$ – *точка, симметричная y относительно сферы S_r.*

3 Построение корректных краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в ограниченной области

Описание различных подходов к теории расширений и сужений дифференциальных операторов от функций нескольких переменных по ограниченным областям, а также применения и постановки задач функционально - аналитического подхода даны в работах [7, 8].

Зная явный вид (5) функции Грина, рассмотрим функцию

$$w(x)=\int_{\Omega_r} G_{2m,n}(x,y)f(y)dy+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_r}\left[\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\Delta_y^{m-1-j}h(y)-\right.$$

$$\left.-\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{m-1-j}h(y)\right]dS_y, \tag{10}$$

где $h(x)=(Kf)(x)$, K–некоторый произвольный оператор, ставящий каждой функции $f(x)$, $x\in\Omega_r=\{x:|x|<r\ \}\subseteq R^n$ в соответствие единственную достаточно гладкую функцию $h(x)$.

Теорема 3. *а) Функция $w(x)$, задаваемая формулой (10) при $m=2p$, является решением краевой задачи:*

$$\Delta_x^m w(x)=f(x),\quad x\in\Omega_r, \tag{11}$$

$$w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},\ \ \frac{\partial}{\partial n_x}w(x)\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}h(x)\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}; \tag{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_x^{p-1}w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=\Delta_x^{p-1}h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},\ \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}w(x)\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}h(x)\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}.$$

б) Функция $w(x)$, задаваемая формулой (10) при $m=2p+1$, является решением задачи для уравнения (11) с краевыми условиями:

$$w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},\ \ \frac{\partial}{\partial n_x}w(x)\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}h(x)\bigg|_{x\in\partial\Omega_r}; \tag{13}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_x^p w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=\Delta_x^p h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},$$

где $h(x)=(K\cdot\Delta_x^m w)(x), x\in\Omega_r$, K– произвольный оператор.

Теорема 4. *(о единственности). Решение краевых задач (11), (12) и (11), (13) – единственно.*

Теорема 5. *(о существовании). Пусть неоднородное полигармоническое уравнение (11) с некоторыми краевыми условиями при всех допустимых* $f(x)$ *имеет единственное регулярное решение* $u(x)$. *Тогда найдется оператор* K *такой, что* $u(x)$ *удовлетворяет либо краевым условиям (12) при* $m = 2p$, *либо (13) при* $m = 2p + 1$, *где* $h(x) = (K \cdot \Delta_x^m u)(x), x \in \Omega_r$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность академику Т.Ш. Кальменову и профессору Б.Е. Кангужину.

Литература

1 Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

2 Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – Т.5, №2. – С. 123-151.

3 Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. 1988. – Т.24, №5. – С. 825-831.

4 Карачик В.В. Об одном разложении типа Альманси // Мат. заметки. – 2008. – Т. 83, выпуск 3. – С. 267-278.

5 Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. –2006. – V. 255. – P. 13-34.

6 Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады РАН. – 2008. – Т.421, №3. – С. 305-307.

7 Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. – М.: Труды Матем. о-ва, 1952. – №3. – С. 187-246.

8 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, №6. – С. 1307-1310.

9 Burenkov V.I., Otelbaev M. On the singular numbers of correct restrictions of non-selfadjoint elliptic differential operators // Eurasian mathematical journal. – 2011. – V.2, №1. – P. 145-148.

Статья поступила в редакцию 12.06.12

Қошанов Б.Д. ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Шекарада тұрақты коэффициентті біртексіз полигармониялық теңдеулер үшін шарда түрлі шеттік есептердің шешіліуінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Кеңістік өлшем саны мен теңдеудің дәрежесіне байланыссыз Дирихле есебі үшін Грин функциясы құрылды, және де корректілі шеттік есептер анықталды.

Koshanov B.D. ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR POLYHARMONIC EQUATION

We find necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equations with constant coefficients on the border. We give the Green function the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a sphere with no limit on the number of spatial variables and equations, and also describes the correct boundary value problems.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.95

Л. К. Кусаинова, Б. С. Кошкарова
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева
Казахстан, 010000, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: leili2006@mail.ru

ФУНКЦИИ ОТЕЛБАЕВА В ИССЛЕДОВАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Авторы посвящают работу Учителю,
выдающемуся математику Мухтарбаю Отелбаеву,
скромному гению казахского народа

Работа посвящена исследованию осцилляторности, неосцилляторности (на бесконечности) двучленных линейных дифференциальных уравнений. Вводится двухвесовая модификация функции Отелбаева, в терминах которой получены условия осцилляторности, неосцилляторности двучленных уравнений со знакопеременным потенциалом.
Ключевые слова: *обыкновенные дифференциальные уравнения, осциляторные свойства дифференциальных уравнений.*

"Бегущие средние" $q^*(x)$ (функции Отелбаева) были введены М. Отелбаевым при исследованиях оператора Штурма–Лиувилля и далее Шредингера с нерегулярными потенциалами $q(x)$. Первоначальной целью было получение асимптотики собственных чисел и качественных характеристик резольвенты. Идея использования локальных оценок на интервалах (кубах) с характеристической длиной (ребра), задаваемой через значения "бегущей средней", оказалась весьма плодотворной для точного решения

Keywords: *Ordinary differential equations, oscillatory properties of differential equations*
2010 Mathematics Subject Classification: 34C10

широкого круга задач в теории дифференциальных операторов (уравнений) и в теории пространств дифференцируемых функций. Достаточно полная к настоящему времени библиография работ дана в [1, 2]. Термин "точный" здесь определяется сутью поставленных задач.

В качестве пояснения приведем результаты М. Отелбаева, оказавшие большое влияние на развитие теории вложения весовых пространств дифференцируемых функций. Напомним, что к оценкам спектра оператора, порождаемого самосопряженным дифференциальным выражением, можно подойти с позиций качественной и количественной характеристик вложений весовых пространств Соболева в L_2.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^d$ (интервал в $\mathbb{R}$ при $d = 1$), v — неотрицательная локально-суммируемая в Ω функция, $1 \leqslant p, q < \infty$; $n \geqslant 1$ — целое. Обозначим через L_q, $W^n_{p,v}$ соответственно пространство Лебега с нормой

$$\|u; L_q\| = \left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{1/q},$$

и пространство функций с конечной нормой

$$\left\|u; W^n_{p,v}\right\| = \left(\int_\Omega |\nabla_n u|^p \, dx + \int_\Omega |u|^p \, v(x) dx\right)^{1/p},$$

где $|\nabla_n u| = \left(\sum\limits_{|\alpha|=n} |D^\alpha u|^2\right)^{1/2}$. Пусть v^* — обозначение одной из функций Отелбаева из [3]. В терминах v^* были впервые получены

— *критерий вложения $W^n_{p,v} \to L_2$ и значение (в смысле слабого равенства) нормы $\|E_{p,q}\|$ оператора вложения $E_{p,q} : W^n_{p,v} \to L_q$;*

— *критерий компактного вложения $W^n_{p,v} \to L_2$;*

— *асимптотика линейных поперечников вложения $E_p : W^n_{p,v} \to L_p$* $(1 < < p < \infty)$.

Значение нормы $\|E_2\|$ или, равнозначно, наименьшего собственного числа самосопряженного оператора L, порождаемого в L_2 формой $\mathcal{L}[u] = \left\|u; W^n_{2,v}\right\|^2$, особенно важно для определения порога устойчивости в механике. В данной работе мы приводим новые результаты, связанные с исследованием осцилляторных свойств уравнения

$$l[y] \equiv (-1)^n \left(\rho(x) y^{(n)}\right)^{(n)} + q(x) y = 0, \tag{1}$$

где $\rho(\cdot)$, $q(\cdot)$ — непрерывные в $I = (0, \infty)$ функции, $\rho(x) > 0$ в I, а $q(x)$ меняет знак на каждом интервале (x, ∞) при $x \in I$. В этом случае неприменимы неравенства типа Харди (см. [4]).

Уравнение Штурма-Лиувилля ($n = 1$)

$$-y'' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

называют *осцилляторным*, если существует нетривиальное решение уравнения (2), имеющее бесконечное множество нулей $x_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Известно, что осцилляторность уравнения (2) равносильна бесконечности отрицательной части спектра оператора Штурма-Лиувилля в $L_2(I)$. Следующее определение осцилляторности сохраняет это свойство для любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ минимального оператора, порождаемого дифференциальным выражением $l[y]$ при $n > 1$.

Определение 1 (5). *Уравнение (1) называется осцилляторным, если для любого $T > 0$ найдется нетривиальное решение y, имеющее в (T, ∞) не менее двух n-кратных нулей.*

Определение 2. *Уравнение (1) называется неосцилляторным, если оно не является осцилляторным.*

В настоящей работе строится двухвесовая модификация функции Отелбаева, посредством которой выводятся условия осцилляторности (неосцилляторности) уравнения (1). Пусть $C^+(I)$ - конус неотрицательных невырожденных непрерывных в I функций.

Пусть $0 \leqslant \varepsilon < 1$, $v \in C^+(I)$, $x \in I$, $\Delta = [x, x+h)$ $(h > 0)$. Положим

$$\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x, h|\rho, v) = h^{2(n-1)} \left(\int_\Delta \frac{1}{\rho} \right) \inf_{\{e\}} \int_{\Delta \setminus e} v,$$

где inf берется по всем $e \subset \Delta$ с мерой $|e| \leqslant \varepsilon |\Delta|$ $(= \varepsilon h)$.

Зададим характеристический размер

$$h^*_{(\varepsilon)}(x) = h^*_{(\varepsilon)}(x|\rho, v) = \sup \left\{ h > 0 : \mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x, h|\rho, v) \leqslant 1 \right\},$$

$$h^*(x) = h^*_{(0)}(x).$$

Нетрудно видеть, что $0 < h^*_{(\varepsilon)}(x) < \infty$ для всех $x > 0$. При этом

$$\mathcal{K}^*_{(\varepsilon)}(x|\rho, v) = \mathcal{K}_{(\varepsilon)}\left(x, h^*_{(\varepsilon)}(x)|\rho, v\right) = 1.$$

Теорема 1. *Пусть $q = v - u$, где $v, u \in C^+(I)$. Тогда существует точная постоянная $c_{\varepsilon,n} > 1$ $(0 < \varepsilon < 1)$ такая, что, если*

$$\lim_{x\to\infty} \sup \mathcal{K}^*_{(\varepsilon)}(x|\rho, u) < c^{-2}_{\varepsilon,n},$$

то уравнение (1) неосцилляторно.

Следствие 1. *Пусть $q = v - u$, где $v, u \in C^+(I)$, и пусть существует $T > 0$ такое, что*

$$\sup_{h>0, x\geqslant T} \left(\int_x^{x+h} v\right)^{-1} \int_x^{x+h} u < c^{-2}_{\varepsilon,n}.$$

Тогда уравнение (1) неосцилляторно.

Для $0 < \mu < \nu < 1$ положим

$$\widetilde{c}_{\mu,\nu} = \left[\mu^{-2n} + (1-\nu)^{-2n}\right] \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1+i)!}{i!} C_i^{n-1}\right)^2.$$

Пусть $\Delta^*(x) = [x, x + h^*(x))$, где $h^*(x) = h^*(x|\rho, v)$, $\widetilde{\Delta}^*(x) = [x + \mu h^*(x), x + \nu h^*(x))$.

Теорема 2. *Пусть $q = v - u$, где $v, u \in C^+(I)$. Пусть для некоторого $x_0 > 0$*

$$\int_{x_0}^{\infty} (\zeta - x_0)^{2n} u(\zeta) d\zeta + \int_{x_0}^{\infty} \rho^{-1}(t) dt = +\infty. \tag{3}$$

Если существует $T > 0$ такое, что для всех $x \geqslant T$

$$\min\left\{ \left(\int_{\Delta^*(x)} v\right)^{-1} \int_{\widetilde{\Delta}^*(x)} u,\ \left(\int\limits_{\Delta^*(x)} \rho\right)^{-1} \int\limits_{\widetilde{\Delta}^*(x)} (\zeta - x)^{2n} u(\zeta) d\zeta \right\} > (1 + \widetilde{c}_{\mu,\nu})^{-1},$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Следствие 2. *Пусть $q = v - u$, где $v, u \in C^+(I)$, и пусть выполнено условие (3). Если существует такое $T > 0$, что для всех $x \geqslant T$*

$$\min\left\{\inf_{h>0}\left(\int\limits_x^{x+h} v\right)^{-1}\int\limits_{x+\mu h}^{x+\nu h} u,\ \inf_{h>0}\left(\int\limits_x^{x+h}\rho\right)^{-1}\int\limits_{x+\mu h}^{x+\nu h}(t-\zeta)^{2n}u(\zeta)d\zeta\right\} > (1+\widetilde{c}_{\mu,\nu})^{-1},$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Ниже условие $w \in (A^*_\infty)$ будет означать, что существуют такие $0 < \delta, \tau < 1$, что, начиная с некоторого $x \geqslant x_0$ для любого интервала $\Delta \subset \Delta^*(x)$

$$\int_e w \leqslant \tau \int_\Delta w,$$

если мера $|e| \leqslant \delta|\Delta|$.

Условие $\rho \in (A_2)$ будет означать, что

$$\sup_{x\geqslant x_0}\sup_{\Delta\subset\Delta^*(x)}|\Delta|^{-2}\int_\Delta \rho\left(\int_\Delta \frac{1}{\rho}\right) = M < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $q = v - u$, где $v, u \in (A_\infty)$. Тогда:*

a) существует такая постоянная $\bar{c} = c(\delta, \tau, n) > 0$, что, если

$$\lim_{x\to\infty}\sup\left(\int_{\Delta^*(x)} v\right)^{-1}\int_{\Delta^*(x)} u < \bar{c}^{-1},$$

то уравнение (1) неосцилляторно.

b) Пусть ρ удовлетворяет условиям (A_2) и (3). Тогда существует такая постоянная $\underline{c} = c(n) > 0$, что, если

$$\lim_{x\to\infty}\inf\left(\int_{\Delta^*(x)} v\right)^{-1}\int_{\Delta^*(x)} u > (1+\underline{c}M)^{-1},$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Постоянные $\bar{c}$ и $\underline{c}$ вычисляемы.

Замечание 1. *Неосцилляторность уравнения (1) равносильна выполнению условия: существует $T > 0$ такое, что для всех $y \in C_0^{2n}(T, \infty)$*

$$\mathcal{A}[y] \equiv \int\limits_T^\infty y(x)l[y]dx \geqslant 0 \tag{4}$$

(см. [5]). Поэтому условие неосцилляторности можно получить, оценивая точную постоянную C в неравенстве вложения

$$\int_T^\infty |y(x)|^2 u(t)dt \leqslant C \int_T^\infty \left(|y^{(n)}|^2 \rho(t) + |y|^2 v(t)\right) dt. \tag{5}$$

С помощью метода локальных оценок на характеристических промежутках $\Delta^*_{(\varepsilon)}(x)$ мы выводим, что точная постоянная

$$C \leqslant c^2_{\varepsilon,n} \sup_{x \geqslant T} \mathcal{K}^*_{(\varepsilon)}(x|\rho, u)$$

(см. [6]).

2. Уравнение (1) будет осцилляторным, если для любого $T > 0$ найдется финитная функция y с $supp(y) \subset (T, \infty)$, на которой $\mathcal{A}[y] > 0$. Условие осцилляторности в теореме 2 выводится посредством обратных (5) оценок на пробных функциях с носителем $supp(y) \subset \Delta^*(x)$.

3. Условие (3) в теореме 2 является необходимым. Если бы сумма в (3) была конечна, то из этого следовала бы неосцилляторность уравнения

$$(-1)^n \left(\rho(x)y^{(n)}\right)^{(n)} - u(x)y = 0,$$

и, как следствие, неосцилляторность уравнения (1) (см. [4]).

Литература

1 Отелбаев М., Кусаинова Л.К. Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов // Збірнік праць інституту математікі НАН Украіні. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 165-190.

2 Мынбаев К.Т., Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциального оператора. – Москва, 1988. – 254 с.

3 Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изученю спектра оператора Шредингера // Тр.МИАН. – 1979. – Т. 150. – С. 265-305.

4 Oinarov R., Rakhimova S.Y. Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order // E.J.Qualitative Theory of Diff.Equ. – Hungary, 2010. – №49. – P. 1-15.

5 Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа спектральных дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1963. – 365 с.

6 Кусаинова Л.К. Весовые неравенства вложений // Доклады МН АН РК. – 1998. – №6. – С. 23-32.

Статья поступила в редакцию 10.07.12

Кусаинова Л.К.,Кошкарова Б.С. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ТЕРБЕЛІМДІЛІК ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУДЕГІ ӨТЕЛБАЕВТЫҢ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Жұмыс екімүшелі сызықтық дифференциалдық теңдеулердің тербелімділігін, тербелімсіздігін (шексіздікте) зерттеуге арналған. Өтелбаев функциясының қоссалмақты модификациясы еңгізіліп, оның терминінде таңбасы ауыспалы потенциалды екімүшелі теңдеулердің тербелімділік, тербелімсіздік шарттары алынған.

Kusainova L.K., Koshkarova B.S. OTELBAYEV FUNCTIONS IN THE STUDIES OF OSCILLATORY PROPERTIES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

This work is aimed to study of oscillation, and non-oscillation (on infinity) of two terms linear differential equations. Two weighted modification of Otelbayev function is introduced. In terms of this function the conditions of oscillation and non-oscillation of two terms linear differential equations with alternating potential are obtained.

УДК 517.956.32

М. Б. Муратбеков
Таразский государственный педагогический институт
Казахстан, 080000, Тараз, ул. Толе би, 62, e-mail: musahan_m@mail.ru

ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ (S - ЧИСЕЛ) ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Дорогому Учителю, академику
Мухтарбаю Отелбаеву посвящается

В работе доказана дискретность спектра и получены двусторонние оценки s-чисел одного класса сингулярных операторов гиперболического типа.
Ключевые слова: *дискретность, спектр, сингулярные числа.*

1 Введение. Формулировка основных результатов

Пусть $\Omega = \{(x,y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$. В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим дифференциальный оператор гиперболического типа

$$L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u$$

с областью определения $D(L_0)$, состоящей из бесконечно дифференцируемых функций, финитных по переменной y и удовлетворяющих условиям

$u(-\pi; y) = u(\pi; y), u_x(-\pi; y) = u_x(\pi; y), -\infty < y < \infty$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $a(y)$ и $c(y)$ - непрерывные функции в $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, удовлетворяющие условию

Keywords: *Discreteness, spectrum, singular numbers*
2010 Mathematics Subject Classification: 35P15; 35P20; 35L81

i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$, $c(y) \geq \delta > 0$, $-\infty < y < \infty$.

Нетрудно убедиться, что оператор L_0 в пространстве $L_2(\Omega)$ допускает замыкание, которое обозначим через L.

Отметим, что оператор соответствует задаче о распространении граничного режима (см.[1], стр.106), т.е. задаче без начальных условий. Здесь слагаемое au_x характеризует силу трения. Вопрос о существовании решений задачи без начальных условий, вообще говоря, зависит от поведения коэффициентов a и c. Например, при $a = 0$ решение не всегда существует.

Известно, что для квантовой механики особенно интересно распределение собственных и сингулярных чисел операторов, заданных в неограниченной области и имеющих дискретный спектр.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие i). Тогда оператор $L + \mu E$ при $\mu \geq 0$ непрерывно обратим.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие i). Тогда резольвента оператора L компактна тогда и только тогда, когда для любого $\omega > 0$*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int\limits_y^{y+\omega} c(t)dt = \infty. \qquad (*)$$

Вопрос о существовании резольвенты и дискретности спектра в неограниченной области с растущими и колеблющимися коэффициентами ранее исследован только в случае эллиптических и псевдодифференциальных операторов [2-5].

Предположим, что коэффициенты оператора L помимо условия i) удовлетворяют условию:

ii) $\mu_0 = \sup\limits_{|y-t|\leq 1} \frac{c(y)}{c(t)} < \infty$, $\mu = \sup\limits_{|y-t|\leq 1} \frac{a(y)}{a(t)} < \infty$.

Тогда из теоремы 2 легко следует следующий результат:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия i)-ii). Тогда резольвента оператора L компактна тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{|y|\to\infty} c(y) = \infty$.*

С решением вопроса о дискретности спектра связаны такие задачи, как оценки сингулярных чисел (s - чисел) и функции их распределения.

Ненулевые s - числа оператора $(L+\mu E)^{-1}$ будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности так, что

$$s_k((L+\mu E)^{-1}) = \lambda_k\left(\sqrt{((L+\mu E)^{-1})^*(L+\mu E)^{-1}}\right), \quad k=1,2,....$$

Введем функцию $N(\lambda)=\sum\limits_{s_k>\lambda}1$ - количество s_k, больших $\lambda>0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда справедлива оценка*

$$c^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}mes\big(y\in\mathbb{R}: Q_n(y)\le c^{-1}\lambda^{-1}\big)\le N(\lambda)\le$$
$$\le c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-1}mes\big(y\in\mathbb{R}: K_n^{\frac{1}{2}}(y)\le c\lambda^{-1}\big),$$

где $Q_n(y)=|n^2+ina(y)+c(y)+\mu|, K_n(y)=(|na(y)|+c(y)+\mu)$, *постоянное* $c>0$ *не зависит от* Q_n, K_n *и* λ.

Допустим теперь, что условие ii) не выполнено. Тогда справедлива следующая теорема

Теорема 5. *Пусть выполнены условие i). Тогда имеют место оценки*

$$^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}mes\big(y\in\mathbb{R}: Q_n^*(y)\le c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}\big)\le N(\lambda)\le$$
$$\le c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-1}mes\big(y\in\mathbb{R}: K_n^*(y)\le c\lambda^{-1}\big)$$

где $c>0$ - постоянное число, не зависящее от Q_n, K_n и λ,

$$Q_n^*(y)=\inf\left\{d^{-1}: d^{-3}\ge\int\limits_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}}Q_n^2(x)dx\right\}, K_n^*(y)=\inf\left\{d^{-1}: d^{-1}\ge\int\limits_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}}K_n(x)dx\right\}.$$

Функции $Q_n^*(y), K_n^*(y)$ представляют собой специальные усреднения функций Q_n, K_n [5].

Данная теорема справедлива и в тех случаях, когда коэффициенты могут быстро колебаться.

2 Вспомогательные леммы и неравенства

Лемма 1. *Пусть выполнено условие i) и $\mu \geq 0$. Тогда для всех $u \in D(L+\mu E)$ выполняется неравенство*

$$\|(L+\mu E)u\|_2 \geq c\|u\|_2 \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|_2$ - норма в $L_2(\Omega)$, $c = c(\delta, \delta_0)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 работы [6].

В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим оператор

$$(l_n+\mu E)u = -u'' + \big(-n^2 + ina(y) + c(y) + \mu\big)u, \ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

с областью определения $D(l_n)$, состоящей из финитных функций, которые вместе со своими производными до второго порядка принадлежат $L_2(\mathbb{R})$.

Оператор $l_n+\mu E$ допускает замыкание, которое обозначим также через $l_n+\mu E$.

Справедливы следующие леммы

Лемма 2. *Пусть выполнено условие i) и $\mu \geq 0$. Тогда для всех $u \in D(l_n)$ справедлива оценка*

$$\|(l_n+\mu E)u\|_2 \geq c\|u\|_2$$

где $c = c(\delta, \delta_0)$.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие i). Тогда при $\mu \geq 0$ к замкнутому оператору $l_n+\mu E$ существует непрерывный обратный оператор $(l_n+\mu E)^{-1}$, определенный на всем $L_2(\mathbb{R})$.*

Лемма 4. *Пусть выполнено условие i) и $\mu \geq 0$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

а)$\|\sqrt{c(y)}(l_n+\mu E)^{-1}\|_{2\to 2} < \infty$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$;

б)$\|\sqrt{|n|a(y)}(l_n+\mu E)^{-1}\|_{2\to 2} < \infty$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$;

в)$\|\frac{d}{dy}(l_n+\mu E)^{-1}\|_{2\to 2} < \infty$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, *где $\|\cdot\|_{2\to 2}$ - норма оператора из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.*

Лемма 5. *Пусть выполнено условие i). Тогда для всех* $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ *справедливо неравенство*

$$\|(l_n + \mu E)^{-1}\|_{2\to 2} \leq \frac{1}{|n| \cdot \delta_0}.$$

Доказательства лемм 2–5 следуют из лемм 8–11 работы [6].

Лемма 6. *Пусть выполнено условие i). Тогда для всех* $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ *оператор* $(l_n + \mu E)^{-1}$ *вполне непрерывен, если и только если для любого* $\omega > 0$

$$\lim_{|y|\to\infty} \int\limits_y^{y+\omega} c(t)dt = \infty.$$

Доказательство. Из леммы 5 следует, что лемму 6 достаточно доказать для каждого конечного $n \neq 0$. Отсюда следует, что для доказательства леммы 6 остается повторить рассуждения использованные в работах [3-4,6].

Введем следующие множества

$$M = \{u \in L_2(\mathbb{R}) : \|(l_n + \mu E)u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq 1\},$$

$$\tilde{M}_c = \{u \in L_2(\mathbb{R}) : \|u'\|_2^2 + \|\sqrt{|n| \cdot |a(y)|}u\|_2^2 + \|\sqrt{c(y) + \mu}u\|_2^2 \leq c\},$$

$$\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}} = \{u \in L_2(\mathbb{R}) : \| - u''\|_2^2 + \|n^2 u\|_2^2 + \|ina(y)u\|_2^2 + \|(c(y) + \mu)u\|_2^2 \leq c^{-1}\}.$$

Лемма 7. *Пусть выполнено условие i). Тогда справедливы включения* $\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_c$, *где* $c > 0$ *- постоянная, не зависящая от* u *и* n.

Лемма 8. *Пусть выполнено условие i). Тогда справедлива оценка*

$$c^{-1}\tilde{\tilde{d}}_k \leq s_{k+1} \leq c\tilde{d}_k, \ \ k = 1, 2, ...,$$

где $c > 0$ *- некоторая постоянная,* s_{k+1} *- s-числа оператора* $(l_n + \mu E)^{-1}$, $\tilde{d}_k, \tilde{\tilde{d}}_k$ *- поперечники по Колмогорову соответствующих множеств* $\tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}$.

Лемма 9. *Пусть выполнено условие i). Тогда справедлива оценка*

$$\tilde{\tilde{N}}(c\lambda) \le N(\lambda) \le \tilde{N}(c^{-1}\lambda),$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{s_{k+1}>\lambda} 1$ *- количество* s_{k+1}*, больших* $\lambda > 0$*;* $\tilde{N}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{d}_k>\lambda} 1$ *- количество* $\tilde{d}_k$*, больших* $\lambda > 0$*;* $\tilde{\tilde{N}}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{\tilde{d}}_k>\lambda} 1$ *- количество* $\tilde{\tilde{d}}_k$*, больших* $\lambda > 0$.

Эти леммы доказываются точно также, как леммы 4 и 5 работы [6].

Лемма 10. *Пусть выполнено условие i) и* $\mu \ge 0$*. Тогда справедлива оценка*

$$c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}} mes\big(y \in \mathbb{R} : Q_n^*(y) \le c^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}\big) \le N(\lambda) \le c\lambda^{-1} mes\big(y \in \mathbb{R} : K_n^*(y) \le c\lambda^{-1}\big)$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{s_k>\lambda} 1$ *- количество* s_k *больших* $\lambda > 0$, s_k *- сингулярные числа оператора* $(l_n + \mu E)^{-1}$.

Доказательство леммы 10 следует из лемм 8 и 9 и из результатов работы [4].

Лемма 11. *Пусть выполнено условие i)-ii). Тогда для всех* $y \in \mathbb{R}$ *справедливы неравенства*

$$c_1^{-1} K_n^{\frac{1}{2}}(y) \le K_n^*(y) \le c_1 K_n^{\frac{1}{2}}(y); \quad c_2^{-1} Q_n^{\frac{1}{2}}(y) \le Q_n^*(y) \le c_2 Q_n^{\frac{1}{2}}(y),$$

где $c_1(\mu_0, \mu_1) > 0, c_2(\mu_0, \mu_1) > 0$ *- постоянные числа.*

Лемма 11 доказывается точно также как лемма 12 работы [6].

Доказательства теорем 1–3 следуют из лемм 1–11 и из результатов работ [4, 6].

Литература

1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1973. – 565 с.

2 Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды МИАН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 37-76.

3 Молчанов А.М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Моск. Мат. Об-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 169-200.

4 Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредрингера // Труды МИАН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 256-305.

5 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 195-217.

6 Кальменов Т.Ш., Муратбеков М.Б. Спектральные свойства оператора смешанного типа. – Шымкент: Гылым, 1997. – 255 с.

Статья поступила в редакцию 09.07.12

Мұратбеков М.Б. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТИПТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ БІР КЛАСЫНЫҢ СПЕКТРІНІҢ ДИСКРЕТТІЛІГІ ЖӘНЕ СИНГУЛЯРЛЫ САНДАРЫНЫҢ (S-САНДАРЫНЫ)ТАРАЛУЫ

Бұл жұмыста гиперболалық типті сингулярлы операторлардың бір класының спектрінің дискреттілігі дәлелденген және s-сандарының екіжақты бағалары алынған.

Muratbekov M.B. DISCRETENESS OF THE SPECTRUM AND DISTRIBUTION OF THE SINGULAR NUMBERS (S-VALUES) OF A CLASS OF DIFFERENTIAL OPERATORS OF HYPERBOLIC TYPE

In this paper the discreteness of the spectrum is proved and two-sided estimates of s-numbers of a class of singular hyperbolic operators are obtained.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.521; 51-77

К. Т. Мынбаев
Казахстанско-Британский Технический Университет
Казахстан, 050000, Алматы, ул. Толеби, 59, e-mail: kairat_mynbayev@yahoo.com

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕННЫЕ И НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИКИ

Моему дорогому Учителю
академику Мухтарбаю Отелбаеву посвящается

В статье дается обзор результатов по эконометрике и математической статистике, полученных автором, указывается их связь с теорией функций и перечисляются некоторые нерешенные задачи.
Ключевые слова: *L_p-приближаемость, пространственная модель, непараметрическая оценка, детерминированный регрессор, медленно меняющиеся функции.*

Как это началось

Мне посчастливилось быть учеником Мухтарбая Отелбаева и участвовать в работе семинара М. Отелбаева и Т.Ш. Кальменова в течение около 20 лет. У М. Отелбаева я учился стандартам качества и требовательности к себе. У нас на семинаре ценились необходимые и достаточные условия. Две фразы Отелбаева были маяком в моей жизни: "Если налагать много условий, я докажу что угодно" и "Все время нужно решать новые задачи". Когда я занялся задачами математической статистики, мне постоянно помогали знания теории функций и функционального анализа, которые в

Keywords: *L_p-approximability, spatial model, nonparametric estimation, deterministic regressors, slowly varying functions*
2010 Mathematics Subject Classification: 26A99; 62F12; 62G07

объяснениях Отелбаева превращались из абстрактных и сложных в конкретные и простые понятия.

1 Моделирование детерминистических последовательностей

В различных областях теории вероятностей и математической статистики возникает необходимость рассматривать весовые суммы вида

$$\sum_{t=1}^{n} w_{nt}u_t \tag{1}$$

где $u_1, ..., u_n$ - случайные переменные и $w_n = (w_{n1}, ..., w_{nn})$ - детерминистический вектор. Например, в классических центральных предельных теоремах (ЦПТ) $w_{n1} = ... = w_{nn} = 1/\sqrt{n}$. Для работы с более общими векторами нужно какое-то аналитическое представление $\{w_n\}$. В [1] предложено использовать $\{w_n\}$, полученные путем дискретизации функций $F \in L_p(0,1)$. Точнее говоря, положим

$$(\delta_{np}F)_t = n^{1-1/p}\int_{(t-1)/n}^{t/n} F(x)dx,\ t = 1, ..., n.$$

Последовательность $\{\delta_{np}F : n = 1, 2, ...\}$ была введена Moussatat и н азывается L_p*-порожденной функцией* F. L_p-порожденные последовательности с успехом применялись в работах ряда специалистов по статистике. Однако, требование, чтобы w_n был точным образом F при отображении δ_{np}, является слишком ограничительным для большинства приложений. Поэтому в [2] было введено более общее определение: последовательность $\{w_n\}$ называется L_p*-приближаемой*, если существует функция $F \in L_p(0,1)$ такая, что $\|w_n - \delta_{np}F\|_{l_p} \to 0,\ n \to \infty$. Там же был исследован ряд общих свойств таких последовательностей, наиболее примечательным из которых является критерий L_p-приближаемости (в терминах w_n).

В литературе были предложены другие подходы к моделированию детерминистических последовательностей. Чисто алгебраическое определение (основанное на рекурсивном соотношении) было предложено в [3]. Результат [4] показывает, что подходы Йохансена и Мынбаева не перекрывают друг друга. В [5] использованы медленно меняющиеся функции. Вообще говоря, медленное изменение не имеет ничего общего с L_p-

приближаемостью. Тем не менее, в [6] показано, что специальные последовательности, возникающие из медленно меняющихся функций в контексте регрессий без единичных корней, являются L_p-приближаемыми. Более того, ЦПТ, получающаяся в рамках [2], носит более общий характер, чем ЦПТ, выведенная из свойств Броуновского движения [5].

Задача 1. Заменив L_p на пространство Орлича, исследовать полученные классы последовательностей. (Эта задача была предложена Р. Ойнаровым.)

2 Сходимость сумм случайных векторов с детерминистическими весами

Многие ЦПТ являются утверждениями о сходимости по распределению сумм вида (1). При этом одной из распространенных спецификаций переменных u_t является представление в виде свертки

$$u_t = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \psi_{t-j} e_j,\ t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

где $\{\psi_j\}$ – новая (фиксированная) детерминистическая последовательность и $\{e_j\}$ – новые (в некотором смысле, базисные) случайные переменные. Последовательность $\{u_t\}$ называется *линейным процессом с короткой памятью*, если $\sum_j |\psi_j| < \infty$, и *с длинной памятью*, если $\sum_j |\psi_j|^2 < \infty$. В [2] получена окончательная ЦПТ для (1) в случае, когда (а) последовательность $\{w_n\}$ является L_2-приближаемой, (б) $\{u_t\}$ является линейным процессом с короткой памятью и (в) $\{e_j\}$ является последовательностью разностей мартингалов. Заметим, что условие L_2-приближаемости является наиболее общим, потому что в асимптотике возникает интеграл $\int_0^1 F^2(x)dx$.

Задача 2. Получить функциональную предельную теорему, соответствующую ЦПТ, доказанной в [2].

Как ясно из [7], эта задача еще не решена.

Задача 3. Обобщить ЦПТ, доказанную в [2], на случай процессов с длинной памятью.

В [8] и [9] содержатся результаты для довольно общих $\{e_j\}$, но в отношении весов $\{w_n\}$ они оставляют желать лучшего.

В [2], помимо ЦПТ для (1), доказана также теорема о сходимости квадратичных форм $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(n)} u_i u_j$, где $\left(a_{ij}^{(n)}\right)$ – детерминистическая матрица. Этот результат соединяет понятие L_2-приближаемости с идеей из [10] использовать теорию интегральных операторов, причем условие непрерывности ядра и собственных функций интегрального оператора из [10] заменено на условие принадлежности классу Гильберта-Шмидта.

3 Применения к линейной регрессии

Рассмотрим линейную регрессию

$$y = X\beta + u \tag{2}$$

где вектор y и матрица X получены в результате наблюдений, неизвестный вектор β подлежит оценке; случайный вектор (*ошибка*) u ненаблюдаем и удовлетворяет условиям $Eu = 0$, $V(u) = \sigma^2 I$. Здесь I – единичная матрица и σ^2 – неизвестный положительный параметр. Свойство нормальности или асимптотической нормальности оценки наименьших квадратов (ОНК) $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ чрезвычайно важно для статистических приложений. Поэтому усилия многих исследователей были направлены на расширение класса матриц X и ошибок u, при которых ОНК была бы асимптотически нормальной. При этом для достижения сходимости ОНК ее необходимо центрировать (путем вычитания β) и каким-либо образом нормировать. Разными авторами были предложены разные способы нормировки (классическая нормировка заключается в умножении $\hat{\beta} - \beta$ на $\sqrt{n}$), но никто не интересовался вопросом неулучшаемости. В [11] и [12] найдены неулучшаемые нормировки для регрессии без авторегрессивных членов и для авторегрессии, соответственно, причем во втором случае использовалась теория L_2-приближаемости.

В [5] заявлен результат для регрессии с двумя медленно меняющимися регрессорами $L_1,\ L_2$

$$y_t = \alpha + \beta_1 L_1(t) + \beta_2 L_2(t) + u, \tag{3}$$

из которого вытекает, что ОНК имеет два асимптотических типа. В [13] показано, что на самом деле ОНК для (3) имеет бесконечное число асимптотических типов.

Задача 4. Доказать L_p-приближаемость последовательностей, возникающих из медленно меняющихся функций, в случае регрессий, имеющих единичные корни, и вывести асмптотику ОНК для таких регрессий.

4 Применения к пространственной модели

Теория пространственных моделей осложняет (2) путем введения пространственого взаимодействия. Например, *чистая пространственная модель* имеет вид

$$y = \rho W y + u, \tag{4}$$

а *смешанная пространственная модель* имеет вид

$$y = \rho W y + X\beta + u, \tag{5}$$

где W – так называемая *пространственная матрица*, которая считается данной, а ρ – вещественный параметр, подлежащий оценке. Ряд авторитетных авторов в этой области заявляли результаты об асимптотической нормальности ОНК и ряда других оценок (максимального правдоподобия, метода моментов и др.) для (4), (5). Сложность этих моделей в том, что при их исследовании требуется анализировать асимптотику матрицы $(I - \rho W)^{-1}$. Вместо такого анализа, было общепринято налагать условия на поведение $(I-\rho W)^{-1}$. Используя условие L_2-приближаемости W, Мынбаев и Улла [14] впервые осуществили такой анализ и нашли асимптотику ОНК, которая не является нормальной. Таким образом, [14] опровергает ряд предыдущих результатов. Для модели (5) строгий вывод асимптотики (не являющейся нормальной) в предположении L_2-приближаемости W впервые дан в [15].

Задача 5. Вывести асимптотики для (4), (5) в случае, когда W имеет ненулевые элементы на главной диагонали и вдоль нее (т.е. $w_{ij} \neq 0$ для $|i - j| \leq k$, $w_{ij} = 0$ для $|i - j| > k$, где $k > 0$ фиксировано). Такая W не является L_2-приближаемой.

Все результаты автора, отмеченные выше, подытожены в монографии [16].

5 Непараметрическая оценка плотности

Плотность f_X случайной переменной X, как известно, удовлетворяет условиям $f_X \geq 0$, $\int f_X(t)dt = 1$. Задача состоит в оценке f_X по наблюдениям $X_1, ..., X_n$, не предполагая, что f_X принадлежит какому-то параметрическому семейству плотностей. Интуитивно, оценка $\hat{f}_X$ должна сходиться к f_X тем быстрее, чем глаже f_X. Традиционное доказательство этого факта получается путем использования ядер K, несколько моментов $\int K(t)t^m dt$ которых обращаются в нуль. Проблема с такими ядрами в том, что $\hat{f}_X$ может оказаться кое-где отрицательной. В [17] впервые был предложен метод, свободный от этого недостатка. Он опирается на интегральное представление с помощью разностей f_X высокого порядка и открывает путь к использованию пространств Бесова в характеристике гладкости f_X.

Задача 6. Перенести метод [17] на случай оценки производных $f_X^{(k)}$ и оценки f_X в ограниченной области.

6 Модели с ошибками измерения

Модели с ошибками измерения представляют собой обширную область статистики. В [18] была предложена новаторская оценка, допускающая различные ошибки в различных наблюдениях, включая будущее наблюдение. Задача об асимптотическом поведении этой оценки настолько сложна, что полное ее рассмотрение потребовало бы целой книги. В [19] в одном модельном случае (две разных ошибки в прошлых измерениях и еще одна в будущем) получено предельное распределение, которое оказывается нормальным.

Задача 7. Рассмотреть все оставшиеся случаи.

Литература

1 Moussatat M. W. On the asymptotic theory of statistical experiments and some of its applications / Ph.D. thesis. Univ. of California. – Berkeley, 1976.

2 Mynbaev K. T. L_p–approximable sequences of vectors and limit distribution of quadratic forms of random variables // Adv. Appl. Math. – 2001. – V. 26, №4. – P. 302-329.

3 Johansen S. A Bartlett correction factor for tests on the cointegrating relations // Econometric Theory. – 2000. – V. 16, №5. – P. 740-778.

4 Nielsen B. Strong consistency results for least squares estimators in general vector autoregressions with deterministic terms // Econometric Theory. – 2005. – V. 21, №3. – P. 534-561.

5 Phillips P. C. B. Regression with slowly varying regressors and nonlinear trends // Econometric Theory. – 2007. – V. 23, №3. – P. 557-614.

6 Mynbaev K. T. Central limit theorems for weighted sums of linear processes: L_p–approximability versus Brownian motion // Econometric Theory. – 2009. – V.25, №3. – P. 748-763.

7 Peligrad M., Utev S. Invariance principle for stochastic processes with short memory // IMS Lecture Notes – Monograph Series. High Dimensional Probability. – 2006. – V. 51. – P. 18-32.

8 Wu W. B. Nonlinear system theory: Another look at dependence // Proc. Natl. Acad. Sci. – USA, 2005. – V. 102. – P. 14150-14154.

9 Wu W. B., Min W. On linear processes with dependent innovations // Stochastic Process. Appl. – 2005. – V. 115. –P. 939-958.

10 Nabeya S., Tanaka K. A general approach to the limiting distribution for estimators in time series regression with nonstable autoregressive errors // Econometrica. – 1990. – V. 58, №1. – P. 145-163.

11 Mynbaev K. T., Castelar I. The strengths and weaknesses of L_2–approximable regressors. Two Essays on Econometrics. Vol. 1. – Fortaleza, Brazil: Expressão Grafica, 2001.

12 Mynbaev K. T. Asymptotic properties of OLS estimates in autoregressions with bounded or slowly growing deterministic trends // Commun. Stat. Theor. Methods. – 2006. – V. 35, №1-3. – P. 499-520.

13 Mynbaev K. T. Regressions with asymptotically collinear regressors // Econometrics Journal. – 2011. – V. 14. – P. 304-320.

14 Mynbaev K. T., Ullah A. Asymptotic distribution of the OLS estimator for a purely autoregressive spatial model // J. Multivar. Anal. – 2008. – V. 99. – P. 245-277.

15 Mynbaev K. T. Asymptotic distribution of the OLS estimator for a mixed regressive, spatial autoregressive model // J. Multivar. Anal. – 2010. – V. 10, №3. – P. 733-748.

16 Mynbaev K. T. Short–memory linear processes and econometric applications. – John Wiley & Sons, 2011.

17 Mynbaev K. T., Martins–Filho C. Bias reduction in kernel density estimation via Lipschitz conditions // Journal of Nonparametric Statistics. – 2010. – V. 22. – P. 219-235.

18 Carroll R. J., Delaigle A., Hall P. Nonparametric prediction in measurement error models // J. Amer. Stat. Assoc. – 2009. – V. 104. – P. 993—1003.

19 Mynbaev K. T., Martins–Filho C. Asymptotic distribution of the Carroll–Delaigle–Hall estimator in measurement error models // 8th World Congress in Probability and Statistics. – Istanbul, Turkey, July 9-14, 2012. – P. 87-88.

Статья поступила в редакцию 12.06.12

Мыңбаев К.Т. СТАТИСТИКАДАҒЫ КЕЙБІР ШЕШІЛГЕН ЖӘНЕ ШЕШІЛМЕГЕН ЕСЕПТЕР

Бұл шолуда векторлардың детерминистік тізбектер үлгілеу, олардың регрессияларға қолдану және параметрлі емес бағалаулар жөнінде кейбір нәтижелер қарастырылған. Әр жағдайда жаңа шешілмеген есептер келтірілген.

Mynbaev K.T. SOME SOLVED AND UNSOLVED PROBLEMS IN STATISTICS

We give a short review of some results on modeling deterministic sequences of vectors, their applications to regressions, and on nonparametric estimation. In each case new problems are posed.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.5

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова
Евразийский Национальный университет имени Л.Н.Гумилева
Казахстан, 010008, Астана, ул. Мунайтпасова 7, e-mail: er-nurs@yandex

О ВОССТАНОВЛЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ $W_p^\alpha[0,1]^n, E^\alpha[0,1]^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$

Посвящается глубокоуважемому Учителю
академику Мухтарбаю Отелбаеву

Для анизотропных пространств Соболева и Коробова построен оператор восстановления мультипликативных преобразований. Этот оператор является точным для тригонометрических полиномов со спектром из гиперболического креста. Доказывается, что погрешность восстановления по порядку совпадает с соответствующим поперечником.

Ключевые слова: *оператор восстановления функций, пространства с доминирующей смешанной производной, ортопоперечник.*

1 Введение

Пусть $f \in L_1[0,1]^n$ и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in Z^n}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Определим мультипликативное преобразование в виде формального ряда

$$f_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}. \tag{1}$$

Keywords: *Restoration operator of functions, spaces with dominant mixed derivative, ortho-diameter*

2010 Mathematics Subject Classification: 65D32; 41A55

Пусть (X, Y) – пара функциональных пространств 1–периодических функций, X вложено в $C[0,1]^n$, последовательность λ является мультипликатором из X в пространство Y, т.е. верно соотношение

$$\sup_{f \neq 0} \frac{\|f_\lambda\|_Y}{\|f\|_X} < \infty.$$

Задача заключается в нахождении узлов $\{t_k\}_{k=1}^M$ и функций $\{\phi_k(x,\lambda)\}_{k=1}^M$, чтобы скорость убывания погрешности

$$\sup_{\|f\|_X=1} \|f_\lambda - \sum_{k=1}^M f(t_k)\phi_k(x,\lambda)\|_Y$$

в метрике Y была возможно большей при возрастании M к бесконечности.

Данная постановка задачи объединяет задачи приближенного восстановления интегралов, коэффициентов Фурье, функций, дробных производных, дробных интегралов.

Так если $\lambda_k = 1$ при $k = (0, ..., 0)$ и $\lambda_k = 0$ при $k \neq (0, ..., 0)$, то это — задача численного интегрирования. Если $\lambda_k = 1$ при $k = (\mu_1, ..., \mu_n)$ и $\lambda_k = 0$ при $k \neq (\mu_1, ..., \mu_n)$, то соответствующий оператор восстанавливает коэффициенты Фурье $\hat{f}(\mu)$.

Если $\lambda = \{\bar{k}^\beta\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\bar{k}^\beta = \prod\limits_{j=1}^n \bar{k}_j^{\beta_j}$, $\bar{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}, j = \overline{1,n}$, то $f_\lambda = f^{(\beta)}$ и приходим к задаче восстановления функций при $\beta = 0$, дробной производной при $\beta > 0$, дробного интеграла при $\beta < 0$.

Пусть $1 < p < \infty$ и f — 1–периодическая функция из $L_p[0,1]^n$ с тригонометрическим рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$. Будем говорить, что $f \in W_p^\alpha[0,1]^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$, если найдется $f^\alpha \in L_p[0,1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$, где $\mu x := \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$, $\bar{k}^\alpha = \prod\limits_{j=1}^n \bar{k}_j^{\alpha_j}$, $\|f\|_{W_p^\alpha[0,1]^n} := \|f^\alpha\|_{L_p[0,1]^n}$.

Будем говорить, что $f \in E^\alpha[0,1]^n$, если конечна величина

$$\|f\|_{E^\alpha} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha |\hat{f}(k)|.$$

Задаче восстановления функций из классов с доминирующей смешанной производной посвящены работы [1-8]. Соответствующие операторы восстановления строятся либо рекуррентным образом [5, 6], либо используя оптимальные сетки Коробова [1-4, 7, 8], нахождение которых является самостоятельной задачей.

Определим ортопоперечник, введеный В.Н. Темляковым в [11] (см. так же [12, 13]):

$$d_M^{\perp}(X,Y)=\inf_{\{g_j\}_{j=1}^M}\sup_{\|f\|_X=1}\|f-\sum_{j=1}^M(f,g_j)g_j\|_Y.$$

Здесь точная нижняя грань берется по всевозможным ортонормированным системам $\{g_j\}_{j=1}^M$ из $L_\infty[0,1]^n$.

Целью данной заметки является построение оператора восстановления для анизотропных пространств в явном виде, для которого погрешность восстановления функций совпадала бы с порядком соответствующего ортопоперечника.

Мы рассматриваем задачу восстановления мультипликативных преобразований функций из классов $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E^\alpha[0,1]^n$, где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n):$

$$0<\alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_\tau<\alpha_{\tau+1}\le...\le\alpha_n \tag{2}$$

Пусть $\psi:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ неубывающая по каждой переменной функция т.е.

$$\psi(k_1,...,k_i,...,k_n)\le\psi(k_1,...,k_i+1,...,k_n),\quad i=\overline{1,n}.$$

Для функции f и последовательности λ определим преобразование

$$F_{m,\psi}(f,\lambda;x)=\sum_{\substack{\psi(k)=m\\k\in\mathbb{N}^n}}\frac{1}{2^{|k|}}\sum_{0\le r<2^k}f(\frac{r}{2^k})\phi_{k,r}(x+\frac{r}{2^k};\lambda)=$$

$$=\sum_{\substack{\psi(k)=m\\k\in\mathbb{N}^n}}\frac{1}{2^{|k|}}\sum_{0\le r<2^k}f(\frac{r_1}{2^{k_1}},\dots,\frac{r_n}{2^{k_n}})\phi_{k,r}(x_1+\frac{r_1}{2^{k_1}},\dots,x_1+\frac{r_n}{2^{k_n}};\lambda), \tag{3}$$

$$\phi_{k,r}(x;\lambda)=\sum_{0\le\nu\le k}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+1)sgn(k_j-\nu_j)}\sum_{\mu\in\rho(\nu)}\lambda_\mu e^{2\pi i\mu x}. \tag{4}$$

Здесь и далее $|k|:=k_1+\ldots+k_n$,

$$\rho(\nu)=\{\mu=(\mu_1,...,\mu_n)\in\mathbb{N}^n:\left[2^{\nu_j-2}\right]\le|\mu_j|<2^{\nu_j-1}\},$$

$[x]$ — целая часть числа x, а также $\nu\le\mu$ будет означать $\nu_j\le\mu_j,\ j=\overline{1,n}$.

При $\psi(k)=k_1+\ldots+k_n$ оператор $F_{m,\psi}(f,\lambda)$ был построен в работах [16 – 18], где была решена задача построения в явном виде оператора восстановления функций из изотропных пространств $W_p^\alpha[0,1]^n,\ E^\alpha[0,1]^n,\ \alpha=(\alpha,\ldots,\alpha)$. Кроме того, там было получено представление разности $f_\lambda(x)-F_{m,\psi}(f,\lambda;x)$ в явном виде в терминах тригонометрических коэффициентов Фурье функций f, оценка погрешности совпадала с порядком ортопоперечника в степеной шкале.

В случае анизотропных пространств, как было показано А.С. Теляковским [10], иногда целесообразно использовать тригонометрические полиномы со спектром из "не своих" гиперболических крестов. Здесь этот эффект так же имеет место. Для приближенного восстановления функций (мультипликативных преобразований функций) из анизотропных пространств $W_p^\alpha,\ E^\alpha$ мы будем использовать оператор (3), (4) с

$$\psi_0(k)=k_1+...+k_\tau+[\gamma(k_{\tau+1}+...+k_n)] \tag{5}$$

где $1<\gamma<\frac{\alpha_{\tau+1}}{\alpha_0}$.

При $1<p\le2\le q\le\infty$ показано, что

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1}\|f-F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}\sim d_M^\perp(W_p^\alpha,L_q),$$

здесь M – количество значений функции f, по которым строится оператор $F_{m,\psi_0}(f,1)$.

Мы также рассматриваем вопрос восстановления функций из пространства малой гладкости W_p^α при $\alpha\le1/p$, т.е. когда нет вложения в пространство непрерывных функций. В этом случае восстанавливать по значениям функции не имеет смысла, так как функции из этих классов определены разве лишь почти всюду. Поэтому возникает следующая постановка, являющаяся в некотором смысле обратной к задаче, сформулированной выше.

Пусть функция $f\in W_p^\alpha[0,1]^n$ и $f_\lambda=\sum_{k\in Z^n}\lambda_k\hat f(k)e^{2\pi ikx}$ – ее мультипликативное преобразование, где $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ мультипликатор из

$W_p^\alpha[0,1]^n$ в $C[0,1]^n$. Нужно приближенно восстановить функцию f по значениям f_λ.

Порядок приближения оператора восстановления $F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)};\lambda)$ по значениям дробного интеграла $f^{(-\beta)}$ также достигает порядка ортопоперечника (в этом случае порядок ортопоперечника совпадает с поперечником Колмогорова) в паре пространств (W_2^α, L_2).

Оператор $F_{m,\psi}(f,\lambda)$ является универсальным. Выбор функции ψ диктуется выбором пространства X, а точнее линией уровня убывания тригонометрических коэффициентов Фурье функций из этого пространства. Поэтому полученные в этой работе результаты можно распространить, например, на пространства H_p^Ω [14] и $E^\alpha_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ [15].

2 Восстановление мультипликативных преобразований

Теорема 1. *Пусть $F_{m,\psi}(\cdot,\lambda;x)$ – оператор, определенный равенствами (3),(4). Если $f(x)=\sum_{k\in G_m}\hat f(k)e^{2\pi ikx}$ – тригонометрический полином с гармониками из G_m, то*

$$f_\lambda(x)-F_{m,\psi}(f,\lambda;x)=0.$$

Для классов $W_p^\alpha[0,1]^n,\ E^\alpha[0,1]^n$ оценим погрешность восстановления частичных сумм Фурье $S_{G_m}(f_\lambda,x)=\sum_{\mu\in G_m}\hat\lambda_\mu f(\mu)e^{2\pi i\mu x}$ мультипликативного преобразования f_λ с помощью оператора $F_{m,\psi_0}(f,\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть $m\ge\psi_0(1)$, $F_{m,\psi_0}(f,\lambda)$ определен соотношениями (3)–(5). Если $1<p\le 2\le q\le\infty,\ \alpha_0>\frac{1}{p}$, то верна оценка*

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1}\|S_{G_m}(f_\lambda)-F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}\le$$

$$\le c2^{-\alpha_0 m}\max_{\psi_0(1)\le s\le m}\overline{(m-s)}^{\frac{\tau-1}{2}}\left(\max_{\mu\in\cup_{\psi_0(\nu)=s}\rho(\nu)}\bar\mu^{1/p-1/q}|\lambda_\mu|\right).$$

Если $\alpha_0>1,\ q\ge 2$, то верна оценка

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1}\|S_{G_m}(f_\lambda)-F_{m,\psi_0}(f,\lambda)\|_{L_q}\le$$

$$\le c\frac{1}{2^{\alpha_0 m}}\left(\sum_{s=\psi_0(1)}^{m}\overline{(m-s)}^{(\tau-1)q}\sum_{\psi_0(\nu)=s}\sum_{\mu\in\rho(\nu)}\bar{\mu}^{q-2}|\lambda_\mu|^q\right)^{1/q}.$$

Теорема 3. *Пусть* $m\ge\psi_0(1)$, $F_{m,\psi_0}(f,1)$ *определен соотношениями (3)–(5) при* $\lambda=\{1\}$, $M\sim m^{\tau-1}2^m$ *— количество узлов в определении* $F_{m,\psi_0}(f,1)$. *Если* $1<p\le 2\le q\le\infty$, $\alpha_0>\frac{1}{p}$, *то верно соотношение*

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1}\|f-F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}\sim\left(\frac{(\ln M)^{\tau-1}}{M}\right)^{\alpha_0-1/p+1/q}\sim d_M^{\perp}(W_p^\alpha,L_q).$$

Если $\alpha_0>1$, $q\ge 2$, *то верно соотношение*

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha}=1}\|f-F_{m,\psi_0}(f,1)\|_{L_q}\sim\frac{(\ln M)^{(\alpha+1/q-1/q')(\tau-1)}}{M^{\alpha_0-1/q'}}.$$

Следствие 1. *Пусть* $F_{m,\psi_0}(f,\lambda)$ *определен соотношениями (3)-(5). Пусть* $1<p\le 2\le q\le\infty$, $\alpha_0>\frac{1}{p}$. *Тогда если* $-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\beta<\alpha_0-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, *то верна оценка*

$$\|f^{(\beta)}-F_{m,\psi_0}(f,\bar{k}^\beta)\|_{L_q}\le C\frac{1}{2^{(\alpha_0-\beta-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})m}}\|f\|_{W_p^\alpha};$$

если $\beta\le-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, *то верна оценка*

$$\|f^{(\beta)}-F_{m,\psi_0}(f,\bar{k}^\beta)\|_{L_q}\le C\frac{m^{\frac{\tau-1}{2}}}{2^{\alpha_0 m}}\|f\|_{W_p^\alpha}.$$

Следствие 2. *Пусть* $F_{m,\psi_0}(f,\lambda)$ *определен соотношениями (3)-(5). Пусть* $2\le q\le\infty$, $\alpha_0>1$. *Тогда верны оценки*

$$\|f^{(\beta)}-F_{m,\psi_0}(f,\bar{k}^\beta)\|_{L_q}\le C\frac{m^{\frac{\tau-1}{q}}}{2^{(\alpha_0-\beta-\frac{1}{q'})m}}\|f\|_{E^\alpha}\ \text{при}\ -\frac{1}{q'}<\beta<\alpha-\frac{1}{q'},$$

$$\|f^{(\beta)}-F_{m,\psi_0}(f,\bar{k}^\beta)\|_{L_q}\le C\frac{m^{\tau-1}}{2^{\alpha_0 m}}\|f\|_{E^\alpha}\ \text{при}\ \beta<-\frac{1}{q'},$$

$$\|f^{(\beta)}-F_{m,\psi_0}(f,\bar{k}^\beta)\|_{L_q}\le C\frac{m^{\tau-1+\frac{\tau}{q}}}{2^{\alpha_0 m}}\|f\|_{E^\alpha}\ \text{при}\ \beta=-\frac{1}{q'}.$$

3 Восстановление функций из пространств малой гладкости

Здесь рассмотрим вопрос о восстановлении функций из класса $W_2^\alpha[0,1]^n$ при $\alpha_0 = \min_j \alpha_j \leq \frac{1}{2}$, т.е. когда нет вложения пространства $W_2^\alpha[0,1]^n$ в $C[0,1]^n$. В этом случае, как было отмечено во введении, восстановление по значениям функций в точках не имеет смысла.

Пусть $0 < \alpha_0, \beta < \infty$, $\alpha_0 + \beta > \frac{1}{2}$ и $f \in W_2^\alpha[0,1]^n$, тогда

$$f^{(-\beta)} = \sum_{k\in Z^n} \bar{k}^{-\beta}\hat{f}(k)e^{2\pi ikx} \in C[0,1]^n$$

и определен оператор

$$F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)},\bar{k}^\beta) = \sum_{\substack{\psi_0(k)=m\\ k_i\geq 1}} \frac{1}{2^{|k|}} \sum_{0\leq r<2^k} f^{(-\beta)}(\frac{r}{2^k})\times$$

$$\times \sum_{0\leq\nu_i\leq k_i} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+1)sgn(k_j-\nu_j)} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} \bar{\mu}^\beta e^{2\pi i\mu(x+\frac{r}{2^k})}.$$

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha_0,\ \beta < \infty,\ \alpha_0 + \beta > \frac{1}{2}$. Тогда верно соотношение*

$$\sup_{\|f\|_{W_2^\alpha}=1} \|f - F_{m,\psi_0}(f^{(-\beta)},\bar{k}^\beta)\|_{L_2} \sim \frac{1}{2^{m\alpha_0}} \sim d_M^\perp(W_2^\alpha, L_2).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, Гранты 0744/ГФ, 1080/ГФ (Нурсултанов Е.Д.) и 1412/ГФ (Тлеуханова Н.Т.).

Литература

1 Рябенький В.С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 131, №5. – С. 1025-1027.

2 Смоляк С.А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 131, №5. – С. 1028-1031.

3 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. – Москва: Физматгиз, 1963. – 255 с.

4 Hua Loo Keng, Wang Yuan. Applications of number theory to numerical analysis. – Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag, 1981. – 320 p.

5 Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 148, №5. – С. 1042-1045.

6 Темляков В.Н. Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных // Мат. сб. – 1985. – Т. 128, №2. – С. 256-268.

7 Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решение уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B. Дисс. ... к.ф.-м.н. – Алматы, 1998.

8 Ковалева И.М. Восстановление и интегрирование функций из класса Коробова // Сиб. журн. выч. матем. – 2002. – Т. 5, №3. – С. 255-266.

9 Бабенко К.И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 132, №5. – С. 982-985.

10 Теляковский С.А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // СМЖ. – 1963. – Т. IV, №6. – С. 1404-1411.

11 Темляков В.Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 267, №2. – С. 314-317.

12 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. – 1986. – Т. 178. – С. 1-112.

13 Галеев Э.М. Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 3. – С. 197-211.

14 Пустовойтов Н.Н. Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65, вып. 1. – С. 107-117.

15 Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д. Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости // Мат. сб. – 2003. – Т. 124, №10. – С. 133-160.

16 Тлеуханова Н.Т. О приближенном вычислении мультипликативных преобразований функций из класса Коробова и Соболева // Матем. журн. – Алматы, 2002. – Т. 2, №3. – С. 154-156.

17 Тлеуханова Н.Т. Интерполяционная формула для функций многих переменных // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74, вып.1. – С. 154-156.

18 Тлеуханова Н.Т. Интерполяционная формула для мультипликативных преобразований функций многих переменных // Доклады РАН. – 2003. – Т. 390, №2. – С. 169-171.

Статья поступила в редакцию 17.08.12

Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. $W_p^\alpha[0,1]^n, E^\alpha[0,1]^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МУЛЬТИПЛИКАТИВТІ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІНІҢ ҚАЙТА ҚАЛПЫНА КЕЛТІРІЛУІ ТУРАЛЫ

Анизотропты Соболев және Коробов кеңістіктері үшін мультипликативті түрлендіруді қайта қалпына келтіру операторы құрылған. Бұл оператор гиперболалық крестегі спектрлі тригономтериялық полиномдар үшін нақты болып табылады. Ретті қайта қалпына келтіру қателігі сәйкес көлденеңдіктермен беттесетіндігі көрсетілген.

Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. ON THE RESTORATION OF MULTIPLICATIVE TRANSFORMATION OF FUNCTIONS FROM THE SPACES $W_p^\alpha[0,1]^n, E^\alpha[0,1]^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$

We have constructed restoration operator of multiplicative transformations for anisotropic Sobolev and Korobov spaces. This operator is exact for trigonometric polynomials with spectrum in the hyperbolic cross. This statement shows that error of recovery order coincides with the corresponding diameter.

УДК 517.5

Р. Ойнаров
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Казахстан, 010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: o_ryskul@mail.ru

ОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ

Посвящается 70-летию академика НАН РК
Отелбаева Мухтарбая

Даны точные условия осцилляторности и неосцилляторности одного класса полулинейных дифференциальных уравнений и установлено одно неравенство типа Харди с наилучшей постоянной. Показано применение полученных результатов к спектральной теории оператора Штурма–Лиувилля.
Ключевые слова: *полулинейные дифференциальные уравнения, уравнения Штурма-Лиувилля, осцилляторность, неосцилляторность, весовое неравенство Харди.*

Введение

В 70-е годы прошлого века профессор М. Отелбаев активно использовал результаты Б. Макенхаупта [1] о неравенстве Харди в спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов, в теории вложения весовых пространств типа Соболева.

Один из его результатов относится к вопросу осцилляторности и неосцилляторности уравнения Штурма–Лиувилля и к вопросу существования

Keywords: *Half-linear differential equation, Sturm-Liouville equation, oscillateness, nonoscillateness, weighted Hardy inequality*
2010 Mathematics Subject Classification: 39A10, 47B38

конечных и бесконечных отрицательных дискретных спектров неотрицательного оператора Штурма–Лиувилля. Он был опубликован позже в монографии [2].

В те годы Мухтарбай Отелбаевич рассказывал своим ученикам о связи осцилляционных свойств уравнения Штурма–Лиувилля с его спектральными свойствами. Однако из-за широты спектра задач – по спектральной теории дифференциальных операторов; по гладкости решений линейных и нелинейных уравнений; по теории вложений весовых пространств типа Соболева; по теории оценки поперечников; по теории расширения и сужения операторов в Банаховых пространствах и т.д. – поставленных профессором М. Отелбаевым перед своими учениками, задача об осцилляции решений дифференциальных уравнений, как-то осталась вне зоны внимания его учеников.

В данной заметке, развивая первоначальную идею М. Отелбаева, для одного класса полулинейных уравнений второго порядка, на основе одного результата по неравенству Харди, установлены точные условия осцилляторности и неосцилляторности.

1 Постановка задачи

Пусть $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ и функции $\rho > 0$, $\upsilon \geq 0$ из $L_1(0,t)$, $t > 0$ таковы, что $\rho^{1-p'} \in L_1(0,t)$, $t > 0$ и существует $\omega > 0$ такое, что

$$\frac{1}{k}\int\limits_0^{k\omega} \rho^{1-p'}(s)ds = \int\limits_0^{\omega} \rho^{1-p'}(s)ds, \quad \frac{1}{k}\int\limits_0^{k\omega} \upsilon(t)dt = \int\limits_0^{\omega} \upsilon(t)dt > 0, \quad k \leq 1. \tag{1}$$

Очевидно, что условию (1) удовлетворяют, например, периодические функции с периодом ω и постоянная функция.

Рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение

$$\left(\rho(x)|u'|^{p-2}u'\right)' + \mu\frac{\upsilon(x)}{x^p}|u|^{p-2}u = 0, \quad x > 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) при $p = 2$ совпадает с линейным уравнением Штурма–Лиувилля вида

$$\left(\rho(x)u'\right)' + \mu\frac{\upsilon(x)}{x^2}u = 0, \quad x > 0. \tag{3}$$

Полулинейное уравнение (2) обладает многими свойствами линейного уравнения (3) (см. [3]). В частности, для уравнения (2) справедливы теорема сравнения Штурма и теорема Штурма о разделении нулей.

Пусть $(a,b) \subset I$. Уравнение (2) называется *уравнением без сопряженных точек на* (a,b), если любое его ненулевое решение имеет на (a,b) не более одного нуля, а в противном случае оно называется уравнением *с сопряженными точками на* (a,b).

Из теоремы Штурма о разделении нулей вытекает, что уравнение (2) осцилляторно при $x = \infty$, тогда и только тогда, когда оно при любом $a > 0$ является уравнением с сопряженными точками на интервале (a,∞) и неосцилляторно при $x = \infty$, если и только если существует число $a > 0$, что уравнение (2) – без сопряженных точек на интервале (a,∞).

2 Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и существует число* $\omega > 0$ *такое, что коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условию (1).*

Если $\mu \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p$, *то уравнение (2) – без сопряженных точек на интервале* (ω,∞).

Если $\mu > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p$, *то для любого* $a > 0$ *уравнение (2) – с сопряженными точками в интервале* (a,∞).

Здесь

$$K_p = \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \upsilon(t)dt\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \rho^{1-p'}\right)^{1-p}.$$

Из Теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть выполнено условие Теоремы 1. Тогда*
(i) *уравнение (2) неосцилляторно при* $x = \infty$, *тогда и только тогда, когда*

$$\mu \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p;$$

(ii) *уравнение (2) осцилляторно при* $x = \infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mu > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p.$$

Следствие 1. *Пусть $p=2$ и выполнено условие Теоремы 1. Тогда*
(i) уравнение (3) неосцилляторно при $x=\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\mu \leq \frac{1}{4}K_2;$$

(ii) уравнение (3) осцилляторно при $x=\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\mu > \frac{1}{4}K_2.$$

Отметим, что когда функции ρ, υ и ω – периодические, то за исключением случая равенства, утверждение Следствия 1 получено К.М. Шмидтом [4], а утверждение Теоремы 2 получено П. Хасилом [5] с использованием уравнения типа Риккати. В обеих работах случай равенства, т.е. соответственно случай $\mu = \frac{1}{4}K_2$, $\mu = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p$, был отмечен как *открытая проблема.*

Основная Теорема 1 доказывается вариационным методом и в существенной части используется следующий результат по неравенствам Харди, имеющий и немаловажное самостоятельное значение.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие Теоремы 1. Тогда для любого $k \geq 1$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{k\omega}^{\infty} \upsilon(x)\left(\frac{1}{x}\int\limits_{k\omega}^{x} f(s)ds\right)^p dx \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p \int\limits_{k\omega}^{\infty} \rho(x) f^p(x)dx, \quad f \geq 0,$$

причем постоянная $\left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p$ – наилучшая из возможных.

Теперь рассмотрим другое нелинейное уравнение вида (2)

$$\left(\rho(x)|u'|^{p-2}u'\right)' + \omega(x)|u|^{p-2}u = 0, \quad x > 0 \tag{4}$$

Применяя теорему сравнения Штурма на основании Теоремы 2 получаем критерий типа Кнезера.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие Теоремы 1. Тогда, если*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x^p\omega(x)}{\upsilon(x)} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p,$$

то уравнение (4) неосцилляторно при $x=\infty$, а если

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x^p\omega(x)}{\upsilon(x)} > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p K_p,$$

то уравнение (4) осцилляторно при $x=\infty$.

3 Приложение к спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля

Между осцилляционными свойствами решений дифференциального уравнения (3) и спектром любого самосопряженного оператора L, порождаемого операцией левой части (3), существует известная связь [6]. Так, например, множество точек отрицательного спектра оператора L будет конечным или бесконечным в зависимости от того будет ли уравнение (3) неосцилляторным или осцилляторным при $x=\infty$.

Так как для $x>0$ существует такое целое $k\geq 0$, что $kw\leq x\leq (k+1)w$ и

$$\int\limits_x^{x+w} v(t)dt \leq \int\limits_{kw}^{(k+1)w} v(t)dt + \int\limits_{(k+1)w}^{(k+2)w} v(t)dt = 2\int\limits_0^w v(t)dt,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_x^{x+w}\frac{v(t)}{t^2}dt = 0.$$

Поэтому на основании теоремы М.Ш.Бирмана (см. [6, стр. 138]) отрицательная часть спектра оператора L ограничена снизу и дискретна. Отсюда, на основании утверждения следствия 1, имеем

Теорема 5. *Пусть выполнено условие (1) при $p=2$. Тогда при*

$$\mu > \frac{1}{4}K_2$$

оператор L имеет бесконечное число отрицательных собственных значений (дискретный спектр) сгущающихся к нулю, а при

$$\mu \leq \frac{1}{4}K_2$$

отрицательный дискретный спектр оператора L – не более, чем конечен.

Пусть L' – самосопряженный оператор, порожденный операцией левой части (4). Из теоремы 4 имеем

Теорема 6. *Пусть выполнено условие теоремы 5. Тогда оператор L' имеет бесконечное количество отрицательных собственных значений с единственной предельной точкой нуль, если*

$$\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{x^2w(x)}{v(x)} > \frac{1}{4}K_2;$$

и не более конечного их числа, если

$$\overline{\lim}_{x\to\infty}\frac{x^2w(x)}{v(x)} < \frac{1}{4}K_2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки МОН РК, Грант 1529/ГФ по приоритетному направлению "Интеллектуальный потенциал страны".

Литература

1 Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights // Studia Math. – 1972. – V. 44. – P. 31-38.

2 Отелбаев М. Оценки спектра оператора Штурма–Лиувилля. – Алма-Ата: Ғылым, 1990. – 191 с.

3 Dosley O., Rehak P. Half-linear differential equations. – North-Holland, Math.Studies 202, 2005. – 517 p.

4 Schmidt K.M. Oscillation of the perturbed Hill equation and the lower spectrum of radially periodic Schrodinger operators in the plane // Proc.Amer.Math.Soc. – 1999. – V. 127. – P. 2367-2374.

5 Hasil P. Conditional oscillation of Half-linear differential equations with periodic coefficients // Arch. Math. (BRNO). – 2008. – V. 44. – P. 119-131.

6 Глазман Л.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз, 1963. – 340 с.

Статья поступила в редакцию 12.08.12

Ойнаров Р. ЖАРТЫЛАЙ СЫЗЫҚТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ТЕРБЕЛІМДІЛІГІ МЕН САЛМАҚТЫ ХАРДИ ТЕҢСІЗДІГІ

Жартылай сызықты дифференциалдық теңдеудің бір класының тербелімді және тербелімді емес болуының дәл шарттары берілген. Және ең кіші тұрақтымен бір Харди типтес теңсіздігі орнатылған.

Oinarov R. OSCILLATENESS OF SECOND ORDER HALF-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION AND WEIGHTED HARDY INEQUALITY

Sharp conditions of oscillateness and non-oscillateness of a class of half-linear differential equations were given. And one weighted Hardy inequality were established with the best constant.

УДК 517.968

М. А. Садыбеков
Институт математики, информатики и механики
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, e-mail: makhmud-s@mail.ru

ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Посвящается моему Учителю академику Мухтарбаю Отелбаеву, научившему нас сложное воспринимать как простое

Рассматриваются задачи для оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Кратко описывается современное состояние вопросов базисности системы корневых функций операторов с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Анонсируется результат о базисности системы собственных и присоединенных функций задач с периодическими и антипериодическими краевыми условиями для оператора Штурма-Лиувилля с симметричным потенциалом.
Ключевые слова: *оператор Штурма-Лиувилля, краевые задачи, собственные значения, собственные функции, базис Рисса, периодические граничные условия.*

1 Введение

Рассмотрим спектральные задачи для оператора Штурма–Лиувилля

$$Lu \equiv -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

с краевыми условиями общего вида:

$$a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, \qquad j = 0,1. \tag{2}$$

Keywords: *Sturm-Liouville operator, boundary-value problems, eigen values, eigen functions, Riesz basis, periodic boundary conditions*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05; 34B24; 34L10

Здесь $q(x) \in L_1(0,1)$ - комплекснозначная функция. Коэффициенты a_{jk} краевых условий (2) являются комплексными числами.

Как следует из теории корректных сужений и расширений, построенной М. Отелбаевым [1], краевые условия вида (2) являют собой самый общий вид корректных краевых условий для уравнения (1).

Пусть A - матрица, составленная из коэффициентов краевого условия (2): $A = (a_{jk})$. Через A_{jk} будем обозначать определитель матрицы, составленной из j-го и k-го столбцов матрицы A.

Краевые условия (2) называются *вырожденными* [2, стр. 35], если $A_{12} \neq 0, A_{34} = 0, A_{14} + A_{23} = 0$. В противном случае - *невырожденными*. Известно, что система собственных и присоединенных функций (СиПФ) невырожденной задачи Штурма–Лиувилля полна в $L_2(0,1)$ [2, стр. 41].

Краевые условия (2) называются *регулярными* по Биркгофу [2, гл. 2], если выполнено одно из следующих трех условий:

1) $A_{12} \neq 0$; 2) $A_{12} = 0,\ A_{14}+A_{23} \neq 0$; 3) $A_{12} = 0,\ A_{14}+A_{23} = 0,\ A_{34} \neq 0$.

При этом в первом и третьем случае все условия являются *усиленно регулярными*, а во втором случае — при дополнительном условии

$A_{14} + A_{23} \neq \pm[A_{13} + A_{24}]$.

Известно, что система СиПФ регулярной краевой задачи полна и минимальна в $L_2(0,1)$ [3, стр. 98]. В.П. Михайловым [4] и Г.М. Кесельманом [5] доказана базисность Рисса системы СиПФ задач с усиленно регулярными краевыми условиями. Также известно, что СиПФ задач с не регулярными условиями не могут образовывать никакого базиса в $L_2(0,1)$.

Таким образом, вопросы базисности системы СиПФ задачи Штурма-Лиувилля остались не завершенными только для задач с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. В [6] дано окончательное решение вопросов базисности для случая $q(x) \equiv 0$. В общем же случае В.А. Ильиным показано, что вопросы базисности системы СиПФ таких задач не могут быть решены в терминах коэффициентов краевых условий.

2 Регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия

В этом случае имеем $A_{12} = 0,\ A_{14} + A_{23} \neq 0,\ A_{14} + A_{23} = \pm[A_{13} + A_{24}]$. Без ограничения общности можем считать условия нормированными [3, стр. 66]. В силу равенства $A_{12} = 0$ это означает, что $a_{21} = a_{22} = 0$. Поэтому все регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11}u'(0) + a_{12}u'(1) + a_{13}u(0) + a_{14}u(1) = 0, \\ \hfill a_{23}u(0) + a_{24}u(1) = 0, \end{cases} \quad |a_{11}| + |a_{12}| > 0 \qquad (3)$$

Простейшим примером являются задачи с периодическими ($\theta = 0$) и антипериодическими ($\theta = 1$) краевыми условиями:

$$u'(0) - (-1)^{\theta}u'(1) = 0, \qquad u(0) - (-1)^{\theta}u(1) = 0, \qquad \theta = 0, 1. \qquad (4)$$

Хорошо известно, что при действительнозначном потенциале $q(x)$ обе эти задачи являются самосопряженными. Однако, существуют примеры комплекснозначных потенциалов $q(x)$, при которых система СиПФ спектральной задачи (1), (4) не образует никакого базиса в $L_2(0, 1)$.

Это демонстрирует неустойчивость свойств базисности СиПФ задач с неусиленно регулярными краевыми условиями при (даже малом) возмущении коэффициентов уравнения.

В этом направлении существенный результат получен А.С. Макиным [7]. Им показано, что если $A_{14} = A_{23}$ и $A_{34} \neq 0$, то система СиПФ задачи образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$ для любого потенциала $q(x) \in L_1(0, 1)$. Любые краевые условия, удовлетворяющие этим требованиям, эквивалентны условиям

$$u'(0) - (-1)^{\theta}u'(1) + a_{14}u(1) = 0, \qquad u(0) - (-1)^{\theta}u(1) = 0, \qquad \theta = 0, 1, \quad (5)$$

где $a_{14} \neq 0$. Для всех остальных случаев регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий система СиПФ может быть базисом при одном выборе $q(x)$, и не образовывать базис при другом выборе.

Нами предложен более наглядный способ выделения не усиленно регулярных краевых условий [8]. А именно, показано, что краевые условия (2) будут регулярными, но не усиленно регулярными если и только если они эквивалентны условиям (3), коэффициенты которых удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{array}{lll} I. & a_{11} = 1,\ a_{12} = -1, & a_{23} \neq a_{24}; \\ II. & a_{11} = 1,\ a_{12} = 1, & a_{23} \neq -a_{24}; \\ III. & a_{23} = 1,\ a_{24} = -1, & a_{11} \neq a_{12}; \\ IV. & a_{23} = 1,\ a_{24} = 1, & a_{11} \neq -a_{12}. \end{array} \qquad (6)$$

Этим описываются ***все*** регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия.

3 Базисность СиПФ периодических задач с симметричным потенциалом

Краевые условия (4) являются регулярными по Биркгофу, но не усиленно регулярными [3; гл. 2]. Поэтому при комплекснозначных $q(x)$ система СиПФ задачи (1), (4) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. Собственные значения задачи асимптотически расположены парами. Из [9, 10] следует, что двумерные подпространства, составленные из СиПФ, отвечающих попарно близким собственным значениям, образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$. Исследованию условий на $q(x)$, при которых СиПФ периодических задач образуют обычный базис Рисса, посвящены работы [11 - 13]. В [11] при $q(x) \in C^4[0,1]$, $q(0) \neq q(1)$ доказана базисность Рисса корневых векторов в $L_2(0,1)$. В [12] найдены условия базисности в $L_2(0,1)$ системы СиПФ в терминах порядка убывания коэффициентов Фурье функции $q(x) \in W_1^m(0,1)$, $q^{(l)}(0) = q^{(l)}(1)$, $l = 0,1,...,m-1$. В [13] для случая $q(x) \in W_1^p(0,1)$, $q^{(l)}(0) = q^{(l)}(1) = 0$, $l = 0,1,...,s-1, s \leq p$ доказан критерий базисности Рисса в $L_2(0,1)$ системы СиПФ в терминах порядка убывания коэффициентов Фурье функций $q(x), Q(x) = \int_0^x q(t)dt$, $S(x) = Q^2(x)$.

Нами дано обоснование базисности Рисса системы СиПФ периодической и антипериодической задач (1), (4) с симметричным потенциалом.

Теорема 1. *Если $q(x) \in L_1(0,1)$ и $q(x) = q(1-x)$ для почти всех $x \in (0,1)$, то система собственных и присоединенных функций задачи (1), (4) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. При этом задача может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций.*

Доказательство теоремы опирается на следующий интересный результат относительно собственных функций задачи Дирихле

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0, \tag{7}$$

и задачи Неймана

$$u'(0) = 0, \qquad u'(1) = 0 \tag{8}$$

для уравнения (1).

Лемма 1. *Если $q(x) \in L_1(0,1)$ и $q(x) = q(1-x)$, то все собственные и присоединенные функции задачи Дирихле (1), (7) и задачи Неймана (1), (8) обладают одним из свойств симметрии:*

$$u(x) = u(1-x) \qquad \text{или} \qquad u(x) = -u(1-x) \qquad \text{для всех} \qquad x \in [0,1]. \quad (9)$$

4 Другие задачи с симметричным потенциалом

Спектральные свойства задач с симметричным потенциалом во многом схожи со спектральными свойствами оператора двукратного дифференцирования.

Все вырожденные краевые условия (2) эквивалентны условиям вида

$$u'(0) + \alpha u'(1) = 0, \; u(0) - \alpha u(1) = 0, \qquad (10)$$

где α - произвольный комплексный параметр, не принимающий только двух значений [14].

Краевую задачу называют *вольтерровой*, если соответствующий ей линейный оператор L – обратим и L^{-1} – вполне непрерывный квазинильпотентный оператор. Вольтерровая задача не имеет собственных значений. Очевидно, что вольтерровые краевые задачи могут лежать только среди задач с условиями вида (10). Например, вольтерровыми являются задачи Коши (случаи $\alpha = 0$ и $1/\alpha = 0$). Б.Н. Бияровым и С.А. Джумабаевым показано [14], что задача (1), (10) в случае $\alpha \neq 0$ и $1/\alpha \neq 0$ является вольтерровой если и только если $q(x) = q(1-x)$.

Из результатов работы В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина [15] следует, что при $q(x) = q(1-x)$ спектр задачи

$$u'(0) - (-1)^{\theta} u'(1) = 0, \qquad u(0) - (-1)^{\theta} b u(1) = 0, \qquad \theta = 0, 1. \qquad (11)$$

для уравнения (1) при $b \neq -1$ полностью совпадает со спектром периодической задачи (1), (4).

По мнению автора, весьма интересной является задача установления полной эквивалентности спектральных свойств оператора двукратного дифференцирования и оператора, заданного выражением (1) с симметричным потенциалом.

Литература

1 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // ДАН СССР. – 1983. – Т. 271, №6. – С. 1307-1310.

2 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 331 с.

3 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

4 Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР. – 1962. – Т. 144, №5. – С. 981-984.

5 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Математика. – 1964. – №2. – С. 82-93.

6 Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by -D^2 // J. Math. Anal. And Appl. – 1990. – V. 146, №1. – P. 148-191.

7 Макин А.С. О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма–Лиувилля // Доклады РАН. – 2006. – Т. 406, №1. – С. 21-24.

8 Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сибирский матем. журнал. – 2012. – Т. 53, №1. – С. 180-186.

9 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций дифференциального оператора // Усп. мат. наук. – 1979. – Т. 34, №5. – С. 235-236.

10 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. – 1982. – №6. – С. 12-21.

11 Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64, №4. – С. 558-563.

12 Макин А.С. О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи // Доклады РАН. – 2006. – Т. 406, №4. – С. 452-457.

13 Велиев О.А., Шкаликов А.А. О базисности собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. – 2009. – Т. 85, №5. – С. 671-686.

14 Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №1. – С. 143-146.

15 Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // ДАН СССР. – 1982. – Т. 267, №2. – С. 310-313.

Статья поступила в редакцию 28.06.12

Садыбеков М.А. СИММЕТРИЯЛЫҚ ПОТЕНЦИАЛДЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ЕСЕБІ

Кесіндіде Штурм-Лиувилл операторы үшін есептер қарастырылған. Регулярлы бірақ күшейтілген регулярлы емес шекаралық шартты операторлардың түбірлік функцияларының базистігінің қазіргі ахуалы сипатталған. Симметриялық потенциалды Штурм-Лиувилл операторы үшін периодты және антипериодты шекаралық шарттарға сәйкес есептердің меншікті және ілеспе функциялар системасының базистігі расталған.

Sadybekov M.A. THE STURM-LIOUVILLE PROBLEMS WITH A SYMMETRIC POTENTIAL

We consider problems for the Sturm-Liouville operator on a finite interval. We describe the current state of issues for the basis of root functions system of operators with a regular, but not strongly regular boundary conditions. We announce the result on basis of the system of eigenfunctions and adjoint functions of the problems with periodic and antiperiodic boundary conditions for the Sturm-Liouville operator with a symmetric potential.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.982.254

А. М. Сарсенби
Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова
Казахстан,160012, Шымкент, пр.Тауке хана 5, e-mail: abzhahan@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ БАЗИСОВ

*Посвящается юбилею нашего Учителя
академика НАН РК М. Отелбаева*

Работа содержит краткий обзор результатов о базисах, безусловных базисах, базисах Рисса в банаховом и гильбертовом пространствах. Приведены примеры, сыгравшие важную роль в развитии теории базисов.
Ключевые слова: *абсолютный базис, базис Рисса, базис Бесселя, базис Гилберта, базис Бари.*

Введение

В предлагаемой заметке кратко освещены некоторые результаты абстрактной теории базисов банаховых и гильбертовых пространств. Литература посвященная этой тематике обширна. Мы же ограничились, в основном, сведениями из русскоязычной литературы.

Результаты по теории базисов широко используются в теории вейвлетов, в спектральной теории линейных операторов и т.д. Здесь же хочется отметить важность результатов о полноте корневых векторов дифференциальных операторов, принадлежащих М. Отелбаеву [1]. Отдельной темой стоят важные результаты по теории В.А. Ильина о базисности корневых векторов несамосопряженных дифференциальных операторов [2-7].

Keywords: *Absolute basis, Riesz basis, Bessel basis, Gilbert basis, Bari basis*
2010 Mathematics Subject Classification: 46A35; 46B15

Специфичны вопросы базисности систем экспонент, исследованию которых посвящены работы многих авторов (см. например [8, 9]).

Наше внимание обращено на наиболее общие результаты о базисах и безусловных базисах, на основополагающие работы Н.К. Бари [10] о базисах Рисса и на последущие работы, развивающие теорию Н.К. Бари.

Две системы функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, из класса $L_2(a,b)$ называют *биортогонально сопряженными*, если

$$(u_j, \upsilon_k) = \int_a^b u_j(x)\overline{\upsilon_k(x)}dx = \begin{cases} 0, j \neq k; \\ 1, j = k. \end{cases}$$

Систему $\{u_k(x)\}$ называют *минимальной*, если для нее существует биортогонально сопряженная система $\{\upsilon_k(x)\}$.

Всюду, в дальнейшем будем предполагать полноту и минимальность каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$. Минимальность $\{u_k(x)\}$ обеспечивает существование биортогонально сопряженной системы $\{\upsilon_k(x)\}$, а полнота $\{u_k(x)\}$ - единственность биортогонально сопряженной системы.

Для каждой функции $f(x) \in L_2(a,b)$ можно поставить в соответствие два биортогональных разложения:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(f, \upsilon_k)u_k \qquad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(f, u_k)\upsilon_k. \tag{1}$$

Если каждая функция $f \in L_2$ однозначно представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

в смысле нормы пространства L_2, то систему $\{u_k(x)\}$ называют *базисом*. Если одна из биортогонально сопряженных систем является базисом, то другая также является базисом.

Таким образом, если система $\{u_k(x)\}$ – базис, то биортогональные разложения (1) сходятся к функции $f(x)$ в смысле нормы L_2.

Легко показать, что если система $\{u_k(x)\}$ – базис, то существует такая положительная постоянная C_0, что выполняется неравенство $||u_k||||\upsilon_k|| \leq C_0$ для всех номеров k. Вопрос о справедливости обратного утверждения по сей день остается открытым.

Непосредственное изучение произвольных систем на предмет базисности оказалось нелегкой задачей.

Базис $\{u_k\}$ называют *безусловным*, если он остается базисом при любой перестановке его членов.

Систему $\{u_k(x)\}$ называют *бесселевой*, если $\sum_1^\infty |(f, u_k)|^2 < \infty, \forall f \in L_2$.

Систему $\{u_k(x)\}$ называют *гильбертовой*, если для любой последовательности $\{C_k\} \in l_2$, существует функция $f(x) \in L_2$, удовлетворяющая условию $(f, \upsilon_k) = C_k$.

Систему $\{u_k(x)\}$ называют *базисом Рисса*, если она является бесселевой и гильбертовой одновременно [10]. Известно, что если одна из биортогонально сопряженных систем бесселева , то другая гильбертова и наоборот.

Систему $\{u_k(x)\}$ называют *почти нормированной*, если существуют положительные числа α и β такие, что $\alpha \leq ||u_k|| \leq \beta$ для всех номеров k.

Теорема Лорча [11] гласит: *базис Рисса есть безусловный, почти нормированный базис.*

Изучение неортогональных систем очень часто предполагает выяснение следующих обстоятельств:

1) полнота и минимальность данной системы;

2) базисность;

3) безусловная базисность;

4) базисность Рисса.

В силу теоремы Лорча свойства безусловной базисности и базисности Рисса тесно связаны. Для полного выяснения обстоятельств, систему являющуюся базисом нужно дополнительно изучить на предмет бесселевости или гильбертовости.

Базис, являющийся бесселевой системой называют *базисом Бесселя.* Аналогично, базис являющийся системой Гильберта называют *базисом Гильберта.*

1 Полнота

Методы исследования систем функций на предмет полноты в настоящее время сильно развиты [12]. Достаточное развитие получили и вопросы полноты систем функций, связанных с несамосопряженными дифференциальными операторами (система собственных функций самосопряженного оператора с точечным спектром является полной ортонормированной).

Основополагающие результаты в этом направлении получены М.В. Келдышем [11, 13] и развиты многими другими математиками. Важное место занимают результаты М.Отелбаева [1].

2 Базисность

Имеются многочисленные исследования, посвященные вопросам базисности.

Теорема Банаха [14, с. 19]. *Для того чтобы система $\{x_n\}_1^\infty$ была базисом в банаховом пространстве X, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:*

а) $\{x_n\}$ полна в X;

б) $\{x_n\}$ минимальна;

в) существует постоянная $M > 0$, такая, что для любого $x \in X$

$$||\sum_{n=1}^{N}(x, y_n)x_n|| \leq M||x||, \quad N = 1, 2, ...,$$

где $\{y_n\}$ -система, биортогонально сопряженная к $\{x_n\}$.

Примеры ненормированных базисов не являющихся базисом Рисса строятся тривиально (теорема Лорча). Первый пример нормированного базиса в $L_2(-1, 1)$ не являющегося базисом Рисса (эта проблема была поставлена К.Н. Бари) был построен К.И. Бабенко [15] (пример условного базиса):

$$\{|x|^{-\alpha}e^{-inx}\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm ..., \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \tag{2}$$

Система (2) является базисом Бесселя. Биортогонально сопряженная система к системе (2) имеет вид

$$\{|x|^{\alpha}e^{inx}\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

М.Ш. Альтман [16] построил базис, не являющуюся ни базисом Бесселя, ни базисом Гильберта. Такая система получится, если переставить местами первые и четные элементы, только что выписанных систем и переписать их в несколько ином виде

$$\frac{|x|^\alpha}{\sqrt{2}n}, \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{\pi}}cosx, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}sinx, \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{\pi}}cos2x, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}sin2x, ..., \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{\pi}}cosmx, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}sinmx, .., \tag{3}$$

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2}n}, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}cosx, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}sinx, \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}cos2x, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}sin2x, ..., \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}cosmx, \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}sinmx, .. . \quad (4)$$

Каждая из этих систем является базисом в $L_2(-\pi, \pi)$, но ни одна из них не является ни бесселевой, ни гильбертовой системой.

Таким образом, существуют условные базисы (2), не являющиеся базисом Рисса (примеры К. И. Бабенко). Как уже отмечалось, система (2) является бесселевой системой (базисом Бесселя). Более того, существуют базисы (3), (4) не являющиеся ни бесселевой, ни гильбертовой системой (пример М.Ш. Альтман).

Теорема 1 (17). *В пространствах $C[a, b]$ и $L_p[a, b]$ при $p \geq 2$ существуют базисы Бесселя, а при $1 \leq p \leq 2$ базисы Гильберта, состоящие из ортонормированных (в смысле $L_2[a, b]$) элементов.*

3 Безусловные базисы

Дальнейшее развитие абстрактной теории базисов гильбертова пространства показало, что изучать безусловные базисы проще, чем обычные базисы.

Теорема 2 (14, с. 23). *Для того, чтобы полная и минимальная в банаховом пространстве X система $\{x_n\}_1^\infty$ являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная M, для которой при любом наборе чисел $\{\varepsilon_n\}_1^N$ с $\varepsilon_n = \pm 1$ для $1 \leq n \leq N, \quad N = 1, 2, ...,$ выполнялись неравенства*

$$||\sum_1^N \varepsilon_n (x, y_n) x_n|| \leq M||x||.$$

В пространстве L_p существуют безусловные ортонормированные базисы для всех $p: \ 1 < p < \infty$. В пространствах $L_1(a, b)$ и в $C(a, b)$ безусловных базисов не существует [14, с. 25].

Теорема 3 (17). *Всякий ограниченный сверху безусловный базис $\{x_k\}, ||x_k|| \leq \beta, k = 1, 2, ...$ в L_p является при $p \geq 2$ базисом Гильберта, а ограниченный снизу,$\|x_k\| \geq \alpha, \quad k = 1, 2, ...$ безусловный базис в L_p является базисом Бесселя при $1 < p \leq 2$.*

Как следствие, отсюда получается, что в L_q, $q = \frac{1}{1-p}$ при $p > 2$ не существует ограниченных сверху (в частности, нормированных) безусловных базисов Бесселя, а при $p < 2$ не существует ограниченных снизу (нормированных) безусловных базисов Гилберта.

Заметим, что для безусловного базиса $\{u_k\} \subset L_2$ сходятся ряды

$$\sum_{1}^{\infty} |(f, u_k)|^2 ||\upsilon_k||^2, \quad \sum_{1}^{\infty} |(f, \upsilon_k)|^2 ||u_k||^2$$

для $\forall f \in L_2, (u_j, \upsilon_k) = \delta_{kj}$.

Приведем еще один критерий безусловной базисности в $L_p(0,1)$.

Теорема 4 (14. с 24). *Для того, чтобы полная и минимальная в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ система $\{u_k\}$ являлась безусловным базисом в $L_p(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall f \in L_p(0,1)$ функция*

$$P(f) = \{\sum_{1}^{\infty}[(f, \upsilon_k)u_k]^2\}^{1/2}$$

была конечна почти всюду и выполнялось неравенство

$$B||f||_p \le ||Pf||_p \le A||f||_p, \quad (A > 0, B > 0 \quad \textit{не зависят от} \quad f).$$

4 Базисы Рисса

Оказывается, изучать базисы Рисса проще, чем безусловные базисы. Наиболее сильные результаты в этом направлении получены Н.К. Бари [10].

Теорема 5 (10). *Если система $\{u_k\}$ – базис Рисса, то найдутся такие константы $m > 0, M > 0$, что*

$$m||f||^2 \le \sum (f, \upsilon_k)^2 \le M||f||^2.$$

Часто применяют следующую теорему Н.К. Бари.

Теорема 6. *[10] Для того, чтобы система $\{u_k\}$ была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой всюду в L_2 определенный, ограниченный, обратимый, линейный оператор A, что*

$$Au_k = \varphi_k, \quad k = 1, 2..., \tag{5}$$

где $\{\varphi_k\}$ -полная ортонормированная система.

Н.К.Бари показала,что базис Рисса обладает следующим замечательным свойством.

Теорема 7 (10). *Если $\{u_k\}$ - базис Рисса, то всегда из $\sum C_k^2 < +\infty$ следует сходимость ряда $\sum C_k u_k$, и наоборот.*

С теоремой 6 тесно связана следущая

Теорема 8 (10). *Для того чтобы система $\{u_k\}$ была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы существовал всюду определенный, ограниченный, обратимый положительный эрмитов оператор B такой, что $u_k = B\upsilon_k$, $k = 1, 2, ...$, здесь $B = A^*A$, где A -оператор из теоремы 2, а υ_k - элементы биортогонально сопряженной системы.*

На практике часто используют свойство квадратической близости систем. Систему функций $\{\varphi_k\}$ называют *квадратически близкой* к $\{u_k\}$, если

$$\sum_1^\infty ||u_k - \varphi_k||^2 < +\infty \tag{6}$$

Н.К.Бари принадлежит следующий результат

Теорема 9 (10). *Всякая минимальная система, квадратически близкая к базису Рисса, есть базис Рисса.*

Заслуживает внимания следующая

Теорема 10 (18). *Если ряд $\sum \rho_n^2 = +\infty$ и $0 \le \rho_n \le \sqrt{2}$, то всегда можно найти две ортонормированные системы, для которых*

$$||\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}|| = \rho_k, \quad k = 1, 2, , ...$$

и такие, что одна из них полна, а другая нет (т.е. вторая не является базисом).

Базисы, квадратически близкие к ортонормированным базисам, М.Г. Крейн [19, 11] предложил называть *базисами Бари*. Базисы Бари выделяются следующим свойством.

Теорема 11. (М.Г. Крейн) *[11, с. 386] Для того, чтобы последовательность $\{u_k\}^\infty$ была базисом, квадратически близким к ортонормированному базису, необходимо и достаточно,чтобы существовали ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и оператор T, удовлетворяющие условиям:*

1) $\varphi_j = u_j - \varphi_j, \quad (j = 1, 2, ...)$,

2) Оператор $I + T$ обратим,

где T - вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий условию $\Sigma_1^\infty s_j^2(T) < \infty, s_j - s$-числа оператора T.

Приведем еще один пример, принадлежащий В.Ф. Гапошкину [20]. В пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ рассмотрим системы

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t(x) e^{inx}\}, \quad \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1}(x) e^{-inx}\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

где $t(x), t^{-1}(x) \in L_2(-\pi, \pi)$.

Сделаем несколько вводных замечаний. Если $f(x) \in L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, то сопряженная функция определена для почти всех t и имеет вид

$$\overline{f(x)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) ctg \frac{t}{2} dt.$$

Пусть дана некоторая, почти всюду положительная функция $\varphi(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Составим гармоническую функцию

$$\varphi(z) = \varphi(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r cos(t - x)} dt, \quad z = re^{ix}, \quad 0 \le r < 1,$$

сопряженную с которой обозначим $\psi(z) = \psi(r, x)$.

Если функция $\varphi(x) \equiv t^2(x)$ удовлетворяет условию $\varphi(r, x) \ge c\psi(r, x)$ при $c > 0$, то обе рассматриваемые системы – базисы в $L_2(-\pi, \pi)$. Причем

1) если $m \le |t(x)| \le M$, то они базисы Рисса;

2) если $m \le |t(x)|$, и не существует M такого, что $|t(x)| \le M$, то первая из рассматриваемых систем бесселева, но не гильбертова;

3) если $|t(x)| \leq M$, и не существует такого, что $m \leq |t(x)|$, то первая из рассматриваемых систем гильбертова, но не бесселева;

4) если не существует чисел $m, \quad M$ таких, что $m \leq |t(x)|$ и $|t(x)| \leq M$, то первая из рассматриваемых систем базис, но ни бесселева и ни гильбертова.

Таким образом, из изложенных результатов видим, что бывают условные (пример К.И.Бабенко, М.Ш.Альтмана) и безусловные базисы. Среди условных базисов бывают базисы Бесселя (пример К.И.Бабенко) и базисы, не являющиеся ни бесселевой, ни гильбертовой системой (пример М.Ш.Альтмана).

Вышеизложенный материал показывает, что для выяснения базисности Рисса данной системы нужно будет привлекать некоторые объекты извне. Например, чтобы воспользоваться теоремой 2 нужно построить оператор А, удовлетворяющий условиям теоремы и найти *ПОНС*, чтобы выполнялось равенство (5). Чтобы применить теорему 5, нужно найти такую минимальную систему, чтобы выполнялось условие (6).

5 Пример Е.И. Моисеева

В работе [21] Е.И. Моисеевым установлен критерий базисности в L_p конкретных систем синусов, косинусов и экспонент. Сформулируем этот результат в следующем виде.

Теорема 12 (21). *Пусть* $p \in (1, \infty)$. *Тогда система синусов*

$\{sin(n - \frac{\beta}{2})\theta\}, \ n = 1, 2, ...,$

образует базис в $L_p[0, \pi]$ *тогда и только тогда, когда* $\rho \in (-\frac{1}{p}, 2 - \frac{1}{p})$.

Поясним, что при $\beta < -\frac{1}{p}$ эта система не полна, а при $\beta \geq 2 - \frac{1}{p}$ - не минимальна. В случае $\beta = -\frac{1}{p}$ данная система полна, минимальна, но не базис. Но не понятна причина этого факта.

Заметим, что для биортогонально сопряженной системы $\{h_k^s(\theta)\}$ к системе синусов справедливы следующие оценки [21]:

$$|h_k^s(\theta)| \leq \left\{ \begin{array}{c} C, \quad \beta \in (-1, 1), k \geq 1, \\ C[cos\frac{\theta}{2}]^{1-\beta}, \quad \beta \in (1, 2), k \geq 1. \end{array} \right. \tag{7}$$

6 Наши результаты

Критерий базисности Рисса в терминах элементов самих биортогонально сопряженных систем.

На фоне недостатков, указанных в конце п. 4, определенный интерес может представлять следующая

Теорема 13. *Пусть полная и минимальная система $\{u_k(x)\} \subset L_2(a,b)$ удовлетворяет условию*

$$\|u_k\|_{L_\infty(a,b)} \leq C_1.$$

Тогда $\{u_k(x)\}$ – базис Рисса в $L_2(a,b)$, тогда и только тогда, когда биортогонально сопряженная система $\{\vartheta_k\}$ полна и выполнена оценка

$$\|\vartheta_k\|_{L_\infty(a,b)} \leq C_2.$$

Сформулированная теорема и оценка (7) для биортогонально сопряженной системы $\{h_k^s(\theta)\}$ к системе синусов (п. 5) позволяют утверждать следующее

Теорема 14. *Система синусов $\{sin(n-\frac{\beta}{2})\theta\}$, $n = 1, 2, ...$, образует базис Рисса в $L_2[0,\pi]$ тогда и только тогда, когда $\beta \in (-\frac{1}{2}, 1)$.*

При $\beta = -\frac{1}{2}$ система синусов полна и минимальна, но не образует базиса, поскольку, в силу сформулированного критерия, биортогонально сопряженная система $\{h_k^s(\theta)\}$ – не полна в $L_2[0,\pi]$ [21].

Теорема 15 (22). *Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - полная, минимальная, почти нормированная последовательность элементов гильбертова пространства H такая, что скалярные произведения $|(\varphi_k, \varphi_j)| \geq a > 0$, для всех достаточно больших номеров k, j. Тогда данная последовательность векторов не является безусловным базисом в H.*

В заключение автор выражает признательность члену-корреспонденту НАН РК, профессору М.А. Садыбекову, дискуссии с которым побудили работу над настоящей заметкой и существенно повлияли на общий вид окончательного результата.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект № 0264/ГФ; №0753/ГФ).

Литература

1 Отелбаев М. Оценки S-чисел и условия полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля // Матем. заметки. – 1979. – Т.25, №3. – С. 409-418.

2 Ильин В.А.,Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Сер.: Соврем.мат. и ее прил. Темат.обз. – М.: ВИНИТИ, 2006. – Т.96. – С.5-105.

3 Ломов И.С. Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестник МГУ. Сер. Мат.Мех. – 1992. – №5. – С. 33-43.

4 Курбанов В.М. Теорема об эквивалентных базисах для дифференциального оператора // Доклады РАН. – 2006. – Т. 406, №1. – С. 17-20.

5 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. К теории антиаприорных оценок в смысле В.А. Ильина // Доклады РАН. – 2008. – Т. 420, №3. – С. 316-319.

6 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Применение оценок антиаприорного типа в теории базисов гильбертова пространства // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, №5. – С. 665-671.

7 Сарсенби А.М. Критерий базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // Доклады РАН. – 2008. – Т. 419, №5. – С. 601-603.

8 Седлецкий А.М. Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями функций типа синуса // Матем. заметки. – 2011. – С. 894-913.

9 Билалов Б.Т. Система экспонент со сдвигом и задача А. Г. Костюченко // Сибирский. матем. журнал. – 2009. С. 279-288.

10 Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч.зап.МГУ. – 1951. – Т. 4, вып. 148. – С. 69-106.

11 Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

12 Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. – М., 1958. – 507 с.

13 Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 4(16). – С. 15-41.

14 Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. – М., 1984. – 496 с.

15 Бабенко К.И. О сопряженных функциях // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 62, №2. – С. 157-160.

16 Альтман М.Ш. О базисах в пространстве Гильберта // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 69, №4. – С. 483-485.

17 Вейц Б.Е. Системы Бесселя и Гильберта в пространствах Банаха и вопросы устойчивости // Изв. Вузов. Математика. – 1965. №2(45). – С. 7-23.

18 Бари Н.К. О полных системах ортогональных функций // Матем. сборник. – 1944. – 14(56). – С. 51-108.

19 Крейн М.Г. О базисах Бари в пространстве Гильберта // УМН. – 1957. – Т. 12, вып. 3(75). – С. 333-341.

20 Гапошкин В.Ф. Одно обобщение теорема М.Рисса о сопряженных функциях // Матем.сборник. – 1958. – Т. 46, №3. – С. 357-372.

21 Моисеев Е.И. О базисности системы синусов и косинусов // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 275, №4. – С. 794-798.

22 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Об одном необходимом условии базисности системы нормированных элементов в гильбертовом пространстве // Вестник Томского ГУ. – 2011. – №1 (13). – С. 44-47.

Статья поступила в редакцию 12.07.12

Сәрсенбі Ә.М. БАЗИСТЕРДІҢ АБСТРАКТЫЛЫ ТЕОРИЯСЫНА ҚАТЫСТЫ КЕЙБІР НӘТИЖЕЛЕР

Мақалада Банах, Гильберт кеңістіктеріндегі базистер, шартсыз базистер, Рисс базистері туралы негізгі нәтижелерге қысқаша шолу жасалған. Базистер теориясының дамуында маңызды рөл атқарған мысалдар келтірілген.

Sarsenbi A.M. CERTAIN RESULTS OF BASIS ABSTRACT THEORY

The work contains the brief review of results of basis, absolute basis, Riesz basis in Banach and Hilbertian spaces. The examples playing the important role in the development of basis theory were mentioned.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 3 (45).*

УДК 517.5

Е. С. Смаилов
Институт прикладной математики
Казахстан, Караганды, Университетская,28А, e-mail:esmukhanbet-s@yandex.ru

ОБЩИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

70-летию нашего Наставника
академика М.Отелбаева посвящается

В работе дается краткий обзор исследований по неравенствам разных метрик для полиномов по общим ортонормированным системам, их зависимости от геометрии спектра, а также применениям к теоремам вложения разных метрик между пространствами Лоренца.
Ключевые слова: *орто-нормальная система, неравенство разных метрик, пространство Лоренца, теорема вложения разных метрик.*

С.М. Никольским [1] для целых функций экспоненциального типа доказано неравенство разных метрик

$$\|Q_{\bar{\nu}}\|_q \le 2^n \prod_{k=1}^{n} \nu_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|Q_{\bar{\nu}}\|_p, 1 \le p < q \le +\infty, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма пространства $L_p(\mathbb{R}_n)$. Неравенство (1) сыграло существенную роль в развитии гармонического анализа. Оно справедливо

Keywords: *ortho–normal system, inequality of different metrics, Lorentz space, embedding theorem of different metrics*
2010 Mathematics Subject Classification: 41A17; 42C10

и для тригонометрических многочленов; перенесено на алгебраические, гармонические и полигармонические полиномы. Для полиномов $\Phi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ по произвольной ортонормированной ограниченной в совокупности системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ $(x \in [0,1])$ в [2], [3] доказано неравенство

$$\|\Phi_n\|_q \le C_{pq} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\Phi_n\|_p, \tag{2}$$

при $p = 2$, $q \in (2, +\infty)$; здесь $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. Позднее неравенство (2) установлено автором при $1 < p \le 2$, $p < q < +\infty$.

В [4] для тригонометрических полиномов из $\mathcal{T}_N = \{\mathrm{T}_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k e^{2\pi i n_k x} | \{n_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{Z}, \{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}\}$ установлено, что в случае $2 < p < q \le +\infty$

$$\|T_N\|_q \le C_{pq} N^{\frac{p}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\Phi_N\|_p, \tag{3}$$

в [5], [4] доказано, что

$$\sup_{T_N \in \mathcal{T}_N : \|T_N\|_p \le 1} \|T_N\|_q \asymp \begin{cases} N^{\frac{p}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & 2 < p < q \le +\infty, \\ N^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & 1 < p \le 2,\ p < q. \end{cases}$$

Классическая форма неравенства разных метрик для тригонометрических многочленов (1), (2) и неравенство (3) для тригонометрических полиномов с числом гармоник, не превосходящим N, при $2 < p < q \le +\infty$ являются экстремальными формами неравенства разных метрик и следствием геометрических свойств спектров указанных видов полиномов.

Поэтому нас интересовали следующие вопросы:

1. Форма зависимости неравенства разных метрик от геометрии спектра полинома;

2. Какими свойствами должны обладать ортонормированные системы, чтобы было возможно выявить такие зависимости?

3. Каким свойством должно обладать множество B, чтобы для полиномов

$$\Phi_B(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in B} a_{\bar{k}} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$$

неравенство разных метрик имело классический вид, с участием количества гармоник, для всех допустимых значений числовых параметров p и q?

Чтобы ответить на первые два вопроса нам придется дать некоторые определения.

Пусть $Q = [0,1]^n$ — куб в $\mathbb{R}^n$; $\Phi = \{\varphi_{\bar{m}}(\bar{x})\}_{\bar{m}\in A(\Phi)}$, $\bar{x} \in Q$ — ортонормированная система функций на Q; $A(\Phi) \subset \mathbb{Z}^n$ — бесконечное множество точек с целочисленными координатами, зависящее от конкретного вида системы Φ, в дальнейшем называемое *спектром системы* Φ.

Пусть $B \subset A(\Phi)$ — некоторое конечное множество. Каждый набор чисел $\{a_{\bar{k}} : \quad a_{\bar{k}} \neq 0, \quad \bar{k} \in B\}$ определяет полином по системе Φ:

$$T_B(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in B} a_{\bar{k}}\varphi_{\bar{k}}(\bar{x}).$$

Условно будем называть его *полиномом со спектром* B. Символ $|B|$ означает количество элементов множества B.

Определение 1. *Ортонормированная система* $\Phi = \{\varphi_{\bar{m}}(\bar{x})\}_{\bar{m}\in A(\Phi)}$, $\bar{x} \in Q$, *называется мультипликативной системой в широком смысле, если существует билинейное инъективное отображение* $T(\bar{k},\bar{m})$: $A(\Phi) \times A(\Phi) \to A(\Phi)$ *такое, что:*

а) $T(\bar{k},\bar{m}) = T(\bar{m},\bar{k})$*;*

б) $\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\varphi_{\bar{m}}(\bar{x}) = \varphi_{T(\bar{k},\bar{m})}(\bar{x}) \in \emptyset$, $\forall\bar{k},\bar{m} \in A(\Phi)$.

Любая ортонормированная мультипликативная в широком смысле система Φ ограничена в совокупности на Q.

Пусть $\Phi = \varphi_{\overline{k}}(x)_{\overline{k}\in A(\Phi)}$ — мультипликативная в широком смысле система, $x \in Q, B \subset A(\Phi)$ — произвольное конечное множество и $r \in \mathbb{N}$. Положим $B^1 = B, B^r = (B^{r-1})\sharp B = \{T(\overline{k},\overline{m}) | \overline{k} \in B^{r-1}, \overline{m} \in B\}$.

Мультипликативные в классическом смысле ортонормированные системы (тригонометрическая система, система Уолша, мультипликативная система Прайса и т.д.) удовлетворяют требованиям мультипликативности в широком смысле. Примером мультипликативной системы в широком смысле служит $\left\{e^{in_kx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$, где $\{n_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, таких, что $n_{k+1} - n_k = d$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, $d \in \mathbb{N}$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < q \le +\infty$, $\Phi = \{\varphi_{\bar{m}}(\bar{x})\}_{\bar{m} \in A(\Phi)}$ *— ограниченная на* Q *ортонормированная система и* B *— произвольное конечное множество из* $A(\Phi)$. *Тогда любой полином со спектром* B *по системе* Φ

$$T_B(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in B} a_{\bar{k}} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$$

удовлетворяет неравенству

$$\|T_B\|_{L_q(Q)} \le C_{pq} |B|^{\max\left(1, \frac{p}{2}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|T_B\|_{L_p(Q)}.$$

Такой "аномальный" вид неравенства разных метрик является следствием неравенства

$$\|T_B\|_{L_\infty(Q)} \le C_p |B|^{\frac{1}{2}} \|T_B\|_{L_p(Q)}, 2 < p < +\infty.$$

Это соотношение точно в смысле порядка: для любой одномерной ограниченной ортонормированной системы Φ на $[0,1]$

$$\sup_{\|\Phi_n\|_p \ne 0} \frac{\|\Phi_n\|_{L_\infty[0,1]}}{\|\Phi_n\|_{L_p[0,1]}} \ge C_p n^{\frac{1}{2}},\ 2 < p < +\infty.$$

Определение 2. *Пусть* $C \ge 1$ *и* $\mathcal{M} = \{B: \quad B \subset A(\Phi), |B| < \infty\}$ *— совокупность всевозможных конечных множеств точек спектра системы* Φ. *Множество*

$$A_C = \{B \subset \mathcal{M}: \quad |B^r| \le C \cdot r^n |B|\}$$

называется семейством C*—регулярных множеств относительно системы* Φ.

При $C = 1$ будем говорить, что $B \subset A_1$ являются регулярными множествами относительно системы Φ.

Пример 1. Множество $B_N = \{0, \pm 1, ..., \pm N\}$, $N \in \mathbb{N}$, является регулярным множеством относительно системы $\Phi = \left\{e^{ikx}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Пример 2. Пусть $B_N = \{n_1, n_2, ..., n_N\}$ при каждом $N \in \mathbb{N}$ есть конечная арифметическая прогрессия натуральных чисел: $n_k - n_{k-1} = d \in \mathbb{N}$,

$k = 2, ..., N$. Тогда множества B_N определяют семейство регулярных множеств относительно тригонометрической системы.

Пример 3. Множества $B_N = \{2, 2^2, ..., 2^N\}$, $N \in \mathbb{N}$, не являются C— регулярными множествами относительно тригонометрической системы.

Теперь ответим на 3-й из поставленных в начале вопросов.

Теорема 2. *Пусть $1 \leq p < q \leq +\infty$, $\Phi = \{\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\}_{\bar{k} \in A(\Phi)}$, $\bar{x} \in Q$— мультипликативная в широком смысле ортонормированная система. A_C — C—регулярное семейство множеств относительно системы Φ. Тогда для произвольного полинома $T_B(\bar{x}) = \sum\limits_{\bar{k} \in B} a_{\bar{k}} \varphi_{\bar{k}}(\bar{x})$ по системе Φ со спектром $B \in A_C$ имеет место следующее неравенство*

$$\|T_B\|_{L_q(Q)} \leq C_{pq} |B|^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|T_B\|_{L_p(Q)},$$

где $C_{pq} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Пусть $2 < p < q \leq +\infty$ и $\lambda(p) = \min\{2l : p \leq 2l, l \in \mathbb{N}\}$, $\alpha(p) = \max\{2l : 2l \leq p, l \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 3. *Пусть $2 < p < q \leq +\infty$ и $\Phi = \{\varphi_{\bar{k}}(\bar{x})\}_{\bar{k} \in A(\Phi)}$ — мультипликативная в широком смысле ортонормированная система. Тогда для полинома $T_B(\bar{x})$ по этой системе справедливо неравенство*

$$\|T_B\|_{L_q(Q)} \leq C_{pq} \left(\psi(B)\right)^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|T_B\|_{L_p(Q)},$$

где $\psi(B) = \min\left\{\left|B^{\frac{\alpha(p)}{2}}\right|^{\frac{p}{\alpha(p)}}, \left|B^{\frac{\lambda(p)}{p}}\right|\right\}$ и $C_{pq} > 0$ зависит от p и q.

Замечание 1. *Теорема 3 по сравнению с теоремой 1 определяет более точное неравенство разных метрик для полиномов по мультипликативным в широком смысле системам. Кроме того, значение числового множителя $\psi(B) = \min\left\{\left|B^{\frac{\alpha(p)}{2}}\right|^{\frac{p}{\alpha(p)}}, \left|B^{\frac{\lambda(p)}{p}}\right|\right\}$ в неравенстве разных метрик в теореме 3 может дать любое числовое значение между экстремальными значениями $|B|$ и $|B|^{\frac{p}{2}}$ в зависимости от структуры спектра полинома $T_B(\bar{x})$ по мультипликативной в широком смысле системе.*

Данное утверждение подтверждается следующим примером. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$T_N(x)=\sum_{k=1}^{N}e^{ikx}+\sum_{\nu=1}^{m}e^{i2^{N-m+\nu}\cdot x},$$

где $m=\left[\sqrt[l]{N}\right]$, $l\in\mathbb{N}$, $[a]$ — целая часть числа $a>0$.

Спектром этого многочлена является множество

$$B_N=\left\{1,2,...,N;2^{N-m+1},2^{N-m+2},...,2^N\right\}.$$

Пусть $p=4$, $q>4$, тогда согласно теореме 1

$$\|T_N\|_{L_q[0,2\pi)}\le C_qN^{2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{q}\right)}\|T_N\|_{L_4[0,2\pi)}.$$

Далее, согласно определению $\alpha(4)=\lambda(4)=4$. Поэтому

$$\left|B_N^{\frac{\alpha(4)}{2}}\right|^{\frac{4}{\alpha(4)}}=|B_N^2|,\quad \left|B_N^{\frac{\lambda(4)}{2}}\right|=|B_N^2|\asymp N^{1+\frac{1}{l}}.$$

Следовательно, $\psi(B_N)\asymp N^{1+\frac{1}{l}}$. Тогда по теореме 3 имеем

$$\|T_N\|_{L_q[0,2\pi)}\le C_q\left(N^{1+\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{q}}\|T_N\|_{L_4[0,2\pi)}.$$

Константа $C_q>0$ не зависит от l, поэтому управляя параметром l, мы можем изменить структуру множества B_N.

Содержание теорем 1–3 опубликовано в работах автора [6], [7].

Как было отмечено в самом начале, неравенство разных метрик в классическом виде при всех значениях p и q справедливо для полиномов

$$\Phi_m(x)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\varphi_k(x)$$

не для всех ортонормированных систем $\Phi=\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$. Поэтому спрашивается, какое свойство ортонормированной системы $\Phi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ обеспечивает справедливость неравенства

$$\|\Phi_m\|_{L_q[a,b]}\le C_{pq}m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\Phi_m\|_{L_p[a,b]},$$

при всех значениях параметров p и q: $1 \le p < q \le +\infty$, к тому же без требования мультипликативности системы.

Чтобы ответить на этот вопрос введем следующее

Определение 3. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ — *ортонормированная система, определенная на* $I = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. *Будем говорить, что система* Φ *является* N_p*–системой, если при всех* $p \in (1,+\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{x\in I}\left\|\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k(x)\varphi_k(\cdot)\right\|_{L_p(I)} \le C_p m^{1-\frac{1}{p}}, \forall m \in \mathbb{N},$$

где $C_p > 0$ *зависит лишь от указанного параметра.*

Примерами N_p–системы являются тригонометрическая система, система Уолша, (обобщенная) мультипликативная система Прайса, (обобщенная) система Хаара.

Пусть $L_{p\theta}(I)$ $(1 \le p \le +\infty,\ 0 < \theta \le +\infty)$ — пространство Лоренца. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < q < +\infty$, $0 < \theta$, $\tau \le +\infty$. *Тогда для полиномов* $\Phi_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k\varphi_k(x)$ *по* N_p*–системе* Φ *имеет место следующее неравенство разных метрик по сильным метрическим параметрам:*

$$\|\Phi_m\|_{L_{q,\tau}(I)} \le C_{pq\theta\tau} m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\Phi_m\|_{L_{p\theta}(I)}$$

где $C_{pq\theta\tau} > 0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p < +\infty$, $1 < \tau < \theta \le +\infty$. *Тогда для полиномов* $\Phi_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k\varphi_k(x)$ *по* N_p*–системе* Φ *имеет место следующее неравенство разных метрик по слабым метрическим параметрам:*

$$\|\Phi_m\|_{L_{p\tau}(I)} \le C_{p\theta\tau} \left\{log_2(m+1)\right\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} \|\Phi_m\|_{L_{p\theta}(I)},$$

где $C_{p\theta\tau} > 0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Пусть

$$E_m(f)_{L_{p\theta}(I)} = \inf\left\{ \left\| f - \sum_{k=0}^{m-1} a_k\varphi_k(\cdot)\right\|_{L_{p\theta}(I)} | \,\forall\ \{a_k\}_{k=0}^{m-1} \subset \mathbb{R} \right\}$$

наилучшее приближение функций f полиномами по системе $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ в метрике пространства Лоренца $L_{p\theta}(I)$.

С помощью неравенств установленных в теоремах 4 и 5 доказываются теоремы 6–9.

Теорема 6. *Пусть $1 < p < q < +\infty, 1 < \theta, \tau < +\infty$ и ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ является N_p–системой. Тогда $\forall \nu, l \in \mathbb{N}$, $l > \nu$, имеет место неравенство*

$$\|T_{2^l} - T_{2^\nu}\|_{L_{q\tau}(I)} \leq C_{pq\tau}\left\{ \sum_{k=\nu}^{l-1} 2^{k\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^{k+1}} - T_{2^k}\|^\tau_{L_{q\tau}(I)} \right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

для любой последовательности полиномов $T_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k\varphi_k(x)$, где константа $C_{pq\tau} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

Теорема 7. *Пусть $1 \leq p, \theta < +\infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ – N_p–система и $f \in L_{p\theta}(I)$. Если для некоторых $q \in (p, +\infty)$ и $\tau \in [1, +\infty)$ ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_k^\tau(f)_{L_{p\theta}(I)} < +\infty$$

сходится, то $f \in L_{q\tau}(I)$ и справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{q\tau}(I)} \leq C_{pq\theta\tau}\left\{ \|f\|_{L_{p\theta}(I)} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_k^\tau(f)_{L_{p\theta}(I)} \right]^{\frac{1}{\tau}} \right\},$$

где константа $C_{pq\theta\tau} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

В следующей теореме получены достаточные условия вложения разных метрик в пространства Лоренца по слабому параметру.

Теорема 8. *Пусть* $1 \le p < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ — N_p-*система и* $f \in L_{p\theta}(I)$. *Если при некотором* $\tau \in (1, \theta)$ *ряд*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(1-\frac{\tau}{\theta})} E_{2^{2^k}}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}(I)}$$

сходится, то $f \in L_{p\tau}(I)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{L_{p\tau}(I)} \le C_{p,\theta\tau} \left\{ \|f\|_{L_{p\theta}(I)} + \left[\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(1-\frac{\tau}{\theta})} E_{2^{2^\nu}}^{\tau}(f)_{L_{p\theta}(I)} \right]^{\frac{1}{\tau}} \right\},$$

где константа $C_{pq\theta\tau} > 0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Теорема 9. *Пусть* $1 \le p < +\infty, 1 < \theta \le +\infty$, $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ — N_p-*система и* $f \in L_{p\theta}(I)$. *Если при некотором* $\tau \in (1, \theta)$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k^{\tau}(f)_{L_{p\theta}(I)}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}}$$

сходится, то $f \in L_{p\tau}(I)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{L_{p\tau}(I)} \le B_{p\theta\tau} \left\{ \|f\|_{L_{p\theta}(I)} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k^{\tau}(f)_{L_{p\theta}(I)}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right]^{\frac{1}{\tau}} \right\},$$

где константа $B_{p\theta\tau} > 0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Литература

1 Никольский М.С. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функции многих переменных // Труды МИ АН СССР. – 1951. – Т. 38. – С. 244-278.

2 Смаилов Е.С. Теоремы вложения для функциональных пространств с ортогональным базисом / Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. – Алма-Ата, 1973. – 22 с.

3 Смаилов Е.С. Теоремы вложения для функциональных пространств с ортогональным базисом // Теоремы вложения и их приложения: материалы всесоюз. симпозиума. – Алма-Ата: Наука, 1976. – С. 145-148.

4 Родин В.А. Неравенства для тригонометрических полиномов с лакунами в пространствах L_p // Исследования по теории функции многих переменных. – Ярославль: изд. ЯГУ, 1990. – С. 128-133.

5 Белинский Э.С. Две экстремальные задачи тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49, №1. – С. 12-18.

6 Смаилов Е.С. О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С.М. Никольского // Сибирский мат. журнал. – 1998. – Т.39, №5. – С. 1157-1163.

7 Смаилов Е.С. Кратные ортогональные ряды и мультипликаторы Фурье. – Караганды, 2006. – 131 с.

Статья поступила в редакцию 30.07.12

Смайылов Е.С. ЖАЛПЫ ОРТОГОНАЛДЫ ҚАТАРЛАР ЖӘНЕ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ ӘРТҮРЛІ МЕТРИКАЛЫ ЕНГІЗУ ТЕОРЕМАЛАРЫ

Жұмыста жалпы ортонормалды жүйелер бойынша полиномдар үшін әртүрлі метрикалы теңсіздіктер, олардың спектр геометриясына байланысы, сонымен қатар Лоренц кеңістіктері арасында әртүрлі метрикалы енгізу теоремаларына қолдануы туралы зерттеулеріне қысқаша шолу берілген.

Smailov E.S. GENERAL ORTHOGONAL SERIES AND EMBEDDING THEOREMS OF DIFFERENT METRICS IN LORENTZ SPACES

In the paper a brief overview of researches on inequalities of different metrics for polynomials with respect to general orthogonal systems, on their dependence of the spectra geometry and of applications to embedding theorems of different metrics between Lorentz spaces are given.

УДК 517.969

А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева
Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова,
Казахстан, 160012, Шымкент, пр. Тауке-хана, 5, e-mail: shaldanbaev51@mail.ru

О ДВУКРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Посвящается 70-летию нашего Учителя
академика Мухтарбая Отелбаева

Получен критерий двукратности собственных значений оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке.
Ключевые слова: *оператор Штурма–Лиувилля, двукратные собственные значения.*

1 Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу, порождаемую на интервале $(0,1)$ уравнением Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1); \tag{1}$$

и двумя $(i = 1,2)$ линейно независимыми граничными условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, (i = 1,2), \tag{2}$$

где $a_{ij}\,(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ - произвольные комплексные числа.

Keywords: *Sturm-Liouville operator, double eigen values*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05; 35J25

Фундаментальная система решений уравнения (1), определяемая условиями: $y_1(\lambda,0)=y_2'(\lambda,0)=1$; $y_1'(\lambda,0)=y_2(\lambda,0)=0$ имеет вид

$$y_1(\lambda,x)=cos\sqrt{\lambda}x,\quad y_2(\lambda,x)=(sin\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda}$$

Удовлетворяя общее решение $y(\lambda,x)=Ay_1(\lambda,x)+By_2(\lambda,x)$ уравнения (1) краевым условиям (2), легко получить, что собственные значения задачи совпадают с корнями его характеристического определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}+a_{13}y_1(\lambda,1)+a_{14}y_1'(\lambda,1) & a_{12}+a_{13}y_2(\lambda,1)+a_{14}y_2'(\lambda,1) \\ a_{21}+a_{23}y_1(\lambda,1)+a_{24}y_1'(\lambda,1)] & a_{22}+a_{23}y_2(\lambda,1)+a_{24}y_2'(\lambda,1) \end{vmatrix}=0.$$

Так как вронскиан $W[y_1,y_2]=y_1(\lambda,x)y_2'(\lambda,x)-y_1'(\lambda,x)y_2(\lambda,x)\equiv 1$, то

$$\Delta(\lambda)=\Delta_{12}+\Delta_{34}+\Delta_{13}(sin\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}+(\Delta_{14}+\Delta_{32})cos\sqrt{\lambda}-\Delta_{42}\sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda},$$

где $\Delta_{ij}=a_{1i}a_{2j}-a_{2i}a_{1j}$ - минор, составленный из i-ого и j-ого столбцов матрицы коэффициентов граничных условий $\{a_{ij}\}$.

Определение 1. *Собственное значение λ_0 краевой задачи (1) – (2) назовем двукратным, если ему соответствуют два линейно независимых решения этой задачи.*

Определение 2. *Краевая задача (1) – (2) называется регулярной по Бирхгофу [1, с. 73] при выполнении одного из следующих трех условий:*

1. $\Delta_{24}\equiv a_{12}a_{24}-a_{14}a_{22}\neq 0$;

2. $\Delta_{24}=0,\quad |a_{12}|+|a_{14}|>0,\quad a_{14}a_{21}+a_{12}a_{23}\neq 0$;

3. $a_{12}=a_{14}=a_{22}=a_{24}=0,\ \Delta_{13}\equiv a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}\neq 0$.

Основной результат Д. Бирхгофа [2] состоит в следующем: *Если краевые условия регулярны и если все собственные значения оператора L являются простыми нулями характеристического оператора $\Delta(\lambda)$, то всякая функция $y(x)$ из области определения оператора L разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этого оператора.*

Так как область определения оператора L плотна в $L^2(0,1)$, то отсюда следует, что при перечисленных выше условиях собственные функции оператора L образуют полную систему в $L^2(0,1)$.

ПРОБЛЕМА. *Предположим, что краевая задача (1) – (2) имеет хотя бы одно двукратное собственное значение λ_0, тогда какими будут граничные условия этой задачи?*

То есть, по сути рассматривается обратная задача. В настоящей работе методами, изложенными в [3], полностью решена эта проблема.

2 Вспомогательные предложения

Лемма 1. *Если задача (1) – (2) имеет хотя бы одно отличное от нуля двукратное собственное значение $\lambda_0 \neq 0$, то имеют место соотношения:*

$$1.\ \Delta_{12} = \Delta_{34}; \quad \Delta_{14} = \Delta_{32};$$

$$2.\ \Delta_{24} \neq 0;\ \Delta_{13} \neq 0;\ \Delta_{12} \neq 0; \tag{3}$$

$$3.\ sin\sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{24}}} = -\frac{\sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2}}{\sqrt{\Delta_{12}}}; \quad cos\sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{24}}} = -\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{12}},$$

при этом $\lambda_0 = \Delta_{13}/\Delta_{24}$.

Лемма 2. *Если миноры Δ_{ij} граничной матрицы (3) удовлетворяют условиям (4), то задача (1) – (2) имеет одно двукратное собственное значение отличное от нуля и равное по величине $\lambda_0 = \Delta_{13}/\Delta_{24}$.*

3 Основные результаты

Теорема 1. *Краевая задача Штурма - Лиувилля (1) – (2) с линейно независимыми краевыми условиями имеет одно двукратное собственное значение $\lambda_0 \neq 0$, отличное от нуля тогда и только тогда, когда миноры Δ_{ij} граничной матрицы (3) удовлетворяют условиям (4) и это двукратное значение имеет вид $\lambda_0 = \Delta_{13}/\Delta_{24}$.*
В этом случае условия (2) эквивалентны граничным условиям

$$\begin{cases} \Delta_{14}y(0) + \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{12}y(1) = 0, \\ \Delta_{12}y(0) + \Delta_{14}y(1) - \Delta_{24}y'(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 2. *Если краевая задача (1)–(2) имеет не менее двух различных двукратных собственных значений, отличных от нуля, то граничные условия такой задачи эквивалентны граничным условиям*

$$y(0) + ky(1) = 0, \qquad y'(0) + ky'(1) = 0 \tag{5}$$

где $k^2 = 1$, т. е. это есть периодические (при $k = -1$) или антипериодические (при $k = 1$) граничные условия.

Теорема 3. *Если $\lambda = 0$ является двукратным собственным значением оператора Штурма-Лиувилля (1)–(2), то граничные условия этого оператора имеют вид*

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) - y(1) = 0, \\ y'(0) - y'(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 4. *Краевая задача Штурма-Лиувилля (1)–(2) с линейно независимыми краевыми условиями имеет:*

а) либо лишь одно двукратное собственное значение, тогда граничные условия (2) эквивалентны граничным условиям (5), где $\Delta_{24} \neq 0$ и двукратное собственное значение равно $\lambda_0 = \Delta_{13}/\Delta_{24}$.

б) либо бесконечное множество двукратных собственных значений, тогда граничные условия (2) эквивалентны граничным условиям (6), где $k^2 = 1$.

Теорема 5. *Если известны все собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...$ задачи Штурма-Лиувилля (1)–(2), и $\lambda_0 \neq 0$ – отличное от нуля двукратное собственное значение, то условия (2) эквивалентны граничным условиям (5), где*

$$\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{12}} = -cos\sqrt{\lambda_0}, \quad \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{12}} = \frac{cos\sqrt{\lambda_0} - 2}{\lambda_0},$$

если $2\Delta_{12} + \Delta_{13} + 2\Delta_{14} = 0$;

или

$$\frac{\Delta_{24}}{\Delta_{12}} = \frac{12tr(L^{1-})cos\sqrt{\lambda_0} - 12tr(L^{-1}) - 6cos\sqrt{\lambda_0}}{6\lambda_0 tr(L^{-1}) + 6 - \lambda_0},$$

если $2\Delta_{12} + \Delta_{13} + 2\Delta_{14} \neq 0$. Здесь $tr(L^{-1}) = \frac{1}{\lambda_0} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$.

Литература

1 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

2 Birkoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – V. 9. – P. 219-231.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнения с отклоняющимся аргументом // Математический журнал. – Алматы, 2004. – Т. 4, №3(13). – С. 41-48.

Статья поступила в редакцию 25.07.12

Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІ ЕКІ ЕСЕЛІ БОЛУЫ ЖАЙЛЫ

Бұл еңбекте Штурм-Лиувилль операторының меншікті мәндерінің екі еселі болуының критериі алынған.

Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. ABOUT THE DOUBLE EIGENVALUES OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR

In this paper a criterion for a double eigenvalue of the operator of the Sturm-Liouville is received.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении нужно отразить актуальность, новизну, имеющиеся результаты по теме представленной работы. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНИТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1 Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2 В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3 Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":
Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №3 (45), 2012

Адрес редакции:
Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: http://www.math.kz

Подписано в печать 20.09.2012 г.
Тираж 300 экз. Объем 192 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

г. Алматы
пр. Достык, 85а, офис 309б
Тел./факс: 8 (727) 2 91 55 24, 2 72 03 88
e-mail: la_creation@inbox.ru,
web-site: http://www.lacreation.kz