ISSN 1682—0525

*М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ  Ж У Р Н А Л*

# М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

*M A T H E M A T I C A L  J O U R N A L*

2002 том 2 № 2

Институт математики МО и Н РК
Алматы

*Министерство образования и науки Республики Казахстан*

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 2 № 2 2002

Периодичность — 4 номера в год



*Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 205*
*Телефон 8-(3272)-91-19-04*, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 2, № 2, 2002**

## ХРОНИКА

*УДК 532.517.4*

# О ПУЛЬСАЦИОНОЙ СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В ИСКРИВЛЕННЫХ КАНАЛАХ

У. С. Абдибеков, А. Е. Максутова

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, uali@math.kz

Предлагается полуэмпирическая модель, построенная на основе уравнений для одноточечных моментов второго порядка для полей скорости и концентрации, для замыкания уравнения Рейнольдса для сдвиговых турбулентных течений. Полученные аналитические выражения пульсационных характеристик турбулентного потока зависят от характеристик основного течения и функций, учитывающих двойное влияние сил плавучести и центробежных сил, вызванных наличием концентраций в потоке и кривизной канала соответственно.

Турбулентным моделям переноса концентрации в потоке посвящены работы [1–6]. Известные модели учитывают только силы плавучести и их применение в практических целях ограничено. Турбулентные течения в каналах с поворотными зонами и изгибами также хорошо изучены. В настоящее время практический интерес представляют течения с концентрацией в искривленных каналах. Для правильного понимания и описания оседания концентраций вещества в таких потоках необходимо учитывать не только архимедовы силы, но и центробежные силы, появляющиеся на поворотах и в изгибах каналовых течений. Первая попытка учесть влияние кривизны канала на структуру пульсации примеси была предпринята в работе [7], где были сформулированы и получены алгебраические уравнения для моментов второго порядка. При этом учитывается кривизна потока, где радиус-вектор совпадает с направлением силы тяжести. Это несколько упрощает задачу, так как общее взаимодействие силы тяжести и центробежной силы происходит в одной плоскости и не оказывает влияние на распределение пульсации на других направлениях. Обычно такой учет кривизны применим только для прямого канала с волнистым дном. Практический интерес представляет течение в каналах с поворотными зонами, где центробежная сила действует в горизонтальной плоскости, а сила тяжести в вертикальной. В рассматриваемой проблеме основной задачей является получение в явном виде выражения турбулентных характеристик через средние характеристики турбулентного потока. Для этого привлекаются уравнения напряжений Рейнольдса [8, 9]:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{\frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\nu\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i u_j} + \overline{\frac{P}{\rho}\left(\delta_{jk}u_i + \delta_{ik}u_j\right)}\right] + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + F_{ui} = 0. \qquad (1)$$

Keywords: *sheared turbulence flow, Reynolds stresses, secondary moments*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

Для учета влияния концентрации используются дополнительные уравнения для моментов второго порядка полей концентраций, приведенные в работе [7],

$$\frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_k} + \overline{u_k q}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial Q}{\partial x_k} - \overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x_i}} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\nu \frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i q} + \overline{\frac{P}{\rho} q}\right] + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} + F_{qi} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_k} + 2\overline{u_k q}\frac{\partial Q}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-a\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_k} + \overline{u_k q^2}\right] + 2d\overline{\frac{\partial q}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = 0, \tag{3}$$

где $\tau$ — время, $P$ — давление, $U_i$, $u_i$ — компоненты средней и пульсационной скорости соответственно по осям $x_i$, $Q$, $q$ — средняя и пульсационная характеристика концентраций. В однородных течениях имеется, в силу симметрии, шесть компоненты тензора напряжений Рейнольдса $u_i u_j$, три компонент корреляций для учета концентрации вида $u_i q$ и дополнительно уравнение для $q^2$. Очевидно, что уравнения, кроме средней скорости и моментов второго порядка, содержат ряд новых неизвестных. Для определения некоторых членов системы уравнения используются приближенные полуэмпирические соотношения. Выражения для обмена энергией между различными компонентами пульсаций представляются в виде [10, 11]

$$\overline{\frac{P}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} = -k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right), \quad \overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = -k_q\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i q}. \tag{4}$$

Для диссипации пульсационной энергии и их аналогов используются следующие выражения:

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l} + \nu c_\nu \frac{u_i^2}{l^2}\ , \quad 2\nu\overline{\frac{\partial q}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = c_q\frac{q^2\sqrt{E}}{l^2} + dc_{\nu q}\frac{\overline{q^2}}{l^2}\ , \tag{5}$$

а для вторых моментов уравнения принимают вид:

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \nu c_\nu \frac{u_i u_j}{l^2}\ , \quad 2d\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial q}{\partial x_k}} = dc_{\nu q}\frac{\overline{u_i q}}{l^2}\ . \tag{6}$$

В рассматриваемом случае изменения плотности малы и поэтому в массовых переменных используется приближение Буссинеска. Внешние силы, представленные в виде суммарных сил имеют вид:

$$F_{ui} = \frac{U_1}{R}\delta_{3i}\overline{u_1 u_j} - \frac{U_1}{R}\delta_{1j}\overline{u_3 u_i} + \lambda g\left(\delta_{2i}\overline{q u_j} + \delta_{2i}\overline{q u_i}\right), \quad F_{qi} = g\delta_{3i}\lambda\overline{q^2}.$$

Уравнения для моментов второго порядка переноса примеси в искривленных каналах, записанные для полностью развитого турбулентного сдвигового течения с учетом центробежной силы, сил плавучести и гипотез (4)–(6), примет вид

$$\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right) + \frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l} +$$

$$+\frac{U_1}{R}\delta_{3i}\overline{u_1 u_j} - \frac{U_1}{R}\delta_{1j}\overline{u_3 u_i} + \lambda g\left(\delta_{2i}\overline{q u_j} + \delta_{2i}\overline{q u_i}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\overline{u_k q}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i}\frac{\partial Q}{\partial x_k} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i q} + g\delta_{i3}\lambda\overline{q^2} = 0, \quad \overline{u_k q}\frac{\partial Q}{\partial x_k} + c_q\frac{q^2\sqrt{E}}{l} = 0.$$

Решение уравнений (7) представляется в виде двух сомножителей, первый из которых совпадает с выражением соответствующей величины в однородной среде, а второй учитывает влияние центробежных сил и сил плавучести одновременно, связанных с кривизной потока и наличием архимедовых сил,

$$\overline{u_1^2} = \frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left(\frac{k}{c}+2\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\cdot\Omega_1, \qquad \overline{u_2^2} = \frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left(\frac{k}{c}-1\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\cdot\Omega_2,$$

$$\overline{u_3^2} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{c}{k}\right)\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\cdot\Omega_3, \qquad -\overline{u_1u_3} = l^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\cdot\Omega_4,$$

$$-\overline{u_2q} = l^2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot\Omega_5, \qquad -\overline{u_1q} = \sqrt{\alpha}\cdot l^2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot\Omega_6,$$

$$\overline{q^2} = \sqrt{\alpha}\cdot\frac{k}{c_q}\cdot l^2\left(\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right)^2\cdot\Omega_7, \qquad E = \frac{1}{c^{2/3}}l^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2\cdot\psi,$$

$$\Omega_1 = \frac{\psi^2\left[\frac{2}{3}\left(1+2\frac{c}{k}\right)\cdot\psi^2-\frac{4}{3}\left(4+5\frac{c}{k}\right)\cdot\alpha\cdot De+\frac{4}{3}\left(1+5\frac{c}{k}\right)\cdot\alpha\cdot De^2\right]}{\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\frac{c}{k}\right)\left(\psi^2-6\alpha\cdot De+4\alpha\cdot De^2\right)}\,, \tag{8}$$

$$\Omega_2 = \frac{\psi^2\left[\psi^2-\alpha\cdot\frac{k}{c_q}\cdot Rq\right]}{\left(\psi^2-\alpha\cdot\frac{k}{c_q}\cdot Rq-2\alpha\cdot Rq\right)}\,, \qquad \Omega_3 = \frac{\psi^2\left[\psi^2-4\alpha\cdot De+6\alpha\cdot De^2\right]}{\left(\psi^2-6\alpha\cdot De+4\alpha\cdot De^2\right)}\,,$$

$$\Omega_4 = \frac{\psi^3\left(1+De\right)}{\left(\psi^2-6\alpha\cdot De+4\alpha\cdot De^2\right)}\,, \qquad \Omega_5 = \frac{\psi^3}{\left(\psi^2-\alpha\cdot\frac{k}{c_q}\cdot Rq-2\alpha\cdot Rq\right)}\,,$$

$$\Omega_6 = \Omega_7 = \frac{\psi^2}{\left(\psi^2-\alpha\cdot\frac{k}{c_q}\cdot Rq-2\alpha\cdot Rq\right)}\,, \qquad \psi = \left(\sqrt{\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2-\Theta}-\frac{\Phi}{2}\right)^{1/2},$$

$$\Phi = -1-\left(\frac{3}{2}+6\alpha\right)\cdot De+\left(4\alpha-\frac{1}{2}\right)\cdot De-\left(\alpha\cdot\frac{k}{c_q}+2\alpha+1\right)\cdot Rq,$$

$$\Theta = \left(1+\frac{3}{2}De+\frac{1}{2}De^2-4\alpha\cdot De^2+6\alpha\cdot De\right)\left(\alpha\cdot\frac{k}{c_q}+2\alpha\right)\cdot Rq-Rq\left(4\alpha\cdot De^2-6\alpha\cdot De\right),$$

где $De = \frac{U_1}{R}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^{-2}$ — безразмерный локальный параметр кривизны, $Rq = \alpha g\frac{\partial Q}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^{-2}$ — безразмерное число Ричардсона,

$$k = \sqrt{\frac{c}{k}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)\right]^{3/4}, \quad c = \left(\frac{c}{k}\right)^{3/2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)\right]^{3/4}, \quad \sqrt{\alpha} = \frac{1}{k^2}\frac{2}{3}\left(1-\frac{c}{k}\right).$$

Полученная модель турбулентности позволяет получить замкнутые уравнения для характеристик среднего движения и рассчитать приближенно пульсационные характеристики течения с примесью в слабо искривленных каналах. Как видно из (8), для модели не требуется дополнительной информации и эмпирических констант.

## Цитированная литература


1. **Баренблат Г. И.** // Прикладная математика и механика. 1953. Т 17, № 3. С. 261 – 274.
2. Атмосферная турбулентность и моделирование распределения примесей. Л., 1985.
3. **Теверовский Е. Н., Дмитриев Е. С.** Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. М., 1988.
4. **Фидман Б. А.** Турбулентность водных потоков. Л., 1985.
5. Турбулентные сдвиговые течения. М., 1982.

6. **Бруяцкий Е. В.** Турбулентные стратифицированные струйные течения. Киев, 1986.
7. **Иевлев В. М.** Численное моделирование турбулентных течений. М., 1990.
8. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч.1. М., 1965.
9. **Хинце И. О.** Турбулентность. М., 1963.
10. **Абдибеков У. С., Джаугаштин К. Е.** // Изв. РАН. МЖГ. 1992. №3. С. 29 – 34.
11. **Левин В. Б.** // Теплофизика высоких температур. 1964. Т 2, №4. С. 588 – 598.


*Поступила в редакцию 15.09.2001г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 7 — 14*

*УДК 517.518.23*

# ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ВЛОЖЕНИЙ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА. II

М. С. Айтенова , Л. К. Кусаинова

Институт прикладной математики (РГКП ИПМ)
470076, Караганда, Университетская ул., 28, ipm@nursat.kz

Данная работа является продолжением статьи [1]. В работе получены двусторонние оценки функции распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева в пространства Лебега.

Приведем основные определения и обозначения, введенные в [1]. Пусть $\rho, v$ — веса на $\Omega$, при этом $\rho^{-p'/p} \in L(loc)$, $C^\infty W = C^\infty W_p^l(\rho, v)$ — класс функций $u \in C^\infty(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_W = \|u\|_{W_p^l(\rho,v)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla_l u|^p \rho + |u|^p v\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Через $W = W_p^l(\rho, v) = W_p^l(\Omega; \rho, v)$ будем обозначать пополнение $C^\infty W$ по норме (1). Для $G \subset \subset \Omega:\ |G| = \int\limits_G dx,\ |G|_\omega = \int\limits_G \omega,\ \mathcal{X}_G$ — характеристическая функция $G$.

Пусть $I^n$ — совокупность всех кубов вида $Q = Q_d = Q_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ |y_i - x_i| < < d/2,\ i = 1, \ldots, n\}$. Куб $\lambda Q = Q_{\lambda d}(x)$ $(\lambda > 0)$, $Q_{(\varepsilon)} = (1-\varepsilon)Q$. Кубу $Q = Q_d(x) \subset \Omega$ соотнесем величину $\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x, d) = \mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x, d|\rho, v) = d^{l-n}|Q_{(\varepsilon)}|_\sigma^{1/p'} \inf |Q_{(\varepsilon)} \setminus e|_v^{1/p}$, где $\delta,\ \varepsilon \in [0, 1)$, а inf берется по множеству $\mathcal{N}_{(\delta)}(Q_{(\varepsilon)})$, $\mathcal{N}_{(\delta)}(Q) \overset{def}{=} \{\ e \subset Q :\ \ |e| \le \delta|Q|\}$. В дальнейшем $\sigma = \rho^{1-p'}$, $p' = p/(p-1),\ 1 < p < \infty,\ \theta = l - n/p + n/q > 0$.

Пусть $d(x)$ — положительная функция, заданная в $\Omega$ и удовлетворяющая условию: $\sup\limits_{x\in\Omega} d(x) < \infty$ и $Q(x) = Q_{d(x)}(x) \subset \Omega\ \ \forall x \in \Omega$.

Функция $d(x)$ порождает дифференциальный базис $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}_{(\varepsilon)}(x) = \{Q \in I^n :\ x \in Q$ и $\exists$ куб $Q_{(\varepsilon)}(y) \supset Q\}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(\varepsilon)} = \bigcup\limits_{x\in\Omega} \mathcal{B}(x)$.

Положим

$$M^* f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{B}(x)} |Q|^{-1} \int\limits_Q |f|,\ f \in L(loc). \tag{2}$$

Keywords: *embedding, approximative numbers, Sobolev space*
2000 Mathematics Subject Classification: 46E35, 46A32

Очевидно, что $M^*f(x) \le \sup\limits_{Q\in I^n,\, Q\ni x} |Q|^{-1}\int\limits_Q |f| \overset{def}{=} Mf(x)$, где $Mf$ — максимальный оператор Харди-Литллвуда ($f$ считаем доопределенным нулем на $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ (см. [2, с.14])).

Положим $\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x)=\mathcal{K}(Q_{(\varepsilon)}(x))$, где $Q=Q_d(x)\in\mathcal{B}$, $\mathcal{K}(Q)=\mathcal{K}(x,d)\overset{def}{=}(|Q|_\sigma)^{1/p'}(|Q|_\omega)^{1/q}$.

Из тривиальной оценки $|Q|^{-1}\int\limits_Q |f|\le M^*f(x)\ \ \forall x\in Q$ следует, что

$$\mathcal{K}(Q_d)\le d^\theta\Phi(x)\ \ \forall x\in Q_d, \tag{3}$$

где $\Phi(x)=\Phi_{\sigma,\omega}(x)\overset{def}{=}(M^*\sigma(x))^{1/p'}(M^*\omega(x))^{1/q}$.

Семейство кубов $\{Q^j,\ j\in J\}\subset I^n$ называют $B$-покрытием множества $A\subset\mathbb{R}^n$, если выполнены условия: 1) $A\subset\bigcup Q^j$; 2) $\sum\mathcal{X}_{Q^j}(x)\le\varkappa_1<\infty\quad\forall x\in\mathbb{R}^n$ (конечная $\varkappa_1$-кратность); 3) $\{Q^j,\ j\in J\}$ распадается на не более, чем $\varkappa_2<\infty$ подсемейств $\{Q^j,\ j\in J_\nu\}$ попарно непересекающихся кубов (конечная $\varkappa_2$-разделимость).

Будем говорить, что весовая пара $(\rho,v)$ на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию ($\Pi^*$) (в записи $(\rho,v)\in\Pi^*$), если $0<d^*(x)\le C<\infty$ и $\overline{Q^*(x)}\subset\Omega$, где $d^*(x)=d^*_{(\delta,\varepsilon)}(x|\rho,v)\overset{def}{=}\sup\{d>0:\mathcal{M}_{(\delta,\varepsilon)}(x,d|\rho,v)\le 1\}$, $Q^*(x){=}Q_d(x)$ при $d=d^*(x)$.

**Классы** $A_p^*=A_p^*(\Omega)$, $1\le p\le\infty$.

1. Пусть $1<p<\infty$. Будем говорить, что вес $g$ на $\Omega$ удовлетворяет условию ($A_p^*$) (относительно базиса $\mathcal{B}$), если

$$\sup_{Q\in\mathcal{B}}\left(|Q|^{-1}\int\limits_Q g\right)^{1/p}\left(|Q|^{-1}\int\limits_Q g^{1-p'}\right)^{1/p'}=\|g\|_{A_p^*}<\infty. \tag{4}$$

2. По определению вес $g$ на $\Omega$ удовлетворяет условию ($A_\infty^*$) (относительно базиса $\mathcal{B}$), если для данного $\tau>0$ найдется такое $\delta\in(0,1)$, что $\forall\ Q\in\mathcal{B}$

$$|e|_g\le\tau|Q|_g\ \ \text{ как только }\ \ |e|\le\delta|Q|. \tag{5}$$

3. По определению вес $g$ на $\Omega$ удовлетворяет условию ($A_1^*$) (относительно базиса $\mathcal{B}$), если существует такое $R>0$, что для всех $Q\in\mathcal{B}$

$$|Q|^{-1}|Q|_g\le R\operatorname*{ess\,inf}_Q g. \tag{6}$$

4. Будем говорить, что вес $\omega$ удовлетворяет условию ($A^*$) (относительно базиса $\mathcal{B}$), если существуют такие $\tau\in(0,1)$ и $R>1$, что для любого куба $Q\in\mathcal{B}$

$$\sup_Q M(\omega\mathcal{X}_Q)\le R\sup_{Q\setminus e}M(\omega\mathcal{X}_Q)\ \text{ как только }\ e\in N_\tau(Q). \tag{7}$$

**П р е д л о ж е н и е 1.** *Справедливы импликации*
*a)* $\omega\in A_1^*\ \Rightarrow\ \omega\in A_\infty^*$; *b)* $\omega^{1-p'}\in A_1^*\ (1<p<\infty)\ \Rightarrow\ \omega\in A_p^*$;
*c)* $\omega\in A_1^*\ \Rightarrow g=M^*\omega\in A_1^*$; *d)* $\omega\in A_1^*\ \Rightarrow g=M^*\omega\in A_\infty^*$.

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** а) Пусть $e\subset Q\in\mathcal{B}$, $|e|\le\alpha|Q|$, $0<\alpha<1$. Заметим, что

$$\begin{aligned}|Q|^{-1}|Q|_\omega &\le R\operatorname*{ess\,inf}_Q\omega\le R\operatorname*{ess\,inf}_{Q\setminus e}\omega\le R|Q\setminus e|^{-1}|Q\setminus e|_\omega\le\\ &\le R((1-\alpha)|Q|)^{-1}|Q\setminus e|_\omega,\end{aligned}$$

откуда следует оценка $|e|_\omega\le\beta|Q|_\omega$ при $\beta=(1-\alpha)^{-1}R-1$.

b) Из условия $(A_1^*)$ на $\omega^{1-p'}$ следует, что $\forall\, Q\in\mathcal{B}$

$$\omega^{p'/p}(x)=1/\omega(x)^{1-p'}\le R\biggl(|Q|^{-1}\int\limits_Q\omega^{1-p'}\biggr)^{-1}\quad \text{п.в. на } Q,$$

откуда $\|\omega\|_{A_p^*}\le R^{1/p'}$.

c) Пусть $Q\in\mathcal{B}$, $Q^x$ — куб, на котором $g(x)=M^*\omega(x)<2|Q^x|^{-1}\int\limits_{Q^x}\omega$, $\{Q^j\}$ — $\varkappa_2$-разделимое $B$-покрытие $Q$, извлеченное из семейства $\{Q^x,\ \ x\in Q\}$.
Очевидны оценки

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q M^*\omega\le\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q\biggl(2|Q^x|^{-1}\int\limits_{Q^x}\omega\biggr)dx\le\frac{2R\varkappa_2}{|Q|}\max_\nu\sum_{j\in J_\nu}\int\limits_{Q\cap Q^j}(\operatorname*{ess\,inf}_{Q^x}\omega)dx\le$$

$$\le\frac{2R\varkappa_2}{|Q|}\max_\nu\sum_{j\in J_\nu}\int\limits_{Q\cap Q^j}\omega dx\le\varkappa_2\biggl(2R\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q\omega dx\biggr)\le 2R\varkappa_2M^*\omega(y)$$

для любого $y\in Q$.

Наконец, для $\omega\in A_1^*$ справедливость d) следует из импликаций a) и c).

**Предложение 2.** *Пусть $\omega\in A^*\cap A_p^*$. Тогда $\omega^{1-p'}\in A_1^*$.*

**Доказательство.** Существует достаточно малое $\gamma>0$ ($c\gamma=\tau,\quad c=c(n)$), для которого $|e_Q|\le\tau|Q|\ \ \forall\ Q\in\mathcal{B}$, где $e_Q=\{x\in Q:\ M(\omega\mathcal{X}_Q)>a\}$, $a=\gamma^{-1}|Q|^{-1}|Q|_\omega$. В силу условия $(A^*)$ на $\omega$ для п.в. $x\in\Omega$

$$|Q|^{-1}\int\limits_Q\omega=\gamma a\ge\gamma\sup_{Q\setminus e_Q}M(\omega\mathcal{X}_Q)\ge c_1\sup_Q M(\omega\mathcal{X}_Q)\ge c_1\omega(x). \tag{8}$$

Так как $\omega\in A_p^*$, то из (8) следует, что для п.в. $x\in Q$

$$|Q|^{-1}\int\limits_Q\omega^{1-p'}\le\|\omega\|_{A_p^*}^{p'}\biggl(|Q|^{-1}\int\limits_Q\omega^{1-p'}\biggr)^{-p'/p}\le c_2\omega^{-p'/p}(x)=c_2\omega^{1-p'}(x).$$

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия: 1) $\mathcal{M}_{(0,\varepsilon)}(x,d(x))\le C<\infty$ для п.в. $x\in\Omega$; 2) $\rho\in A_p^*$, $\omega\in A_\infty^*$, $v\in A_\infty^*$; 3) $\Omega$ содержит $N<\infty$ непересекающихся кубов $\hat{Q}^j=Q_{d_j}(x^j)\subset Q^*_{(\varepsilon)}(x^j)$, на которых $\mathcal{K}(\hat{Q}^j)\ge\lambda\quad(\lambda>0)$. Тогда для оператора $E=E_{\omega\to L_q(\Omega)}$, где $1<p=q<\infty$, либо $1<p<q\le 2$, либо $2\le p<q<\infty$, справедлива оценка*

$$a_m(E)\ge c\lambda\quad \text{\textit{при}}\quad m\le 2^{-1}N. \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть $\alpha,\ \beta\in(0,1)$ — параметры условия $A_\infty^*$ на веса $v$ и $\omega$, $\eta=\sqrt[n]{1-\alpha}$. Пусть $\varphi$ — фиксированная функция класса $C_0^\infty$, удовлетворяющая условиям: $0\le\varphi\le 1$, $\varphi=0$ вне $Q_1(0)$, $\quad\varphi=1$ на $\eta Q_1(0)$. Положим $\varphi_j(x)=\varphi\biggl(\dfrac{x-x_j}{d_j}\biggr)$. Понятно, что $\sup\varphi_j\subset\hat{Q}^j$, $\varphi_j=1$ на $\eta\hat{Q}^j$, $\max\limits_{\hat{Q}^j}|\nabla_l\varphi_j|=c_1d_j^{-l}$. Кроме этого

$$\frac{\|\varphi_j\|_W}{\|\varphi_j\|_{L_q(\omega)}}\ \le\ \frac{d_j^{-n}|\hat{Q}^j|_\rho^{1/p}|\hat{Q}^j|_\sigma^{1/p'}+(1-\beta)^{-1/p}M_{(\delta,\varepsilon)}(x^j,\ d_j)}{(1-\beta)^{1/q}\mathcal{K}(\hat{Q}^j)}\le c_2\lambda^{-1}. \tag{10}$$

Рассмотрим проектор $P : L_q(\omega) \to L_q(\omega)$, заданный посредством равенства

$$Pu = \sum_{j=1}^{N} \frac{(u,\varphi_j)_\omega}{(\varphi_j,\varphi_j)_\omega}\varphi_j, \text{ где } (u,g)_\omega \stackrel{def}{=} \int\limits_{\Omega} (ug)\omega(x)dx.$$

Пусть $\Lambda$ — оператор из $\mathcal{L}_m(W, L_q(\omega))$, на котором

$$\sup_{u\in C^\infty(\Omega)\cap BW} \|u - \Lambda u\|_{L_q(\omega)} \le a_m(E) + \gamma \ \ (\gamma > 0). \tag{11}$$

На пространстве $F = \mathrm{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset L_q(\omega)$ операторы $P$ и $P\Lambda$ действуют соответственно как

$$P\Big(\sum_{k=1}^{N} \xi_k\varphi_k\Big) = \sum_{j=1}^{N} \xi_k\varphi_k, \quad P\Lambda\Big(\sum_{k=1}^{N} \xi_k\varphi_k\Big) = \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N} \mu_{kj}\xi_k\Big)\varphi_j, \tag{12}$$

где $\mu_{kj} = (\Lambda\varphi_k, \varphi_j)/(\varphi_j, \varphi_j)$. На функциях $u \in C^\infty(\Omega) \cap BW$

$$\|Pu\|^q_{L_q(\omega)} \le \sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{|\hat{Q}^j|_\omega}{|\eta\hat{Q}^j|_\omega}\right)^q \int\limits_{\hat{Q}^j} |u|^q\omega\right] \le (1-\tau)^{-q}\|u\|^q_{L_q(\omega)}.$$

Тем самым $\|P\| \le (1-\tau)^{-1} = c_4$. Неравенства (10), (11) позволяют провести оценки

$$\begin{aligned}
&a_m(E) + \gamma \ge \|P\|^{-1} \sup_{u\ne 0,\ u\in F} \|Pu - (P\Lambda)u\|_{L_q(\omega)}/\|u\|_W = \\
= \ \ &\|P\|^{-1} \sup_{\xi\in R^N,\ \xi\ne 0}\left[\sum_{j=1}^{N} |\xi_j - \sum_{k=1}^{N}\mu_{kj}\xi_k|^q \int\limits_{\hat{Q}^j} \varphi_j^q\omega\right]^{1/q}\left[\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^p\|\varphi_j\|^p_{W(\hat{Q}^j)}\right]^{-1/p} \ge \\
\ge \ \ &c_4^{-1}\left[\sup_{1\le j\le N} \frac{\|\phi_j\|_{W(\hat{Q}^j)}}{\|\phi_j\|_{L_q(\omega)}}\right]^{-1} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N, \xi\ne 0} \frac{\|\xi - \tilde{\Lambda}\xi\|_{l_q^N}}{\|\xi\|_{l_p^N}} \ge c_5\lambda a_m(l_p^N, l_q^N).
\end{aligned} \tag{13}$$

В (13) $\tilde{\Lambda}$ — оператор на $\mathbb{R}^N$, заданный матрицей $(\tilde{\mu}_{kj})$, $\tilde{\mu}_{kj} = \mu_{kj}\frac{\|\varphi_j\|_{L_q(\omega)}}{\|\varphi_k\|_{L_q(\omega)}}$, а $l_s^N$ — пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\xi\|_{l_s^N} = \left(\sum\limits_{j=1}^{s} |\xi_j|^s\right)^{1/s}$ при $1 \le s < \infty$, $\|\xi\|_{l_\infty^N} = \max\limits_{1\le j\le N} |\xi_j|$. Размерность $\dim\tilde{\Lambda} \le m$. Ввиду произвольного выбора $\gamma$ из (13) следует, что

$$a_m(E) \ge c_6\lambda a_m(l_p^N, l_q^N). \tag{14}$$

Прибегая к известным оценкам и к двойственному равенству $a_m(l_2^N, l_\infty^N) = a_m(l_1^N, l_2^N)$ (см. [4, с.232], [5, с.170] ), выписываем

$$\begin{aligned}
a_m(l_p^N, l_q^N) \ \ &\ge \ \ \begin{cases} a_m(l_1^N, l_2^N) & \text{при } \ 1 < p \le q \le 2 \\ a_m(l_2^N, l_\infty^N) = a_m(l_1^N, l_2^N) & \text{при } \ 2 \le p \le q \le \infty \end{cases} \ \ge \\
&\ge \ \ d_m(l_1^N, l_2^N) = \sqrt{1 - m/N},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$a_m(l_p^N, l_p^N) \ge d_m(l_p^N, l_p^N) = 1 \quad \text{при} \quad 1 < p = q < \infty. \tag{16}$$

Утверждение леммы следует из оценок (14)–(16).

Пусть $\omega \in A_1^*$ относительно базиса $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}$, $\ \ 0 < \tau < 1$. Заметим, что если $0 < \gamma(1-\varepsilon) \le$ $\le \varepsilon(1-\tau)$, $Q \in \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}_{(\varepsilon)}(x)$, то $(1+\gamma)Q \in \mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}(x)$.

**Лемма 2.** *Пусть $\omega \in A_1^*$ относительно базиса $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}(x)$. Тогда существует постоянная $c > 1$ такая, что $\forall\, \hat{Q} \in \mathcal{B}$ имеет место включение*

$$\left\{ y \in \frac{1}{4}\hat{Q} : \ M^*\omega(y) > a \right\} \subset \left\{ y \in \hat{Q} : \ M(\mathcal{X}_{\hat{Q}}\omega)(y) > c^{-1}a \right\} \ (a > 0). \tag{17}$$

**Доказательство.** Пусть $\hat{Q} = Q_{\hat{d}}$, $\ M^*\omega(y) > a$ в точке $y \in \frac{1}{4}\hat{Q}$, а $Q = Q_h \in \mathcal{B}_{(\varepsilon)}(y)$ — куб, на котором $|Q|^{-1} \int\limits_Q \omega > a$. Выберем $\gamma$ из условия $\gamma(1-\varepsilon) = (1-\tau)\varepsilon$.

1. Если $\hat{d} \le 2\gamma h$, то куб $\frac{1}{4}\hat{Q} \subset (1+\gamma)Q$. По свойству $(A_1^*)$ существует такое $c_1 > 1$, что

$$a < \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \omega \le (1+\gamma)^n \frac{1}{|(1+\gamma)Q|}\int\limits_{(1+\gamma)Q} \omega \le (1+\gamma)^n c_1 \omega(t) \ \text{ п.в. в } \ (1+\gamma)Q, \tag{18}$$

при этом $(1+\gamma)Q \in \mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}(y)$. В силу (18)

$$a = \frac{1}{|4^{-1}\hat{Q}|}\int\limits_{4^{-1}\hat{Q}} a\, dt \le (1+\gamma)^n c_1 \frac{1}{|4^{-1}\hat{Q}|}\int\limits_{4^{-1}\hat{Q}} \omega \le cM(\mathcal{X}_{\hat{Q}}\omega)(y), \tag{19}$$

где $c = (1+\gamma)^n c_1$.

2. Пусть $\hat{d} > 2\gamma h$. Тогда $\frac{\gamma}{2}Q_h(y) \subset \hat{Q} \cap (1+\gamma)Q$. Обращаясь к (18), получим:

$$a = \frac{1}{|\frac{\gamma}{2}Q_h(y)|}\int\limits_{\frac{\gamma}{2}Q_h(y)} a dt \le \frac{c}{|\frac{\gamma}{2}Q_h(y)|}\int\limits_{\frac{\gamma}{2}Q_h(y)} \omega \le cM(\mathcal{X}_{\hat{Q}}\omega)(y). \tag{20}$$

Утверждение леммы следует из оценок (19), (20).

**Лемма 3.** *Пусть веса $\omega$ и $\sigma = \rho^{1-p'}$ удовлетворяют условию $(A_1^*)$ (относительно $\mathcal{B}_{(\tau\varepsilon)}$). Тогда существует постоянная $c > 1$ такая, что $\forall \hat{Q} = \hat{Q}_{x,\lambda}$, где $x \in G_\lambda = \{\mathcal{K}_{(\varepsilon)} > \lambda\}$, справедлива оценка*

$$c^{-1}\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\frac{1}{4}\hat{Q}} \Phi(t)^{n/\theta} dt \le 1. \tag{21}$$

**Доказательство.** Положим $e_i = \{y \in \frac{1}{4}\hat{Q} : \ M^*g_i(y) > a_i\}$, где $a_i = \gamma^{-1}|\hat{Q}|^{-1}|\hat{Q}|_{g_i}$, $\gamma \in (0,1)$, $g_1 = \sigma$, $g_2 = \omega$. В силу леммы 2

$$e_i \subset \{y \in \hat{Q} : \ M(\mathcal{X}_{\hat{Q}}g_i)(y) > \ c^{-1}a_i\} = \tilde{e}_i, \ i = 1, 2.$$

Из неравенства слабого типа $|\{Mf > a\}| \le c\|f\|_1$ (см. [2, с.15]) следует оценка

$$|e_i| \le |\tilde{e}_i| \le c_1 a_i^{-1}\int\limits_{\hat{Q}} g_i = c_1\gamma|\hat{Q}|. \tag{22}$$

Пусть $s \cdot \frac{n}{\theta}(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}) = 1$ $\ (s \ge 1)$, $\ \frac{1}{r} = \frac{sn}{\theta p'}$, $\ \frac{1}{r'} = \frac{sn}{q\theta}$, $\ e = e_1 \cup e_2$. Поскольку $x \in G_\lambda$, то $\lambda = \mathcal{K}(\hat{Q})$. В силу утверждения d) предложения 1 функции $M^*g_i \in A_1^*$, что позволяет, считая $\gamma$ достаточно малым, провести оценки:

$$1 = 4^n \int\limits_{\frac14\hat{Q}} (\hat{d}(x,\lambda))^{-n} dt = c_2\lambda^{-n/\theta}\left|\frac14\hat{Q}\right| \times \tag{23}$$

$$\times \quad \left[\left|\frac14\hat{Q}\setminus e\right|^{-1}\left(\int\limits_{\frac14\hat{Q}\setminus e}\left(|\hat{Q}|^{-1}\int\limits_{\hat{Q}}\sigma\right)dt\right)^{1/r}\left(\int\limits_{\frac14\hat{Q}\setminus e}\left(|\hat{Q}|^{-1}\int\limits_{\hat{Q}}\omega\right)dt\right)^{1/r'}\right]^{1/s} \geq$$

$$\geq \quad c_3\lambda^{-n/\theta}\left|\frac14\hat{Q}\right|\left[\left|\frac{\gamma}{1-2c_1\gamma}\hat{Q}\right|^{-1}\left(\int\limits_{\frac14\hat{Q}}(M^*\sigma)^{\frac1r r}\right)^{1/r}\left(\int\limits_{\frac14\hat{Q}}(M^*\omega)^{\frac{1}{r'}r'}\right)^{1/r'}\right]^{1/s} \geq$$

$$\geq \quad c_4\lambda^{-n/\theta}\left|\frac14\hat{Q}\right|\left[\left|\frac14\hat{Q}\right|^{-s}\left(\int\limits_{\frac14\hat{Q}}(\Phi_{\sigma,\omega})^{n/\theta}\right)^{s}\right]^{1/s} = c_4\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\frac14\hat{Q}}(\Phi_{\sigma,\omega})^{n/\theta}.$$

Положим $\Omega_\lambda = \{x\in\Omega : \int\limits_{Q_{(\varepsilon)}(x)} \Phi^{n/\theta} > \lambda^{n/\theta}\}$, $\tilde{G}_\lambda = \{x\in\Omega :\ \Phi(x) > \lambda d(x)^{-\theta}\}$. Из оценки (3) тривиально следует включение $G_\lambda \subset \Omega_\lambda$.

**Предложение 3.** *Пусть* $\omega$, $\sigma = \rho^{1-p'} \in A_1^*$. *Тогда существует постоянная* $c > 1$ *такая, что*

$$\tilde{G}_{c\lambda} \subset \Omega_\lambda \subset G_{c^{-1}\lambda}. \tag{24}$$

**Доказательство.** Положим $\hat{Q} = Q_{(\varepsilon)}(x)$, $x\in\tilde{G}_\lambda$. Принимая обозначения из доказательства леммы 3, проводим оценки:

$$1 \quad < \quad \lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\hat{Q}}\Phi^{n/\theta} \leq \lambda^{-n/\theta}|\hat{Q}|\left[\left(|\hat{Q}|^{-1}\int\limits_{\hat{Q}}M^*g_1\right)^{1/r}\left(|\hat{Q}|^{-1}\int\limits_{\hat{Q}}M^*g_2\right)^{1/r'}\right]^{1/s} \leq$$

$$\leq \quad c_1\lambda^{-n/\theta}|\hat{Q}|\left[(\operatorname*{ess\,inf}_{\frac14\hat{Q}} M^*g_1)^{1/r}(\operatorname*{ess\,inf}_{\frac14\hat{Q}} M^*g_2)^{1/r'}\right]^{1/s} \leq \tag{25}$$

$$\leq \quad c_2\gamma^{-1/s}\lambda^{-n/\theta}\left[((1-\varepsilon)d^*(x))^\theta\left(\int\limits_{\hat{Q}}\sigma\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{\hat{Q}}\omega\right)^{1/q}\right]^{n/\theta} = c_3(\lambda^{-1}\mathcal{K}^*_{(\varepsilon)}(x))^{n/\theta}.$$

Из (25) следует включение (24).

**Лемма 4.** *Пусть выполнены условия: 1)* $\mathcal{M}_{(0,\varepsilon)}(x,d(x)) \leq C < \infty$ *для п.в.* $x\in\Omega$; *2)* $\sigma$, $\omega\in A_1^*$, $v\in A_\infty^*$. *Тогда при* $p,q$, *удовлетворяющих соотношениям:*

$$1 < p = q < \infty, \quad \textit{либо} \quad 1 < p < q \leq 2, \quad \textit{либо} \quad 2 \leq p < q < \infty \tag{26}$$

*справедлива оценка*

$$\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\{\Phi > c\lambda d(x)^{-\theta}\}}\Phi^{n/\theta} \leq C\mathcal{N}(\lambda,E) < \infty \quad \forall\lambda > 0. \tag{27}$$

**Доказательство.** В силу предложения 3 существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что $\tilde{G}_{c_1\lambda} \subset G_\lambda = \{\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x) > \lambda\}$. Пусть $\{\frac14\hat{Q}^j,\ j\in J\}$ – $B$ – покрытие $\tilde{G}_{c_1\lambda}$, выделенное из семейства $\{\frac14\hat{Q}_{x,\lambda},\ x\in\tilde{G}_{c_1\lambda}\}$ и разделяющееся на $\varkappa = \varkappa(\varepsilon,n) < \infty$ подсемейств $\{\frac14\hat{Q}^j,\ j\in J_\nu\}$ попарно непересекающихся кубов; $\Lambda_\nu$ – произвольное конечное подмножество $J_\nu$. Из условий $(A_1^*)$, наложенных на веса $\sigma$ и $\omega$, тривиально следует оценка $\mathcal{K}(\frac14\hat{Q}) \geq c_2^{-1}\lambda$ с некоторой не зависящей от $\lambda$ постоянной $c_2 > 1$. В силу утверждений a) и b) предложения 1 $\rho \in A_p^*$, $\omega \in A_\infty^*$. Поэтому мы находимся в условиях леммы 1, в силу которой $\varkappa\mathcal{N}(\lambda, E) \geq 2^{-1}\sum\limits_{\nu}|\Lambda_\nu|$. Далее, применяя оценку (21) леммы 3, выводим

$$\varkappa\mathcal{N}(\lambda, E) \geq c_3\sum_{\nu}|\Lambda_\nu| \geq c_3\lambda^{-n/\theta}\sum_{\nu}\bigg(\sum_{j\in J_\nu}\int\limits_{\frac{1}{4}\hat{Q}^j}\Phi^{n/\theta}\bigg),$$

откуда следует, что семейство $\{\int\limits_{\frac{1}{4}\hat{Q}^j}\Phi^{n/\theta}, \quad j \in J\}$ суммируемо. При этом

$$\mathcal{N}(\lambda, E) \geq \varkappa^{-1}c_3\lambda^{-n/\theta}\sum_{j\in J}\int\limits_{\frac{1}{4}\hat{Q}^j}\Phi^{n/\theta} \geq c_4\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\tilde{G}_{c_1\lambda}}\Phi^{n/\theta}.$$

Базис $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(\varepsilon)}$, построенный по функции $d(x) = d^*(x)$, будем обозначать через $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*_{(\varepsilon)}$; соответственно, $\Phi^*_{\sigma,\omega} = \Phi_{\sigma,\omega}$, $G^*_\lambda = G_\lambda$, $\tilde{G}^*{}_\lambda = \tilde{G}_\lambda$ относительно максимального оператора $M^*$ по базису $\mathcal{B}^*$.

Если $v \in A^*_\infty$ относительно $\mathcal{B}^*$, то при некотором $c > 1$, как нетрудно убедиться, $(\rho, cv) \in \Pi$ относительно $d(x) = d^*(x)$.

**Предложение 4.** *Справедливы утверждения: a)* $\mathcal{M}_{(0,\varepsilon)}(x, d^*(x)) = 1$; *b)* $\varepsilon d^*(y) \leq d^*(x) \leq \varepsilon^{-1}d^*(y)$ *для п.в.* $y \in Q^*_{(\varepsilon)}(x)$.

**Доказательство.** Утверждение a) доказывается предельным переходом в неравенствах $d_j^{l-n}|Q^j|_\sigma^{1/p'}|Q^j|_v^{1/p} \leq 1 < \tilde{d}_j^{l-n}|\tilde{Q}^j|_\sigma^{1/p'}|\tilde{Q}^j|_v^{1/p}$, где $d_j \nearrow d^*(x)$; $\tilde{d}_j \searrow d^*(x)$, $Q^j = (1-\varepsilon)Q_{d_j}(x)$, $\tilde{Q}^j = (1-\varepsilon)Q_{\tilde{d}_j}(x) \subset \Omega$, $j = 1, 2, \ldots$.

b) Допустим, что $0 < d^*(y) \leq \varepsilon d^*(x) < \infty$. Тогда $Q^*(y) \subset Q^*(x)$ и $1 = \mathcal{M}_{(0,\varepsilon)}(y, d^*(y)) < \varepsilon^{l-n} \leq 1$, что невозможно. Следовательно $d^*(y) \geq \varepsilon d^*(x)$. Если же допустить, что $\varepsilon^{-1}d^*(x) < d^*(y)$, то необходимо $x \in Q^*_{(\varepsilon)}(y)$. По доказанному тогда должна выполняться обратная оценка $\varepsilon^{-1}d^*(x) \geq d^*(y)$.

**Теорема 1.** *Пусть* $(\rho, v) \in \Pi^*$ *и выполнены условия:* $\omega$, $\sigma = \rho^{1-p'} \in A_1^*$, $v \in A^*_\infty$. *Тогда при* $1 < p = q < \infty$, $1 < p < q \leq 2$, *либо* $2 \leq p < q < \infty$ *справедлива оценка*

$$\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\{\Phi^* > c^{-1}\lambda d^*(\cdot)^{-\theta}\}}(\Phi^*)^{n/\theta} \leq c\mathcal{N}(\lambda; E) < \infty \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{28}$$

Утверждение теоремы вытекает из леммы 4 и равенства a) предложения 4.

**Лемма 5.** *Пусть функция* $d(x)$ *удовлетворяет условию*

$$d(t) \geq \eta d(x) \ \text{ как только } \ t \in Q_{(\varepsilon)}(x). \tag{29}$$

*Тогда существует постоянная c такая, что*

$$\eta Q_{(\varepsilon)}(x) \subset \tilde{G}_{c\lambda} \quad \text{как только} \quad x \in G_\lambda. \tag{30}$$

**Доказательство.** Пусть $y \in \eta Q_{(\varepsilon)}(x)$, $\quad x \in G_\lambda$, $\quad t \in \frac{\eta}{2}Q_{(\varepsilon)}(y)$. Можно считать $\eta \leq 1/2$. Из неравенств

$$|t_i - x_i| \leq |t_i - y_i| + |y_i - x_i| < \frac{1}{4}(1-\varepsilon)\eta d(y) + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\eta d(x) \leq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)d(x)$$

$(i=1,\dots,n)$ следует, что $\frac{\eta}{2}Q_{(\varepsilon)}(y)\subset Q_{(\varepsilon)}(x)$ и в силу (3)

$$\int\limits_{Q_{(\varepsilon)}(x)}\Phi^{n/\theta}\ge\int\limits_{\frac{\eta}{2}Q_{(\varepsilon)}(y)}\Phi^{n/\theta}\ge\left(\frac{\eta}{2}\frac{d(y)}{d(x)}\right)^n\mathcal{K}_{(\varepsilon)}(x)^{n/\theta}>(c\lambda)^{n/\theta},$$

где $c=(2^{-1}\eta^2)^\theta$.

**Т е о р е м а 2.** *Пусть* $(\rho,v)\in\Pi^*$, *при этом веса* $\rho,v,\omega$ *на* $\Omega$ *удовлетворяют условиям: 1)* $v\in A^*_\infty$, *а* $\omega$, $\sigma\in A^*_1$ *(относительно базиса* $\mathcal{B}^*_{(\tau\varepsilon)}$*); 2)* $\int\limits_\Omega(\Phi^*_{\sigma,\omega})^{n/\theta}<\infty$. *Тогда* $W=W^l_p(\rho,v)$ *компактно вложено в* $L_q(\omega)$ *при* $1<p\le q<\infty$. *Если* $1<p=q<\infty$, *а при* $p<q$ *либо* $2^{-1}\le q^{-1}$, *либо* $p^{-1}\le 2^{-1}$, *то*

$$c^{-1}\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\tilde G^*_{c\lambda}}(\Phi^*)^{n/\theta}\le\mathcal{N}(\lambda;E)\le c\lambda^{-n/\theta}\int\limits_{\tilde G^*_{c^{-1}\lambda}}(\Phi^*)^{n/\theta}. \qquad (31)$$

Теорема 2 есть следствие теоремы 1 и теоремы 2 статьи [1].

**Т е о р е м а 3.** *Пусть вес* $\sigma=\rho^{1-p'}$ *удовлетворяет условию* $(\Pi^*)$ *относительно функции* $\sigma^*(x)=\sup\limits_{d>0}\{d:\ Q=Q_d(x)\subset\Omega,\ \ d^{l-n/p'}|Q_{(\varepsilon)}|_\sigma^{1/p'}\le1\}$ *и* $\Phi^*=\Phi^*_{\sigma,\omega}\in L_{n/l}(\Omega)$. *Тогда: a)* $W^l_p(\rho,1)$ *компактно вложено в* $L_p(\Omega)$.
*b) На классе весов* $\rho\in A^*\cap A^*_p$

$$c^{-1}J(c\lambda)\le\lambda^{n/l}\mathcal{N}(\lambda,E)\le cJ(c^{-1}\lambda),$$

*где* $J(\lambda)=\int\limits_{\{\Phi^*>\lambda\sigma^{*-n/l}\}}(\Phi^*)^{n/l}$.

Классы весов $A_p$ на $\mathbb{R}^n$ соответствуют классам $A^*_p$ относительно базиса $I^n$.

## Цитированная литература


1. **Айтенова М. С., Кусаинова Л. К.** // Математический журнал. 2002. Т. 2. №1. С. 3 – 9.
2. **Стейн И.** Сингулярные интегральные и дифференциальные свойства функций. М., 1973.
3. **Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.** Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М., 1998.
4. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
5. **Исмагилов Р. С.** // Успехи матем.наук. 1974. Т. 29. Вып. 3. С. 161 – 178.


*Поступила в редакцию 18.02.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 1. С. 15 — 18*

*УДК 517.95*

# ON ASYMPTOTIC EQUIVALENCE OF IMPULSIVE LINEAR HOMOGENOUS DIFFERENTIAL SYSTEMS

M. U. Akhmet, M. A. Tleubergenova

Department of Mathematics, Middle East Technical University
06531 Ankara, Turkey, marat@metu.edu.tr
Branch of K. Satpaev Kazakh National Technical University
463000 Aktobe, Mares'eva str., 10

Sufficient conditions of asymptotic equivalence of impulsive linear homogeneous differential equations are obtained.

## 1. Introduction

The problem of asymptotic equivalence for linear and non-linear ordinary differential equations have been considered by many authors [1–8] (see also bibliography of [1, 3]). And recently, there has been a lot of activity with solutions which undertake discontinuities or jumps at some definite instants [9]. It generates needes of investigation the asymptotic behavior of impulsive systems [10]. Interesting article which motivate our study here in this article were written by M. Ráb [7]. Following the results of M. Ráb without requiring any special form and boundary condition for the solutions new results for asymptotic equivalence of impulsive systems are obtained. We should also note that Ráb did not consider asymptotic equivalence but rather gave asymptotic representation of solutions.

Let $Z, R$ be sets of all integers and real numbers respectively, $R_+ = [t_0, \infty)$ for some $t_0 \in R$, $||\cdot||$ be the euclidean norm in $R^n, n \in N$.

We consider the following systems of impulsive differential equations

$$dx/dt = A(t)x, \ \ t \neq \theta_i, \qquad \Delta x(\theta_i) = B_i x(\theta_i) \tag{1}$$

and

$$dy/dt = [A(t) + C(t)]y, \ \ t \neq \theta_i, \qquad \Delta y(\theta_i) = [B_i + D_i]y(\theta_i) \tag{2}$$

where $x, y \in R^n$,

$(C_1)$ $A(t), C(t), t \in R_+$, $B_i, D_i, i \in Z$ are real valued $n \times n-$ matrices, $A(t), C(t) \in C(R_+)$;

$(C_2)$ $\{\theta_i\} \subset R, t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots \theta_i \to \infty$ as $i \to \infty$;

Keywords: *asymptotic equivalence, linear impulsive system, delay equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A37, 34C41, 34K06, 34K45

$(C_3)$ matrices $B_i, D_i$ satisfy the inequalities

$$\det(I + B_i) \neq 0, \quad \det(I + B_i + D_i) \neq 0, \quad \text{for all } i \in Z. \tag{3}$$

**Remark 1.** *The conditions $(C_1) - (C_3)$ imply* [9] *(p. 44) that solutions $x(t, t_0, x_0)$ and $y(t, t_0, x_0)$ of Cauchy's problem for systems (1) and (2) with any $x_0, y_0 \in R^n, t_0 \in R$ exist and unique on $R_+$.*

**Definition 1.** [3] *A one-to-one correspondence between solutions $x(t)$ of (1) and solutions $y(t)$ of (2) is called an asymptotic equivalence if $x(t) - y(t) \to 0$ as $t \to \infty$.*

## 2. Main Result

Let $X(t)$ be [9] $(p.47)$ a fundamental matrix solutionof (1). We start with the change of dependent variable

$$y(t) = X(t)u(t) \tag{4}$$

which transforms (2) into the system

$$du/dt = P(t)u, \;\; t \neq \theta_i, \qquad \Delta u(\zeta_i) = Q_i u(\zeta_i) \tag{5}$$

where

$$P(t) = X^{-1}(t)C(t)X(t), \quad Q_i = X^{-1}(\theta_i)D_i X(\theta_i). \tag{6}$$

The substitution appearing in (4), which was also employed in [7, 6], is very crucial in the proof of our results. In fact, our method is based on a complete characterization of the function $u(t)$ for $t$ sufficiently large.

Let us assume that

$$\int_{t_0}^{\infty} \| P(t) \| \, dt + \sum_{t_0 < \theta_i < \infty} \| Q_i \| < \infty \tag{7}$$

and construct via successive approximations a sequence $\{\Psi_k(t)\}$ of $n \times n$ matrices defined for $t \in$ $\in [t_0, \infty)$ as follows:

$$\Psi_k(t) = -\int_t^{\infty} P(s)\Psi_{k-1}(s)\, ds - \sum_{t \leq \theta_i < \infty} Q_i \Psi_{k-1}(\theta_i) \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\Psi_0(t) = I,$$

where $I$ denotes the $n \times n$ identity matrix and $t_0$ is a positive real number.

It is clear from (7) that for a given $\epsilon$, $0 < \epsilon < 1$, there exists a $t_1(\epsilon) \geq t_0$ such that

$$\int_t^{\infty} \| P(s) \| \;\, ds + \sum_{t < \theta_i < \infty} \| Q_i \| < \epsilon \quad \text{for all } t > t_1.$$

It follows that if $t \geq t_1$ then $\| \Psi_k(t) \| < \epsilon^k$ for $k = 1, 2, \ldots$ and hence, by using the Weierstrass M-test, the series $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t)$ converges uniformly for $t \in [t_1, +\infty)$ to the piecewise-continuous function.

We define

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t), \quad t \geq t_1, \tag{8}$$

and note that $\Psi(t)$ satisfies

$$\Psi(t) = -\int_t^{\infty} P(s)[I + \Psi(s)]\, ds - \sum_{t < \theta_i < \infty} Q_i [I + \Psi(\theta_i)] \; . \tag{9}$$

**Theorem 1.** *Let $X(t)$ be a fundamental matrix solution of (1) and let $P(t)$ and $\Psi(t)$ be the matrices given by (6) and (8), respectively. If (7) is satisfied and*

$$\lim_{t\to\infty} X(t)\Psi(t) = 0 \tag{10}$$

*then (1) and (2) are asymptotically equivalent.*

**Proof.** Let $t$ be sufficiently large, $t \geq t_1$ say. Then in view of (9) we see that the function $u(t) = [I + \Psi(t)]c$, $c \in R^n$ is a solution of (3) defined on $[t_1, \infty)$ and hence $y(t) = X(t)[I + \Psi(t)]c$ is a solution of (2). Let $x^0 = X(t_2)c$ and $y^0 = X(t_2)(I + \Psi(t_2))c$. Denote by $x(t, c) = x(t, t_2, x^0)$ and $y(t, c) = y(t, t_2, y^0)$ the solutions of (1) and (2) satifying $x(t_2) = x^0$ and $y(t_2) = y^0$, respectively.

On the other hand, since $\Psi(t) \to 0$ as $t \to \infty$, we note that there exists a $t_2 > t_1$ such that $I + \Psi(t_2)$ is nonsingular.

Now, because of the existence and uniqueness of solutions of linear differential equations and the fact that $I + \Psi(t_2)$ is nonsingular, the relation $y^0 = X(t_2)[I + \Psi(t_2)]X^{-1}(t_2)x^0$ defines a one-to-one correspondence between solutions $x(t)$ of (1) and $y(t)$ of (2) such that $y(t) = x(t) + X(t)\Psi(t)c$ for $t > t_1$. This, in view of (10), completes the proof.

One can see that if impulsive parts in (1) and (2) are cancelled then it is easy to obtain a corresponding result for ordinary differential equations.

## 3. Example

We provide an example to illustrate a result of this paper. Consider the systems

$$x'(t) = ax, \quad t \neq i, \quad \Delta x(i) = mx(i), \tag{11}$$

and

$$y'(t) = [a + s(t)]y, \quad t \neq i, \quad \Delta y(i) = [m + q^i]y(i), \tag{12}$$

where $a, m \in R, i \in Z$ , $s(t) \in C([t_0, \infty))$ for some $1 > t_0 > 0$. We assume that there exist real numbers $K_0 > 0$ and $b < 0$ such that

$$| s(t) |< K_0 e^{bt} \quad \text{for all } t \geq t_0, \tag{13}$$

and $q \in R$ satisfies $|q| < 1$. And therefore

$$\int_{t_0}^{\infty} |s(t)|\, dt + \sum_{t_0 \leq i < \infty} |q|^i < K_0 \frac{1}{|b|} e^{bt_0} + \frac{|q|}{1 - |q|} < \infty.$$

Let $i(t, t_0)$ be a number of points $i$ in the interval $(t, t_0)$. Then [9] $X(t) = e^{a(t-t_0)}(1 + m)^{i(t,t_0)}$ is a solution of (11) such that $X(t_0) = 1$ and there exists $K \in R, K > 0$ such that

$$| X(t) | \leq K e^{(a+\ln(1+m))t} \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

Denote $\alpha = \max\{b, \ln q\}, K_n = \frac{1}{n|\alpha|} + \frac{1}{1-e^{n\alpha}}$. One can show that $| \Psi_n(t) | \leq K_1 \dots K_n e^{n\alpha t}$, and

$$| \Psi(t) | \leq \Pi_{n=1}^{\infty} K_1 \dots K_n e^{n\alpha t} \leq \Pi_{n=1}^{\infty} K_1^n e^{n\alpha t} \leq e^{(\ln K_1 + \alpha)t} \frac{1}{1 - e^{\alpha t}}.$$

Hence, if $a + \ln(1+m) + \ln K_1 + \alpha < 0$ then $X(t)\Psi(t) \to 0$ as $t \to \infty$. Thus all conditions of theorem 1 are fulfilled and we may conclude that systems (11) and (12) are asymptotically equivalent.

## Цитированная литература


1. **Cesari L.** Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

2. **Levinson N.** // DukeMath. J., 1948. V.,15. P. 111 – 126.

3. **Nemytskii V. V. and Stepanov V. V.** Qualitative theory of Differential Equations, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1966.

4. **Saito S.** // Math. Japan, 1992. V. 37. P. 503 – 513.

5. **Svec M.** // Czech. Math. J., 1974. V. 29. P. 44 – 58.

6. **Wintner A.** // Amer. Jour. Math., 1946. V. 68. P. 185 – 213.

7. **Ráb M.** // Czech. Math. J., 1958. V. 83. P. 222 – 229.

8. **Yakubovich V. A.** // Mat. Sbornik, 1951. V. 28. P. 217 – 240.

9. **Samoilenko A. M. and Perestyuk N. A.** Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1995.

10. **Simeonov P. S. and Bainov D. D.** // J. Math. Anal. Applic., 1998. V. 135. P. 591 – 610.

*Поступила в редакцию 19.04.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 19 — 24*

*УДК 517.938*

# ОБОБЩЕННО-ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. М. Алдибеков

АГУ им. Абая
480012, Алматы, Толе би ул., 86

Одно из основных мест в ляпуновской классификации систем линейных дифференциальных уравнений с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами занимают правильные системы (см. [1], [2, с. 77]). Они включают в себя приводимые и почти приводимые системы и играют ведущую роль в теории устойчивости по линейному приближению. Для системы линейных дифференциальных уравнений с неограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами аналогичную роль играют обобщенно-правильные системы.

Здесь выделяется класс систем, асимптотика решений которых определяется обобщенными показателями и при этом некоторые известные признаки правильности получают обобщение.

Пусть $f(t)$ — в общем случае, комплекснозначная функция, определенная в $J = [t_0, +\infty]$, $t_0 \in R$, $Q$ — множество положительных монотонно возрастающих, непрерывно дифференцируемых функций, определенных в $J$.

**Определение 1.** (*см.* [3]) *Число или символы $-\infty$, $+\infty$, определенные формулой*

$$\chi[f,g] = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln|f(t)|, & \text{при } f(t) \neq 0,\ t \in J \\ -\infty & \text{при } f(t) = 0,\ t \in J \end{cases},$$

*где $q(t) \in Q$, будем называть верхним обобщенным характеристическим показателем Ляпунова, короче, обобщенным показателем $f(t)$ относительно $q(t)$.*

Если $q(t) = t$, то получаем обычное определение показателя Ляпунова $f(t)$ в форме Перрона. Мы рассматриваем $q(t) > t$. Отметим, что для любой $f(t) \neq 0$, $t \in J$ всегда найдется функция $q(t) \in Q$ такая, что обобщенный показатель $\chi[f, q]$ принимает конечное значение.

Аналогично определяются обобщенные показатели от норм непрерывной вектор-функции, непрерывной матрицы, заданных на $J$.

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

— действительнозначная линейная однородная система дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами в $J$.

Keywords: *Lyapunov's exponents, system of differential equations, generalized regular system, generalized exponents*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

Известно (см. [3]), что если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию $||A(t)|| \leq K\psi(t)$, где $K > 0$, $\psi(t)$ — положительная непрерывная в $J$ функция, то система (1) имеет не более $n{\in}N$ различных конечных обобщенных показателей относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$.

**Лемма 1.** *Пусть система (1) имеет конечные обобщенные показатели относительно $q(t) \in Q$. Тогда имеет место обобщенное неравенство Ляпунова относительно $q(t)$, т.е. для любой фундаментальной системы решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ системы (1) выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau \leq \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \chi[\mathrm{x}^{(\mathrm{i})}, \mathrm{q}]. \tag{2}$$

**Доказательство.** Действительно, из условия следует, что вронскиан $W(t) = \det[\mathrm{x}^{(1)}, \ldots, \mathrm{x}^{(\mathrm{n})}]$ имеет конечный обобщенный показатель $\chi[W, q]$ и на основании свойства обобщенных показателей для суммы и произведения имеем

$$\chi[W, q] \leq \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q]. \tag{3}$$

С другой стороны, из формулы Остроградского-Лиувилля следут, что

$$\chi[W, q] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

Следовательно, из (3) и (4) получаем (2). Лемма 1 доказана.

**Определение 2.** *Система (1) называется обобщенно-правильной по Ляпунову относительно $q(t) \in Q$, если имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой выполнено числовое равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

**Теорема 1.** *Если система (1) имеет конечные обобщенные показатели относительно $q(t) \in Q$, то для обобщенной правильности системы (1) относительно $q(t)$ необходимо существование точного предела*

$$S(q) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

**Доказательство.** Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой выполняется равенство (5). Поэтому из (5) и из обобщенного неравенства (2) имеем

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau \geq \overline{\lim_{\mathrm{t}\to\infty}} \frac{1}{\mathrm{q}(\mathrm{t})} \int\limits_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Следовательно, существует точный предел (6). Теорема 1 доказана.

Пусть

$$\dot{y} = -A^T(t)y. \tag{7}$$

— сопряженная система для системы (1).

**Т е о р е м а 2.** *Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t) \in Q$, то сопряженная система (7) имеет фундаментальную систему решений $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, для которой имеет место равенство*

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] = 0, \ \ k = \overline{1, n}, \tag{8}$$

*где $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — некоторая фундаментальная система решений системы (1).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ системы (1), для которой в силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Пусть $X(t) = [x_{jk}(t)], \ j, k = \overline{1, n}$, — фундаментальная матрица, состоящая из решений $x^{(k)} = \mathrm{colon}[\mathrm{x_{1k}}, \ldots, \mathrm{x_{nk}}], \ \mathrm{k} = \overline{1, \mathrm{n}}$, системы (1). Положим $Y(t) = [X^{-1}(t)]^T$. Тогда $Y(t) = [y_{jk}(t)], \ j, k = \overline{1, n}$, будет фундаментальной матрицей сопряженной системы (7), где $y_{jk}(t) = \dfrac{X_{jk}(t)}{\mathrm{detX(t)}}$, $X_{jk}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента $x_{jk}(t)$ вронскиана $W(T) = \mathrm{detX(t)}$. Далее,

$$\chi[y_{jk}, q] = \chi\left[\frac{X_{jk}}{W}, q\right] = \chi\left[\frac{X_{jk}}{\mathrm{detX(t_0)} \exp\left(\int\limits_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} \mathrm{SpA}(\tau) \mathrm{d}\tau\right)}, q\right] =$$

$$= \chi\left[\frac{X_{jk}}{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau) \mathrm{d}\tau\right)}, q\right] \le \chi[X_{jk}, q] + \chi\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau) \mathrm{d}\tau\right), \mathrm{q}\right] \le$$

$$\le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \chi[x^{(j)}, q] + \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{q(t)} \left(-\int_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau) \mathrm{d}\tau\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \chi[x^{(j)}, q] + \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau) \mathrm{d}\tau\right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \chi[x^{(j)}, q] - \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = -\chi[x^{(k)}, q].$$

Итак, для любого $j \in 1, \ldots, n$, $\ \chi[y_{jk}, q] \le -\chi[x^{(k)}, q]$. Следовательно, $\ \chi[y^{k}, q] \le -\chi[x^{(k)}, q]$. Таким образом,

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] \le 0. \tag{10}$$

С другой стороны, как известно, скалярное произведение любых двух решений $x^{(i)}, y^{(j)}, \ i, j = \overline{1, n}$ есть число, отличное от нуля, в частности, $\ (y^{(k)}, x^{(k)}) = c, \ c \ne 0$. Поэтому из неравенства $|y^{(k)}||x^{(k)}| \ge |c|$, переходя к обобщенным показателям, имеем

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] \ge 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем (8). Теорема 2 доказана.

**Т е о р е м а 3.** *Сопряженная система для обобщенно-правильной относительно $q(t) \in Q$ линейной системы есть также обобщенно-правильная линейная система относительно $q(t)$.*

**Доказательство.** Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется фундаментальная система решений $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$, для которой в силу теоремы 1 выполняется равенство (9). Следовательно, для фундаментальной системы решений $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$ сопряженной системы (7) в силу (8) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\chi[y^{(i)},q]=-\sum_{i=1}^{n}\chi[x^{(i)},q]=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\Big[-\mathrm{SpA}(\tau)\Big]\mathrm{d}\tau=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathrm{q(t)}}\int\limits_{t_0}^{\mathrm{t}}\mathrm{Sp}\Big[-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\tau)\Big]\mathrm{d}\tau.$$

Таким образом, сопряженная система — обобщенно-правильная относительно $q(t)$. Теорема 3 доказана.

**Лемма 2.** *Если взаимно-сопряженные системы (1) и (7) имеют фундаментальные системы $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ и $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$ , для которых при любом $k\in\{1,\dots,n\}$ выполняется равенство (8), то существует точный предел (6).*

**Доказательство.** В силу обобщенного неравенства Ляпунова (2) имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau\le\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\chi[\mathrm{x}^{(\mathrm{i})},\mathrm{q}],$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}\Big[-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\tau)\Big]\mathrm{d}\tau\le\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\chi[\mathrm{y}^{(\mathrm{i})},\mathrm{q}].$$

Складывая почленно эти неравенства, в силу (8) имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau+\overline{\lim_{\mathrm{t}\to\infty}}\frac{1}{\mathrm{q(t)}}\int\limits_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}}\mathrm{Sp}\Big[-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\tau)\Big]\mathrm{d}\tau\le 0.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau\le\underline{\lim_{\mathrm{t}\to\infty}}\frac{1}{\mathrm{q(t)}}\int\limits_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}}\mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Поэтому существует точный предел (6). Лемма 2 доказана.

**Теорема 4.** *Если взаимно-сопряженные системы (1) и (7) имеют фундаментальные системы $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ и $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$ , для которых выполняется равенство (8), то системы (1) и (7) — обобщенно-правильные относительно $q(t)\in Q$.*

**Доказательство.** В силу леммы 2 существует точный предел (6). Если допустить, что системы (1) и (7) не являются обобщенно-правильными относительно $q(t)\in Q$, то имеют место строгие неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\chi[x^{(i)},q]>\lim_{t\to\infty}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\chi[y^{(i)},q]>\lim_{t\to\infty}\frac{1}{q(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}\Big[-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\tau)\Big]\mathrm{d}\tau.$$

Складывая почленно эти неравенства и учитывая (8), получаем противоречие $0 < 0$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\sigma(X,q) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)},q]$ — сумма обобщенных показателей относительно $q(t) \in Q$ фундаментальной системы решений $x^{(1)},\ldots,x^{(n)}$ системы (1).

**Определение 3.** *Фундаментальная система решений и соответствующая фундаментальная матрица называются нормальными относительно $q(t)\in Q$, если сумма их обобщенных показателей является наименьшей по сравнению с другими фундаментальными системами решений.*

Для нормальной фундаментальной системы решений, т.е. для нормального базиса пространства решений системы (1) сумма $\sigma(X,q)$ обозначается через $\sigma(q)$. Таким образом, $\sigma(q) = \min\limits_{X} \sigma(X,q)$. Здесь минимум всегда существует, так как совокупность обобщенных показателей относительно $q(t)$ системы (1) образует конечное множество.

Отметим, что обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений не зависят от выбора нормальной фундаментальной системы решений.

**Определение 4.** *Обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений называются обобщенными показателями Ляпунова системы (1) относительно $q(t)$ и располагаются в следующем порядке*

$$-\infty < \lambda_n(q) \leq \ldots \leq \lambda_1(q) < +\infty,$$

*$\lambda_1(q)$ называется старшим обобщенным показателем системы (1), $\lambda_n(q)$ — младшим верхним обобщенным показателем. Обобщенные показатели сопряженной системы (7) обозначаются через $\mu_i(q),\ i = \overline{1,n}$, но их в силу удобства располагаем в обратном порядке, т.е.*

$$-\infty < \mu_1(q) \leq \ldots \leq \mu_n(q) < +\infty.$$

**Определение 5.** *Обобщенным коэффициентом Ляпунова относительно $q(t)$ называется число*

$$\Lambda(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(q) - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{SpA}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Из теоремы 1 следует, что всегда $\Lambda(q)\geq 0$. Если $\Lambda(q) = 0$, то система (1) является обобщенно-правильной относительно $q(t)$.

**Определение 6.** *Обобщенным коэффициентом Перрона называется число*

$$\Pi(q) = \max_{i}\{\lambda_i(q) + \mu_i(q)\}.$$

**Теорема 5. (Обобщение теоремы Перрона.)** *Для того, чтобы система (1) была обобщенно-правильной относительно $q(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Pi(q) = 0$.*

**Доказательство.** Доказательство следует из теорем 2, 4 и определения 6. Теорема 5 доказана.

**Замечание 1.** *Название "обобщенно-правильные системы" использовано в работе [4]. В этой работе асимптотика решений определяется функцией вида $\exp\int\limits_0^t \rho(\tau)d\tau$ и рассматриваются системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами на полуоси $t \geq 0$ [4, с. 575]. При этом в некотором подклассе линейных систем с ограниченными коэффициентами получены обобщения известных признаков правильности [4, последний абзац с. 590].*

**З а м е ч а н и е 2.** *Название "обобщенные показатели Ляпунова" использовано в работах [5], [6]. Как следует из определения, приведенного в работе [5], показатели определяются с помощью эндоморфизма метризованного абстрактного векторного расслоения, который построен в работе [7], т.е. рассматривается классический случай, когда $q(t) = t$. В работе [6] установлены типичные свойства этих показателей в данном определенном классе.*

**З а м е ч а н и е 3.** *Если $q(t) = t$, то обобщенные коэффициенты Ляпунова и Перрона превращаются в обычные коэффициенты Ляпунова и Перрона.*

Небольшая история применения некоторых асимптотических характеристик в решении задачи экспоненциальной устойчивости имеется в обзоре [8].

## Цитированная литература


1. **Ляпунов А. М.** Собрание сочинений. М.-Л., 1956. Т. 2.

2. **Изобов Н. А.** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн.: Итоги науки и техники (Мат. анализ). М. 1974. Т. 12. С. 71 – 146.

3. **Алдибеков Т. М.** // Математический журнал. Алматы. 2001. Т. 1. № 2. С. 10 – 14.

4. **Былов Б. Ф.** // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 4. С. 575 – 591.

5. **Фодор Я.** // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1094.

6. **Фодор Я.** // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2180 – 2181.

7. **Миллионщиков В. М.** // Математические заметки. 1985. Т. 38, вып. 1. С. 92 – 109.

8. **Изобов Н. А.** // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1011 – 1027.

9. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.

10. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

11. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. М., 1970.

12. **Розенвассер Е. Н.** Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М., 1977.


*Поступила в редакцию 3.06.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 25 — 31*

*УДК 519.624*

# КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ СЕМЕЙСТВА ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. Т. Асанова

Институт Математики МОиН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125, anar@math.kz

Рассматривается семейство двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методом параметризации установлены необходимые и достаточные условия существования единственного решения исследуемой задачи в терминах исходных данных.

Рассматривается следующая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + f(x,t), \qquad x \in [0,\omega], \quad t \in [0,T], \quad v \in R^n, \tag{1}$$

$$P(x)v(x,0) + S(x)v(x,T) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

где матрица $A(x,t)$, функция $f(x,t)$ непрерывны на $\overline{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T]$, матрицы $P(x)$, $S(x)$, функция $\varphi(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, $||v(x,t)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |v_i(x,t)|$, $||A(x,t)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$. Пусть $C(\overline{\Omega}, R^n)$ — пространство непрерывных функций $v : \overline{\Omega} \to R^n$ с нормой

$$||v(x,t)||_1 = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}} ||v(x,t)||.$$

При фиксированных $x \in [0,\omega]$ задача (1), (2) является линейной двухточечной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая различными методами исследована в [1–4]. В работе [5] для линейной двухточечной краевой задачи на основе метода параметризации (м.п.) получены коэффициентные признаки однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. При изменении переменной $x$ на интервале $[0,\omega]$ получим семейство двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. К задаче (1), (2) применяем м.п. Возьмем шаг $h > 0$ и произведем разбиение: $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$. Через $v_r(x,t)$ обозначим сужение функции $v(x,t)$ на $\Omega_r = [0,\omega] \times [(r-1)h, rh)$. Тогда задача (1), (2) будет эквивалентна существованию решения $v_r(x,t)$ семейства многоточечных краевых задач

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + f(x,t), \quad x \in [0,\omega], \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{3}$$

Keywords: *differential equation, two-point boundary-value problem, parametrization's method, correct solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A12

$$P(x)v_1(x,0)+S(x)\lim_{t\to T-0}v_N(x,t)=\varphi(x),\qquad x\in[0,\omega],\tag{4}$$

$$\lim_{t\to rh-0}v_r(x,t)=v_{r+1}(x,rh),\qquad x\in[0,\omega],\quad r=1,2,\dots,N-1,\tag{5}$$

где (5) — условия склеивания решения во внутренних линиях разбиения. Отсюда вследствии непрерывности коэффициентов $A(x,t)$, правой части $f(x,t)$ вытекает непрерывность $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ и функция $v(x,t)$, получаемая склеиванием систем функций $v_r(x,t)$, удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Если $v(x,t)$ — решение семейства краевых задач (1), (2), то система его сужений $\{v_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, является решением семейства многоточечных краевых задач (3)–(5). И, наоборот, если система функций $\{v_r(t,x)\}$, $r=\overline{1,N}$, — решение задачи (3)–(5), то функция $v(x,t)$, получаемая склеиванием систем функций, будет решением исходного семейства краевых задач (1), (2).

Пусть $\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\Omega_r$ функций $v_r:\Omega_r\to\to R^n$, $r=1,2,\dots,N$, с нормой $||v_r(x,t)||_2=\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_r}||v_r(x,t)||$, $L(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов $C^*:X\to X$ ($X$ — банахово пространство) с индуцированной нормой. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значения функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$ и в каждой области $\Omega_r$ сделаем замену $\widetilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x)$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial t}=A(x,t)\widetilde{v}_r+A(x,t)\lambda_r(x)+f(x,t),\tag{6}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h)=0,\quad x\in[0,\omega],\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=1,2,\dots,N,$$

$$P(x)\lambda_1(x)+S(x)\lambda_N(x)+S(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N(x,t)=\varphi(x),\qquad x\in[0,\omega],\tag{7}$$

$$\lambda_r(x)+\lim_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r(x,t)=\lambda_{r+1}(x),\qquad x\in[0,\omega],\quad r=\overline{1,N-1}.\tag{8}$$

Если функция $v(x,t)$ является решением задачи (1), (2), то система пар $(\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t))\in\in C([0,\omega],R^n)\times\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$, $r=\overline{1,N}$, будет решением (6)–(8), и наоборот, если система пар $(\lambda^*_r(x),\widetilde{v}^*_r(x,t))\in C([0,\omega],R^n)\times\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$, $r=\overline{1,N}$ — решение задачи (6)–(8), то функция $v^*(x,t)$, полученная путем склеивания систем функций $\{\lambda^*_r(x)+\widetilde{v}^*_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, принадлежит $C(\overline{\Omega},R^n)$ и будет решением задачи (1), (2). В отличие от (3)–(5) в задаче (6)–(8) появились начальные условия $\widetilde{v}_r(x,(r-1)h)=0$, позволяющие определить функции $\widetilde{v}_r(x,t)$ из интегральных уравнений

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\Big[A(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)+A(x,\tau)\lambda_r(x)+f(x,\tau)\Big]d\tau.\tag{9}$$

Подставив вместо $v_r(x,\tau)$ правую часть (9) и повторив этот процесс $\nu$ раз ($\nu=1,2,\dots$) получим

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\Big[\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}A(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\dots+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)\ldots\times$$

$$\times\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\Big]\lambda_r(x)+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}f(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\dots+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1. \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$D_{\nu,r}(h,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\cdots+\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\ldots\times$$

$$\times\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(h,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh} f(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+$$

$$+\cdots+\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(h,x,\widetilde{v}_r)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1.$$

Переходя в правой части (10) к пределу при $t\to rh-0$, находим $\lim\limits_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, $x\in\in[0,\omega]$. Подставляя их в (7), (8) и умножая обе части (7) на $h>0$, для неизвестных функций $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$, при каждом фиксированном $x\in[0,\omega]$ получаем систему $nN$ уравнений:

$$Q_\nu(h,x)\lambda(x)=-F_\nu(h,x)-G_\nu(h,x,\widetilde{v}), \qquad (11)$$

где

$$Q_\nu(h,x)=\left|\begin{array}{cccccc} P(x)h & 0 & 0 & \ldots & 0 & S(x)[I+D_{\nu,N}(h,x)]h\\ I+D_{\nu,1}(h,x) & -I & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & I+D_{\nu,2}(h,x) & -I & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I+D_{\nu,N-1}(h,x) & -I \end{array}\right|,$$

$$F_\nu(h,x)=\big(h\varphi(x)+hS(x)F_{\nu,N}(h,x),F_{\nu,1}(h,x),\ldots,F_{\nu,N-1}(h,x)\big),$$
$$G_\nu(h,x,\widetilde{v})=\big(hS(x)G_{\nu,N}(h,x,\widetilde{v}_N),G_{\nu,1}(h,x,\widetilde{v}_1),\ldots,G_{\nu,N-1}(h,x,\widetilde{v}_{N-1})\big).$$

В случае $h=T$ имеем $Q_\nu(T,x)=T\{P(x)+S(x)[I+D_\nu(T,x)]\}$.
Матрица $Q_\nu(h,x)$ имеет специальную блочно-диагональную структуру и из непрерывности исходных данных вытекает, что она является непрерывной по $x\in[0,\omega]$ для любого $\nu=1,2,\ldots$. Для нахождения $nN$ пар $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$ получим замкнутую систему уравнений (9), (11) для всех $x\in[0,\omega]$. В силу предположений относительно $A(x,t)$ и $f(x,t)$ для любых $\lambda_r(x)\in\in C([0,\omega],R^n)$, $r=\overline{1,N}$, решение задачи Коши (6) представимо в виде суммы двух равномерно сходящихся на $\Omega_r$ рядов:

$$\widetilde{v}_r(x,t)=\Big[\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots\Big]\lambda_r(x)+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots.$$

Отсюда находим $\lim\limits_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, $x\in[0,\omega]$, подставляя которые в (7), (8) и умножая обе части (8) на $h^{-1}$, приходим к системе $nN$ уравнений

$$h^{-1}Q^*(h,x)\lambda(x)=-F^*(A,f,\varphi,h,x), \tag{11*}$$

где $Q^*(h,x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}Q_\nu(h,x)$, $F^*(A,f,\varphi,h,x)=h^{-1}\lim\limits_{\nu\to\infty}F_\nu(h,x)$. Так как сходимость предельных соотношений является равномерной относительно $x\in[0,\omega]$, то матрица $Q^*(h,x)$ и функция $F^*(A,f,\varphi,h,x)$ являются непрерывными по $x\in[0,\omega]$. Если $\overline{\lambda}(x)=(\overline{\lambda}_1(x),\ldots,\overline{\lambda}_N(x))$ — решение уравнения (11*), то, решая задачу Коши (6) при $\lambda_r(x)=\overline{\lambda}_r(x)$, находим $\overline{v}_r(x,t)$, и склеивая систему функций $(\overline{\lambda}_r(x)+\overline{v}_r(x,t))$ на $[0,T]$, получаем $\overline{v}(x,t)$ — решение задачи (1), (2), принадлежащее $C(\overline{\Omega},R^n)$. С другой стороны, если $v(x,t)$ — решение задачи (1), (2), то в силу эквивалентности задач (1), (2) и (6)–(8) вектор-функция $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x))$, составленная из значений $v(x,t)$ в линиях разбиений: $t=(r-1)h$, $r=1,2,\ldots,N$, будет удовлетворять уравнению (11*). При каждом $x\in[0,\omega]$ уравнение (11*) является двухточечной точной разностной схемой [6] для краевой задачи (1), (2).

Так как неизвестными являются как функции $\lambda_r(x)$, так и функции $\widetilde{v}_r(x,t)$, применяется итерационный метод. При этом решение уравнений (9), (11) находим как предел последовательности $\{\lambda_r^{(k)}(x),\,\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\}$, определяемой по следующему алгоритму:

Шаг 0. Начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}(x)$ для каждого $x\in[0,\omega]$ определяем из уравнения $Q_\nu(h,x)\lambda(x)=-F_\nu(h,x)$. На $\Omega_r$, решая семейство задач Коши (6) при $\lambda_r(x)=$ $=\lambda_r^{(0)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,N}$.

Шаг 1. Подставив найденные $\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, в правую часть (11), из уравнения $Q_\nu(h,x)\lambda(x)=-F_\nu(h,x)-G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(0)})$ для каждого $x\in[0,\omega]$ определяем $\lambda^{(1)}(x)$. На $\Omega_r$, решая семейство задач Коши (6) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)$, $r=\overline{1,N}$.

И т.д.

Условия следующей теоремы обеспечивают сходимость предложенного алгоритма и существование единственного решения задачи (1), (2).

**Теорема 1.** *Пусть при некоторых $h>0: Nh=T$ и $\nu,\nu=1,2,\ldots,$ для каждого $x\in[0,\omega]$ матрица $Q_\nu(h,x):R^{nN}\to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства*

$$||[Q_\nu(h,x)]^{-1}||\le\gamma_\nu(h,x)\le\bar{\gamma}_\nu(h),\qquad \bar{\gamma}_\nu(h)-\mathrm{const}, \tag{12$a$}$$

$$q_\nu(h,x)=\gamma_\nu(h,x)\cdot\max(1,h||S(x)||)\left[e^{\alpha(x)h}-1-\alpha(x)h-\cdots-\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}\right]\le\beta<1, \tag{12$b$}$$

*где $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||A(x,t)||$, $\quad\beta-\mathrm{const}$.*

*Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $v^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}||v^*(x,t)||\le\left[e^{\alpha(x)h}\gamma_\nu(h,x)\frac{\max(1,h||S(x)||)}{1-q_\nu(h,x)}\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}+1\right]M(h,x)+$$

$$+\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1+h||S(x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}\max\Big(||\varphi(x)||,\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||\Big)h, \tag{13}$$

*где* $M(h,x)=\gamma_\nu(h,x)[e^{\alpha(x)h}-1]\max\left\{1+h||S(x)||\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}\times$

$$\times\max\Big(||\varphi(x)||,\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||\Big)h+e^{\alpha(x)h}\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||h.$$

**Доказательство.** Из непрерывности и обратимости $Q_\nu(h,x)$ при всех $x\in[0,\omega]$ следует непрерывность $[Q_\nu(h,x)]^{-1}$. Поэтому $\lambda_r^{(0)}(x)\in C([0,\omega],R^n)$, $r=\overline{1,N}$, и

$$||\lambda^{(0)}(x)||_3=\max_r||\lambda_r^{(0)}(x)||\leq\gamma_\nu(h,x)||F_\nu(h,x)||_3\leq \tag{14}$$

$$\leq\gamma_\nu(h,x)\max\left\{h||\varphi(x)||+h||S(x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||h,\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||h\right\}\leq$$

$$\leq\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1+h||S(x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}\max\Big(||\varphi(x)||,\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||\Big)h.$$

При наших предположениях задача Коши (6) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$ имеет единственное решение $\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\in\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$, $r=\overline{1,N}$. По неравенству Гронуолла-Беллмана,

$$||\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)||\leq\Big[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}-1\Big]||\lambda_r^{(0)}(x)||+e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}||f(x,t)||h,\quad r=\overline{1,N}.$$

Отсюда, учитывая (14), получим

$$\max_r\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}||\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)||\leq M(h,x).$$

По алгоритму определяем $\lambda_r^{(1)}(x)\in C([0,\omega],R^n)$, $r=\overline{1,N}$, и оцениваем разность $\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)$

$$||\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)||_3\leq\gamma_\nu(h,x)||G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(0)})||_3\leq\gamma_\nu(h,x)\max(1,h||S(x)||)\frac{[\alpha(x)]^\nu}{\nu!}\times$$

$$\times\max_r\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}||\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)||\leq\gamma_\nu(h,x)\max(1,h||S(x)||)\frac{[\alpha(x)]^\nu}{\nu!}M(h,x). \tag{15}$$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательность пар $(\lambda_r^{(k)}(x),\,\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t))\in$ $\in C([0,\omega],R^n)\times\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,\dots$ Снова воспользовавшись неравенством Гронуолла-Беллмана, при каждом $r=1,2,\dots,N$ оценим разность решений задач Коши через разность параметров для всех $x\in[0,\omega]$ :

$$||\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)||\leq\Big[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}-1\Big]||\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)||. \tag{16}$$

Из (11) следует

$$||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||_3=||[Q_\nu(h,x)]^{-1}\cdot[G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(k)})-G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(k-1)})]||_3\leq\max(1,h||S(x)||)\times$$

$$\times\gamma_\nu(h,x)\max_r\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha(x)\dots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(x)||\widetilde{v}_r^{(k)}(x,\tau_\nu)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,\tau_\nu)||d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\dots d\tau_1\right\}.$$

Подставляя в это выражение (16) и вычисляя повторные интегралы, получим

$$||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||_3\leq q_\nu(h,x)||\lambda^{(k)}(x)-\lambda^{(k-1)}(x)||_3\leq$$

$$\leq\beta||\lambda^{(k)}(x)-\lambda^{(k-1)}(x)||_3,\qquad k=1,2,\dots. \tag{17}$$

В силу условий (12b) и неравенств (15)–(17), последовательность $(\lambda_r^{(k)}(x),\,\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t))$ равномерно сходится к $(\lambda_r^*(x),\,\widetilde{v}_r^*(x,t))\in C([0,\omega],R^n)\times\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$, $r=\overline{1,N}$ при $k\to\infty$ и имеют место оценки

$$||\lambda^*(x)||_3\leq\left\{\Big[e^{\alpha(x)h}-1\Big]\gamma_\nu(h,x)\frac{\max(1,h||S(x)||)}{1-q_\nu(h,x)}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+1\right\}M(h,x),$$

$$||\widetilde{v}^*(x,t)||_3 \le \gamma_\nu(h,x)\frac{\max(1,h||S(x)||)}{1-q_\nu(h,x)}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}M(h,x)+$$

$$+\gamma_\nu(h,x)\max\Big\{1+h||S(x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\Big\}\max\Big(||\varphi(x)||,\max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||\Big)h.$$

Так как $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))$ является решением задачи (6)–(8), то функция $v^*(x,t)$, получаемая склеиванием систем функций $(\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(x,t))$, будет решением исходной задачи (1), (2) и справедлива оценка (13). Покажем единственность. Пусть $v^*(x,t)$, $v^{**}(x,t)$ — два решения задачи (1), (2). Тогда соответствующие им системы пар $(\lambda_r^*(x),\widetilde{v}_r^*(x,t))$, $(\lambda_r^{**}(x),\widetilde{v}_r^{**}(x,t))$, $r=\overline{1,N}$, будут решениями краевой задачи с параметр-функциями (6)–(8) и аналогично (15), (16)

$$||\widetilde{v}_r^*(x,t)-\widetilde{v}_r^{**}(x,t)|| \le \Big[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}-1\Big]||\lambda_r^*(x)-\lambda_r^{**}(x)||,$$

$$||\lambda^*(x)-\lambda^{**}(x)||_3 \le q_\nu(h,x)||\lambda^*(x)-\lambda^{**}(x)||_3,$$

где $q_\nu(h,x)\le\beta<1$. Отсюда следует, что $\lambda_r^*(x)=\lambda_r^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(x,t)=\widetilde{v}_r^{**}(x,t)$, $r=1,2,\ldots,N$, т.е. $v^*(x,t)=v^{**}(x,t)$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

**О п р е д е л е н и е .** *Задача (1), (2) называется корректно разрешимой, если для любых $f(x,t)$, $\varphi(x)$ она имеет единственное решение $v(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ и для него справедлива оценка*

$$||v(x,t)||_1 \le K\max\Big(\max_{x\in[0,\omega]}||\varphi(x)||,||f(x,t)||_1\Big),$$

*где $K$ — const, не зависящая от $\varphi(x)$, $f(x,t)$.*

Следующее утверждение показывает, что при фиксированном $h>0:Nh=T$ условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для корректной разрешимости.

**Т е о р е м а 2.** *Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для некоторых $h>0:Nh=T$, и $\nu,\nu=1,2,\ldots,$ функциональная матрица $Q_\nu(h,x): C\big([0,\omega],R^{nN}\big)\to C\big([0,\omega],R^{nN}\big)$ обратима и выполняются неравенства*

$$||[Q_\nu(h,x)]^{-1}||_{L(C([0,\omega],R^{nN}))} \le \bar{\gamma}_\nu(h), \qquad \bar{\gamma}_\nu(h)-\text{const},$$

$$\bar{q}_\nu(h)=\bar{\gamma}_\nu(h)\cdot\max\Big(1,h\max_{x\in[0,\omega]}||S(x)||\Big)\Big[e^{\bar{\alpha}h}-1-\bar{\alpha}h-\cdots-\frac{[\bar{\alpha}h]^\nu}{\nu!}\Big]<1,$$

*где $\bar{\alpha}=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\alpha(x)$.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Из утверждения теоремы 1 вытекает корректная разрешимость задачи (1), (2).

Покажем необходимость. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима. Докажем обратимость матрицы $Q^*(h,x):C\big([0,\omega],R^{nN}\big)\to C\big([0,\omega],R^{nN}\big)$. Рассмотрим уравнение $Q^*(h,x)\lambda(x)=0$. Пусть $\tilde{\lambda}(x)\in KerQ^*(h,x)\subseteq C\big([0,\omega],R^{nN}\big)$ и $||\tilde{\lambda}(x)||_3\ne0$. Тогда система пар $(\tilde{\lambda}_r(x),\tilde{\widetilde{v}}_r(x,t))$, где $\tilde{\widetilde{v}}_r(x,t)$ — решение задачи Коши (6) при $\lambda_r(x)=\tilde{\lambda}_r(x)$, будет нетривиальным решением однородной ($f(x,t)=0$, $\varphi(x)=0$) многоточечной краевой задачи с параметр-функцией (6)–(8). Отсюда следует существование ненулевого решения двухточечной краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(x,t)v, \qquad t\in[0,T], \quad x\in[0,\omega],$$

$$P(x)v(x,0)+S(x)v(x,T)=0, \qquad x\in[0,\omega],$$

что противоречит корректной разрешимости задачи (1), (2). Поэтому функциональная матрица $Q^*(h,x):C\big([0,\omega],R^{nN}\big)\to C\big([0,\omega],R^{nN}\big)$ обратима и

$$||[Q^*(h,x)]^{-1}||_{L(C([0,\omega],R^{nN}))} \le \gamma(h).$$

В силу выполнения соотношения

$$||Q^*(h,x) - Q_\nu(h,x)||_{L(C([0,\omega],R^{nN}))} \le \max\Big(1, h\max_{x\in[0,\omega]}||S(x)||\Big)\Big[e^{\bar\alpha h} - 1 - \dots - \frac{[\bar\alpha h]^\nu}{\nu!}\Big]$$

и стремления правой части неравенства к нулю при $\nu \to \infty$ по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [7, с. 142] найдется $\bar\nu$, при котором $Q_{\bar\nu}(h,x)$ : $C\big([0,\omega],R^{nN}\big) \to C\big([0,\omega],R^{nN}\big)$ будет обратимой и

$$||[Q_{\bar\nu}(h,x)]^{-1}||_{L(C([0,\omega],R^{nN}))} \le \bar\gamma_{\bar\nu}(h), \qquad \bar q_{\bar\nu}(h) < 1.$$

Теорема 2 доказана.

Устремив $\nu$ к бесконечности в оценке (13), установим, что

$$\max_{t\in[0,T]}||v^*(x,t)|| \le K(x)\max\Big(||\varphi(x)||, \max_{t\in[0,T]}||f(x,t)||\Big),$$

где $K(x) = \gamma(h,x)\max\big[1 + h||S(x)||e^{\alpha(x)h}, e^{\alpha(x)h}\big]$. Поэтому, взяв максимум в правой части по $x\in[0,\omega]$, получим константу корректной разрешимости $K$, определяемую по исходным данным задачи (1), (2) и не зависящую от $x, h, \varphi(x), f(x,t)$.

Таким образом, одним из основных условий однозначной разрешимости является обратимость матрицы $Q_\nu(h,x)$ при некоторых $\nu, h$ для всех $x\in[0,\omega]$. В работе [5] с учетом специальной блочно-ленточной структуры матрицы $Q_\nu(h,x)$ была явно вычислена обратная матрица $[Q_\nu(h,x)]^{-1}$ в виде рекуррентных формул для каждого фиксированного $x\in[0,\omega]$. Чтобы привести их, введем следующее обозначение: $M(x) = P(x) + S(x)\prod_{s=N}^{1}[I + D_{\nu,s}(h,x)]$. Обратимость $(nN\times nN)$-матрицы $Q_\nu(h,x)$ для всех $x\in[0,\omega]$ эквивалентна обратимости $(n\times n)$-матрицы $M(x)$ и $[Q_\nu(h,x)]^{-1} = \{d_{rj}(x)\}$, $r,j = 1,2,\dots,N$, где

$$d_{11}(x) = h^{-1}[M(x)]^{-1}, \qquad d_{1k}(x) = [M(x)]^{-1}S(x)\prod_{s=N}^{k}[I + D_{\nu,s}(h,x)], \quad 1 < k \le N,$$

$$d_{rr}(x) = [I + D_{\nu,r-1}(h,x)]d_{r-1,r}(x) - I, \qquad r = 2,3,\dots,N,$$
$$d_{rj}(x) = [I + D_{\nu,r-1}(h,x)]d_{r-1,j}(x), \qquad j \ne r.$$

## Цитированная литература


1. **Keller H. B.** Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell: Walthan, 1968.

2. **Roberts S. M., Shipman J. S.** Two-point boundary-value problems: Shooting methods. N.Y.: Elsevier, 1972.

3. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.

4. **Кигурадзе И. Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоги науки и техники. Сер. совр. пробл. матем. 1987. Т. 30, С. 3 – 103.

5. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

6. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 1. С. 5 – 63.

7. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М., 1974.



*Поступила в редакцию 07.06.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 32 — 40*

*УДК 681.5*

# АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ КОНФИГУРАЦИЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. I

Е. Т. Аяганов, С. В. Носкова

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, Ayaganov@mail.ru

Рассматривается проблема исследования динамического свойства диссипативности в среднеквадратическом стохастической, нестационарной системы управления с изменяющейся конфигурацией объектом с запаздыванием на основе стохастического аналога прямого метода Ляпунова, с использованием функции Ляпунова и подхода Разумихина.

## 1. Введение

В настоящей работе рассматривается класс стохастических объектов с запаздыванием, характеризуемых допустимой и аварийной областями функционирования. Качественное управление нестационарными технологическими объектами с запаздыванием при существующих ограничениях на коэффициенты усиления дают методы адаптивного управления [1, 2]. Другой подход, позволяющий управлять такими объектами, основан на идее целенаправленного изменения структуры регулятора, заложенной в основу широкого класса систем с переменной структурой [3, 4]. Перспективными классами систем автоматического управления стохастическими объектами с запаздыванием в условиях параметрической неопределенности явились бинарные системы управления, предложенные в трудах С. В. Емельянова и его учеников [5, 6].

Особенности функционирования объекта управления в допустимой и аварийной областях привели к необходимости создания систем управления, учитывающих не только свойства нестационарности, неопределенности, запаздывания, но и разнорежимности ведения технологических процессов.

В настоящее время известен ряд подходов к построению систем управления разнорежимными технологическими объектами, основанных на логико-динамических [7], многоструктурных [8], многофункциональных [9], двухзонных, следящих [10], координируемых системах автоматического управления [7].

Keywords: *stochastic object with delay, stochastic analogue of direct Lyapunov's method, property of dissipativity in mean-square, control systems with varying configuration*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

Эти подходы к созданию систем управления разнорежимными технологическими объектами с запаздыванием опираются на предположении о стационарности и детерминированности динамических процессов.

Проблема автоматического управления существенно нестационарными, стохастическими, разнорежимными объектами с запаздыванием далека от разрешения и представляет теоретическую и практическую важность.

Наиболее перспективным классом систем управления рассматриваемым классом объектов с запаздыванием являются системы автоматического управления с изменяющейся конфигурацией, разработанных на базе принципа бинарности, подходе Разумихина и концепции метода сравнения с векторной функцией Ляпунова.

Как будет показано далее, предлагаемая система автоматического управления с изменяющейся конфигурацией включает в себя подсистему вывода, подсистему притяжения, логических ключей и блока логических ключей. Подсистема вывода предназначена для обеспечения в замкнутой системе управления в среднеквадратическом свойства диссипативности траекторий движения системы. Подсистема притяжения предназначена для обеспечения в среднеквадратическом свойства притяжения траекторий движения системы к ограниченному множеству конусного типа.

Необходимо отметить, что в работах [11–13] решается задача о диссипативности непрерывной, частотно-импульсных систем первого и второго рода в области.

Работа [14] посвящена исследованию класса нелинейных дискретных частотно-импульсных систем управления первого рода, содержащего системы с частотной, широтной, амплитудной, либо комбинированной модуляцией. Здесь дискретным аналогом прямого метода Ляпунова получены условия диссипативности (устойчивости некоторого замкнутого ограниченного множества фазового пространства) в целом и в области.

В [15] рассматривается задача анализа свойства диссипативности в среднеквадратичном многомерных стохастических нелинейных систем управления с амплитудно-импульсной модуляцией.

Работа [16] посвящена изложению методов синтеза управления с обратной связью для детерминированных непрерывных и дискретных, в общем случае нелинейных и нестационарных систем. Эти задачи решаются в смысле определений устойчивости и диссипативности, приведенных в [16].

Исследованию свойства диссипативности непрерывных детерминированных и стохастических систем с запаздыанием прямым методом Ляпунова с использованием функционала Ляпунова-Красовского посвящена работа [19].

Исследования, связанные с анализом свойства притяжения, близкие по смыслу данной работе, рассматривались в трудах С. В. Емельянова и его учеников [5, 6].

Статья состоит из двух частей. Первая часть настоящей статьи посвящена решению задачи исследования динамического свойства диссипативности в среднеквадратическом для системы автоматического управления с изменяющейся конфигурацией нестационарным стохастическим объектом с запаздыванием на основе стохастического аналога прямого метода Ляпунова [17], принципа бинарности, подхода Разумихина [18].

## 2. Постановка задачи

Предположим, что математическая модель многомерного, нестационарного объекта управления с запаздыванием по вектору состояния, на который действуют координатные мультипликативные возмущения (векторный винеровский процесс) может быть представлена в форме стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом типа Ито [19]

$$\begin{cases} dx(t) = [A(t)\,x(t) + A_h(t)\,x(t-h) + B(t)\,U(t)]dt + D(x(t))d\zeta(t), t \geq t_0, \\ \qquad x(t_o + v) = \varphi(v), \quad -h \leq v \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [t_0, \infty) \equiv J(t_0)$; $x(t) \in R^n$ — вектор состояния объекта; $x(t-h) \in R^n$ — вектор состояния, запаздывающий на время h; $U(t) \in R^m$ — векторное управление; $h = \text{const} > 0$ — величина запаздывания; $\varphi(\upsilon) \in C([-h,0], R^n)$ — случайная, непрерывная, ограниченная начальная векторная функция; $C([-h,0], R^n)$ — пространство непрерывных функций $\varphi(\upsilon)$ на отрезке $[-h, 0]$ с нормой $\| \varphi(\upsilon) \|_h = \max\limits_{-h \le \upsilon \le 0} \| \varphi(\upsilon) \|$; $\| \varphi(\upsilon) \|$ — евклидова норма вектора $\varphi(\upsilon) \in R^n$; $\| \varphi(\upsilon) \| < \nu(t_0)$, $\nu(t_0) \in [t_0 - h, t_0]$, $\nu(t_0)$ — некоторое число; $\zeta(t)$ — $n$-мерный винеровский случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, имеющими гауссовское распределение с параметрами:

$$M\left[\zeta(t)\right] = 0, \quad M\left[\zeta(t)\zeta^T(\upsilon)\right] = R(t)\Delta(t-\upsilon), \quad R(t) \le R = \text{const}, \tag{2}$$

где $R(t)$ — матрица интенсивности [20]; $\Delta(t-\upsilon)$ — дельта-функция Дирака; $D \in R^{n\times n}$ — функциональная матрица [20]; $A(t), A_h(t), B(t)$ — кусочно-непрерывные на $J(t_0)$ функциональные матрицы соответствующих размерностей, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$A^- \le A(t) \le A^+, \quad A_h^- \le A_h(t) \le A_h^+, \quad B^- \le B(t) \le B^+, \tag{3}$$

$A^\pm$, $A_h^\pm \in R^{n\times n}$, $B^\pm \in R^{m\times n}$ — постоянные матрицы.

Предполагается, что выполнены все условия, при которых вектор состояния $x(t)$ рассматриваемой системы управления представляет собой непрерывный с вероятностью единица строго марковский процесс [17].

Тогда в пространстве состояний $R^n$ можно выделить следующие области:

- допустимая область функционирования $\vartheta(x)$, ограниченная, замкнутая, определяемая технологическими ограничениями на компоненты вектора состояния;

- аварийная область функционирования $Q = R^n \backslash \vartheta(x)$, характеризуемая нарушениями технологических требований;

- область $G_{2\delta}$, ограниченная, замкнутая конусного типа, определяемая ограничениями на желаемую динамику замкнутой, стохастической системы автоматического управления с запаздыванием с заданными количественными и качественными показателями функционирования;

- область $G_{1\delta}$, которая является дополнением области $G_{2\delta}$ до области $\vartheta(x)$, т.е. $G_{1\delta} = \vartheta(x) \backslash G_{2\delta}$.

При функционировании в области аварийных режимов $Q$ желаемая динамика замкнутой стохастической подсистемы управления характеризуется уравнением

$$\sigma_1(t) = c_1^T x(t), \tag{4}$$

где $\sigma_1(t) \in R^m$, $c_1 \in R^{m\times n}$ — константная матрица.

Желаемый режим движения замкнутой, стохастической подсистемы управления, функционирующей в $\vartheta(x)$, задается в виде

$$\sigma(t) = c^T x(t), \tag{5}$$

где $\sigma(t) \in R^m$, $c^T \in R^{m\times n}$ — константная матрица.

Вокруг данного режима движения (5) выделяется область $G_{2\delta}$ с границами $\sigma^-(t) = 0$, $\sigma^+(t) = 0$. Эту границу $\partial G_{2\delta}$ можно определить следующим образом [21]

$$\partial G_{2\delta} = \{M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon)) \mid^2\right] : \sigma^+(t) = \sigma(x(t)) + \delta\beta \mid x(t) \mid = 0,\ \sigma^-(t) = \sigma(x(t)) - \delta\beta \mid x(t) \mid = 0\}, \tag{6}$$

где $\delta \in R^{m\times m}$, $\delta = \text{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ — диагональная матрица положительных чисел таких, что $0 < \delta_i \le 1$, $\delta_i = \text{const}$, $i = \overline{1,m}$, $\beta \in R^{m\times n}$ — матрица с неотрицательными компонентами такими, что $0 \leq \beta_{ij} \leq 1$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $\mid x(t) \mid$ — вектор, составленный из модулей компонент вектора состояния $x(t) \in R^n$, $\mid x(t) \mid = (\mid x_1 \mid, \ldots, \mid x_n \mid)^T$.

Величины $c$, $\beta$, $\delta$ определяют желаемую динамику замкнутой стохастической системы автоматического управления, конфигурацию и размеры множества конусного типа [21].

Конфигурация и размеры области $G_{2\delta}$ определяются требованиями технического задания на проектирование системы автоматического управления.

Выражения для выделенных областей имеют вид

$$\begin{gathered}\vartheta(x) = \{M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon)) \mid^2\right] : \inf_{t \geq t_0} x^T(t)H(t)x(t) \leq \chi^2, \chi = \text{const} > 0\}, \quad Q = R^n \backslash \vartheta(x), \\ G_{2\delta} = \{M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon)) \mid^2\right] : |\sigma(x(t))| \leq \delta\beta|x(t)|\}, \quad G_{1\delta} = \vartheta(x) \backslash G_{2\delta},\end{gathered} \tag{7}$$

где $\chi$ — оценка размера предельного множества $\vartheta(x)$; $H(t)$ — функциональная, положительно-определенная, симметрическая матрица размерности $(n \times n)$.

В зависимости от областей функционирования $Q$, $G_{2\delta}$, $G_{1\delta}$, содержательная постановка задач управления в среднеквадратическом рассматриваемым классом объектов с запаздыванием сводится к следующим задачам управления:

- в области $Q$ необходимо так управлять технологическим объектом, чтобы обеспечить в среднеквадратическом попадание траекторий движения (форсированный "вывод" объекта управления) из $Q$ в $\vartheta(x)$;

- в области $G_{1\delta}$ необходимо так управлять объектом, чтобы обеспечить в среднеквадратическом свойство притяжения траекторий к множеству конусного типа $G_{2\delta}$.

Для решения вышеперечисленных задач управления предназначена система автоматического управления с изменяющейся конфигурацией, состоящая из подсистем вывода, подсистем притяжения, логических ключей и блока логических ключей [20].

Управление в системе автоматического управления с изменяющейся конфигурацией формируется следующим образом

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{если} \quad x(t,\varphi(\upsilon)) \in Q, \\ u_2(t), & \text{если} \quad x(t,\varphi(\upsilon)) \in \vartheta(x). \end{cases} \tag{8}$$

При функционировании в области аварийных режимов $Q$ алгоритм векторного управления представляется следующим образом

$$U_1(t) = S^{\sigma_1(t)} k_1 \mid x(t) \mid, \tag{9}$$

где $k_1 \in R^{m \times n}$ — постоянная матрица настраиваемых параметров стохастической подсистемы вывода с запаздыванием; $S^{\sigma_1(t)}$ — знаковая, диагональная матрица, $S^{\sigma_1(t)} = \text{diag}\{\text{sgn}\,\sigma_i^1(t), i = = \overline{1,m}\}$.

Замкнутая подсистема управления с запаздыванием, функционирующая в области $Q$, математическая модель которой представляется выражениями (1)–(4), (9), описывает стохастическую, нестационарную подсистему вывода с запаздыванием.

В подсистеме вывода реализованы алгоритмы кусочно-непрерывные, релейного типа, обеспечивающие в среднеквадратическом реализацию форсированного режима "вывода"объекта управления в допустимую область функционирования $\vartheta(x)$.

Управление в области $\vartheta(x)$ формируется по бинарному принципу [21] следующим образом

$$U_2(x(t)) = k(t)x(t), \tag{10}$$

где компоненты матрицы $k(t) \in R^{m \times n}$ являются абсолютно непрерывными и ограниченными на множестве $J(t_0)$ функциями времени.

В зависимости от области функционирования $G_{1\delta}$ или $G_{2\delta}$ происходит изменение алгоритма управления (10).

При функционировании в области $G_{2\delta}$ изменение матрицы настраиваемых параметров $k(t)$ осуществляется с помощью операторных переменных $\mu_i(t),\ i=\overline{1,m}$ следующим образом

$$k(t)=k(D(\mu(t)))=D(\mu(t))k_0S^x, \tag{11}$$

где $D(\mu(t))$ — диагональная матрица операторных переменных $\mu_i,\ i=\overline{1,m},\ D(\mu(t))=$ $=\mathrm{diag}\{\mu_1(t),\ldots,\mu_m(t)\}$, $k_0{\in}R^{m\times n}$ — константная матрица настраиваемых параметров контура координатной операторной обратной связи, $S^x$ — диагональная знаковая матрица размерности $(n\times n)$, $S^x=\mathrm{diag}\{\mathrm{sgn}\,x_i(t),\ i=\overline{1,n}\}$.

Динамика изменения операторной переменой $\mu_i(t), i=\overline{1,m}$ представляется выражением

$$\begin{aligned}&\dot{\mu}(t)=\alpha(t,x,\mu)D\,\mathrm{sgn}(\sigma'(x,\mu)+D(\mu)\sigma'(x,\mu))),\\ &\mu_i(t)\in[-1,1], i=\overline{1,m},\quad \sigma'(t)=\sigma(x)+D(\mu)\delta\beta\mid x(t)\mid .\end{aligned} \tag{12}$$

Величины $k_0\in R^{m\times n}$, $\alpha\in R^{m\times m}$, $\alpha=\mathrm{diag}\{\alpha_i=\mathrm{const}>0,\ i=\overline{1,m}\}$ определяют набор настраиваемых параметров соответствующих подсистем управления, обеспечивающих желаемую динамику замкнутой системы автоматического управления.

В области $G_{1\delta}$ матрица операторных переменных $\mu_i(t)$ вырождается в знаковую матричную функцию, т.е.

$$D(\mu(t))=\mathrm{diag}\{-\mathrm{sgn}\,\sigma_i'(t), i=\overline{1,m}\}, \tag{13}$$

и алгоритм управления (10) представляется кусочно-непрерывной векторной функцией вида

$$U_2(t)=D(\mu(t))k_0\mid x(t)\mid . \tag{14}$$

Замкнутая подсистема управления, математическая модель которой представляется выражениями (1)–(3), (5), (12)–(14), описывает стохастическую, нестационарную подсистему притяжения с запаздыванием, призванную обеспечить в среднеквадратическом свойство притяжения траекторий движения объекта управления к ограниченному множеству конусного типа при функционировании в области $G_{1\delta}$.

В подсистеме притяжения с запаздыванием реализованы кусочно-непрерывные алгоритмы управления, обеспечивающие в среднеквадратическом реализацию свойства притяжения траекторий движения рассматриваемого объекта управления с запаздыванием к ограниченному множеству конусного типа при функционировании в области $G_{1\delta}$.

В настоящей работе получены достаточные условия диссипативности и притяжения в среднеквадратическом системы автоматического управления с изменяющейся конфигурацией стохастическим объектом с запаздыванием на основе стохастического аналога прямого метода Ляпунова с использованием знакоопределенной функции Ляпунова и принципа Разумихина [18].

## 3. Основной результат

Дадим определение понятия диссипативности в среднеквадратическом.

**Определение 1.** *Стохастическая подсистема вывода с запаздыванием называется диссипативной в среднеквадратическом, если существует такая область $\vartheta(x)$, что при любых $t_0$ и для всех возмущенных движений, удовлетворяющих условию $\parallel x(t_0+\upsilon)\parallel\leq\nu(t_0)$, $\nu(t_0)$ — некоторое число, существует момент времени $t_1=t_1(x(t_0+\upsilon),t_0)$ такой, что при всех $t\geq t_1$ $M\left[\mid x(t,\varphi(\upsilon))\mid^2\right]$ принадлежит области $\vartheta(x)$.*

При этом область $\vartheta(x)$ называется предельным множеством системы, а сфера $\| x(t_0+\upsilon) \| \leq$ $\leq \nu(t_0)$ для фиксированного значения $t_0$ является ее областью диссипативности.

Пусть в математической модели (1)–(4), (9) векторное управление $U_1(t) = (U_{11}(t), \ldots,$ $U_{1m}(t))^T$, представляет собой нелинейную функцию (9), удовлетворяющую секторному ограничению

$$0 \leq \frac{U_{1i}(x, \sigma_{1i}(x))}{\sigma_{1i}(x)} \leq \omega_{0i} \text{ для } \sigma_{1i}(x) \neq 0, \ \omega_{0i} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Для исследования динамического свойства диссипативности в среднеквадратическом подсистемы управления с запаздыванием сделаем некоторые предположения относительно выбираемой функции Ляпунова.

Пусть существует положительно-определенная функция

$$V = V(t, x), \quad V(t, 0) = 0 \tag{16}$$

и существуют непрерывные, монотонно возрастающие функции $W_1(\| x \|), W_2(\| x \|)$ [22], такие, что выполнены условия

$$V(t, x) \leq W_1(\| x \|), \quad V(t, x) \geq W_2(\| x \|), \tag{17}$$

причем $W_2(\| r \|) \to \infty$ при $\| r \| \to \infty$.

Выберем скалярную функцию Ляпунова

$$V(t, x) = x^T(t) H(t) x(t), \ H(t) = H^T(t) > 0, \tag{18}$$

где $H(t)$ — функциональная, положительно-определенная, симметрическая матрица размерности $(n \times n)$.

Аналогом производной функции Ляпунова $V(t, x)$ для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является скалярно-оптимизационная функция [18]

$$R(t, x) = \sup\{LV(t, x_{th}) \mid x_{th} \in \mu_V(x, t)\}, \tag{19}$$

где $LV(t, x_{th})$ — стохастический производящий оператор, $\mu_V(x, t) = \{x_{th} \mid V(\upsilon, x(\upsilon)) \leq V(t, x),$ $t - h \leq \upsilon \leq t, x(t) = x\}$ — множество интегральных линий, вдоль которых функция $V(t, x)$ убывает.

При выбранной функции Ляпунова (18) выражение для стохастического производящего оператора $LV(t, x_{th})$ в силу уравнений (1), (8) представляется следующим образом [17]

$$LV(t, x_{th}) = [A(t)x(t) + A_h(t)x(t-h) + B(t)U_1(t)]V_x + \tfrac{1}{2} tr\, D(x, t) D^T(x, t) V_{xx}. \tag{20}$$

При выбранной функции Ляпунова множество $\vartheta(x)$ будет предельным множеством при выполнении условий

$$V(x, t) > 0, \quad R(t, x) < 0 \quad \forall \quad M\left[\mid x(t, \varphi(\upsilon)) \mid^2\right] \not\in \vartheta(x). \tag{21}$$

Условие, обеспечивающее свойство диссипативности в среднеквадратическом стохастической, нестационарной подсистемы вывода формулируется в следующей теореме.

**Теорема 1.** *При выбранной функции Ляпунова (18) стохастическая, нестационарная подсистема вывода с запаздыванием (1)–(4), (9) диссипативна в среднеквадратическом и область $\vartheta(x)$ (7) является ее предельным множеством, если выполнено следующее неравенство*

$$\chi^2 \geq \inf_{r(t) \in (0, r_0)} \Phi(r(t)), \tag{22}$$

*где* $\Phi(r(t)) = \sup_{t\geq t_0}(1/r(t))\, U_1^T(t)\, B^T(t)\; H(t)Q^{-1}H(t)\, B(t)\, U_1(t)$, $r(t) > 0$, $r_0$ — *верхняя граница интервала значений параметра* $r(t)$, *на котором выполнено неравенство*

$$Q = -(A^T(t)H(t) + H(t)A(t) + H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t) + \\ + dH(t)/dt + r(t)H(t) + \lambda_m H(t) + E) \geq 0, \tag{23}$$

$E$ — *единичная матрица размерности* $(n \times n)$.

**Доказательство** . Представим слагаемое $trD(x,t)D^T(x,t)V_{xx}$ выражения (23) в виде

$$\frac{1}{2}trD(x,t)D^T(x,t)V_{xx} = x^T(t)R_1\, x(t), \tag{24}$$

где $R_1 = h_{nn}Q_1^T R_2\, Q_1$, $h_{nn}$ — элемент матрицы $H(t)$, $Q_1(n\times n)$ — вспомогательная матрица [23], $R_2(n\times n)$ — матрица интенсивности шумов [23].

С учетом [24] для оценки составляющей $x^T(t)R_1x(t)$ имеем

$$x^T(t)R_1x(t) \leq \lambda_m x^T(t)H(t)\, x(t). \tag{25}$$

Для оценки значения $\lambda_m$ с учетом свойства положительной определенности матрицы $H(t) = H^T(t) > 0$ составляется пучек квадратичных форм

$$x^T(t)\, R_1\, x(t) - \lambda\, x^T(t)H(t)\, x(t). \tag{26}$$

Характеристическое уравнение пучка (26) запишется в виде

$$\det(R_1\, - \lambda\, H(t)) = 0. \tag{27}$$

Проранжируем полученные характеристические числа уравнения (27) следующим образом

$$\lambda_1\, \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m. \tag{28}$$

В этом случае справедливо неравенство [24]

$$\lambda_1 \leq x^T(t)R_1x(t)[x^T(t)H(t)x(t)]^{-1} \leq \lambda_m. \tag{29}$$

Отсюда выражение для скалярно-оптимизационной функции примет вид

$$R(t,x) = \sup\{x^T(t)(A^T(t)H(t) + H(t)A(t) + \lambda_m H(t) + dH(t)/dt)x(t) + \\ + 2x^T(t)H(t)A_h(t)x(t-h) + 2x^T(t)H(t)B(t)U_1(t) \mid x_{th} \in \mu_V(x,t)\}. \tag{30}$$

Оценим слагаемое $2x^T(t)H(t)\, A_h(t)x(t-h)$ в соответствии с [18, 19]

$$2x^T(t)H(t)A_h(t)x(t-h) \leq x^T(t)H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)x(t) + x^T(t-h)Ex(t-h) \leq \\ \leq x^T(t)H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)x(t) + x^T(t)Ex(t). \tag{31}$$

Тогда с учетом (31) имеем

$$R(t,x) = x^T(t)(A^T(t)H(t) + H(t)\, A(t) + \lambda_m H(t) + E + dH(t)/dt + \\ + H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t))\, x(t) + 2x^T(t)H(t)B(t)\, U_1(t). \tag{32}$$

Таким образом, рассматриваемая подсистема управления является диссипативной в среднеквадратическом и область $\vartheta(x)$ будет ее предельным множеством, если выполнено условие (21).

Для получения условия диссипативности в среднеквадратическом воспользуемся $S$-процедурой. Для этого введем $S$-функцию [25]

$$S(x,t) = \,-R(t,x) \,-\, r(t)\,(V(x,t) \,-\chi^2). \tag{33}$$

Тогда условие (21) будет выполнено, если

$$S(x,t) > 0 \quad \forall \ M\left[\mid x(t,\varphi(v))\mid^2\right]. \tag{34}$$

Подставив выражение для $R(t,x)$ и $V(x,t)$ в (33), получим

$$\begin{gathered} S(x,t) = -x^T(t)(A^T(t)H(t) + H(t)A(t) + H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)+ \\ +\lambda_m H(t) + E + dH(t)/dt)x(t) - 2x^T(t)H(t)B(t)U_1(t) - r(t)x^T(t)H(t)x(t) + r(t)\chi^2. \end{gathered} \tag{35}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q = -(&A^T(t)H(t) + H(t)A(t) + H(t)A_h(t)A_h^T(t)H(t)+ \\ &+\lambda_m H(t) + E + r(t)H(t) + dH(t)/dt), \\ z(t) = &\,Q^{-1}H(t)B(t)U_1(t). \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда с учетом (36) в выражении (35) выделим полный квадрат, в результате чего будем иметь

$$S(x,t) = (x^T(t) - z^T(t))Q(x(t) - z(t)) - U_1^T(t)B^T(t)H(t)Q^{-1}H(t)B(t)U_1(t) + r(t)\chi^2. \tag{37}$$

Так как по условию теоремы $Q > 0$ положительно определена, то

$$(x^T(t) - z^T(t))Q(x(t) - z(t)) > 0. \tag{38}$$

Тогда, условие (33) будет выполнено, если

$$r(t)\chi^2 \geq U_1^T(t)B^T(t)H(t)Q^{-1}H(t)B(t)U_1(t), \tag{39}$$

или получим выражение (22), что и требовалось доказать.

## Цитированная литература


1. **Срагович В. Г.** Адаптивное управление. М., 1981.

2. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968.

3. **Уткин В. Н.** Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М. Наука, 1974.

4. **Казаков И. Е.** Статическая динамика систем с переменной структурой. М., 1977.

5. **Емельянов С. В., Коровин С. К.** // Техническая кибернетика. М: ВИНИИТИ. 1983. Т. 16. С. 70 – 155.

6. **Емельянов С. В., Коровин С. К., Мамедов И. Г., Носов А. П.** // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 2. С. 296 – 301.

7. **Жук К. Д., Тимченко А. А., Доленко Т. И.** Исследование структур и моделирование логико-динамических систем. Киев, 1975.

8. **Джафаров Э. М.** // Сборник докладов XI Всесоюзного совещания по проблемам управления, кн. 1. М.: ВИНИТИ. 1986. С. 18 – 19.

9. **Семенов В. В., Журина Н. Э.** // Сборник трудов XI Всесоюзного научно-технического совещания "Создание и внедрение систем автоматического управления техническими процессами". М., КМС ВСНТО. 1986. С. 18 – 19.

10. **Шеваль В. В., Дорохов Е. И., Исаков С. А., Земцев В. И.** Двухзонные следящие системы. М., 1984.

11. **Чеховой Ю. Н.** // Техническая кибернетика. Киев. 1970. 10.

12. **Воронова Л. И., Чеховой Ю. Н.** // Кибернетика и вычислительная техника. Киев. 1974. Вып. 24. С. 30 – 37.

13. **Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н.** // Техника, Киев, 1970.

14. **Волосов В. В.** // Кибернетика и вычислительная техника. Киев. 1974. Вып. 24. С. 43 – 49.

15. **Лычак М. М.** // Кибернетика и вычислительная техника. Киев. 1974. Вып. 24. С. 59 – 70.

16. **Кунцевич В. М., Лычак М. М.** Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М., 1977.

17. **Хасьминский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969.

18. **Разумихин Б. С.** Устойчивость эредитарных систем. М., 1988.

19. **Цыкунов А. М.** Адаптивное управление объектами с последействием. М., 1984.

20. **Ашимов А. А., Соколова С. П.** Введение в теорию систем автоматического управления с изменяющейся конфигурацией. Алматы, 1993.

21. **Емельянов С. В.** Бинарные динамические системы автоматического управления. Препринт МНИИ ПУ. 1984. Сер. Бинарные динамические системы. Вып. 1.

22. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

23. **Попков Ю. С., Ашимов А. А., Асаубаев К. Ш.** Статистическая теория автоматических систем с динамической частотно-импульсной модуляцией. М., 1988.

24. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., 1967.

25. **Гелиг А. Х., Леонов Г. В., Якубович В. А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.

*Поступила в редакцию 2.04.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 41 — 50*

*УДК 519.63*

# МЕТОД ДОПОЛНЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОКЕАНА

Ж.Балдыбек

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47

В работе рассмотрен приближенный метод решения краевой задачи океана в постановке функции тока, основанный на вариационном принципе. Доказывается сильная сходимость приближенного решения в $L_2$, предлагается алгоритм нахождения приближенного решения.

Задача о стационарном движении приливных течений в океане сводится к решению следующей дифференциальной задачи

$$\mu\Delta u_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} - lu_1 - k(x)|\overline{u}|u_1 = f_1,$$

$$\mu\Delta u_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} - lu_2 - k(x)|\overline{u}|u_2 = f_2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2,$$

$$u_1\big|_S = u_2\big|_S = 0, \;\; S = \partial D, \tag{2}$$

где $\overline{u} = (u_1, u_2)$ — скорость движения, $p$ — давление, $l$ — корреляционная сила, $k(x)$ — сила сопротивления, $k(x) > 0$.
Вводя функцию тока

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\ , \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\ ,$$

от системы (1), (2) можно перейти к одному уравнению для с однородными условиями Дирихле

$$\mu\Delta^2\psi - l\Delta\psi - \mathrm{div(k(x)}|\nabla\psi|\nabla\psi) = \mathrm{f}, \;\; \mathrm{x \in D}, \tag{3}$$

$$\psi\Big|_S = \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S = 0, \;\; S = \partial D. \tag{4}$$

Имеет место следующая

Keywords: *boundary-value problem, approximate method, approximate solution, convergence, functional, kernel*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J50, 35J60, 35Q30

**Лемма 1.** *Пусть* $f(x)\in W_2^k(D)$, $S\in C^{k+4}(R^2)$. *Тогда существует единственное решение (3), (4) и имеет место оценка*

$$\|\psi\|_{W_2^{k+4}(D)} \le C\|f\|_{W_2^k(D)} \quad k=0,1,2,\dots \tag{5}$$

Доказательство леммы 1 можно найти в [1].

Предположим, что граница $S=\partial D$ определяется уравнением $F(x)=0$, т.е. $S=\{x|F(x)= =0\}$, где $F(x)\in C_{\Pi}^{k+4}$ с периодом $2\pi$. Индекс $\Pi$ означает периодичность.

Пусть $D$ содержится в квадрате $Q$ со сторонами равными $2\pi$.

Пусть $F(x)>0$ при $x\in D$ и $F(x)<0$ при $x\overline{\in}D$, а также $|\nabla F(x)|\ge C>0$ при $x\in Q$.

Из теоремы вложения известно, что если $F(x)\in C_{\Pi}^{k+4}$, то любая функция $\psi\in W_2^{k+4}(D)$ может быть продолжена из $D$ на $R^2$ с сохранением нормы, т.е.

$$\|\psi(x)\|_{W_2^{k+4}(R^2)} \le C\|\psi\|_{W_2^{k+4}(D)}. \tag{6}$$

В дальнейшем для исходной и продолженной функции будем использовать одни и те же обозначения.

В $Q$ рассмотрим задачу с периодическими краевыми условиями

$$\mu\Delta^2\phi - l\Delta\phi - \operatorname{div}(k(x)|\nabla\phi|\nabla\phi) = f, \;\; x\in Q, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^e\phi}{\partial x_\alpha^e}\right|_{x_\alpha=-\pi} = \left.\frac{\partial^e\phi}{\partial x_\alpha^e}\right|_{x_\alpha=\pi}, \quad \alpha=1,2, \quad e=0,1,2,3. \tag{8}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение в $Q$

$$M\phi = \mu\Delta^2\phi - l\Delta\phi = z \tag{9}$$

с краевыми условиями (8), решение которой записывается

$$\phi = \int\limits_Q G(x,y)z(y)dy. \tag{10}$$

Тогда для $z$ получим уравнение

$$z - N\left(\int\limits_Q G(x,y)z(y)dy\right) - f = 0\ , \tag{11}$$

где $N(\phi)=\operatorname{div}(k(x)|\nabla\phi|\nabla\phi)$, $G(x,y)$ — функция Грина для оператора $\mu\Delta^2 - k\Delta$ на $Q$ с периодическими краевыми условиями.

Используя (10), напишем интегральное тождество

$$\int\limits_Q \Theta(F)\left[z(x) - N\left(\int\limits_Q G(x,y)z(y)dy\right) - f\right]^2 dx = 0, \tag{12}$$

где

$$\Theta(F(x)) = \begin{cases} 1 & \text{при } F(x)>0, \\ 0 & \text{при } F(x)<0. \end{cases}$$

Пусть наряду с (12) выполняются условия

$$\phi(x)\Big|_S = \int\limits_Q G(x,y)z(y)dy\Big|_S = 0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial\phi(x)}{\partial n}\right|_S = \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial n} G(x,y)z(y)dy\Big|_S = 0. \tag{14}$$

Эти условия эквивалентны следующему условию

$$\int\limits_S R(x)\left(\left|\int\limits_Q G(x,y)z(y)dy\Big|_S\right|^2 + \left|\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial n} G(x,y)z(y)dy\Big|_S\right|^2\right) dl_x = 0\ , \tag{15}$$

где $R(x)$ — любая непрерывная строго положительная функция. Вместо (15) можно написать

$$\int\limits_Q\int\limits_Q z(y)z(\xi)\left[\int\limits_S R(x)\left(G(x,y)G(x,\xi) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\cdot\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\right) dl_x\right] dyd\xi = 0$$

или

$$\int\limits_Q\int\limits_Q R_D(y,\xi)z(y)z(\xi)dyd\xi = 0\ ,$$

где

$$R_D(y,\xi) = \int\limits_S R(x)\left(G(x,y)G(x,\xi) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\cdot\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\right) dl_x\ , \tag{16}$$

$R_D$ — неотрицательный оператор.

Теперь, используя (12) и (16), построим следующий неотрицательный функционал

$$I(z) = \int\limits_Q \Theta(F(x))\left[z(x) - N\left(\int\limits_Q G(x,y)z(y)dy\right) - f(x)\right]^2 dx +$$

$$+\int\limits_Q\int\limits_Q R_D(y,\xi)z(y)z(\xi)dyd\xi\ . \tag{17}$$

Если $I(z) = 0$, то из (10) и (17) следует, что $\phi$ на $D$ удовлетворяет уравнению $M\phi - N(\phi) = f$ и условиям (13), (14). Следовательно, $\phi(x)$ является решением задачи (3), (4). Обратно, если $\phi(x)$ — решение задачи (3), (4), то $z(x)$, определенная равенством (10), обращает функционал $I(z)$ в нуль.

Отсюда вытекает, что задача (3), (4) эквивалентна задаче на минимум функционала $I(z)$. Найдя $z$, реализующий минимум $I(z)$, по формуле (10) найдем решение задачи (3), (4). Таким образом, мы свели задачу (3), (4) к вариационной задаче отыскания минимума неотрицательного функционала $I(z)$, минимум которого равен нулю.

В (10) ядро $G(x,y)$ определяется по формуле

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^{-1}\Phi_n(x)\Phi_n(y). \tag{18}$$

Здесь $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ — произвольная ортонормированная система собственных функций оператора $M = \mu\Delta^2 - l\Delta$ с периодическими краевыми условиями и $\Lambda_n$ — соответствующие им действительные собственные числа. При численной минимизации (17) ядра (18) неудобны, хотя и имеют явный вид. Ниже мы укажем удобные ядра, которыми можно заменить ядро в (17).

**Определение.** *Будем говорить, что ядро $K(x,y), (x,y)\in Q$ принадлежит к классу $K_\varepsilon^{e,m}(Q)(0\le m\le e)$, если оно $e$-раз непрерывно-дифференцируемо по всем переменным, и любую функцию $u(x)$ из $W_2^m(Q)$ можно приблизить функцией вида*

$$g(x) = Kz(x) = \int\limits_Q K(x,y)z(y)dy \ , \ z(x)\in L_2(Q) \ ,$$

*так, чтобы*

$$\|D^k u - D^k g\|_{L_2(Q)} \le \varepsilon C \ , \quad |k|\le m \ ,$$

*где $C$ зависит от нормы $u(x)$ в пространстве $W_2^m(Q), D^k$ — оператор дифференцирования, $\varepsilon$ — малое положительное число.*

Приближенное решение задачи (3), (4) ищем в виде

$$\psi(x) = \int\limits_Q K(x,y)z(y)dy \ , \qquad (19)$$

где ядро $K(x,y)$ из класса $K_\varepsilon^{(4,4)}$.

Подставив (19) в уравнение (3), получим

$$M\int\limits_Q K(x,y)z(y)dy - N\left(\int\limits_Q K(x,y)z(y)dy\right) - f = o(\varepsilon) \ . \qquad (20)$$

Вместо условий (4) $\psi\big|_S = 0$ и $\frac{\partial\psi}{\partial n}\big|_S = 0$ имеем

$$\int\limits_Q K(x,y)z(y)dy\Big|_S = o(\varepsilon) \text{ и } \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial n}K(x,y)z(y)dy\Big|_S = o(\varepsilon) \ . \qquad (21)$$

В (21) мы воспользовались тем, что след функций из $W_2^{k+4}(D)$ принадлежит классу непрерывных функций.

Введем функционал

$$I(z) = \int\limits_Q \Theta(F(x))\left[M\int\limits_Q K(x,y)z(y)dy - N\left(\int\limits_Q K(x,y)z(y)dy\right) - f(x)\right]^2 dx +$$
$$+\int\limits_Q\int\limits_Q z(y)z(\xi)\int\limits_Q K(x,y)K(x,\xi)dl_x dy d\xi \ . \qquad (22)$$

Отсюда видно, что проблема приближенного решения задачи (3), (4) свелась к задаче минимизации функционала (22), минимум которого имеет порядок $o(\varepsilon)$. Следующая лемма подтверждает, что ядер из класса $K_\varepsilon^{l,m}$ достаточно много.

Для простоты полагаем $l, m = 0$.

**Лемма 2.** *Пусть $K(x,y) = K(y,x)$ и $K(x,y)$ — действительная, непрерывная в $Q\times Q$ функция. Тогда оператор*

$$Kz = \int\limits_Q K(x,y)z(y)dy$$

*есть самосопряженный и вполне непрерывный в $L_2(Q)$. Если система собственных функций оператора $K$, соответствующих ненулевым собственным значениям полна, то при любом $\varepsilon > 0$ ядро $K(x,y)$ принадлежит классу $K_\varepsilon^{00}$.*

Доказательство этой леммы можно найти в [2]. Из утверждения леммы 2 вытекает, что симметричных ядер из класса $K_\varepsilon^{00}$ достаточно много. Примером такого ядра может служит ядро

$$K(x,y)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}\mu_m e^{i<x-y,m>}. \tag{23}$$

Здесь $\mu_m=\mu_{m_1m_2}$ — любая последовательность чисел, стремящихся к нулю при $|m|\to\infty$ и $\mu_m=\overline{\mu}_m$, $|\mu_m|\neq 0$.

Очевидно, $\mu_m$ можно взять таким, чтобы было легко просуммировать (23) и выписать аналитический вид $K(x,y)$. В (22) присутствует поверхностный интеграл по $S$, который затрудняет численный расчет. Поэтому ниже в лемме 3 предлагается прием, который избавляет от поверхностного интеграла.

Рассмотрим задачу (3), (4). Пусть $f(x)\in W_2^k(D)$. Тогда решение $\psi\in W_2^{k+4}$ может быть продолжено на все $R^2$ так, чтобы

$$\|\psi(x)\|_{W_2^{k+4}(R_2)}\leq\|f\|_{W_2^k(D)}\ .$$

**Лемма 3.** *Пусть* $\psi(x)\in W_2^{k+4}$ *и*

$$\psi\Big|_S=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S=0.$$

*Тогда* $\psi(x)=F^2(x)\phi(x)$ *и* $\phi(x)\in W_2^{k+2}(Q)$*, где* $S=\{x|F(x)=0\}$*,* $F(x)\in C_\Pi^{k+4}(Q)$*.*

**Доказательство.** Локальные координатные оси на границе $S$ выберем с помощью замены $x_1^1=x_1$, $x_2^1=F(x_1,x_2)$, т.е. ось $x_2^1$ направим по нормали к $S$.

Получим

$$\psi(x_1,x_2^1)=\psi(x_1,0)+\frac{1}{x_2^1}\left(\int_0^{x_2^1}\psi_{x_2^1}(x_1,x_2^1)dx_2^1)\right)F(x). \tag{24}$$

Теперь, учитывая, что $\psi\big|_s=\frac{\partial\psi}{\partial n}\big|_s=0$, и повторив (24) еще раз, легко получим утверждение леммы.

Возьмем ядро из класса $K_\varepsilon^{(k+4,k+2)}$ и $\varepsilon>0$ — любое малое число. Тогда любую функцию $\phi\in W_2^{k+2}$ можно приблизить функцией

$$\phi_\varepsilon(x)=Kz=\int_Q K(x,y)z(y)dy,\quad z(x)\in L_2(Q), \tag{25}$$

для которой выполняется условие

$$\|\phi(x)-\phi_\varepsilon(x)\|_{W_2^{k+2}}\leq C(\|\phi\|_{W_2^{k+2}})\varepsilon. \tag{26}$$

Отсюда следует, что функция

$$\psi_{\varepsilon(x)}=F^2(x)\phi_\varepsilon=F^2(x)Kz=F^2(x)\int_Q K(x,y)z(y)dy \tag{27}$$

является приближенным решением задачи (3), (4). Построим функционал

$$I(z)=\int_Q[MF^2(x)Kz(x)-N(F^2(x)Kz(x))-f]^2\Theta(F(x))dx. \tag{28}$$

Из (26) и (27) следует, что минимизируя (28), получим приближенное решение задачи (3), (4).

Далее покажем метод выбора ядра. Пусть $g(t)$ — $r$-раз непрерывно дифференцируемая, тождественно не равная нулю функция на отрезке $[-1;1]$. Положим $g^l(t)\big|_{t=\pm1} = 0,\ l = 0, 1, \ldots, r$. Пусть $0 < \delta < \pi$ и

$$g_\delta(t) = \begin{cases} g\left(\frac{t}{\delta}\right) \quad \text{при} \quad |t| \le \delta, \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad -\pi < t < -\delta \quad \text{и} \quad \delta < t < \pi. \end{cases} \tag{29}$$

С отрезка $[-\pi, \pi]$ функцию $g_\delta(t)$ продолжим периодически. Получим периодическую функцию из $C^l_\Pi(-\pi, \pi)$. Для коэффициентов Фурье этой функции по системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right\}$ имеем

$$C_k(\delta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} g\left(\frac{t}{\delta}\right) dt = \delta \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt\delta} g(t) dt. \tag{30}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы и теорема, доказательство которых можно найти в [2].

**Лемма 4.** *Пусть $T$ есть множество тех $\delta \in (0, \pi)$, для которых существует $k$ такое, что $C_k(\delta) = 0$. Тогда множество тех $\delta \in (0, \pi)$, для которых $C_k(\delta) \ne 0$ при всех $k = 0, \pm1, \ldots$, имеет меру Лебега $\pi$.*

**Лемма 5.** *Пусть $g_\delta(t)$ — функция из леммы 4. Положим $g_\delta(x) = g_\delta(x_1) g_\delta(x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Коэффициенты Фурье функции $g_\delta(t)$ по системе*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}_{k_1, k_2 = -\infty}^{k_1, k_2 = \infty}, \quad k = (k_1, k_2),$$

*обозначим через $C_{k_1, k_2}(\delta)$ в пространстве $L_2(Q)$. Тогда множество тех $\delta \in (0, \pi)$ для которых найдутся $k_1$ и $k_2$ такие, что $C_{k_1,k_2}(\delta) = 0$ не более, чем счетно.*

**Теорема 1.** *Пусть $g_\delta(x) = g_\delta(x_1, x_2)$ — функция из леммы 4. Тогда для почти любого $\delta \in (0, \pi)$ ядро $K_\delta(x, y) g_\delta(x - y)$ есть ядро из класса $K^{l,m}_\varepsilon(Q)$, $Q = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, при любом $\varepsilon > 0$, $m \le l$.*

Из теоремы 1 следует, что при сведении задачи (3), (4) к вариационной задаче можно пользоваться ядром вида $g_\delta(x - y)$ почти при всех $\delta \in (0, \pi)$. Поэтому проблема выбора ядра не является трудной.

Теперь займемся минимизацией функционала (28)

$$I(z) = \int_Q [MF^2Kz(x) - N(F^2Kz(x)) - f]^2 \Theta(F(x)) dx =$$

$$= \|(MF^2Kz - N(F^2Kz) - f)\Theta\|^2_{L_2(Q)} = I_0(z). \tag{31}$$

Будем искать $z$ в виде $z = z(\xi, x) = z(\xi)$ как функцию от параметра $\xi > 0$. Пусть при $\xi = 0$ функция равна начальному приближению $z(\xi)\big|_{\xi=0} = z_0$.

Продифференцируем (31) по $\xi$

$$\frac{d}{d\xi} I = 2 < \Theta(F)(MF^2Kz - N(F^2Kz) - f), MF^2Kz_\xi \dot{N}(F^2Kz)F^2Kz_\xi >=$$

$$= 2 < ((MF^2K)^* - (F^2K)^* \dot{N}(F^2Kz))(MF^2Kz - N(F^2Kz) - f) \cdot \Theta(F), z_\xi > . \tag{32}$$

Выберем $z$ из уравнения

$$z_\xi = -2((MF^2K)^* - (F^2K)^*\dot{N}(F^2Kz))(MF^2Kz - N(F^2Kz) - f), \tag{33}$$

$$z\big|_{\xi=0} = z_0. \tag{34}$$

Для $z$ получили задачу Коши (33), (34). Из (32), (33) и (34) вытекает

$$\frac{d}{d\xi}I = -\|z_\xi\|^2_{L_2(Q)},\ I\big|_{\xi=0} = I(z_0).$$

Интегрируя это равенство, получим

$$I(z) = I(z_0) - \int\limits_0^\xi \|z_\xi\|^2_{L_2(Q)} d\xi < I(z_0). \tag{35}$$

Отсюда согласно определению $I(z)$ имеем

$$Mr - N(r) = \widetilde{f}, \quad r\Big|_S = \frac{\partial r}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad \|\widetilde{f}\|_{L_2(Q)} \le \sqrt{I(z_0)} + \|f\|_{L_2(Q)}, \tag{36}$$

где $r = F^2Kz$. Следовательно, что $\|\widetilde{f}\|_{L_2(Q)}$ ограничена, т.е. $\widetilde{f} \in L_2(Q)$. Тогда $\|r\|_{W_2^4(D)} \le$ $\le C\|\widetilde{f}\|_{L_2(Q)}$.

Используя (36), получим

$$\|F^2Kz\|_{W_2^4(D)} \le C\big(\sqrt{I(z_0)} + \|\widetilde{f}\|_{L_2(Q)}\big). \tag{37}$$

Возьмем в качестве ядра интегрального оператора $K$ функцию $K(x-y)$, где $K(\cdot)$ — периодическая, $(k+4)$-непрерывно дифференцируемая функция и все ее коэффициенты Фурье отличны от нуля

$$K(x) = \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} \phi_k^{i<k,x>}, \quad \phi_k = \phi_{k_1,k_2} \ne 0 \ \text{ для всех } \ k = (k_1,k_2). \tag{38}$$

Умножим уравнение (33) на некоторую периодическую функцию $u$ и проинтегрируем по области $Q$. Получим

$$< z_\xi, u >= -2 < \theta(F)g, (M - \dot{N}(F^2Kz))F^2Ku >, \tag{39}$$

где $g = MF^2Kz - N(F^2Kz) - f$.

Рассмотрим задачу

$$Mv - \dot{N}(F^2Kz)v = \Theta(F)g, \quad v\Big|_S = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{40}$$

где $g$ из (39). Относительно вариации получим

$$l_\psi = M\omega - \dot{N}(\psi)\omega = \mu\Delta^2\omega - \operatorname{div}\big(k(x)|\nabla\omega|\nabla\omega\big) + \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}(\nabla\psi, \nabla\omega), \tag{41}$$

$$\omega\Big|_S = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{42}$$

Докажем существование обратного оператора $l_\psi^{-1}$. Умножим обе части (41) на $\omega$ и проинтегрируем по области $Q$. Получим

$$< l_\psi \omega, \omega >_{L_2(Q)} = \int\limits_Q \mu \Delta^2 \omega - \operatorname{div}\big(k(x)|\nabla\psi|\nabla\omega\big) + \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}(\nabla\psi, \nabla\omega)\omega dx =$$

$$= \int\limits_Q |\nabla\omega|^2 + l|\nabla\omega|^2 + k(x)|\nabla\omega|^2 + \frac{k(x)}{|\nabla\psi|}(\nabla\psi, \nabla\omega)dx \geq \|\omega\|^2_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, $l_\psi^{-1}$ существует.

Поэтому $\|\Theta(F)g\|_{L_2(D)} \leq C_1 < \infty$. Из (37) и (40) получим, что $v \in W_2^4(D)$,

$$\|v\|_{W_2^4(D)} \leq C_2(\sqrt{J(z_0)}, \|f\|_{L_2(Q)}), \tag{43}$$

$$v = F^2(x)\widetilde{u}, \quad \widetilde{u} \in W_2^2(Q), \quad \|\widetilde{u}\|_{W_2^2(Q)} \leq C_3(\sqrt{J(z_0)}, \quad \|f\|_{L_2(Q)}). \tag{44}$$

Следовательно, функцию $v$ можно представить в виде (44).

Обозначим через $\widetilde{u}_k$ коэффициенты Фурье функции $\widetilde{u}$ и положим

$$u_k = \begin{cases} \varphi_k^{-1}\widetilde{u}_k & \text{при } |k|^2 \leq N^2, \\ 0 \ \text{при } |k|^2 > N^2, \end{cases} \tag{45}$$

где $\varphi_k$ — коэффициенты Фурье $K(x)$. Пусть

$$u = \sum_{|k|^2 \leq N^2} u_k e^{i<k,x>}. \tag{46}$$

Тогда, учитывая (45), получим

$$\widetilde{u} - Ku = \widetilde{u} - K * u = \sum_{|k|^2 > N^2} = \widetilde{u}_k e^{i<k,x>} = R_N(x). \tag{47}$$

Для $R_N(x)$ в силу (44) справедлива оценка

$$\|R_N\|_{W_2^2(Q)} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} C_4(\sqrt{J(z_0)}, \|f\|_{L_2(Q)}). \tag{48}$$

Подставим (46) в (39). Тогда из (39), (43) и (47) получим

$$< z_\xi, u >= -2 < \theta(F)g, (M - \dot{N}(F^2Kz))(F^2\widetilde{u} - F^2R_N(x)) >=$$

$$= -2 < \Theta(F)g, (M - \dot{N}(F^2Kz))v - (M - \dot{N}(F^2Kz)F^2R_N(x) > .$$

Теперь с учетом уравнения (40) и неравенства (48) получим

$$\frac{1}{2}\|z_\xi\|_{L_2(Q)}\|u\|_{L_2(Q)} \geq < \Theta(F)g, \Theta(F)g > -C\|\Theta(F)g\|\frac{1}{\sqrt{N}}\ .$$

Оценим $\|u\|_{L_2(Q)}$ с учетом (44), (45). Получим

$$\|u\|_{L_2(Q)} = \sum_{|k|^2 N^2} |\widetilde{u}|^2 |\varphi_k|^{-2} \leq d_N^2 \|\widetilde{u}|_{L_2(Q)} \leq C d_N^2,$$

где $C$ не зависит от $N$ и $u$, а $d_N = \sup\limits_{|k|^2 \leq N} |\varphi_k|^{-2}$.

Это и предыдущее неравенство дают оценку

$$\|z_\xi\|_{L_1(Q)} \leq \frac{1}{C_1 D_N}\left[\|\Theta(F)g\|^2_{L_2(Q)} - \frac{C_2\|\Theta(F)g\|_{L_2(Q)}}{\sqrt{N}}\right], \tag{49}$$

где постоянные $C_1, C_2$ не зависят от $z, N$ и $g$ из (39). Покажем, что при $\xi \to \infty$ имеет место сходимость

$$\|\Theta(F)g\|_{L_2(Q)} \to 0. \tag{50}$$

Допустим обратное. Тогда существуют числа $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m, \dots \to \infty$ такие, что

$$\|\Theta(F)g\|_{L_2(Q)} \geq \delta_0 > 0. \tag{51}$$

В (49) $N$ выберем так, чтобы

$$\frac{C_1\|\Theta(F)g\|_{L_2(Q)}}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{2}\delta_0$$

для всех $\xi \geq 0$. Это возможно в силу определения $J(z)$ и неравенства (35). Отсюда и из (49), (51) получим

$$\|x_\xi\|_{L_2(Q)} \geq \frac{\delta_0}{C_1 d_N} \quad \text{при} \quad \xi \in \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots\} \to \infty. \tag{52}$$

Из оценок (37) для $F^2Kz$ следует, что правая часть уравнения (33) в норме по $\xi$ равномерно ограничена. Тогда ограничена равномерно по $\xi \in (0, \infty)$ и сама $z_\xi$. Следовательно, $z$ равностепенно непрерывна по норме. Поэтому равностепенно непрерывна и правая часть (33). Но тогда в силу (33) равностепенно непрерывна и равномерно ограничена по норме $z_\xi$. Из этого следует, что у каждой точки $\xi_m$ из (52) существует окрестность $U_m$, в которой

$$\|z_\xi\|^2_{L_2(Q)} \geq \left(\frac{\delta_0}{C_1 d_N}\right)^2 \tag{53}$$

при $\xi \in U_m,\ m = 1, 2, \dots$. Очевидно, что в (53) отрезки можно считать попарно непересекающимися. Так как общая длина этих отрезков равна $+\infty$, то из (53) следует, что

$$\int\limits_0^\infty \|z_\xi\|^2_{L_2(Q)} d\xi = \infty.$$

Это равенство противоречит (35) и (50) доказана.

В итоге имеет место следующая

**Теорема 2.** *Пусть при $\xi > 0$ функция $z(\xi, x)$ определяется из задачи Коши (33), (34). Тогда для $F^2Kz(\xi)$ при $\xi \to \infty$ имеет место сильная сходимость $MF^2Kz - N(F^2Kz) - f \to 0$ в $L_2(Q)$.*

**Доказательство.** Из определения $J(z)$ и неравенства (35) вытекает, что

$$\|\Theta(F)(MF^2Kz - N(F^2Kz) - f)\|_{L_2(Q)} \leq c < \infty.$$

Из (50) следует, что

$$\|\Theta(F)(MF^2Kz - N(F^2Kz) - f\|_{L_2(Q)} \to 0.$$

Эти два утверждения доказывают теорему.

При $\xi \to \infty$ функция $F^2Kz(\xi)$ стремится к решению задачи (3), (4). При численной минимизации задачу Коши (33), (34) следует заменить на итерационный процесс

$$z^{n+1} = z^n - 2\tau_n\{(MF^2K - \dot{N}(z^n)F^2K)^*(\Theta(F)(MF^2Kz^n - N(z^n) - f)\},$$

$$u_n = F^2(x)Kz^n = F^2(x)\int\limits_Q K(x,y)z^n(y)dy, n = 1, 2, \dots,$$

где $\tau_n$ — итерационный параметр. При реальном счете необходимо следить за значением функционала $J(z^i)$. Если $J(z^i) < J(z^{i+1})$, то следует повторить итерацию, уменьшив итерационный параметр.

**Заключение.** На основе разработанного выше метода решены численно некоторые модельные нелинейные задачи.

## Цитированная литература


1. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
2. **Отелбаев М., Смагулов Ш.** // ДАН РАН. 2001. Т. 378, № 4. С. 452 – 455.
3. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969.


*Поступила в редакцию 2.04.2002г.*

*УДК 517.95.958*

# МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА

А. В. Борзых

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, alex@math.kz

Представлена (N+1)-мерная модель Кортевега де Фриза. Получена ее билинейная форма. Найдены ее солитонные решения методом Хироты.

Классическое уравнение Кортевега де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

называют универсальным [1–6], поскольку оно описывает многие физические процессы, возникающие в физике плазмы, нелинейной оптике, в физике ферромагнетиков. В частности, оно описывает как слабые гидромагнитные длинные волны в плазме и волны на воде [2], так и слабо нелинейные ионноакустические волны сжатия в плазме [3].

В 1970 году Кадомцев и Петвиашвили [7] получили двумерный вариант уравнения Кортевега де Фриза

$$(u_{xxx} + 6uu_x + u_x + u_t)_x - u_{yy} = 0$$

для слабо нелинейных длинных волн в диспергирующих средах. Позднее Како и Роулендз [8], Тапперт и Варма [9], Нараянамурти и Варма [10] получили это уравнение, решая разные физические задачи:для двумерного распространения ионноакустических солитонов и для распространения тепловых импульсов в твердых телах.

В 1988 году Нижник ([11], с.188–189) предложил пространственную двумеризацию модифицированного уравнения Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + u_{yyy} + (vu)_y + (wu)_x - \frac{1}{2}(v_y + w_x)u, \\ v_x = 3(u^2)_y, \qquad w_y = 3(u^2)_x, \end{cases}$$

которая была получена по заданному представлению Лакса, что позволяет решить это уравнение методом обратной задачи рассеяния.

В [12], [13] были представлены (2+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xxy} + 4\psi\psi_x + V\psi_y + V_xU = 0, \\ V_y = \psi_x, \qquad U_x = \psi_y, \end{cases}$$

Keywords: *generalized solution, electrodynamics, nonstationary boundary value problem, Maxwell equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

(3+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xyz} + 2\psi\psi_z + 2\psi_x U + V_x W + V W_x = 0, \\ U_x = V_y = \psi_z, \qquad W_z = \psi_y \end{cases}$$

и (4+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xyz_1} + \psi_{xyz_2} + 2\psi(\psi_{z_1} + \psi_{z_2}) + \\ +2\psi_x(U_1 + U_2) + \psi_y(V_1 + V_2) + W(V_{1x} + V_{2x}) = 0, \\ (U_j)_x = (V_j)_y = \psi_{z_j},\ j = 1, 2 \quad W_z = \psi_y, \end{cases}$$

которые были получены по заданным билинейным формам, что позволяет решить их методом Хироты.

Здесь мы предлагаем на рассмотрение (N+1)-мерное уравнение Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} \psi_t + \sum\limits_{j=2}^{N-1} \psi_{x_j x_0 x_1} + 2\psi \sum\limits_{j=2}^{N-1} (U_{j-1})_{x_0} + W \sum\limits_{j=2}^{N-1} (V_{j-1})_{x_0} = 0, \\ W_{x_0} = \psi_{x_1}, \quad (U_{j-1})_{x_0} = (V_{j-1})_{x_1} = \psi_{x_j},\ j = \overline{2, N-1}, \end{cases} \tag{1}$$

которое было получено нами вследствие обобщения результатов [12], [13].

Уравнение (1) мы снабжаем начальным условием

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\big|_{t=0} = \psi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}). \tag{2}$$

Здесь $\psi = \psi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, t)$, $\psi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ есть функции из пространства Шварца.

Поскольку солитон в многомерном пространстве перемещается только по одной пространственной координате, что позволяет ему сохранять свою форму [14], граничное условие для уравнения (1) мы определяем по одной пространственной переменной $x_0$:

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, t) \to 0, \qquad | x_0 | \to \infty. \tag{3}$$

Уравнение (1) вместе с начальным (2) и граничным (3) условиями будем называть (N+1)-мерной моделью Кортевега де Фриза.

Решение модели (1)–(3) будем искать в виде

$$\psi = 2(\ln \varphi)_{x_0 x_1}, \tag{4}$$

где $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, t)$ есть функция из пространства Шварца.

Подставим (4) в уравнение (1) и воспользуемся билинейным оператором Хироты ([4], с.200):

$$D_x^m D_t^n (F \cdot G) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n F(x, t) G(x', t')\big|_{x'=x, t'=t}, \tag{5}$$

который обладает следующими свойствами:

$$D_x^m (a \cdot 1) = \partial_x^m a,$$

$$D_x^m (a \cdot b) = (-1)^m D_x^m (b \cdot a),$$

$$D_x^m (a \cdot a) = 0,\ m = 2k + 1,\ k \in Z,$$

$$D_x^m D_t^n (e^{k_1 x - \omega_1 t} \cdot e^{k_2 x - \omega_2 t}) = (k_1 - k_2)^m (\omega_2 - \omega_1)^n e^{(k_1 + k_2) x - (\omega_1 + \omega_2) t}.$$

В результате получим билинейную форму для (N+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (1)–(3):

$$\left( D_{x_1} D_t + D_{x_1}^2 D_{x_0} \sum_{j=2}^{N-1} D_{x_j} \right) (\varphi \cdot \varphi) = 0. \tag{6}$$

Разложим функцию $\varphi$ в ряд по степеням $\varepsilon$:

$$\varphi = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \ldots \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon$ есть параметр, который может принимать любое конечное значение.

Подставим (7) в уравнение (6), приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ и воспользуемся свойствами оператора (5). Получим бесконечную систему уравнений

$$\Big(\partial_{x_1}\partial_t + \partial^2_{x_1}\partial_{x_0}\sum_{j=2}^{N-1}\partial_{x_j}\Big) f_1 = 0, \tag{8}$$

$$2\Big(\partial_{x_1}\partial_t + \partial^2_{x_1}\partial_{x_0}\sum_{j=2}^{N-1}\partial_{x_j}\Big) f_2 = -\Big(D_{x_1}D_t + D^2_{x_1}D_{x_0}\sum_{j=2}^{N-1}D_{x_j}\Big)(f_1\cdot f_1), \tag{9}$$

$$\Big(\partial_{x_1}\partial_t + \partial^2_{x_1}\partial_{x_0}\sum_{j=2}^{N-1}\partial_{x_j}\Big) f_3 = -\Big(D_{x_1}D_t + D^2_{x_1}D_{x_0}\sum_{j=2}^{N-1}D_{x_j}\Big)(f_1\cdot f_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Допустим, что

$$f_1 = \sum_{j=2}^{N-1} e^{\eta_j}, \quad \eta_j = \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_j^{(k)}x_k + \alpha_j^{(1)}\alpha_j^{(0)}\Big(\sum_{k=2}^{N-1}\alpha_j^{(k)}\Big)t + \eta_j^{(0)},\ j=\overline{1,n},$$

где $\eta_j^{(0)},\ \alpha_j^{(k)},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{0,N-1}$ — постоянные.

Пусть $n=1$. В силу свойств оператора (5) бесконечная система сворачивается до уравнения (8). Поэтому можно положить $f_j = 0,\ j = 2,3,\ldots$ Следовательно, ряд (7) обрывается. На самом деле так происходит не только с уравнением Кортевега де Фриза, но и для всех задач, допускающих точное $n$-солитонное решение [4], [13], [15–18].

Предположим, что $\varepsilon = 1$. Тогда решение билинейной формы (6) примет вид

$$\varphi_1 = 1 + f_1,$$

где

$$f_1 = \exp\Big\{\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_1^{(k)}x_k + \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(0)}\Big(\sum_{k=2}^{N-1}\alpha_1^{(k)}\Big)t + \eta_1^{(0)}\Big\},$$

есть решение уравнения (4), $\eta_1^{(0)},\ \alpha_1^{(k)},\ k=\overline{0,N-1}$ — постоянные,

Таким образом, 1-солитонное решение (N+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (1)–(3) запишется в виде

$$\psi_1 = 2(\ln\varphi_1)_{x_0x_1},$$

$$\varphi_1 = 1 + \exp\Big\{\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_1^{(k)}x_k + \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(0)}\Big(\sum_{k=2}^{N-1}\alpha_1^{(k)}\Big)t + \eta_1^{(0)}\Big\},$$

или

$$\psi_1 = \frac{\alpha_1^{(0)}\alpha_1^{(0)}}{2}\operatorname{sech}^2\Big\{\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_1^{(k)}x_k + \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(0)}\Big(\sum_{k=2}^{N-1}\alpha_1^{(k)}\Big)t + \eta_1^{(0)}\Big)\Big\}.$$

Здесь постоянные $\eta_1^{(0)},\ \alpha_1^{(k)},\ k=\overline{0,N-1}$ определяются из условия (2) по заданной функции $\psi_0 = \psi_0(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1})$.

Пусть $n=2$. В качестве решения уравнения (8) возьмем следующую функцию

$$f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2},$$

где

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_j^{(k)} x_k + \alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(0)} \bigg( \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_j^{(k)} \bigg) t + \eta_j^{(0)},\ j = 1, 2,$$

$\eta_j^{(0)},\ \alpha_j^{(k)},\ j = 1, 2,\ k = \overline{0, N-1}$ — постоянные. Тогда уравнение (9) сводится к уравнению

$$2\bigg(\partial_{x_1}\partial_t + \partial_{x_1}^2 \partial_{x_0} \sum_{j=2}^{N-1} \partial_{x_j}\bigg) f_2 =$$

$$= -2\bigg\{(\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)})\bigg( - \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(0)} \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(0)} \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_2^{(k)} \bigg) +$$

$$(\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)})^2 (\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)}) \prod_{k=2}^{N-1} (\alpha_1^{(k)} - \alpha_2^{(k)}) \bigg\} \times$$

$$\times \exp\bigg\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(k)}) x_k - \bigg[ \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(0)} \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(0)} \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_2^{(k)} \bigg] t + \eta_1^{(0)} + \eta_2^{(0)} \bigg\},$$

которое, в свою очередь, имеет решение

$$f_2 = e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}},$$

где

$$A_{12} = \ln \left[ \frac{\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}} \right] \times$$

$$\times \ln \left[ \frac{2\alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_2^{(k)} - 2\alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_1^{(k)} - (\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)})(\alpha_1^{(0)} - \alpha_2^{(0)}) \sum\limits_{k=2}^{N-1} (\alpha_1^{(k)} - \alpha_2^{(k)})}{\alpha_2^{(1)} \alpha_2^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_2^{(k)} + \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_1^{(k)} + (\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)})(\alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)}) \sum\limits_{k=2}^{N-1} (\alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(k)})} \right],$$

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_j^k x_k + \alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(0)} (\sum_{k=2}^{N-1} \alpha_j^k) t + \eta_j^{(0)},\ j = 1, 2,$$

$\alpha_1^{(1)} \neq \alpha_2^{(1)},\ \eta_j^{(0)},\ \alpha_j^{(k)},\ j = 1, 2,\ k = \overline{0, N-1}$ — постоянные.

Подставим значения функций $f_1$ и $f_2$ в бесконечную систему и воспользуемся свойствами билинейного оператора. Получим

$$\bigg(D_{x_1} D_t + D_{x_1}^2 D_{x_0} \sum_{j=2}^{N-1} D_{x_j}\bigg)(f_1 \cdot f_2) = 0.$$

Поэтому возьмем $f_3 = f_4 = \ldots = 0$. Тогда решение билинейной формы (6) при $\varepsilon = 1$ примет вид

$$\varphi_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}},$$

где

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_j^{(k)} x_k + \alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(0)} \bigg( \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_j^{(k)} \bigg) t + \eta_j^{(0)},\ j = 1, 2,$$

$\eta_j^{(0)},\ \alpha_j^{(k)},\ j = 1, 2,\ k = \overline{0, N-1}$ — постоянные, а $A_{12}$ определена выше.

Следовательно, 2-солитонное решение (N+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (1)–(3) запишется в виде

$$\psi_2 = 2(\ln \varphi_2)_{x_0 x_1},$$

где функция $\varphi_2$ определена выше, а постоянные $\eta_j^{(0)},\ \alpha_j^{(k)},\ j = 1,2,\ k = \overline{0, N-1}$ находятся из равенства (2) и зависят от вида функции $\psi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$.

По схеме, предложенной в ([4], с. 203–207), нами доказана следующая теорема.

**Т е о р е м а .** *Пусть $\mu^*$ пробегает по всем наборам $\mu_j = 0, 1,\ j = \overline{1, n}$,*

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_j^{(k)} x_k + \alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(0)} \left( \sum_{k=2}^{N-1} \alpha_j^{(k)} \right) t + \eta_j^{(0)},\ j = \overline{1, n},$$

$$A_{ij} = \ln \left[ \frac{\alpha_i^{(1)} - \alpha_j^{(1)}}{\alpha_i^{(1)} + \alpha_j^{(1)}} \right] \times$$

$$\times \ln \left[ \frac{2\alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_j^{(k)} - 2\alpha_i^{(1)} \alpha_i^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_i^{(k)} - (\alpha_i^{(1)} - \alpha_j^{(1)})(\alpha_i^{(0)} - \alpha_j^{(0)}) \sum\limits_{k=2}^{N-1} (\alpha_i^{(k)} - \alpha_j^{(k)})}{\alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_j^{(k)} + \alpha_i^{(1)} \alpha_i^{(0)} \sum\limits_{k=2}^{N-1} \alpha_i^{(k)} + (\alpha_i^{(1)} + \alpha_j^{(1)})(\alpha_i^{(0)} + \alpha_j^{(0)}) \sum\limits_{k=2}^{N-1} (\alpha_i^{(k)} + \alpha_j^{(k)})} \right],$$

$$\alpha_i^{(1)} \neq \alpha_j^{(1)},\ i, j = \overline{1, n}.$$

*Тогда функция*

$$\varphi_n = \sum_{\mu^* = 0,1} \exp \left( \sum_{i=1}^{n} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \le i < j}^{n} \mu_i \mu_j A_{ij} \right)$$

*является решением уравнения (8).*

Таким образом, $n$-солитонное решение (N+1)-мерной модели Кортевега де Фриза (1)–(3) запишется в виде

$$\psi_n = 2(\ln \varphi_n)_{x_0 x_1},$$

где $\varphi_n$ определено выше, а постоянные $\eta_j^{(0)},\ \alpha_j^{(k)},\ j = \overline{1, n},\ k = \overline{0, N-1}$ находятся из равенства (2) и зависят от вида функции $\psi_0(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$.

## Цитированная литература


1. **Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М. 1988.

2. **Gardner C. S. and Morikawa G. M.** // Report NYO-9082. Cjurant Inst. of Math. Sciences. 1969.

3. **Washimi M. and Taniuti T.** // Phys. Rev. Lett. 1966. 17. Cjurant Inst. of Math. Sciences. 1969. P. 996 – 998.

4. **Абловиц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи. М. 1987.

5. **Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д.** Гамильтонов подход в теории солитонов. М. 1986.

6. **Новиков С. П.** Теория солитонов. Метод обратной задачи. М. 1980.

7. **Кадомцев Б. Б., Петвиашвили** // ДАН СССР. 1070. 192. С. 753 – 756.

8. **Kako M. and Rowlands G.** // Plasma Physics. 1976. 18. P. 165 – 170.

9. **Tappert F. and Varma C. M.** Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids. Phys. Rev. Lrtt. 1970. 25. P. 1108 – 1111.

10. **Narayanamyrti V. and Varma C. M.** Nonlinear propagation of heat pulses in solids. Phys. Rev. Lrtt. 1970. 25. P. 1105 – 1108.

11. **Нижник Л. П.** Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев. 1991.

12. **Борзых А. В.** // Тез. докл. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". Алматы. 2001. С. 81.

13. **Борзых А. В.** // Доклады НАН РК. 2001. №6. С. 5 – 11.

14. **Пелиновский Е. Н.** Солитоны в воде. http://intra.rfbr.ru/pub/knigi/janus/pelinovskij/pelinovs.htm.

15. **Борзых А. В.** // Сибир. матем. журнал. 2002. Т 43, №2. С. 268 – 270.

16. **Блиев Н. К., Борзых А. В.** // Доклады НАН РК. 2001. №2. С. 8 – 14.

17. **Shan-liang Liu and Wen-zheng Wang.** Exact N-soliton solution of the modified nonlinear Schrodinger equation. Physical Review E. 1993. V. 48., No 4. P. 3054 – 3058.

18. **Radha R. and Lakshmanan M.** Singularity structure analysis and bilinear form of a (2+1)-dimensional generalization of the nonlinear Schrodinger equation. Inverse Problems 10(1994) L29-L33.

*Поступила в редакцию 1.05.2002г.*

*УДК 517.938*

# О БЭРОВСКОМ КЛАССЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.М. Дауылбаев, М.И. Рахимбердиев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012 Алматы, Масанчи ул., 39/47
Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125

Устанавливается принадлежность показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений второго порядка как функций от коэффициента, принадлежащего пространству непрерывных и ограниченных функций, второму классу Бэра.

Рассматривается линейное уравнение

$$\ddot{x} = a(t)x, \qquad t \in R^+, \tag{1}$$

где $a \in C^+$ ($C^+$ — пространство непрерывных и ограниченных на неотрицательной полуоси $R^+$ функций с метрикой $d(a_1, a_2) = \sup\limits_{R^+}|a_1(t) - a_2(t)|$).

Показатель Ляпунова $\lambda_x$ любого нетривиального решения $x(t)$ уравнения (1) определяется формулой

$$\lambda_x = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(x(t))^2 + (\dot{x}(t))^2}.$$

Это означает, что показатели уравнения (1) и эквивалентной системы

$$\dot{y} = A(t)y, \quad \text{где} \quad y = (y_1, y_2),\ y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

совпадают. Точнее, показателями уравнения (1) называются показатели нормальной фундаментальной системы решений (2). Обозначим их как $\lambda_1(a)$, $\lambda_2(a)$ и считаем, что они являются функциями на $C^+$. Таким образом, изучить поведения показателей как функций на $C^+$ для уравнения (1) это то же самое, что и для системы (2). Используемые здесь необходимые сведения из теории показателей содержатся в книге [1], а сведения из теории разрывных функций в [2, 3]. Нас интересует вопрос: могут ли показатели, рассматриваемые как функции на $C^+$, быть "сильно"разрывными функциями, то есть принадлежат ли они классу Бэра выше первого. Для характеристики показателей Ляпунова как функций, заданных на некотором метрическом пространстве, мы следуем В.М. Миллионщикову (см. [4] и продолжение этой статьи цикла).

Keywords: *differential equation, Lyaunov exponent*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A34

То, что класс Бэра показателей уравнения (1) не превышает двух следует из общих результатов (см.[4]) применительно к линейным дифференциальным уравнениям (см.[5]). Строгая принадлежность второму классу показателей линейных систем (размерности не меньше двух) доказана в [6]. Однако, к системам (2) последний результат неприменим, так как в данном случае мы имеем дело не с произвольными двумерными линейными системами, а с системами специального вида.

**Теорема 1.** *Показатели Ляпунова уравнения (1) принадлежат строго второму классу Бэра.*

**Доказательство .** 1. Если мы покажем, что в $C^+$ существует замкнутое множество, каждая точка которого является точкой разрыва сужений функций $\lambda_1(a)$, $\lambda_2(a)$ на это множество, то в силу теоремы VI на стр. 243 из [3] это будет означать, что такие функции не принадлежат первому классу Бэра. Тогда, учитывая, что они входят во второй класс, мы установим, что они строго второго класса. Зададим замкнутое множество в $C^+$ как семейство функций, непрерывно зависящих от параметра, принадлежащего отрезку прямой. Определим сначала функцию $a(t)$.

Положим

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\varsigma(2k), \varsigma(2k+1)), \quad k = 0, 1, \ldots, \\ -\pi^2, & t \in [\varsigma(2k+1), \varsigma(2k+2)), \quad k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

Здесь $\varsigma(0) = 0$, $\varsigma(k) = \sum\limits_{i=1}^{k} 3^{E[(1/2)(\sqrt{2i-1}-1)]+1}$, $E(x)$— целая часть числа $x$.

Зададим функцию $a(t,\omega)$ следующими равенствами: $a(t,\omega) = a(t)$ при $t \in [\varsigma(2k), \varsigma(2k+1)]$ и $a(t,\omega) = \omega a(t)$ при $t \in [\varsigma(2k+1), \varsigma(2k+2)]$, где $\omega$ — параметр, принадлежащий отрезку $I = [0,1]$. Считаем, что мы рассматриваем семейство систем (2) с матрицей $A(t,\omega)$ и единственным ее коэффициентом, который можно задавать как $a(t,\omega)$. Пусть $X(t,\tau,\omega)$ — матрица Коши, $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ — показатели Ляпунова так определенной системы (2). Так как матрица $A(t,\omega)$ — кусочно-постоянная, то на каждом промежутке ее постоянства, то есть на $[\varsigma(k), \varsigma(k+1))$ (а из непрерывности решений системы следует, что и на $[\varsigma(k), \varsigma(k+1)]$) матрица Коши представима в виде $X(t,\tau,\omega) = \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} A(,\omega)ds\right)$.

Для более точного представления решений системы рассмотрим сначала случай четного $k$. Тогда при $t \in [\varsigma(k), \varsigma(k+1)]$ матрица $A(t,\omega)$ постоянна. Пусть она есть $A_1$,а $e_1(1,1)$, $e_2 = (1,-1)$ — ее собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Отсюда следует, что при $t \in [\varsigma(k), \varsigma(k+1)]$ имеют место равенства

$$X(t, \varsigma(k), \omega)e_i = \exp\left(A_1(t - \varsigma(k))\right) e_i = \exp\left(\gamma_i(t - \varsigma)\right) e_i, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Для нечетных $k$ при $t \in [\varsigma(k), \varsigma(k+1)]$ постоянная матрица $A(t,\omega)$, которая представима в виде $\omega A_2$, имеет собственные значения $\gamma_1 = \omega\pi i$, $\gamma_2 = -\omega\pi i$. Поэтому при $t \in [\varsigma(k), \varsigma(k+1)]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} X(t, \varsigma(k), \omega) &= \exp\left(\omega A_2(t - \varsigma(k))\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\omega\pi(t - \varsigma(k))\right) & \sin\left(\omega\pi(t - \varsigma(k))\right) \\ -\sin\left(\omega\pi(t - \varsigma(k))\right) & \cos\left(\omega\pi(t - \varsigma(k))\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для любого натурального $m$ определим число $k_m$ формулой $k_m = \left((2m+1)^2 + 1\right)/2$. Тогда непосредственно из определения функции $\varsigma(k)$ следует, что $\varsigma(k+1) - \varsigma(k) = 3^{E[(1/2)(\sqrt{2k+1}-1)]+1} = 3^{m+1}$ для всех целых $k$, удовлетворяющих неравенству $k_m \le k < k_{m+1}$.

2. Зададим на отрезке $I$ два множества $\sigma_1$, $\sigma_2$. Записав любое число $\omega \in I$ в троичной системе $\omega = \alpha_1 3^{-1} + \alpha_2 3^{-2} + \ldots$, где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots$, образуем множество $\sigma_1$ из чисел, представимых в виде всевозможных конечных разложений (то есть в виде $\alpha_1 3^{-1} + \cdots + \alpha_r 3^{-r}$

для всех $r \in N$), а $\sigma_2$ — в виде бесконечных разложений с коэффициентами $\alpha_i = 1$ для всех $i$, кроме, может быть конечного числа. Ясно, что так определенные множества $\sigma_1$, $\sigma_2$ плотны на $I$.

3. Фиксируем какое-либо значение параметра $\omega$ из множества $\sigma_1$. Так как оно имеет вид $\alpha_1 3^{-1} + \cdots + \alpha_r 3^{-r}$, где $r \in N$, $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, \ldots, r$, то при $m \geq r$ число $\omega 3^{m+1}$ является целым. Значит при четных $k$, удовлетворяющих неравенству $k_m \leq k < k_{m+1}$ в силу (4) выполняется равенство

$$X(\varsigma(k+1), \varsigma(k), \omega) = \begin{pmatrix} \cos\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) & \sin\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) \\ -\sin\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) & \cos\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) \end{pmatrix} = E^*, \tag{5}$$

где $E^*$ есть либо единичная матрица $E$, либо $-E$.

Пусть $m_0$ — фиксированное целое число, $m_0 > r$ и пусть $x_i(t)$ — решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i\left(\varsigma\left(k_{m_0}\right)\right) = e_i$. Обозначим: $p_i(t) = \dfrac{d}{dt} \ln ||x_i(t)||$. Для четных $k$ при $t \in [\varsigma(k), \varsigma(k+1)]$ в силу (3) имеем

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(x_i(t), x_i(t)) = \frac{1}{2}\frac{(\dot{x}_i(t), x_i(t)) + (x_i(t), \dot{x}_i(t))}{(x_i(t), x_i(t))} = \\ &= \frac{(Ax_i(t), x_i(t))}{(x_i(t), x_i(t))} = \frac{(\lambda_i x_i(t), x_i(t))}{(x_i(t), x_i(t))} = \gamma_i. \end{aligned} \tag{6}$$

Если $k$ — четное и $t \in [\varsigma(k+1), \varsigma(k+2)]$, то из равенства $x_i(t) = X(t, \varsigma(k+1), \omega) x_i(\varsigma(k+1))$ в силу (4) следует, что $||x_i(t)|| = ||x_i(\varsigma(k+1))||$, поэтому

$$p_i(t) = \frac{d}{dt} \ln ||x_i(t)|| = \frac{||x_i(t)||'}{||x_i(t)||} = 0. \tag{7}$$

Из равенств (6), (7) вытекает, что при $k > k_{m_0}$ все точки $\varsigma(k)$ являются точками разрывов кусочно-постоянных на $[\varsigma(k_{m_0}), +\infty)$ функций $p_i(t)$. Поэтому для вычисления величин

$$\overline{p}_i = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t - \varsigma(k_{m_0})} \int\limits_{\varsigma(k_{m_0})}^{t} p_i(\tau) d\tau, \;\; \underline{p}_i = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{1 - \varsigma(k_{m_0})} \int\limits_{\varsigma(k_{m_0})}^{t} p_i(\tau) d\tau$$

достаточно полагать, что $t$ пробегает лишь значения $\varsigma(k)$, где $k > k_{m_0}$ — натуральные числа (см. [1], стр. 148). Если $t$ пробегает значения $\varsigma(k)$ только при четных $k$, то в силу (4), (5) для последовательности

$$H(k) = \frac{1}{\zeta(k) - \zeta(k_{m_0})} \int\limits_{\zeta(k_{m_0})}^{\zeta(k)} p_i(\tau) d\tau \tag{8}$$

выполняется равенство

$$H(k) = \frac{1}{\zeta(k) - \zeta(k_{m_0})} \sum_{j=k_{m_0}}^{k-2} \int\limits_{\zeta(k_{m_0})}^{\zeta(k)} p_i(\tau) d\tau = \frac{1}{\zeta(k)} - \zeta(k_{m_0}) \sum_{j=k_{m_0}}^{k-2} (\delta_j(\zeta(j+1) - \zeta(j)))/2,$$

где $\delta_j = \gamma_i$, если $j$ — четное число и $\delta_j = 0$ в противном случае. Отсюда $H(k) = \gamma_i/2$. Значит, частичные пределы последовательности (8), вычисленные по четным $k$, равны $\gamma_i/2$.

Так как каждый полуинтервал $[\varsigma(k_m), \varsigma(k_{m+1}))$ состоит из промежутков постоянства матрицы $A(t, \omega)$, равных по длине $3^{m+1}$, и их общее число равно $4(m+1)$, то частичный предел последовательности (8), вычисленный по нечетным $\varsigma(k)$, будет совпадать с пределом по четным $\varsigma(k)$. Отсюда следует, что $\overline{p}_i = \underline{p}_i = \gamma_i/2$. Так как $\overline{p}_1 + \overline{p}_2 = 0$, $SpA(t, \omega) \equiv 0$, то решения $x_1(t)$,

$x_2(t)$ образуют нормальный базис решений системы (2), то есть числа $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ являются показателями $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ системы (2) при $\omega \in \sigma_1$. Итак доказано, что на множестве $\sigma_1$ функции $\lambda_i(\omega)$ принимают постоянное значение, равное $\gamma_i/2$, $i = 1, 2$.

4. Пусть теперь $\omega \in \sigma_2$. Это означает, что для некоторого $s \in N$ имеет место равенство $\omega = \alpha_1 3^{-1} + \dots + \alpha_s 3^{-s} + 3^{-s-1} + 3^{-s-2} + \dots$, где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, \dots, s$. В этом случае число $\omega 3^{m+1}$ при $m \geq s$ можно записать в виде $K_m + 1/2$, где $K_m$ — некоторое натуральное число. Тогда при $m \leq s$ для всех четных $k$ таких что, $k_m \leq k < k_{m+1}$, выполняется равенство (2), а для нечетных — равенство

$$X(\varsigma(k+1), \varsigma(k), \omega) = \begin{pmatrix} \cos\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) & \sin\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) \\ -\sin\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) & \cos\left(\pi\omega 3^{m+1}\right) \end{pmatrix} = E^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пусть $m_0$ — фиксированное целое, удовлетворяющее неравенству $m_0 > s$ и $x_i(t)$ — решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i\left(\varsigma(k_{m_0})\right) = e_i$. Так как число промежутков постоянства на каждом полуинтервале $[\varsigma(k_m), \varsigma(k_{m+1}))$, где $m \leq m_0$, кратно четырем, то согласно (9) при $k, k+4 \in [\varsigma(k_m), \varsigma(k_{m+1})]$ имеем

$$X(\varsigma(k+4), \varsigma(k), \omega) = E^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \exp(A_1(\varsigma(k+3) - \\ - \varsigma(k+2))) E^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \exp(A_1(\varsigma(k+1) - \varsigma(k))).$$

Поэтому

$$X(\varsigma(k+4), \varsigma(k), \omega) e_i = E^* \exp(\gamma_2(\varsigma(k+3) - \varsigma(k+2))) \exp(\gamma_1(\varsigma(k+1) - \\ - \varsigma(k))) e_i = E^* \exp((\gamma_1 + \gamma_2) 3^{m+1}) e_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Далее, применяя те же рассуждения, что и в п.3., приходим к выводу, что $\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega) = 0$. Таким образом, установлено, что на множестве $\sigma_2$ функции $\lambda_i(\omega)$, $i = 1, 2$ принимают постоянное значение, равное 0.

В силу теоремы 29.2.1 из [1] функцию $a(t)$ можно теперь аппроксимировать непрерывной функцией $a^*(t)$ так, что показатели системы (2) с коэффициентом, равным $a^*(t)$, имеют те же показатели Ляпунова, что и система (2) с коэффициентом $a(t)$ . Чтобы аппроксимирующая матрица была непрерывной при всех значениях $\omega$, достаточно положить $a^*(t) = 0$ при $t = \zeta(k)$ для любого целого неотрицательного $k$. Тем самым установлено, что существует система (2) с коэффициентом из $C^+$ такая, что функции $\lambda_i(\omega)$ разрывны в каждой точке отрезка $I$. Поэтому они принадлежат второму классу Бэра. Теорема доказана.

## Цитированная литература


1. **Былов Б. Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости М., 1996.

2. **Бэр Р.** Теория разрывных функций. М.; Л., 1932.

3. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М.; Л., 1937.

4. **Миллионщиков В.М.** //Дифференциальные уравнения.1980. Т.16 №8.С.1408-1416.

5. **Миллионщиков В.М.** //Дифференциальные уравнения.1980. Т.16 №9.С.1587-1598.

6. **Рахимбердиев М.И.** //Мат. Заметки.1982. Т.31..№6. С.925-931.



*Поступила в редакцию 27.05.2002г.*

*УДК 519.624*

# КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. С. Джумабаев

Институт Математики МОиН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125, anar@math.kz

Рассматриваются сингулярные краевые задачи на полуоси для семейств обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе метода параметризации в терминах исходных данных установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости.

Вопросы существования, единственности и построения приближенных методов решения сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) рассмотрены многими авторами [1-12]. Задача нахождения ограниченного на полуоси или на всей оси решения тесно связана с экспоненциальной дихотомичностью (э.д.) дифференциального уравнения и различными методами исследована в [13-22]. В [23-24] ограниченные решения о.д.у. изучаются на основе метода параметризации (м.п.). В терминах двусторонне-бесконечных блочно-ленточных матриц $Q_{\nu,h}$, составляемых по матрице дифференциального уравнения, получены необходимые и достаточные условия существования единственного, ограниченного на всей оси решения. Построена корректно разрешимая (к.р.) краевая задача, определяющая все ограниченные на полуоси решения рассматриваемого уравнения. Регулярная линейная двухточечная краевая задача м.п. исследована в [25]. В терминах конечной матрицы специальной структуры $Q_\nu(h)$, составляемой по матрицам граничных условий и дифференциального уравнения, установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости.

В настоящей работе на $[T,\infty)$ рассматривается семейство о.д.у.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \qquad v \in R^n, \quad x \in [0,\omega], \tag{1}$$

где ограниченные на $\overline{\Omega}^+{}_T = [0,\omega] \times [T,\infty)$ матрица $A(x,t)$, функция $F(x,t)$ непрерывны по $t\in[T,\infty)$ при $x\in[0,\omega]$ и равномерно относительно $t\in[T,\infty)$ непрерывны по $x\in[0,\omega]$, $||v(x,t)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |v_i(x,t)|$, $||A(x,t)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)| \le \alpha(x) \le \overline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$ — const.

Через $C^*(\overline{\Omega}^+{}_T, R^n)$ обозначим пространство ограниченных функций $v : \overline{\Omega}^+{}_T \to R^n$, непрерывных по $t \in [T,\infty)$ при $x \in [0,\omega]$ и равномерно относительно $t \in [T,\infty)$ непрерывных по $x \in [0,\omega]$ с нормой $||v(x,t)||_1 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \sup\limits_{t\in[T,\infty)} ||v(x,t)||$.

Keywords: *differential equations, parametrization's method, correct solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

Исследуются решения уравнений (1), удовлетворяющие условиям

$$P(x)v(x,T) = d_1(x), \qquad v(x,t) \in C^*(\overline{\Omega}^+{}_T, R^n). \tag{2}$$

Здесь $P(x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ $(n_1 \times n)$-матрица ранга $n_1$ $(n_1 = 0,1,\dots,n)$, $d_1(x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ функция размерности $n_1$. При $n_1 = 0$ в условиях (2) отсутствует первое соотношение.

**Определение.** *Задача (1), (2) называется корректно разрешимой, если для любых $F(x,t)$, $d_1(x)$ существует единственное решение $v(x,t)$ и для него справедлива оценка*

$$||v(x,t)||_1 \le K \max\Big(\max_{x\in[0,\omega]} ||d_1(x)||, ||F(x,t)||_1\Big),$$

*где $K$ – const, не зависящая от $d_1(x)$, $F(x,t)$.*

Цель работы — в терминах матриц $A(x,t)$, $P(x)$ установить необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (1), (2).
Введем следующие пространства:
$m^+{}_n$ — пространство ограниченных последовательностей $\lambda_r \in R^n$, $r = 1,2,\dots$ с нормой

$$||\lambda||_2 = ||(\lambda_1, \lambda_2, \dots)||_2 = \sup_r ||\lambda_r||;$$

$m^+{}_n(h)$ — пространство равномерно ограниченных последовательностей непрерывных функций $x_r : [T+(r-1)h, T+rh) \to R^n$ с нормой

$$||x(t)||_3 = ||(x_1(t), x_2(t), \dots)||_3 = \sup_r \sup_{t\in[T+(r-1)h,T+rh)} ||x_r(t)||, \quad r = 1,2,\dots;$$

$m^+{}_n(x)$ — пространство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных последовательностей функций $q_r : [0,\omega] \to R^n$, $r = 1,2,\dots$ с нормой

$$||q(x)||_4 = ||(q_1(x), q_2(x), \dots)||_4 = \max_{x\in[0,\omega]} \sup_r ||q_r(x)||.$$

Возьмем $\widetilde{v}(x,t) = (\widetilde{v}_1(x,t), \widetilde{v}_2(x,t), \dots)$ — последовательность функций $\widetilde{v}_r : [0,\omega] \times [T+(r-1)h, T+rh) \to R^n$, $r = 1,2,\dots$, которая при каждом $x \in [0,\omega]$ принадлежит $m^+{}_n(h)$. Через $m^+{}_n(x,h)$ обозначим пространство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных по $x \in [0,\omega]$ последовательностей $\widetilde{v}(x,t)$ с нормой

$$||\widetilde{v}(x,t)||_5 = ||(\widetilde{v}_1(x,t), \widetilde{v}_2(x,t), \dots)||_5 = \max_{x\in[0,\omega]} \sup_r \sup_{t\in[T+(r-1)h,T+rh)} ||\widetilde{v}_r(x,t)||.$$

Все введенные пространства являются полными. $L(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов $C : X \to X$ ($X$ — банахово пространство ) с индуцированной нормой. Задачу (1), (2) исследуем м.п. По шагу $h > 0$ произведем разбиение $\overline{\Omega}^+{}_T = \cup_{r=1}^{\infty} \Omega_r$, где $\Omega_r = [0,\omega] \times [T+(r-1)h, T+rh)$. Сужение функции $v(x,t) \in C^*(\overline{\Omega}^+{}_T, R^n)$ на $\Omega_r$ обозначим через $v_r(x,t)$. Если $v(x,t)$ является решением задачи (1), (2), то последовательность $(v_1(x,t), v_2(x,t), \dots)$ удовлетворяет бесконечной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(x,t)v_r + F(x,t), \quad t \in [T+(r-1)h, T+rh), \quad x \in [0,\omega], \quad r = 1,2,\dots, \tag{3}$$

и дополнительным условиям

$$P(x)v_1(x,T) = d_1(x), \quad x \in [0,\omega], \quad (v_1(x,t), v_2(x,t), \dots) \in m^+{}_n(x,h), \tag{4}$$

$$\lim_{t\to(T+rh)-0} v_r(x,t) = v_{r+1}(x, T+rh), \qquad r = 1,2,\dots. \tag{5}$$

Здесь (5) — условия склеивания решения во внутренних линиях разбиения области $\overline{\Omega}^+{}_T$. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t = T + (r-1)h$ и произведем замену $\widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x)$, $r = 1, 2, \dots$. Получим краевую задачу с функциональными параметрами

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(x,t)[\widetilde{v}_r + \lambda_r(x)] + F(t,x), \quad \widetilde{v}_r(x, T + (r-1)h) = 0,$$

$$t \in [T + (r-1)h, T + rh), \quad x \in [0,\omega], \quad r = 1, 2, \dots, \tag{6}$$

$$P(x)\lambda_1(x) = d_1(x), \qquad (\lambda(x), \widetilde{v}(x,t)) \in m^+{}_n(x) \times m^+{}_n(x,h), \tag{7}$$

$$\lim_{t \to (T+rh)-0} \widetilde{v}_r(x,t) + \lambda_r(x) = \lambda_{r+1}(x), \qquad r = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Если пара $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*(x,t)) \in m^+{}_n(x) \times m^+{}_n(x,h)$ — решение задачи (6)–(8), то функция $v^*(x,t)$, полученная путем склеивания систем функций $\{\lambda^*_r(x) + \widetilde{v}^*_r(x,t)\}$, $r = 1, 2, \dots$, принадлежит $C^*(\overline{\Omega}^+{}_T, R^n)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $(x,t) \in [0,\omega] \times [T, \infty)$ и первому соотношению в условиях (2) для всех $x \in [0,\omega]$. Наоборот, если функция $v(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), то пара $(\lambda(x), \widetilde{v}(x,t))$, где $\lambda(x) = (v_1(x,T), v_2(x, T+h), \dots)$, $\widetilde{v}(x,t) = (v_1(x,t) - v_1(x,T), v_2(x,t) - v_2(x,T+h), \dots)$, принадлежит $m^+{}_n(x) \times m^+{}_n(x,h)$ и удовлетворяет (6)–(8). В задаче с функциональными параметрами при фиксированных $\lambda_r(x)$ функцию $\widetilde{v}_r(x,t)$ можно определить, решая задачу Коши (6), которая эквивалентна интегральному уравнению:

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau)[\widetilde{v}_r(x,\tau) + \lambda_r(x)]d\tau + \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} F(x,\tau)d\tau,$$

$$t \in [T + (r-1)h, T + rh), \qquad x \in [0,\omega], \qquad r = 1, 2, \dots \tag{9}$$

Вместо $v_r(x,\tau)$, подставив правую часть (9) и повторив этот процесс $\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \Big[ \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots +$$

$$+ \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \dots \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1 \Big] \lambda_r(x) +$$

$$+ \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} F(x,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_1} F(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+ \dots + \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \dots \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1}) \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_{T+(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) \dots \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1}) \int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x+\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1. \tag{10}$$

Отсюда найдем $\lim\limits_{t \to (T+rh)-0} \widetilde{v}_r(x,t)$ и, подставив соответствующие этим пределам выражения в (8), получим бесконечную систему уравнений относительно параметров $\lambda_r(x)$ :

$$hP(x)\lambda_1(x) = hd_1(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{11}$$

$$[I+D_{\nu,r}(h,x)]\lambda_r(x)-\lambda_{r+1}(x)=-F_{\nu,r}(h,x)-G_{\nu,r}(\widetilde{v}_r,x,h), \quad r=1,2,\ldots, \quad x\in[0,\omega], \tag{12}$$

где $I$ — единичная матрица размерности $n$,

$$D_{\nu,r}(h,x)=\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}A(x,\tau_1)d\tau_1+\cdots+\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(h,x)=\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}F(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}A(x,\tau_1)\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_1}F(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+$$

$$+\cdots+\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}F(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(\widetilde{v}_r,x,h)=\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(x,\tau_{\nu-1})\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1.$$

Матрицу, соответствующую левой части бесконечной системы функциональных уравнений (11), (12), обозначим через ${Q^+}_{\nu,h}(x)$ и систему (11), (12) запишем в следующем виде

$$ {Q^+}_{\nu,h}(x)\lambda(x)=-\begin{pmatrix}-hd_1(x)\\ F_\nu(h,x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ -G_\nu(\widetilde{v},x,h)\end{pmatrix}, \qquad \lambda(x)\in {m^+}_n(x), \tag{13}$$

где $F_\nu(h,x)\in {m^+}_n(x)$, $G_\nu(\widetilde{v},x,h)\in {m^+}_n(x)$ для любых $h>0$, $F(x,t)\in C^*(\overline{\Omega}^+{}_T,R^n)$, $\widetilde{v}(x,t)\in$ $\in {m^+}_n(x,h)$.

Если известна $\widetilde{v}(x,t)\in {m^+}_n(x,h)$, то из (13) можно найти $\lambda(x)\in {m^+}_n(x)$. Наоборот, если известна $\lambda(x)\in {m^+}_n(x)$, то из (9) можно найти $\widetilde{v}(x,t)\in {m^+}_n(x,h)$. Поскольку неизвестны как $\widetilde{v}(x,t)$, так и $\lambda(x)$, то используется итерационный метод и решение задачи (6)–(8) $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))\in {m^+}_n(x)\times {m^+}_n(x,h)$ находится как предел последовательности $(\lambda^{(k)}(x),$ $\widetilde{v}^{(k)}(x,t))\in {m^+}_n(x)\times {m^+}_n(x,h)$, $k=0,1,2,\ldots$, определяемой по следующему алгоритму:
Шаг 0. Начальное приближение по функциональному параметру $\lambda^{(0)}(x)\in {m^+}_n(x)$ определяем из уравнения (13), где в правой части $G_\nu(\widetilde{v},x,h)=0$. Решая интегральное уравнение (9) при $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, находим $\widetilde{v}^{(0)}(x,t)\in {m^+}_n(x,h)$.
Шаг 1. Подставив вместо $\widetilde{v}(x,t)$ найденную функцию $\widetilde{v}^{(0)}(x,t)$, из уравнения (13) определяем $\lambda^{(1)}(x)\in {m^+}_n(x)$. Решая интегральное уравнение (9) при $\lambda(x)=\lambda^{(1)}(x)$, находим $\widetilde{v}^{(1)}(x,t)\in$ $\in {m^+}_n(x,h)$.
И т.д.

Достаточные условия сходимости алгоритма и оценку решения устанавливает

**Теорема 1.** *Пусть при некоторых $h>0$, $\nu(\nu=1,2,\ldots)$ матрица ${Q^+}_{\nu,h}(x):{m^+}_n\to$ $\to {m^+}_n$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются неравенства*

$$a)\qquad ||[{Q^+}_{\nu,h}(x)]^{-1}||_{L({m^+}_n)}\le\gamma_\nu(h,x)\le\overline{\gamma}_\nu(h), \qquad (\overline{\gamma}_\nu(h)-\mathrm{const}),$$

$$b)\qquad q_\nu(h,x)=\gamma_\nu(h,x)\left[e^{\alpha(x)h}-1-\alpha(x)h-\cdots-\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}\right]\le\beta<1.$$

*Тогда последовательность пар $(\lambda^{(k)}(x),\widetilde{v}^{(k)}(x,t))\in {m^+}_n(x)\times {m^+}_n(x,h)$ при $k\to\infty$ сходится к $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))\in {m^+}_n(x)\times {m^+}_n(x,h)$ — единственному решению задачи (6)–(8) и справедливы оценки*

$$||\lambda^*(x)||_2\le a_1(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||,\sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big), \tag{14}$$

$$||\widetilde{v}^*(x,t)||_3 \le a_2(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big), \tag{15}$$

*где* $a_1(\nu,h,x) = \dfrac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\cdot\dfrac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}a_0(\nu,h,x) + h\gamma_\nu(h,x)\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{[\alpha(x)h]^j}{j!}$,

$$a_0(\nu,h,x) = [e^{\alpha(x)h}-1]h\gamma_\nu(h,x)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} + he^{\alpha(x)h},$$

$$a_2(\nu,h,x) = \Big\{[e^{\alpha(x)h}-1]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\cdot\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}+1\Big\}a_0(\nu,h,x).$$

**Доказательство.** В каждой блочной строке матрицы $Q^+{}_{\nu,h}(x)$, начиная со второго, ненулевыми являются только два блока $I + D_{\nu,r}(h,x)$ и $-I$. Поэтому при любом $x\in[0,\omega]$ бесконечная матрица $Q^+{}_{\nu,h}(x)$ переводит элементы пространства $m^+{}_n$ снова в $m^+{}_n$ и

$$||Q^+{}_{\nu,h}(x)||_{L(m^+{}_n)} \le \max\Big(h||P(x)||, 2+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\Big).$$

В силу предположений относительно матриц $P(x)$, $A(x,t)$ матрица $Q^+{}_{\nu,h}(x) : m^+{}_n \to m^+{}_n$ непрерывна по $x\in[0,\omega]$ в норме $L(m^+{}_n)$ и $Q^+{}_{\nu,h}(x) : m^+{}_n(x) \to m^+{}_n(x)$ (т.е. бесконечная функциональная матрица $Q^+{}_{\nu,h}(x)$ является оператором из $L(m^+{}_n(x))$). Тогда в силу условий теоремы 1 и неравенства

$$||[Q^+{}_{\nu,h}(x)]^{-1} - [Q^+{}_{\nu,h}(\bar{x})]^{-1}||_{L(m^+{}_n)} \le ||[Q^+{}_{\nu,h}(x)]^{-1}||_{L(m^+{}_n)}\cdot||Q^+{}_{\nu,h}(x)-$$

$$-Q^+{}_{\nu,h}(\bar{x})||_{L(m^+{}_n)}\cdot||[Q^+{}_{\nu,h}(\bar{x})]^{-1}||_{L(m^+{}_n)}$$

матрица $[Q^+{}_{\nu,h}(x)]^{-1}$ также непрерывна по $x\in[0,\omega]$ в норме $L(m^+{}_n)$ и $[Q^+{}_{\nu,h}(x)]^{-1} : m^+{}_n(x) \to m^+{}_n(x)$. Поэтому существует единственное $\lambda^{(0)}(x)\in m^+{}_n(x)$ и

$$||\lambda^{(0)}(x)||_2 \le \gamma_\nu(h,x)\max\Big\{h||d_1(x)||, \Big[1+\alpha(x)h+\frac{[\alpha(x)h]^2}{2!}+\dots+\frac{[\alpha(x)h]^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\Big]\cdot\sup_{t\in[T,\infty)}||F_\nu(h,x)||h\Big\}\le$$

$$\le\gamma_\nu(h,x)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big). \tag{16}$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана к интегральному уравнению (9) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $r=1,2,\dots$ имеем

$$||\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)||\le$$

$$\le\Big[e^{\alpha(x)(t-(T+(r-1)h))}-1\Big]||\lambda_r^{(0)}(x)|| + e^{\alpha(x)(t-(T+(r-1)h))}\sup_{t\in[T+(r-1)h,T+rh)}||F(x,t)||h. \tag{17}$$

Из (16), (17) получим оценку

$$||\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)||_3 \le (e^{\alpha(x)h}-1)\gamma_\nu(h,x)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big)+$$

$$+e^{\alpha(x)h}h\sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)|| \le \Big\{(e^{\alpha(x)h}-1)\gamma_\nu(h,x)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}+e^{\alpha(x)h}\Big\}h\times$$

$$\times\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big) = a_0(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big). \tag{18}$$

По первому шагу алгоритма определим $\lambda^{(1)}(x) \in {m^+}_n(x)$ и оценим $||\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)||_2$ :

$$||\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)||_2 \le \gamma_\nu(h,x)||G_\nu(\widetilde{v}^{(0)},x,h)||_2 \le \gamma_\nu(h,x)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}||\widetilde{v}^{(0)}(x,t)||_3 \le$$

$$\le \gamma_\nu(h,x)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}a_0(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big). \tag{19}$$

Вновь применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, имеем

$$||\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)|| \le \Big[e^{\alpha(x)(t-(T+(r-1)h))} - 1\Big]||\lambda_r^{(k)}(x) - \lambda_r^{(k-1)}(x)||, \tag{20}$$

$r = 1,2,\ldots;\quad k = 1,2,\ldots$ Из уравнения (13) при каждом фиксированном $x \in [0,\omega]$ имеем оценку

$$||\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)||_2 \le \gamma_\nu(h,x)||G_\nu(\widetilde{v}^{(k)},x,h) - G_\nu(\widetilde{v}^{(k-1)},x,h)||_2 \le \gamma_\nu(h,x)\times$$

$$\times \sup_r\Big\{\int\limits_{T+(r-1)h}^{T+rh}\alpha(x)\ldots\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(x)\int\limits_{T+(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(x)||\widetilde{v}_r^{(k)}(x,\tau_\nu) - \widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,\tau_\nu)||d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1\Big\}. \tag{21}$$

Заменяя в (21) разность по $\widetilde{v}^{(k)}(x,t)$ правой частью (20), получим основное неравенство

$$||\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)||_2 \le q_\nu(h,x)||\lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x)||_2. \tag{22}$$

Отсюда на основе неравенства b) теоремы 1 вытекают оценки

$$||\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)||_5 \le (e^{\bar{\alpha}h} - 1)||\lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x)||_4, \tag{23}$$

$$||\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)||_4 \le \beta||\lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x)||_4. \tag{24}$$

Оценки (23), (24) обеспечивают сходимость последовательности $(\lambda^{(k)}(x),\, \widetilde{v}^{(k)}(x,t)) \in {m^+}_n(x) \times$ $\times\, {m^+}_n(x,h)$ к $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*(x,t)) \in {m^+}_n(x) \times {m^+}_n(x,h)$ — решению задачи с функциональными параметрами (6)–(8). На основе (16), (18), (19), (23), (24) получим

$$||\lambda^*(x)||_2 \le ||\lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x)||_2 + ||\lambda^{(0)}(x)||_2 \le \frac{1}{1 - q_\nu(h,x)}||\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)||_2 + ||\lambda^{(0)}(x)||_2 \le$$

$$\le a_1(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big),$$

$$||\widetilde{v}^*(x,t)||_3 \le ||\widetilde{v}^*(x,t) - \widetilde{v}^{(0)}(x,t)||_3 + ||\widetilde{v}^{(0)}(x,t)||_3 \le \Big[e^{\alpha(x)h} - 1\Big]||\lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x)||_2 +$$

$$+ a_0(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big) \le a_2(\nu,h,x)\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big).$$

Покажем единственность. Пусть $(\lambda(x), \widetilde{v}(x,t)) \in {m^+}_n(x) \times {m^+}_n(x,h)$ — решение задачи (6)–(8). Тогда аналогично (23), (24) справедливы оценки

$$||\widetilde{v}^*(x,t) - \widetilde{v}(x,t)||_5 \le (e^{\bar{\alpha}h} - 1)||\lambda^*(x) - \lambda(x)||_4,$$

$$||\lambda^*(x) - \lambda(x)||_4 \le \beta||\lambda^*(x) - \lambda(x)||_4,$$

где $\beta < 1$. Отсюда вытекают равенства : $\lambda^*(x) = \lambda(x)$, $\widetilde{v}^*(x,t) = \widetilde{v}(x,t)$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $v^*(x,t)$ и для него справедливы оценки*

$$\sup_{t\in[T,\infty)}||v^*(x,t)|| \le [a_1(\nu,h,x)+a_2(\nu,h,x)]\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big), \tag{25}$$

$$||v^*(x,t)||_1 \le [\bar a_1(\nu,h)+\bar a_2(\nu,h)]\max\Big(\max_{x\in[0,\omega]}||d_1(x)||, ||F(x,t)||_1\Big), \tag{26}$$

*где* $\bar a_1(\nu,h)=\dfrac{1}{1-\beta}\overline{\gamma}_\nu(h)\dfrac{(\bar\alpha h)^\nu}{\nu!}\bar a_0(\nu,h)+h\overline{\gamma}_\nu(h)\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{1}{j!}(\bar\alpha h)^j,$

$\bar a_0(\nu,h)=[e^{\bar\alpha h}-1]h\overline{\gamma}_\nu(h)\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{1}{j!}(\bar\alpha h)^j+he^{\bar\alpha h}, \quad \bar a_2(\nu,h)=\Big\{[e^{\bar\alpha h}-1]\dfrac{\overline{\gamma}_\nu(h)}{1-\beta}\cdot\dfrac{(\bar\alpha h)^\nu}{\nu!}+1\Big\}\bar a_0(\nu,h).$

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует существование $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))\in {m^+}_n(x)\times$ $\times\, {m^+}_n(x,h)$ — решения задачи (6)–(8). Через $v^*(x,t)$ обозначим функцию на ${\overline{\Omega}^+}_T$, для которой $\lambda^*_r(x)+\widetilde{v}^*_r(x,t)$ является сужением на $[0,\omega]\times[T+(r-1)h,T+rh)$, $r=1,2,\ldots$ Очевидно, что $v^*(x,t)\in C^*({\overline{\Omega}^+}_T,R^n)$ и удовлетворяет (1), (2). Из (14), (15) следует неравенство

$$\sup_{t\in[T,\infty)}||v^*(x,t)||=\sup_r\sup_{t\in[T+(r-1)h,T+rh)}||\lambda^*_r(x)+\widetilde{v}^*_r(x,t)||\le||\lambda^*(x)||_2+||\widetilde{v}^*(x,t)||_3\le$$

$$\le[a_1(\nu,h,x)+a_2(\nu,h,x)]\max\Big(||d_1(x)||, \sup_{t\in[T,\infty)}||F(x,t)||\Big). \tag{27}$$

Учитывая, что (27) выполняется для всех $x\in[0,\omega]$ и взяв наибольшие значения участвующих в нем величин, получим (26). Если $v(x,t)$ — другое решение задачи (1), (2) то пара $(\lambda(x),\widetilde{v}(x,t))$, где $\lambda(x)=(v(x,T),v(x,T+h),\ldots)$, $\widetilde{v}(x,t)=(v(x,t)-v(x,T),v(x,t)-v(x,T+h),\ldots)$, принадлежит пространству ${m^+}_n(x)\times{m^+}_n(x,h)$ и является решением задачи (6)–(8). В силу единственности решения задачи (6)–(8) имеем $(\lambda(x),\widetilde{v}(x,t))=(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))$, откуда следует $v^*(x,t)=$ $=v(x,t)$ для всех $(x,t)\in{\overline{\Omega}^+}_T$. Теорема доказана.

Из эквивалентности исходной задачи (1), (2) и задачи с функциональными параметрами (6)–(8) следует, что если $v^*(x,t)$ — решение задачи (1), (2), то пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))$ с координатами $\lambda^*_r(x)=\widetilde{v}^*(x,T+(r-1)h)$, $\widetilde{v}^*_r(x,t)=\widetilde{v}^*(x,t)-\lambda^*_r(x)$, $r=1,2,\ldots$, является решением задачи (6)–(8), а $\lambda^*(x)$ удовлетворяет (13), где $\widetilde{v}(x,t)=\widetilde{v}^*(x,t)$ при любом $\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$. В функциональном уравнении (13) переходя к пределу при $\nu\to\infty$ и учитывая оценку

$$||G_\nu(\widetilde{v}^*,x,h)||_4\le\frac{(\bar\alpha h)^\nu}{\nu!}||\widetilde{v}^*(x,t)||_5,$$

получим, что $\lambda(x)=\lambda^*(x)$ является решением уравнения

$${Q^+}_{*,h}(x)\lambda(x)=-\begin{pmatrix}-hd_1(x)\\ F_*(h,x)\end{pmatrix}, \qquad \lambda(x)\in{m^+}_n(x), \tag{28}$$

где ${Q^+}_{*,h}(x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}{Q^+}_{\nu,h}(x)$, $F_*(h,x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}F_\nu(h,x)$.
Очевидно, что ${Q^+}_{*,h}(x):{m^+}_n(x)\to{m^+}_n(x)$, $F_*(h,x)\in{m^+}_n(x)$.

Наоборот, если $\tilde\lambda(x)\in{m^+}_n(x)$ — решение уравнения (28), то система пар $(\tilde\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t))$, $r=1,2,\ldots$, где $\widetilde{v}_r(x,t)$ — решение интегрального уравнения (9) при $\lambda_r(x)=\tilde\lambda_r(x)$, является решением задачи (6)–(8).

Таким образом, решение функционального уравнения (28) совпадает со значениями точного решения задачи (1), (2) в точках разбиения $t=T+(r-1)h$, $r=1,2,\ldots$ и уравнение, получаемое из (28) делением обеих частей на $h>0$, является точной разностной схемой для задачи (1), (2).

Условия теоремы 1 оказываются не только достаточными, но и необходимыми для корректной разрешимости задачи (1), (2). Чтобы доказать это утверждение мы используем следующую лемму, являющуюся обобщением леммы из [25] на семейство функций.

**Лемма.** *Пусть на $[0,\omega]\times[0,h]$ задана непрерывная $(n\times n)$-матрица $A(x,t)$ и $||A(x,t)||\leq$ $\leq\alpha$. Тогда при любых $\varepsilon>0$ и $h>0$, удовлетворяющих соотношению*

$$\frac{1}{\alpha h}\Big[e^{\alpha h}-1-\alpha h\Big]\leq\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon/2)(1+\varepsilon)}, \tag{29}$$

*для любой непрерывной функции $b:[0,\omega]\to R^n$ существует непрерывная функция $f_b:[0,\omega]\times$ $\times[0,h]\to R^n$, обладающая следующими свойствами*

$$f_b(x,0)=0,\qquad f_b(x,h)=0\qquad\forall x\in[0,\omega], \tag{30}$$

$$\max_{t\in[0,h]}\max_{x\in[0,\omega]}||f_b(x,t)||\leq(1+\varepsilon)\max_{x\in[0,\omega]}||b(x)||, \tag{31}$$

$$F(A,x,f_b)\equiv\frac{1}{h}\int\limits_0^h f_b(x,t)dt+\frac{1}{h}\int\limits_0^h A(x,t)\int\limits_0^t f_b(x,\tau)d\tau dt+$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^h A(x,t)\int\limits_0^t A(x,\tau)\int\limits_0^\tau f_b(x,\tau_1)d\tau_1 d\tau dt+\cdots=b(x),\qquad x\in[0,\omega]. \tag{32}$$

**Доказательство.** При каждом $x\in[0,\omega]$, применяя лемму из [25], построим функцию $f_b(x,t)$ с требуемыми свойствами. Непрерывность функции $f_b(x,t)$ на $[0,\omega]\times[0,h]$ следует из построения. Лемма доказана.

**Теорема 3.** *Задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых $h>0$, $\nu$ $(\nu=1,2,\dots)$ функциональная матрица $Q^+{}_{\nu,h}(x):m^+{}_n(x)\to m^+{}_n(x)$ ограниченно обратима и*

$$\bar q_\nu(h)=||[Q^+{}_{\nu,h}(x)]^{-1}||_{L(m^+{}_n(x))}\cdot\left[e^{\bar\alpha h}-1-\bar\alpha h-\cdots-\frac{[\bar\alpha h]^\nu}{\nu!}\right]<1.$$

**Доказательство.** При выполнении условий корректная разрешимость задачи (1), (2) следует из теоремы 2.
Покажем необходимость условий теоремы. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима. Докажем ограниченную обратимость матрицы $Q^+{}_{*,h}(x):m^+{}_n(x)\to m^+{}_n(x)$ для всех $h>0$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{h}Q^+{}_{*,h}(x)\lambda(x)=-\begin{pmatrix} d_1(x)\\ b(x)\end{pmatrix},\qquad \lambda(x),b(x)\in m^+{}_n(x). \tag{33}$$

Пусть $\tilde\lambda(x)\in KerQ^+{}_{*,h}(x)\subseteq m^+{}_n(x)$. Тогда, как было сказано выше, $\tilde\lambda(x)$ совпадает со значениями решения однородной задачи (1), (2) ( $F(x,t)=0$, $d_1(x)=0$), которая по предположению имеет только тривиальное решение. Поэтому $\tilde\lambda(x)=0\in m^+{}_n(x)$, т.е. ядро функциональной матрицы $Q^+{}_{*,h}(x):m^+{}_n(x)\to m^+{}_n(x)$ состоит только из нулевого элемента. Число $h>0$ возьмем удовлетворяющим неравенству (29) при $\varepsilon=1$. Тогда на основе леммы для любого элемента $b(x)\in m^+{}_n(x)$ можно построить функцию $F_b(x,t)\in C^*(\overline{\Omega}^+{}_T,R^n)$, для которой $\frac{1}{h}F_*(h,x)=b(x)$ и $||F_b(x,t)||_1\leq2||b(x)||_3$. Так как уравнение (33) — точная разностная схема для задачи (1), (2), то оно $\forall F_b(x,t)\in C^*(\overline{\Omega}^+{}_T,R^n)$ имеет решение $\lambda(x)\in m^+{}_n(x)$ и

$$||\lambda(x)||_3=\left|\left|h[Q^+{}_{*,h}(x)]^{-1}\begin{pmatrix} d_1(x)\\ b(x)\end{pmatrix}\right|\right|_3=\sup_r\max_{x\in[0,\omega]}||v(x,T+(r-1)h)||\leq||v(x,t)||_1\leq$$

$$\leq K \max\Big(\max_{x\in[0,\omega]} ||d_1(x)||, ||F_b(x,t)||_1\Big) \leq K \max\Big(\max_{x\in[0,\omega]} ||d_1(x)||, 2||b(x)||_1\Big) \leq$$

$$\leq 2K \max\Big(\max_{x\in[0,\omega]} ||d_1(x)||, ||b(x)||_1\Big),$$

т.е. $\quad h||[Q^+{}_{*,h}(x)]^{-1}||_{L(m^+{}_n(x))} \leq 2K \quad$ или $\quad ||[Q^+{}_{*,h}(x)]^{-1}||_{L(m^+{}_n(x))} \leq \dfrac{2K}{h}$.
Учитывая оценку

$$||Q^+{}_{*,h}(x) - Q^+{}_{\nu,h}(x)||_{L(m^+{}_n(x))} \leq \Big[e^{\bar\alpha h} - 1 - \bar\alpha h - \cdots - \frac{1}{\nu!}(\bar\alpha h)^\nu\Big],$$

на основе теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [26, с. 142] найдем $\bar\nu$, при котором функциональная матрица $Q^+{}_{\bar\nu,h}(x) : m^+{}_n(x) \to m^+{}_n(x)$ будет ограниченно обратимой и справедливы неравенства

$$||[Q^+{}_{\bar\nu,h}(x)]^{-1}||_{L(m^+{}_n(x))} \leq \frac{4K}{h},$$

$$\bar q_{\bar\nu}(h) \leq \frac{4K}{h} \cdot \Big[e^{\bar\alpha h} - 1 - \bar\alpha h - \cdots - \frac{1}{\bar\nu!}(\bar\alpha h)^{\bar\nu}\Big] < 1.$$

Теорема доказана.

## Цитированная литература


1. **Абрамов А. А.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 4. С. 733 – 737.
2. **Абрамов А. А., Конюхова Н. Б.** Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сообщ. по прикладной матем. ВЦ РАН, Москва, 1981.
3. **Конюхова Н. Б.** Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи. Сообщ. по прикладной матем. ВЦ РАН, Москва, 1996.
4. **Клоков Ю. А.** // Матем. сборник. 1961. Т. 53, № 2. С. 219 – 232.
5. **Клоков Ю. А.** Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. РИИ ГВФ, Рига, 1963.
6. **Макаров В. Л., Гочева С. Г.** // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 3. С. 527 – 540.
7. **Василевский П.** // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1154 – 1171.
8. **Hoog F. R., Weiss R.** // Computing. 1980. V. 24, № 2. P. 227 – 239.
9. **Markowich P. A.** // SIAM J. Math. Anal. 1982. V. 13, № 13. P. 484 – 513.
10. **Markowich P. A.** // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14, № 1. P. 11 – 37.
11. **Кигурадзе И. Т.** Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. ТГУ, Тбилиси, 1975.
12. **Кигурадзе И. Т., Шехтер Б. Л.** Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы матем. ВИНИТИ, Москва, 1987. Т. 30.
13. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, Москва, 1970.
14. **Плисс В. А.** Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. В кн.: Пробл. асимптотич. теории нелинейных колебаний. Наукова думка, Киев, 1977. С. 168 – 173.
15. **Плисс В. А.** Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. Наука, Москва, 1977.
16. **Мухамадиев Э.** // Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 3. С. 443 – 460.

17. **Красносельский М. А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Наука, Москва, 1966.

18. **Красносельский М. А., Бурд Ш. В., Колесов Ю. С.** Нелинейные почти периодические колебания. Наука, Москва, 1970.

19. **Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. Наукова думка, Киев, 1990.

20. **Майзель А. Д.** // Труды Уральского политехн. ин-та. Сер. матем. 1954. Т. 51, С. 20 – 50.

21. **Массера Х., Шеффер Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. Мир, Москва, 1970.

22. **Аносов Д. В.** // Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. Наука, Москва, 1967. Т. 90, С. 1 – 210.

23. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388 – 404.

24. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 11. С. 1646 – 1660.

25. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

26. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М., 1974.

*Поступила в редакцию 07.06.2002г.*

УДК 681.5

# ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Р. С. Ивлев, С. П. Соколова

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, ivlevruslan@newmail.ru

В работе предлагается методика исследования свойства асимптотической устойчивости линейной интервально-заданной системы с запаздываюшим аргументом, заданной в пространстве состояний, на основе прямого метода Ляпунова и методов интервального анализа. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости с использованием понятий функционалов Ляпунова-Красовского.

## 1. Введение

Задачи исследования динамических свойств систем управления в условиях параметрической неопределенности интервального типа, имеющие своими корнями работу [1], приобретают все большую актуальность. Впервые сформулированная в [1], а затем исследованная и получившая исчерпывающее решение в [2], задача об асимптотической устойчивости интервального характеристического полинома послужила толчком для дальнейших исследований в этой области. Последующее развитие подходов работы [2] позволило ее автору обобщить полученные результаты на случай интервальных квазиполиномов [3], встречающихся при исследовании дифференциально-разностных уравнений. Среди более поздних работ, посвященных исследованию асимптотической устойчивости положения равновесия дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом, следует указать работу [4] и имеющиеся там ссылки, являющуюся развитием работы [3]. В работе [4] получены достаточные условия асимптотической устойчивости интервального квазиполинома на основе исследования четырех функций, построенных специальным образом.

Несколько иное положение дел обстоит в области исследования динамических свойств интервальных систем, заданных в пространстве состояний. Попытки обобщить результаты работы [2] и получить аналоги теорем Харитонова для интервальных матриц [5] потерпели неудачу, о чем свидетельствуют убедительные контрпримеры [6, 7]. В настоящее время имеется достаточно много работ, посвященных исследованию асимптотической устойчивости линейных интервальных систем, заданных в пространстве состояний, среди которых, по мнению авторов,

Keywords: *asymptotic stability, interval analysis, differential inclusions, direct method of Liapunov*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D20, 34K20

наиболее плодотворной в своей области является работа [8]. В то же время работ, в которых рассматривалась бы задача исследования динамических свойств интервальных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа, заданных в пространстве состояний, крайне мало. Из этого направления можно выделить работу [9], в которой предлагается использовать подход Разумихина [10] для исследования интервально-заданных систем с запаздыванием. Данное обстоятельство в сочетании с растущей актуальностью указанной задачи вызывает большой научный интерес.

## 2. Обозначения и постановка задачи

Всюду в работе полужирным шрифтом будут обозначаться интервальные величины, в то время как обычным шрифтом — неинтервальные. Символом нижнего и верхнего подчеркивания будут обозначаться, соответственно, нижняя и верхняя границы интервала;
$\operatorname{mid}\mathbf{a} = (\underline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}})/2$ — середина интервала $\mathbf{a}$;
$\operatorname{rad}\mathbf{a} = (\overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})/2$ — радиус интервала $\mathbf{a}$.
Операции mid , rad , взятия нижней и верхней границ интервалов применительно к матрицам и векторам будут пониматься в поэлементном смысле.

Пусть возмущенное движение параметрически неопределенной системы в пространстве состояний задано в виде дифференциального включения с запаздывающим аргументом, имеющего следующий векторно-матричный вид:

$$\dot{x}(t) \in \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_\tau x(t-\tau), \qquad x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta),\ \theta \in [t_0-\tau; t_0], \tag{1}$$

где $t \in [t_0-\tau;\infty)$ — независимая переменная (время); $t_0 \in \mathbb{R}$ — начальный момент времени; $\tau \in \mathbb{R}_+$ — запаздывание; $x(t)$ — вектор состояний, $x(t) = (x_i(t))$, $x_i(t)$ — непрерывные на $[t_0 - \tau;\infty)$ функции $x_i(t) \in C[t_0-\tau;\infty)$; $1 \le i \le n$; $\mathbf{A}, \mathbf{A}_\tau \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — постоянные интервальные матрицы, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$; $\mathbf{A}_\tau = (\mathbf{a}_{\tau_{ij}})$, $\mathbf{a}_{\tau_{ij}} = [\underline{\mathbf{a}}_{\tau_{ij}}, \overline{\mathbf{a}}_{\tau_{ij}}]$, $1\le i,j\le n$; $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов [11, 12], $\mathbb{IR} = \{x\in\mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{x}}\le x\le\overline{\mathbf{x}},\ \underline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}\}$; $\varphi_{t_0\tau}(\theta)$ — начальная вектор-функция, компоненты которой принадлежат пространству непрерывных на $[-\tau;0]$ функций.

Всюду в дальнейшем математическую модель системы, записанную в виде (1), будем понимать как семейство математических моделей систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau), \qquad x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta),\ \theta \in [t_0-\tau; t_0], \tag{2}$$

для которых $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, в формальном виде вышесказанное будем записывать

$$\{x(t) = (x_i(t)) \mid \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau),\ x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta),\ \theta \in [t_0-\tau; t_0],\ A \in \mathbf{A},\ A_\tau \in \mathbf{A}_\tau\}. \tag{3}$$

В данной работе авторы придерживаются нотации, аналогичной [13]. В частности, для описания динамической системы в условиях параметрической неопределенности в выражении (1), согласно наметившейся в современных научных работах тенденции, используется знак включения в силу многозначности правой части.

**Определение 1.** *Будем говорить, что интервально-заданная система (1) обладает свойством асимптотической устойчивости, если асимптотически устойчива любая система (2), где $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, т.е. для любых матриц $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всяком $t \ge t_0$ и при всяких начальных функциях $\varphi_{t_0\tau}(\theta)$, заданных на отрезке $[t_0-\tau; t_0]$, удовлетворяющих условию $||\varphi_{t_0\tau}(\theta)|| < \delta$, решение $x(t,\varphi_{t_0\tau})$ системы (2) удовлетворяет условиям*

$$||x(t,\varphi_{t_0\tau})|| < \varepsilon \quad и \quad \lim_{t\to\infty} ||x(t,\varphi_{t_0\tau})|| = 0,$$

*где* $||x(t)|| = \sup\{|x_i(t)|,\ 1 \le i \le n,\ -\tau < t < 0\}$.

**З а д а ч а .** Требуется определить условия, при которых интервально-заданная система с запаздыванием (1) будет обладать свойством асимптотической устойчивости в указанном выше смысле.

В настоящее время наметились два основных подхода к решению задачи исследования асимптотической устойчивости систем управления с отклоняющимся аргументом, заданные в пространстве состояний. Оба подхода основаны на идее использования второго метода Ляпунова, суть которого применительно к дифференциальным уравнениям возмущенного движения системы заключается в выборе некоторой непрерывной функции $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, играющей роль обобщенного расстояния до начала координат; убывание выбранной функции вдоль траекторий движения исследуемой системы будет означать асимптотическую устойчивость положения равновесия $x(t) \equiv 0$. Поскольку непосредственный перенос прямого метода Ляпунова на класс дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом имеет ряд ограничений, главным образом заключающихся в сложности определения условий убывания функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы, в обоих вышеупомянутых подходах сделано основное усилие на преодоление указанных трудностей. Первый из них основан на использовании принципа Разумихина, скалярно-оптимизационных функций и построения эффективных оценок воронок для отрезков интегральных линий дифференциального уравнения [10]. Однако более плодотворней оказалась идея Н. Н. Красовского [14], предложившего использовать вместо функций Ляпунова обладающие аналогичными свойствами функционалы. Замечателен тот факт, что для рассматриваемого класса интервальных дифференциальных включений с запаздывающим аргументом (1) может быть применена без существенных изменений доказанная в [14] вторая теорема Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости, которая по отношению к (1) может быть сформулирована в виде:

**Т е о р е м а 1.** *Положение равновесия $x(t, \varphi_{t_0\tau}) \equiv 0$ с начальной функцией $\varphi(\theta) \equiv 0$, $t_0 - \tau \leq \leq \theta \leq t_0$ системы (1) асимптотически устойчиво, если существует функционал $V(x(s), t)$, удовлетворяющий условиям:*

$$V(x(t+s), t) \leq W_1(||x||) + W_2(||x(s)||_\tau), \tag{4}$$

$$V(x(t+s), t) \geq W(||x||), \tag{5}$$

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \leq -\psi(||x||), \tag{6}$$

*где $W_1(r)$ и $W_2(r)$ — монотонно возрастающие функции при $r \geq 0$, причем $W_1(0) = W_2(0) = 0$, $W(r)$ и $\psi(r)$ — непрерывные, положительные при $r > 0$ функции,*

$$||x||_\tau = \left( \int_{-\tau}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t+s) ds \right)^{1/2},$$

*переменная $s$ изменяется в пределах $-\tau \leq s \leq 0$.*

Легко видеть, что функционал [14,15]

$$V(x(t+s), t) = x^T(t) H x(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+\nu) D x(t+\nu) d\nu, \tag{7}$$

где $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — положительно-определенная симметрическая матрица, $D = \mathrm{diag}\{d_i > > 0,\ 1 \leq i \leq n\}$ — диагональная матрица, удовлетворяет условиям (4) и (5) теоремы Н.Н. Красовского. Однако вычисление правого верхнего производного числа $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}$ для выбранного функционала (7) в силу (1), где верхняя грань берется по всем матрицам $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, может оказаться весьма трудоемкой на практике задачей. Для точечных матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$

значение правого верхнего производного числа совпадает с обычной производной функционала (7) по времени в силу (2).

Отличительной особенностью данной работы является развитие идеи Н. Н. Красовского использования функционалов на класс интервально-заданных систем с запаздывающим аргументом, заданных в пространстве состояний. Данная постановка задачи рассматривается впервые.

## 3. Основной результат

Для проведения дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

**Определение 2.** [14] *Функционал $V(x(t+s),t)$ называется положительно-определенным, если существует непрерывная функция $\phi(r)$ такая, что $\phi(r)>0$ при $r\neq 0$ и*

$$V\left(x(t+s),t\right)\geq \phi\left(||x(s)||\right).$$

Аналогично определяется отрицательно-определенный функционал. Можно показать, что при выбранных матрицах $H$ и $D$ функционал (7) является положительно-определенным.

**Определение 3.** *Интервальную квадратную матрицу $\mathbf{Q}\in\mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{q}_{ij}=$ $=[\underline{\mathbf{q}}_{ij},\overline{\mathbf{q}}_{ij}]$, $1\leq i,j\leq n$ будем называть положительно-определенной и записывать $\mathbf{Q}\rhd 0$, если положительно определена любая матрица $Q\in\mathbf{Q}$, т.е. $\forall Q\in\mathbf{Q}$ квадратичная форма $x^TQx>0$ $\forall x\neq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$.*

**Определение 4.** [16] *Множество матриц вида*

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}=[\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}},\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}]=\{Q\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid Q=Q^T,\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\leq Q\leq\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\},$$

*где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, будем называть симметрической интервальной матрицей и записывать $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}=(\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})^T$.*

Из определения 4 ясно, что нижняя и верхняя границы $\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}},\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ являются симметрическими

$$\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}=(\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}})^T,\ \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}=(\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}})^T,$$

а матрица $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}\notin I\mathbb{R}^{n\times n}$. В работе [16] для таких матриц используется термин *интервальные матрицы с зависимостями*, поскольку значения внедиагональных элементов такой матрицы, лежащих симметрично относительно главной диагонали, зависят друг от друга.

В настоящей работе решение поставленной задачи основывается на следующем вполне очевидном утверждении: *пусть для произвольных матриц $A\in\mathbf{A}$ и $A_\tau\in\mathbf{A}_\tau$ производная по времени функционала (7) в силу уравнений (2) является отрицательно-определенным функционалом, т.е. существует непрерывная функция $\phi(r)$, такая, что $\phi(r)>0$ при $r\neq 0$ и*

$$\left.\frac{d}{dt}\left(V\left(x(t+s),t\right)\right)\right|_{\dot{x}(t)=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)}\leq -\phi\left(||x(s)||\right). \tag{8}$$

*Тогда имеет место (6).*

Иными словами, функция $\phi\left(||x(s)||\right)$ мажорирует производную по времени функционала (7) в силу (2) равномерно по всем матрицам $A\in\mathbf{A}$ и $A_\tau\in\mathbf{A}_\tau$.

В соответствии с выбранным подходом для произвольных матриц $A\in\mathbf{A}$ и $A_\tau\in\mathbf{A}_\tau$ вычислим полную производную функционала (7) по времени вдоль траекторий системы (2):

$$\begin{aligned}\frac{dV\left(x(t+s),t\right)}{dt}&=\dot{x}^T(t)Hx(t)+x^T(t)H\dot{x}(t)+x^T(t)Dx(t)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau)=\\&=\left(x^T(t)A^T+x^T(t-\tau)A_\tau^T\right)Hx(t)+\\&+x^T(t)H\left(Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)\right)+x^T(t)Dx(t)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau)=\\&=x^T(t)\left(A^TH+HA+D\right)x(t)+x^T(t-\tau)A_\tau^T Hx(t)+\\&+x^T(t)HA_\tau x(t-\tau)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau).\end{aligned} \tag{9}$$

Введем вектор $y(t+s) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$y(t+s) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix}$$

и матрицу $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$C = \begin{pmatrix} A^T H + HA + D & HA_\tau \\ A_\tau^T H & -D \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тогда выражение для $dV\left(x(t+s), t\right)/dt$ можно переписать в виде

$$\frac{dV\left(x(t+s),t\right)}{dt} = y^T(t+s)Cy(t+s). \tag{11}$$

Если производная по времени (9) функционала $V\left(x(t+s),t\right)$ на траекториях движения системы (2) является отрицательно-определенной для любых матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, то решение $x(t) \equiv 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым при любых $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и, следовательно, интервально-заданная система с запаздыванием (1) асимптотически устойчива в смысле определения 1.

Пусть $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ — некоторая интервальная положительно-определенная симметрическая матрица. Для интервальных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ построим множество матриц $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})(A^T H + HA = -Q)\} = \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(A^T H + HA \in -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})\}, \end{aligned} \tag{12}$$

которое называется допустимым множеством решений [17, 18] интервального матричного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} = -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}. \tag{13}$$

Справедливой является следующая

**Теорема 2.** *Пусть для заданной интервальной матрицы $\mathbf{A}$ и некоторой интервальной симметрической положительно-определенной матрицы $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ допустимое множество решений (12) непусто, т.е. $\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) \neq \varnothing$, некоторая симметрическая матрица $\tilde{H} = \left(\tilde{H}\right)^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ является положительно-определенной и существуют такие постоянные $d_i > 0,\ 1 \le i \le n$, что интервальная матрица*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \tilde{H} + \tilde{H}\mathbf{A} + D & \tilde{H}\mathbf{A}_\tau \\ \mathbf{A}_\tau \tilde{H} & -D \end{pmatrix} \tag{14}$$

*является отрицательно-определенной. Тогда положение равновесия $x\left(t, \varphi_{t_0\tau}\right) \equiv 0$ интервально-заданной системы с запаздыванием (1) асимптотически устойчиво.*

**Доказательство.** Пусть условия теоремы выполнены. Положительная определенность симметрической матрицы $\tilde{H} \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ влечет асимптотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$. Действительно, в силу построения множества (12) для любой матрицы $A \in \mathbf{A}$ существует такая положительно-определенная симметрическая матрица $\tilde{Q} \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$, что

$$A^T \tilde{H} + \tilde{H} A = -\tilde{Q}.$$

Иными словами, матрица $A^T \tilde{H} + \tilde{H} A$ является симметрической отрицательно-определенной, а это в силу известных результатов [14] означает асимптотическую устойчивость матрицы $A$, что, в свою очередь, влечет асимтпотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$ в силу произвольности выбора $A \in \mathbf{A}$.

Отрицательная определенность интервальной матрицы $\mathbf{C}$ согласно определению 3 означает, что для любых матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ матрица

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} A^T\tilde{H} + \tilde{H}A + D & \tilde{H}A_\tau \\ A_\tau^T\tilde{H} & -D \end{pmatrix}$$

будет отрицательно-определенной. Тогда производная по времени (9), записанная в виде (11), функционала (7) с учетом выбранных $\tilde{H}$ и $D = \operatorname{diag}\{d_i > 0,\ 1 \le i \le n\}$ будет отрицательна на траекториях (2) при любых $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, откуда утверждение (8) следует немедленно. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены, следовательно, интервально-заданная система (1) с запаздывающим аргументом асимптотически устойчива. Теорема доказана.

В настоящее время задача исследования непустоты допустимого множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений является хорошо изученной [17, 18]. Однако, как указывалось ранее, $\mathbf{Q}^{\text{sym}} \notin \mathbb{IR}^{n\times n}$, поэтому для применения результатов работ [17, 18] к исследованию непустоты (13) потребуется ряд дополнительных построений. По заданной интервальной матрице $\mathbf{Q}^{\text{sym}}$ построим матрицу $\mathbf{Q} = [\underline{\mathbf{Q}}^{\text{sym}}; \overline{\mathbf{Q}}^{\text{sym}}] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и множество

$$\begin{aligned} \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}) &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q})(A^T H + HA = -Q)\} \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(A^T H + HA \in -\mathbf{Q}\} \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} \subseteq -\mathbf{Q}\}, \end{aligned} \tag{15}$$

которое является допустимым множеством решений интервального уравнения

$$\mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \tag{16}$$

имеющего в правой части интервальную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ без зависимостей. Уравнение (16) будем называть вспомогательным интервальным матричным уравнением Ляпунова.

**Теорема 3.** *Пусть допустимое множество решений (15) вспомогательного интервального матричного уравнения Ляпунова (16) непусто, и некоторая симметрическая матрица $\tilde{H} = \tilde{H}^T$ принадлежит данному множеству, т.е.*

$$\tilde{H} = \tilde{H}^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}) \ne \varnothing. \tag{17}$$

*Тогда*

$$\{\tilde{H} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \tilde{H} \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}),\ \tilde{H} = \tilde{H}^T\} \subseteq \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\text{sym}}). \tag{18}$$

**Доказательство.** Пусть условие (17) теоремы выполнено. По условию теоремы существует некоторая симметрическая матрица $\tilde{H} = \left(\tilde{H}\right)^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$. Тогда

$$(A^T\tilde{H} + \tilde{H}A)^T = \tilde{H}^T A + A^T\tilde{H}^T = \tilde{H}A + A^T\tilde{H} = A^T\tilde{H} + \tilde{H}A,\ \forall A \in \mathbf{A}, \tag{19}$$

т.е. матрица $A^T\tilde{H} + \tilde{H}A$ является симметрической для любой $A \in \mathbf{A}$. По условию теоремы

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A \in -\mathbf{Q},\ \forall A \in \mathbf{A}. \tag{20}$$

Принимая во внимание (19) и (20), можно заключить, что существует симметрическая матрица $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \in \mathbf{Q}$ такая, что

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A = -\tilde{Q}.$$

Согласно определению 4 имеем

$$\mathbf{Q}^{\text{sym}} = \left\{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q \in \mathbf{Q},\ Q = Q^T\right\}, \tag{21}$$

т.е.

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} \subseteq \mathbf{Q}.$$

Тогда, учитывая выражение (21), можно записать

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A \in -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}.$$

Последнее верно для произвольной симметрической матрицы $\tilde{H}$, удовлетворяющей (17), следовательно, включение (18) является справедливым. Теорема доказана.

Легко показать, что соотношение относительно матрицы $H$

$$|\ \mathrm{mid}\ \mathbf{A}^T H + H\mathrm{mid}\ \mathbf{A} + \mathrm{mid}\ \mathbf{Q}\ | \leq \mathrm{rad}\ \mathbf{Q} - \mathrm{rad}\ \mathbf{A}^T|H| - |H|\mathrm{rad}\ \mathbf{A}, \tag{22}$$

аналогичное предложенному Роном [19], выделяет класс матриц $H$, принадлежащих множеству (15). Из соотношения (22) видно, что если некоторая матрица $\tilde{H}$ является решением “среднего” точечного уравнения Ляпунова

$$\mathrm{mid}\ \mathbf{A}^T\tilde{H} + \tilde{H}\mathrm{mid}\ \mathbf{A} = -\mathrm{mid}\ \mathbf{Q} \tag{23}$$

и удовлетворяет условию

$$\mathrm{rad}\ \mathbf{A}^T|\tilde{H}| + |\tilde{H}|\mathrm{rad}\ \mathbf{A} \leq \mathrm{rad}\ \mathbf{Q}, \tag{24}$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, то

$$\tilde{H} \subseteq \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}).$$

## 4. Числовой пример

Рассмотрим интервально-заданную систему с запаздыванием для $n = 3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \in [0; 0.01]x_1(t) + x_2(t) + [-0.01; 0.01]x_2(t-\tau); \\ \dot{x}_2(t) \in [-1; -0.9]x_1(t) - x_2(t) + [-0.1; 0]x_3(t) + [0; 0.05]x_1(t-\tau); \\ \dot{x}_3(t) \in [0; 0.1]x_2(t) - x_3(t) + [0.1; 0.2] - [0.2; 0.4]x_3(t-\tau); \end{cases}$$

$$x_i(\theta) = \varphi_{i_{t_0 \tau}}(\theta),\ \theta \in [t_0 - \tau, t_0],\ 1 \leq i \leq n.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0; 0.1] & 1 & 0 \\ [-1; -0.9] & -1 & [-0.1; 0] \\ 0 & [0; 0.1] & -1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & [-0.01; 0.01] & 0 \\ [0; 0.05] & 0 & 0 \\ 0 & [0.1; 0.2] & [-0.4; -0.2] \end{pmatrix}.$$

Интервальная положительно-определенная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} [0.6; 1.4] & [-0.2; 0.2] & [-0.2; 0.2] \\ [-0.2; 0.2] & [0.9; 1.1] & [-0.2; 0.2] \\ [-0.2; 0.2] & [-0.2; 0.2] & [0.9; 1.1] \end{pmatrix} \tag{26}$$

имеет в качестве средней матрицы единичную, т.е.

$$\mathrm{mid}\ \mathbf{Q} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а решение “среднего” уравнения Ляпунова (23) для

$$\text{mid}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & 1 & 0 \\ -0.95 & -1 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & -1 \end{pmatrix}$$

и mid $\mathbf{Q} = E$ имеет вид:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1.638414 & 0.612548 & -0.011319 \\ 0.612548 & 1.111502 & -0.020921 \\ -0.011319 & -0.020921 & 0.501046 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

которое удовлетворяет матричному неравенству (24), так как

$$\text{rad}\,\mathbf{A}^T|\tilde{H}| + |\tilde{H}|\text{rad}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2250962 & 0.08676845 & 0.0322394 \\ 0.08676845 & 0.0020921 & 0.0806274 \\ 0.322394 & 0.0806274 & 0.0020921 \end{pmatrix},$$

где

$$\text{rad}\,\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad \text{rad}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица (27) является положительно-определенной, следовательно, рассматриваемая интервальная матрица (25) является асимптотически устойчивой, как и следует из [20]. Матрицу $D$ определим из условия отрицательной определенности матрицы (14). Имеем

$$\mathbf{A}_1^T\tilde{H} = \begin{pmatrix} [0.00000000; 0.03062730] & [0.00000000; 0.05557510] & [-0.00104605; 0.00000000] \\ [-0.01864794; -0.01751604] & [-0.01030966; -0.00821756] & [0.05021779; 0.10032239] \\ [0.00226380; 0.00452760] & [0.00418420; 0.00836840] & [-0.20041840; -0.10020920] \end{pmatrix},$$

$$\tilde{H}\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [0.00000000; 0.03062730] & [-0.01864794; -0.01751604] & [0.00226380; 0.00452760] \\ [0.00000000; 0.05557510] & [-0.01030966; -0.00821756] & [0.00418420; 0.00836840] \\ [-0.00104605; 0.00000000] & [0.05021779; 0.10032239] & [-0.20041840; -0.10020920] \end{pmatrix}.$$

Округляя полученные результаты до 3-го знака, запишем интервальную матрицу $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1.225; -0.775] + d_1 & [-0.087; 0.087] & [-0.032; 0.032] & [0.000; 0.031] & [-0.019; -0.018] & [0.002; 0.005] \\ [-0.087; 0.087] & [-1.002; -0.998] + d_2 & [-0.081; 0.081] & [0.000; 0.056] & [-0.010; -0.008] & [0.004; 0.008] \\ [-0.032; 0.032] & [-0.081; 0.081] & [-1.002; -0.998] + d_3 & [-0.001; 0.000] & [0.050; 0.100] & [-0.200; -0.100] \\ [0.000; 0.031] & [0.000; 0.056] & [-0.001; 0.000] & -d_1 & 0 & 0 \\ [-0.019; -0.018] & [-0.010; -0.008] & [0.050; 0.100] & 0 & -d_2 & 0 \\ [0.002; 0.005] & [0.004; 0.008] & [-0.200; -0.100] & 0 & 0 & -d_3 \end{pmatrix},$$

где $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{C}}^T$, $\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}}^T$. Легко видеть, что выбор $d_1 = 0.1 > 0$, $d_2 = 0.2 > 0$ и $d_3 = 0.3 > 0$ превращает интервальную матрицу $\mathbf{C}$ в отрицательно-определенную. Последнее означает, что интервально-заданная система (1) с запаздыванием является асимптотически устойчивой.

## 5. Заключение

Таким образом, применение функционала Ляпунова-Красовского к решению задачи исследования асимптотической устойчивости интервально-заданных систем с запаздывающим аргументом позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости указанного класса систем.

## Цитированная литература


1. **Faedo S.** // Pisa sci fis e math. 1953. V. 7, № 1–2.
2. **Харитонов В. Л.** // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086 – 2088.
3. **Харитонов В. Л.** // Математическая физика. 1979. № 26. С. 69 – 79.
4. **Харитонов В. Л.** // Автоматика и телемеханика. 1991. № 7. С. 75 – 88.
5. **Bialas S.** // Int. J. Contr. 1983. V. 37, № 4
6. **Karl W. C., Greschak J. P., Vergese G. C.** // Int. J. Contr. 1984. V. 39, № 4.
7. **Barmish B. R., Hollot C. V.** // Int. J. Contr. 1984. V. 39, № 5
8. **Rohn J.** // IEEE Transactions on Automatic Control. 1996. V. XX, № V.
9. **Пащенко Г.Н., Аяганов Е.Т.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, № 2. С. 66 – 72.
10. **Разумихин Б. С.** Устойчивость эредитарных систем. М., 1988.
11. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М., 1987.
12. **Шокин Ю. И.** Интервальный анализ. Новосибирск. Сиб.отд-ние, 1981.
13. **Байкенова Ж. А., Ивлев Р. С.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, № 2, С. 25–31.
14. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
15. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
16. **Jansson C.** // Computing 46. Hamburg-Harburg, 1990
17. **Shary S. P.** // Mathematics and Computers in Simulations. 1995. V. 39. P. 53 – 85.
18. **Shary S. P.** // Reliable Computing. 1996. V. 2, № 1. P. 3 – 33.
19. **Neumaier A.** Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press. Cambridge, 1990.
20. **Dugarova I. V.** // Interval computations. 1992. № 3(5). P. 56 – 62.


*Поступила в редакцию 15.04.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 80 — 86*

*УДК 516.519*

# РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Ш. Н. Куттыкожаева

КазНУ им. аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47

В данной работе исследуются вопросы существования обобщенных решений краевых задач для одной системы дифференциальных уравнений, описывающих движение двухкомпонентной жидкости. С помощью неравенства Гельдера и теоремы вложения получены априорные оценки. Доказана теорема существования слабого решения.

**1.** Впервые подобная модель неоднородной жидкой среды получена в [1] при условии малости коэффициента диффузии, а также массовой концентрации примеси и ее производных. Предложенная в [2] приближенная модель основана на предположении, что коэффициент диффузии $\lambda$ и упрощенные уравнения выводятся путем отбрасывания членов порядка $\lambda^2$. В настоящей работе изучается та же модель, что и в [2], с учетом $\lambda^2$. Математическая модель сводится к решению следующих дифференциальных уравнений

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v_i\right)-\lambda(\nabla\rho\cdot\nabla)v_i-\lambda(v\cdot\nabla)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\lambda^2\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\nabla\rho\right)=$$

$$=\mu\Delta v_i-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p-\lambda\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{4}{3}\lambda\mu\Delta\ln\rho\right),\quad i=1,2,3,\tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(v\cdot\nabla)\rho=\lambda\Delta\rho,\tag{2}$$

$$\mathrm{div}\ v=0.\tag{3}$$

Здесь искомые функции: $v$ — скорость, $p$ — давление, $\rho$ — плотность смеси.

Система (1)–(3) сильно нелинейна. Это обстоятельство вынуждает накладывать определенные ограничения на некоторые параметры модели. Для системы уравнений (1)–(3) поставим начально-краевые условия

$$v_i\big|_{t=0}=v_0(x),\ \ \rho\big|_{t=0}=\rho_0(x).\tag{4}$$

Пусть движение смеси происходит в ограниченной области $\Omega$ с достаточно гладкой границей $S$ (например, дважды непрерывно дифференцируемой). Будем для простоты считать, что граница $S$ — непроницаемая и массообмен между раствором и внешней средой отсутствует:

$$v\big|_S=0,\ \ \frac{\partial\rho}{\partial n}\bigg|_S=0,\tag{5}$$

Keywords: *differential equation, boundary-value problem, homogeneous fluid*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 35Q35

где $n = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к $S$.

Наряду с заданием потока массы через границу $S$ можно также рассматривать другое физически разумное условие, когда на $S$ известны значения плотности

$$\rho\big|_S = \rho_S(x,t), \quad x \in S, \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Предполагаем, что $\rho_0(x)$ и $(\rho_S(x,t))$ — положительная ограниченная функция

$$0 < \mathrm{vraimin}\,\rho_0(\mathrm{x}) = \mathrm{m} \le \rho_0(\mathrm{x}) \le \mathrm{M} = \mathrm{vraimax}\,\rho_0(\mathrm{x}) < \infty. \tag{7}$$

Функция $\rho(x,t)$ должна быть ограниченной и положительной.

Рассмотрим для определенности случай граничных условий (4). Введем несколько обозначений и определений. Пусть $M(\Omega)$ — совокупность бесконечно дифференцируемых соленоиснальных финитных в $\Omega$ вектор-функций. Обозначим через $H$ и $V$ [3], [4] векторные пространства, полученные замыканием $M(\Omega)$ в нормах $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, соответственно. Введем такое подпространство $W$ скалярного пространства $W_2^2(\Omega)$, состоящее из функций $\psi(x)$, у которых $\frac{\partial\psi}{\partial n}\big|_S = 0$. Норма в $L_2$ (и, в частности, в $H$) всюду в дальнейшем записывается без указания $L_2$, т. е. $||\cdot||$, а для норм в других пространствах используется символ нормы с соответствующим индексом, например, $||\cdot||_V$. Наконец, всюду через $C$ обозначаются различные константы из теорем вложения.

**2.** Перейдем к получению априорных оценок, считая решение гладким. Из принципа максимума для уравнения диффузии (2) имеем

$$0 < m \le \rho(x,t) \le M < \infty \text{ почти всюду в } Q = [0,T] \times \Omega, \tag{8}$$

где $m$ и $M$ — постоянные из (6) определяются только начальной плотностью $\rho_0(x)$. Далее, умножая (2) на $\rho(x,t)$ и интегрируя в $Q$, имеем

$$\int\limits_Q |\nabla\rho(x,t)|^2 dxdt \le N_1 < \infty. \tag{9}$$

Из (7),(8), очевидно, следует ограниченность нормы $\rho(t) = \rho(x,t)$ в пространстве $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ с константой, зависящей только от данных задачи.

Для получения аналогичной оценки для скорости (1) умножим скалярно на $v(t)$ в $L_2(\Omega)$. Выполняя элементарные преобразования и учитывая уравнение (2), находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \left(\rho|v|^2 + \mu||v||_V^2 - \lambda\left((v\cdot\nabla)\nabla\rho,\ v\right)_{L_2(\Omega)}\right)dx =$$

$$= \int\limits_\Omega (\rho f, v)dx - \lambda^2 \sum_{i=1}^3 \int\limits_\Omega \mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\nabla\rho\right) v_i dx. \tag{10}$$

Будем предполагать, что $f(t) \in L_2(0,T;L_{6/5}(\Omega))$.

Тогда из неравенства Гельдера и теоремы вложения заключаем, что

$$\int\limits_\Omega (\rho f, v)dx \le M||f||_{L_{6/5}(\Omega)}||v||_{L_6(\Omega)} \le C||f||_{L_{6/5}(\Omega)}||v||_V.$$

Преобразуем третье слагаемое в левой части (9)

$$((v\cdot\nabla)\nabla\rho, v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(\rho - \frac{M-m}{2}\right)\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx \le \frac{M-m}{2}||v||_V^2.$$

Второе слагаемое в правой части (9) после интегрирования по частям оцениваем по теореме вложения [5]:

$$\left|\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\cdot\nabla\rho\right)\mathrm{v_i dx}\right| \le \int\limits_{\Omega}\frac{1}{\rho}|\nabla\rho|^2|\nabla v|dx \le$$

$$\le \frac{1}{m}||\nabla\rho||^2_{L_4(\Omega)}||\nabla v|| \le \frac{1}{m}C\max_{\Omega}|\rho|||\rho||_W||\nabla v|| \le N_2||\rho||_W||\nabla v|| + N_3.$$

В результате из (9) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\rho|v|^2dx + \left(\mu - \frac{\lambda}{2}(M-m)\right)||v||^2_V \le C||f||_{L_{6/5}(\Omega)}||v||_V + \lambda^2||\Delta\rho||\nabla v||N_2. \qquad (11)$$

Теперь предположим

$$\nu = \mu - \frac{\lambda}{2}(M-m) > 0. \qquad (12)$$

Далее обратимся вновь к уравнению (2) и умножим его на $\Delta\rho(x,t)$, а затем проинтегрируем по $\Omega$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\rho||^2 + \lambda||\Delta\rho||^2 = ((v\cdot\nabla)\rho, \Delta\rho)_{L_2(\Omega)}. \qquad (13)$$

Правая часть данного соотношения после интегрирования по частям принимает вид

$$((v\cdot\nabla)\rho, \Delta\rho)_{L_2(\Omega)} = -((\nabla\rho\cdot\nabla)v, \nabla\rho)_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя интерполяционное неравенство [5], выводим

$$\left|((\nabla\rho\cdot\nabla)v, \nabla\rho)_{L_2(\Omega)}\right| \le ||v||_V||\nabla\rho||^2_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le C||v||_V||\rho||\ ||\rho||_{L_\infty(\Omega)} \le N_3||v||_V||\Delta\rho|| \le \frac{\lambda}{2}||\Delta\rho||^2 + \frac{N_4}{\lambda}||\Delta v||^2.$$

В результате с учетом (12) приходим к неравенству

$$\frac{\lambda}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\rho||^2 + \frac{\lambda^2}{2}||\Delta\rho||^2 \le N_4||\nabla v||^2. \qquad (14)$$

Умножим (13) на $\frac{\nu}{2N_4}$ и сложим с (10), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\rho|v|^2 + \frac{\nu}{4N_4}\frac{d}{dt}||\nabla\rho||^2 + \frac{\nu\lambda}{2N_4}||\Delta\rho||^2 + \frac{\nu}{2}||v||^2_V \le$$

$$\le C||f||_{L_{6/5}(\Omega)}||v||_V + N_2\lambda^2||\Delta\rho||\ ||v||_V \le \frac{\nu}{2}||v||^2_V + \frac{N_5}{\nu}\lambda^4||\Delta\rho||^2 + N_5||f||^2_{L_{6/5}(\Omega)}. \qquad (15)$$

Положим

$$\frac{\nu}{2N_4} - \frac{N_5}{\nu}\lambda^2 \ge \lambda_1 > 0, \qquad (16)$$

$N_4,\ N_5$ не зависят от $\lambda$, а только от данных задачи. Например, неравенство (15) возможно при достаточно малом $\lambda$. Отсюда с учетом (14) получим

$$\begin{aligned} &||\nabla\rho||^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \int\limits_0^T||\Delta\rho||^2dt \le N_6 < \infty;\\ &||v||_{L_\infty(0,T;H)} + ||v||_{L_2(0,T;V)} \le N_7 < \infty. \end{aligned} \qquad (17)$$

Затем с помощью теорем вложения и в силу неравенств (16) легко доказывается ограниченность выражения $(v\cdot\nabla)\rho$ в норме пространств $L_r(0,T;L_s(\Omega))$, где $s\in[1,3]$, $r\in[1,\infty]$, $\frac{1}{r}+\frac{3}{2s}\ge\frac{3}{2}$ в трехмерной задаче и $s\in[2,\infty)$, $r\in[1,\infty]$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\geq 1$ в двухмерной. Тогда непосредственно из уравнений диффузии следует, что $\rho_t\in L_p(0,T;L_q(\Omega))$ с $q\in[1,2]$, $p\in[\frac{4}{3},2]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{2q}\geq 1$. Ограничение на показатели $p$ и $q$ вызвано тем, что $\Delta\rho\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Заметим, что в случае плоской задачи можно положить $p=q=2$, т.е. $\rho_t\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

**3.** Получим еще одну оценку глобального по времени характера, константа в которой зависит только от данных задачи. Эта оценка в дальнейшем гарантирует компактность в $L_2(Q)$ последовательности приближенных решений $v^n(x,t)$, которые выстраиваются по методу Галеркина.

**Лемма 1.** *Для любого $\delta$, $0<\delta<T$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^{T-\delta}||v(t+\delta)-v(t)||^2dt\leq N_6\sqrt{\delta}. \tag{18}$$

**Доказательство.** Зафиксируем $\delta$ и $t$, $0\leq t\leq T-\delta$ и рассмотрим уравнения (1), (2) на интервале времени $\tau\in(t,t+\delta)$. Умножим (1) на произвольную функцию $\Phi\in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$, тогда после простых преобразований придем к неравенству

$$\frac{d}{d\tau}(\rho v,\Phi)_{L_2(\Omega)}=((\rho v\cdot\nabla)\Phi-\lambda(\nabla\rho,\nabla)\Phi,\ v)_{L_2(\Omega)}-$$
$$-\lambda((v\cdot\nabla)\Phi,\ \nabla\rho)_{L_2(\Omega)}-\mu(v,\Phi)_V+(\rho f,\Phi)_{L_2(\Omega)},\quad \tau\in(t,t+\delta).$$

Проинтегрируем это неравенство по $\tau$ от $t$ до $t+\delta$, а затем положим $\Phi=v(t+\delta)-v(t)$. Выражение $\rho(t+\delta)v(t+\delta)-\rho(t)v(t)$ запишем в таком виде: $\rho(t+\delta)[v(t+\delta)-v(t)]+[\rho(t+\delta)-\rho(t)]v(t)$. Затем разность $\rho(t+\delta)-\rho(t)$ найдем путем интегрирования уравнения (2) в пределах от $t$ до $t+\delta$. В результате получим формулу

$$||\sqrt{\rho(t+\delta)}[v(t+\delta)-v(t)]||^2=\int\limits_t^{t+\delta}\Big\{((\rho(\tau)v(\tau)\cdot\nabla)\Phi,\ v(\tau))_{L_2(\Omega)}+$$
$$+((v(\tau)\cdot\nabla)\Phi,\ \rho(\tau))_{L_2(\Omega)}-\mu(v(\tau),\ \Phi)_V+((\rho(\tau)f(\tau),\Phi)_{L_2(\Omega)}+\lambda(\nabla\rho(\tau),\nabla\varphi)_{L_2(\Omega)}-$$
$$-\lambda((\nabla\rho(\tau)\cdot\nabla)\Phi,\ v(\tau))_{L_2(\Omega)}+(\lambda(v(\tau)\cdot\nabla)\Phi,\ \nabla\rho(\tau))_{L_2(\Omega)}+\lambda\left(\frac{1}{\rho}(\nabla\rho\cdot\nabla)\Phi,\nabla\rho\right)_{L_2(\Omega)}\Big\}d\tau, \tag{19}$$

где

$$\Phi=v(t+\delta)-v(t),\quad \varphi=(v(t),\ v(t+\delta)-v(t)). \tag{20}$$

Соотношение (18) проинтегрируем по $t$ от 0 до $T-\delta$ и для каждого слагаемого докажем нужное неравенство. Оценки первых четырех слагаемых выводится точно так же, как в модели неоднородной жидкости при $\lambda=0$ [6]. Поэтому остановимся только на оценке четырех последних слагаемых, содержащих $\lambda$. Например, оценим пятое слагаемое, содержащее подынтегральную функцию $(\nabla\rho(\tau),\nabla\varphi)_{L_2(\Omega)}$. Эта функция согласно формуле (19), есть сумма двух членов. Для одного из них имеем

$$\int\limits_0^{T-\delta}\int\limits_t^{t+\delta}((\nabla\rho(\tau)\cdot\nabla)v(\tau),\ v(t+\delta))_{L_2(\Omega)}d\tau dt\leq\int\limits_0^{T-\delta}||v(t)||_V||v(t+\delta)||_{L_4(\Omega)}\int\limits_t^{t+\delta}||\nabla\rho(\tau)||_{L_4(\Omega)}d\tau dt.$$

Применяя теорему вложения и неравенство Гельдера, заключаем

$$\int\limits_t^{t+\delta}||\nabla\rho(t)||_{L_4(\Omega)}d\tau\leq C\int\limits_t^{t+\delta}||\Delta\rho(\tau)||d\tau\leq C\sqrt{\delta}\left(\int\limits_0^T||\Delta\rho(\tau)||^2d\tau\right)^{1/2}\leq C\sqrt{\delta}.$$

Аналогично для двух оставшихся сомножителей имеем

$$\int_0^{T-\delta} ||v(t)||_V ||v(t+\delta)||_{L_4(\Omega)} dt \le C \left( \int_0^{T-\delta} ||v(t)||_V^2 dt \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left( \int_0^{T-\delta} ||v(t+\delta)||_V^2 dt \right)^{1/2} \le C \int_0^{T-\delta} ||v(t)||_V^2 dt.$$

Таким образом, для первого члена оценка (17) доказана. Точно так же она доказывается для второго. Осталось проверить утверждение леммы 1 для трех последних слагаемых в (18). Поскольку для обоих слагаемых рассуждения одинаковы, рассмотрим только одно из них:

$$\int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} ((\nabla\rho(\tau)\cdot\nabla)v(t+\delta),\ v(\tau))_{L_2(\Omega)} d\tau dt \le \int_0^{T-\delta} ||v(t+\delta)||_V \int_t^{t+\delta} ||\nabla\rho(\tau)||_{L_4(\Omega)} ||v(\tau)||_{L_4(\Omega)} d\tau dt.$$

Используя неравенство вложения, а затем меняя порядок интегрирования по $t$ и по $\tau$, правая часть последнего соотношения оценивается сверху величиной

$$C \int_0^{T} ||\Delta\rho(\tau)|| ||v(\tau)||_V \int_{t-\delta}^{t} ||v(t+\delta)||_V dt d\tau.$$

При этом полагаем $v(t) \equiv 0$, $t \in [T, T+\delta]$. Применяя затем неравенство Гельдера к внутреннему интегралу по $t$ и используя соотношения (16), получим нужную оценку.

Осталось оценить последние слагаемые (18).

$$\int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \left( \left( \frac{1}{\rho} \nabla\rho(\tau) \nabla \right) v(t+\delta) - v(t),\ \nabla\rho(\tau) \right)_{L_2(\Omega)} d\tau dt \le$$

$$\le \frac{1}{m} \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} |\nabla\rho(\tau)|^2 \left( |\nabla v(t+\delta)| + |\nabla v(t)| \right) d\tau dt \le$$

$$\le \frac{1}{m} \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} ||\nabla\rho(\tau)||_{L_4(\Omega)}^2 \left( ||v(t+\delta)||_V + ||v(t)||_V \right) d\tau dt \le$$

$$\le C \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} ||\Delta\rho(\tau)|| \left( ||v(t+\delta)||_V + ||v(t)||_V \right) d\tau dt \le$$

$$\le C\delta^{1/2} \int_0^{T-\delta} \left( ||v(t+\delta)||_V + ||v(t)||_V \right) dt \left( \int_0^{T} ||\Delta\rho(\tau)||^2 d\tau \right)^{1/2} \le C\delta.$$

Итак, лемма 1 доказана.

**Определение 1.** *Функции $v$ и $\rho$ называются слабым решением задачи (1)–(5), если*
*а)* $v(t) = v(t,x) \in L_\infty(0,T;H) \cap L_2(0,T;V)$,
$\rho(t) = \rho(t,x) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T;W) \cap W_p^1(0,T;L_q(\Omega))$, $\rho \in [\frac{4}{3}, 2]$, $\quad q \in [1,2]$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{2q} \ge 1$;

*б) уравнение диффузии (2) выполняется почти всюду в Q;*
*в) при всех $\Phi(t) = \Phi(x, t \in W_2^1(0,T,V)), \Phi(T) = 0$ справедливо интегральное тождество*

$$\int\limits_Q \Bigg\{ (\rho v, \Phi_t + (v\cdot\nabla)\Phi - \lambda[((\nabla\rho\cdot\nabla)\Phi, v) + ((v\cdot\nabla)\Phi, \nabla\rho)] -$$

$$-\mu(v_x, \Phi_x) + (\rho f, \Phi) + \lambda^2 \left( \left( \frac{\nabla\rho\cdot\nabla}{\rho} \right) \Phi, \nabla\rho \right) \Bigg\} dxdt + \int\limits_\Omega (\rho_0 v_0, \Phi(0))dx = 0, \tag{21}$$

*где* $(v_x, \Phi_x) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$,

**Теорема 1.** *Пусть $v_0(x) \in H$, $\rho_0(x) \in W_2^1(Q)$, $0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty$, $f(t) = f(x,t) \in \in L_p(0,T; L_q(\Omega))$, где $p \in [1,2]$, $q \in [\frac{6}{5}, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{3}{2q} \le \frac{7}{4}$ и справедливы (11), (15). Тогда существует по крайней мере одно слабое решение задачи (1)–(5).*

**4.** Существование слабого решение задачи (1)–(5). Как обычно при этом можно воспользоваться методом Галеркина. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис в $H$ и $V$ из собственных функций спектральной задачи

$$(\psi_j, w)_V = \lambda_j(\psi_j, w)_H \quad \forall w \in V.$$

Приближенные решения $(v^N, \rho^N)$, $N = 1, 2, \ldots$ строим следующим образом:

$$v^N = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\psi_k, \tag{22}$$

где $C_k^N(t) \in C^1(0,T)$ — искомые функции, $\rho^N$ ищем как классическое решение задачи

$$\frac{\partial\rho^N}{\partial t} + (v^N\cdot\nabla)\rho^N = \lambda\Delta\rho^N, \quad \frac{\partial\rho^N}{\partial n}\bigg|_S = 0, \quad \rho^N\bigg|_{t=0} = \rho_0^N(x), \tag{23}$$

с гладкой начальной функцией $\rho_0^N(x)$, удовлетворяющей условию согласования $\dfrac{\partial\rho^N}{\partial n}\bigg|_S = 0$, причем последовательность $\rho_0^N(x)$, $N = 1, 2, \ldots$ сходится к $\rho_{0N}(x)$ в нормах пространств $W_2^1(\Omega)$ и $L_q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$. Функции $C_k^N(t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими операторным образом от $\rho^N$.

$$\Bigg( \rho^N \left[ \frac{\partial v^N}{\partial t} + (v^N\cdot\nabla)v^N \right] - \lambda\big[(v^N\cdot\nabla)\nabla\rho^N + (\nabla\rho^N\cdot\nabla)v^N\big] +$$

$$+\lambda^2\big[\mathrm{div}(\frac{1}{\rho}\nabla\rho\ \nabla\rho] - \mu\Delta \mathrm{v^n} + \mathrm{\rho^N f}\big],\ \psi_\mathrm{j}\Bigg)_{\mathrm{L_2(\Omega)}} = 0, \tag{24}$$

$$C_j^N(0) = C_j \equiv (v_0, \psi_j)_H, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Также, как в работе [1], нетрудно задачу (21)–(23) привести к операторному уравнению и на основе теоремы Шаудера доказать ее разрешимость, причем единственным образом.

Повторяя рассуждения п.2, устанавливаются априорные оценки вида (7), (8), (16), (17). Эти оценки позволяют выделить подпоследовательности $v^n$ и $\rho^n$ такие, что при $n \to \infty$

$v^N(t) \to v(t)$ * слабо в $L_\infty(0,T;H)$ и слабо в $L_2(0,T;V)$;

$\rho^N(t) \to \rho(t)$ * слабо в $L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$ и слабо в $L_2(0,T;W)$;

$\dfrac{\partial\rho^n(t)}{\partial t} \to \dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ слабо в $L_p(0,T;L_q(\Omega))$, $p \in [\frac{4}{3}, 2]$, $q \in [1,2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{2q} \ge 1$;

$v^n(t) \to v(t)$ сильно в $L_2(Q)$.
Записывая уравнения (23) в интегральной форме, а затем переходя к пределу по выбранной подпоследовательности, заключаем, что предельные функции $v$ и $\rho$ являются слабым решением задачи (1)–(5). На этом доказательство теоремы 1 завершается.

## Цитированная литература


1. **Игнатьев В. Н., Кузнецов Б. Г.** // Численные методы механики сплошной среды. 1973. Т. 4, №4. С. 78– 87.

2. **Кажихов А. В, Смагулов Ш.** // Доклады АН СССР. 1997. Т. 234, №2. С. 330 – 332.

3. **Лионс Ж-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

4. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

5. **Nirenberg L.** On elliptic partial differential eguations. Annali Scuola Norm. Buper. Pisa. 1959. Ser. 111. T. 13, №2. P. 115 – 162.

6. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.


*Поступила в редакцию 20.11.2001г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 87 — 94*

*УДК 517.977*

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. II

С. Я. Серовайский

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47, serovajskys@mail.ru

Рассматриваются задачи оптимального управления для систем, описываемых уравнениями параболического типа с негладкой нелинейностью. Наличие негладкого члена препятствует получению условий оптимальности стандартными методами. Для преодоления имеющихся трудностей осуществляется гладкая аппроксимация уравнения. В первой части уравнение было регулярным, а обоснование условий оптимальности для аппроксимирующей экстремальной задачи осуществлялось с помощью дифференцирования функции состояния системы по управлению. Этот подход оказывается неприменимым в сингулярном случае, когда соответствующая краевая задача не имеет априорных оценок решения. Для вывода условий оптимальности здесь используется модифицированный вариант метода штрафа. Показывается, что метод аппроксимации обеспечивает нахождение в некотором смысле приближенного решения исходных экстремальных задач.

**1. Постановка задачи.** Пусть $\Omega$ есть открытая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$ с границей $S$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = S \times (0,T)$. Рассматривается система, описываемая уравнением

$$y' - \triangle y + g(y) = v + f, \quad (x,t) \in Q \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega; \quad y = 0 \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

где $v$ — управление, $y$ — состояния системы, $y' = \partial y/\partial t$, $f$ и $y_0$ — известные функции, $g$ — заданная функция от $y$. Аналогичная система рассматривалась в первой части статьи (см. [1]). Однако в данном случае к нелинейному члену уравнения предъявляются существенно более слабые ограничения, что потребует привлечения качественно иного математического аппарата.

В соответствии с теоремой Соболева имеют место непрерывные вложения

$$H_0^1(\Omega) \subset L_6(\Omega); \quad H^{-1}(\Omega) \subset L_{6/5}(\Omega),$$

Keywords: *distributed parameter system, optimal control, non-smooth nonlinearity, smooth approximation, approached decision*
2000 Mathematics Subject Classification: 49J20, 49K20

Определим функциональные пространства

$$V = L_2(Q), \;\; X = L_2(0,T; H_0^1(\Omega)), \;\; X' = L_2(0,T; H^{-1}(\Omega)),$$

$$Y = \big\{ y| \;\; y \in X \cap L_6(Q), \;\; y' \in X' + L_{6/5}(Q) \big\}.$$

Предполагается выполнение включений: $f \in L_{6/5}(Q)$, $y_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{6/5}(\Omega)$. Управления $v$, как и в первой части статьи, выбирается из выпуклого замкнутого подмножества $U$ пространства $V = L_2(Q)$ . Функция $g$ принадлежит классу

$$G_2 = \big\{ g \in C(\mathbb{R}) \big| \;\; |g(y)| \le a + b|y|^5 \;\; \forall y \big\}, \;\; a > 0, \;\; b > 0,$$

более широкому по сравнению с множеством $G_1$, рассмотренном в первой части статьи. При этих условиях краевая задача (1), (2) не имеет априорной оценки решения, вследствие чего она может не иметь глобального решения (см., например, [2], с. 48), не говоря уже о положительных свойствах зависимости функции состояния системы от управления.

В соответствии с общей концепцией решения экстремальных задач для сингулярных систем [2] вводится понятие допустимой пары. Определим пространство $Y = \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{6/5}(Q)$ , элементы которого принадлежат классу $L_{6/5}(Q)$ вместе со своей первой производной по времени и вторыми производными по пространственным переменным и обращаются в нуль на поверхности $\Sigma$. Рассмотрим пространство $W = V \times Y$ и множество

$$W_0 = \big\{ (v,y) \in W| \;\; v \in U, \, y\big|_{t=0} = y_0 \big\}.$$

**Определение 1.** *Допустимой парой для задачи* (1), (2) *назовем любую пару из множества* $W_0$ *, удовлетворяющую соотношениям* (1), (2).

Будем полагать, что множество допустимых пар задачи (1), (2) не пусто. Рассматривается функционал

$$I(v,y) = \frac{1}{6}\big\|y - z\big\|_6^6 \;\; + \;\; \frac{\gamma}{2}\big\|v\big\|_2^2,$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(Q)$, $z \in L_6(Q)$, $\gamma > 0$ . Ставится следующая оптимизационная задача:

**Задача 2.** *Найти такую допустимую пару* $(v,y)$, *которая минимизирует функционал* $I$ *на множестве допустимых пар задачи* (1), (2).

Для решения сингулярных оптимизационных задач не представляется возможным использование классического вариационного подхода, используемого в первой части статьи (см. [1], задача 1), а также в известных работах по теории оптимального управления системами, описываемыми нелинейными уравнениями параболического типа (см., например, [3]–[8]). Дело в том, что нельзя проследить за поведением функции состояния системы в процессе варьирования управления. Не очевидно даже, что на любом "проварьированном" управлении решение уравнений состояния будет существовать. В этой связи для решения таких задач обычно применяют метод штрафа. Отличие задачи 2 от других оптимизационных задач для систем, описываемых нелинейными сингулярными уравнениями параболического типа (см., например, [2], [9], [10]) связано с отсутствием дифференцируемости нелинейного члена. Вследствие этого "оштрафованный" функционал для задачи 2 оказывается недифференцируемым. Для преодоления этих трудностей предлагается использовать модифицированный метод штрафа, в котором осуществляется гладкая аппроксимация нелинейного члена, подобная той, что использовалась в регулярном случае. Однако сначала установим разрешимость задачи 2.

**Теорема 1.** *Задача 2 разрешима.*

**Доказательство.** В силу ограниченности снизу функционала $I$ на множестве $W$ для задачи 2 существует такая последовательность допустимых пар $\{w_k\} = \{v_k, y_k\}$, что имеет место сходимость $I(w_k) \to \inf I(W)$. Тогда из определения функционала $I$ следует ограниченность последовательностей $\{v_k\}$ и $\{y_k\}$ в пространствах $L_2(Q)$ и $L_6(Q)$, соответственно. После выделения подпоследовательностей (с сохранением прежнего обозначения) установим сходимость $v_k \to v$ слабо в $L_2(Q)$ и $y_k \to y$ слабо в $L_6(Q)$. Покажем, что пара $w = (v, y)$ является допустимой.

Учитывая слабую замкнутость множества $U$, установим включение $v \in U$, откуда следует, что $w \in W_0$. Очевидно, функция $y_k$ является решением краевой задачи

$$y_k' - \triangle y_k = f_k, \;\; (x,t) \in Q, \tag{3}$$

$$y_k(x,0) = y_0(x), \;\; x \in \Omega; \;\; y_k = 0 \;\; (x,t) \in \Sigma, \tag{4}$$

где $f_k = v_k + f - g(y_k)$. Учитывая ограниченность последовательностей $\{v_k\}$ и $\{y_k\}$ и определение множества $G_2$, установим, что последовательность $\{f_k\}$ ограничена в пространстве $L_{6/5}(Q)$. Пользуясь известной теорией уравнений параболического типа в пространствах $L_p$ (см., например, [2], с. 37), установим ограниченность последовательности $\{y_k\}$ в пространстве $Y$. Таким образом, имеет место сходимость $y_k \to y$ слабо в $Y$. В силу компактности вложения пространства $Y$ в $L_p(Q)$, где $p > 30/13$ (см. [2], с. 39), после извлечения подпоследовательности получаем $y_k \to y$ сильно в $L_p(Q)$ и п. в. на $Q$. Отсюда следует, что $g(y_k) \to g(y)$ п. в. на $Q$. Пользуясь леммой 1.3 (см. [11], с.25), установим, что $g(y_k) \to g(y)$ слабо в $L_p(Q)$. Умножая равенство (3) на произвольную достаточно гладкую функцию, после интегрирования по области $Q$ и перехода к пределу установим справедливость равенства (1). Аналогичным образом в результате перехода к пределу в условиях (3) получаем соотношения (2). Таким образом, пара $w$ действительно является допустимой.

Минимизируемый функционал представляет собой сумму степеней (порядка выше единицы) норм в рефлексивных банаховых пространствах. Каждое из слагаемых слабо полунепрерывно снизу. В результате получаем соотношение $\underline{\lim} I(w_k) \leq I(w)$. Отсюда в силу того, что последовательность $\{w_k\}$ является минимизирующей, следует, что ее слабый предел является решением задачи 2. Теорема доказана.

**2. Приближенные решения оптимизационной задачи.** Для решения задачи 2 мы осуществим гладкую аппроксимацию нелинейного члена уравнения подобно тому, как это делалось для рассмотренной в первой части статьи задачи 1 (см. [1]). Однако в силу достаточно высокой степени сложности задачи 2 в данном случае не удается обосновать сходимость метода аппроксимации подобно тому, как это делается в регулярном случае. Тем не менее, решение аппроксимирующей задачи оказывается в определенном смысле приближенным решением исходной задачи. Пусть, в частности, рассматривается задача минимизации функционала $\Lambda$ на подмножестве $\Sigma_0$ топологического пространства $\Sigma$.

**Определение 2.** *Точку $\psi \in \Sigma_0$ назовем сильным приближенным решением задачи минимизации функционала $\Lambda$ на множестве $\Sigma_0$, если для достаточно малой окрестности $O$ решения задачи и достаточно малого числа $\delta > 0$ справедливы включение $\psi \in 0$ и неравенство $\Lambda(\psi) \leq \inf \Lambda(\Sigma_0) + \delta$.*

Сильное приближенное решение экстремальной задачи достаточно близко к ее точному решению и обеспечивает минимизацию функционала с достаточной степенью точности. К сожалению, на практике удовлетворить указанным требованиям, как правило, не удается. В частности, для задач оптимального управления, не корректных в смысле Тихонова, минимизирующие последовательности, вообще говоря, не сходятся к оптимальному управлению [12]. В этих условиях гарантировать близость приближенного решения задачи к оптимальному управлению обычно не удается. Можно лишь надеяться на определение такого допустимого управления, значение функционала на котором будет достаточно близко к его нижней грани. В результате мы приходим к более слабому понятию приближенного решения экстремальной задачи.

**Определение 3.** *Точку $\psi \in \Sigma_0$ назовем слабым приближенным решением задачи минимизации функционала $\Lambda$ на множестве $\Sigma_0$, если для достаточно малого числа $\delta > 0$ справедливо неравенство $\Lambda(\psi) \leq \inf \Lambda(\Sigma_0) + \delta$.*

Естественно, любое сильное приближенное решение экстремальной задачи оказывается и ее слабым решением, но не наоборот. С другой стороны, обеспечить нахождение слабого приближенного решения удается для существенно более широкого класса задач. Учитывая, что корректность экстремальной задачи реализуется лишь в исключительных случаях [13], зачастую приходится смириться с возможностью практического нахождения лишь слабого, а не сильного приближенного решения многих оптимизационных задач. В частности, именно такой результат был получен в регулярном случае (см. [1], теорема 3). К сожалению, и слабое приближенное решение может оказаться слишком сильным понятием, и возникает необходимость в его дальнейшем ослаблении. Отметим, что исследуемая задача 2 характеризуется отсутствием информации об однозначной разрешимости уравнения состояния, а также принципиальным отсутствием дифференцируемости оператора состояния, что не может не отразиться на свойствах решаемой задачи. В этой связи устанавливается более слабая форма приближенного решения задачи.

**Определение 4.** *Точку $\psi \in \Sigma$ назовем ослабленным приближенным решением задачи минимизации функционала $\Lambda$ на множестве $\Sigma_0$ , если найдется такая точка из $\Sigma_0$, ее достаточно малая окрестность $O$ и достаточно малое числа $\delta > 0$ , что справедливы включение $\psi \in O$ и неравенство $\Lambda(\psi) \leq \inf \Lambda(\Sigma_0) + \delta$.*

В определение ослабленного приближенного решения экстремальной задачи заложен, как нам кажется, вполне естественный смысл. Коль скоро для сильного приближенного решения считается допустимым нахождение решения задачи с некоторой степенью точности, а для слабого приближенного решения полагается возможным лишь минимизация функционала с достаточной степенью точности, то, по-видимому, можно считать оправданным удовлетворение заданных ограничений на систему также не точно, а приближенно. Если в определениях 2 и 3 рассматриваемый объект непременно считается элементом множества $\Sigma_0$ , на котором минимизируется функционал, то для ослабленного приближенного решения это уже не обязательно. Требуется лишь, чтобы точка $y$ попала в достаточно малую окрестность какого-либо элемента указанного множества. Таким образом, принадлежность этой точки множеству $\Sigma_0$ реализуется не точно, а приближенно. Тем самым ослабленное приближенное решение оказывается достаточно близким к множеству $\Sigma_0$ , а значение функционала на нем может превосходить нижнюю грань этого функционала на данном множестве не более чем на сколь угодно малую величину. Понятно, что слабое приближенное решение является ослабленным приближенным, но, вообще говоря, не наоборот. Ослабляя ограничения, предъявляемые к приближенному решению задачи, мы расширяем класс задач, для которых таковое может быть найдено.

**3. Аппроксимация задачи.** Для нахождения ослабленного приближенного решения поставленной задачи предлагается модифицированный метод штрафа, включающий в себя гладкую аппроксимацию оператора состояния. Рассмотрим последовательность функций $\{g_n\}$ класса $G_2$ , удовлетворяющих условиям

$$g_n \in C^1(\mathbb{R}),\ n = 1, 2, \ldots;\ g_n(y) \to g(y) \text{ в } L_{6/5}(Q) \text{ равномерно по } y. \tag{5}$$

Определим в пространстве $W$ функционал

$$I_n(v, y) \;=\; I(v, y) \;+\; \frac{5}{6}\frac{1}{\varepsilon_n}\|y' - \triangle y + g_n(y) - v - f\|_{6/5}^{6/5},$$

где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предполагается, что скорость сходимости последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ниже, чем у $\{g_n\}$ , т. е. справедливо соотношение

$$\sup_y \|g_n(y) - g(y)\|_{6/5} = o(\varepsilon_n). \tag{6}$$

Ставится следующая вариационная задача:

**Задача $\mathbf{2^n}$.** *Найти такое управление $v$, которое минимизирует функционал $I_n$ на множестве $W_0$.*

**Теорема 2.** *Для любого $n$ задача $2^n$ разрешима.*

**Доказательство.** Пусть $\{w_k\} = \{v_k, y_k\}$ есть минимизирующая последовательность для задачи $2^n$ . Она ограничена в пространстве $L_2(Q) \times L_{6/5}(Q)$ , причем справедливо равенство

$$y_k' - \triangle y_k + g_n(y_k) = v_k + f + \phi_k,$$

где последовательность $\{\phi_k\}$ ограничена в пространстве $L_{6/5}(Q)$. Пользуясь методикой, описанной при доказательстве теоремы 1, установим ограниченность последовательности $\{y_k\}$ в пространстве $Y$. После выделения подпоследовательностей получаем сходимость $v_k \longrightarrow v$ слабо в $V$, $y_k \longrightarrow y$ слабо в $Y$ и $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ слабо в $L_{6/5}(Q)$. Очевидно, пара $(v, y)$ принадлежит множеству $W_0$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, после перехода к пределу в последнем равенстве, установим соотношение

$$y' - \triangle y + g_n(y) = v + f + \phi,$$

Учитывая, что функционал $I_n$ является суммой степеней (больше единицы) трех норм, каждая из которых слаба полунепрерывна снизу, завершаем доказательство так же, как и в предшествующем утверждении.

Обоснованием метода аппроксимации является следующий результат.

**Теорема 3.** *Для достаточно большого номера $n$ решение $(v_n, y_n)$ задачи является ослабленным приближенным решением задачи $2^n$ в смысле слабой топологии пространства $W$.*

**Доказательство.** Справедливо соотношение

$$I_n(v_n, y_n) \;=\; \min I_n(W_0) \;\le I_n(v, y) \;=\; I(v, y) \;+\; \frac{5}{6}\frac{1}{\varepsilon_n}\big\|g_n(y) - g(y)\big\|_{6/5}^{6/5},$$

где $(v, y)$ есть решение задачи 2. Учитывая оценку (6), приходим к неравенству

$$\lim_{n\to\infty} I_n(v_n, y_n) \le I(v, y). \tag{7}$$

Отсюда следует ограниченность числовой последовательности $\{I_n(v_n, y_n)\}$. Тогда последовательность пар $\{(v_n, y_n)\}$ ограничена в пространстве $L_2(Q) \times L_{6/5}(Q)$ и справедливо равенство

$$y_n' - \triangle y_n + g_n(y_n) = v_n + f + \phi_n, \tag{8}$$

причем выполняется оценка

$$\|\phi_n\|_{6/5} \le c(\varepsilon_n)^{5/6}, \;\; c > 0.$$

Учитывая определение множества $G_2$, установим ограниченность последовательности $\{g_n, (y_n)\}$ в пространстве $L_{6/5}(Q)$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ решений уравнения (6) с соответствующими краевыми условиями ограничена в пространстве $Y$. Выделяя подпоследовательности, получаем сходимость $v_n \to v'$ слабо в $V, y_n \to y'$ слабо в $Y$, $g_n(y_n) \to g'$ слабо в $L_{6/5}(Q)$ и $\phi_n \to 0$ слабо в $L_{6/5}(Q)$. При этом пара $(v', y')$ является элементом множества $W_0$.

Учитывая компактность вложения пространства $Y$ в $L_p(Q)$, где $p > 30/13$, после извлечения подпоследовательности получаем $y_n \to y'$ сильно в $L_p(Q)$ и п. в. на $Q$. Почти для всех точек $(x,t) \in Q$ справедливо соотношение

$$|g_n(y_n(x,t)) - g(y'(x,t))| \;\le\; |g_n(y_n(x,t)) - g(y_n(x,t))| \;+\; |g(y_n(x,t)) - g(y'(x,t))| \le$$
$$\sup_y |g_n(y) - g(y)| \;+\; |g(y_n(x,t)) - g(y'(x,t))|.$$

Учитывая условие (5), заключаем, что $g_n(y_n) \to g(y')$ п. в. на $Q$. Применяя лемму 1.3 (см. [11], с.25), установим, что $g_n(y_n) \to g(y')$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. Умножая равенство (8) на произвольную достаточно гладкую функцию, интегрируя результат по области $Q$ и переходя к пределу, установим соотношение

$$y' - \triangle y' + g(y') = v' + f.$$

Таким образом, $(v', y')$ оказывается допустимой парой для уравнения (1).

Итак, предел последовательности $\{(v_n, y_n)\}$ решений задачи $2^n$ в слабой топологии пространства $W$ является допустимой парой для уравнения (1). Следовательно, при достаточно больших номерах $n$ пара $(v_n, y_n)$ попадает в сколь угодно малую окрестность некоторой допустимой пары для уравнения (1). Из определения функционала $I_n$ следует неравенство $I(w) \le I_n(w)$ для любой точки $w$ из $W$. Тогда из условия (7) выводится соотношение

$$\lim_{n\to\infty} I(v_n, y_n) \le \lim_{n\to\infty} I_n(v_n, y_n) \le I(v, y).$$

Таким образом, для любого сколь угодно малого положительного числа $\delta$ номер $n$ можно выбрать столь большим, чтобы значение функционала $I(v_n, y_n)$ превосходило $I(v, y)$ не более чем на $\delta$. Тем самым при достаточно больших $n$ пара $(v_n, y_n)$ действительно оказывается ослабленным приближенным решением задачи 2. Теорема доказана.

**4. Условия оптимальности.** Для практического применения полученных результатов требуется описать принципиальный алгоритм решения задачи $2^n$ для произвольного номера $n$. Учитывая, что мы имеем дело с минимизацией гладкого функционала на выпуклом подмножестве гильбертова пространства, в данном случае оказываются пригодными стандартные методы оптимизации (см. например, [14], с. 18). При этом для вычисления производной минимизируемого функционала в задаче $2^n$ потребуются дополнительные ограничения на функции $g_n$. Будем полагать, что они удовлетворяют неравенствам

$$|g_{ny}(y)| \le a_1 + b_1|y|^4 \;\; \forall y \in \mathbb{R},$$

где $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $g_{ny}(y)$ – производная от $g_n$ в точке $y$. Тогда оператор $g_n(\cdot) : L_6(Q) \to L_{6/5}(Q)$ является дифференцируемым по Фреше, причем справедливо равенство

$$g_n'(y)h(x) = g_{ny}(y(x))h(x) \;\; \forall y \in L_6(Q).$$

**Теорема 4.** *Решение $(v_n, y_n)$ задачи $2^n$ характеризуется соотношениями*

$$v_n = \Pi(p_n/\gamma), \tag{9}$$

$$y_n' - \triangle y_n + g_n(y_n) = v_n + f + \varepsilon_n^5 (p_n)^5, \;\; (x,t) \in Q, \tag{10}$$

$$y_n(x,0) = y_0(x), \;\; x \in \Omega; \;\; y_n = 0, \;\; (x,t) \in \Sigma, \tag{11}$$

*где функция $p_n$ является решением краевой задачи*

$$-p_n' - \triangle p_n + g_n'(y_n)p_n = (z - y_n)^5, \;\; (x,t) \in Q, \tag{12}$$

$$p_n(x,t) = 0, \;\; x \in \Omega; \;\; p_n = 0, \;\; (x,t) \in \Sigma. \tag{13}$$

**Доказательство.** Пользуясь стандартной схемой минимизации функционалов [14], установим, что оптимальная пара $(v_n, y_n)$ для задачи $2^n$ удовлетворяет соотношениям

$$I_{nv}(v_n, y_n)(v - v_n) \geq 0 \ \ \forall v \in U,$$

$$I_{ny}(v_n, y_n)h = 0 \ \ \forall h \in Y_0,$$

где $Y_0$ — подпространство функции из $Y$ с нулевыми значениями при $t = 0$, $I_{nv}(v, y), I_{ny}(v, y)$ — частные производные функционала $I_n$ в точке $(v, y)$. Эти производные находятся обычным образом из соотношений

$$I_{ny}(v, y)h = \int\limits_Q (\gamma v - p_n)h \ \ dQ \ \ \forall h \in V,$$

$$I_{ny}(v, y)h = \int\limits_Q \Big\{(y - z)^5 h - p_n\big[h' - \triangle h + g_n'(y)h\big]\Big\}dQ \ \ \forall h \in Y_0,$$

где

$$p_n = (\varepsilon_n)^{-1}\big[y' - \triangle y + g_n(y) - v - f\big]^{1/5}.$$

Из последнего равенства при $v = v_n$, $y = y_n$ следует соотношение (10). В результате необходимые условия экстремума принимают вид:

$$\int\limits_Q (\gamma v - p_n)(v - v_n)dQ \geq 0 \ \ \forall v \in U,$$

$$\int\limits_Q \Big[-p_n' - \triangle p_n + g_n'(y)p_n - (z - y_n)^5\Big]h \ \ dQ \ -$$

$$- \int\limits_\Sigma \frac{\partial h}{\partial n'} p_n d\Sigma + \int\limits_\Omega (hp_n)\big|_{t=T} dx = 0 \ \ \forall h \in Y_0,$$

где $n'$ — внешняя нормаль к поверхности $\Sigma$. Второе из этих соотношений непосредственно дает краевую задачу (12), (13). Для приведения предшествующего вариационного неравенства к виду (9) достаточно воспользоваться свойствами проектора. Теорема доказана.

Итак, для нахождения решения задачи требуется решить систему (9) – (13), аналогичную той, что была получена в первом разделе. В соответствии с теоремой 2 определяемая таким образом пара $(v_n, y_n)$ оказывается приближенным решением задачи $1^n$.

**Замечание 1.** *Как и в регулярном случае, полученные результаты остаются в силе для любого числа измерений пространственной области при корректировке показателей в нелинейном члене и критерии оптимальности в соответствии с теоремами вложения.*

**Замечание 2.** *Критерием оптимальности может быть интегральный функционал общего вида со стандартными ограничениями на подынтегральное выражение (функция Каратеодори с ограничениями на степень роста нелинейностей, выпуклость и дифференцируемость). Если сам функционал оказывается негладким, то описанную выше методику можно применять совместно с известными методами негладкой оптимизации (см. [15], [16]). Тогда условие оптимальности записывается не в терминах обычных функциональных производных, а с использованием их обобщений (субдифференциал, производной Кларка и т.д.). Критерий оптимальности может обладать и меньшей регулярностью, в частности, определяться нормами в более широких пространствах. В этом случае возникают принципиальные трудности при доказательстве разрешимости экстремальной задачи. Однако в определении слабого и ослабленного приближенного решения существование оптимального управления не требуется. Тем самым описанная методика аппроксимации, в принципе, остается в силе и для менее регулярных функционалов.*

**З а м е ч а н и е 3.** *В теории обобщенных функций наряду со стандартным подходом* (*см., например,* [17]) *используется также секвенциальный метод* [18], *при котором распределение аппроксимируется гладкими функциями. Описанная выше методика в определенном смысле основана на тех же идеях. В этой связи есть основания надеяться на возможность распространения понятия секвенциальной производной на операторы. Если бы это удалось, то полученные выше результаты можно было бы установить стандартными методами* (*вариация в регулярном случае и штраф — в сингулярном*) *с заменой обычных операторных производных на секвенциальные.*

**З а м е ч а н и е 4.** *Уравнение состояния не обязано иметь параболический тип. Полученные результаты можно распространить на достаточно широкий класс задач оптимального управления, связанных с нелинейными уравнениями с негладкими операторами.*

## Цитированная литература


1. **Серовайский С. Я.** // Математический журнал. 2002. Т 2, № 1. С. 76 – 83.
2. **Лионс Ж.-Л.** Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987.
3. **Wolfersdorf L.** // Z. Angew. Math. Mech. 1976. V. 56. P. 531 – 538.
4. **Ahmed K. L., Teo K. L.** // J. Optim. Theory Appl. 1978. V. 28. P. 57 – 81.
5. **Матвеев А. С., Якубович В. А.** // Сиб. матем. журн. 1978. T. XVIII, № 5. C. 1109 – 1140.
6. **Barbu V.** Necessary conditions for control problems governed by nonlinear partial differential equations / Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (College de France Sem., Paris, 1979/80), Res. Notes in Math. V. 60, Pitman, London, 1982. P. 19 – 47.
7. **Friedman A.** // SIAM J. Optim. 1984. V. 22. P. 805 – 816.
8. **Серовайский С. Я.** // Матем. сборник. 1994. T. 185, № 4. C. 151 – 160.
9. **Серовайский С. Я.** // Дифференциальные уравнения. 1997. T. 33, № 8. C. 1114 – 1117.
10. **Фурсиков А. В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
11. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
12. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
13. **Zolezzi T.** // SIAM J. Control Optimal. 1972. V. 10, No 2. P. 594 – 607.
14. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
15. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.
16. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
17. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1987.
18. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М., 1976.


*Поступила в редакцию 14.03.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 95 — 99*

*УДК 517.5*

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕСОВА

М. Б. Сихов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47

Пусть $\pi_s = [-\pi, \pi]^s$ — s-мерный куб, $L^p(\pi_s)$ $(1 \le p < \infty)$ — множество всех измеримых $2\pi$-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ таких, что

$$\left\|f\right\|_p = (2\pi)^{-s} \left( \int\limits_{\pi_s} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$L_0^p(\pi_s) = \left\{ f \in L^p(\pi_s) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0 \ \ (j = 1, \dots, s \ ) \right\}.$$

Пусть $Z^s$ и $Z_+{}^s$ — подмножества евклидова пространства $R^s$, координаты которых являются целыми и целыми положительными числами, соответственно. Для $n \in Z_+^s$ положим $\left\|n\right\|_1 = n_1 + \dots + n_s$, $2^{-n} = (2^{-n_1}, \dots, 2^{-n_s})$, $\dfrac{1}{n} = \left(\dfrac{1}{n_1}, \dots, \dfrac{1}{n_s}\right)$.

Для $f \in L^p(\pi_s)$ введем смешанный модуль гладкости порядка $k$

$$\Omega_k(f;t)_p \equiv \Omega_k(f;t_1,\dots,t_s)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,\dots,s}} \|\Delta_h^k f(x)\|_p \ \ (t \in [0,1]^s),$$

где $\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_s}^k \dots \Delta_{h_1}^k f(x)$, $\Delta_{h_j}^k = \Delta_{h_j}^1(\Delta_{h_j}^{k-1})$, $\Delta_{h_j}^1 f(x) = f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_s) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_s)$ .

Пусть $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Через $SH_p^\Omega$ и $SB_{p,\theta}^\Omega$ обозначим пространства функций $f \in L_0^p(0,1)^s$, для которых конечны соответствующие полунормы

$$\|f\|_{SH_p^\Omega} = \sup_{t \in [0,\pi]^s} (\Omega_k(f;t)_p / \Omega_k(t)) \le 1,$$

$$\|f\|_{SB_{p,\theta}^\Omega} = \left( \int\limits_{[0,\pi]^s} [\Omega_k(f;t)_p/\Omega(t)]^\theta \prod_{j=1}^s t_j^{-1} dt \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1,$$

Keywords: *Besov's space , approximation of function, trigonometrical polynomials*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

где $\Omega(t)$ — заданная функция типа смешанного модуля гладкости порядка $k$, т.е. удовлетворяет условиям:

1) $\Omega(t) > 0,\ \prod_{j=1}^{s} t_j > 0$ и $\Omega(t) = 0,\ \prod_{j=1}^{s} t_j = 0$ ;

2) $\Omega(t)$ возрастает по каждой переменной;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_s t_s) \le \left(\prod_{j=1}^{s} m_j\right)^k \Omega(t),\ m_j \in {Z_+}^s, j = 1, \ldots, s;$

4) $\Omega(t)$ непрерывна при $t_j \ge 0, j = 1, \ldots, s$.

При $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j^{r_j}$ положим $SH_q^\Omega \equiv SH^{r_1,\ldots,r_s}$ и $SB_{q,\nu}^\Omega \equiv SB_{q,\nu}^{r_1,\ldots,r_s}$, а также положим $SH_q^\Omega \equiv$ $\equiv SB_{q,\infty}^\Omega$.

Пространства $SH_q^\Omega$ и $SB_{q,\theta}^\Omega$ имеют своим источником классические пространства Липшица и Гельдера. Аналоги пространств Липшица и Гельдера — изотропные и анизотропные — пространства $H^{r_1,\ldots,r_s}$ (пространства Никольского) функций многих переменных ввел С.М.Никольский. Обобщения этих пространств (пространства Бесова) определил О. В. Бесов (см., напр., в [1–3]). Определим следующие множества ($N > 0$):

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\Omega, N) = \left\{m \in {Z_+}^s : \Omega(2^{-m}) \ge \tfrac{1}{N}\right\}, \Gamma^\perp(\Omega, N) = {Z_+}^s \setminus \Gamma(\Omega, N)\ ,\\
&\rho(n) = \{m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s :\ 2^{n_j - 1} \le |m_j| < 2^{n_j}\}\ \ (n \in Z_+^s)\ ,\\
&Q(\Omega, N) = \bigcup_{n \in \Gamma(\Omega, N)} \rho(n)\ ,\\
&T(G) = \left\{t(x) : t(x) = \sum_{n \in G} c_n\ e^{\ i\ (n,x)}\right\}\ ,
\end{aligned}
$$

где $G$ — конечное подмножество $Z^s$.

Если $f \in L^p(\pi_s)$, то через $E_G\Big(f\Big)_p$ обозначает наилучшее приближение (в $L^p$) функции $f$ полиномами из $T(G)$.

Основными понятиями теории приближений являются понятия наилучшего приближения и модуля непрерывности (гладкости), отражающие, соответственно, конструктивные и структурные свойства функции.

В одномерном случае связи между этими принципиально различными понятиями впервые были установлены Д. Джексоном и С. Н. Бернштейном и с тех пор были объектом исследований уже многих поколений математиков.

Многомерный случай порождает многочисленные постановки задач в теории приближений в зависимости от выбора приближающего агрегата и разностных характеристик изменения функции.

В данной работе при $1 \le p < q < \infty$ получены оценки наилучших приближений функции (в $L^q$ ) через ее смешанный модуль гладкости в метрике пространства $SB_{p,\theta}^\Omega$ (прямые теоремы теории приближений или теоремы типа Джексона разных метрик).

Для пространства Никольского $SH_p^\Omega$ неусиливаемые прямые теоремы теории приближений разных метрик были получены автором [4] (там же смотри историю вопроса). При этом неусиливаемость устанавливается в рамках подхода П. Л. Ульянова [5]. При $s = 1$ эта задача сводится к результату М. А. Жайнибековой [6].

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** $[7, c.25]$ *Пусть* $1 \le p < q < \infty$ *и* $f \in L_0^p(\pi_s)$. *Тогда*

$$
\|f\|_q^q << \sum_{n \in Z_+^s} \left\|\delta_n(f; x)\right\|_p^q 2^{\|n\|_1\left(\frac{q}{p} - 1\right)}
$$

*в том смысле, что если ряд, стоящий справа, сходится, то $f \in L_0^q(\pi_s)$ и выполняется указанное неравенство. Здесь*

$$\delta_n(f;x) = \sum_{m\in\rho(n)} \hat{f}(m)e^{i(m,x)}$$

*— двоичная пачка ряда Фурье функции $f$.*

Здесь и в дальнейшем при положительных А и В запись $A \ll B$ будет означать $A \le CB$, где С — некоторая положительная величина, разная, вообще говоря, в различных формулах и зависящая лишь от постоянных параметров. А запись $A \asymp B$ означает $A \ll B \ll A$.

Следующая лемма является следствием теоремы Литтлвуда-Пэли (см., напр., [1, с.55]) .

**Лемма 2.** *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для каждой функции $f \in L_0^p(\pi_s)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_{n\in Z_+^s} \|\delta_n(f,x)\|_p^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}},\ p_0 = \min\{p,2\}.$$

**Доказательство.** Пусть $p{\ge}2$. Тогда, пользуясь теоремой Литтлвуда-Пэли , получим

$$\|f\|_p \asymp \left\|\left[\sum_{n\in Z_+^s} |\delta_n(f,x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p \ll \left(\sum_{n\in Z_+^s} \left\|\delta_n^2(f,x)\right\|_{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{n\in Z_+^s} \|\delta_n(f,x)\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $1 < p < 2$, то опять же в силу теоремы Литтлвуда-Пэли и неравенства Иенсена

$$|a+b+\dots|^r \le |a|^r + |b|^r + \dots\ (0\le r\le 1) \tag{1}$$

имеем

$$\|f\|_p \asymp \left\|\left[\sum_{n\in Z_+^s} |\delta_n(f,x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p \ll \left(\sum_{n\in Z_+^s} \|\delta_n(f,x)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма доказана.

В условиях принятых выше определений и обозначений справедливы следующие теоремы.

Пусть $1 \le p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$ и $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\in {Z_+}^s}$ — последовательность чисел. Через $SB_{p,\theta}(\lambda)$ обозначим пространства функций $f \in L_0^p(0,1)^s$, для которых конечны соответствующие полунормы

$$\|f\|_{SB_{p,\theta}}(\lambda) = \left(\sum_{n\in Z_+^s} \|\lambda_n\delta_n(f,x)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\ (\theta<\infty),$$
$$\|f\|_{SB_{p,\infty}}(\lambda) = \sup_{n\in Z_+^s} \|\lambda_n\delta_n(f,x)\|_p\, (\theta=\infty).$$

Следующая теорема играет важную роль при описании пространств Бесова.

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $\Omega(t)$ — функция типа смешанного модуля гладкости порядка $k$. Если $f(x) \in SB_{p,\theta}^\Omega$ и $\lambda = \{\Omega^{-1}(2^{-n})\}_{n\in {Z_+}^s}$, то имеет место следующее неравенство:*

$$\|f\|_{SB_{p,\theta}(\lambda)} \ll \|f\|_{SB_{p,\theta}^\Omega}. \tag{2}$$

**Доказательство .** При $k=1$ и $k=2$ теорема 1 была доказана Динь Зунгом [8], а при $k>2$ доказывается аналогично.

**Т е о р е м а 2.** *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $\Omega(t)$ *— функция типа смешанного модуля гладкости порядка* $k$. *Если* $f(x) \in SB^{\Omega}_{p,\theta}$ *и*

$$\sum_{n\in Z^s_+}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right]^{\rho}<\infty,$$

*где* $\rho = \dfrac{\theta q}{\theta - q}$ *при* $q < \theta$ *и* $\rho = \infty$ *при* $q \ge \theta$, *то* $f(x) \in L^q_0(\pi_s)$ *и*

$$\left\|f(x)\right\|_q \ll \left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right]^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{3}$$

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_q \ll \left(\sum_{n\in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right]^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{4}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Пусть $f(x) \in SB^{\Omega}_{p,\theta}$. Тогда в силу леммы 1

$$\left\|f(x)\right\|_q \ll \left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\delta_n(f;x)\right\|_p\right]^{q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Откуда, воспользовавшись неравенством Гельдера с показателями $p_1 = \theta/q$ и $p_2 = \theta/(\theta - q)$ при $\theta > q$, имеем

$$\left\|f(x)\right\|_q \ll \left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left\|\Omega^{-1}(2^{-n})\delta_n(f;x)\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right]^{\frac{\theta q}{(\theta-q)}}\right)^{\frac{(\theta-q)}{\theta q}}. \tag{6}$$

При $\theta \le q$, применяя неравенство (1), из (5) получим оценку

$$\left\|f(x)\right\|_q \ll \left(\sup_{n\in {Z_+}^s} 2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right)\left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left\|\Omega^{-1}(2^{-n})\delta_n(f;x)\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{7}$$

Наконец, в силу теоремы 1 из соотношений (6) и (7) вытекает неравенство (3)

$$\left\|f(x)\right\|_q \ll \left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right]^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \times \left\|f(x)\right\|_{SB_{p,\theta}(\lambda)} \ll$$
$$\ll \left(\sum_{n\in {Z_+}^s}\left[2^{\|n\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Omega(2^{-n})\right]^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \times \left\|f(x)\right\|_{SB^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Заменяя в (3) функцию $f(x)$ на функцию $f(x) - S_{Q(\Omega,N)}(f)$, придем к неравенству (4). Теорема полностью доказана.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть* $1 \le q < p < \infty$ *или* $1 < q = p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $\Omega(t)$ *— функция типа смешанного модуля гладкости порядка* $k$. *Если* $f(x) \in SB^{\Omega}_{p,\theta}$, *то имеет место следующее неравенство*

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_q \ll \left(\sum_{n\in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)}\left[\Omega(2^{-n})\right]^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{8}$$

*где* $\rho = \dfrac{\theta p_0}{\theta - p_0}$ *при* $p_0 < \theta$ *и* $\rho = \infty$ *при* $p_0 \ge \theta$ *и* $p_0 = \min(p, 2)$.

**Доказательство.** Пусть $f(x) \in SB^{\Omega}_{p,\theta}$. Сначала рассмотрим случай $1 < q = p < \infty$, $f(x) \in SB^{\Omega}_{p,\theta}$. Тогда в силу леммы 2

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_p \ll \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \|\delta_n(f,x)\|_p^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}. \tag{9}$$

Откуда, воспользовавшись неравенством Гельдера с показателями $p_1 = \theta/p_0$ и $p_2 = \theta/(\theta - p_0)$ при $\theta > p_0$, имеем

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_p \ll \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left\|\Omega^{-1}(2^{-n})\delta_n(f;x)\right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left[\Omega(2^{-n})\right]^{\frac{\theta p_0}{(\theta-p_0)}} \right)^{\frac{(\theta-p_0)}{\theta p_0}}. \tag{10}$$

При $\theta \le p_0$, применяя неравенство (1), из (9) получим оценку

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_p \ll \left( \sup_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \Omega(2^{-n}) \right) \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left\|\Omega^{-1}(2^{-n})\delta_n(f;x)\right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{11}$$

Наконец, в силу теоремы 1 из соотношений (10) и (11) вытекает неравенство (8)

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_p \ll \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left[\Omega(2^{-n})\right]^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \times \left\|f(x)\right\|_{SB_{p,\theta}(\lambda)} \ll$$

$$\ll \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left[\Omega(2^{-n})\right]^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \times \left\|f(x)\right\|_{SB^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left[\Omega(2^{-n})\right]^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{12}$$

Пусть теперь $1 \le q < p < \infty$. Ясно, что $f(x) \in L_0^q(\pi_s)$, т.к.

$$SB^{\Omega}_{p,\theta} \subset L_0^p(\pi_s) \subset L_0^q(\pi_s).$$

Далее, используя неубывание $L^q$-нормы по параметру $q$ и уже доказанную оценку (12), получим

$$E_{Q(\Omega,N)}(f)_q \ll E_{Q(\Omega,N)}(f)_p \ll \left( \sum_{n\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \left[\Omega(2^{-n})\right]^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Теорема доказана.

## Цитированная литература


1. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

2. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.

3. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алматы, 1976.

4. **Сихов М. Б.** // Труды международной конференции "Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии (Алматы, 26-28 октября,2000). Алматы, 2001. С. 115 – 118.

5. **Ульянов П. Л.** // Матем. сборник. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 104 – 131.

6. **Жайнибекова М. А.** О соотношениях между модулями непрерывности и наилучшими приближениями в разных метриках и некоторые многомерные теоремы вложения: Дисс ... канд. физ.-мат.наук. Алматы, 1985.

7. **Темляков В. Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 3 – 112.

8. **Динь Зунг** // Матем. сборник. 1986. Т. 131, № 2. С. 251 – 271.

*Поступила в редакцию 29.04.2002г.*

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 2. С. 100 — 106*

*УДК 519.245*

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДАМИ МОНТЕ–КАРЛО

К. К. Шакенов

Казахский национальный университет имени аль–Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47, kshaken@nursat.kz (shakenov2000@mail.ru)

В работе рассматриваются вопросы применения алгоритмов «блуждания по сферам» и «блуждания по границам» методов Монте-Карло для решения одной задачи линейной релаксационной фильтрации в пористой среде. Рассматривается модель фильтрации по закону Дарси в релаксационно-сжимаемой пористой среде.

**1. Постановка задачи.** В работе [1] рассматривается система уравнений линейной релаксационной фильтрации в конечной области $\Omega$ переменного $x = (x_1, x_2, x_3)$. Границу области $\Omega$ обозначим через $\partial\Omega$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \vec{J}(x,t)\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} p(x,t)\cdot\vec{n}\,d(\partial\Omega) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} m\,\rho(x,t)\,dx + \rho_0\int\limits_{\partial\Omega} W_n\,d(\partial\Omega) = 0,$$

$$\vec{J} = -\Im(0)\,\vec{W}(x,t) - \int\limits_0^{\infty}\frac{d\Im(t')}{dt'}\cdot\vec{W}(x,t-t')\,dt'$$

$$m\cdot\rho - m_0\cdot\rho_0 = \Phi(0)\cdot(p-p_0) + \int\limits_0^{\infty}\frac{d\Phi(t')}{dt'}\cdot(p-p_0)(x,t-t')\,dt'\ ,$$

где $\vec{J}$ — плотность импульса сил сопротивления, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$, $p$ — давление, $m$ — пористость, $\rho$ — плотность жидкости, $\vec{W}$ – вектор скорости фильтрации, $W_n$ — проекция скорости фильтрации на нормаль $\vec{n}$, $\Im(t)$ — функция релаксации закона фильтрации, $\Phi(t)$ — функция релаксации закона сжимаемости, а также

$$\Im(0) = \lim_{t\longrightarrow 0+0}\Im(t),\quad \frac{d\Im(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \lim_{t\longrightarrow 0+0}\frac{d\Im(t)}{dt},$$

Keywords: *application, random walk, Monte Carlo's method, linear relaxational filtration*
2000 Mathematics Subject Classification: 82B80

$\Phi(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$, $p_0$, $\rho_0$ и $m_0$ – соответственно, давление, плотность жидкости и пористость в невозмущенных пластовых условиях. В системе первое уравнение есть закон сохранения импульса сил сопротивления, второе — линеаризованный закон сохранения массы жидкости, третье — интегральная формула результирующего импульса сил сопротивления для изотропных сред, четвертое — определяющее соотношение для массы жидкости. Данная система уравнений замкнута относительно неизвестных $\vec{J}$, $p$, $m\rho$ и $\vec{W}$.

В подземной гидромеханике в основном рассматриваются только давление и скорость фильтрации, поэтому, исключив из системы величины $\vec{J}$ и $m\rho$, получают замкнутую относительно величин $p$ и $\vec{W}$ систему уравнений, описывающую релаксационную фильтрацию в области непрерывности полей давления и скорости фильтрации

$$\nabla^2 p(x,t) = \frac{\Im(0)\,\Phi(0)}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_0^\infty \left( \frac{\Im(0)}{\rho_0} \cdot \frac{d\Phi(t')}{dt'} + \frac{\Phi(0)}{\rho_0} \cdot \frac{d\Im(t')}{dt'} + \frac{1}{\rho_0} \int\limits_0^{t'} \frac{d\Im(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\Phi(t'-\tau)}{d(t'-\tau)}\, d\tau \right) \cdot \frac{\partial^2 p(x,t-t')}{\partial (t-t')^2}\, dt'$$

$$\mathrm{grad}_x\, p(x,t) = -\Im(0) \cdot \frac{\partial \vec{W}(x,t)}{\partial t} - \int\limits_0^\infty \frac{d\Im(t')}{dt'} \cdot \frac{\partial \vec{W}(x,t-t')}{\partial (t-t')}\, dt'.$$

Любая линейная релаксационная модель фильтрации полностью характеризуется функциями времени $\Im(t)$ и $\Phi(t)$, называемыми ядрами релаксации закона фильтрации и массы жидкости, соответственно.

Рассмотрим модель фильтрации по закону Дарси в релаксационно-сжимаемой пористой среде. Этому типу фильтрационного течения соответствуют следующие ядра релаксации

$$\Im(t) = \frac{\mu}{\kappa} \cdot t \cdot \eta(t), \quad \Phi(t) = \rho_0 \Big( \beta - \frac{\lambda_m - \lambda_p}{\lambda_m} \cdot \beta_c \cdot \exp(-\frac{t}{\lambda_m}) \Big) \eta(t),$$

где $\mu$ — вязкость жидкости, $\kappa$ — коэффициент проницаемости, $\beta = \beta_c + m_0 \cdot \beta_f$ — коэффициент упругоемкости пласта, $\beta_c$ и $\beta_f$ — коэффициенты сжимаемости пористой среды и жидкости, соответственно, $\lambda_m$ и $\lambda_p$ — времена релаксации, соответственно, пористости при постоянном перепаде давления и давления при постоянной пористости, $\eta(t)$ — функция Хевисайда,

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Модель описывает фильтрацию несжимаемой жидкости в релаксационно-сжимаемой пористой среде при $\lambda_p = 0$, а также в трещиновато-пористой среде с бесконечно малой упругоемкостью трещин и проводимостью блоков.

В области фильтрации $\Omega$ давление $p(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi \triangle \Big( p + \lambda_m \frac{\partial p}{\partial t} \Big) = \frac{\partial}{\partial t} \Big( p + \lambda_m^* \frac{\partial p}{\partial t} \Big), \tag{1}$$

где $\chi$ — коэффициент пьезопроводности пласта, $\lambda_m^* = \lambda_m \cdot \dfrac{\beta_*}{\beta}$, $\beta_* = m_0 \cdot \beta_f + \beta_c \cdot \lambda_p / \lambda_m$ — динамический коэффициент упругоемкости пласта. Вне области фильтрации давление равно первоначальному пластовому.

В рамках этой модели вектор скорости фильтрации $\vec{W}(x,t)$ определяется из уравнения

$$\vec{W}(x,t) = -\frac{\kappa}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p(x,t). \tag{2}$$

**Постановка начально-краевой задачи.**

Найти в ограниченной области $\Omega \in R_2$ с границей $\partial\Omega$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$p(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{4}$$

и граничному условию

$$p(x,t) = p_0(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{5}$$

где $p_0(x)$ – заданная функция.

**Замечание.** *Начально-краевая задача для определения давления $p(x,t)$ и скорости фильтрации $\vec{W}(x,t)$ (1), (3)–(5) допускает рассогласование граничных условий с начальными данными. В работе [1] (глава II, § 1, стр. 41–45, гл. III, § 1, стр. 69–74) исследован этот вопрос о рассогласовании начальных данных и граничных условий. Мы в этой задаче допускаем, что область $\Omega$ со своей границей $\partial\Omega$ удовлетворяет всем требованиям рассогласования начальных данных и граничных условий.*

**2. Применение методов Монте-Карло.** Рассмотрим задачу (1), (3)–(5).

**Задача.** Найти давление жидкости $p(x,t)$ в ограниченной области $\Omega \in R_2$ с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющее соотношениям:

$$\chi \triangle\Big(p + \lambda_m \frac{\partial p}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(p + \lambda_m^* \frac{\partial p}{\partial t}\Big) \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times (0,T), \tag{6}$$

$$p(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$\frac{p(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{8}$$

$$p(x,t) = p_0(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0,T]. \tag{9}$$

Опишем общую схему применения методов Монте-Карло к решению задачи (6)–(9) [2], [3], [4].

Разобьем интервал $[0,T]$ на $N$ частей длины $\triangle t: \quad \triangle t = T/N$. Дискретизируем задачу (6)–(9) только по временной переменной $t$, применяя неявную схему. Для этого уравнение (6) запишем в виде

$$\lambda_m^* \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} - \chi\,\lambda_m \triangle \left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right) - \chi \triangle p(x,t) = 0.$$

Получим

$$\lambda_m^* \frac{p^{n+1}(x) - 2\,p^n(x) + p^{n-1}(x)}{\tau^2} + \frac{p^{n+1}(x) - p^{n-1}(x)}{2\,\tau} -$$
$$\chi\,\lambda_m \triangle\Big(\frac{p^{n+1}(x) - p^{n-1}(x)}{2\,\tau}\Big) - \chi \triangle p^{n+1}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{10}$$

$$p^0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$\frac{p^1(x) - p^0(x)}{\triangle t} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$p^{n+1}(x) = p_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{13}$$

Из (10)–(13) имеем

$$\triangle p^{n+1}(x) - a\, p^{n+1}(x) = b\, p^n(x) + c\, p^{n-1}(x) + d\, \triangle p^{n-1}(x), \;\; x \in \Omega, \;\; n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{14}$$

где $a = \dfrac{2\,\lambda_m^* + \tau}{\chi\,\tau(\lambda_m + 2\,\tau)}$, $\quad b = -\dfrac{4\,\lambda_m^*}{\chi\,\tau(\lambda_m + 2\,\tau)}$, $\quad c = \dfrac{2\,\lambda_m^* - \tau}{\chi\,\tau(\lambda_m + 2\,\tau)}$, $\quad d = \dfrac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\,\tau}$,

$$p^0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$p^1(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$p^{n+1}(x) = p_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{17}$$

Известно, что коэффициенты $\lambda_m^*,\ \chi,\ \lambda_m$ — заданные положительные постоянные величины, $\tau$ — шаг по времени, $\tau > 0$. Тогда $a > 0$. Во временном слое $n+1$ для давления из (14)–(17) получим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\triangle p^{n+1}(x) - a\, p^{n+1}(x) = g^n(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{18}$$

$$p^{n+1}(x) = p_0(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{19}$$

где $g^n(x) = b\, p^n(x) + c\, p^{n-1}(x) + d\, \triangle p^{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1$. При $n = 1$ получим $g^1(x) = b\, p^1(x) + c\, p^0(x) + d\, \triangle p^0(x) = 0$ в силу (15) и (16). Опуская индекс $n$ и учитывая начальные условия (15) и (16), перепишем задачу (18)–(19) в виде

$$\triangle p(x) - a\, p(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$p(x) = p_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{21}$$

Известно [3], что решение задачи (20) – (21) в точке $x_0$ можно представить в виде

$$p(x_0) = \int\limits_{S(x_0)} -\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \vec{n}}\Big|_{|x| = l_0} p(s)\, ds + \int\limits_{V(x_0)} G(x, x_0)\, g(x)\, dx,$$

где $G(x, x_0)$ — функция Грина оператора $\triangle - a$ для шара $V(x_0)$ радиуса $l_0$ с центром в точке $x_0$, $\quad S(x_0)$ — сфера радиуса $l_0$ с центром в точке $x_0$, $\quad l_0 = l(x_0)$, $\quad \vec{n}$ — внешняя нормаль к сфере $S(x_0)$,

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\Big|_{|x| = l_0} = \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{|x| = l_0} = -\frac{l_0\sqrt{a}}{4\,\pi\, l_0^2\, \mathrm{sh}(l_0\sqrt{a})} \qquad \text{или} \qquad -\frac{\partial G}{\partial \vec{x}}\Big|_{|x| = l_0} = \frac{1}{4\,\pi\, l_0^2} \cdot \frac{l_0\sqrt{a}}{\mathrm{sh}(l_0\sqrt{a})}\,,$$

$$G(x, x_0) = \frac{\mathrm{sh}(l_0 - |x - x_0|\sqrt{a})}{4\,\pi\, |x - x_0|\, \mathrm{sh}(l_0\sqrt{a})}\,.$$

Полученное соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма второго рода с обобщенным ядром, представляющим равномерное распределение вероятностей на сфере $S(x_0)$ (плотность распределения — $1/(4\,\pi\, l_0^2)$). После введения обобщенного ядра первый интеграл становится трехмерным. Ядро содержит плотность перехода моделируемой цепи Маркова: из точки $x_0$ следует переходить на поверхность сферы $S(x_0)$. Естественно, такое интегральное уравнение решают «блужданием по сферам». Ядро интегрального уравнения обращается в нуль, если точка цепи Маркова — граничная, т.е. $x \in \partial\Omega$. Так как на границе известно значение функции $p(x) = p_0(x)$ при $x \in \partial\Omega$, дополним интегральное уравнение этим граничным условием.

В этом случае получаем несмещенную оценку, т.е. $E\xi = p(x)$, где $E$ — оператор математического ожидания, $\xi$ — оценка (случайная величина) решения, построенная вдоль цепи Маркова.

Однако, эта оценка нереализуема, то есть ее невозможно моделировать на ПЭВМ за конечное время, так как с вероятностью 1 процесс "блуждания по сферам"не выходит на границу за конечное число шагов (мера граничной точки равна нулю). Это связано с тем, что норма интегрального оператора в $L_1(\Omega)$ равна 1.

Чтобы получить реализуемую на ПЭВМ $\varepsilon$-смещенную оценку, введем $\partial\Omega_\varepsilon$ — $\varepsilon$-смещенную окрестность границы $\partial\Omega$; $\quad \partial\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega';\ l(x) < \varepsilon\}$. Если предположим, что решение задачи (20)–(21) известно в каждой точке границы $\partial\Omega_\varepsilon$, то для $p(x)$ можно записать интегральное уравнение

$$p(x) = \int\limits_{\Omega} k(x, x')\, p(x')\, dx' + f(x), \tag{22}$$

где

$$k(x, x') = \begin{cases} \dfrac{l\sqrt{a}}{\operatorname{sh}(l\sqrt{a})} \cdot \delta(x, x')\,, & \text{если} \quad x \notin \partial\Omega_\varepsilon, \\ 0\,, & \text{если} \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-x'|\le l} \dfrac{\operatorname{sh}\big((l - |x-x'|)\sqrt{a}\big)\, g(x')}{|x-x'|\, \operatorname{sh}(l\sqrt{a})}\, dx'\,, & \text{если} \quad x \notin \partial\Omega_\varepsilon, \\ p_0(x)\,, & \text{если} \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $l = l(x)$, $\quad \delta(x, x')$ — обобщенная плотность, соответствующая равномерному распределению вероятностей на сфере $S(x)$.

Исследуем сходимость ряда Неймана для уравнения (22). Для этого оценим норму интегрального оператора $K^2$ в естественном для данной задачи пространстве $L_1$. Учитывая, что $a > 0$ и $l\sqrt{a}/\operatorname{sh}(l\sqrt{a}) \le 1$, легко оценить $\|K^2\|_{L_1(\Omega)}$. Действительно,

$$K^2(x,\,\cdot) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} k(x, x')\, k(x', x'')\, dx'\, dx'' \le \int\limits_{\Omega-\partial\Omega_\varepsilon} \delta(x, x') \Big( \int\limits_{\Omega} \delta(x', x'')\, dx'' \Big)\, dx' =$$
$$\int\limits_{\Omega-\partial\Omega_\varepsilon} \delta(x, x')\, dx' \le 1 - \nu(\varepsilon),$$

где $\nu(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^2}{4\pi\, l_{\max}^2}$, $\quad l_{\max}$ — точная верхняя граница радиусов сфер, целиком лежащих в $\Omega$. Здесь использована оценка снизу $\nu(\varepsilon)$ для вероятности попадания очередной точки цепи Маркова в $\partial\Omega_\varepsilon$ и тот факт, что $k(x, x') = 0$ при $x \in \partial\Omega_\varepsilon$, а также $\int\limits_{\Omega} \delta(x', x'')\, dx'' = 1$. Отсюда $\|K^2\|_{L_1(\Omega)} \le 1 - \nu(\varepsilon) < 1$. Последнее соотношение обеспечивает сходимость ряда Неймана и, тем самым, возможность применения метода Монте-Карло для уравнения (22). Итак, интегральное уравнение (22) решаем методом Монте-Карло, а именно, для оценки решения цепь Маркова $\{x_i\}$ моделируем «блужданием по сферам». Веса в этом случае определяются по следующей рекуррентной формуле

$$Q_0 = 1, \quad Q_i = Q_{i-1}\, \frac{l_{i-1}\sqrt{a}}{\operatorname{sh}(l_{i-1}\sqrt{a})}, \quad l_i = l(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Предположим, что решение $p(x)$ известно в $\partial\Omega_\varepsilon$. Это предположение дает нам $\varepsilon$-смещенную оценку. Вместо точных значений $p(x)$ в $\partial\Omega_\varepsilon$ используем приближенные значения, например, полагая

$$p(x) \approx p_0(x^*), \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad x^* \in \partial\Omega, \quad |x - x^*| = l(x) \le \varepsilon.$$

В результате получим $\varepsilon$-смещенную оценку

$$|p(x) - p_\varepsilon(x)| = |E\{Q_M(f(x_M) - f(x_M^*))\}| \le c_1\, \varepsilon,$$

где $c_1$ — некоторая ограниченная постоянная вследствие ограниченности в $\Omega'$ производных от решения, $E$ — оператор математического ожидания, $Q_M \leq 1$, $M$ — случайный номер последнего состояния цепи Маркова.

Интеграл $f(x)$ при $x \notin \partial\Omega_\varepsilon$ можно оценивать методом Монте-Карло по одному случайному узлу. Плотность распределения случайного узла имеет вид [3]:

$$q_{\rho,\theta,\varphi}(x) = \frac{x\,\mathrm{sh}\left((l-x)\sqrt{a}\right)}{I_G\,\mathrm{sh}(l\sqrt{a})} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\theta)}{2},$$

где $\rho = |x - x'|$, $I_G = \int\limits_{|x-x'|\leq l} G(x,l)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{l}{\mathrm{sh}(l\sqrt{a})}\right)$. Случайная оценка $f(x)$ имеет вид

$$f_1(x,\rho,\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{l}{\mathrm{sh}(l\sqrt{a})}\right) g(x+\rho\,\omega),$$

где $\omega$ — изотропный случайный вектор единичной длины. Эта оценка является несмещенной, то есть $E\,f_1(x,\rho,\omega) = f(x)$.

Наконец, если использовать $f_1$ для оценки $f$, то математическое ожидание случайной величины

$$\xi_\varepsilon = f_1(x_0,\rho_0,\omega_0) + \sum_{i=1}^{M-1} Q_i\,f_1(x_i,\rho_i,\omega_i) + Q_M\,p_0(x_M^*)$$

дает оценку решения задачи (20)–(21) в точке $x_0$.

Справедлива теорема

**Т е о р е м а .** *Дисперсия случайной величины $\xi_\varepsilon$ равномерно ограничена по $\varepsilon$, то есть* $D\,\xi_\varepsilon < C_2 < \infty$, $C_2 = \mathrm{const}$.

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Ввиду ограниченности функции $p_0$ достаточно предположить, что $p_0 = 0$. Поскольку $Q_M \leq 1$ и $f|_{a\neq 0} \leq f|_{a=0}$, достаточно рассмотреть случай $a = 0$, при котором $Q_M \equiv 1$. Тогда рассматриваемый алгоритм представляет собой прямое моделирование для уравнения (22), и соответствующая дисперсия выражается формулой Ермакова, Золотухина [5]:

$$D\xi_\varepsilon = (\phi_\varepsilon,\, f\,(2p_\varepsilon - f)), \tag{23}$$

где $\phi_\varepsilon$ — плотность центров сфер, $p_\varepsilon$ — решение задачи для данного значения $\varepsilon$ при $a = 0$. Известно, что $\phi_\varepsilon(l) \leq c_3/l$. Также $p_\varepsilon < c_4$, $f(l) \leq c_5\,l^2$ в силу ограниченности правой части уравнения (22) при $a = 0$. Здесь $c_3$, $c_4$, $c_5$ – положительные постоянные. Отсюда получают утверждение теоремы путем интегрирования (23).

Итак, оценили методами Монте-Карло решение задачи (20)–(21), то есть вычислили $p_\varepsilon^{n+1}(x)$. Чтобы перейти на следующий временной слой $(n+2)$ и определить $p^{n+2}(x)$, вычислим правую часть уравнения (22) для этого временного слоя: $g^{n+1}(x) = b\,p_\varepsilon^{n+1}(x) + c\,p^n + d\,\triangle p^n(x)$. Здесь $p^n(x)$ и $\triangle p^n(x)$ известны в силу начальных данных (пока для $n = 0$ и $n = 1$ они известны), а $p_\varepsilon^{n+1}(x)$ — оценка решения в предыдущем слое, то есть решение задачи (20)–(21) на временном слое $(n+1)$. Для временного слоя $(n+3)$ необходимо знать $g^{n+2}(x) = b\,p_\varepsilon^{n+2}(x) + c\,p_\varepsilon^{n+1}(x) + {}$ $+ d\,\triangle p_\varepsilon^{n+1}(x)$. Здесь $p_\varepsilon^{n+2}(x)$ — оценка решения на временном слое $(n+2)$, $p_\varepsilon^{n+1}(x)$ — оценка решения на временном слое $(n+1)$. Из (20) находим $\triangle p_\varepsilon^{n+1}(x) = a\,p_\varepsilon^{n+1}(x) + g^n(x)$. Продолжая этот процесс, оценим $p_\varepsilon^n(x)$ и $\triangle p_\varepsilon^n(x)$ для всех временных слоев $n = 2, 3, 4, \ldots, N$.

Алгоритмы методов Монте-Карло и вычислительный эксперимент показывают, что применение методов Монте-Карло для решения задач фильтрации дает следующие преимущества: во-первых, можно найти решение в отдельно взятой точке области, во-вторых, повышается эффективность решения многомерных задач со сложной геометрией области.

## Цитированная литература


1. **Молокович Ю. М., Осипов П. П.** Основы теории релаксационной фильтрации. Казань, 1987.

2. **Смагулов Ш., Шакенов К. К.** Методы Монте–Карло в задачах гидродинамики и фильтрации. Алматы, 1999.

3. **Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К.** Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск, 1980.

4. **Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С.** Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М., 1984.

5. **Ермаков С. М., Золотухин В. Г.** Применение метода Монте–Карло для расчета от ядерных излучений. – В кн.: Вопросы физики защиты реакторов. Атомиздат. М., 1963. С. 171 – 182.


*Поступила в редакцию 18.03.2002г.*

## ХРОНИКА

# СЕМИНАР ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ МОН РК

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных на семинаре в апреле-мае 2002г.

**У. С. Абдибеков** (Алматы)"Численное моделирование турбулентных неоднородных течений"(24 апреля 2002 г.).

Рассматриваются вопросы замыкания уравнения Рейнольдса, на основе уравнении одноточечных моментов второго порядка для полей скорости, температуры и концентрации. Для замыкания уравнений вторых моментов используются гипотезы Колмогорова-Ротта [1]. Уравнение записываются для полностью развитого чисто сдвигового турбулентного течения. Полученные алгебраические уравнения решены аналитически и решения представлены в виде произведения двух сомножителей, первый из которых соответствует течению в однородной среде, а второй — учитывает влияние внешних сил; он представляется через локальные параметры течения [2]. Полученная модель турбулентности используется для решения задачи турбулентного переноса примеси над температурно-неоднородной поверхностью. Полученные результаты численного моделирования сравниваются с известными экспериментальными работами [3]. Представлены результаты применения модели для решения прикладных задач, в частности, результаты моделирования распространения газов продуктов сгорания за ракетоносителем в стратосфере. Построена модель для турбулентного течения с привлечением минимального числа эмпирической информации, которая позволяет моделировать сложные течения, где одновременно присутствуют температура и концентрация.

**Литература.** 1. Джаугаштин К. Е.// Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. №4. С.71–79. 2. Абдибеков У. С. // Известия НАН РК, сер. физ.- мат. 2001. № 3. С.53–62. 3. Sethurman S., Cermak J. E. // Boundary Layer Meteorology. 1975. V. 9, №4. P.427–440.

**А. П. Макашева, А. Ж. Найманова** (Алматы) "О влиянии формы сопла на смешение сверхзвуковых струй"(29 мая 2002 г.).

Основная цель работы заключается в создании численного метода, предназначенного для расчета интенсификации процессов смешения в камере сгорания с использованием сопел различной конфигурации для подачи водорода. При выборе компоновки сопел реактивных двигателей необходимо учитывать множество факторов влияющих на летные характеристики проектируемого самолета. К таким факторам относятся взаимодействия скачков уплотнения, волн Маха и волн разрежения с пограничными слоями.

В докладе изложены результаты численного моделирования трехмерных течений турбулентных струй истекающих из компоновок сопел эллиптической формы (вначале истечения) в однородный спутный поток. К такого рода течениям применимы параболизованные уравнения Навье-Стокса (ПУНС), в которых исключены вторые производные по продольной координате $x$.

Решение задачи осуществляется методом расщепления. На первом промежуточном этапе расчитываются конвективные потоки явным методом. Затем определяются скорости, плотность и полная энергия потока путем решения нелинейных алгебраических уравнений для сверхзвуковой зоны и линейных — для дозвуковых.

Диффузионный обмен расчитывается неявным образом методом матричной прогонки.

Исследовано влияние чисел Маха, степени нерасчетности и температуры на смешение. Выявлено, что разделение струи способствует максимальной интенсификации смешения струи. Получено, что струя более интенсивно расширяется в направлении малой оси.

**А. О. Бекетаева** (Алматы) "Численный расчет перпендикулярного вдува струи в сверхзвуковой поток"(29 мая 2002 г.).

В последнее время большое внимание уделяется изучению обтекания поверхности тел сверхзвуковым потоком. На данный момент особенно актуальным является создание управляемых усилий на поверхности летательных аппаратов при инжекции газовых струй, с целью увеличения подъемной силы или создания дополнительных сил торможения.

Разработана методика расчета обтекания поверхности тел сверхзвуковым потоком при наличии вдува струи, перпендикулярно потоку. Исходными являются полные уравнения Навье-Стокса, решение которых производится неявной факторизованной схемой Бима-Уорминга. Для замыкания исходных уравнений использована алгебраическая модель турбулентности Болдуина-Ломакса. Задача решается в обобщенных координатах, в двумерной постановке, которая легко обобщается на трехмерный случай.

Результаты расчета согласуются с данными экспериментальных и численных расчетов.

Исследовано влияние числа Маха струи и нерасчетности на изменение величины давления на поверхности тела.

**Б. К. Алиева, Г. С. Маканалина** (Алматы) "Об одной методике расчета солнечной радиации в облачной атмосфере"(29 мая 2002 г.).

Существенный вклад в теплообмен в атмосфере вносит солнечное излучение и при численном моделировании мезометеорологических процессов необходимо учитывать этот фактор.

В докладе изложены результаты численного моделирования переноса излучения в неоднородной по внутренней структуре атмосфере бесконечной протяженности по $y$ и ограниченной по плоскости $xoz$ (неоднородность по $y$ не учитывается). Вне облаков учитывается ослабление солнечного излучения вследствие поглощения атмосферными газами, поглощение и рассеяние аэрозолем. Внутри облака учитывается многократное рассеяние облачными и арозольными частицами, поглощение атмосферными газами (водяным паром). Процесс переноса фотонов описывается интегральным уравнением Пайерлса, решение которого осуществляется методом Монте-Карло [1]. Расчет потоков излучения в облаке и во внеоблачной атмосфере осуществляется отдельно и затем определяется суммарный поток. Для учета пространственной неоднородности вся область разбивается на ячейки и моделируется солнечный свет конечной ширины, который включает несколько ячеек. После завершения движения этой порции энергии, осуществляется переход к другой и снова повторяется аналогичный расчет.

**Литература.** 1. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Ред. Марчук Г. И., Новосибирск, 1976.

**С. Д. Маусумбекова** (Алматы) "Численное моделирование парообразования в соплах Лаваля"(29 мая 2002 г.).

В работе предлагается численная модель паробразования в сопле Лаваля и методика ее решения. Исходными являются уравнения сжимаемой жидкости. Справедливы обычные допущения, принятые в гидромеханике гетерогенных сред [1]. Кроме того, выдвинуты следующие допущения: мгновенно образуется пар, если давление жидкости становится ниже давления насыщения ($p \leq p_s$); масса пара перемещается со скоростью жидкости. Для решения проблемы связанной с геометрией рассматриваемой области используется метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [2]. Существование звуковых волн сильно ограничивает возможность эффективного использования методов численного интегрирования. В работе для решения этой проблемы используется подход из [3]. Предлагаемая методика апробирована на тестовой задаче, где рассматривался процесс перехода пара в жидкую фазу. Показано, что режимные параметры влияют на процесс образования пара.

**Литература.** 1. Нигматулин Р. И. Динамика многофаных сред. М., 1987. 2. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М., 1991. 3. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. М., 1989.

## РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 532.517.4 2000 MSC: 35Q60

Abdibekov U.S., Maxutova A.E. **On pulsation structure of turbulence flow at presence of forses of a buoyancy and centrifugal forses**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.3–6.

For closing the Reynolds equation of shear flows the semitheoretical model is received. The model built on base of equations for single point moments of the second order of fields of velocities. Received analitical expressions for turbulent features depends on features of the main flow and takes into account the double influence of buoyancy effect and centrifugal power, caused by curvature of flow.

References — 11.

УДК: 517.518.23 2000 MSC: 46E35, 46A32

Aitenova M.S, Kusainova L.K. **On asymptotics of approximative numbers distribution of general weighted Sobolev spaces embeddings. II**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.7–14.

Theorems on compact embeddings of Sobolev spaces with the general weights into Lebesgue spaces are obtaihed in the terms of local maximal operators, as well as upper bounds for approximative numbers distribution function of these emmbeddings. A number of theorems with consideration of weights with special properties are given.

References — 4.

УДК: 517.95 2000 MSC: 34A37, 34C41, 34K06, 34K45

Akhmet M.U., Tleubergenova M.A. **On asymptotic equivalence of impulsive linear homogeneous differential systems**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.15–18.

Sufficient conditions of asymptotic equivalence of impulsive linear homogeneous differential equations are obtained.

References — 10.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

Aldibekov T.M. **Generalized regular systems of differential equations**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.19–24.

From the set of systems of differential equations we consider the class of systems with solutions asymptotic defined by generalized exponents. The generalization of Perron's theorem and Lyapunov's inequalities are obtained.

References — 12.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34A12

Asanova A.T. **Correct solvable family of two-point boundary-value problems**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.25–31.

The family of two-point boundary-value problems for the ordinary differential equations is considered. By parametrization's method the necessary and sufficient conditions of the existence of the unique solution of the problem are obtained.
References — 7.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

Ayaganov E.T., Noskova S.V. **The analysis of dynamical properties of automatic control system with varying configuration of stochastic object with delay. I**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.32–40.

On the base of stochastic analogue of direct Lyapunov's method, with use of Lyapunov's function and Razumikhin approach the problem of analysis of dynamical properties of dissipativity in mean-square for a stochastic, nonstationary control system with varying configuration with delay is considered.
References — 25.

УДК: 519.63 2000 MSC: 35J50, 35J60, 35Q30

Baldybek Zh. **The supplemented domains method for ocean dynamics non-linear boundary-value problem**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.41–50.

In this paper an approximate method of solving of ocean dynamics boundary-value problem in the from of flow function fased on a variational principle is considered. A strong convergence of approximated solution in $L_2$ is obtained. An algorithm is proposed.
References — 3.

УДК: 517.95.958 2000 MSC: 35Q60

Borzykh A.V. **Multidimensional Korteweg de Vries models**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.51–56.

Multidimensional Korteweg de Vries models are presented. Its bilinear form is obtained. Its soliton solutions are found using Hirota's method.
References — 18.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34A34

Dauylbaev A.M., Rakhimberdiev M.I. **On Baire class of Lyapunov exponents of linear differential equations**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.57–60.

It is proved that Lyapunov exponents of linear differential equations as functions of coefficient from the space of continious bounded functions belonging to second Baire class.
References — 6.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Dzhumabaev D.S. **Correct solvable problems on semiaxis for the family of differential equations**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.61–70.

The singular boundary-value problems on semiaxis for the family of ordinary differential equations are considered. The necessary and sufficient conditions of correct solvability in the terms of initial data are established by parametrization's method.
References — 26.

УДК: 681.5 2000 MSC: 34D20, 34K20

Ivlev R.S., Sokolova S.P. **Investigating of asymptotic stability of linear interval-specified time-delay systems**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.71–79.

In this paper a method of investigating asymptotic stability property of linear interval-specified time-delay systems given in state space is proposed on the base of using the direct method of Lyapunov and methods of interval analysis. A sufficient condition of asymptotic stability is obtained using the concept of Lyapunov-Krasovsky's functionals.
References — 20.

УДК: 516.519 2000 MSC: 35Q30, 35Q35

Kuttykozhaeva Sh.N. **Solvability of one model of homogeneous fluid**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.80–86.

The existence of generalized solutions of boundary-value problems for one system of differential equations governing a flow of two-component fluid is considered.
References — 6.

УДК: 517.977 2000 MSC: 49J20, 49K20

Serovajsky S.Y. **Optimal control for parabolic equations with non-smooth nonlinearity. II**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.87–94.

The optimal control problems for the systems described by the equations of parabolic type with non-smooth nonlinearity are considered. Presence of a non-smooth member interferes with obtaining of conditions of optimality by standard methods. For overcoming available difficulties smooth approximation of the equation is carried out. To get the conditions of optimality the modified variant of the method of penalty is used.
References — 18.

УДК: 517.5 2000 MSC: 42A10

Sikhov M.B. **The approximation of functions of many variables with special majorant in Besov's space**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.95–99.

Approximation of functions of $SB^{\Omega}_{p,\Theta}$ classes by trigonometrical polynomials is carried out.
References — 8.

УДК: 519.245 2000 MSC: 82B80

Shakenov K.K. **The solution of one problem of linear relaxational filtration by Monte Carlo's methods**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 2. P.100–106.

The use of "random walk by spheres"and "random walk on bounds"algorithms of Monte Carlo's methods for solving of a problem of linear relaxational filtration in porous environment is under consideration.

References — 5.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   **Цитированная литература**

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечает требованиям журнала.