ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2011, том 11, № 1 (39)

Институт математики МОН РК

Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 11, № 1 (39), 2011

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Главный редактор:

М.Т.Дженалиев

Заместители главного редактора:

Д.Б.Базарханов, Г.И.Бижанова

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Б.С.Байжанов, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев, В.Г.Воинов,
Н.С.Даирбеков, Н.Т.Данаев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадильдаев,
Т.Ш.Кальменов, А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак,
М.Г.Перетятькин, М.А.Садыбеков, М.И.Тлеубергенов, С.Н.Харин,

Ш.А.Балгимбаева, Г.К.Василина, Ж.К.Джобулаева

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),
8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2011г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 11 **№ 1 (39)** **2011**

CONTENTS

Volume 11 **No. 1 (39)** **2011**

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 5 — 29*

УДК 517.518

О ПОРЯДКАХ M–ЧЛЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
470074, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

Установлены точные оценки наилучшего M – членного приближения класса Бесова в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, имеющих 2π – период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{q},\overline{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна , где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

В случае $q_1 = ... = q_m = \theta_1 = ... = \theta_m = q$ пространство $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(I^m)$ с нормой (см. [2], гл. I, п. 1.1)

$$\|f\|_q = \left[\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}|f(x_1,...,x_m)|^q dx_1...dx_m\right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\int_{I^m}|f(\bar{x})|^q d\bar{x}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

$\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0, \quad j = 1, ..., m.$$

Keywords: *Lorentz space, Nikol'ski–Besov class, M – term approximation*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10
© **Г. Акишев, 2011.**

Функция $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ разлагается в ряд Фурье

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$ и $\mathbb{Z}^m$ – пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами.

Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $s_j = 1, 2, ...,$

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}.$$

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m,} \in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\ldots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

$S^{\bar{r}}_p H$, $S^{\bar{r}}_{p,\theta} B$ – пространства функций с доминирующей смешанной производной соответственно определены С. М. Никольским [3] и Т.И. Амановым [4, гл.I, п.17].

П. И. Лизоркиным и С. М. Никольским [5] исследовано декомпозиционное разложение элементов пространства $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta} B$. Приведем его определение.

Пусть $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $r_j > 0, j = 1, ..., m$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant +\infty$. $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta} B$ – это пространство всех функций $f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ для которых

$$\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta}B} = \left[\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\|\Delta^{\bar{k}}_{\bar{t}} f(\bullet)\|^{\theta}_p \prod_{j=1}^{m}\frac{dt_j}{t_j^{1+\theta r_j}}\right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где $\Delta^{\bar{k}}_{\bar{t}} f(\bar{x}) = \Delta^{k_m}_{t_m}(\ldots\Delta^{k_1}_{t_1} f(\bar{x}))$ — смешанная разность порядка $\bar{k}$ с шагом $\bar{t} = (t_1, ..., t_m)$ и $k_j > r_j$, $j = 1, ..., m$.

В [5] отмечено, что функция $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta} B$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m, \prod_{j=1}^m n_j\neq 0} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}.$$

Также известно, что (см. [5]) $\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta}B}$ является нормой и

$$\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta}B} \asymp \left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_p\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

при $1 < p < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$.

Поэтому в анизотропном пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ рассмотрим аналогичный класс:

$$\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B} = \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} \right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \leqslant 1 \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \leqslant p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, ..., m$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k},\bar{x}\rangle}\}.$$

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \sum_{j=1}^m s_j\gamma_j \geqslant n \right\},$$

$$Y^m_1(\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \sum_{j=1}^l s_j\gamma_j \geqslant n - \sum_{j=l+1}^m s_j\gamma_j, \ \sum_{j=l+1}^m s_j\gamma_j < n \right\},$$

$$Y^m_2(\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : s_1, ..., s_l \geqslant 0, \sum_{j=l+1}^m s_j\gamma_j \geqslant n \right\}.$$

Отметим, что $Y^m(\overline{\gamma}, n) = Y^m_1(\overline{\gamma}, n) \cup Y^m_2(\overline{\gamma}, n)$.

$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\overline{\theta}}$ – наилучшее приближение функции $f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$. $S_n^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x}) = \sum\limits_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i\langle \bar{k},\bar{x}\rangle}$ – частичная сумма ряда Фурье функции f.

Пусть X, Y – нормированные пространства 2π-периодических функций многих переменных. Для функции $f \in X$ наилучшим M-членным приближением называется величина (см. [6-8])

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^j, b_j} \|f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^j,\bar{x}\rangle}\|_X,$$

где $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^M$ – система векторов $\bar{k}^j = (k^j_1, ..., k^j_m)$ с целочисленными координатами, b_j – произвольные коэффициенты.

Если F – некоторый функциональный класс, то положим

$$e_M(F)_X = \sup_{f\in F} e_M(f)_X.$$

В случае $X = L_2$ величина $e_M(f)_{L_2}$ для функции одной переменной впервые была введена С. Б. Стечкиным [6] при формулировке критерия абсолютной сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам. Оценки порядка величины $e_M(F)_X$ исследовали Р.С. Исмагилов [7], В.Е. Майоров [8] при $X = L_p$ (одномерный случай), Э.С. Белинский [9] многомерный случай когда $Y = L_q(I^m), X = L_p(I^m), F = W^r_p$, В.Н. Темляков [10] $Y = L_q(I^m), F = H^r_p$, А.С. Романюк [11], [12], Р. Девор и В.Н. Темляков [13], В.Н. Темляков [14] при $Y = L_q(I^m), F = B^r_{p,\theta}$, Dinh Dung [15]. Отметим, что в случае $X = L_2$ оценка величины $e_M(f)_X$ по ортонормированным системам установил Б.С. Кашин [16]. Точные порядки $e_M(F)_X$ для классов Никольского-Бесова обобщенной гладкости получил Д.Б. Базарханов [17]. Результаты последних лет в этом направлении приведены в [18], [19].

В частности, известна

Теорема 1. *(А.С. Романюк [11]). Пусть* $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $0 < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant r_m$, $1 \leqslant p \leqslant 2 < q < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$. *Тогда*

1) если $r_1 > \frac{1}{p}$, *то* $e_M\left(B^{\overline{r}}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}$;

2) если $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$, *то* $e_M\left(B^{\overline{r}}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-\frac{q}{2}\left(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} (\log M)^{(q-1)(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{q'}{q}\frac{1}{\theta'}\right)_+}$;

3) если $r_1 = \frac{1}{p}$, *то* $e_M\left(B^{\overline{r}}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log^\nu M)^{\frac{1}{\theta'}}$, *где* $a_+ = \max\{a, 0\}, \frac{1}{b}+\frac{1}{b'} = 1$.

Здесь и в дальнейшем $\log M$ – логарифм с основанием 2 от числа $M > 0$.

Цель настоящей статьи изучение порядка наилучшего M-членного приближения класса $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.

Сначала приведем некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Положим

$$Y^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle \geqslant n\}.$$

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 \cdot A(y)$.

Лемма 1. *(см. [20], лемма 2). Пусть даны число* $\alpha \in (0, +\infty)$ *и* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = \left(\gamma'_1, ..., \gamma'_m\right)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$, $1 = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant \gamma_m$, $1 = \gamma'_j = \gamma_j$, $j = 1, ..., \nu$ *и* $1 = \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu+1, ..., m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\left\|\left\{2^{-\alpha\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle}\right\}_{\overline{s}\in Y^m\left(\overline{\gamma}',n\right)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Замечание 1. *В случае* $\theta_1 = ... = \theta_m$ *лемма 1 доказана В.Н. Темляковым [10].*

Пусть Ω_M – множество, содержащее не более чем M векторов $\bar{k} = (k_1, ..., k_m)$ с целочисленными координатами, а $P(\Omega_M, \bar{x})$ – произвольный тригонометрический полином, состоящий из гармоник с "номерами" из Ω_M. Справедлива

Лемма 2. *Пусть* $2 < q_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$. *Тогда для всякого тригонометрического полинома* $P(\Omega_N)$ *и для любого натурального числа* $M < N$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_M)$, *для которого имеет место оценка*

$$\|P(\Omega_N) - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \leqslant C_1 (NM^{-1})^{\frac{1}{2}} \|P(\Omega_N)\|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$.

Доказательство. Пусть $q_0 = \max\{q_1, ..., q_m\}$. Тогда $2 < q_0 < +\infty$ и

$$\|f\|_{\bar{q}} \leqslant C\|f\|_{q_0}$$

для функции $f \in L_{q_0}(I^m)$. Поэтому утверждение леммы 2 следует из леммы 2.3 [19].

Лемма 3. *([21], лемма 3). Пусть* $\alpha > 0, \kappa > 0$, $0 < \theta_j < +\infty, j = 1, ..., m$, $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, ..., \gamma'_m)$, $\bar{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_m)$, $\gamma'_j = \tilde{\gamma}_j = 1, j = 1, ..., \nu$ *и* $\tilde{\gamma}_j < \gamma'_j, j = \nu+1, ..., m$. *Тогда*

$$\left\|\left\{2^{\kappa\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n}\right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leqslant C(m, \alpha, \kappa, \theta) 2^{n\alpha\kappa} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма 4. *([22], лемма 4). Пусть* $\bar{\theta}_\nu = (\theta_1, \theta_2 ..., \theta_\nu)$, $1 \leqslant \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., \nu$, l, γ_j – *положительные числа,* $\mu_1 = l - \sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0 \gamma_j$, $\mu_2 = l + m - \sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0 \gamma_j$, $s_j^0 > 0$,

$$\left\| \{1\}_{\mu_1 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\nu} s_j < \mu_2} \right\|_{l_{\bar{\theta}_\nu}} \leqslant C(m,\theta) l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Доказательство приведено в [22].

Положим $\bar{s}_0 = (s_1, ..., s_\nu, s_{\nu+1}^0, ... s_m^0)$ и $\varkappa_\nu(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s}_0 \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}_0, \bar{\gamma} \rangle < n\}$. Справедливо утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $1 \leqslant q_j^{'} < +\infty$, $1 < \theta_j^{'} < +\infty$, $j = 1, ..., m$ *и* $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $1 = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant \gamma_m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left\| \left\{ \sum_{\bar{k} \in \rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j \right\}_{\bar{s}_0 \in \varkappa_\nu(n, \bar{\gamma})} \right\|_{\bar{q}^{'}, \bar{\theta}^{'}} \leqslant C(q, m, \theta) 2^{\frac{n}{q_1}} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j^{'}}}.$$

Эта лемма в случае $\gamma_1 = ... = \gamma_m = 1$ доказана в [23]. Доказательство проводится аналогично.

Теорема 2. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \leqslant p_j < 2 < q_j$, $j = 1, ..., m$, $1 \leqslant \theta_j, \tau_j < +\infty$, $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = ... = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leqslant ... \leqslant r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$.

Тогда

1) если $r_j > \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., m$, $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j = \nu + 1, ..., m$, *то*

$$e_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\theta}} \asymp M^{-\left(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(\nu - 1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}\right) + \sum\limits_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}\right)_+};$$

2) если $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, \theta_j < \tau_j, j = 1, ..., m$, $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j = \nu + 1, ..., m$, *то*

$$e_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\theta}} \asymp M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{q_1 \left(r_1 - \frac{1}{p_1}\right) \sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j^{'}} + \sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\tau_j^{'}}};$$

3) если $r_j = \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., \mu \geqslant \nu$, *и* $r_j > \frac{1}{p_j}, j = \mu + 1, ..., m$, *то*

$$e_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}} B \right)_{\bar{q}, \bar{\theta}} \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j^{'}}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}} B$. Для произвольного натурального числа M найдется натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu - 1}$. Приближающий полином $P(\Omega_M, \bar{x})$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \overline{\gamma^{'}} \rangle < n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) + \sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma^{'}} \rangle < \alpha n} P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}), \tag{1}$$

где $\bar{\gamma}^{'} = (\gamma_1^{'}, ..., \gamma_m^{'}), \gamma_1^{'} = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu^{'} = \gamma_\nu = 1$, $1 < \gamma_j^{'} < \gamma_j, j = \nu + 1, ..., m$, $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}, j = 1, ..., m.$

Полиномы $P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})$ будут построены для каждого блока $\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})$ согласно лемме 3, а число $\alpha>1$ будет выбрано в процессе построения.

Предположим, что искомый полином построен. Тогда в силу равенства (1) и свойства нормы получим

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*}\leqslant\left\|\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\left(\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})-P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})\right)\right\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*}+\left\|\sum_{\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle\geqslant\alpha n}\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})\right\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*}=$$

$$=C(q)\cdot\{J_1(f)+J_2(f)\}. \qquad (2)$$

Так как полином

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\left(\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})-P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})\right)$$

– непрерывная функция, то он принадлежит пространству $L_{q_0}(I^m)$, $q_0=\max\{q_1,...,q_m\}$, и

$$J_1(f)=\left\|\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\left(\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})-P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})\right)\right\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\left(\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})-P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})\right)\right\|_{\bar{q}_0}. \qquad (3)$$

Оценим $J_2(f)$. Пользуясь теоремой 2 [24], получим

$$J_2(f)\leqslant C(p,q,m)\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}=C(p,q)J_3(f), \qquad (4)$$

где $Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')=\left\{\bar{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}:\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle\geqslant\alpha n\right\}$.

Для оценки $J_3(f)$ рассмотрим различные случаи . Пусть $1\leqslant\tau_j\leqslant\theta_j, j=1,...,m$. Тогда в силу неравенства Йенсена (см. [2], гл. III, п. 3.3.3)

$$\left(\sum_{k}|a_k|^{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta_2}}\leqslant\left(\sum_{k}|a_k|^{\beta_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1}},0<\beta_1\leqslant\beta_2<+\infty. \qquad (5)$$

Учитывая $\gamma_j'\leqslant\gamma_j$, имеем

$$J_3(f)\leqslant C(p,q,m)\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p},\bar{\theta}}^{*}\cdot2^{-\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\cdot2^{-\alpha n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \qquad (6)$$

для любой функции $f\in\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$, $\tau_j\leqslant\theta_j, j=1,...,m$.

Пусть $\theta_j < \tau_j, j = 1, ..., m$. Тогда применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{\tau_j}{\theta_j} > 1$ и лемму 1, будем иметь

$$J_3(f) \leqslant C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j\left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\epsilon}}} \leqslant C(p,q,m,r) 2^{-\alpha n (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\epsilon_j}} \leqslant$$

$$\leqslant C(p,q,m,r) 2^{-\alpha n (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})} \tag{7}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B$, где $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, ..., \epsilon_m)$, $\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}, j = 1, ..., m$.

Из неравенств (4), (6), (7) следует, что

$$J_2(f) \leqslant C(p,q,m) 2^{-\alpha n (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})_+} \tag{8}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B$.

Теперь оценим $J_1(f)$. По условию теоремы $q_j \in (2, +\infty), j = 1, ..., m$. Поэтому $q_0 \in (2, +\infty)$. Следовательно, по теореме Литтлвуда-Пэли (см. [2], гл. I, п. 1.5.2) оценку (3) продолжим в следующем виде:

$$J_1(f) \leqslant \left(\sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} \left\| \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}) \right\|_{q_0}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Далее, пользуясь леммой 3 и неравенством разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [25, 26]), из (9) при $1 < p_j < 2,\ j = 1, ..., m,$ получим

$$J_1(f) \leqslant \left(\sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(p,m) \left(\sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left(\left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Теперь отдельно рассмотрим случаи $r_j > \frac{1}{p_j}$ и $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j},\ \ j = 1, ..., m$.

Пусть $r_j > \frac{1}{p_j}$. Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^{n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)} \cdot \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j (r_j - \frac{1}{p_j})} \right] + 1,$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Так как по условию теоремы $(r_1-\frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j}<(r_j-\frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j=\nu+1,...,m$, то $1<\gamma_j^{'}<\gamma_j<\tilde{\gamma}_j=\left(r_j-\frac{1}{p_j}\right)\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}, j=\nu+1,...,m$. Поэтому в силу леммы B [10]

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}N_{\bar{s}}\leqslant n^m+2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)}\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})}=$$

$$=n^m+2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)}\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\prod_{j=1}^{m}2^{-\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}(r_1-\frac{1}{p_1})}\leqslant$$

$$\leqslant C(m,p,r)(n^m+2^n n^{\nu-1})\leqslant C(p,r,m)2^n n^{\nu-1}\asymp M.$$

Пусть $2<\tau_j<+\infty, j=1,...,m.$ Тогда применяя неравенство Гельдера с показателем $\beta_j=\frac{\tau_j}{2}>1$ и пользуясь леммой 1, имеем

$$\left(\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}N_{\bar{s}}^{-1}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)\frac{1}{2}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')}\right\|_{l_{\bar{\beta}'}}^{\frac{1}{2}}\leqslant C(p,q,m,r,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}\qquad(11)$$

для любой функции $f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B$, где $\bar{\beta}'=(\beta_1^{'},...,\beta_m^{'})$, $\beta_j^{'}=\frac{\tau_j}{\tau_j-2}, j=1,...,m,$ при $1<p_j<2, j=1,...,m$. Поэтому из неравенств (10), (11) следует, что

$$J_1(f)\leqslant C(p,q,m,r,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}\qquad(12)$$

для любой функции $f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B$, $r_j>\frac{1}{p_j},\tau_j>2,$ при $1<p_j<2, j=1,...,m$.

Рассмотрим случай $1<\tau_j\leqslant 2, r_j>\frac{1}{p_j}$. Через e_j обозначим множество всех $s_j\in\mathbb{Z}_+$, для которых $(s_1,...,s_j,...,s_m)\in Y^m(n,\alpha n,\bar{\gamma}')$ при всех фиксированных $s_k, k\neq j$.

Положим

$$N_{\bar{s}}=\left[2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)}n^{\nu-1}\cdot\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})}\left(2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right)^{\tau_1}\prod_{j=1}^{m-1}G_k^{\tau_{k+1}-\tau_k}(f,n)_{\bar{\tau}_k}\right]+1,$$

где $\bar{s}_k=(s_1,...,s_k),\bar{\tau}_k=(\tau_1,...,\tau_k)$,

$$G_k(f,n)_{\bar{\tau}_k}=\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}_k\in P_k}\right\|_{\bar{\tau}_k},$$

$P_k = e_1 \times ... \times e_k$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $\beta_j = \frac{\tau_j}{2-\tau_j}, \beta_j' = \frac{\tau_j}{2\tau_j - 2}$, из (10) при $1 < p_j < 2$, $j = 1, ..., m$, получим

$$J_1(f) \leqslant C(p,q,m,r) \left(\sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C(p,q,m,r) \left(2^{n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)} n^{\nu - 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} ... \sum_{s_1=1}^{\infty} \chi_Y(\bar{s}) \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p_j})} \left(2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right)^{2-\tau_1} \prod_{j=1}^{m-1} G_k^{\tau_k - \tau_{k+1}}(f,n)_{\bar{\tau}_k} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(p,q,m,r) \left(2^{n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)} n^{\nu - 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}^{\frac{2-\tau_m}{2}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \chi_Y(\bar{s}) \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\beta}'}}^{\frac{1}{2}}, \qquad (13)$$

где χ_Y – характеристическая функция множества $Y = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n\}$.

Так как $\gamma_j' < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j = \left(r_j - \frac{1}{p_j} \right) \left(r_1 - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}$, $j = \nu + 1, ..., m, r_j > \frac{1}{p_j}$, то в силу леммы 1 имеем

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p_j})} \right\}_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\bar{\beta}'}} \leqslant C(p,q,m,r) 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} 2(1 - \frac{1}{\tau_j})}.$$

Поэтому из оценки (13) следует, что

$$J_1(f) \leqslant C(p,q,m,r) 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})} \qquad (14)$$

при $r_j > \frac{1}{p_j}$, $1 < \tau_j \leqslant 2$, $j = 1, ..., m$, для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B$, $1 < p_j < 2$, $j = 1, ..., m$.

Оценим $J_2(f)$. Положим

$$\alpha = \left((r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}) - \frac{\ln n}{n} \left(\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}) - \sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}) \right) \right) \left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} = 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}) - \sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}.$$

Так как $\theta_j \leqslant \tau_j$, то $\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j} \geqslant 0$ (т. е. $\left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j} \right)_+ = \frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}$). Поэтому из (8) следует

$$J_2(f) \leqslant C(p,q,m,r,\tau) 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})}. \qquad (15)$$

Следовательно, в силу (14) и (15) из (2) получим

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \leqslant C(q,r,m,p,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{16}$$

для любой функции $f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B$, $r_j>\frac{1}{p_j}$, $1\leqslant\tau_j\leqslant 2$, $j=1,...,m$.

Если $2<\tau_j<+\infty$, $j=1,...,m$, то из оценок (2), (14), (15) следует

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \leqslant C(q,r,m,p,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{17}$$

для любой функции $f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B$, $r_j>\frac{1}{p_j}$, $j=1,...,m$. Этим пункт 1) доказан при $1<p_j<2$, $j=1,...,m$.

Теперь рассмотрим случай $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}, j=1,...,m$. Пусть $\theta_j<\tau_j, j=1,...,m$. Тогда $\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}>0$, $j=1,...,m$. Поэтому оценка (8) имеет вид

$$J_2(f)\leqslant C(p,q,m,r,\tau)2^{-\alpha n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})_+}=$$

$$=C(p,q,m,r,\tau)2^{-\alpha n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{19}$$

в случае $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $\theta_j<\tau_j$, $j=1,...,m$.

Положим

$$\alpha=\frac{q_1}{2}-q_1\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})\frac{\log n}{n}.$$

Тогда $\alpha n=\frac{q_1}{2}n-q_1\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})\log n$. Следовательно,

$$2^{-\alpha n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}=\left(2^{-\frac{q_1}{2}n+q_1\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})\log n}\right)^{r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}=$$

$$=\left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{q_1(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})-q_1(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Справедливы следующие равенства

$$q_1(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})-q_1(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}+\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})=$$

$$=q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}.$$

Тогда

$$2^{-\alpha n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}=\left(2^{-\frac{q_1}{2}n+q_1\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})\log n}\right)^{r_1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}=$$

$$=\left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}.$$

Поэтому из неравенства (19), учитывая $2^n n^{\nu-1} \asymp M$, получим

$$J_2(f) \leqslant C\left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})} n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}} \asymp$$

$$\asymp M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}} \qquad (20)$$

в случае $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}, \quad q_j<\theta_j, \quad j=1,...,m.$

Оценим $J_1(f)$ в случае $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $\theta_j<\tau_j$, $j=1,...,m$. Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^n 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle} 2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)}\right]+1,$$

где координаты вектора $\bar{\tilde{\gamma}}=(\tilde{\gamma}_1,...,\tilde{\gamma}_m)$ удовлетворяют соотношениям $\gamma_1'=\tilde{\gamma}_1=...=\gamma_\nu'=\tilde{\gamma}_\nu$, $1<\tilde{\gamma}_j<\gamma_j'$, $j=\nu+1,...,m$.

Тогда в силу леммы Г в [10] справедлива оценка

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} N_{\bar{s}} \leqslant n^{m-1}+\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^n 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle} 2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)} \leqslant$$

$$\leqslant n^{m-1}+C(r,m,p)2^n 2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)} 2^{\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)} n^{\nu-1} =$$

$$= n^{m-1}+C(r,m,p)2^n n^{\nu-1} \leqslant C(p,r,m)M.$$

Теперь подставив значения чисел $N_{\bar{s}}$ и пользуясь неравенством Гельдера и леммой 3 из (10), получим

$$J_1(f) \leqslant C(p,q,m,r,\theta)\times$$

$$\times\left\{2^{-n}2^{\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)}\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (21)$$

Если $(\frac{1}{p_j}-r_j)\frac{1}{q_1}<(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{1}{q_j}$, $j=\nu+1,...,m$, то

$$\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_1}-r_1} < \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_j}} = \gamma_j.$$

Поэтому выберем числа γ_j' и $\tilde{\gamma}_j$ так, чтобы $\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_1}-r_1}<\tilde{\gamma}_j<\gamma_j'<\gamma_j$, $j=\nu+1,...,m$. Тогда

$$2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}} \leqslant 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j 2r_j}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\left(\prod_{j=1}^{m}2^{s_j r_j}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right)^2. \qquad (22)$$

Если $2 < \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, то применяя неравенство Гельдера $(\beta_j = \frac{\tau_j}{2}, \beta'_j = \frac{\tau_j}{\tau_j - 2})$ к сумме в правой части (22), будем иметь

$$\sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} 2^{-(\frac{1}{p_1} - r_1)\langle \bar{s}, \bar{\bar{\gamma}} \rangle} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|^2_{l_{\bar{\tau}}} \left\| \left\{ 2^{(\frac{1}{p_1} - r_1)\langle \bar{s}, \bar{\bar{\gamma}} \rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\bar{\beta}'}}.$$

По лемме 3 при $\theta_j = \beta'_j$, $j = 1, ..., m$, из предыдущего неравенства получим

$$\sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} 2^{-(\frac{1}{p_1} - r_1)\langle \bar{s}, \bar{\bar{\gamma}} \rangle} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C(p, q, r, m) 2^{n\alpha(\frac{1}{p_1} - r_1)} n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\beta'_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|^2_{l_{\bar{\tau}}} \leqslant$$

$$\leqslant C(p, q, r, m) 2^{n\alpha(\frac{1}{p_1} - r_1)} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (1 - \frac{2}{\tau_j})}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}} B$, $2 < \theta_j < +\infty$. Поэтому из (21) получим

$$J_1(f) \leqslant C(p, q, m, r, \theta) \left(2^{-n} 2^{\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^{n\alpha(\frac{1}{p_1} - r_1)} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (1 - \frac{2}{\tau_j})} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C(p, q, m, r, \theta) 2^{\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)} 2^{-\frac{n}{2}} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})} \tag{23}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}} B$, $2 < \tau_j < +\infty$, $\theta_j < \tau_j$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., m$, $(\frac{1}{p_j} - r_j)\frac{1}{q_1} < (\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{1}{q_j}$, $j = \nu + 1, ..., m$.

В оценке $J_2(f)$ число α выбрано в виде:

$$\alpha = \frac{q_1}{2} - q_1 \sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}) \frac{\log n}{n}.$$

Тогда

$$2^{\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)} = 2^{n(\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{q_1}{2}} n^{-q_1(\frac{1}{p_1} - r_1) \sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})}.$$

Поэтому из (23) получим

$$J_1(f) \leqslant C(p, q, m, r, \tau) 2^{n(\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{q_1}{2}} n^{q_1(r_1 - \frac{1}{p_1}) \sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} 2^{-\frac{n}{2}} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})} =$$

$$= 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})\frac{q_1}{2}} n^{-\frac{q_1}{2}(\nu - 1)(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\frac{q_1}{2}(\nu - 1)(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \times$$

$$\times n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Далее, простыми вычислениями можно убедиться, что

$$\frac{q_1}{2}(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})+q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})=$$

$$=q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}.$$

Следовательно,

$$J_1(f)\leqslant C\left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})} n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}} \asymp$$

$$\asymp M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}} \tag{24}$$

для любой функции $f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B$, $2<\tau_j<+\infty$, $\theta_j<\tau_j$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $q_j<\theta_j$, $j=1,...,m$, $(\frac{1}{p_j}-r_j)\frac{1}{q_1}<(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{1}{q_j}$, $j=\nu+1,...,m$.

В силу неравенств (20) и (24) из (2) получим

$$\|f-P(\Omega_M)\|^*_{\bar q,\bar\theta}\leqslant C(p,q,m,r)M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}$$

для любой функции $f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B$, $2<\tau_j<+\infty$, $\theta_j<\tau_j$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $j=1,...,m$, $(\frac{1}{p_j}-r_j)\frac{1}{q_1}<(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{1}{q_j}$, $j=\nu+1,...,m$. Следовательно,

$$e_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B\right)_{\bar q,\bar\theta}\leqslant C(p,q,m,r)M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}},$$

если $2<\tau_j<+\infty$, $\theta_j<\tau_j$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $j=1,...,m$, $(\frac{1}{p_j}-r_j)\frac{1}{q_1}<(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{1}{q_j}$, $j=\nu+1,...,m$.

Этим оценка сверху во втором пункте доказана.

Пусть $r_j=\frac{1}{p_j}$, $j=1,...,\mu\geqslant\nu$, и $r_j>\frac{1}{p_j}$ для $j=\mu+1,...,m$, $f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B$. Для произвольного натурального числа M найдется натуральное число n такое, что $M\asymp 2^n n^{\mu-1}$, $\mu\geqslant\nu$. Приближающий полином $P(\Omega_M,\bar x)$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M,\bar x)=\sum_{\langle\bar s,\overline{\gamma'}\rangle<n}\delta_{\bar s}(f,\bar x)+\sum_{n\leqslant\langle\bar s,\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}P(\Omega_{N_{\bar s}},\bar x), \tag{25}$$

где $\bar\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_m)$, $\bar\gamma'=(\gamma_1',...,\gamma_m')$, $\gamma_j=\left(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}\right)\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $j=1,...,m$, $\gamma_1'=\gamma_1=...=\gamma_\nu'=\gamma_\nu=1<\gamma_j'<\gamma_j$, $j=\nu+1,...,m$.

Положим

$$N_{\bar s}=[2^n n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j}-1}\cdot\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar p,\bar\theta}\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}]+1,$$

где $[a]$ – целая часть числа a,

$$\alpha = \frac{q_1}{2}\left(1 + \frac{\mu-1}{n}\log n\right).$$

Тогда применяя неравенство Гельдера с показателем $\tau_j > 1,\ j = 1, ..., m,$ получим

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n} N_{\bar{s}} \leqslant n^m + 2^n n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j}-1} \sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \leqslant \tag{26}$$

$$\leqslant n^m + 2^n n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j}-1} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)} \chi_{\sigma_n^m}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s}\in\sigma_n^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}'}},$$

где $\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j'} = 1$, $\chi_{\sigma_n^m}$ – характеристическая функция множества $\sigma_n^m = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m} : n \leqslant \langle\bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle < \alpha n\}$.

Оценим

$$I_n^m = \left\| \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)} \chi_{\sigma_n^m}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s}\in\sigma_n^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}'}}.$$

Учитывая неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\theta-1} \leqslant C(\theta) n^{\theta},\ \ \theta > 0,$$

и то, что $r_j > \frac{1}{p_j}$ для $j = \mu+1, ..., m,$ будем иметь

$$I_n^m \leqslant \left\{ \sum_{s_m<\frac{\alpha n}{\gamma_m}} \left[\sum_{s_{m-1}<\frac{(\alpha n - s_m\gamma_m)}{\gamma_{m-1}}} \cdots \left[\sum_{s_1<\alpha n-\sum\limits_{j=2}^{m} s_j\gamma_j} \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)\tau_1'} \right]^{\frac{\tau_2'}{\tau_1'}} \cdots \right]^{\frac{\tau_m'}{\tau_{m-1}'}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m'}} \leqslant \tag{27}$$

$$\leqslant C(\gamma,\tau)(\alpha n)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j'}}.$$

Из неравенств (26), (27) следует

$$\sum_{n\leqslant\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<\alpha n} N_{\bar{s}} \leqslant n^m + 2^n n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j}-1} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \times$$

$$\times C(\theta,m)\,(\alpha n)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j'}} \leqslant C(\theta,m)\left\{n^m + 2^n n^{\mu-1}\right\} \leqslant C(\theta,m) 2^n n^{\mu-1} \asymp M,$$

так как натуральное число n выбрано так, что $2^n n^{\mu-1} \asymp M$.

Далее, подставляя значения $N_{\bar{s}}$ и учитывая $r_j = \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., \mu$ (см. (10)), получим

$$J_1(f) \leqslant C(q,p,m) \left\{ \sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left(\| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(q,p,m,r) \left\{ \sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{-n} n^{1 - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \prod_{j=1}^{m} 2^{-\frac{s_j}{p_j}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(q,p,m,r) \left\{ \sum_{n \leqslant \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j (\frac{1}{p_j} - r_j)} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(2^{-n} n^{1 - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь применяя неравенство Гельдера $(\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_j'} = 1)$ к сумме в правой части и пользуясь оценкой (27), будем иметь

$$J_1(f) \leqslant C(q,p,m) \left(2^{-n} n^{1 - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}^{\frac{1}{2}} \left\| \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j (\frac{1}{p_j} - r_j)} \chi_{\sigma_n^m}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \sigma_n^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}'}}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(q,p,m) \left(2^{-n} n^{1 - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^{\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C(p,q,m,r) 2^{\frac{-n}{2}} n^{\frac{\mu+1}{2} - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$J_1(f) \leqslant C(p,q,m,r) 2^{\frac{-n}{2}} n^{\frac{\mu+1}{2} - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \tag{28}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B$ в случае $r_j = \frac{1}{p_j}$ для $j = 1, ..., \mu$ и $r_j > \frac{1}{p_j}$ для $j = \mu+1, ..., m$, $2 < q_j < \theta_j$, $j = 1, ..., m$.

В силу неравенств (8), (28), учитывая условие $\nu \leqslant \mu$, из (2) получим

$$\| f - P(\Omega_M) \|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \leqslant C(p,q,m,r) \left\{ 2^{-\alpha n (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\mu} (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j})} + 2^{\frac{-n}{2}} n^{\frac{\mu+1}{2} - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \right\}.$$

Так как $n\alpha = \frac{q_1}{2} \log(2^n n^{\mu-1})$, $r_1 = \frac{1}{p_1}$, $2 < q_j < \tau_j$, $j = 1, ..., m$, то отсюда следует оценка:

$$\| f - P(\Omega_M) \|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \leqslant C(p,q,m,r) \left\{ (2^n n^{\mu-1})^{-\frac{1}{2}} n^{\sum_{j=2}^{\mu} (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j})} + 2^{\frac{-n}{2}} n^{\frac{\mu+1}{2} - \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C(p,q,m,r)(2^n n^{\mu-1})^{-\frac{1}{2}} n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j'}} \asymp M^{-\frac{1}{2}}(\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j'}}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ в случае $r_j = \frac{1}{p_j}$ для $j=1,...,\mu$ и $r_j > \frac{1}{p_j}$ для $j=\mu+1,...,m$, $2 < q_j < \tau_j$, $j=1,...,m$.

Следовательно,

$$e_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B\right)_{\overline{q},\overline{\theta}} \leqslant C(p,q,m,r)M^{-\frac{1}{2}}(\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j'}}.$$

Этим оценка сверху в пункте 3) доказана .

Докажем оценки снизу. Для этого будем пользоваться двойственным соотношением, которое следует из более общего результата С. М. Никольского (см. [27]). Согласно этому соотношению для любой функции $f \in L_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ имеет место равенство

$$e_M(f)_{\bar{q},\bar{\theta}} = \inf_{\Omega_M}\sup_{P\in L^{\perp}}\left|\int_{I^m} f(\bar{x})P(\bar{x})d\bar{x}\right|. \tag{29}$$

По заданному числу M выберем l из равенства

$$l = \frac{q_1}{2}\log M - (q_1\sum_{j=2}^{\mu}\frac{1}{\theta_j'})\log\log M.$$

Положим $\bar{s}_\mu = (s_1,...,s_\mu,1,...,1)$. Рассмотрим функцию

$$g_1(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s_\mu},\bar{\gamma}\rangle < l}\prod_{j=1}^{m}\sum_{k_j\in\rho^+(s_j)} k_j^{-1}\cos k_jx_j,$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1,...,\gamma_m)$, $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $\rho^+(s_j) = \{k_j \in N: \quad 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}\}$, $j=1,...,m$. Введем обозначения:

$$\delta^+_{\bar{s}}(g_1,\bar{x}) = \prod_{j=1}^{m}\sum_{k_j\in\rho^+(s_j)} k_j^{-1}\cos k_jx_j,$$

$$d_{\bar{s}_\mu}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho^+(\bar{s}_\mu)}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j.$$

В одномерном случае для ядра Дирихле $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ справедливо соотношение

$$\|D_n\|^*_{p,\theta} \asymp n^{1-\frac{1}{p}}, \;\; 1 < p < +\infty, \;\; 1 < \theta < +\infty.$$

Используя это неравенство и преобразование Абеля, нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\|\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} k^{-1}\cos kx\|^*_{p,\theta} \asymp 2^{-s\frac{1}{p}}, \;\; 1 < p < +\infty, \;\; 1 < \theta < +\infty.$$

Поэтому

$$\|\delta^+_{\bar{s}_\mu}(g_1)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leqslant C\prod_{j=1}^{\mu}2^{-s_j}\|d_{\bar{s}}\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \asymp \prod_{j=1}^{\mu}2^{-\frac{s_j}{p_j}}, \tag{30}$$

при $1 < p_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Следовательно, учитывая, что $r_j = \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., \mu$, и неравенство (27), будем иметь

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(g_1) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s_\mu}, \bar{r} \rangle} \left\| \delta^+_{\bar{s}}(g_1) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \right\}_{\langle \bar{s_\mu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leqslant$$

$$\leqslant C(p, q, m, r) \left\| \left\{ \chi_{\sigma_l}(\bar{s}_\mu) \right\}_{\bar{s}_\mu \in \sigma_l} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leqslant C(p, m, \theta) l^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}},$$

где χ_{σ_l} – характеристическая функция множества $\sigma_l = \{ \bar{s}_\mu \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \overline{s_\mu}, \overline{\gamma} \rangle < l \}$, $\quad 1 \leqslant \tau_j < +\infty$. Поэтому функция

$$f_1(\bar{x}) = C_1 l^{-\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} g_1(\bar{x})$$

принадлежит классу $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}} B$.

Теперь построим функцию $P_1(\bar{x})$, которая удовлетворяла бы требованиям к $P(\bar{x})$ из (29). Пусть

$$v_1(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s_\mu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j \tag{31}$$

и Ω_M – произвольный набор из M векторов $\bar{k} = (k_1, ..., k_m)$ с целочисленными координатами. Обозначим через

$$u_1(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\Omega_M}^{*} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j$$

функцию, содержащую только те слагаемые из (31), которые имеют "номера" из множества Ω_M. Положим $w_1(\bar{x}) = v_1(\bar{x}) - u_1(\bar{x})$. Тогда в силу того, что $1 < q_j^{'} = \frac{q_j}{q_j - 1} < 2$ и равенства Парсеваля будем иметь

$$\|w_1\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'} \leqslant \|v_1\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'} + \|u_1\|_2 \leqslant \|v_1\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'} + M^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Далее, пользуясь леммой 5, получим

$$\|v_1\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'} \leqslant C(q, r, m) 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\mu} \frac{1}{\theta_j^{'}}},$$

где $\beta^{'} = \frac{\beta}{\beta - 1}$. Поэтому из (32), учитывая определение числа l, получим

$$\|w_1\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'} \leqslant C(q, m) 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\mu} \frac{1}{\theta_j^{'}}} + M^{\frac{1}{2}} \leqslant C(q, m) 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\mu} \frac{1}{\theta_j^{'}}}.$$

Следовательно, функция $P_1(\bar{x}) = C_2 2^{-\frac{l}{q_1}} l^{-\sum_{j=2}^{\mu} \frac{1}{\theta_j^{'}}} w_1(\bar{x})$ удовлетворяет условиям формулы (29). Подставив $f_1(\bar{x})$ и $P_1(\bar{x})$ в (29), будем иметь

$$e_M(f_1)_{\bar{q},\bar{\theta}} \geqslant C(q, m, r) \left(\sum_{l_1 \leqslant \langle \overline{s_\mu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \right) 2^{-\frac{l}{\beta}} l^{-\sum_{j=2}^{\mu} \frac{1}{\theta_j^{'}}} l^{-\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}}, \tag{33}$$

где l_1 – число удовлетворяющее условию $2^{l_1} l^{\mu-1} \asymp M$. Так как

$$\sum_{l_1 \leqslant \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \geqslant C(m,r) l_1^{\mu},$$

то из (33) получим

$$e_M(f_1)_{\bar{q},\bar{\theta}} \geqslant C(q,m,r) 2^{-\frac{l}{\beta}} l^{-\sum_{j=2}^{\mu} \frac{1}{\theta_j'}} l^{-\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} (l_1 - \sum_{j=\mu+1}^{m} \gamma_j)^{\mu-1} \geqslant$$

$$\geqslant C(q,m,r) M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j'}}$$

для $l_1 \geqslant 2 \sum\limits_{j=\mu+1}^{m} \gamma_j$. Следовательно,

$$e_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B \right)_{\bar{q}} \geqslant C(p,q,r,m) M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j'}}$$

при $r_j = \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., \mu$, и $r_j > \frac{1}{p_j}$, $j = \mu+1, ..., m$.

Докажем оценку снизу в случае $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., m$. Положим

$$l = \frac{q_1}{2} \log M - \left(q_1 \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j'} \right) \log\log M.$$

Введем следующие обозначения:

$$\varkappa(l,\gamma) = \left\{ \bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : l \leqslant \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l + m \right\},$$

$$\varkappa_\nu(l,\gamma) = \left\{ \bar{s}_\nu = (s_1, ..., s_\nu) : l - \sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0 \gamma_j \leqslant \langle \bar{s}_\nu, \bar{\gamma}_\nu \rangle < l + m - \sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0 \gamma_j \right\},$$

где $\bar{\gamma}_\nu = (\gamma_1, ..., \gamma_\nu)$, $\bar{s}_0 = (s_1, ..., s_\nu, s_{\nu+1}^0, ..., s_m^0) \in \varkappa(l,\gamma)$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(\bar{x}) = l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\tau_j}} \sum_{\bar{s}_0 \in \varkappa(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(1-\frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} \cos k_j x_j =$$

$$= l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\tau_j}} g_l(\bar{x}).$$

Пользуясь преобразованием Абеля и оценкой нормы ядра Дирихле, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\| \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-r_j} \cos k_j x_j \|_{p_j,\theta_j}^* \leqslant C 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{p_j} - 1)}, \ \ 1 < p_j, \theta_j < +\infty, \ j = 1, ..., m. \quad (34)$$

Поэтому

$$\|\delta_{\bar{s}}^+(g_1)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^* = \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})} \prod_{j=1}^{m} \| \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-r_j} \cos k_j x_j \|_{p_j,\theta_j} \leqslant C \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j}.$$

Следовательно, применяя лемму 4, будем иметь

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\bar{s}}\left(g_1\right)\right\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}=\left\|\left\{2^{\langle\bar{s_\nu},\bar{r}\rangle}\left\|\delta_{\bar{s}}^{+}\left(g_1\right)\right\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\langle\bar{s_\nu},\bar{\gamma}\rangle<l}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\leqslant$$

$$\leqslant C(p,q,m,r)\left\|\left\{\chi_{\sigma_l}(\bar{s})\right\}_{\bar{s}_\nu\in\sigma_l}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\leqslant C(p,m,\theta)l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}},$$

где χ_{σ_l} – характеристическая функция множества $\sigma_l=\{\bar{s}\in\mathbb{Z}_{+}^{m}:\langle\overline{s_\nu},\bar{\gamma}\rangle<l\}$, $\quad 1\leqslant\tau_j<+\infty$.

Значит, функция $C_2f_2\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B$, где C_2 – некоторая положительная постоянная. В формуле (29) в качестве функции $P(\bar{x})$ возьмем

$$P_3(\bar{x})=2^{-\frac{l}{q_1}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}w_2(\bar{x}),$$

где $w_2(\bar{x})=v_2(\bar{x})-u_2(\bar{x})$,

$$v_2(\bar{x})=\sum_{\bar{s}_0\in\varkappa(l,\gamma)}\sum_{\bar{k}\in\rho^{+}(\bar{s}_0)}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j,$$

$$u_2(\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in\Omega}^{*}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j.$$

Как в (32) доказывается неравенство

$$\|w_2\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}\leqslant\|v_2\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}+M^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

В силу леммы 5 имеем

$$\|v_2\|_{\bar{q}',\bar{\theta}}^{*}\leqslant\|\sum_{\langle\bar{s}_0,\bar{\gamma}\rangle<l+m}\sum_{\bar{k}\in\rho^{+}(\bar{s}_0)}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}+$$

$$+\|\sum_{\langle\bar{s}_0,\bar{\gamma}\rangle<l}\sum_{\bar{k}\in\rho^{+}(\bar{s}_0)}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}\leqslant C(q,m)2^{\frac{l}{q_1}}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}.$$

Следовательно (см. (35)),

$$\|w_2\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}\leqslant C(q,m)2^{\frac{l}{q_1}}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}+M^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

По определению числа l имеем

$$l=\log\frac{M^{\frac{q_1}{2}}}{(\log M)^{q_1\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}}\quad\Leftrightarrow\quad 2^l=\frac{M^{\frac{q_1}{2}}}{(\log M)^{q_1\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}}.$$

С другой стороны,

$$l=\left(\frac{q_1}{2}-\left(q_1\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}\right)\frac{\log\log M}{\log M}\right)\log M.$$

Так как
$$\lim_{M\to+\infty}\frac{\log\log M}{\log M}=0,$$
то $\forall\varepsilon>0\ \ \exists M_\varepsilon>0$ такое, что
$$0<\frac{\log\log M}{\log M}<\varepsilon,\quad \forall M>M_\varepsilon.$$
Выберем $\varepsilon=\frac{1}{2q_1\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}$. Тогда
$$l>\left(\frac{q_1}{2}-\frac{1}{2}\right)\log M\quad\Leftrightarrow\quad \log M<\frac{2}{q_1-1}l.$$
Поэтому
$$2^{\frac{l}{q_1}}>\frac{M^{\frac12}}{(\frac{2}{q_1-1}l)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}}\quad\Leftrightarrow\quad 2^{\frac{l}{q_1}}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}>\frac{q_1-1}{2}M^{\frac12}.$$
Следовательно, из (36) получим
$$\|w_2\|^*_{\bar q',\bar\theta'}\leqslant C_2(q,m)2^{\frac{l}{q_1}}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}.$$
Поэтому $C_2^{-1}\|P_3\|^*_{\bar q',\bar\theta'}\leqslant 1$. Так как $w_2(\bar x)$ не содержит слагаемые с номерами из множества Ω_M, то функция $C_2^{-1}P_3(\bar x)$ будет ортогональной множеству $T(\Omega_M)$.

Таким образом, функция $C_2^{-1}P_3(\bar x)$ удовлетворяет условиям формулы (29). Поэтому согласно этой формуле имеем
$$e_M(f_2)_{\bar q,\bar\theta}\geqslant C_2^{-1}|\int_{I^m}f_2(\bar x)P_3(\bar x)d\bar x|=$$
$$=C_2^{-1}2^{-\frac{l}{q_1}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}}\sum_{\bar s_0\in\varkappa(l,\gamma)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(1-\frac{1}{p_j})}\sum_{\bar k\in\rho^+(\bar s_0)}\prod_{j=1}^{m}k_j^{-r_j}\geqslant$$
$$\geqslant C2^{-\frac{l}{q_1}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}}\sum_{\bar s_0\in\varkappa(l,\gamma)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})}=$$
$$=C2^{-\frac{l}{q_1}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}}\prod_{j=\nu+1}^{m}2^{s_j^0(\frac{1}{p_j}-r_j)}\sum_{\bar s_\nu\in\varkappa_\nu(l,\gamma)}\prod_{j=1}^{\nu}2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)}.\tag{37}$$
Положим $\mu_1=l-\sum\limits_{j=\nu+1}^{m}s_j^0\gamma_j$ и $\mu_2=l+m-\sum\limits_{j=\nu+1}^{m}s_j^0\gamma_j$. Тогда
$$\sum_{\bar s_\nu\in\varkappa_\nu(l,\gamma)}1=\sum_{\mu_1\leqslant\langle\bar s_\nu,\bar 1\rangle<\mu_2}1=$$
$$=\sum_{s_\nu=1}^{\mu_1}\sum_{s_{\nu-1}=1}^{\mu_1-s_\nu}\dots\sum_{s_1=\mu_1-\sum\limits_{j=2}^{\nu}s_j}^{\mu_2-\sum\limits_{j=2}^{\nu}s_j}1=$$

$$= \sum_{s_\nu=1}^{\mu_1} \sum_{s_{\nu-1}=1}^{\mu_1-s_\nu} \dots \sum_{s_2=1}^{\mu_1-\sum\limits_{j=3}^{\nu} s_j} (\mu_2-\mu_1+1) \geqslant C\left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1}. \tag{38}$$

Если
$$\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_1}-r_1} = \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_j}} = \gamma_j \quad j=1,...,\nu,$$
то
$$\sum_{j=1}^{\nu} s_j(\frac{1}{p_j}-r_j) = (\frac{1}{p_1}-r_1)\sum_{j=1}^{\nu} s_j\gamma_j.$$

Поэтому учитывая (38), получим

$$\sum_{\bar s_\nu\in\varkappa_\nu(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{\nu} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)} = \sum_{\bar s_\nu\in\varkappa_\nu(l,\gamma)} 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar s_\nu,\bar\gamma_\nu\rangle} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\mu_1} \sum_{\mu_1\leqslant\langle\bar s_\nu,\bar 1\rangle<\mu_2} \geqslant C2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\mu_1}\left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1}.$$

Теперь из (37) получим

$$e_M(f_2)_{\bar q,\bar\theta} \geqslant C2^{-\frac{l}{q_1}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \prod_{j=\nu+1}^{m} 2^{s_j^0(\frac{1}{p_j}-r_j)} \times$$

$$\times 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\mu_1}\left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1}.$$

В этом неравенстве полагая $s_{\nu+1}^0=...=s_m^0=1$, получим

$$e_M(f_2)_{\bar q,\bar\theta} \geqslant C2^{-l(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}}\left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m}\gamma_j\right)^{\nu-1} \geqslant$$

$$\geqslant C2^{-l(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{39}$$

для $l>2\sum\limits_{j=\nu+1}^{m}\gamma_j$. Теперь учитывая выбор числа l, из (39) получим

$$e_M\left(B_{\bar p,\bar\theta}^{\bar r}\right)_{\bar q,\bar\theta} \geqslant C(p,q,m,r)M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}.$$

Этим оценка снизу в случае $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}$, $j=1,...,m$ доказана.

Теперь докажем оценку снизу в случае $r_j>\frac{1}{p_j}$, $j=1,...,m$. Введем следующие обозначения:

$$\varkappa(l,\gamma)=\left\{\bar s=(s_1,...,s_m)\in\mathbb{Z}_+^m : l\leqslant\langle\bar s,\bar\gamma\rangle<l+m\right\},$$

$$\varkappa_\nu(l,\gamma)=\left\{\bar s_\nu=(s_1,...,s_\nu) : l-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\leqslant\langle\bar s_\nu,\bar\gamma_\nu\rangle<l+m-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right\},$$

где $\bar{\gamma}_\nu = (\gamma_1, ..., \gamma_\nu)$, $\bar{s}_0 = (s_1, ..., s_\nu, s^0_{\nu+1}, ..., s^0_m) \in \varkappa(l, \gamma)$.

Рассмотрим функцию

$$f_3(\bar{x}) = l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \sum_{\bar{s}_0 \in \varkappa(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(1-\frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} \cos k_j x_j = l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} g_l(\bar{x}).$$

Пользуясь неравенством (34), получим

$$\|\delta^+_{\bar{s}}(g_1)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} = \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})} \prod_{j=1}^{m} \| \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-r_j} \cos k_j x_j \|_{p_j,\theta_j} \leqslant C \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j}.$$

Следовательно, применяя лемму 4, будем иметь

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(g_1) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s_\nu}, \bar{r} \rangle} \left\| \delta^+_{\bar{s}}(g_1) \right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \right\}_{\langle \bar{s_\nu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leqslant$$

$$\leqslant C(p,q,m,r) \left\| \{\chi_{\sigma_l}(\bar{s})\}_{\bar{s}_\nu \in \sigma_l} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leqslant C(p,m,\theta) l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}},$$

где χ_{σ_l} – характеристическая функция множества $\sigma_l = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \overline{s_\nu}, \bar{\gamma} \rangle < l\}$, $1 \leqslant \tau_j < +\infty$.

Значит, функция $C_3 f_3 \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B$, $r_j > \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., m$, где C_3 – некоторая положительная постоянная.

Как в доказательстве оценки снизу при $r_j = \frac{1}{p_j}$ рассмотрим функцию

$$v_3(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j \tag{40}$$

и Ω_M – произвольный набор из M векторов $\bar{k} = (k_1, ..., k_m)$ с целочисленными координатами. Обозначим через

$$u_3(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \Omega_M}^{*} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j$$

функцию, содержащую только те слагаемые из (40), которые имеют "номера" из множества Ω_M. Положим $w_3(\bar{x}) = v_3(\bar{x}) - u_3(\bar{x})$. В силу равенства Парсеваля будем иметь

$$\|u_3\|_2 = M^{\frac{1}{2}}, \tag{41}$$

$$\|v_3\|_2 = \left(\sum_{\langle \overline{s_\mu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(q,r,m) \left(2^l l^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{42}$$

Из неравенств (41) и (42), учитывая $2^l l^{\nu-1} \asymp M$, имеем

$$\|w_3\|_2 \leqslant \|v_1\|_2 + \|u_1\|_2 \leqslant C(q,r,m) \left(2^l l^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{2}} + M^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3(q,r,m) \left(2^l l^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому функция $P(\bar{x}) = C_3^{-1} \left(2^l l^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{2}} w_3(\bar{x})$ удовлетворяет требованиям формулы (29).

В силу условия $2 < q_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, имеем

$$e_M(f)_2 \leqslant Ce_M(f)_{\bar{q},\bar{\theta}}$$

для любой функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta},\overline{\tau}}B$. Теперь по формуле (29) имеем

$$e_M(f)_{\bar{q},\bar{\theta}} \geqslant Ce_M(f)_2 \geqslant C\left|\int_{I^m} f_3(\bar{x})P(\bar{x})d\bar{x}\right| =$$

$$= CC_3^{-1}\left(2^l l^{\nu-1}\right)^{\frac{1}{2}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \sum_{\bar{s}_0\in\varkappa(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(1-\frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k}\in\rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} =$$

$$= CC_3^{-1}\left(2^l l^{\nu-1}\right)^{\frac{1}{2}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \prod_{j=\nu+1}^{m} 2^{-s_j^0(r_j-\frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{s}_\nu\in\varkappa_\nu(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{\nu} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} \geqslant$$

$$\geqslant C\left(2^l l^{\nu-1}\right)^{\frac{1}{2}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \prod_{j=\nu+1}^{m} 2^{-s_j^0(r_j-\frac{1}{p_j})} 2^{-(l-\sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\tilde{\gamma}_j)(r_1-\frac{1}{p_1})} \left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1},$$

где $\tilde{\gamma}_j = \frac{r_j-\frac{1}{p_j}}{r_1-\frac{1}{p_1}}$, $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j, j = 1, ..., \nu$. Так как $\tilde{\gamma}_j(r_1-\frac{1}{p_1}) = r_j - \frac{1}{p_j}$, то отсюда получим

$$e_M(f)_{\bar{q},\bar{\theta}} \geqslant C\left(2^l l^{\nu-1}\right)^{\frac{1}{2}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} 2^{-l(r_1-\frac{1}{p_1})} \left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1} \geqslant$$

$$\geqslant C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}, \tag{43}$$

если $l > 2\sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j$. Число l выбрано так, чтобы $2^l l^{\nu-1} \asymp M$. Поэтому из (43) имеем

$$e_M(f)_{\bar{q},\bar{\theta}} \geqslant CM^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}$$

для $M > M_0 > 1$, в случае $r_j > \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., m$. Следовательно,

$$e_M(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta},\overline{\tau}}B)_{\bar{q},\bar{\theta}} \geqslant CM^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}$$

для $M > M_0 > 1$, в случае $r_j > \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., m$. Этим оценка снизу в пункте 1) доказана. Теорема доказана.

Замечание 2. *В случаях $\theta_j < q = q_1 = ... = q_m$, $r_j > \frac{1}{p_j}$, $q_j < \theta_j$, $j = 1, ..., m$ и $2 < p_j \leqslant q_j < +\infty$, $1 < p_j \leqslant q_j \leqslant 2$, $j = 1, ..., m$, оценки M –членного приближения класса Бесова $B^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}}$ в пространстве $L_{\bar{q}}(I^m)$ установлены в [28-30].*

Замечание 3. *Отметим, что при $p = p_1 = ... = p_m$, $q = q_1 = ... = q_m$, $\theta = \theta_1 = ... = \theta_m$, $\mu = \nu$ утверждения доказанной теоремы совпадают с пунктами 3) и 2) соответственно вышеприведенной теоремы А.С. Романюка.*

Цитированная литература

[1]. Blozinski A. P., *Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms,* Transactions American mathematical society, 1981, Vol. 263, №1, P. 146 – 167.

[2]. Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., "Наука", 1977.

[3]. Никольский С. М., *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера*, Сибирский математический журнал,. 1963, Т. 4, №6, С. 1342 – 1364.

[4]. Аманов Т. И., *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Алма-ата, "Наука", 1976.

[5]. Лизоркин П. И., Никольский С. М., *Пространства функций смешанной с декомпозиционной точки зрения*, Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 1989, Т. 187, С. 143 – 161.

[6]. Стечкин С. Б., *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов*, Доклады Академии наук СССР, 1955, Т. 102, №1, С. 37 – 40.

[7]. Исмагилов Р. С., *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами*, Успехи математических наук, 1974, Т. 29, №3, С. 161 – 173.

[8]. Майоров В. Е., *О линейных поперечниках соболевских классов ицепочках экстремальных подпространств*, Математический сборник, 1978, Т. 113, №3, С. 437 – 463.

[9]. Белинский Э. С., *Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной*, Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль, 1988, С. 16 – 33.

[10]. Темляков В. Н., *Приближение функций с ограниченной смешанной производной,* Труды МИ им. В.А. Стеклова АН СССР, 1986, Т. 178, С. 1 – 112.

[11]. Романюк А. С., *Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных*, Известия Российской академии наук, серия математическая, 2003, Т. 67, №2, С. 61 – 100.

[12]. Романюк А. С., *Приближение классов периодических функций многих переменных,* Математические заметки, 2002, Т. 71, №1, С. 109 – 121.

[13]. DeVore R. A. , Temlyakov V. N., *Nonlinear approximation by trigonometric sums,* Journal of Fourier Analysis and Applications, 1995, Vol. 2, №1, P. 29 – 48.

[14]. Temlyakov V. N., *Greedy algoritm and m-term trigonometric approximation,* Constructive approximation, 1998, Vol. 14, № 4, P. 569 – 587.

[15]. Dinh Dung, *On asymptotic order of n-term approximations and non-linear n-widths,* Vietnam Journal Mathematics, 1999, V. 27, №4, P. 363 – 367.

[16]. Кашин Б. С., *Аппроксимативных свойствах полных ортонормированных систем,* Труды МИ им. В.А. Стеклова АН СССР, 1985, Т. 172, С. 187 – 201.

[17]. Базарханов Д. Б., *Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского-Бесова обобщенной смешанной гладкости,* Доклады Российской академии наук, 2009, Т. 426, № 1, С. 11 – 14.

[18]. DeVore R. A., *Nonlinear approximation,* Acta Numerica, 1998, Vol. 7, P. 51 – 150.

[19]. Temlyakov V. N., *Nonlinear methods approximation,* Foundations Computational Mathematics, 2003, V. 3. P. 33 – 107.

[20]. Акишев Г., *О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой,* Математические заметки, 2007, Т. 81, №1, С. 3 – 16.

[21]. Акишев Г., *О порядках M-членного приближения классов функций в пространствах Лебега со смешанной нормой,* Математический журнал, 2007, Т. 7, №1, С. 5 – 14.

[22]. Акишев Г., *О точности оценок наилучшего M -членного приближения класса Бесова,* Сибирские электронные математические известия, 2010, Т. 7, С. 255 – 274.

[23]. Акишев Г., *О порядках приближения функциональных классов в пространстве Марцинкевича,* Математический журнал, 2004, Т. 4, № 4, С. 10 – 19.

[24]. Акишев Г., *Приближение функциональных классов в пространствах смешанной нормой,* Математический сборник, 2006, Т. 197, №8, С. 17 – 40.

[25]. Нурсултанов Е. Д., *Неравенства разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца,* Труды математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2006, Т. 255, С. 1 – 18.

[26]. Акишев Г., *Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов,* Материалы научно-практической конференции "Уалихановские чтения – 9", Кокшетау, 2004, С. 3 – 6.

[27]. Никольский С. М., *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем,* Известия Академии наук СССР, серия математическая, 1946, Т. 10. №3, С. 207 - 256.

[28]. Акишев Г., *Об оценках наилучшего M -членного приближения классов в разных метриках,* Евразийский математический журнал, 2006, №3, С. 22 – 33.

[29]. Акишев Г., *О порядках M -членного приближения классов периодических функций,* Математический журнал, 2006, Т. 6, № 4, С. 5 – 11.

[30]. Акишев Г., *Об оценках наилучшего M -членного приближения класса Бесова,* Математический журнал, 2007, Т. 7, № 4, С. 5 – 11.

Статья поступила в редакцию 25.04.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 30 — 38*

УДК 530.45

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ. 3. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Л. А. Алексеева

Институт Математики МОН РК
050010, Алматы, Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz

Исследуется уравнение квантовой механики – уравнение Дирака и его решения. Предложена бикватернионная форма обобщенного уравнения Дирака и определены его обобщенные решения в бикватернионной форме через скалярные потенциалы. Построено уравнение для скалярных потенциалов решений, названное уравнением Клейна-Гордона-Фока-Шредингера, объединяющее известные уравнения квантовой механики. Определены нестационарные, статические и гармонические по времени скалярные потенциалы и порождаемые ими спиноры и спинорные поля.

Настоящая работа является продолжением статей [1, 2], где представлены основы дифференциальной алгебры бикватернионов, которая очень удобна для решения широкого класса задач математической физики. В частности, в [3] построено бикватернионное волновое (*биволновое*) уравнение, эквивалентное системе уравнений Максвелла, а в [2] рассмотрены биволновые уравнения общего вида, построены их обобщенные решения, исследована инвариантность этих уравнений для группы преобразований Лоренца.

Здесь дифференциальная алгебра бикватернионов используется для исследования известного матричного уравнения квантовой механики – уравнения Дирака [4, 5] и построения его обобщенных решений.

1. Биградиенты, биволновые уравнения и матрицы Дирака

Обозначим функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского M: $\mathsf{B}(\mathsf{M}) = \{\mathbf{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\}$, где f – комплекснозначные функции ($f = f_1 + if_2$) на M, а F – трехмерный вектор-функция с комплексными компонентами ($F = F_1 + iF_2$). Для начала предположим, что f и F – дифференцируемы почти всюду на M и локально интегрируемы.

Определение 1. *Взаимные биградиенты – это дифференциальные бикватернионные операторы вида*

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla,$$

где $\nabla = grad$.

Keywords: *Biquaternion, bigradient, Dirac equation, generalized solution, Klein-Gordon-Fokk-Schrodinger equation, scalar potential, spinor,* ω *-spinor*

2010 Mathematics Subject Classification: 81Q05

© **Л. А. Алексеева, 2011.**

Их действие определено как в алгебре бикватернионов:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{F} \equiv (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i\,(\nabla, F) \pm i\nabla f \pm \partial_\tau F \pm i[\nabla, F],$$

где $(\nabla, F) = \operatorname{div} F$, $[\nabla, F] = \operatorname{rot} F$ (в двойных знаках везде берутся верхние либо нижние). Их суперпозиция обладает замечательным свойством

$$\nabla^{-}\left(\nabla^{+}\mathbf{F}\right) = \nabla^{+}\left(\nabla^{-}\mathbf{F}\right) = \left(\nabla^{-} \circ \nabla^{+}\right)\mathbf{F} = \Box\mathbf{F}, \tag{1}$$

где $\Box$ – волновой оператор даламбертиан:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \Delta, \quad \Delta - \text{оператор Лапласа}$$

($\circ$ – знак бикватернионного умножения – при записи действия биградиентов будем опускать).

Используя свойство (1), легко решать дифференциальные бикватернионные уравнения вида

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (b(\tau, x) + B(\tau, x)) =$$

$$= (\partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B) + \partial_\tau B \pm i \operatorname{grad} B \pm i \operatorname{rot} B = \mathbf{G}(\tau, x), \tag{2}$$

относительно $\mathbf{B}$, которые называем *биволновыми.*

Его решения и свойства инвариантности относительно группы преобразований Лоренца подробно рассмотрены в [2].

Биволновое уравнение (2) можно записать в матричном виде

$$\sum_{j=0}^{3} D^{\pm}_{m\,j} b_j = g_m, \quad m, j = 0, 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $b_0 = b$, $g_0 = g$, $b_j = B_j$, $g_j = G_j$, $j = 1, 2, 3$; а $D^{\pm}_{m\,j}$ – компоненты матриц $D^{\pm}$ (соответственно знаку), которые имеют вид

$$D^{+} = D = \left\{\begin{array}{cccc} \partial_\tau & -i\partial_1 & -i\partial_2 & -i\partial_3 \\ i\partial_1 & \partial_\tau & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ i\partial_2 & i\partial_3 & \partial_\tau & -i\partial_1 \\ i\partial_3 & -i\partial_2 & i\partial_1 & \partial_\tau \end{array}\right\}, \quad D^{-} = \bar{D} = \left\{\begin{array}{cccc} \partial_\tau & i\partial_1 & i\partial_2 & i\partial_3 \\ -i\partial_1 & \partial_\tau & i\partial_3 & -i\partial_2 \\ -i\partial_2 & -i\partial_3 & \partial_\tau & i\partial_1 \\ -i\partial_3 & i\partial_2 & -i\partial_1 & \partial_\tau \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Легко проверить, что их произведение (суперпозиция операторов) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=0}^{3} D_{m\,j} D_{jl} = \delta_{m\,l}\Box, \quad j, m, l = 0, 1, 2, 3, \tag{5}$$

где δ_{ml} – символ Кронекера.

Покажем, что (4) – это дифференциальные матричные операторы Дирака, которые именно таким свойством обладают [5]. Для этого представим их в матричном виде: $D = \sum\limits_{j=0}^{3} D^j \partial_j$, где, как следует из (4), матрицы D^j имеют следующие компоненты:

$$D^0 = I, \quad D^1 = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{array}\right\}, \quad D^2 = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{array}\right\}, \; D^3 = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Здесь I – единичная матрица. Как видим, это четырехмерные унитарные матрицы Дирака, составленные из двухмерных матриц Паули

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \mp i & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

А их свойство (5) имеет простую для вычислений бикватернионную форму

$$\nabla^{\mp}\nabla^{\pm} = \nabla^{\pm}\nabla^{\mp} = \Box. \tag{8}$$

Это свойство биградиентов позволяет легко строить решения ряда уравнений квантовой механики, которые можно записать в бикватернионной форме.

2. Бикватернионная форма уравнения Дирака и КГФШ-уравнение

Рассмотрим уравнение вида

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{B} \equiv \left(\nabla^{\pm} + m\right) \circ \mathbf{B} = \mathbf{F}, \tag{9}$$

где m – константа, вообще говоря, комплексная, бикватернион $\mathbf{F}(\tau, x)$ задан. В силу матричных свойств биградиента (5),(6), это уравнение можно назвать *обобщенным уравнением Дирака* (УрД) в бикватернионной форме, а дифференциальные операторы

$$\mathbf{D}_m^{+} = \nabla^{+} + m, \quad \mathbf{D}_m^{-} = \nabla^{-} + m$$

назовем *биградиентным представлением* матричных операторов Дирака.

Простым вычислением легко показать, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим полезным свойством:

$$\mathbf{D}_m^{+}\mathbf{D}_m^{-} = \mathbf{D}_m^{-}\mathbf{D}_m^{+} = \Box + m^2 + 2m\partial_\tau, \quad \mathbf{D}_{im}^{+}\mathbf{D}_{im}^{-} = \mathbf{D}_{im}^{-}\mathbf{D}_{im}^{+} = \Box - m^2 + 2im\partial_\tau. \tag{10}$$

Определение 2. *Свертка двух бикватернионов имеет вид*

$$\mathbf{A}(\tau, x) * \mathbf{B}(\tau, x) = a * b - \sum_{i,j,l=1}^{3} (A_j * B_j) + (a * A_j)\, e_j + (b * B_j)\, e_j + \varepsilon_{ijl}\,(A_i * B_j)\, e_l,$$

где в скобках стоят обычные свертки обобщенных функций [6].

Легко видеть, что здесь объединены операции бикватернионного умножения и свертка.

Теорема 1. *Бикватернион вида*

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{D}_m^{\pm}(\psi * \mathbf{F}), \tag{11}$$

где $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *– решение однородного УрД*

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{B}^0 = 0, \tag{12}$$

$\psi(\tau, x)$ *– фундаментальное решение уравнения*

$$\Box\psi + m^2\psi + 2m\partial_\tau\psi = \delta(\tau)\delta(x), \tag{13}$$

является решением уравнения Дирака (9).

Доказательство. В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для второго слагаемого в формуле (11). Подставив его в (9), используя свойство дифференцирования сверток и δ-функции [6], получим требуемое:

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{D}_m^{\mp}\ (\psi *\ \mathbf{F}) = \mathbf{F} * \left(\Box\psi + 2m\partial_\tau\psi + m^2\psi\right) = \mathbf{F} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{F}.$$

Очевидно, в силу линейности, любое решение уравнения (9) можно представить в виде (11).

Из теоремы 1 легко получим следствие для мнимых $m = i\rho$, которое сформулируем тоже в виде теоремы.

Теорема 2. *При* $m = i\rho$, $Im\,\rho = 0$, *решение уравнения (9)*

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{B} = \mathbf{F}$$

можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \left(\nabla^{\mp} + i\rho\right) \circ (\mathbf{F} *\ \psi^{\rho}), \tag{14}$$

где $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *– решение однородного уравнения Дирака*

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{B}^0 = 0, \tag{15}$$

а $\psi(\tau, x)$ *– фундаментальное решение уравнения*

$$\Box\psi - \rho^2\psi + 2i\rho\,\partial_\tau\psi = \delta(\tau)\delta(x).$$

Здесь в левой части помимо оператора Клейна-Гордона-Фока ($\Box - \rho^2$) содержится первая производная по времени с комплексной единицей, подобно мнимому члену в уравнении Шредингера, поэтому уравнение вида

$$\Box u + 2m\partial_\tau u + m^2 u = f(\tau, x) \tag{16}$$

назовем уравнением Клейна-Гордона-Фока-Шредингера (КГФШ-уравнением). Интересно, что появление этого дополнительного члена в уравнении Клейна-Гордона-Фока значительно упрощает вид фундаментального решения, в сравнении с фундаментальным решением уравнения Клейна-Гордона-Фока, которое известно.

3. Обобщенные решения КГФШ-уравнения. Скалярные потенциалы

Решения КГФШ-уравнения (16) можно представить в виде

$$u = f * \psi + u_0,$$

где ψ – фундаментальное решение КГФШ-уравнения, $u_0(\tau, x)$ – решение однородного уравнения (при $f = 0$).

Теорема 3. *Фундаментальные решения КГФШ-уравнения (16) имеют вид*

$$\psi = \frac{1}{4\pi\,\|x\|}\left(a\,H(\tau)e^{-m\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) + (1-a)H(-\tau)\delta(\tau + \|x\|)e^{m\|x\|}\right) + \psi_0,$$

где $\delta(\tau \pm \|x\|)$ *– простой слой на конусе* $\|x\| = |\tau|$; $H(\tau)$ *– функция Хевисайда,* a *– любая константа,* $\psi_0(\tau, x)$ *– решение однородного КГФШ-уравнения.*

Доказательство. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье (ПФ) обобщенных функций. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ, x), обозначаем (ω, ξ) соответственно.

При $f(\tau, x) = \delta(x)\delta(\tau)$ из (16) следует, что ПФ по τ функции $\psi(\tau, x)$ (обозначим его $F_\tau[\psi]$) является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца

$$\left\{\Delta - k^2\right\} F_\tau[\psi] + \delta(x) = 0, \quad k = i\omega - m. \tag{17}$$

Оно известно [6]. С точностью до решения однородного уравнения его можно представить в виде

$$F_\tau[\psi] = \frac{1}{4\pi\,\|x\|}\left(ae^{-k\|x\|} + (1-a)e^{k\|x\|}\right),$$

где a – произвольная константа. Следовательно,

$$F_\tau[\psi] = \frac{1}{4\pi\,\|x\|}\left(ae^{(i\omega-m)\|x\|} + (1-a)e^{-(i\omega-m)\|x\|}\right).$$

Отсюда, используя свойства ПФ, при обратном преобразовании по ω получим формулу теоремы, где носитель по времени первого слагаемого $\tau > 0$, а второго $\tau < 0$. Это расширяющиеся и сужающиеся со временем в R^3 с единичной скоростью сферы радиуса $|\tau|$. Ч.т.д.

Если $m = i\rho$ – чисто мнимое число и носитель решения $\tau > 0$, то

$$\psi = \frac{e^{-i\rho\|x\|}}{4\pi\,\|x\|}\delta(\tau - \|x\|).$$

Здесь плотностью простого слоя на световом конусе является фундаментальное решение уравнения Гельмгольца с волновым числом ρ [6].

Решения однородного КГФШ-уравнения. Фундаментальные решения уравнения определяются с точностью до решения однородного уравнения. Построим решения однородного КГФШ-уравнения

$$\Box u + m^2 u + 2m\partial_\tau u = 0. \tag{18}$$

В пространстве ПФ из (18) имеем

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 + m^2 - 2im\omega\right) F_{\omega,\xi}\left[u(\tau, x)\right] = \left(\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2\right) u^*(\omega, \xi) = 0, \tag{19}$$

где $u^*(\omega, \xi) = F_{\omega,\xi}\left[u(\tau, x)\right]$ – полное ПФ по τ, x.

Если $\mathrm{Re}\, m \neq 0$, тогда $\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2 \neq 0$ при $\forall \xi \in R^3$. В этом случае это уравнение имеет только тривиальное нулевое решение $u^* = 0$. Однако при чисто мнимом $m = i\rho$ уравнение (19) имеет бесчисленное множество решений

$$u^*(\omega, \xi) = \phi(\omega, \xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - (\omega - \rho)^2\right), \tag{20}$$

где $\phi(\omega, \xi)$ – плотность простого слоя – произвольно заданная функция на конусах $\|\xi\| = |\omega - \rho|$. Вычисляя оригинал, получим

$$u(\tau, x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{\|\xi\|=|\omega-\rho|} \phi(\omega, \xi)\exp\left(-i(\xi, x) - i\omega\tau\right) dS(\xi) =$$

$$= \frac{e^{-i\rho\tau}}{(2\pi)^4}\int\limits_{R^3}\left\{\phi(\rho + \|\xi\|, \xi)e^{-i\|\xi\|\tau} - \phi(\rho - \|\xi\|,\ \xi)e^{i\|\xi\|\tau}\right\}\exp\left(-i(\xi, x)\right) dV(\xi).$$

Здесь $dS(\xi)$ – дифференциал площади поверхности сферы радиуса, указанного под знаком соответствующего интеграла, $dV(\xi) = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$. Отсюда в силу произвольности ϕ следует теорема.

Теорема 4. *Если* $\mathrm{Re}\, m \neq 0$, *то однородное КГФШ-уравнение (18) имеет только единственное нулевое решение. Если* $\mathrm{Re}\, m = 0$, $m = i\rho$, *решения при* $\tau \geq 0$ *могут быть представлены в виде*

$$\psi_0(\tau, x) = e^{-i\rho\tau} \int\limits_{R^3} \phi(\xi) \exp\left(i\left((\xi, x) \pm \|\xi\|\,\tau\right)\right) dV(\xi), \quad \forall \phi(\xi) \in L_1(R^3).$$

Здесь под знаком интеграла стоят две плоские гармонические волны

$$\psi_\xi^{\pm}(\tau, x) = \exp\left(i\left((\xi, x) - \rho\tau \pm \|\xi\|\,\tau\right)\right), \tag{21}$$

которые сами являются решениями КГФШ-уравнения (18). Волновой вектор ξ определяет направление движения волны, длина которой равна $\lambda = 2\pi / \|\xi\|$, частота $\omega = |\rho \pm \|\xi\||$, период $T = 2\pi / |\rho \pm \|\xi\||$. В зависимости от знака, одна из них сверхсветовая ($V > 1$), а другая – досветовая ($V < 1$), т.к. фазовая скорость движения волны $V = 1 \pm \frac{\rho}{\|\xi\|}$. При $\|\xi\| \to \infty$ частота $\omega \to \infty$, а $V \to 1 \pm 0$. При $\|\xi\| \to |\rho|$ скорости $V \to 1; 0$, а частоты соответственно $\omega \to \frac{\pi}{\rho};\ \infty$.

Будем называть $\psi_\xi^{\pm}(\tau, x)$ скалярными волновыми потенциалами.

4. Обобщенные решения однородного уравнения Дирака. Бикватернионное представление спинорных полей

Рассмотрим бикватернионные решения однородного уравнения Дирака

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right) \mathbf{Sp} = 0, \qquad \mathrm{Re}\rho = 0. \tag{22}$$

В квантовой механике их называют *спинорами* [4, 5].

Теорема 5. *Ненулевое решение УрД (22) можно представить в виде свертки*

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{D}_{i\rho}^{\mp}\left(\psi_0 * \mathbf{C}(\tau, x)\right), \tag{23}$$

где $\mathbf{C}$ *– произвольный бикватернион, а* ψ_0 *– решение однородного КГФШ-уравнения (18), либо представимо в виде суммы решений подобного вида.*

Доказательство. Подставляя (23) в (22), с учетом свойства (10), получим (соответственно верхнему или нижнему знакам)

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{Sp} = \mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{D}_m^{\mp}\left(\psi_0 * \mathbf{C}\right) = \left(\Box\psi_0 + 2m\partial_\tau\psi_0 + m^2\psi_0\right) * \mathbf{C} = 0, \quad m = i\rho.$$

Обратно, если (23) – решение (22), тогда

$$\left(\Box + 2m\partial_\tau + m^2\right)\mathbf{Sp} = \mathbf{D}_m^{\mp}\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{Sp} = \mathbf{D}_m^{\mp}0 = 0.$$

Т.е. и скалярная часть и компоненты векторной части $\mathbf{Sp}$ являются решением однородного КГФШ-уравнения. Следовательно, $\mathbf{Sp}$ можно представить в виде суммы решений вида (23).

В частном случае, когда $\mathbf{C} = 1$, получим решение вида

$$\mathbf{\Psi}_0^{\mp} = \left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\psi_0 = i\rho\psi_0 + \partial_\tau\psi_0 \mp i\,\mathrm{grad}\psi_0,$$

которое назовем спинором скалярного поля $\psi_0(\tau, x)$. Используя его, спинор представим в виде

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{\Psi}_0 * \mathbf{C}(\tau, x), \tag{24}$$

где $\mathbf{C}(\tau, x)$ – произвольный бикватернион, допускающий эту свертку. Последнее зависит от свойств скалярного потенциала ψ_0, вид которого дает теорема 5.

Поскольку определяющими в спиноре (24) являются скалярно-векторное поле $\mathbf{C}(\tau, x)$ и потенциал ψ_0, соответствующий им спинор назовем *спинорным $\boldsymbol{C}$-полем*, порождаемым потенциалом ψ_0.

5. Скалярные гармонические потенциалы спиноров

Рассмотрим спиноры волновых потенциалов (21)

$$\left(\nabla^{\mp} + i\rho\right) \psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \pm \left(i \left\|\xi\right\| + \xi\right) \psi_{\xi}^{\pm}. \tag{25}$$

Определение 3. *Назовем гармоническими спинорами бикватернионы*

$$\mathbf{Sp}_{\xi}^{\pm} = \frac{\exp\left(i\left((\xi, x) - -\rho\tau \pm \|\xi\|\,\tau\right)\right)}{\sqrt{2}} \left(i + \frac{\xi}{\|\xi\|}\right),$$

гармоническими спинорными $\mathbf{C}$*-полями спиноры – свертки с* $\mathbf{C}(\tau, x)$

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{C} * \mathbf{Sp}_{\xi}^{\pm}.$$

Их норма и псевдонорма [1] равны:

$$\left\|\mathbf{Sp}_{\xi}^{\pm}\right\| = 1, \quad \left\langle \mathbf{Sp}_{\xi}^{\pm} \right\rangle = 0.$$

Используя $\mathbf{Sp}_{\xi}^{\pm}$ и формулу (23), получим бикватернионное представление спинорных $\boldsymbol{C}$-полей.

Теорема 6. *Спинорные $\boldsymbol{C}$-поля можно представить либо в виде (26), либо в виде свертки*

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{C}(\tau, x) * \int\limits_{R^3} \phi(\xi) \mathbf{Sp}_{\xi}^{\pm}(\tau, x) dV(\xi),$$

где $\phi(\xi) \in L_1(R^3)$, *либо в виде линейной комбинации подобных спинорных полей.*

6. Стационарные и статические решения уравнения Дирака

Рассмотрим также важный для приложений класс решений уравнения Дирака вида $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau}$, которые описывают гармонические колебания с частотой ω. Предполагается, что правая часть (9) имеет ту же структуру.

Тогда для комплексных амплитуд получим уравнение вида

$$\left(\nabla_{\omega}^{\pm} + \rho\right) \mathbf{B}(x) = \mathbf{F}(x), \tag{26}$$

ω, ρ – действительные числа, операторы $\nabla_{\omega}^{\pm} = \omega \pm \nabla$ назовем ω*-биградиентами.* Решения однородного уравнения (27) назовем ω*-спинорами.*

Также прямым вычислением доказывается свойство

$$\left(\nabla_{\omega}^{\pm} + \rho\right) \left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right) = \left(\omega + \rho + \nabla\right)\left(\omega + \rho - \nabla\right) = \left(\omega + \rho\right)^2 + \Delta.$$

На его основе аналогично, как в нестационарном случае, доказана теорема.

Теорема 7. *Решения уравнения (26) для комплексных амплитуд можно представить в виде суммы бикватернионов*
$$\mathbf{B} = \left(\nabla^{\mp}_{\omega} + \rho\right)(\chi * \ \mathbf{F}) + \mathbf{Sp}^{\omega}, \tag{27}$$
где χ *– фундаментальное решение уравнения Гельмгольца*
$$\chi = -\frac{ae^{ik\|x\|}}{4\pi\,\|x\|} - \frac{(1-a)e^{-ik\|x\|}}{4\pi\,\|x\|}, \quad k = |\omega+\rho| \neq 0,\ \forall a,$$
и соответствующего спинора
$$\mathbf{Sp}^{\omega} = \left(\nabla^{\mp}_{\omega} + \rho\right)(\chi_0 * \mathbf{C}(x)),$$
где $\chi_0(x)$ *– решение уравнения Гельмгольца*
$$\Delta\chi_0 + k^2\chi_0 = 0, \tag{28}$$
$\mathbf{C}(x)$ *– произвольный бикватернион, допускающий эту свертку.*

Определим $\mathbf{Sp}^{\omega}$.

Гармонические ω*-спиноры.* Используя преобразования Фурье по x, из (28) получим
$$(\|\xi\|^2 - k^2)\chi_0^* = 0 \Rightarrow \chi_0^* = g(\xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - k^2\right), \forall g(\xi) \Rightarrow$$
$$\chi_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\|\xi\|=k} g(\xi)\ e^{-i(\xi,x)}dS(\xi) = \frac{k^2}{(2\pi)^3}\int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} g(k\mathbf{e})\ e^{-ik(\mathbf{e},x)}dS(\mathbf{e}).$$
Откуда
$$\chi_0(x) = \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\ e^{-ik(\mathbf{e},x)}dS(\mathbf{e}),$$
где $p(\mathbf{e})$ – любая функция, интегрируемая на единичной сфере.

Гармонические ω-спиноры определим как спиноры вида
$$\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,\mathbf{e}) = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\nabla^{\mp}_{\omega} + \rho\right)e^{-ik(\mathbf{e},x)} = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\omega + \rho - ik\mathbf{e}\right)e^{-ik(\mathbf{e},x)}$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{\Psi}_0^{\omega}\| = 1, \quad \langle\mathbf{\Psi}_0^{\omega}\rangle = 0.$$
Здесь $\mathbf{e}$ – направление ω-спинора, $k = |\omega+\rho|$ – его волновое число. Через них также можно представить комплексные амплитуды ω-спиноров.

Теорема 8. ω*-спиноры можно представить в виде свертки*
$$\mathbf{Sp}^{\omega} = \mathbf{G}(x) * \mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,\mathbf{e})$$
либо
$$\mathbf{Sp}^{\omega} = \mathbf{G}(x) * \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,\mathbf{e})dS(\mathbf{e}),$$
где $\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(\tau,x)$ *– гармонические* ω*-спиноры,* $\forall p(\mathbf{e}) \in L_1(S_{\mathbf{e}}), S_{\mathbf{e}} = \{\mathbf{e} \in R^3 : \|\mathbf{e}\| = 1\}$.

Статические спиноры получим при $\omega = 0$. Формулы теоремы 8 при этом сохраняют вид, т.к. $k = |\rho| \neq 0$.

При вычислении спинорных полей, используя свойства дифференцирования свертки, производные можно перебрасывать на компоненты $\boldsymbol{C}$-поля, когда это удобно, которые тоже могут быть сингулярными обобщенными функциями.

Заключение

Система уравнений Максвелла для электромагнитного (ЭМ) поля приводится к биволновому уравнению [6, 7], которое совпадает с уравнением (9) при $m = 0$. Следовательно, построенные здесь решения при таком m, являются бикватернионными решениями уравнений Максвелла.

По аналогии с бикватернионом энергии-импульса ЭМ-поля [7], где в скалярной части стоят плотность энергии ЭМ-поля, а в векторной части – вектор Умова-Пойнтинга, можно ввести бикватернион *энергии-импульса спинорного поля*

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{Sp} \circ \mathbf{Sp}^* = \left(|sp|^2 + \|Sp\|^2 \right) + 2i \left(\mathrm{Im}(\, \bar{sp} \cdot Sp) + [\, \mathrm{Im} Sp, \mathrm{Re} Sp \,] \, \right).$$

Заметим, что решения уравнений Дирака получены в классе обобщенных функций, что позволяет строить решения как для классических бикватернионных функций, так и при наличии сингулярных источников в его правой части, которые можно использовать при построении бикватернионной теории элементарных частиц.

Цитированная литература

[1]. Алексеева Л. А., *Дифференциальная алгебра бикватернионов.1. Преобразования Лоренца*, Математический журнал, 2010, Т. 10, №1, С. 33 – 41.

[2]. Алексеева Л.А., *Дифференциальная алгебра бикватернионов.2. Обобщенные решения биволновых уравнений*, Математический журнал, 2010, Т. 10, №3, С. 5 – 13.

[3]. Алексеева Л.А., *Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла*, Математический журнал, 2003, Т. 3, №4, С. 20 – 24.

[4]. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., *Квантовые поля*, М., "Наука", 1980.

[5]. *Математическая энциклопедия*, М., "Наука", 1982, Т. 2.

[6]. Владимиров В.С., *Обобщенные функции в математической физике*, М., "Наука", 1976.

Статья поступила в редакцию 06.06.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 39 — 42*

УДК 528.36

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОЧВЫ ЗЕМЛИ ПО ДАННЫМ КОСМИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

С. А. Атанбаев., А. А. Кожабекова

Казахский экономический университет им. Т. Рыскулова
050035, Алматы, ул. Жандосова, 55

Рассматривается задача о восстановлении температурного поля для приповерхностного слоя почвы – задача Коши для системы уравнений в частных производных – методом квазиобращения.

В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция к переходу от дистанционных измерений температуры подстилающей поверхности (ТПП) [1, 2] к одновременной оценке ТПП и излучательной способности [3-5] некоторых компонент энергетического баланса поверхности суши [6], а также к определению суточного хода температуры активного слоя почв и грунтов [5, 6, 7] по данным дистанционного зондирования и контактным подспутниковым измерениям температуры [11, 12].

Для калибровки данных спутниковых измерений и задания граничных условий на поверхности почвы используются данные, приведенные, например, в работах [2, 9, 10]. Достаточно подробные ссылки на зарубежные источники приведены в работах [5, 6, 7].

Известен метод восстановления суточного хода ТПП по значениям, измеряемым дважды в сутки со спутника, имеющего полярную орбиту. Предполагается, что нормализованное по максимальной разности температур отклонение от минимальной температуры – известная функция времени суток.

Момент достижения максимальной температуры определяет местоположение этой функции. Конкретный вид функции зависит от параметров, значения которых подбираются для рассматриваемого времени года, широты местности, типа растительности и т.д.

Привлечение для анализа уравнения теплопроводности, описывающего температурный режим почвенного слоя, существенно повышает информативность данных дистанционного зондирования.

Такого рода методика предложена в [6]. Она может быть использована для определения температурных профилей неоднородно увлажненного активного слоя почвы.

В работе [7] получено решение уравнения теплопроводности, описывающее установившийся процесс теплопереноса в приповерхностном слое почвы. Найденное решение представлено в виде ряда Фурье и зависит от трех параметров, отражающих условие энергетического

Keywords: *Temperature field, ground*
2010 Mathematics Subject Classification: 81Q05P
© **С. А. Атанбаев., А. А. Кожабекова, 2011.**

баланса на поверхности почвы. Эти параметры могут быть определены по двум дистанционным измерениям температуры при известном времени достижения ее максимального значения. Восстановленный по дистанционным измерениям суточный ход температуры сопоставляется с результатами наземных экспериментов для сухих и влажных почв [9].

В работе [4] предложен метод восстановления суточного хода температуры в активном слое почвогрунтов при условии, что на поверхности почвы задан суточный ход температуры и плотности теплового потока.

В дальнейшем будем следовать методикам, представленным в [4] и [7]. По методике, изложенной в [4], можно определить суточный ход температуры поверхности $T(1,t)$. По формуле, приведенной в [5], можно определить также и тепловой поток:

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial z} = (1-A_s)Q\cos Z - [a+bT(0,t)], \tag{1}$$

где λ – коэффициент теплопроводности; A_s – коэффициент отражения подстилающей поверхности; Q – суммарная солнечная радиация; Z – зенитное расстояние солнца; a, b – коэффициенты, полученные при линеаризации уравнения теплового баланса.

Дальнейшие вычисления производятся по методике, изложенной в [4].

Динамика изменения температуры в пределах активного слоя почвы зависит от температуропроводности a. В свою очередь коэффициент температуропроводности a зависит от влажности W. Влажность почвы с глубиной может существенно изменяться. Поэтому коэффициент a зависит от расстояния от поверхности почвы x. Для определенности примем, что это зависимость является кусочно – постоянной и рассматриваемый слой почвы состоит из K слоев, имеющих температуропроводности a_k, на границе между слоями выполняется условие идеального теплового контакта. Считаем также, что нам известны из эксперимента температура и градиент температуры на поверхности. При вычисленном тепловом потоке по формуле (1) и известном коэффициенте теплопроводности λ можно определить градиент температуры.

Задача о восстановлении температурного поля для приповерхностного слоя почвы формулируется следующим образом: по вычисленным с учетом данных дистанционного определения температуры суточному ходу температуры и ее градиенту на поверхности почвогрунта [5] рассчитать температурное поле всего приповерхностного активного слоя почвы путем решения следующей задачи Коши [4]:

$$\frac{\partial T_k}{\partial x} = -a_k\frac{\partial q_k}{\partial t},\ 0<x<x_1,\ t_{k-1}<t<t_k,\ 1<k<K, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial x} = -q_k,\ 0<x<x_1,\ t_{k-1}<t\prec t_k,\ 1<k<K, \tag{3}$$

$$T_1 = T_0(x),\ \frac{\partial T_1}{\partial t} = -q_0(x),\ t=t_0,\ 0<x<x_1, \tag{4}$$

где t_k – заданная глубина, $T_k(t,x)$ – искомое температурное поле, $q_k(t,x)$ – градиент температуры, $T_0(x)$ и $q_0(x)$ – заданные функции (рассчитанные на поверхности температура и ее градиент), x_1 – время протекания исследуемого процесса. В уравнениях (2)–(4) названия осей изменены для удобства применения МКО. Решение задачи (2)–(4) существует в классе функций $C^{2,t}_{3,x}[0<x<1,\ 0<t<1]$, однако, в связи с тем, что задача (2)–(4) – классически некорректна, решение $T(x,t)$ – неустойчивое [1]. Используя регуляризующий алгоритм метода квазиобращения [1, 4, 11, 12], имеем:

$$\frac{\partial q_{ka}}{\partial t} = -\frac{1}{a_k}\frac{\partial T_{ka}}{\partial x} - \alpha q_{ka},\ t_{k-1}<t<t_k,\ 0<x<x_1,\ 1<k<K, \tag{5}$$

$$\frac{\partial T_{ka}}{\partial t} = -\frac{\alpha}{a_k^2}\frac{\partial^2 T_{ka}}{\partial x^2} - q_a,\ t_{k-1} < t < t_k,\ 0 < x < x_1,\ 1 < k < K, \qquad (6)$$

$$q_{ka} = q_0,\ T_{ka} = T_0,\ t = 0,\ 0 < x < x_1. \qquad (7)$$

Теперь задача (5)–(7) является классически корректной [1]. Поэтому решение $T_{k\alpha}(t,x)$ существует и является устойчивым. Здесь $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Применяя для нахождения приближенного решения задачи (5)–(7) метод конечных разностей, получаем следующие уравнения:

$$q_{i+1}^1 = -\frac{\tau}{ah}(T_i^2 - T_i^1) - (\alpha\tau - 1)q_i^1,\ j = 1, \qquad (8)$$

$$q_{i+1}^j = -\frac{\tau}{2ah}(T_i^{j+1} - T_i^{j-1}) - (\alpha\tau - 1)q_i^j,\ j = 2, ..., M-1, \qquad (9)$$

$$q_{i+1}^M = -\frac{\tau}{ah}(T_i^M - T_i^{M-1}) - (\alpha\tau - 1)q_i^M,\ j = M, \qquad (10)$$

$$T_{i+1}^j = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}(T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}) + T_i^j - \tau q_i^j,\ j = 2, ..., M-1, \qquad (11)$$

$$T_{i+1}^1 = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}(T_i^3 - 2T_i^2 + T_i^1) + T_i^1 - \tau q_i^1, \qquad (12)$$

$$T_{i+1}^M = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}(T_i^M - 2T_i^{M-1} + T_i^{M-2}) + T_i^M - \tau q_i^M. \qquad (13)$$

Производя вычисления по формулам (8)–(13) последовательно для каждого i, находим регуляризованное решение, зависящее от параметра α.

Цитированная литература

[1]. Атанбаев С. А., *Метод квазиобращения и его применение*, Алматы, 1999.

[2]. Горный В. И., Шилин Б. В., Ясинский Г. И., *Тепловая аэрокосмическая съемка*, М.: "Недра", 1983.

[3]. Султангазин У. М., Атанбаев С. А., Кожабекова А. А., Шерышев В. П., *Восстановление температуры подстилающей поверхности и излучательной способности по спектру уходящей длинноволновой радиации*, Тез. докл. Межд. конф. "Математическое моделирование экологических систем", Алматы, 9–12 сентября 2003г., С. 84.

[4]. Султангазин У. М., Атанбаев С. А., Кожабекова А. А., Шерышев В. П., *Расчет температурных полей по данным дистанционных наблюдений*, В кн. "Космические исследования в Казахстане", Алматы, РОНДО, 2002, С. 324 – 330.

[5]. Успенский А. Б., Щербина Г. Н. *Оценка температуры и излучательной способности суши по данным измерений уходящего теплового излучения с ИСЗ NOAA*, Иссл. Земли из космоса. 1996, №5, С. 4 – 12.

[6]. Реутов Е. А., Шутко А. М., *Оценка профиля температуры почвы по данным дистанционных СВЧ и ИК ихмерений*, Исследование Земли из космоса, 1987, №4, С. 78 – 85.

[7]. Сагалович В. Н., Фальков В. Я., Царева Т. И., *Определение суточного хода температуры в почве по данным дистанционного зондирования*, Исследование Земли из космоса, 2001, С. 79 – 84.

[8]. Покровский О. М., Королевская И. П., *Восстановление компонентов теплового баланса по данным спутниковых наблюдение*, Исследование Земли из космоса, 2001, №5, С. 85 – 93.

[9]. Царева Т. И., *Моделирование температурного режима дерново-подзолистой почвы с использованием метода случайного поиска. Современные проблемы опытного дела*, Под ред. В. П. Якушева, Т. 2. СПб., 2000, С. 119 – 124.

[10]. Чудновский А. Ф., *Теплофизика почв*, М., "Наука", 1976.

[11]. Шерышев В. П., Атанбаев С. А., Жалмухамедова Ж. Д., Ермолдина Г. Д., *Мониторинг темперетуры поверхности почвы*, Материалы IV Межд. симп. "Контроль и реабилитация окружающей среды", Томск, 21–23 июля 2004г., С. 51 – 52.

[12]. Шерышев В. П., Атанбаев С. А., Кожабекова А. А., *Восстановление температуры поверхности суши при проведении синхронного подспутникового эксперимента методом обратных задач теплопроводности, обратные задач и информационные технологии*, 2002, № 1.

Статья поступила в редакцию 27.10.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 43 — 52*

УДК 517.968.74

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. А. Бакирова

Институт математики МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: dzhumabaev@list.ru

Рассматривается специальная задача Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, возникающая при применении метода параметризации. Получены достаточные условия существования единственного решения рассматриваемой задачи и оценка разности ее решений, соответствующих различным значениям параметров, через разности этих параметров.

В [1, 2] метод параметризации [3] применен к линейной двухточечной краевой задаче для интегро-дифференциальных уравнений. После разбиения интервала и введения дополнительных параметров исходная задача сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами. При известных значениях параметров решается специальная задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений. В случае отсутствия разбиения специальная задача Коши совпадает с задачей Коши для интегро-дифференциальных уравнений. Задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений различными методами исследованы многими авторами [4-6]. Как и задача Коши, специальная задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений не всегда разрешима.

Однозначная разрешимость специальной задачи Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений при малом шаге разбиения установлена в работе [2].

В настоящей работе исследуется специальная задача Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, возникающая при применении метода параметризации к системе нелинейных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x) + \int\limits_0^T f_1(t,s,x(s))ds, \quad x \in R^n, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $f_0 : [0,T] \times R^n \to R^n$, $f_1 : [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$ непрерывны.

Keywords: *System of integro-differential equations, special Cauchy problem, existence and uniqueness of solutions*
2010 Mathematics Subject Classification: 45J05
© Э. А. Бакирова, 2011.

По шагу $h>0: \ Nh=T \ \ (N=1,2,\dots)$ производится разбиение $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$ и сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1)h,rh)$ обозначается через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)=x(t)$ при $t\in[(r-1)h,rh)$. Введя параметры $\lambda_r=x_r[(r-1)h]$ и на каждом r-ом интервале произведя замену функции $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r, \ \ r=\overline{1,N},$ в системе (1) получаем специальную задачу Коши вида

$$\frac{du_r}{dt}=f_0(t,u_r+\lambda_r)+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(t,s,u_j(s)+\lambda_j)ds, \qquad t\in[(r-1)h,rh), \tag{2}$$

$$u_r[(r-1)h]=0, \qquad r=\overline{1,N}. \tag{3}$$

Через $C([0,T],h,R^{nN})$ обозначим пространство систем функций $u[t]=(u_1(t),\,u_2(t),\dots,u_N(t))$, где $u_r:[(r-1)h,rh)\to R^n$ непрерывна и имеет конечный предел $\lim\limits_{t\to rh-0}u_r(t), \ \ r=\overline{1,N},$ с нормой $\|u[\cdot]\|_1=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\ \sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r(t)\|$.

Решением задачи (2), (3) является система функций $u[t]=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_{N}(t))\in C([0,T],h,R^{nN})$, компоненты которой непрерывно дифференцируемы на своих интервалах определения и удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (2) и начальным условиям (3).

По выбранному шагу $h>0: Nh=T \ \ (N=1,2,\dots)$ и заданному вектору $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\dots,\widetilde{\lambda}_{N})\in R^{nN}$ равенствами $x_0(t)=\widetilde{\lambda}_r, \ \ t\in[(r-1)h,rh), \ \ r=\overline{1,N}, \ \ x_0(T)=\widetilde{\lambda}_{N}$, на $[0,T]$ определим кусочно-непрерывную вектор-функцию $x_0(t)$.

Взяв число $\rho>0$ построим множества:

$G_0(\rho)=\big\{(t,x):t\in[0,T],\|x-x_0(t)\|<\rho\big\}$,

$G_1(\rho)=\big\{(t,s,x):t\in[0,T],s\in[0,T],\|x-x_0(s)\|<\rho\big\}$,

$S_h(0,\rho)=\big\{u[t]=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_{N}(t))\in C([0,T],h,R^{nN}):\|u[\cdot]\|_1<\rho\big\}$.

Условие A. Функции $f_0(t,x),f_1(t,s,x)$ непрерывны в $G_0(\rho)$, $G_1(\rho)$ соответственно, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}$ и выполняются неравенства

$$\Big\|\frac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}\Big\|\le L_0, \quad (t,x)\in G_0(\rho), \qquad \Big\|\frac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}\Big\|\le L_1, \quad (t,s,x)\in G_1(\rho).$$

Достаточные условия существования единственного решения специальной задачи Коши (2), (3) при известных значениях параметров устанавливает

Теорема 1. *Пусть выполняются условие A и неравенства:*

а) $e^{L_0h}L_1Th<1$,

б) $\dfrac{e^{L_0h}}{1-e^{L_0h}L_1Th}\max\limits_{r=\overline{1,N}}\ \sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)}\Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t}f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum\limits_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j)dsd\tau\Big\|<\rho.$

Тогда специальная задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (2), (3) при $\lambda=\widetilde{\lambda}$ в $S_h(0,\rho)$ имеет единственное решение $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\dots,\widetilde{u}_{N}(t))$.

Доказательство. Задача (2), (3) при $\lambda=\widetilde{\lambda}$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r+u_r(\tau))d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j+u_j(s))dsd\tau,$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{4}$$

Начальное приближение к решению (4) – компоненты систем функций $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t))$ – найдем с помощью итерационного процесса: $u_r^{(0,0)}(t) = 0$,

$$u_r^{(0,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,m)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \widetilde{\lambda}_j) ds d\tau,$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Тогда при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$,

$$\|u_r^{(0,1)}(t)\| = \Big\| \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \widetilde{\lambda}_j) ds d\tau \Big\| < \rho. \tag{6}$$

Из непрерывности $f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r)$, $f_1(\tau, s, \widetilde{\lambda}_j)$ соответственно в $G_0(\rho)$, $G_1(\rho)$ следует непрерывность функций $u_r^{(0,1)}(t)$ на $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, и существование конечных пределов

$$\lim_{t \to rh-0} u_r^{(0,1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \widetilde{\lambda}_j) ds d\tau, \quad r = \overline{1,N}, \tag{7}$$

и в силу неравенства б) теоремы имеет место оценка

$$\|u^{(0,1)}[\cdot]\|_1 \le \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \Big\| \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \widetilde{\lambda}_j) ds d\tau \Big\| < \rho, \tag{8}$$

т.е. $u^{(0,1)}[t] \in S_h(0, \rho)$.

Далее покажем, что для любого $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, пары $(t, \widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,1)}(t))$ принадлежат множеству $G_0(\rho)$. Действительно, согласно определению функции $x_0(t)$ на $[0, T]$ и оценке (8) для всех $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, справедливы неравенства:

$$\|\widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,1)}(t)) - x_0(t)\| = \|\widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,1)}(t)) - \widetilde{\lambda}_r\| = \|u_r^{(0,1)}(t))\| \le \|u^{(0,1)}[\cdot]\|_1 < \rho.$$

Из (5) найдем $u_r^{(0,2)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, и установим следующие неравенства:

$$\|u_r^{(0,2)}(t) - u_r^{(0,1)}(t)\| \le \int\limits_{(r-1)h}^{t} \|f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,1)}(\tau)) - f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r)\| d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0 \|u_r^{(0,1)}(\tau)\| d\tau \le L_0(t - (r-1)h) \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r^{(0,1)}(t)\|,$$

$$\|u_r^{(0,2)}(t)\| \le \|u_r^{(0,2)}(t) - u_r^{(0,1)}(t)\| + \|u_r^{(0,1)}(t)\| \le (L_0(t - (r-1)h) + 1) \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r^{(0,1)}(t)\| <$$

$$< e^{L_0(t-(r-1)h)} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r^{(0,1)}(t)\| \le e^{L_0 h} \|u^{(0,1)}[\cdot]\|_1 < \rho.$$

Так как $f_0(t,x)$ непрерывна в $G_0(\rho)$ и система функций $u^{(0,1)}[t] = (u_1^{(0,1)}(t), u_2^{(0,1)}(t), \ldots, u_N^{(0,1)}(t)) \in C([0,T],h,R^{nN})$, то функция $f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,1)}(\tau))$ непрерывна на $[(r-1)h, rh)$ и имеет конечный левосторонний предел при $t \to rh-0$ для всех $r=\overline{1,N}$. Отсюда вытекает непрерывность функций $u_r^{(0,2)}(t)$ на $[(r-1)h, rh)$ и существование конечных пределов

$$\lim_{t\to rh-0} u_r^{(0,2)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r + u_r^{(0,1)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j)dsd\tau, \quad r=\overline{1,N},$$

при всех $r=\overline{1,N}$, т. е. $u^{(0,2)}[t] = (u_1^{(0,2)}(t), u_2^{(0,2)}(t), \ldots, u_N^{(0,2)}(t)) \in S_h(0,\rho)$.

Продолжая итерационный процесс, на m-шаге определим систему функций $u^{(0,m+1)}[t]$, принадлежащую множеству $S_h(0,\rho)$ и установим оценки

$$\|u^{(0,m+1)}[\cdot] - u^{(0,m)}[\cdot]\|_1 \le \frac{(L_0h)^m}{m!}\|u^{(0,1)}[\cdot]\|_1, \tag{9}$$

$$\|u^{(0,m+1)}[\cdot]\|_1 \le \sum_{i=0}^{m} \frac{(L_0h)^i}{i!}\|u^{(0,1)}[\cdot]\|_1. \tag{10}$$

Из неравенства (9) следует, что последовательность систем функций $u^{(0,m)}[t]$ сходится к системе функций $u^{(0)}[t] \in S_h(0,\rho)$. Переходя к пределу при $m\to\infty$ в (10), учитывая неравенство б) теоремы и оценку (8), получим

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_1 \le e^{L_0h} \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \Big\| \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j)dsd\tau \Big\| < \rho. \tag{11}$$

Если $u[t] \in S_h(u^{(0)}[t],\rho_0)$, где $\rho_0 = \dfrac{e^{L_0h}L_1Th}{1-e^{L_0h}L_1Th}\|u^{(0)}[\cdot]\|_1$, то в силу неравенства (11) и условий а), б) теоремы имеет место оценка

$$\|u[\cdot]\|_1 \le \|u[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]\|_1 + \|u^{(0)}[\cdot]\|_1 < \rho_0 + \|u^{(0)}[\cdot]\|_1 \le \frac{1}{1-e^{L_0h}L_1Th}\|u^{(0)}[\cdot]\|_1 < \rho,$$

т.е. $S_h(u^{(0)}[t],\rho_0) \subset S_h(0,\rho)$.

Согласно определению функции $x_0(s)$ на $[0,T]$ и оценке (11) для всех $s\in[(j-1)h, jh)$, $j=\overline{1,N}$, имеют место следующие соотношения:

$$\|\widetilde{\lambda}_j + u_j^{(0)}(s)) - x_0(s)\| = \|\widetilde{\lambda}_j + u_j^{(0)}(s)) - \widetilde{\lambda}_j\| = \|u_j^{(0)}(s))\| \le \|u^{(0)}[\cdot]\|_1 < \rho,$$

следовательно, для любых $t\in[0,T)$, $s\in[(j-1)h, jh)$, $j=\overline{1,N}$, тройки $(t,s,\widetilde{\lambda}_j + u_j^{(0)}(s))$, $j=\overline{1,N}$, принадлежат множеству $G_1(\rho)$.

Следующее приближение решения уравнения (4) – систему функций $u^{(1)}[t]$ – найдем по итерационному процессу: $u_r^{(1,0)}(t) = u_r^{(0)}(t)$,

$$u_r^{(1,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r + u_r^{(1,m)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j + u_j^{(0)}(s))dsd\tau,$$

$$t\in[(r-1)h, rh), \quad r=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Для разности $u_r^{(1,1)}(t)$ и $u_r^{(1,0)}(t)$ установим, что

$$\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|=\Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j+u_j^{(0)}(s))dsd\tau-$$

$$-\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j)dsd\tau\Big\|\leq L_1Th\|u^{(0)}[\cdot]\|_1,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}, \tag{13}$$

откуда с учетом (11) получим

$$\|u^{(1,1)}[\cdot]-u^{(1,0)}[\cdot]\|_1\leq L_1Th\|u^{(0)}[\cdot]\|_1\leq$$

$$\leq e^{L_0h}L_1Th\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t}f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j)dsd\tau\Big\|<\rho_0. \tag{14}$$

Таким образом, $u^{(1,1)}[t]\in S_h(u^{(0)}[t],\rho_0)$.

При предположениях теоремы для всех $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, имеют место оценки

$$\|u_r^{(1,m+1)}(t)-u_r^{(1,m)}(t)\|\leq\frac{(L_0(t-(r-1)h))^m}{m!}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|, \tag{15}$$

$$\|u_r^{(1,m+1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|\leq\sum_{i=0}^{m}\frac{(L_0(t-(r-1)h))^i}{i!}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|. \tag{16}$$

и нетрудно установить, что $u^{(1,m)}[t]\in S_h(u^{(0)}[t],\rho_0)$, $m=1,2,\ldots$, и сходится к $u^{(1)}[t]\in$ $\in S_h(u^{(0)}[t],\rho_0)$. При $m\to\infty$ из (16) получим оценки

$$\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\|\leq e^{L_0(t-(r-1)h)}L_1Th\|u^{(0)}[\cdot]\|_1,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N},$$

откуда

$$\|u^{(1)}[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]\|_1\leq e^{L_0h}L_1Th\|u^{(0)}[\cdot]\|_1<\rho_0. \tag{17}$$

Продолжая процесс и предполагая, что $u^{(k)}[t]$ определены и принадлежат множеству $S_h(u^{(k-1)}[t],\rho_{k-1})\subset S_h(u^{(k-2)}[t],\rho_{k-2})\subset\ldots\subset S_h(u^{(0)}[t],\rho_0)\subset S_h(0,\rho)$, где $\rho_\ell=\dfrac{e^{L_0h}L_1Th}{1-e^{L_0h}L_1Th}\|u^{(\ell)}[\cdot]-u^{(\ell-1)}[\cdot]\|_1$, $\ell=\overline{1,k-1}$, в множестве $S_h(u^{(k)}[t],\rho_k)$, $\rho_k=\dfrac{e^{L_0h}L_1Th}{1-e^{L_0h}L_1Th}\|u^{(k)}[\cdot]-u^{(k-1)}[\cdot]\|_1$, будем искать $(k+1)$-ое приближение решения системы уравнений (4) по итерационному процессу:
$u_r^{(k+1,0)}(t)=u_r^{(k)}(t)$,

$$u_r^{(k+1,m+1)}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r+u_r^{(k+1,m)}(\tau))d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j+u_j^{(k)}(s))dsd\tau,$$
$$t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N},\quad k=1,2,\ldots,\quad m=0,1,2,\ldots.$$

При $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $m=1,2,\ldots$, справедливы оценки

$$\|u_r^{(k+1,1)}(t)-u_r^{(k+1,0)}(t)\|\leq L_1Th\max_{j=\overline{1,N}}\sup_{s\in[(j-1)h,jh)}\|u_j^{(k)}(s)-u_j^{(k-1)}(s)\|,$$

$$\|u_r^{(k+1,m+1)}(t)-u_r^{(k+1,m)}(t)\| \le \frac{(L_0(t-(r-1)h))^m}{m!}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k+1,1)}(t)-u_r^{(k+1,0)}(t)\|, \quad (18)$$

$$\|u_r^{(k+1,m+1)}(t)-u_r^{(k+1,0)}(t)\| \le \sum_{i=0}^{m}\frac{(L_0(t-(r-1)h))^i}{i!}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k+1,1)}(t)-u_r^{(k+1,0)}(t)\|. \quad (19)$$

Из (18) следует равномерная сходимость последовательности $u^{(k+1,m)}[t]$ к $u^{(k+1)}[t] \in S_h(u^{(k)}[t],\rho_k)$.

Переходя в (19) к пределу при $m\to\infty$, получим оценки

$$\|u_r^{(k+1)}(t)-u_r^{(k)}(t)\| \le e^{L_0(t-(r-1)h)}L_1Th\|u^{(k)}[\cdot]-u^{(k-1)}[\cdot]\|_1, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N},$$

откуда

$$\|u^{(k+1)}[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]\|_1 \le e^{L_0h}L_1Th\|u^{(k)}[\cdot]-u^{(k-1)}[\cdot]\|_1 < \rho_k. \quad (20)$$

В силу условия а) система функций $u^{(k)}[t]$ при $k\to\infty$ сходится к $\widetilde{u}[t]$ по норме пространства $C([0,T],h,R^{nN})$ и $\widetilde{u}[t]\in S_h(0,\rho)$. Так как

$$\|u_r^{(k+1)}(t)\| \le \|u_r^{(k+1)}(t)-u_r^{(k)}(t)\|+\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\|+\ldots+\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\|+\|u_r^{(0)}(t)\|$$

и справедливы неравенства (11), (17), (20), то

$$\|u_r^{(k+1)}(t)\| \le \rho, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}. \quad (21)$$

При $k\to\infty$ из (21) следует, что $\|\widetilde{u}[\cdot]\|_1<\rho$, т.е. $\widetilde{u}[t]\in S_h(0,\rho)$.

Единственность. Пусть $\widetilde{u}[t]$, $u^*[t]$ – два различных решения уравнения (4) в $S_h(0,\rho)$:

$$\widetilde{u}_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(\tau))d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j+\widetilde{u}_j(s))dsd\tau,\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=\overline{1,N},$$

$$u_r^*(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\widetilde{\lambda}_r+u_r^*(\tau))d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\widetilde{\lambda}_j+u_j^*(s))dsd\tau,\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=\overline{1,N}.$$

Тогда

$$\|\widetilde{u}_r(t)-u_r^*(t)\| \le \int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0\|\widetilde{u}_r(\tau)-u_r^*(\tau)\|d\tau+L_1Th\|\widetilde{u}[\cdot]-u^*[\cdot]\|_1, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N},$$

откуда, используя неравенство Гронуолла-Беллмана [7, с. 9], получим, что

$$\|\widetilde{u}_r(t)-u_r^*(t)\| \le e^{L_0(t-(r-1)h)}L_1Th\|\widetilde{u}[\cdot]-u^*[\cdot]\|_1$$

и, следовательно,

$$\|\widetilde{u}[\cdot]-u^*[\cdot]\|_1 \le e^{L_0h}L_1Th\|\widetilde{u}[\cdot]-u^*[\cdot]\|_1.$$

Отсюда в силу неравенства а) теоремы следует, что $\widetilde{u}_r(t)=u_r^*(t)$ при всех $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$. Теорема 1 доказана.

Далее предположим, что при $\lambda=\widetilde{\lambda}\in R^{nN}$ специальная задача Коши (2), (3) имеет решение $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\ldots,\widetilde{u}_N(t))\in C([0,T],h,R^{nN})$.

По выбранному $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)$ равенствами: $x^0(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $x^0(T)=\widetilde{\lambda}_N+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{u}_N(t)$, определим кусочно-непрерывную вектор-функцию $x^0(t)$.

Выберем числа $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$ и определим множества:
$S(\widetilde{\lambda}, \rho_\lambda) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in R^{nN} : \|\lambda - \widetilde{\lambda}\| < \rho_\lambda\}$,
$S_h(\widetilde{u}[t], \rho_u) = \{u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)) \in C([0,T], h, R^{nN}) : \|u[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1 < \rho_u\}$,
$\widetilde{G}_0(\rho_\lambda, \rho_u) = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - x^0(t)\| < \rho_\lambda + \rho_u\}$,
$\widetilde{G}_1(\rho_\lambda, \rho_u) = \{(t,s,x) : t \in [0,T], s \in [0,T], \|x - x^0(s)\| < \rho_\lambda + \rho_u\}$.

Условие B. Функции $f_0(t,x)$, $f_1(t,s,x)$ непрерывны в $\widetilde{G}_0(\rho_\lambda, \rho_u)$, $\widetilde{G}_1(\rho_\lambda, \rho_u)$ соответственно, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}$ и выполняются неравенства: $\left\|\dfrac{\partial f_0(t,x)}{\partial x}\right\| \le \widetilde{L}_0$, $(t,x) \in \widetilde{G}(\rho_\lambda, \rho_u)$, $\left\|\dfrac{\partial f_1(t,s,x)}{\partial x}\right\| \le \widetilde{L}_1$, $(t,s,x) \in \widetilde{G}_1(\rho_\lambda, \rho_u)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие B и имеют место неравенства в)* $e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th < 1$, *г)* $\dfrac{e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th + e^{\widetilde{L}_0 h} - 1}{1 - e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th}\rho_\lambda < \rho_u$.

Тогда для любого $\lambda^* \in S(\widetilde{\lambda}, \rho_\lambda)$ *специальная задача Коши (2), (3) при* $\lambda = \lambda^*$ *в* $S_h(\widetilde{u}[t], \rho_u)$ *имеет единственное решение* $u^*[t]$ *и справедлива оценка*

$$\|u_r^*(t) - \widetilde{u}_r(t)\| \le \Big(e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)} - 1 + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\frac{e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th}{1 - e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th}\Big)\|\widetilde{\lambda} - \lambda^*\|, \ t \in [(r-1)h, rh), \ r = \overline{1,N}.$$

Доказательство. Возьмем $\lambda^* \in S(\widetilde{\lambda}, \rho_\lambda)$ и найдем решение специальной задачи Коши (2), (3) при $\lambda = \lambda^*$, эквивалентной интегральному уравнению

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \lambda_r^* + u_r(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \lambda_j^* + u_j(s))dsd\tau,$$
$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{22}$$

Для решения уравнения (22) построим следующий итерационный процесс: $u_r^{(0,0)}(t) = \widetilde{u}_r(t)$,

$$u_r^{(0,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \lambda_r^* + u_r^{(0,m)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \lambda_j^* + \widetilde{u}_j(s))dsd\tau,$$
$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Для разности $(u_r^{(0,1)}(t) - u_r^{(0,0)}(t))$ справедливы оценки

$$\|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^{(0,0)}(t)\| = \Big\| \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \lambda_r^* + \widetilde{u}_r(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \lambda_j^* + \widetilde{u}_j(s))dsd\tau -$$
$$- \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(\tau))d\tau - \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \widetilde{\lambda}_j + \widetilde{u}_j(s))dsd\tau \Big\| \le$$
$$\le \int\limits_{(r-1)h}^{t} \widetilde{L}_0\|\lambda_r^* - \widetilde{\lambda}_r\|d\tau + \widetilde{L}_1 Th\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\| \le \widetilde{L}_0(t - (r-1)h)\|\lambda_r^* - \widetilde{\lambda}_r\| + \widetilde{L}_1 Th\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\| <$$
$$< (e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)} - 1)\|\lambda_r^* - \widetilde{\lambda}_r\| + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\| < \rho_u.$$

По итерационному процессу определим функции $u_r^{(0,1)}(t)$ и оценим

$$\|u_r^{(0,2)}(t)-u_r^{(0,1)}(t)\| = \Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(0,1)}(\tau))d\tau - \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(0,0)}(\tau))d\tau\Big\| \le$$
$$\le \frac{\widetilde{L}_0^2(t-(r-1)h)^2}{2!}\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\| + \widetilde{L}_0(t-(r-1)h)\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\| <$$
$$< (e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}-1)\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\| + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\| < \rho_u.$$

Продолжая итерационный процесс, на m-шаге установим оценки

$$\|u_r^{(0,m)}(t)-u_r^{(0,m-1)}(t)\| \le \frac{(\widetilde{L}_0(t-(r-1)h))^m}{m!}\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\| + \frac{(\widetilde{L}_0(t-(r-1)h))^{m-1}}{(m-1)!}\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|,$$

$$\|u_r^{(0,m)}(t)-u_r^{(0,0)}(t)\| \le \sum_{i=1}^{m}\frac{\widetilde{L}_0^i(t-(r-1)h)^i}{i!}\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\| + \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\widetilde{L}_0^i(t-(r-1)h)^i}{i!}\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|. \quad (23)$$

Переходя в (23) к пределу при $m\to\infty$, получим оценку

$$\|u_r^{(0)}(t)-\widetilde{u}_r(t)\| \le \Big(e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}-1\Big)\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\| + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|, \quad (24)$$

таким образом,

$$\|u^{(0)}[\cdot]-\widetilde{u}[\cdot]\|_1 \le \Big(e^{\widetilde{L}_0h}-1+e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th\Big)\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\| < \rho_u.$$

Функции $u_r^{(1)}(t)$ определим с помощью итерационного процесса: $u_r^{(1,0)}(t)=u_r^{(0)}(t)$,

$$u_r^{(1,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(1,m)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\lambda_j^*+u_j^{(0)}(s))dsd\tau,$$
$$t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}. \quad (25)$$

Для разности $u_r^{(1,1)}(t)$ и $u_r^{(1,0)}(t)$ имеет место неравенство

$$\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\| = \Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(1,0)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\lambda_j^*+u_j^{(0)}(s))dsd\tau -$$
$$-\int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(0)}(\tau))d\tau - \int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau,s,\lambda_j^*+\widetilde{u}_j(s))dsd\tau\Big\| \le$$
$$\le \widetilde{L}_1Th\max_{j=\overline{1,N}}\sup_{s\in[(j-1)h,jh)}\|u_j^{(0)}(s)-\widetilde{u}_j(s)\|.$$

Найдем $u_r^{(1,2)}(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, по итерационному процессу (25) и установим оценки

$$\|u_r^{(1,2)}(t)-u_r^{(1,1)}(t)\| = \Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(1,1)}(\tau))d\tau - \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau,\lambda_r^*+u_r^{(1,0)}(\tau))d\tau\Big\| \le$$
$$\le \widetilde{L}_0(t-(r-1)h)\widetilde{L}_1Th\|u^{(0)}[\cdot]-\widetilde{u}[\cdot]\|_1.$$

При предположениях теоремы для всех $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, имеют место оценки

$$\|u_r^{(1,m+1)}(t) - u_r^{(1,m)}(t)\| \le \frac{\Big(\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)\Big)^m}{m!}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(0)}[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1, \tag{26}$$

$$\|u_r^{(1,m+1)}(t) - u_r^{(1,0)}(t)\| \le \sum_{i=0}^{m} \frac{\Big(L_0(t-(r-1)h)\Big)^i}{i!}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(0)}[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1. \tag{27}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (27), получим

$$\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \le e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(0)}[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1, \quad t \in [(r-1)h, rh), \ r = \overline{1, N},$$

откуда

$$\|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_1 \le e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(0)}[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1 \le e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th\Big(e^{\widetilde{L}_0 h} - 1 + e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th\Big)\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\| < \rho_u.$$

Предполагая, что $u_r^{(k)}(t)$ определены, функции $u_r^{(k+1)}(t)$ найдем по итерационному процессу:

$$u_r^{(k+1,0)}(t) = u_r^{(k)}(t),$$

$$u_r^{(k+1,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f_0(\tau, \lambda_r^* + u_r^{(k+1,m)}(\tau))d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} f_1(\tau, s, \lambda_j^* + u_j^{(k)}(s))dsd\tau,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}.$$

Тогда, аналогично (26),(27) справедливы неравенства

$$\|u_r^{(k+1,m+1)}(t) - u_r^{(k+1,m)}(t)\| \le \frac{\Big(\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)\Big)^m}{m!}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(k)}[\cdot] - u^{(k-1)}[\cdot]\|_1,$$

$$\|u_r^{(k+1,m+1)}(t) - u_r^{(k+1,0)}(t)\| \le \sum_{i=0}^{m} \frac{\Big(\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)\Big)^i}{i!}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(k)}[\cdot] - u^{(k-1)}[\cdot]\|_1. \tag{28}$$

Переходя в (28) к пределу при $m \to \infty$, получим оценки

$$\|u_r^{(k+1)}(t) - u_r^{(k)}(t)\| \le e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(k)}[\cdot] - u^{(k-1)}[\cdot]\|_1, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

откуда

$$\|u^{(k+1)}[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\|_1 \le e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(k)}[\cdot] - u^{(k-1)}[\cdot]\|_1 \le$$

$$\le (e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th)^{k+1}\|u^{(0)}[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1 \le (e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th)^{k+1}\Big(e^{\widetilde{L}_0 h} - 1 + e^{\widetilde{L}_0 h}\widetilde{L}_1 Th\Big)\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\| < \rho_u. \tag{29}$$

В силу условия a) система функций $u^{(k+1)}[t]$ при $k \to \infty$ в $S_h(\widetilde{u}[\cdot], \rho_u)$ сходится к $u^*[t]$ по норме пространства $C([0,T], h, R^{nN})$ и

$$\|u_r^{(k+1)}(t) - \widetilde{u}_r(t)\| \le \|u_r^{(k+1)}(t) - u_r^{(k)}(t)\| + \|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| + \ldots + \|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| +$$

$$+ \|u_r^{(0)}(t) - \widetilde{u}_r(t)\| \le e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(k)}[\cdot] - u^{(k-1)}[\cdot]\|_1 + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(k-1)}[\cdot] - u^{(k-2)}[\cdot]\|_1 +$$

$$+ \ldots + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|u^{(0)}[\cdot] - \widetilde{u}[\cdot]\|_1 + (e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)} - 1)\|\lambda_r^* - \widetilde{\lambda}_r\| + e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1 Th\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\|.$$

Отсюда в силу неравенств (24), (29) получим

$$\|u_r^{(k+1)}(t)-\widetilde{u}_r(t)\| \le e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1Th\Big(\big(e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th\big)^k+\big(e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th\big)^{k-1}+\ldots+1\Big)\times$$

$$\times\Big(e^{\widetilde{L}_0h}-1+e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th\Big)\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|+\Big(e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}-1\Big)\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\|+e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|<$$

$$< e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1Th\frac{e^{\widetilde{L}_0h}-1+e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th}{1-e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th}\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|+e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\widetilde{L}_1Th\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|+$$

$$+\Big(e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}-1\Big)\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\|, \qquad t\in[(r-1)h,rh), \qquad r=\overline{1,N}. \tag{30}$$

При $k\to\infty$ из (30) следует, что

$$\|u_r^*(t)-\widetilde{u}_r(t)\| \le \Big(e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}-1+e^{\widetilde{L}_0(t-(r-1)h)}\frac{e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th}{1-e^{\widetilde{L}_0h}\widetilde{L}_1Th}\Big)\|\widetilde{\lambda}-\lambda^*\|, \quad t\in[(r-1)h,rh.$$

Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

[1]. Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А., *Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений*, Известия НАН РК, 2009, № 5(267), С. 30 – 37.

[2]. Джумабаев Д. С., *Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения*, Журнал вычисл. матем. и матем. физ, 2010, Т. 50, № 7, С. 1209 – 1221.

[3]. Джумабаев Д. С., *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения*, Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1989, Т. 29, № 1, С. 50 – 66.

[4]. Васильев В.В., *К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений*, Изв. вузов, 1961, вып. 4, № 4(23), С. 8 – 24.

[5]. Николенко В.Н., *Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма*, Успехи матем. наук, 1952, вып. 5, № 7(51), С. 225 – 228.

[6]. Кривошеин Л.Е., *Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений*, Фрунзе, 1962.

[7]. Филатов А.Н., Шарова Л.В., *Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний*, М., "Наука", 1976.

Статья поступила в редакцию 18.11.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 53 — 58*

УДК 517.956

ЗАДАЧА РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Ж. А. Балдыбек, М. О. Отелбаев

КазНУ им. аль-Фараби
050012, Алматы, ул. Масанчи, 39/47, e-mail: 2261032@mail.ru;
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5

Рассматривается задача распараллеливания для систем линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. Для этого вводятся вариационные рекуррентные формулы. Доказывается теорема сходимости вариационного метода.

I. Один метод приближенного решения линейной неоднородной системы алгебраических уравнений

Пусть n – целое положительное число и $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – матрица с действительными элементами.

Рассмотрим систему уравнений

$$a_{ij}x{=}f_j \ (i,j = 1,2,...,n), \tag{1}$$

где $x = colon(x_1, x_2, ..., x_n)$ – искомый, а $f = colon(f_1, f_2, ..., f_n)$ – известный вектора с действительными элементами.

Для приближенного решения системы (1) вычислим компоненты векторов

$$\psi_j = Ae_j, \tag{2}$$

где e_i – единичный вектор, у которого i-ая компонента есть единица, а остальные нули, т.е.

$$\begin{array}{l} e_1 = (1,0,...,0)^T \\ e_2 = (0,1,...,0)^T \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = (0,0,...,1)^T. \end{array} \tag{3}$$

Keywords: *Problem of parallelizing, linear algebraic equations, variational method*
2010 Mathematics Subject Classification: 35L20
© Ж. А. Балдыбек, М. О. Отелбаев, 2011.

Теперь положим
$$F_0 = f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T. \tag{4}$$

Определим вектора F_1 и Q_1 следующим образом:
$$\delta_1 \langle F_0, \psi_j\rangle = \varepsilon_{1j}, \quad (j = 1, 2, ..., n),$$
$$\delta_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \langle F_0, \psi_j\rangle^2}{\left(\sum_{j=1}^n \langle F_0, \psi_j\rangle \psi_j\right)^2},$$
$$F_1 = F_0 - \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j}\psi_j, \tag{5}$$
$$Q_1 = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j} e_j.$$

В случае
$$\sum_{j=1}^n \langle F_0, \psi_j\rangle \psi_j = 0$$
положим
$$\delta_1 = \|f\|^2 \left(2\sum_{j=1}^n \langle f, \psi_j\rangle\right)^{-1}. \tag{6}$$

Для квадрата нормы F_1, учитывая (5), имеем
$$\|F_1\|^2 = \|F_0\|^2 - 2\sum_{j=1}^n \langle \varepsilon_{1j}\psi_j, F_0\rangle + \left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_{1j}\psi_j\right\|^2 = \|F_0\|^2 - 2\delta_1\sum_{j=1}^n \langle F_0, \psi_j\rangle +$$
$$+\delta_1^2 \left\|\sum_{j=1}^n \psi_j \langle F_0, \psi_j\rangle\right\|^2 = \|F_0\|^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n \langle F_0, \psi_j\rangle^2\right)^2}{\left|\sum_{j=1}^n \psi_j \langle F_0, \psi_j\rangle\right|^2}, \tag{7}$$
если
$$\sum_{j=1}^n \psi_j \langle F_0, \psi_j\rangle \neq 0,$$
если же
$$\sum_{j=1}^n \psi_j \langle F_0, \psi_j\rangle = 0,$$
то получаем (в силу (6)), что
$$F_0 = 0. \tag{8}$$

Если же
$$\sum_{j=1}^n \langle F_0, \psi_j\rangle^2 = 0,$$
то в силу линейной независимости $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ получаем (8).

Пусть F_{k-1} вычислен, вычислим F_k.

$$\begin{cases} F_k = F_{k-1} - \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{kj}\psi_j, \\ \delta_k\langle F_{k-1},\psi_j\rangle = \varepsilon_{kj}, \\ \delta_k = \left[\sum\limits_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right] \left\| \left[\sum\limits_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle\psi_j\right]^{-2} \right\|, \\ Q_k = Q_{k-1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{kj}\psi_j. \end{cases} \tag{9}$$

Если

$$\sum_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle\psi_j \neq 0, \tag{10}$$

то для нормы F_k имеем

$$\|F_k\|^2 = \|F_{k-1}\|^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right)^2}{\left\|\sum_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle\psi_j\right\|^2}\ . \tag{11}$$

Если же (10) не выполнено, то берем

$$\delta_k = 2^{-1}\|F_{k-1}\|^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right). \tag{12}$$

Тогда

$$\|F_k\|^2 = 0. \tag{13}$$

Если выполняется (13), т.е. если $\|F_k\| = 0$, то из (11) и линейной независимости $\{\psi_j\}_{j=1}^{n}$ следует, что $F_{k-1} = 0$. Поэтому решение уравнения (1) есть Q_{k-1}, следовательно, задача окажется решенной.

Пользуясь вышеприведенными высказываниями, докажем следующую теорему

Теорема 1. *Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – обратимая квадратная матрица ($n \geq 1$), $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базисные вектора из (3), а $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ – векторы из (2), т.е. $\psi_j = a_{ij}e_j$ и $f = F_0$ – вектор из (4). Определим F_k, δ_k, Q_k ($k = 0, 1, ...$) по рекуррентным формулам (9). Тогда $Q = \lim\limits_{k\to\infty} Q_k$ есть решение уравнения $Au = f$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\|F_k\|$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как матрица обратима, то система векторов ψ_j ($i = 1, 2, ..., n$) линейно независима. Поэтому если не выполнено (10), то получаем (13), т.е. $F_k = 0$. При этом все дальнейшие F_{k+1}, F_{k+2}, ... будут нулями и за Q_{k+1}, Q_{k+2}, ... берем Q_k.

Если при всех $k = 0, 1, 2, ...$ выполнены (10), то из (11) получаем, что $\|F_k\|$ монотонно строго убывает при возрастании k, причем

$$\lim_{k\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right] \left\| \left[\sum_{j=1}^{n} \langle F_{k-1},\psi_j\rangle\psi_j\right] \right\|^{-2} = 0. \tag{14}$$

Если же соотношение не выполняется, то начиная с некоторого номера правая часть (11) становится отрицательной. Это невозможно, ибо левая часть неотрицательна. Но

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right)\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle\psi_j\right\|^{-2}\geq\left(\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right)\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle\psi_j\right\|^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}\|\psi_j\|^2\right)^{-1}\geq\left(\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\|\psi_j\|^2\right)^{-1}. \qquad (15)$$

Отсюда и из (14) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2=0.$$

Но $\{\psi_j\}_{j=1}^{n}$ – линейно независимая система векторов, поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\|F_{k-1}\|=0.$$

Отсюда получаем доказываемую теорему.

Далее

$$\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2=\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},Ae_j\rangle^2=\sum_{j=1}^{n}\langle A^*F_{k-1},e_j\rangle^2=\|A^*F_{k-1}\|^2.$$

Но так как

$$\left\|A^{-1}\right\|=\left\|A^{*-1}\right\|$$

и матрица A обратима, мы из последнего равенства выводим:

$$\sum_{j=1}^{n}\langle F_{k-1},\psi_j\rangle^2\geq\left\|A^{-1}\right\|^2\|\delta_{k-1}\|^2. \qquad (16)$$

Теперь пользуясь (15) и (16), получаем из (11)

$$\|F_k\|^2\leq\|F_{k-1}\|^2-C_1^{-1}\|F_{k-1}\|^2=\|F_{k-1}\|^2\left(1-C_1^{-1}\right).$$

Из этого неравенства вытекает, что скорость сходимости Q_k к решению Q уравнения $AQ-f=0$ есть геометрическая прогрессия, т.е.

$$\|Q-Q_k\|^2\leq C_2\|F_k\|^2\leq C_3\left(1-C_1^{-1}\right)^k. \qquad (17)$$

Отметим, что в (17) число C_3 зависит от нормы $\left\|A^{-1}\right\|$ и размерности n матрицы A. При больших n число C_3 может оказаться слишком малым.

Но это не должно смущать, так как вычисляющая мощь компьютеров возрастает из года в год.

Замечание 1. *Если матрица A необратима, то*

a) при некотором $k\geq 0$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\langle F_0,\psi_j\rangle\psi_j=0;$$

b) величина $\|F_k\|$ не стремится к нулю.

Выполнение *a*) и *b*) есть достаточные признаки необратимости матрицы A.

Вообще говоря, необходимым и достаточным условием обратимости A является линейная независимость системы $\{\psi_j\}_{j=1}^n$.

Замечание 2. *При реализации предлагаемого метода числа $\langle F_r, \psi_j\rangle$ могут оказаться слишком малыми, поэтому при больших n ошибки округления могут сильно мешать численным расчетам. Вообще говоря, в случае когда размерность n матрицы A достаточно велика, ошибки округления мешают независимо от выбранного метода.*

Замечание 3. *Отметим, что предложенный метод вариационно-итерационный и поэтому устойчивый. На каждом цикле используется $2n^2 + 5n$ умножений (некоторые умножения могут оказаться тривиальными) и не более $10n$ сложений.*

В следующих пунктах мы приводим способ распараллеливания вычислительного процесса, предназначенного для решения линейной неоднородной алгебраической системы уравнений, который отличается от рассмотренных в [1], [2].

II. Задача распараллеливания

Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда

$$Ae_j = (a_{ij}, a_{2j}, ..., a_{nj}) = \psi_j,$$

$$e_j = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0).$$

Пусть C_1, C_2, …, C_k – компьютеры, а $1 < n_1 < n_2 < ... < n_{k-1} < n_k = n$ – целые числа.

Компьютеру C_j поручаем вычислить

$$\big\langle \psi_{n_{j-1}+i}, F_r \big\rangle, \quad n_{j-1} + i, \quad i = 1, 2, ..., n_j - n_{j-1};$$

$$\sum_{i=1}^{n_j - n_{j-1}} \big\langle \psi_{n_{j-1}+i}, F_r \big\rangle^2 \equiv M_{j,r},$$

$$\sum_{i=1}^{n_j - n_{j-1}} \big\langle \psi_{n_{j-1}+i}, F_r \big\rangle \psi_{n_{j-1}+i} \equiv R_{j,r}.$$

Для проведения этих вычислений компьютер C_j $(j = 1, 2, ..., k)$ проделывает $2(n_j - n_{j-1})n + (n_j - n_{j-1})$ умножений и $(n_j - n_{j-1})(n + 1)$ сложений.

Полученное передаем компьютеру C_{k+1}, который вычисляет

$$\sum_{j=1}^{k} M_{jr} = M_r = \sum_{\ell=1}^{n} \langle \psi_\ell, F_r \rangle^2,$$

$$\sum_{j=1}^{k} R_{jr} = R_r = \sum_{\ell=1}^{n} \langle \psi_\ell, F_r \rangle \psi_\ell,$$

$$\delta \|R_r\|^2 \equiv \left\| \sum_{\ell=1}^{n} \langle \psi_\ell, F_r \rangle \psi_\ell \right\|^2,$$

$$\delta = \frac{M_r}{\|R_r\|^2}$$

и положим

$$F_{r+1} = F_r - \delta R_r,$$

$$\Theta_{r+1} = \Theta_r + \delta \sum_{\ell=1}^{n} \langle \psi_\ell, F_r \rangle e_\ell.$$

В качестве F_0 берется f, а в качестве Θ_0 берется 0.

Компьютер C_{k+1} проделывает одно деление (если $\|R_r\| \neq 0$), n умножений, $k+kn+n+n = (k+1)n+2n$ сложений.

Общее количество умножений будет $2n^2+2n$. Сложений меньше чем $3n^2$.

Чтобы компьютеры C_1, C_2, ..., C_k заканчивали цикл одновременно (почти одновременно), числа $n_j - n_{j-1}$ берем пропорциональными скорости v_j компьютера C_j (точно пропорционально брать трудно, т.к. $n_j - n_{j-1}$ – целые, поэтому берем так: $n_j - n_{j-1} - 1 < \gamma v_j \leq n_j - n_{j-1} + 1$).

Замечание 4. *При больших n и k время работы компьютера C_{k+1} будет пренебрежимо малым чем время работы других компьютеров. Поэтому компьютер C_{k+1} может быть виртуальным и совмещен с одним из компьютеров $\{C_j\}_{j=1}^{k}$.*

Замечание 5. *Метод итерационно-вариационный. При реализации s – итераций количество всех умножений будет $2sn(n+1)$, делений не более $2s$, сложений не более $6sn^2$ (n – размерность матрицы A).*

Если бы работал только один компьютер, то умножений было бы также $2sn(n+1)$ и делений $2s$. Поэтому для реализации s – итераций k компьютеров затратят времени примерно в $k-1$ раз меньше, чем один компьютер.

Цитированная литература

[1]. Балдыбек Ж. А., Отелбаев М. О., *Задачи распараллеливания*, Матем. журнал, 2009, Т. 9, №4 (34), С. 35 – 42.

[2]. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В., *Параллельные вычисления*, Санкт-Петербург: "БХВ-Петербург", 2002.

Статья поступила в редакцию 28.01.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 59 – 66*

УДК 517.927.25

БАЗИСНОСТЬ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ САМАРСКОГО-ИОНКИНА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

М. А. Садыбеков, Н. С. Иманбаев

Институт математики, информатики и механики МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: makhmud-s@mail.ru;
Международный Казахско-Турецкий университет им.Х. Ясави
160018, Шымкент, ул. А.Байтурсынова, 13, e-mail: imanbaevnur@mail.ru

В работе рассматривается спектральная задача Самарского-Ионкина для уравнения Шредингера с интегральным возмущением в краевых условиях. Предполагается, что невозмущенная задача обладает системой собственных функций, образующих базис Рисса в $L_2(0,1)$. Показано, что свойство базисности систем корневых функций задачи может меняться при каком угодно малом изменении ядра интегрального возмущения.

В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(u)=-u''(x)+q(x)u(x),\ 0<x<1, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_1(u)\equiv u'(0)-u'(1)=0,\ U_2(u)\equiv u(0)=0. \tag{2}$$

В литературе эту задачу называют задачей Самарского-Ионкина.

Пусть $\mathcal{L}_1$ – оператор в $L_2(0,1)$, заданный выражением (1) и "возмущенными" краевыми условиями

$$U_1(u)=0,\ U_2(u)=\int_0^1\overline{p(x)}u(x)dx,\ p(x)\in L_2(0,1). \tag{3}$$

В настоящей работе в предположении, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой собственных и присоединенных функций (СиПФ), образующей базис Рисса в $L_2(0,1)$, мы построим характеристический определитель спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}_1$. На

Keywords: *Eigenvalues, eigenfunctions, boundary problem, Riesz basis, ordinary differential operator, the characteristic determinant*

2010 Mathematics Subject Classification: 34L10, 47E05, 34B10

© **М. А. Садыбеков, Н. С. Иманбаев, 2011.**

основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса СиПФ задачи при интегральном возмущении краевого условия.

Вопрос о базисности СиПФ оператора $\mathcal{L}_1$ с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [1], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [2, с.66–67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности – базисность Рисса СиПФ.

Для невозмущенного оператора $\mathcal{L}_0$ базисность Рисса со скобками СиПФ в случае регулярных краевых условий установлена в [3]. Если же краевые условия – усиленно регулярные, то СиПФ образуют базис Рисса [4, 5]. Для уравнения второго порядка вопрос базисности Рисса СиПФ с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями рассматривался в [6]. В нашем случае краевые условия (2) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому для него не применимы результаты [1], а требуется дополнительное исследование.

Применяя интегрирование по частям, получаем формулу Лагранжа

$$\int_0^1 l(u)\overline{v(x)}dx - \int_0^1 u(x)\overline{l^*(v)}dx = \left[u'(0)-u'(1)\right]\overline{v(0)} + u'(1)\left[\overline{v(0)}-\overline{v(1)}\right] - u(0)\overline{v'(0)} + u(1)\overline{v'(1)}. \tag{4}$$

Здесь $l^*(v)$ – сопряженное дифференциальное выражение

$$l^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x),\ 0<x<1. \tag{5}$$

Следовательно, оператор $\mathcal{L}_0^*$, сопряженный оператору $\mathcal{L}_0$, задается дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями

$$V_1(v) \equiv v'(1) = 0,\ V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \tag{6}$$

А оператор $\mathcal{L}_1^*$, сопряженный оператору $\mathcal{L}_1$, задается нагруженным дифференциальным выражением

$$l_1^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) - p(x)v'(0),\ 0<x<1,$$

и краевыми условиями (6).

Построим теперь характеристический определитель спектральной задачи (1), (3). Пусть $u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения $l(u)=\lambda u$, удовлетворяющих условиям $u_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}, j,k=1,2$. Здесь δ_{jk} – символ Кронекера. Представляя общее решение по формуле $u(x,\lambda) = C_1u_1(x,\lambda)+C_2u_2(x,\lambda)$ и удовлетворяя его краевым условиям (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$C_1[-u_1'(1,\lambda)] + C_2[1-u_2'(1,\lambda)] = 0,$$

$$C_1\left[1-\int_0^1\overline{p(x)}u_1(x,\lambda)dx\right] + C_2\left[-\int_0^1\overline{p(x)}u_2(x,\lambda)dx\right] = 0.$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1), (3):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -u_1'(1,\lambda) & 1-u_2'(1,\lambda) \\ 1-\int_0^1\overline{p(x)}u_1(x,\lambda)dx & -\int_0^1\overline{p(x)}u_2(x,\lambda)dx \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1), (2) получается отсюда при $p(x)=0$. Обозначим его через $\Delta_0(\lambda)$.

В дальнейшем будем предполагать, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой СиПФ, образующей базис Рисса в $L_2(0,1)$. Тогда СиПФ сопряженного оператора $\mathcal{L}_0^*$ также образуют базис Рисса. Пусть λ_k^0 – собственные значения оператора $\mathcal{L}_0$ кратности m_k^0+1, которым соответствуют собственные функции $u_{k0}^0(x)$ и цепочки присоединенных функций $u_{kj}^0(x), j=\overline{1,m_k^0}$. Тогда биортогональная система состоит из собственных $v_{km_k^0}^0(x)$ и присоединенных функций $v_{kj}^0(x), j=\overline{0,m_k^0-1}$ оператора $\mathcal{L}_0^*$, соответствующих собственным значениям $\overline{\lambda_k^0}$. Очевидно, что система СиПФ $\left\{v_{kj}^0(x), j=\overline{0,m_k^0}, k=\overline{1,\infty}\right\}$ оператора $\mathcal{L}_0^*$ также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Функцию $p(x)$ представим в виде ряда по этому базису

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0}a_{kj}v_{kj}^0(x)\right]. \tag{8}$$

Используя (8), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим

$$\int_0^1\overline{p(x)}u_s(x,\lambda)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0}\overline{a_{kj}}(u_s(x,\lambda),v_{kj}^0(x))\right],\ s=1,2. \tag{9}$$

Для того, чтобы избежать проблему выбора присоединенных функций, будем считать, что СиПФ сопряженной задачи строятся по формулам

$$\mathcal{L}_0^*v_{km_k^0}^0=\overline{\lambda_k^0}v_{km_k^0}^0,\ \mathcal{L}_0^*v_{kj}^0=\overline{\lambda_k^0}v_{kj}^0+\sqrt{\overline{\lambda_k^0}}v_{kj+1}^0,\ j=\overline{0,m_k^0-1}.$$

Легко проверяется следующая цепочка равенств:

$$(\lambda-\lambda_k^0)(u_s(x,\lambda),v_{kj}^0(x))=(\lambda u_s(x,\lambda),v_{kj}^0(x))-(u_s(x,\lambda),\overline{\lambda_k^0}v_{kj}^0(x))=(l(u_s),v_{kj}^0)-$$

$$-(u_s,\mathcal{L}_0^*v_{kj}^0-(\overline{\lambda_k^0})^{\frac12}v_{kj+1}^0)=(l(u_s),v_{kj}^0)-(u_s,\mathcal{L}_0^*v_{kj}^0)+(\lambda_k^0)^{\frac12}(u_s,v_{kj+1}^0).$$

Применяем здесь формулу Лагранжа (4) и краевые условия (6). Тогда для всех $j=\overline{0,m_k^0-1}$ получаем

$$(\lambda-\lambda_k^0)(u_s(x,\lambda),v_{kj}^0(x))=B_{ks}(j)+(\lambda_k^0)^{\frac12}(u_s,v_{kj+1}^0),$$

где обозначено

$$B_{ks}(j)=[u_s'(0)-u_s'(1)]\overline{v_{kj}^0(0)}-u_s(0)\overline{v_{kj}^{0\prime}(0)}. \tag{10}$$

Повторяя подобные вычисления (m_k^0-1-j) раз, получаем

$$(u_s(x,\lambda),v_{kj}^0(x))=\sum_{r=0}^{m_k^0-1-j}B_{ks}(j+r)\frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda-\lambda_k^0]^{r+1}}+\left(\frac{(\lambda_k^0)^{\frac12}}{\lambda-\lambda_k^0}\right)^{m_k^0-j}(u_s,v_{km_k^0}^0).$$

Аналогично, для собственной функции $v_{km_k^0}^0$ получаем

$$(\lambda-\lambda_k^0)(u_s(x,\lambda),v_{km_k^0}^0(x))=B_{ks}(m_k^0).$$

Объединяя два последних равенства, имеем

$$(u_s(x,\lambda),v_{kj}^0(x))=\sum_{r=0}^{m_k^0-j}B_{ks}(j+r)\frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda-\lambda_k^0]^{r+1}}\ .$$

Подставляя сюда явный вид из обозначения (10), находим

$$(u_s(x,\lambda), v_{kj}^0(x)) = [u_s'(0) - u_s'(1)] \left[\sum_{r=0}^{m_k^0 - j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda - \lambda_k^0]^{r+1}} \overline{v_{kj+r}^0(0)} \right] - u_s(0) \left[\sum_{r=0}^{m_k^0 - j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda - \lambda_k^0]^{r+1}} \overline{v_{kj+r}'^0(0)} \right]. \tag{11}$$

Теперь (11) можем подставить в формулу (9). Тогда

$$\int_0^1 \overline{p_m(x)} u_s(x,\lambda) dx = [u_s'(0) - u_s'(1)] A_1(\lambda) - u_s(0) A_2(\lambda),$$

где обозначено

$$A_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{m_k^0} \overline{a_{kj}} \left(\sum_{r=0}^{m_k^0 - j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda - \lambda_k^0]^{r+1}} \overline{v_{kj+r}^{0(i-1)}(0)} \right) \right]. \tag{12}$$

Используя полученное в (7), после элементарных преобразований получаем

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) - \Delta_0(\lambda) A_2(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 - A_2(\lambda)). \tag{13}$$

Подставляя сюда значение $A_2(\lambda)$ из (12), находим представление характеристического определителя оператора $\mathcal{L}_1$:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{m_k^0} \overline{a_{kj}} \left(\sum_{r=0}^{m_k^0 - j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda - \lambda_k^0]^{r+1}} \overline{v_{kj+r}'^0(0)} \right) \right] \right). \tag{14}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть задача (1), (2) обладает собственными значениями* λ_k^0 *и СиПФ, образующими базис Рисса. Тогда характеристический определитель задачи (1), (3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (14), где* $\Delta_0(\lambda)$ *– характеристический определитель задачи (1), (2);* $\{v_{kj}^0\}$ *– СиПФ сопряженной невозмущенной задачи;* a_{kj} *– коэффициенты Фурье биортогонального разложения (8) по этой системе функции* $p(x)$ *.*

В представлении (13) функция $A_2(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda = \lambda_k^0$ максимального порядка $m_k^0 + 1$. Однако в этих же точках функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули порядка $m_k^0 + 1$. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (14) является целой аналитической функцией переменного λ .

Более просто формула (14) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде конечной суммы в (8). То есть, когда существует такой номер N, что $a_{kj} = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (14) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{j=0}^{m_k^0} \overline{a_{kj}} \left(\sum_{r=0}^{m_k^0 - j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda - \lambda_k^0]^{r+1}} \overline{v_{kj+r}'^0(0)} \right) \right] \right). \tag{15}$$

Из этого частного случая формулы (14) несложно обосновать следующее

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для любых наперед заданных чисел – комплексного* $\widehat{\lambda}$ *и натурального* $\widehat{m}$ *всегда существует такая функция* $p(x)$, *что* $\widehat{\lambda}$ *будет являться собственным значением задачи (1), (3) кратности* $\widehat{m}$ *.*

Из анализа формулы (15) также легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_k^0)=0$ для всех $k>N$. То есть все собственные значения $\lambda_k^0,\ k>N$ невозмущенной задачи (1), (2) являются собственными значениями возмущенной задачи (1), (3). Также не трудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений $\lambda_k^0,\ k>N$.

Более того, из условия биортогональности систем СиПФ сопряженных задач следует, что в этом случае $\int_0^1 \overline{p(x)}u_{kj}^0(x)dx=0,\ j=\overline{0,m_k^0},\ k>N$. Поэтому СиПФ $u_{kj}^0(x)$ задачи (1), (2) при $k>N$ удовлетворяют краевым условиям (3) и, следовательно, являются СиПФ задачи (1), (3). Значит в этом случае система СиПФ задачи (1), (3) отличается от системы СиПФ задачи (1), (2) (образующей базис Рисса) лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система СиПФ задачи (1), (3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

В силу базисности Рисса в $L_2(0,1)$ системы СиПФ $\{v_{kj}^0(x)\}$ сопряженной невозмущенной задачи, множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (8) является плотным в $L_2(0,1)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть задача (1), (2) обладает СиПФ, образующими базис Рисса. Тогда множество функций $p(x)\in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ задачи (1), (3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.*

Отметим, что в [7] аналог теоремы 2 доказан для частного случая интегрального возмущения периодических краевых условий для оператора двукратного дифференцирования. Дополнительно в [7] доказано, что множество функций $p(x)\in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ задачи (с возмущенными периодическими краевыми условиями) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, также является плотным в $L_2(0,1)$. В нашем случае верна

Теорема 3. *Пусть задача (1), (2) обладает СиПФ, образующими базис Рисса в $L_2(0,1)$. Тогда множество функций $p(x)\in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ задачи (1), (3) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Так как задача (1), (2) обладает системой СиПФ, образующей базис Рисса, то собственные значения задачи – асимптотически двукратные и соответствующие им корневые подпространства состоят из одной собственной и одной присоединенной функций [6]. Асимптотическая двукратность собственных значений означает существование такого числа N_0, что все собственные значения λ_k^0 с номерами $k>N_0$ будут двукратными.

Пусть $\{v_{kj}^0(x), j=\overline{0,m_k^0}, k=\overline{1,\infty};\ m_k^0=1$ для $k>N_0\}$ – система СиПФ задачи (1), (2), образующая базис Рисса в $L_2(0,1)$. Очевидно, что множество функций $p(x)\in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда (8), коэффициенты которого асимптотически, то есть начиная с некоторого номера, обладают свойством $a_{k0}=0,\ a_{k1}\neq 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи (1), (3) не образует даже обычного базиса. Не уменьшая общности, будем считать, что $a_{k0}=0,\ a_{k1}\neq 0$ для всех $k>N_0$. Тогда функция $p(x)$ представима в виде ряда

$$p(x)=\sum_{k=1}^{N_0}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0}a_{kj}v_{kj}^0(x)\right]+\sum_{k=N_0+1}^{\infty}a_{k1}v_{k1}^0(x).$$

Поэтому характеристический определитель (14) задачи (1),(3) в нашем конкретном случае имеет вид

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\left(1+\sum_{k=1}^{N_0}\left[\sum_{j=0}^{m_k^0}\overline{a_{kj}}\left(\sum_{r=0}^{m_k^0-j}\frac{(\lambda_k^0)^{\frac{r}{2}}}{[\lambda-\lambda_k^0]^{r+1}}\overline{v_{kj+r}'^0(0)}\right)\right]+\sum_{k=N_0+1}^{\infty}\overline{a_{k1}}\frac{\overline{v_{k_1}'^0(0)}}{\lambda-\lambda_k^0}\right). \tag{16}$$

Пусть $c(x,\lambda), s(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения $l(u) = \lambda u$ с условиями $c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0$. Стандартными вычислениями легко показать, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1), (2) имеет вид $\Delta_0(\lambda) = 1 - s'(1,\lambda)$, а собственная функция равна $u^0_{k0}(x) = C_0 s(x,\lambda^0_k)$. Константа C_0 выбирается из условия нормировки собственных функций $\|u^0_{k0}(x)\| = 1$.

Так как все собственные значения $\lambda^0_k, k > N_0$, задачи (1), (2) – двукратные, то из (16) легко видеть, что $\Delta_1(\lambda^0_k) = 0$, то есть λ^0_k также является собственным значением задачи (1), (3). При этом в силу того, что $a_{k1} \neq 0$ для всех $k > N_0$, собственные значения λ^0_k, $k > N_0$, задачи (1), (3) будут однократными.

Более того, из условия биортогональности систем СиПФ сопряженных задач следует, что в этом случае $\int_0^1 \overline{p(x)} u^0_{k0}(x)dx = 0$, $k > N_0$. Поэтому собственные функции $u^0_{k0}(x)$ задачи (1), (2) при $k > N_0$ удовлетворяют краевым условиям (3) и, следовательно, являются собственными функциями задачи (1), (3). Таким образом, при $k > N_0$ собственные функции задачи (1), (3), соответствующие собственным значениям λ^0_k, имеют вид

$$u^1_{k0}(x) = C_0 s(x,\lambda^0_k). \tag{17}$$

Константу C_0 выберем из условия нормировки собственных функций $\|u^1_{k0}(x)\| = 1$.

Для оценки асимптотики константы C_0 нам понадобится асимптотика фундаментальных решений [2, с.59], $\rho = \sqrt{\lambda}$,

$$\begin{array}{ll} c(x,\lambda) = \cos\rho x\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], & s(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ c'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], & s'(x,\lambda) = \cos\rho x\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{array} \tag{18}$$

Так как задача Самарского-Ионкина является регулярной по Биркгофу краевой задачей, то ее собственные значения имеют следующую асимптотику [2, с.59]: $\sqrt{\lambda^0_k} = \rho^0_k = 2k\pi\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$. Поэтому

$$1 = \|u^1_{k0}(x)\| = |C_0|\|s(x,\lambda^0_k)\| = |C_0|\frac{1}{\sqrt{2}\rho^0_k}\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right].$$

Следовательно, константа C_0 имеет асимптотику $C_0 = \sqrt{2}\rho^0_k\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$, а собственные функции: $u^1_{k0}(x) = \sqrt{2}\sin\rho^0_k x\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$.

Построим теперь собственные функции сопряженной задачи, то есть оператора $\mathcal{L}^*_1$, соответствующие собственному значению $\overline{\lambda^0_k}$, $k > N_0$. Они удовлетворяют уравнению

$$-v''(x) + \overline{q(x)}v(x) - p(x)v'(0) = \overline{\lambda^0_k v(x)},\ 0 < x < 1, \tag{19}$$

и краевым условиям (6).

Обозначая $v'(0) = C_3$, общее решение уравнения (19) представим в виде

$$v(x) = C_1\overline{c(x,\lambda^0_k)} + C_2\overline{s(x,\lambda^0_k)} - C_3\int_x^1\left[\overline{c(x,\lambda^0_k)s(t,\lambda^0_k)} - \overline{c(t,\lambda^0_k)s(x,\lambda^0_k)}\right]p(t)dt.$$

Удовлетворяя его краевым условиям (6), с учетом $v'(0) = C_3$, $s'(1,\lambda^0_k) = 1$ и $\int_0^1\overline{s(t,\lambda^0_k)}p(t)dt = 0$, $k > N_0$, получаем линейную систему

$$\left\{\begin{array}{l} C_1\overline{c'(1,\lambda^0_k)} + C_2 = 0, \\ C_1\left[1 - \overline{c(1,\lambda^0_k)}\right] - C_2\overline{s(1,\lambda^0_k)} = 0, \\ -C_2 + C_3\left[1 - \int_0^1\overline{c(t,\lambda^0_k)}p(t)dt\right] = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta_1(\lambda_k^0) = \overline{\Delta_0(\lambda_k^0)}A(\lambda_k^0) = 0, \quad \text{где } A(\lambda_k^0) = \left[1 - \int_0^1 \overline{c(t,\lambda_k^0)}p(t)dt\right].$$

Поэтому система (20) имеет ненулевое решение

$$C_2 = -C_1\overline{c'(1,\lambda_k^0)}, \; C_3 = -C_1\frac{\overline{c'(1,\lambda_k^0)}}{A(\lambda_k^0)}.$$

Подставляя полученное в общее решение уравнения (19), получаем собственную функцию

$$v_{k0}^1(x) = C_1\left\{\overline{c(x,\lambda_k^0)} - \overline{c'(1,\lambda_k^0)s(x,\lambda_k^0)} + \frac{\overline{c'(1,\lambda_k^0)}}{A(\lambda_k^0)}\int_x^1\left[\overline{c(x,\lambda_k^0)s(t,\lambda_k^0)} - \overline{c(t,\lambda_k^0)s(x,\lambda_k^0)}\right]p(t)dt\right\}.$$

При этом из асимптотики (18) фундаментальной системы решений несложно получить, что $A(\lambda_k^0) = \left[1 + O\left(\frac{1}{\rho_k^0}\right)\|p(x)\|\right]$ и, следовательно,

$$\|v_{k0}^1(x)\| = |C_1|O(1). \tag{21}$$

Константу C_1 следует определять из условия биортогональности $(u_{k0}^1(x), v_{k0}^1(x)) = 1$. Подставляя сюда выражения (17) и (21), учитывая асимптотику C_0 и фундаментальной системы решений (18), стандартными вычислениями находим: $C_1O\left(\frac{1}{\rho_k^0}\right) = 1$. Поэтому $C_1 = O(\rho_k^0)$ является неограниченной величиной. Отсюда, учитывая нормированность собственной функции $u_{k0}^1(x)$ и оценку (21) для собственной функции $v_{k0}^1(x)$, получаем

$$\lim_{k\to\infty}\|u_{k0}^1(x)\|\cdot\|v_{k0}^1(x)\| = \infty.$$

То есть не выполнено условие равномерной минимальности [8, с.66] системы корневых функций оператора $\mathcal{L}_1$ и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что в ходе доказательства теоремы нами обоснована сопряженность задачи (1), (3) и задачи (6) для нагруженного уравнения. Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. *Множество P функций $p(x) \in L_2(0,1)$, для которых система корневых функций задачи (6) для нагруженного уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_2(0,1)$. Множество $L_2(0,1)\backslash P$ также всюду плотно в $L_2(0,1)$.*

Результаты настоящей работы в отличие от [1] демонстрируют возможность неустойчивости свойств базисности СиПФ задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

Цитированная литература

[1]. Шкаликов А. А., *О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями*, Вестник МГУ, 1982, №6, С. 12 – 21.

[2]. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, М., 1969.

[3]. Шкаликов А. А. *О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора*, Успехи матем. наук, 1979, Т. 34, №5, С. 235 – 236.

[4]. Михайлов В.П. *О базисах Рисса в* $L_2(0,1)$, ДАН. 1962, Т. 144, №5, С. 981 – 984.

[5]. Кесельман Г.М., *О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов*, Изв. вузов СССР, Математика, 1964, №2, С. 82 – 93.

[6]. Макин А.С., *О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля*, Доклады АН СССР, 2006, Т. 406, № 1, С. 21 – 24.

[7]. Макин А.С., *О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения*, Дифф. уравнения, 2006, Т. 42, № 4, С. 560 – 562.

[8]. *Функциональный анализ*, под ред. С. Г. Крейна, М., 1972.

Статья поступила в редакцию 14.10.2010г.

УДК 517.51

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО РЕГУЛЯРНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

А. Н. Копежанова

ЕНУ им. Л. Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: Kopezhanova@yandex.ru

Изучаются интегральные свойства ортогональных рядов по регулярной системе функций с коэффициентами Фурье из дискретного обобщенного пространства Лоренца $\lambda_q(\omega)$. Доказаны аналоги неравенств Нурсултанова в случае общих пространств Лоренца.

Введение

Пусть f измеримая функция на [0,1] и μ – мера Лебега. Невозрастающая перестановка f^* функции f определяется следующим образом:

$$f^*(t) := \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\},$$

где $m(\sigma, f) := \mu\{x \in [0,1] : |f(x)| > \sigma\}$,

Пусть $0 < q \le \infty$. Пусть ω – неотрицательная функция на $[0,1]$. Обобщенное пространство Лоренца $\Lambda_q(\omega)$ – множество всех измеримых на $[0,1]$ функций f таких, что

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} = \left(\int_0^1 (f^*(t)\omega(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \ \text{ при } \ 0 < q < \infty$$

и

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\omega)} = \sup_{0\le t\le 1} f^*(t)\omega(t) < \infty \ \text{ при } \ q = \infty,$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

В случае $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$, пространства $\Lambda_q(\omega)$ совпадают с классическими пространствами Лоренца L_{pq} ([1], [2]).

Пусть $\mu = \{\mu(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность положительных чисел. $\lambda_q(\mu)$– это пространство всех последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что если $0 < q < \infty$, то

$$\|a\|_{\lambda_q(\mu)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^*\mu(k))^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

Keywords: *Lorentz spaces, Fourier coefficients, inequalities, regular system*
2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 42A16
© **А. Н. Копежанова, 2011.**

если $q=\infty$, то

$$\|a\|_{\lambda_\infty(\mu)}=\sup_k a_k^*\mu(k)<\infty,$$

где $\{a_k^*\}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть f – 1-периодическая функция, интегрируемая на $[0,1]$, и $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система функций. Числа

$$a_n=a_n(f)=\int_0^1 f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx,\ \ n\in\mathbb{N},$$

называются коэффициентами Фурье функции f по системе $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Зависимость интегральных свойств функции и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе можно записывать в виде неравенств.
Если $2\leq q<\infty$, тогда

$$\|f\|_{L_q[0,1]}^q\leq c_1\sum_{k=1}^{\infty}k^{q-2}|a_k|^q. \tag{1}$$

Если $1<q\leq 2$, тогда

$$c_2\sum_{k=1}^{\infty}k^{q-2}|a_k|^q\leq\|f\|_{L_q[0,1]}^q. \tag{2}$$

Если $1<q<\infty$, тогда

$$c_3\sum_{k=1}^{\infty}k^{q-2}\left|\overline{a_k}\right|^q\leq\|f\|_{L_q[0,1]}^q\leq c_4\sum_{k=1}^{\infty}k^{q-2}\left|k\Delta a_k\right|^q, \tag{3}$$

где $\overline{a_k}=\frac{1}{k}\left|\sum_{m=1}^{k}a_m\right|$ и $\Delta a_k=a_k-a_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$.
Если $1<q<\infty$, то

$$c_5\left\|\overline{f}\right\|_{L_q[0,1]}^q\leq\sum_{k=1}^{\infty}k^{q-2}|a_k|^q\leq c_6\left\|tf'\right\|_{L_q[0,1]}^q, \tag{4}$$

где $\overline{f}(t)=\frac{1}{t}\left|\int_0^1 f(s)ds\right|$, $f'(t)-$ производная функции $f(t)$.

Неравенства (1) и (2) называются неравенствами Харди-Литтлвуда. Неравенства Харди-Литлвуда для пространств Лоренца получены Стейном [3], а для обобщенных пространств Лоренца $\Lambda_q(\omega)$ – Л.-Е. Перссоном [4], [5]. Неравенства (3) получены Е. Д. Нурсултановым [6-7]. Эти результаты для обобщенных пространств Лоренца $\Lambda_q(\omega)$ и для регулярной системы доказаны в работе [8]. Неравенства (4) являются двойственными к соотношениям (3) и доказаны в работах [6-7].

Целью данной работы является получение аналогов неравенств (4) для случая регулярной системы функций $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обобщенных пространств Лоренца $\Lambda_q(\omega)$.

Основные результаты

Пусть $\delta>0$, $\omega(t)-$ неотрицательная функция на $[0,\infty)$. Определим класс

$$A_\delta=\Big\{\omega(t):\omega(t)t^{-\delta}-\text{ возрастающая функция, }\ \omega(t)t^{-1+\delta}-\text{убывающая функция}\Big\}.$$

Класс A определяется как $A=\cup_{\delta>0}A_\delta$.

Ортонормированная система $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется регулярной, если существует константа B такая, что
1) для любого отрезка e из $[0,1]$ и $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\left|\int_e \phi_k(x)dx\right| \leq B\min(|e|, 1/k),$$

2) для любого отрезка w из $\mathbb{N}$ и $t \in (0,1]$

$$\left(\sum_{k\in w} \phi_k(\cdot)\right)^*(t) \leq B\min(|w|, 1/t),$$

где $\left(\sum_{k\in w} \phi_k(\cdot)\right)^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $\sum_{k\in w} \phi_k(x)$.

Примерами регулярной системы являются все тригонометрические системы, система Уолша, система Прайса с ограниченной образующей и другие.

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система и $f \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k$. Пусть $1 \leq q \leq \infty$ и $\omega(t)$ принадлежит классу A, тогда*

$$\left(\int_0^1 \left(\overline{f(t)}\omega\left(t\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^*\mu(k)\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{5}$$

где $\overline{f(t)} = \frac{1}{t}\left|\int_0^t f(s)ds\right|$, $\mu(k) = k\omega(\frac{1}{k})$ и c – константа, не зависящая от f.

Теорема 2. *Пусть $1 \leq q \leq \infty$ и $\omega(t)$ принадлежит классу A. Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$– регулярная система и $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ коэффициенты Фурье функции f по системе Φ. Если существует $\lim_{t\to 1-0}\omega(t)f(t) = \omega(1)f(1) < \infty$ и*

$$\left(\int_0^1 \left(tf'(t)\omega\left(t\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

тогда $a \in \lambda_q(\mu)$ и верно неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^*\mu(k)\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_0^1 \left(tf'(t)\omega\left(t\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \omega(1)f(1),$$

где $\mu(k) = k\omega(\frac{1}{k})$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\omega(t)$ из класса A. Это означает, что найдется такое $\delta > 0$, что для $\omega(t)$ выполняются условия: $\omega(t)t^{-\delta}$ является возрастающей функцией, $\omega(t)t^{-1+\delta}$ является убывающей функцией. Пусть функция f из $\Lambda_q(\omega)$, т.е.

$$\left(\int_0^1 \left(f^*(t)\omega\left(t\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Пусть $f \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$. Для всех $t \in [0,1]$ рассмотрим

$$\left|\int_0^t f(s)ds\right| = \left|\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\varphi_k(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \left| \int_0^t \varphi_k(s)ds \right|.$$

Из условия регулярности системы функций Φ, т.е. $\left|\int_0^t \varphi_k(s)ds\right| \leq B\min\left(t, \frac{1}{k}\right)$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left| \int_0^t \varphi_k(s)ds \right| \leq B\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \min\left(t, \frac{1}{k}\right) =$$

$$= B\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \min\left(t, \frac{1}{k}\right) = B\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^* t + \sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} a_k^* \frac{1}{k}\right).$$

Следовательно,

$$\left| \int_0^t f(s)ds \right| \leq B\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^* t + \sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} a_k^* \frac{1}{k}\right).$$

Таким образом, имеет место

$$\left(\int_0^1 \left(\overline{f(t)}\omega\left(t\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq B\left(\int_0^1 \left(\omega(t)\frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^* t + \sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} a_k^* \frac{1}{k}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq c_1\left(\int_0^1 \left(\omega(t)\frac{1}{t} t\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^*\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + c_1\left(\int_0^1 \left(\omega(t)\frac{1}{t}\sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} a_k^* \frac{1}{k}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = c_1\left(I_1 + I_2\right).$$

Оценим сначала I_1.

Пусть ε такое, что $-1 + \frac{1}{q} - \delta < \varepsilon < -1 + \frac{1}{q}$. Поскольку функция $\omega\left(t\right)t^{-\delta}$ является возрастающей, отсюда находим, что

$$I_1 = \left(\int_0^1 \left(\omega(t)\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^*\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega\left(t\right)t^{-\delta}}{t^{-\delta}}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^*\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left(t^{\delta}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} a_k^* \omega\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^{-\delta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_1^{\infty} \left(t^{-\delta}\sum_{k=1}^{[t]} a_k^* \omega\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^{-\delta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\delta}\sum_{k=1}^{n} a_k^* \omega\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^{-\delta}\right)^q \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $\varepsilon < -1 + \frac{1}{q}$, имеем

$$I_1 \le c_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-\delta} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\varepsilon} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{(\delta+\varepsilon)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta q} n^{\delta q + \varepsilon q + q - 1} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\varepsilon} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\varepsilon} \right)^q \sum_{n=k}^{\infty} n^{\varepsilon q + q - 1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее, учитывая, что $\varepsilon > -1 + \frac{1}{q} - \delta$, получим следующую оценку:

$$I_1 \le c_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* k \omega \left(\frac{1}{k} \right) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} = c_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Аналогично оценим I_2. Пусть $-1 + \frac{1}{q} < \varepsilon < -1 + \frac{1}{q} + \delta$. Поскольку функция $\omega(t) t^{-1+\delta}$ является убывающей, получим следующие оценки:

$$I_2 = \left(\int_0^1 \left(\omega(t) \frac{1}{t} \sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} a_k^* \frac{1}{k} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega(t)\, t^{-1+\delta}}{t^{-1+\delta}} \frac{1}{t} \sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} \frac{a_k^*}{k} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \left(t^{-\delta} \sum_{k=\left[\frac{1}{t}\right]}^{\infty} \frac{a_k^*}{k} \omega \left(\frac{1}{k} \right) \left(\frac{1}{k} \right)^{-1+\delta} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_1^{\infty} \left(t^{\delta} \sum_{k=[t]}^{\infty} a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\delta} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\delta} \sum_{k=n}^{\infty} a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\delta} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $\varepsilon < -1 + \frac{1}{q} + \delta$, получим

$$I_2 \le c_5 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\delta} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\varepsilon} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{(-\delta+\varepsilon)q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon q + q - 1} \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\varepsilon} \right)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_6 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* \omega \left(\frac{1}{k} \right) k^{-\varepsilon} \right)^q \sum_{n=1}^{k} n^{\varepsilon q + q - 1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}},$$

а при $\varepsilon > -1 + \frac{1}{q}$ справедлива оценка

$$I_2 \le c_7 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \mu(k))^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (7)$$

Таким образом, объединяя оценки (6) и (7), получим требуемую оценку. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из условия $\omega(t) \in A$ следует, что найдется такое $\delta > 0$, что $\omega(t)t^{-\delta}$ является возрастающей, а $\omega(t)t^{-1+\delta}$ является убывающей функцией, то есть $\mu(n)n^{-\delta}$ возрастает, а $\mu(n)n^{-1+\delta}$ убывает. Тогда верна оценка

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu^q(k)}{k} \le c_1 \frac{\mu^q(n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu^q(k)}{k} \le \frac{1}{n}\mu^q(n)n^{-\delta}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\delta}} \sim \frac{\mu^q(n)}{n}.$$

Далее, воспользуемся теоремой 2.4.12 (ii) из [9] и получим следующее равенство:

$$\lambda_q(\mu) = \left(\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)\right)',$$

при этом двойственное представление нормы последовательности пространства $\lambda_q(\mu)$ (см. [9]) имеет следующий вид:

$$\|a\|_{\lambda_q(\mu)} = \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Применяя равенство Парсеваля, получим

$$\|a\|_{\lambda_q(\mu)} = \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \int_0^1 f(t)g(t)dt =$$

$$= \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(f(t)\int_0^t g(x)dx \,\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(t)\left(\int_0^t g(x)dx\right)dt \right) =$$

$$= \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(f(1)\int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 tf'(t)\frac{1}{t}\left(\int_0^t g(x)dx\right)dt \right).$$

Так как $\overline{g}(t) = \frac{1}{t}\left|\int_0^t f(s)ds\right|$, то получим

$$\|a\|_{\lambda_q(\mu)} \le \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\left| f(1)\int_0^1 g(t)dt \right| + \int_0^1 \left| tf'(t)\overline{g}(t)\right| dt \right).$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\|a\|_{\lambda_q(\mu)} \le \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left[f(1)\int_0^1 |g(t)|dt + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 \left(tf'(t)\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left(\overline{g}(t)\omega^{-1}(t)t\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \right].$$

Из неравенства (5) теоремы 1 следует, что

$$\left(\int_0^1 \left(\overline{g}(t)\omega^{-1}(t)t\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \le$$

$$\le c_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^* n\omega^{-1}(\frac{1}{n})\right)^{q'} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= c_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^* n\mu^{-1}(n)\right)^{q'} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q'}} = c_2\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}.$$

Поскольку $\lim_{t\to 1-0}\mu(t)f(t) = \mu(1)f(1) < \infty$, заметим, что

$$J = \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\mu(1)f(1)\mu^{-1}(1)\int_0^1 |g(t)|dt\right) = \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\mu(1)f(1)\mu^{-1}(1)\overline{g}(1)\right) \le$$

$$\le \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\mu(1)f(1)\sup_t t\mu^{-1}(t)\overline{g}(t)\right).$$

Из неравенства (5) теоремы 1 для пространства $\Lambda_\infty(\mu)$ получим следующую оценку:

$$J \le \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\mu(1)f(1)\sup_n b_n^* n\mu^{-1}(n)\right) \le$$

$$\le \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\mu(1)f(1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^* n\mu^{-1}(n)\right)^{q'} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q'}}\right) =$$

$$= \sup_{\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}=1} \left(\mu(1)f(1)\|b\|_{\lambda_{q'}(\mu^{-1}n)}\right) = \mu(1)f(1).$$

Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

[1]. Берг Й., Лефстрем Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, М., "Мир", 1980.

[2]. Lorentz G. G., *Some new functional spaces*, Ann. Math, 1950, V. 51, P. 37 – 55.

[3]. Stein E. M., *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 1956, V. 83, P. 482 – 492.

[4]. Persson L. E., *Relation between summability of functions and Fourier series*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. Tomus, 1976, V. 27, № 3–4, P. 267–280.

[5]. Persson L. E., *Relation between regularity of periodic functions and their Fourier series*, Ph.D thesis, Dept. of Math. Umeå University, 1974.

[6]. Нурсултанов Е. Д., *О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств*, Известия РАН, 2000, Т. 64, № 1, С. 95 – 122.

[7]. Нурсултанов Е. Д., *Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литтлвуда*, Матем. сб., 1998, Т. 189, № 3, С. 83 – 102.

[8]. Kopezhanova A. N., Nursultanov E. D., Persson L. E. *On summability of the Fourier coefficients for functions from some Lorentz type spaces*, Research Report 8. Department of Mathematics, Luleå University of Technology, 2009, P. 1 – 27.

[9]. Carro M. J., Raposo J. A., Soria J., *Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc., 2007, V. 187, № 877.

Статья поступила в редакцию 07.06.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 74 — 86*

УДК 517.938

ДОПОЛНЕНИЕ СЛАБО РЕГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДО РЕГУЛЯРНЫХ

В. Л. Кулик, А. Н. Кулик, Н. В. Степаненко

Силезский технический университет
Польша, Гливице, ул. Академика, 2, e-mail: ganna_1953@ukr.net;
Национальный технический университет "КПИ"
03056, Украина, Киев, пр-т. Победы, 37, e-mail: Viktor.Kulyk@polsl.pl

Обобщается идея дополнения слабо регулярных линейных расширений до регулярных. Исследуется регулярность некоторых классов линейных расширений динамических систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = A(x)y, \tag{1}$$

где $x \in R^m$, $y \in R^n$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ – вектор-функция определена при всех $x \in R^m$, локально удовлетворяет условию Липшица. Кроме того, будем предполагать, что вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет оценке $\|f(x)\| \le \alpha_1\|x\| + \alpha_2$ при всех $x \in R^m$ с некоторыми неотрицательными постоянными α_1, α_2. Пространство таких функций $f(x)$ будем обозначать $C_{Lip}(R^m)$. Предполагаемые выше условия гарантируют существование единственного решения $x = x(t; x_0)$ задачи Коши $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ при каждом фиксированном значении $x_0 \in R^m$ и это решение определено при всех $t \in R$. Элементами квадратной $n \times n$-мерной матрицы $A(x)$ являются действительные скалярные функции непрерывные и ограниченные на R^m.

Будем использовать следующие обозначения. $C^0(R^m)$ – пространство действительных функций непрерывных и ограниченных на R^m, $\langle y, \bar{y}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \bar{y}_j$ – скалярное произведение в R^n, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$ – норма вектора $y \in R^m$, $\Omega_\tau^t(x_0)$ – фундаментальная матрица решений линейной системы уравнений с параметрами $x_0 \in R^m$

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t; x_0))y, \tag{2}$$

Keywords: *Dynamical system, regular extension, bounded invariant manifold, Green's function*
2010 Mathematics Subject Classification: 34A45, 34B27, 34D20
© В. Л. Кулик, А. Н. Кулик, Н. В. Степаненко, 2011.

нормированная в точке $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x_0)\big|_{t=\tau} = I_n$, I_n – единичная матрица, $C'(R^m; f)$ – подпространство $C^0(R^m)$ таких функций $F(x)$, что суперпозиция $F(x(t; x_0))$ как функция переменной t является непрерывно дифференцируемой функцией, причем по определению

$$\frac{d}{dt}F(x(t;x))\bigg|_{t=0} \stackrel{df}{=} \dot{F}(x) \in C^0(R^m).$$

Иногда при записи решения задачи Коши $x = x(t; x_0) = x(t; x)$ индекс "0" опускается и не пишется.

Рядом с системой (1) будем рассматривать неоднородную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = A(x)y + h(x), \tag{3}$$

где вектор-функция $h(x) \in C^0(R^m)$.

Напомним основные определения [1].

Определение 1. *Говорят, что система (3) имеет ограниченное инвариантное многообразие определенное равенством*

$$y = u(x), \tag{4}$$

если функция $u(x) \in C'(R^m; f)$ и выполняется тождество

$$\dot{u}(x) \equiv A(x)u(x) + h(x) \ \ \forall x \in R^m. \tag{5}$$

Определение 2. *Пусть существует $n \times n$-мерная матрица $C(x) \in C^0(R^m)$ такая, что для функции вида*

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)\, C(x(\tau; x)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(x)\, [C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{6}$$

выполняется оценка

$$\|G_0(\tau, x)\| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\} \tag{7}$$

с некоторыми положительными постоянными K, γ, независимыми от $x \in R^m, \tau \in R$. Тогда функцию (6) принято называть функцией Грина системы (1) задачи об ограниченных инвариантных многообразиях.

Системы (1), которые имеют единственную функцию Грина (6), принято называть регулярными, если система (1) имеет множество различных функций Грина, то эту систему называют слабо регулярной.

Существование функции Грина (6) гарантирует существование ограниченного инвариантного многообразия (4) системы (3) при каждой фиксированной вектор-функции $h(x) \in C^0(R^m)$ и это многообразие записывается в интегральном виде $y = u(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, x) \cdot h(x(\tau; x))\, d\tau$. Существуют примеры, в которых система (3) имеет ограниченное инвариантное многообразие (4) при каждой функции $h(x) \in C^0(R^m)$, а система (1) не имеет функции Грина (6).

Исследование систем вида (1) в случае, когда правые части определены на торе, проводились в работах [2-6]. В работе [7] отмечена идея дополнения слабо регулярных линейных систем дифференциальных уравнений до регулярных. Развитию идеи дополнения слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных и посвящена настоящая статья.

Известно [2], что существование квадратичной формы $V = \langle S(x)y, y\rangle$ с невырожденной матрицей коэффициентов $S(x) \in C'(R^m; f)$, производная которой в силу системы (1) является знакоопределенной

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)A(x) + A^T(x)S(x)\right] y, y \right\rangle \ge \|y\|^2 \qquad \forall y \in R^n \ , \tag{8}$$

влечет за собой регулярность системы (1). С другой стороны, регулярность системы (1) влечет за собой существование невырожденных симметричных матриц $S(x) \in C'(R^m; f)$, удовлетворяющих неравенству (8). Некоторые из таких матриц записываются в следующем виде:

$$S(x) = 2\int_{-\infty}^{0} [C(x) - I_n]^T [\Omega_0^z(x)]^T \Omega_0^z(x) [C(x) - I_n] dz - 2\int_{0}^{+\infty} [C(x)]^T [\Omega_0^z(x)]^T \Omega_0^z(x) C(x) dz.$$

Если предположить выполнение неравенства (8) с некоторой симметричной матрицей коэффициентов $S(x) \in C'(R^m; f)$, для которой $\det S(\bar{x}) = 0$ при некоторых значениях $\bar{x} \in R^m$, то уже система (1) не будет иметь функции Грина (6). При этом система сопряженная к (1) (относительно нормальных переменных $y \in R^n$)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \frac{dy_1}{dt} = -A^T(x)y_1 \ , \quad y_1 \in R^n, \tag{9}$$

будет иметь бесконечное количество различных функций Грина. В таких системах возникают существенные трудности при исследовании зависимости от параметров функций Грина и соответствующих инвариантных многообразий. Поэтому было предложено дополнить систему (9) до регулярной следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy_1}{dt} = -A^T(x)y_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_1 + A(x)y_2, \qquad y_1, y_2 \in R^n. \tag{10}$$

При этом производная в силу системы (10) невырожденной квадратичной формы

$$V_p = p\langle y_1, y_2\rangle + \langle S(x)y_2, y_2\rangle \tag{11}$$

при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной.

Этот метод дополнения оказался достаточно эффективным при исследовании гладкости функции Грина и соответствующего инвариантного многообразия.

Оказывается этот метод применим и для отыскания всех решений алгебраических систем уравнений с переменными коэффициентами

$$B(x)y = h(x), \tag{12}$$

где $B(x)$ – некоторая прямоугольная матрица: $B(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & ... & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & ... & b_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{p1}(x) & b_{p2}(x) & ... & b_{pn}(x) \end{pmatrix}$, элементами $b_{ij}(x)$ которой являются действительные скалярные функции определенные и непрерывные на R^m. Предполагаем, что ранг матрицы $B(x)$ тождественно равен количеству строк этой матрицы:

$$rang B(x) \equiv p \ , \quad p < n. \tag{13}$$

Очевидно, при выполнении условия (13) система уравнений (12) при каждой вектор-функции $h(x)$ имеет бесконечное количество решений. Наша задача заключается в том, чтобы все эти решения записать в явном виде. С этой целью по аналогии с системой (10) к системе (12) добавим новые уравнения следующим способом:

$$\begin{cases} B(x)y = h(x), \\ y - B^T(x)z = q(x), \end{cases} \tag{14}$$

где $y \in R^n, z \in R^p, x \in R^m$, $q(x)$ – произвольная вектор-функция определенная и непрерывная на R^m. Для нахождения переменных z из второй части системы (14) записываем

$$y = B^T(x)z + q(x) \tag{15}$$

и подставляя в систему уравнений (12), имеем $B(x)\left(B^T(x)\,z+q(x)\right)=h(x)$. Из условия (13) следует, что $\det B(x)B^T(x)\neq 0 \quad \forall x\in R^m$. Отсюда однозначно находим переменные z: $z=[B(x)B^T(x)]^{-1}[-B(x)q(x)+h(x)]=-[B(x)B^T(x)]^{-1}B(x)q(x)+[B(x)B^T(x)]^{-1}h(x)$. Подставляя в равенство (15), получаем решения системы уравнений (12)

$$y=\left\{I_n-B^T(x)\left[B(x)\,B^T(x)\right]^{-1}B(x)\right\}q(x)+B^T(x)\left[B(x)\,B^T(x)\right]^{-1}h(x). \tag{16}$$

Замечание 1. *В равенстве (16) матрица*

$$I_n-B^T(x)\left[B(x)\,B^T(x)\right]^{-1}B(x)=P(x) \tag{17}$$

является матрицей проектирования: $\qquad P^2(x)\equiv P(x) \qquad \forall x\in R^m$,
а матрица $B^T(x)\left[B(x)\,B^T(x)\right]^{-1}$ *есть псевдообратная для матрицы* $B(x)$.

Замечание 2. *Каждое решение системы уравнений (12) можно записать в виде (16), выбирая при этом соответствующую вектор-функцию* $q(x)$.

Пример. *Требуется записать все решения* $y_j=y_j(x_1,x_2)$ *линейного скалярного уравнения с переменными коэффициентами*

$$y_1\cos x_1\cos x_2+y_2\cos x_1\sin x_2+y_3\sin x_1=0. \tag{18}$$

Решение. Матрица $B(x)$ состоит из одной строчки: $B(x)=(\cos x_1\cos x_2,\cos x_1\sin x_2,\sin x_1)$. Вычислим матрицу проектирования (16). С учетом того, что $B(x)B^T(x)\equiv 1$, имеем

$$\begin{aligned}&I_n-B^T(x)\left[B(x)\,B^T(x)\right]^{-1}B(x)=I_n-B^T(x)\,B(x)=\\&=\begin{pmatrix}\left(1-\cos^2x_1\cos^2x_2\right) & \left(-\cos^2x_1\cos x_2\sin x_2\right) & (-\cos x_1\sin x_1\cos x_2)\\ \left(-\cos^2x_1\cos x_2\sin x_2\right) & \left(1-\cos^2x_1\sin^2x_2\right) & (-\cos x_1\sin x_1\sin x_2)\\ (-\cos x_1\sin x_1\cos x_2) & (-\cos x_1\sin x_1\sin x_2) & \cos^2x_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом, все решения уравнения (18) записываются в явном виде

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(1-\cos^2x_1\cos^2x_2\right) & \left(-\cos^2x_1\cos x_2\sin x_2\right) & (-\cos x_1\sin x_1\cos x_2)\\ \left(-\cos^2x_1\cos x_2\sin x_2\right) & \left(1-\cos^2x_1\sin^2x_2\right) & (-\cos x_1\sin x_1\sin x_2)\\ (-\cos x_1\sin x_1\cos x_2) & (-\cos x_1\sin x_1\sin x_2) & \cos^2x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix},$$

где $q_1(x_1,x_2)$, $q_2(x_1,x_2)$, $q_3(x_1,x_2)$ – произвольные действительные функции определенные на R^2.

Возвращаясь теперь к рассмотрению системы (10), запишем более общую систему

$$\frac{dx}{dt}=f(x), \qquad \frac{dy_1}{dt}=-A^T(x)\,y_1+B_2(x)\,y_2\ , \qquad \frac{dy_2}{dt}=B_1(x)\,y_1+A(x)\,y_2\ , \qquad y_1,y_2\in R^n, \tag{19}$$

в которой вектор-функция $f(x)$ и $n\times n$-мерные матрицы $A(x)$, $B_j(x)$, $j=1,2$, удовлетворяют условиям гладкости и ограниченности как и в исходной системе (1). Матрицы $B_j(x), j=1,2$, рассматриваются симметричными $B_j^T(x)\equiv B_j(x)$, удовлетворяющими условиям

$$\langle B_1(x)\,y_1,y_1\rangle\geq\beta_1\left\|y_1\right\|^2\ ,\quad \beta_1=const>0\ , \tag{20}$$

$$\langle B_2(x)\,y_2,y_2\rangle\geq 0 \qquad \forall y_1\ ,y_2\in R^n. \tag{21}$$

При выполнении условий (8), (20), (21) производная невырожденной квадратичной формы (11) в силу системы (19) будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p>0$. Очевидно, в частном случае $B_2\equiv 0$, $B_1\equiv I_n$ система (19) превращается в систему (10).

Замечание 3. *Если в системе (19) для матриц* $B_1(x), B_2(x) \in C^0(R^m)$ *предположить выполнение условий (20), (21), причем условие (21) усилить следующим образом:*

$$\langle B_2(x) y_2, y_2\rangle \geq \beta_2 \|y_2\|^2 \ , \quad \beta_2 = const > 0 \ , \tag{22}$$

то система (19) будет регулярной при каждой матрице $A(x) \in C^0(R^m)$ *.*

Действительно, легко проверить, что производная в силу системы (19) квадратичной формы $V = \langle y_1, y_2\rangle\ y_j \in R^n$, равняется $\dot{V} = \langle B_1 y_1, y_1\rangle + \langle B_2 y_2, y_2\rangle$ и независимо от матрицы $A(x) \in C^0(R^m)$ будет положительно определенной.

Далее, обратим внимание на возможность записи системы (19) в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A(x) \\ -A^T(x) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

При этом производная квадратичной формы в силу системы (23)

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

будет равняться

$$\dot{V} = 2 \left\langle \begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{24}$$

Таким образом, если матрица $B(x) = diag\{B_1(x), B_2(x)\}$ является положительно определенной, либо отрицательно определенной, то система (23) будет регулярной при каждой матрице $A(x) \in C^0(R^m)$. Теперь систему (23) запишем в более общем виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad , \qquad S\frac{dy}{dt} = [B(x) + M(x)]\, y, \quad y \in R^k, \tag{25}$$

где S – некоторая постоянная невырожденная симметричная матрица, $B(x)$ – симметричная матрица, $M(x)$ – кососимметричная матрица, $B(x), M(x) \in C^0(R^m)$. Если предположить, что в системе (25) количество переменных y является четным, $k = 2n$, и обозначить $y = (y_1, y_2)$, $y_j \in R^n$, то при выборе матриц $S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{pmatrix}$,
$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & A(x) \\ -A^T(x) & 0 \end{pmatrix}$ система (25) переходит в систему (23). Это убеждает нас в том, что система (25) более общего вида по сравнению с системой (23). Легко проверить, что производная в силу системы (25) квадратичной формы

$$V = \langle Sy, y\rangle \tag{26}$$

имеет вид

$$\dot{V} = 2\langle B(x) y, y\rangle . \tag{27}$$

Теперь сделаем еще один шаг к обобщению системы (25), а именно, заменим постоянную матрицу S невырожденной переменной матрицей $S(x) \in C'(R^m; f)$ так, чтобы производная квадратичной формы $V = \langle S(x) y, y\rangle$ в силу обобщенной системы (25) также удовлетворяла равенству (27). Если формально подойти и просто заменить в системе (25) матрицу S на переменную, то равенство (27) не будет выполняться. Поэтому систему (25) обобщаем следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad S(x)\frac{dy}{dt} = \left[B(x) + M(x) - \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right] y, \quad y \in R^k. \tag{28}$$

Теперь уже производная квадратичной формы $V = \langle S(x)\,y, y\rangle$ в силу системы (28) будет удовлетворять равенству (27).

Следует отметить, что к системе уравнений (28) можно прийти проводя следующие рассуждения. Возвратимся к рассмотрению системы (1) и предположим, что существует невырожденная симметричная матрица $S(x) \in C'(R^m; f)$, удовлетворяющая неравенству (8), то есть система (1) регулярна. Очевидно, система (1) эквивалентна следующей системе:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\ S(x)\frac{dy}{dt} = S(x)\,A(x)\,y,$$

которая в свою очередь эквивалентна системе

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad , \quad S(x)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\,y = \left[S(x)\,A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]y. \tag{29}$$

Теперь в полученной системе матрицу $\bar{A}(x) = S(x)\,A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)$ симметризуем

$$\bar{A}(x) = \frac{1}{2}\left(\bar{A}(x) + \bar{A}^T(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{A}(x) - \bar{A}^T(x)\right) == \frac{1}{2}\left\{\left[S(x)\,A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[S(x)\,A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]^T\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left[S(x)\,A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right] - \left[S(x)\,A(x) + \frac{1}{2}\dot{S}(x)\right]^T\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{S(x)\,A(x) + A^T(x)\,S(x) + \dot{S}(x)\right\} + \frac{1}{2}\left\{S(x)\,A(x) - A^T(x)\,S(x)\right\}.$$

Обозначая

$$B(x) = \frac{1}{2}\left\{S(x)A(x) + A^T(x)S(x) + \dot{S}(x)\right\}, \tag{30}$$

$$M(x) = \frac{1}{2}\left\{S(x)A(x) - A^T(x)S(x)\right\}, \tag{31}$$

систему (29) запишем в виде $\dfrac{dx}{dt} = f(x), \quad S(x)\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{2}\dot{S}(x)y = [B(x) + M(x)]\,y$, где матрица $B(x)$ определяется равенством (30) и положительно определена, а кососимметричная матрица $M(x)$ записывается в виде (31). Перенося слагаемое $\frac{1}{2}\dot{S}(x)y$ в правую сторону, приходим к системе уравнений (28).

Теперь систему (28) будем рассматривать как самостоятельную с некоторой симметричной матрицей $S(x) \in C'(R^m; f)$, удовлетворяющей условиям

$$\det S(x) \neq 0 \quad \forall x \in R^m \ , \left\|S^{-1}(x)\right\| \leq const < \infty. \tag{32}$$

При этом нас будет интересовать вопрос регулярности системы (28).

Из равенства (27) для квадратичной формы $V = \langle S(x)\,y, y\rangle$, $y \in R^k$, непосредственно следует

Следствие 1. *Если в системе (28) симметричная матрица $B(x) \in C^0(R^m)$ положительно определена $\langle B(x)\,y, y\rangle \geq \beta\|y\|^2$, $\beta = const > 0$, либо отрицательно определена $\langle B(x)\,y, y\rangle \leq -\beta\|y\|^2$, $\beta = const > 0$, то при каждой кососимметричной матрице $M(x) \in C^0(R^m)$, система (28) будет регулярной.*

С целью дальнейшего исследования вопроса регулярности системы (28) рассмотрим вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть некоторая* $k \times k$ *-мерная* <u>*симметричная*</u> *матрица* $B(x) \in C^0(R^m)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\langle B(x)\, y, y\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in R^k, \quad x \in R^m, \tag{33}$$

тогда при каждой фиксированной $k \times k$ *-мерной матрице* $\Psi(x) \in C^0(R^m)$ *(не обязательно симметричной) существует достаточно большое значение параметра* $p > 0$ *при котором квадратичная форма*

$$V = \|y\|^2 + p\langle B(x)\, y, y\rangle + \langle B(x)\, y, \Psi(x)\, y\rangle, \qquad y \in R^k, \tag{34}$$

будет положительно определенной.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму

$$\Phi_p = \|y\|^2 + p\langle B(x)\, y, y\rangle + 2\langle B(x)\, y, \Psi(x)\, z\rangle + \|z\|^2, \qquad x, y \in R^k, \tag{35}$$

и покажем, что она будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p > 0$. С этой целью квадратичную форму (35) запишем в следующем виде:

$$\Phi_p = \langle (I_k + pB(x))\, y, y\rangle + 2\left\langle \Psi^T(x)\, B(x)\, y, z\right\rangle + \|z\|^2 =$$

$$= \langle \Gamma_p(y + Kz), (y + Kz)\rangle + \|z\|^2 - \langle \Gamma_p Kz, Kz\rangle, \tag{36}$$

где обозначено

$$\Gamma_p = I_k + pB(x), \qquad K = \Gamma_p^{-1} B(x)\, \Psi(x). \tag{37}$$

Из равенства (36) легко получаем оценку $\Phi_p \geq \|y + Kz\|^2 + \left(1 - \left\|K^T \Gamma_p K\right\|_0\right)\|z\|^2$. Отсюда следует, что для положительной определенности квадратичной формы (35) достаточно доказать выполнение оценки

$$\left\|K^T \Gamma_p K\right\|_0 < 1 \tag{38}$$

при достаточно больших значениях параметра $p > 0$.
Напомним обозначение: $\left\|K^T \Gamma_p K\right\|_0 = \sup\limits_{x \in R^m} \left\|K^T(x)\, \Gamma_p(x)\, K(x)\right\|$. На основании обозначений (37) имеем

$$K^T \Gamma_p K = \Psi^T(x)\, B(x)\, \Gamma_p^{-1}(x)\, B(x)\, \Psi(x). \tag{39}$$

Покажем, что при произвольных значениях параметра $p > 0$ имеет место оценка

$$\left\|\Gamma_p^{-1} B\right\|_0 \leq \frac{1}{p}. \tag{40}$$

С этой целью зафиксируем произвольное значение $x = x_0 \in R^m$ и симметричную матрицу $B(x_0) = B$ приведем к диагональному виду

$$Q^{-1} B Q = diag\{\beta_1, ..., \beta_k\}, \tag{41}$$

где Q – ортогональная матрица, $Q^T = Q^{-1}$. Из неравенства (33) следует $\beta_j \geq 0$, $j = \overline{1, k}$.

Теперь на основании представления (41) произведение матриц $\Gamma_p^{-1} B$ запишем в виде

$$\Gamma_p^{-1} B = \frac{1}{p}(I_k + pB)^{-1}(pB) = \frac{1}{p} Q diag\left\{\frac{1}{1 + p\beta_1}, ..., \frac{1}{1 + p\beta_k}\right\} Q^{-1} \times$$

$$\times Q diag\{p\beta_1, ..., p\beta_k\}\, Q^{-1} = \frac{1}{p} Q diag\left\{\frac{p\beta_1}{1 + p\beta_1}, ..., \frac{p\beta_k}{1 + p\beta_k}\right\} Q^{-1}. \tag{42}$$

Учитывая ортогональность матрицы Q ($\|Q\| = \|Q^{-1}\| = 1$), из равенства (42) получаем оценку
$$\left\|\Gamma_p^{-1}B\right\| \le \frac{1}{p}\left\|diag\left\{\frac{p\beta_1}{1+p\beta_1},...,\frac{p\beta_k}{1+p\beta_k}\right\}\right\| < \frac{1}{p}. \tag{43}$$
Изменяя произвольно фиксированное значение $x = x_0 \in R^m$, приходим к оценке (40). Учитывая то, что $\beta_j \ge 0$, из равенства (39) и неравенства (40) получаем
$$\left\|K^T\Gamma_p K\right\| \le \left\|\Psi^T(x)\right\| \left\|B(x)\right\| \left\|\Gamma_p^{-1}(x)B(x)\right\| \left\|\Psi(x)\right\| \le \frac{1}{p}\left\|\Psi\right\|_0^2 \left\|B\right\|_0.$$
Выбирая значение параметра $p \ge 2\left\|\Psi\right\|_0^2\left\|B\right\|_0$, будем иметь $\left\|K^T\Gamma_p K\right\|_0 \le 0,5$. Отсюда следует положительная определенность квадратичной формы (35):
$$\Phi_p = \|y\|^2 + p\left\langle B(x)y, y\right\rangle + 2\left\langle B(x)y, \Psi(x)z\right\rangle + \|z\|^2 \ge \varepsilon\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right), \qquad \varepsilon = const > 0.$$
Предполагая $z = y$, получаем
$$2\|y\|^2 + p\left\langle B(x)y, y\right\rangle + 2\left\langle B(x)y, \Psi(x)y\right\rangle \ge 2\varepsilon\|y\|^2, \qquad \varepsilon = const > 0.$$
Переобозначая $p \to 2p$, приходим к положительной определенности квадратичной формы (34).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть известно, что система уравнений (28) при* $B(x) \equiv 0$
$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad S(x)\frac{dy}{dt} = \left[M(x) - \frac{1}{2}\dot S(x)\right]y \tag{44}$$
имеет хотя бы одну функцию Грина (6). Тогда эта функция Грина будет единственной, количество переменных y *(* $y \in R^k$ *) будет четным* $k = 2n$ *и при каждой симметричной матрице* $B(x) \in C^0(R^m)$, *удовлетворяющей условию (33), система (28) будет регулярной.*

Доказательство. Обозначим
$$N(x) = S^{-1}(x)\left[M(x) - \frac{1}{2}\dot S(x)\right]. \tag{45}$$
Поскольку известно, что система (44) имеет хотя бы одну функцию Грина, то существует квадратичная форма $\left\langle\Theta(x)z, z\right\rangle = V$, $\Theta(x) \equiv \Theta^T(x) \in C'(R^m; f)$, производная которой в силу сопряженной системы для (44) $\dfrac{dx}{dt} = f(x), \dfrac{dz}{dt} = -N^T(x)z$ является положительно определенной, т.е. выполняется неравенство
$$\dot V = \left\langle\left[\dot\Theta(x) - \Theta(x)N^T(x) - N(x)\Theta(x))\right]z, z\right\rangle \ge \|z\|^2. \tag{46}$$
Теперь убедимся в том, что производная квадратичной формы
$$\left\langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y\right\rangle = W \tag{47}$$
в силу системы (44) будет также положительно определенной. С этой целью в неравенстве (46) сделаем замену переменных $z = S(x)y$. Учитывая обозначения (45), найдем
$$S\left\{\dot\Theta - \Theta N^T - N\Theta\right\}S = S\left\{\dot\Theta + \Theta\left[M + \frac{1}{2}\dot S\right]S^{-1} + S^{-1}\left[-M + \frac{1}{2}\dot S\right]\Theta\right\}S =$$
$$= S\dot\Theta S + \frac{1}{2}S\Theta\dot S + \frac{1}{2}\dot S\Theta S + S\Theta M - M\Theta S = S\dot\Theta S + \dot S\Theta S + S\Theta\dot S - \frac{1}{2}S\Theta\dot S - \frac{1}{2}\dot S\Theta S + S\Theta M - M\Theta S =$$

$$= \dot{S}\Theta S + S\dot{\Theta}S + S\Theta\dot{S} + S\Theta S\left\{S^{-1}\left[M - \frac{1}{2}\dot{S}\right]\right\} + \left\{S^{-1}\left[M - \frac{1}{2}\dot{S}\right]\right\}^T S\Theta S.$$

Отсюда следует, что производная квадратичной формы в силу системы (44) будет положительно определенной: $\dot{W} \geq \|S(x)y\|^2 \geq \frac{1}{\|S^{-1}\|_0^2}\|y\|^2 = \varepsilon_0 \|y\|^2$. Таким образом, существование двух таких квадратичных форм V и W ведет к тому, что $\det\Theta(x) \neq 0 \quad \forall x \in R^m$ и система (44) регулярная. Теперь докажем, что в регулярной системе (44) размерность k обязательно должна быть четной. Если система (44) является регулярной, то соответствующая линейная система

$$\frac{dy}{dt} = N(x(t;x))\,y \tag{48}$$

будет экспоненциально дихотомичной на оси R. Предположим, что система (48) имеет r линейно независимых решений, стремящихся к нулю на $+\infty$ и $k-r$ линейно независимых решений, стремящихся к нулю на $-\infty$. Тогда сопряженная система

$$\frac{dz}{dt} = -N^T(x(t;x))\,z \tag{49}$$

должна иметь r линейно независимых решений, стремящихся к нулю на $-\infty$ и $k-r$ линейно независимых решений стремящихся к нулю на $+\infty$. С другой стороны, учитывая обозначения (45) и кососимметричность матрицы $M(x)$, решения систем (48), (49) связаны тождеством $S(x(t;x))\cdot y(t) \equiv z(t)$. Это означает, что обе системы (48) и (49) имеют одинаковое количество решений, стремящихся к нулю на $+\infty$. Следовательно $k - r = r$.

С целью доказательства регулярности системы (28) при произвольно фиксированной симметричной матрице $B(x) \in C^0(R^m)$, для которых выполняется условие (33), рассмотрим квадратичную форму с положительным параметром p

$$V_p = p\langle S(x)y, y\rangle + \langle S(x)\Theta(x)S(x)y, y\rangle \tag{50}$$

и покажем, что ее производная в силу системы уравнений (28) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной. Обозначая $\Theta_1(x) = S(x)\Theta(x)S(x)$ и учитывая при этом обозначения (45), имеем

$$\dot{V}_p = 2p\langle B(x)y, y\rangle +$$

$$+\left\langle\left[\dot{\Theta}_1(x) + \Theta_1(x)\left(S^{-1}(x)B(x) + N(x)\right) + \left(B(x)S^{-1}(x) + N^T(x)\right)\Theta_1(x)\right]y, y\right\rangle =$$

$$= \left\langle\left(\dot{\Theta}_1 + \Theta_1 N + N^T\Theta_1\right)y, y\right\rangle + 2p\langle B(x)y, y\rangle + \left\langle\Theta_1 S^{-1}By, y\right\rangle + \left\langle BS^{-1}\Theta_1 y, y\right\rangle \geq$$

$$\geq \varepsilon\|y\|^2 + 2p\langle B(x)y, y\rangle + 2\left\langle By, S^{-1}\Theta_1 y\right\rangle.$$

На основании доказанной выше леммы, можно утверждать, что производная $\dot{V}_p$ при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной. Это означает регулярность системы (28).

Замечание 4. *Теорема 1 остается в силе и в том случае, когда симметричная матрица* $B(x)$ *удовлетворяет неравенству* $\langle B(x)y, y\rangle \leq 0 \quad \forall y \in R^k, x \in R^m$.

Замечание 5. *Если в системе (28) матрица* $B(x)$ *не является симметричной, то несмотря на выполнение неравенства (33) из регулярности системы (44) не следует регулярность системы (28).*

Рассмотрим пример, который иллюстрирует применение теоремы 1:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \cos^2 x & 0 \\ 0 & \beta_2 \cos^4 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{51}$$

где $f(x) \in C_{Lip}(R)$, $beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Поскольку выполняются все условия теоремы 1, то система (51) будет регулярной при каждой фиксированной функции $f(x) \in C_{Lip}(R)$.

С другой стороны, убедимся в регулярности системы (51), выбирая функцию Ляпунова в виде

$$V_p = py_1y_2 + y_1^2 - y_2^2. \tag{52}$$

Покажем, что всегда найдется достаточно большое значение параметра $p > 0$ такое, что производная квадратичной формы (52) в силу системы (51) будет положительно определенной. Вычисляя эту производную, получаем

$$\dot{V}_p = y_1^2 \left(p \cos^2 x + 2\right) + y_2^2 \left(p \cos^4 x + 2\right) + 2y_1y_2\beta_2 \cos^4 x - 2y_1y_2\beta_1 \cos^2 x. \tag{53}$$

Учитывая выполнение очевидных неравенств

$$2y_1y_2\beta_2 \cos^4 x \geq -y_1^2 \cos^4 x - y_2^2\beta_2^2 \cos^4 x \geq -y_1^2 \cos^2 x - y_2^2\beta_2^2 \cos^4 x,$$

$$-2y_1y_2\beta_1 \cos^2 x \geq -y_1^2 - y_2^2\beta_1^2 \cos^4 x,$$

из (53) получаем

$$\dot{V}_p \geq y_1^2 \left((p-1) \cos^2 x + 1\right) + y_2^2 \left(\left(p - \beta_1^2 - \beta_2^2\right) \cos^2 x + 2\right).$$

Отсюда видно, что при выборе параметра $p = 1 + \beta_1^2 + \beta_2^2$ производная в силу системы (51) квадратичной формы (52) является положительно определенной. Это еще раз убеждает нас в регулярности системы (51).

Замечание 6. *В теореме 1 приведены только достаточные условия регулярности системы (28). Возможно условия теоремы 1 не выполняются, а система (28) может быть регулярной.*

Это подтверждается следующим примером:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \cos^2 x & 0 \\ 0 & \beta_2 \cos^4 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{53}$$

где $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Система, отвечающая системе (44), в нашем случае имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 1, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Система (54) не является регулярной, поскольку неоднородная система $\dfrac{dy_1}{dt} = y_1 \sin t + h_1(t)$, $\dfrac{dy_2}{dt} = -y_2 \sin t + h_2(t)$ не при каждой ограниченной на R функции $(h_1(t), h_2(t))$ имеет ограниченное решение.

При этом система (53) при $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ оказывается регулярной. Убедимся в этом, выбирая функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V = py_1y_2 + \left(y_1^2 - y_1^2\right) \sin x, \tag{54}$$

где p – положительный параметр. Записывая производную, имеем

$$\dot{V} = y_1^2 p\cos^2 x + y_2^2 p\cos^4 x + 2\left[y_1\left(y_1\sin x + \beta_2 y_2\cos^4 x\right) - 2y_2\left(y_1\beta_1\cos^2 x - y_2\sin x\right)\right]\sin x +$$
$$+\left(y_1^2 - y_2^2\cos x\right) = y_1^2\left(p\cos^2 x + 2\sin^2 x + 1\right) + y_2^2\left(p\cos^4 x + 2\sin^2 x - \cos x\right) +$$
$$+2y_1y_2\beta_2\cos^4 x\sin x - 2y_1y_2\beta_1\cos^2 x\sin x. \tag{55}$$

Используя неравенства

$$2y_1y_2\beta_2\cos^4 x\sin x \geq -y_1^2\beta_2^2\cos^8 x - y_2^2\sin^2 x \geq -y_1^2\beta_2^2\cos^2 x - y_2^2\sin^2 x,$$
$$-2y_1y_2\beta_1\cos^2 x\sin x \geq -y_1^2\beta_1^2\cos^2 x - y_2^2\cos^2 x\sin^2 x \geq -y_1^2\beta_1^2\cos^2 x - y_2^2\cos^2 x,$$

из равенства (55) получаем

$$\dot{V} \geq y_1^2\left(\left(p - \beta_1^2 - \beta_2^2\right)\cos^2 x + 2\sin^2 x + 1\right) + y_2^2\left(p\cos^4 x + \sin^2 x - |\cos x| - \cos^2 x\right). \tag{56}$$

Для того чтобы доказать положительную определенность производной $\dot{V}$, достаточно проверить выполнение неравенства

$$p\cos^4 x + \sin^2 x - |\cos x| - \cos^2 x > 0 \tag{57}$$

при достаточно больших значениях параметра $p > 0$. С этой целью обозначим $|\cos x| = \tau$ и исследуем знак функции

$$\varphi(\tau) = p\tau^4 - 2\tau^2 - \tau + 1 \tag{58}$$

при значениях $0 \leq \tau \leq 1$.
Рассмотрим функцию (58) на отрезке $\tau \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, имеем $\varphi(\tau) \geq -2\tau^2 - \tau + 1 \geq \frac{4}{9}, 0 \leq \tau \leq \frac{1}{3}$.
Теперь оценим функцию (58) на следующем отрезке $\tau \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, получаем

$$\varphi(\tau) \geq p\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 - 2\tau^2 - \tau + 1 \geq p\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 - 2\ , \quad \tfrac{1}{3} \leq \tau \leq 1.$$

Требуем, чтобы $p\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 2 \geq \frac{4}{9} \leftrightarrow p \geq 198$. Таким образом, при значении параметра $p \geq 198$ будет выполняться неравенство $p\cos^4 x + \sin^2 x - |\cos x| - \cos^2 x \geq \frac{4}{9} \quad \forall x \in R$. Теперь из неравенств (56), (57) следует, что производная в силу системы (53) квадратичной формы (54) будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p > 0$. Следовательно, система (53) является регулярной.

Замечание 7. *Обратим внимание на то, что систему (53) можно записать в следующем виде:*

$$\frac{dx}{dt} = 1, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cos^2 x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}\cos^4 x + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sin x\right\}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку условия теоремы 1 для записанной выше системы не выполняются, то представляется интересным исследования условий регулярности систем уравнений следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\ , \quad S\frac{dy}{dt} = \Big[\sum_{j=1}^{k} B_j(x)\cdot\nu_j(x) + M(x)\,\mu(x)\Big]y \tag{59}$$

с некоторой невырожденной симметричной матрицей S, $f(x) \in C_{Lip}(R^m)$.

Будем предполагать, что в системе (59) симметричные матрицы $B_j(x) \in C^0(R^m)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\langle B_j(x)\,y, y\rangle \geq 0,\ j = \overline{1,k},\ \forall x \in R^m, y \in R^n,\ \sum_{j=1}^{k}\langle B_j(x)\,y, y\rangle \geq \beta\,\|y\|^2,\ \beta = const > 0. \tag{60}$$

Матрица $M(x) \in C^0(R^m)$, как и раньше, является кососимметричной. Скалярные функции $\nu_j(x)$, $j=\overline{1,k}$, являются непрерывными и ограниченными на R^m ($\nu_j(x) \in C^0(R^m)$) и принимают неотрицательные значения

$$\nu_j(x) \geq 0\ , \quad j=\overline{1,k} \quad \forall x \in R^m\ . \tag{61}$$

В качестве таких функций можно выбирать, например, следующие: $\cos^2 x$, $|\cos x|$, $\cos^4 x$, $\frac{1}{chx}\left(\frac{1}{chx}\right)^n$, $\sin^{2n} x_1 \cos^{2k} x_2$ и т.д. Скалярная функция $\mu(x)$ определена и ограничена на R^m, непрерывно дифференцируемая и все ее частные производные первого порядка являются непрерывными и ограниченными на R^m, т.е. $\mu(x) \in C^1(R^m) \bigcap C^0(R^m)$, $\dfrac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} \in C^0(R^m)$. В качестве таких функций можно выбирать, например, $\sin x$, $(\sin x)^{2k-1}$, thx, $(thx)^{2k-1}$ и т.д.

Предполагаем, что скалярные функции $\nu_j(x)$, $\mu(x)$ так связаны между собой, что для каждых фиксированных постоянных K, L существует достаточно большое значение параметра $p>0$ при котором выполняется следующая оценка:

$$p\nu_0(x) + \mu^2(x) - K\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i}\right| - L\bar{\nu}(x) \geq \varepsilon\ , \quad \varepsilon = const > 0, \tag{62}$$

при всех $x \in R^m$, где $\nu_0(x) = \min\{\nu_1(x), ..., \nu_2(x)\}$, $\bar{\nu}(x) = \max\{\nu_1(x), ..., \nu_2(x)\}$. Можно, например, выбрать $\nu_1(x) = \cos^8 x$, $\nu_2(x) = \cos^{10} x$, $\mu(x) = \sin^3 x$ и оценка (62) будет выполняться при достаточно больших фиксированных значениях параметра $p>0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть существует постоянная $n \times n$-мерная симметричная матрица Θ, которая удовлетворяет неравенству*

$$\left\langle \left[\Theta(x)S^{-1}M(x) - M(x)S^{-1}\Theta(x))\right] y, y\right\rangle \geq \|y\|^2 \qquad \forall y \in R^n, \tag{63}$$

тогда при выполнении условий (60)–(62) система (59) будет регулярной при каждой фиксированной ограниченной функции $f(x) \in C_{Lip}(R^m) \bigcap C^0(R^m)$. При этом производная квадратичной формы

$$V = p\langle Sy, y\rangle + \langle \Theta y, y\rangle \cdot \mu(x) \tag{64}$$

в силу системы (59) будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p>0$.

Доказательство. Запишем производную квадратичной формы (64) в силу системы (59), имеем

$$\dot{V} = 2p\sum_{j=1}^{k}\langle B_j(x)y, y\rangle \cdot \nu_j(x) + 2\left\langle \Theta y, S^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k} B_j(x)\cdot\nu_j(x) + M(x)\mu(x)\right] y\right\rangle \mu(x) +$$

$$+\langle \Theta y, y\rangle \dot{\mu}(x) \geq 2p\beta\|y\|^2\nu_0(x) + 2\left\langle \Theta y, S^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k} B_j(x)\nu_j(x)\right] y\right\rangle \mu(x) +$$

$$+2\left\langle \Theta y, S^{-1}M(x)y\right\rangle \mu^2(x) + \langle \Theta y, y\rangle \dot{\mu}(x), \tag{65}$$

где $\dot{\mu}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} f_i(x)$.

Теперь оценим каждое из слагаемых в равенстве (65), имеем

$$2\left\langle \Theta y, S^{-1}B_j(x)y\right\rangle \nu_j(x)\mu(x) \geq -2\left\|\Theta S^{-1}B_j\right\|_0 \|y\|^2\nu_j(x)|\mu|_0 \geq -L_0\nu_j(x)\|y\|^2,$$

$$2\left\langle \Theta y, S^{-1}M(x)\,y\right\rangle \mu^2(x) \geq \|y\|^2\,\mu^2(x)\,,$$

$$\langle \Theta y, y\rangle\,\dot{\mu}(x) \geq -\|\Theta\|\,|\dot{\mu}(x)|\cdot\|y\|^2 \geq -K_1\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right|\|y\|^2\,,$$

где L_0, K_1 – положительные постоянные. С учетом записанных выше неравенств получаем $\dot{V} \geq \left(2p\beta\nu_0(x) + \mu^2(x) - K_1\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right| - L\bar{\nu}(x)\right)\|y\|^2$. На основании предположения выполнения оценки (62) производная $\dot{V}$ является положительно определенной. Следовательно, система (59) является регулярной.

Цитированная литература

[1]. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л., *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Киев: "Наук. думка", 1990.

[2]. Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L., *Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems*, Taylor & Francis Inc, London, 2004.

[3]. Самойленко А.М., *К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе*, Украинский математический журнал, 2001, Т. 53, № 4, С. 513 – 521.

[4]. Самойленко А.М., *О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем*, Украинский математический журнал, 1994, Т. 46, № 12, С. 1665 – 1699.

[5]. Бойчук А.А. *Условие существования единственной функции Грина-Самойленко задачи об инвариантном торе*, Украинский математический журнал. 2001, Т. 53. № 4. С. 556 – 559.

[6]. Kenneth J. Palmer., *On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems*, J.Different. Equat., 1980, V. 36, № 3, P. 374 – 390.

[7]. Джумабаев Д.С., *Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Автореферат диссертации ... доктора физ.-мат. наук, Киев, 1994.

Статья поступила в редакцию 01.12.2010 г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 87 — 94*

УДК 532.526

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СМЕШЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ СОПЕЛ

А. П. Макашева

Институт математики МОН РК
050100, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: ked@math.kz

Приведены результаты численного исследования распространения системы сверхзвуковых струй из эллиптических сопел в спутный сверхзвуковой поток. Исследовано влияние геометрических характеристик и входной температуры на характеристики течения.

Управление процессом смешения сверхзвуковых струй представляет значительный интерес, как в аэродинамике, так и при организации эффективного процесса горения в двигательных установках высокоскоростных летательных аппаратов. При варьировании способа подачи топлива в сверхзвуковой поток можно изменять характер выгорания топлива и, тем самым, управлять процессом горения. Кроме осесимметричных [1] необходимо рассматривать и другие виды инжекторов, при использовании которых проявляются различные газодинамические эффекты. Выполнен большой цикл исследований [2-4] по изучению характеристик смешения и горения круговых, эллиптических и прямоугольных струй в дозвуковом, звуковом и сверхзвуковом потоках. В результате исследований было экспериментально показано улучшение процессов смешения и горения при использовании эллиптических и прямоугольных инжекторов по сравнению с круговыми инжекторами. В данной работе численно исследуется влияние режимных параметров на процессы смешения струй при использовании эллиптических сопел.

Основные уравнения

Рассматривается истечение системы пространственных сверхзвуковых турбулентных струй из эллиптических сопел (рисунок 1) в спутный сверхзвуковой поток. Принимается, что струи и спутный поток распространяются вдоль оси x, а оси y и z перпендикулярны к потоку. Поток струи симметричен относительно горизонтали и вертикали.

При решении задачи истечения струй из эллиптических сопел появляются дополнительные параметры, связанные с рассматриваемой областью и формой сопла. Для этого вводятся следующие характеристики: отношения осей эллиптических выходных струй $\varepsilon = 2b/2c$ (b и c – большая и малая полуоси эллиптических струй), L_2 – длина большой полуоси эллипса, L_1 – ширина малой.

Keywords: *Mach number, supersonic jet, supersonic flow, pressure*
2010 Mathematics Subject Classification: 76F40
© А. П. Макашева, 2011.

Во всей области течения газ считается совершенным, вязким, а режим течения – турбулентным.

Для описания рассматриваемого течения используются параболизованные уравнения Навье-Стокса (ПУНС)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \left(\vec{F} - \vec{F}_v\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\vec{G} - \vec{G}_v\right)}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

здесь векторы $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ включают невязкие члены

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p)\, u \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)\, v \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)\, w \end{pmatrix},$$

$\vec{F}_v$, $\vec{G}_v$ – вязкие члены

$$\vec{F}_v = [0\,, \quad \tau_{xy}\,,\ \tau_{yy}\,,\ \tau_{yz}\,, \quad u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y]^T,$$

$$\vec{G}_v = [0\,, \quad \tau_{xz}\,,\ \tau_{yz}\,,\ \tau_{zz}\,, \quad u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z]^T.$$

Давление и температура определяются следующим образом:

$$p = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2\right)\right], \quad c_v = \frac{1}{\gamma\,(\gamma - 1)\,M_a^2},$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v}\right) \left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho v^2 + \rho w^2\right)\right].$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\left(2u_y - w_z\right), \quad \tau_{zz} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\left(2w_z - v_y\right), \quad \tau_{xy} = \frac{\mu_t}{Re}u_y, \quad \tau_{xz} = \frac{\mu_t}{Re}u_z,$$

$$\tau_{yz} = \frac{\mu_t}{Re}\left(v_z + w_y\right), \quad q_y = -\frac{k_t}{(\gamma - 1)\,M_a^2 Pr\,Re}T_y, \quad q_z = -\frac{k_t}{(\gamma - 1)\,M_a^2 Pr\,Re}T_z.$$

Здесь приняты следующие обозначения: ρ – плотность; u, v, w – продольная и поперечные составляющие скорости; E_t – полная энергия; p – давление; T – температура; $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты; c_p, c_v – удельная теплоемкость при постоянном давлении и объеме; M_a – число Маха струи; μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, k_t – коэффициент теплопроводности, Re – число Рейнольдса; Pr – число Прандтля.

Система уравнений (1) записана в безразмерной консервативной форме. В качестве безразмерных параметров приняты характеристики на срезе сопла ρ_0, u_0, T_0, при этом для полной энергии $E_t \sim \rho_0 u_0^2$, давления $p \sim \rho_0 u_0^2$.

Начальные и граничные условия

Система уравнений (1) решается со следующими начальными и граничными условиями:

$$x = 0: \begin{cases} u = T = \rho = 1,\ v = w = 0 \ \ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \le r_0^2, \\ T = 1, \quad u = \frac{M_a}{M_\infty}\sqrt{T}, p = \frac{1}{\gamma n M_a^2},\ v = w = 0,\ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} > r_0^2, \\ -b \le y \le -\frac{L_1}{2},\ c \le z \le \frac{L_2}{2}, \end{cases}$$

$$x>0: \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}=\upsilon=0, \quad y=0, \quad y=\pm L_1/2, \\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial z}=w=0, \quad z=0, \quad z=\pm L_2/2. \end{cases}$$

Метод решения

В исходных уравнениях движения градиент давления в продольном направлении создает возможность распространения возмущений вверх по потоку через дозвуковые части поля течения. Вследствие этого маршевый по пространственной координате метод становится плохо обусловленным, что во многих случаях приводит к расходящимся решениям. Существуют различные способы устранения экспоненциально нарастающего решения [5-7]. В работе [1] на основе метода, предложенного Виньероном и др., для учета градиента давления в продольном направлении, где в дозвуковой вязкой зоне часть продольного градиента давления $\omega\ (\partial p/\partial x)$ в уравнении сохраняется, а остальная $(1-\omega)\ (\partial p/\partial x)$ либо опускается, либо рассчитывается на явном слое при помощи разностей назад, была разработана численная методика решения системы уравнений (1). Ниже использованы основные этапы этой методики.

Согласно этому методу вектор потока $\vec{E}$ расщепляется на две части

$$\vec{E}=\vec{E}^{*}+\vec{E}^{p},$$

где

$$\vec{E}^{*}=\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2+\omega p \\ \rho u\upsilon \\ \rho u w \\ (E_t+p)\,u \end{pmatrix}, \quad \vec{E}^{p}=\begin{pmatrix} 0 \\ (1-\omega)\,p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Как видно из (2) в уравнении движения по продольной координате x в качестве множителя перед градиентом давления в продольном направлении имеется параметр ω, который выбирается в следующем виде:

$$\omega=f\ (M_x)\,, \quad f\ (M_x)=\begin{cases} 1, & M_x\geq 1, \\ \frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)\,M_x^2}\,, & M_x<1. \end{cases}$$

Таким образом, система (1) с учетом (2) приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{E}^{*}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{E}^{p}}{\partial x}+\frac{\partial\left(\vec{F}-\vec{F}_v\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\vec{G}-\vec{G}_v\right)}{\partial z}=0\,. \tag{3}$$

Система (3) решается численно с помощью двухэтапной схемы расщепления, в которой на первом этапе предполагается, что перенос потоков осуществляется конвекцией, во втором диффузией

1 этап. Вычисление промежуточных величин потоков

$$\frac{\vec{E}^{*i}-\vec{E}^{*n}}{\Delta x}=-\frac{\partial \vec{F}^{n}}{\partial y}-\frac{\partial \vec{G}^{n}}{\partial z}-\frac{\partial \vec{E}^{p}}{\partial x}; \tag{4}$$

2 этап. Расчет окончательных значений искомых величин

$$\frac{A^n\ \left(\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}\right)}{\Delta x}=\frac{\partial \vec{F}_v^{n+1}}{\partial y}+\frac{\partial \vec{G}_v^{n+1}}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\vec{U} = [\rho,\, \rho u,\, \rho \upsilon,\, \rho w,\, E_t]^T$, $A = \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \vec{U}}$ – матрица Якоби, приведенная в работе [1].

Численное решение (4) относительно потока $\left(\vec{E}^{*i}\right)$ проводится с помощью явной схемы Мак-Кормака [6] $(i = 2)$, либо трехшаговой схемы Уорминга-Катлера-Ломакса [6] $(i = 3)$.

Для осуществления второго этапа расчета коэффициент турбулентной вязкости определяется с помощью известной алгебраической модели Болдуина-Ломакса [8].

Вязкие члены в (5) аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности.

В соответствии с этим решение системы (5), т.е. вычисление диффузионного обмена, проводится с помощью трехшаговой матричной прогонки следующим образом:

Шаг 1:

$$\left[\frac{\Delta\, x}{2\Delta\, z^2}\left(\mu_{ti,j} + \mu_{ti,j+1}\right)\right]\vec{U}^{n+1/2}_{i,j+1} - \left[A^n_{i,j} + \frac{\Delta\, x}{2\Delta\, z^2}\left(\mu_{ti,j+1} + 2\mu_{ti,j} + \mu_{ti,j-1}\right)\right]\vec{U}^{n+1/2}_{i,j} +$$

$$+\left[\frac{\Delta\, x}{2\Delta\, z^2}\left(\mu_{ti,j} + \mu_{ti,j-1}\right)\right]\vec{U}^{n+1/2}_{i,j-1} = -A^n_{i,j}\vec{U}^n_{i,j}.$$

Шаг 2: $\vec{U}^n_{i,j} = A^n \vec{U}^{n+1/2}_{i,j}$.

Шаг 3:

$$\left[\frac{\Delta\, x}{2\Delta\, y^2}\left(\mu_{ti,j} + \mu_{ti+1,j}\right)\right]\vec{U}^{n+1}_{i+1,j} - \left[A^n_{i,j} + \frac{\Delta\, x}{2\Delta\, y^2}\left(\mu_{ti+1,j} + 2\mu_{ti,j} + \mu_{ti-1,j}\right)\right]\vec{U}^{n+1}_{i,j} +$$

$$+\left[\frac{\Delta\, x}{2\Delta\, y^2}\left(\mu_{ti,j} + \mu_{ti-1,j}\right)\right]\vec{U}^{n+1}_{i-1,j} = -\vec{U}^n_{i,j}.$$

На окончательном этапе для подавления осцилляций в решении вектор потока $\vec{U}^{n+1}$ сглаживается явным образом аналогично [9]. Коэффициент искусственной вязкости μ_i для направления y при этом имеет вид

$$\mu_i = \in_i \left|\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}\right|.$$

Константа $\in_i$ варьировалась в таком же диапазоне, как и в работе [9] $(0 \leq \in_i \leq 0.3)$ с максимумом на стыке сверхзвуковой и дозвуковой областей.

Результаты расчетов

Разработанная методика решения была протестирована на решении тестовой задачи истечения сверхзвуковой круглой струи в сверхзвуковой поток [1]. Результаты расчетов, приведенные в работе [1], показывают, что предлагаемая методика расчета удовлетворительно описывает рассматриваемые течения.

Численный расчет проводился при следующих значениях определяющих параметров: $\gamma = 1.4, \quad T_0 = 1, \quad T_\infty = 0.3, \quad b = 15, \quad c = 10$. Использовалась сетка в поперечных направлениях с 75х75 узлами, шаг по маршевой координате варьировался в пределах $\Delta\, x = 0.0035 \div 0.006$.

На рисунке 2 представлены изобары, распространяющиеся в плоскости xoy – большой (рисунок 2а) и xoz – малой (рисунок 2б) осей эллипса. Видно, что вниз по течению в сторону внешнего спутного потока распространяется ударная волна как по направлению y, так и z (рисунок 2а,б). Вследствии того, что рассматриваемая область по оси z меньше, чем по y, волна, распространяющаяся по малой оси, раньше достигает оси компоновки (рисунок 2а). То есть неосесимметричная форма сопла приводит к ослабеванию волн сжатия в плоскости большой и малой осей эллипса неодинаковым образом. В результате струя, вначале вытянутая в направлении оси y, становится круглой (очевидно, в начальном сечении эллиптическая

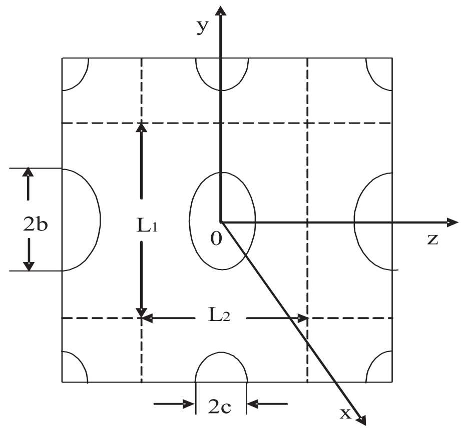

Рис. 1: Схема течения

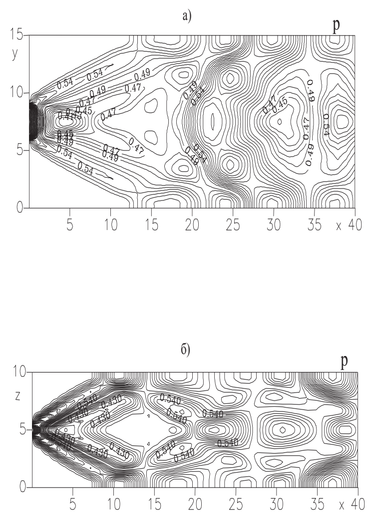

Рис. 2: Изобары а) в плоскости XOY, б) в плоскости XOZ;
$M_a = 2, M_\infty = 3, \quad n = 2, \quad T_0 = 1, T_\infty = 0.3$

струя в направлении оси z распространяется как плоская струя, а в направлении y – осесимметричная), что согласуется с ранее полученными теоретическими результатами Авдуевского [10] для струй, истекающих из сверхзвуковых эллиптических сопел в затопленное пространство, с отношением осей $\varepsilon = 2$ на основе модели невязкого газа. Далее, вследствие вязких и ударно-волновых процессов возмущения вниз по потоку ослабевают. При этом из распределения изолинии относительной избыточной температуры (разность локальной температуры и температуры основного потока относится к разности температур струи и основного потока) видно (рис.3), что вследствии быстрого расширения струи вдоль малой оси эллипса (оси), струя вытягивается в этом направлении ($x = 3.25$, рисунок 3). Основной особенностью истечения сверхзвуковых струй из эллиптических сопел является то, что в некотором сечении вниз по потоку в распределениях температуры наблюдаются два пика ($x = 5.42$), расположенных вдоль малой оси эллипса, где они принимают максимальные значения, и два дополнительных – вдоль малой оси. Далее, вниз по потоку пики сливаются и приобретают сложную трехмерную структуру (рисунок 3).

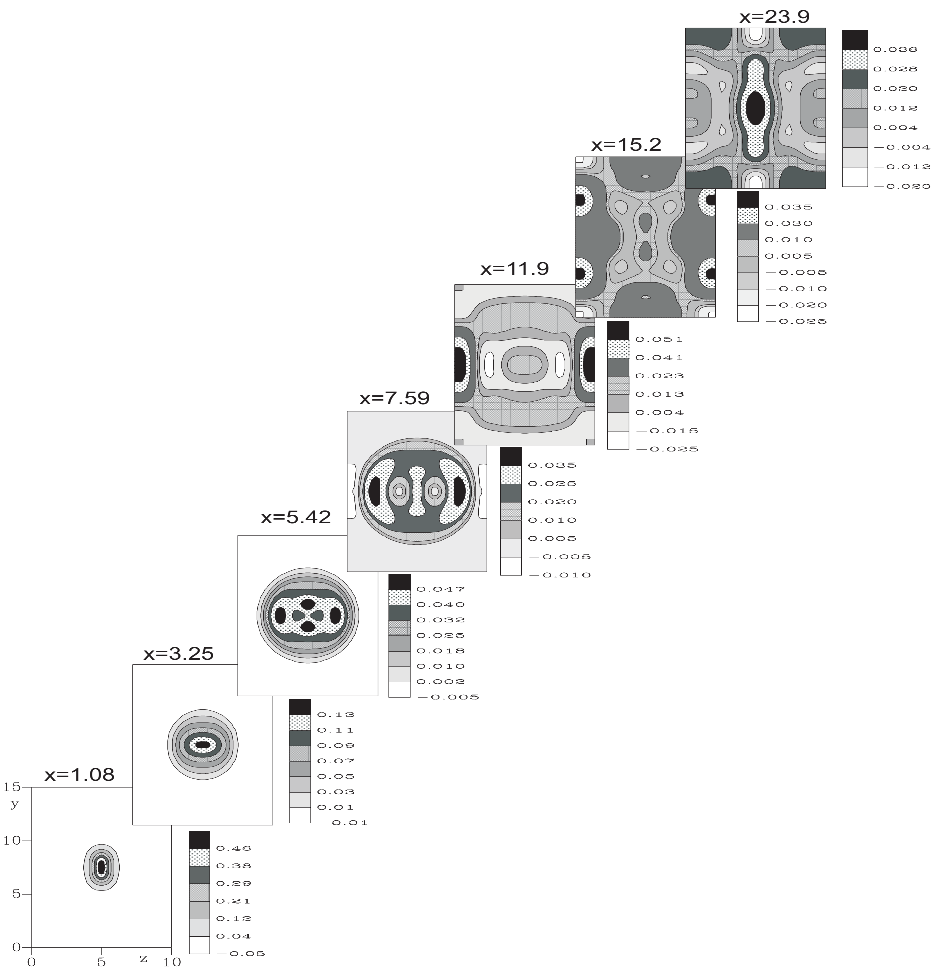

Рис. 3: Изотермы по сечениям
$M_a = 2, M_\infty = 3, \quad n = 2, \quad T_0 = 1, T_\infty = 0.3$

На основании проведенного анализа выявлено, что пики наблюдаются только на начальном участке струи. Таким образом, согласно работе Ломкова [11] на начальном участке наличие пиков приводит к интенсивному смешению струи с потоком.

Численные эксперименты по влиянию геометрических характеристик показали, что на образование пиков влияет уменьшение малой оси эллипса, а уменьшение большой оси эллипса качественную картину течения не меняет.

Влияние начальной температуры струи и потока на картину течения приведены на рисунке 4, где представлены изолинии температуры в поперечных сечениях для следующих параметров течения: $T_0 = 2, \quad T_\infty = 1$ (рисунок 4А) и $T_0 = 1,\ T_\infty = 2$ (рисунок 4В) при фиксированных значениях: $M_a = 3,\ M_\infty = 5,\ n = 10$. Картина смешения эллиптической струи при $T_0 = 1,\ T_\infty = 2$ аналогична картине истечения из системы круглых струй, тогда как увеличение температуры струи приводит к интенсивному процессу смешения системы эллиптических струй.

В результате проведенных численных экспериментов получена интенсификация смешения с помощью эллиптических сопел. Проведен численный анализ влияния режимных параметров и геометрических характеристик (большой и малой осей эллипса) на образование пиков в полях скорости и температуры, которые наблюдаются на начальном участке струй. Установлено, что при истечении сверхзвуковых струй из эллиптических сопел в спутный поток струя более интенсивно расширяется вдоль малой оси и в результате эллиптическая струя вниз по потоку

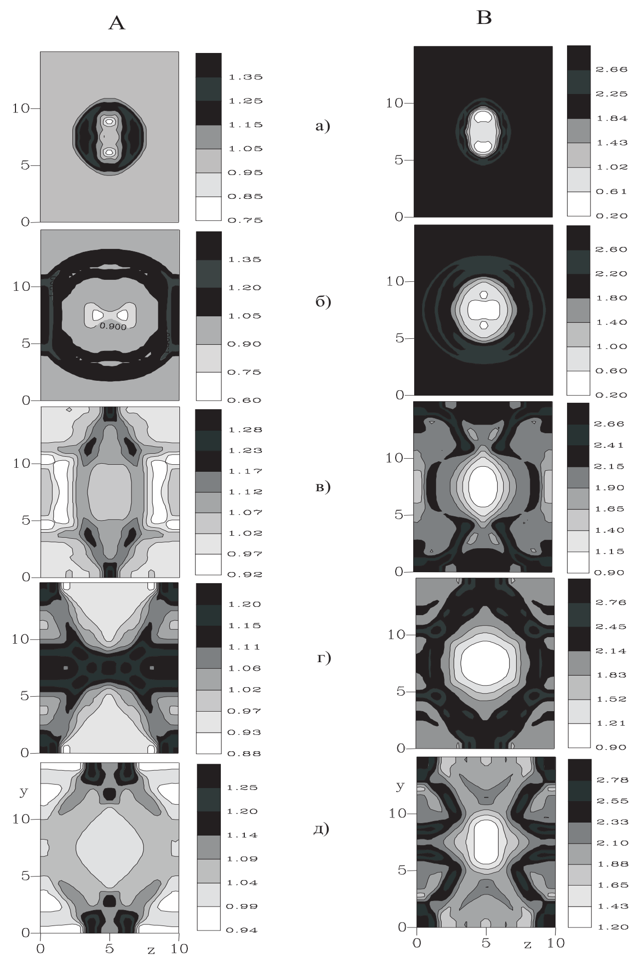

Рис. 4: Изотермы
а) $x = 3.74$, б) 11.2, в) 30, г) 45, д) 60
$A. \quad T_0 = 2, T_\infty = 1, B. \quad T_0 = 1, T_\infty = 2$
$M_a = 3, M_\infty = 5, \quad n = 10$

становится круглой.

Цитированная литература

[1]. Макашева А.П., Найманова А.Ж., *Численное исследование многоструйных течений в каналах*, Известия РАН, Механика жидкости и газа, 2004, № 2, С. 79 – 90.

[2]. Аверенкова Г.И., Ашратов Э.А. и др., *Сверхзвуковые струи идеального газа*, Труды ВЦ МГУ, 1970, Ч. 1, С. 4 – 35.

[3]. Козлов В.Е., *Метод расчета слабонеизобарической сверхзвуковой турбулентной струи в дозвуковом спутном потоке*, В кн.: Сверхзвуковые газовые струи, Новосибирск:"Наука", 1983.

[4]. Авдуевский В.С., Ашратов Э.А. и др., *Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй*, М., "Машиностроение", 1989.

[5]. Лоуренс С.Л., Таннехил Дж., Шоссе Д.С., *Приложение неявного метода Маккормака к численному решению параболизованных уравнений Навье-Стокса*, Аэрокосмическая техника, 1985, Т. 3, № 8, С. 95 – 104.

[6]. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р., *Вычислительная гидромеханика и теплообмен*, М., "Мир", 1990, Т. 1, 2.

[7]. Шифф Л.Б., Стегер Дж,Л., *Численный расчет стационарных сверхзвуковых вязких течений*, Ракетная техника и космонавтика, 1980, Т. 18, № 12, С. 16 – 29.

[8]. Флетчер К., *Вычислительные методы в динамике жидкости.* М., "Мир", 1991, Т. 2.

[9]. Синха Н.Д., Дэш С.М., *Расчеты сверхзвуковых течений в каналах при наличии горения, выполняемые посредством решения параболизованных уравнений Навье-Стокса*, Аэрокосмическая техника, 1988, № 7, С. 48 – 60.

[10]. Авдуевский В.С., и др., *Сверхзвуковые неизобарические струи газа.* М., "Машиностроение", 1985.

[11]. Ломков К.Э., *К вопросу об интенсификации сверхзвукового смешения и горения в камере сгорания ГПВРД с помощью пространственных эффектов*, Аэромеханика и газовая динамика, 2001, № 1, С. 56 – 65.

Статья поступила в редакцию 20.11.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39) . С. 95 – 96*

ХРОНИКА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ им. академика У.А.ДЖОЛДАСБЕКОВА
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НИИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

20 ЛЕТ НЕЗАВИСИМОСТИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ-II", посвященная 100-летию академика О.А. Жаутыкова, 100-летию член-корреспондента Е.И. Кима и 75-летию академика У.М. Султангазина

Алматы
28-30 сентября 2011 года

ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Б.Т. Жумагулов (председатель, Казахстан), Т.Ш.Кальменов (со-председатель, Казахстан), С.В. Абломейко (Беларусь), В.М.Амербаев (Россия), Ш.А. Алимов (Узбекистан), А.А. Ашимов (Казахстан), Б.С. Байжанов (Казахстан), Н.К. Блиев (Казахстан), R. Beauwen (Belgium), В.И. Буренков (Россия), С.К. Годунов (Россия), Н.Т. Данаев (Казахстан), М.Т.Дженалиев (Казахстан), С.У. Джолдасбеков Казахстан), Д.С. Джумабаев (Казахстан), А.С. Джумадильдаев (Казахстан), Ю.Г. Евтушенко (Россия), М.Н. Калимолдаев (Казахстан), К.А. Касымов (Казахстан), I. Marek (Czech), B. Miedzinski (Poland), Е.М. Моисеев (Россия), Г.М. Мутанов (Казахстан), H. Nouri (UK), М.О. Отелбаев(Казахстан), А.М. Самойленко (Украина), И.А. Тайманов (Россия), Г.У. Уалиев (Казахстан), С.Н. Харин (Казахстан).

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Т.Ш.Кальменов (председатель), У.С. Абдибеков (зам. председателя), Н.Т. Данаев (зам. председателя), М.Т. Дженалиев (зам. председателя), С.У. Джолдасбеков (зам. председателя), М.Н. Калимолдаев (зам. председателя), Е.Н. Амиргалиев, А.Т. Асанова, С.А. Бадаев, Д.Б. Базарханов, Б.С. Байжанов (ответ.секретарь), А.А. Баймухаметов, Ш.А. Балгимбаева, Г.И.Бижанова, В.В. Вербовский, Н.С. Даирбеков, М.К. Дауылбаев, А.А. Джомартов, Д.С. Джумабаев, А.А. Джусипов, С.С. Жуматов, Г.К. Кайшибаева, Б.Д. Кошанов, А.Т. Кулахметова, Б.Ш. Кулпешов, Р.Р. Мусабаев, М.Ю. Немченко (ученый секретарь), И.Т. Пак, М.А. Садыбеков, А.С. Сакабеков, Л.Ф. Спивак, А.А. Шарипбаев,

СЕКЦИИ

1. Дифференциальные уравнения

Руководители секции – М. К. Дауылбаев, Д.С.Джумабаев
Ученый секретарь – А.Т. Асанова
e-mail: APCMIM2011.S1@gmail.com

2. Теория функций и функциональный анализ
Руководители секции – Т.Ш.Кальменов, М.О. Отелбаев
Ученый секретарь – Ш.А. Балгимбаева
e-mail: APCMIM2011.S2@gmail.com
3. Уравнения математической физики
Руководители секции – Г.И.Бижанова, С.Н.Харин
Ученый секретарь – А.Т. Кулахметова
e-mail: APCMIM2011.S3@gmail.com
4. Вычислительная математика, математическое моделирование и теория переноса
Руководители секции – Н.Т. Данаев, А.С. Сакабеков
Ученый секретарь – Г.К. Кайшибаева
e-mail: APCMIM2011.S4@gmail.com
5. Геометрия, алгебра, математическая логика
Руководители секции – С.А. Бадаев, Н.С. Даирбеков, А.С. Джумадильдаев
Ученый секретарь – В.В. Вербовский
e-mail: APCMIM2011.S5@gmail.com
6. Механика и машиноведение
Руководители секции – А.А.Баймухаметов, Г.У. Уалиев
Ученый секретарь – А.А. Джомартов
e-mail: APCMIM2011.S6@gmail.com
7. Информатика
Руководители секции – М.Н. Калимолдаев, А.А. Шарипбаев
Ученый секретарь – Р.Р.Мусабаев
e-mail: APCMIM2011.S7@gmail.com

Формат конференции

На конференции будут представлены пленарные доклады (40 мин) и секционные доклады (20 мин).

Язык конференции

Русский, казахский, английский.

Публикации

Планируется издание сборника тезисов к началу конференции.

Приглашаем Вас принять участие в работе конференции. В случае Вашего согласия просим прислать заявку на участие и тезисы Вашего доклада по прилагаемой форме на электронный адрес ученого секретаря соответствующей секции до 10 июля 2011 г.

Оформление тезисов

Тезисы должны быть подготовлены в LaTeX'е. Объем не должен превышать 1-ой страницы. Перед публикацией все тезисы проходят рецензирование.

Заявка на участие

1. ФИО
2. Место работы, должность
3. Ученая степень, звание
4. Адрес для переписки
5. Номера телефонов (с кодом города): рабочий и/или домашний
6. Электронный адрес
7. Название доклада
8. Секция
9. Необходимость бронирования гостиницы
10. Необходимость визовой поддержки
11. Краткая аннотация доклада

РЕФЕРАТТАР — REVIEWS

УДК: 517.518 2010 MSC: 42A10

Ақышев Ғ. **Кластарды Лоренц кеңістігінде $M-$ мүшелі жуықтаудың реті туралы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 5 – 29.

Мақалада Бесов класын аралас мөлшерлі Лоренц кеңістігінде ең жақсы M-мүшелі жуықтаудың дәл реті анықталған.
Әдебиеттер тізімі – 30.

Akishev G. **On the order of the $M-$ th approach of the classes approximation in the Lorentz space** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 5 – 29.

There are obtained the exact estimates of $M-$ th approach of the approximation of Besov classes in the Lorentz space with anisotropic norm.
References – 30.

УДК: 530.45 2010 MSC: 81Q05

Алексеева Л.А. **Бикватерниондардың дифференциалдық алгебрасы. 3. Дирак теңдеуі және оның жалпылама шешімдері** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 30 – 38.

Дирак-кванттық механиканың теңдеуінің шешімдері зерттелген. Дирак теңдеуінің бикватерниондың түрі тұрғызылған және оның жалпылама шешімдері бикватернион түрінде скаляр потенциалдар арқылы анықталған Кванттық механиканың белгілі Клейн-Гордон-Фок және Шредингер теңдеулердің біріктіретін скаляр потенциалдардық шешімдеріне теңдеуі құрастырылған. Бейстационар, статикалық және уақыт бойынша гармоникалық скаляр потенциалдармен бірге олардың туғызатын спинорлары және спинорлық өрістері табылған.
Әдебиеттер тізімі – 6.

Alexeyeva L.A. **Differential algebra of biquaternions. 3. Dirac equation and its generalized solutions** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 30 – 38.

Dirac equation of quantum mechanics and its solutions are investigated. The biquatornionic form of the Dirac equation is done and its generalized solutions are constructed with the help of the scalar potentials. There is reduced an equation for the scalar potentials combining known equations of quantum mechanics and named as Klein-Gordon- Fork –Schrodinger one. The nonstationary, statistical and harmonic with respect to time scalar potentials and generated by them spinors and spinors fields are defined.
References – 6.

УДК: 528.36 2010 MSC: 81Q05P

Атанбаев С.А., Қожабекова А.А. **Ғарыштық барлап байқау мәліметі бойынша Жердегі топырақтың температурасының анықталуы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 39 – 42.

Топырақтың беттік қабаты үшін температуралық өрісті қалыпына келтіру – квазикерілеу әдісімен дербес туындылы теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі қарастырылды. Ғарыштық барлап байқау мәліметі бойынша Жердегі топырақтың температурасының анықталуы.

Әдебиеттер тізімі – 12.

Atanbaev S.A., Kozhabekova A.A. **Determination of the temperature of the Earth soil under the data of cosmic sounding** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 39 – 42.

With the help of quasi–inversion method there is considered the problem of the renewal of the temperature field of the surface layer of soil – Cauchy problem for the system of the partial differential equations.

References – 12.

УДК: 517.968.74 2010 MSC: 45J05

Бакірова Э.А. **Сызықты емес интегралдық - дифференциалдық теңдеулер үшін арнайы Коши есебінің шешімінің бар болуы мен жалғыздығы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 43 – 52.

Параметрлеу әдісі қолданғанда пайда болатын сызықты емес интегралдық - дифференциалдық теңдеулер үшін арнайы Коши есебі қарастырылады. Параметрлердің түрлі мәндеріне сәйкес келетін қарастырылып отырған есептің шешімінің жалғыздығының жеткілікті шарттары және оның шешімдерінің айырымының бағалауы осы параметрлердің айырымы бойынша алынған.

Әдебиеттер тізімі – 7.

Bakirova E.A. **Existence and uniqueness of a solution of the special Cauchy problem for the nonlinear integro–differential equations** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 43 – 52.

The special Cauchy problem for nonlinear integro–differential equations arising in the application of the parametrization method is considered. The are obtained the sufficient conditions of the existence of the unique solution to the considered problem and an estimate of the difference of its solutions corresponding to the different values of the parameters via the difference of these parameters.

References – 7.

УДК: 517.956 2010 MSC: 35L20

Балдыбек Ж.А., Өтелбаев М.О. **Сызықтық алгебралық жүйенің тармақталу есебі** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 53 – 58.

Жұмыста азғындалмаған матрицасы бар сызықты алгебралық теңдеулердің жүйелері үшін тармақталу есебі қарастырылды. Ол үшін вариациялық рекурренттік формулалар еңгізілді. Вариациялық әдістің жинақтылығы туралы теорема дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі – 2.

Baldybek Zh.A., Otelbaev M.O. **The problem of parallelizing of a linear algebraic system** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 53 – 58.

There is considered the problem of a parallelization for the systems of the linear algebraic equations with a nondegenerate matrix. For this the variational recurrent formulas are introduced. The theorem of convergence of a variational method is proved.

References – 2.

УДК: 517.927.25 2010 MSC: 34L10, 47E05, 34B10

Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. **Шеттік шарттары интеграл арқылы толқытылған Самарский-Ионкин есебі түпкілікті функцияларының базистігі** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 59 – 66.

Мақалада Шредингер операторы үшін қойылған Самарский-Ионкин спектралды есебінің шеттік шарттарын интеграл арқылы толқыту барысында оның меншікті функциялары қасиеттерінің өзгеру сипаты зерттелген. Шредингер операторы үшін қойылған Самарский-Ионкин спектралды есебі меншікті функцияларының $L_2(0,1)$ кеңістігінде Рисс базисі болуы талап етіледі. Шеттік шарттардағы интегралды оператор ядросының құбылуы мейлінше аз болса да, меншікті және оларға қосымша алынған функциялардың базистік қасиеттері өзгеріске ұшырайтындығы көрсетілген.

Әдебиеттер тізімі – 8.

Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. **Basis property of the root functions of the Samarsky-Ionkin problem with an integral perturbation in the boundary condition** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 59 – 66.

In this paper there is considered the Samarsky-Ionkin spectral problem for the Schrodinger equation with an integral perturbation in the boundary conditions. It is assumed that the unperturbed problem has a system of eigenfunctions forming a Riesz basis in $L_2(0,1)$. It is shown that the basis property of the systems of root functions of a problem can be varied under any arbitrarily small variation of the kernel of the integral perturbation.

References – 8.

УДК: 517.51 2010 MSC: 46E30, 42A16

Көпежанова А.Н. **Регулярлы ортонормаланған жүйе бойынша Фурье қатарларының кейбір теңсіздіктері** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 67 – 73.

Дискретті жалпылама $\lambda_q(\mu)$ Лоренц кеңістігінденгі функцияның регулярлық жүйесі бойынша Фурье коэффициенттерімен ортогональдық қатарлардың интегралдық қасиеттері зерттелген. Лоренц кеңістігінің жалпы жағдайы үшін Нұрсұлтанов теңсіздігінің аналогтары дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі – 9.

Kopezhanova A.N. **Some inequalities for the Fourier series with respect to the orthonormalized system** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 67 – 73.

The integral properties of the orthogonal series with respect to the regular systems of functions with Fourier coefficients from the discrete generalized Lorentz space $\lambda_q(\mu)$ are studied. Analogues of Nursultanov inequalities are proved in the case of general Lorentz spaces.

References – 9.

УДК: 517.938 2010 MSC: 34A45, 34B27, 34D20

Кулик В.Л., Кулик А.Н., Степаненко Н.В. **Динамикалық жүйелердің әлсіз регулярлы сызықты кеңейтулерін регулярлыға дейін толықтыру** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 74 – 86.

Әлсіз регулярлы сызықты кеңейтулерін регулярлыға дейін толықтыру идеясы жалпыланады. Динамикалық жүйелердің сызықты кеңейтулерінің кейбір кластарының регулярлығы зерттеледі.
Әдебиеттер тізімі – 7.

Kulik V.L., Kulik A.N., Stepanenko N.V. **The addition of weakly regular linear extensions of the dynamical systems till the regular** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 74 – 86.

There is generalized the idea of an addition of weakly regular linear extensions till the regular ones. The regularity of some classes of linear extensions of dynamical systems is investigated.
References – 7.

УДК: 532.526 2010 MSC: 76F40

Мақашева А.П. **Серіктес ағындағы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынша жүйелерінң ағысы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 1 (39). Б. 87 – 94.

Жоғары дыбысты ағыншадан серіктес ағынға ағып шығатын ағынша жүйелерін сандық зерттеу нәтижелері келтірілген. Геометриялық сипаттаманың және кіріс температурасының ағын сипаттамаларына әсері зерттелген.
Әдебиеттер тізімі – 11.

Makasheva A.P. **Efficiency of the mixture of the supersonic jets under the various configurations of nozzles** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 1 (39). P. 87 – 94.

There are given the results of the numerical investigation of the spreading of the system of supersonic jets from the elliptic nozzles into the supersonic flow. The influence of the geometrical characteristics and entrance temperature on the characteristics of a flow is investigated.
References – 11.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНИТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Цитированная литература

[1]. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О., *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*, М., "Наука", 1988. (для монографий)

[2]. Женсыкбаев А. А., *Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы*, Успехи матем.наук, 1981, Т. 36, вып. (или №) 4, С. 107 – 159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":

Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 11, №1 (39), 2011

Адрес редакции:
Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),
8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: http://www.math.kz

Подписано в печать 28.06.2011г.
Тираж 300 экз. Объем 102 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы
ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81
Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50
e-mail: print_express@bk.ru