ISSN 1682—0525

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

*MATHEMATICAL JOURNAL*

2004 том 4 № 2 (12)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

*Министерство образования и науки Республики Казахстан*

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 4 № 2 (12) 2004

Периодичность — 4 номера в год



*Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304*
*Телефон 8-(3272)-91-20-03*, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 4, № 2 (12), 2004**



Доклады международной конференции "Дифференциальные уравнения" (Алматы, 24 — 26 сентября 2003г.)

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 5 — 14*

*УДК 517.51*

# КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А. М. Абылаева, Р. Ойнаров

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
Казахстан 473033 г.Астана ул.Мунайтпасова, 5
Институт математики МО и Н РК
Казахстан 480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 oinarov@math.kz

**1. В в е д е н и е.** Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 0$ и $v$, $w$ — весовые функции т.е. неотрицательные, измеримые на $I = (0, +\infty)$ функции такие, что $v \in L_1^{loc}(I)$, $w \in L_1(0,t)$, $\forall t > 0$. Положим $W(x) = \int\limits_0^x w(s)ds$, $x > 0$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$K_\alpha f(x) = \int\limits_0^x \frac{f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I, \tag{1}$$

где $L_{p,w}$ — пространство всех измеримых на $I$ функций таких, что

$$\|f\|_{p,w} = \left( \int\limits_0^\infty |f(s)|^p w(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

При $\alpha \geq 1$ и $1 < p, q < \infty$ критерий ограниченности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора (1) вытекает из результатов работы [1]. Поэтому ниже мы будем считать, что $0 < \alpha < 1$.

При $w \equiv 1$ оператор (1) имеет вид

$$K_\alpha f(x) = \int\limits_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}. \tag{2}$$

Вопросы ограниченности из $L_p$ в $L_{q,v}$ оператора (2) исследованы в работах [2,3,4]. В работе [3] даны критерии ограниченности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора (2), когда одна из весовых функций $v$, $w$ невозрастающая.

Для любого линейного оператора $T$: $L_{p,w} \to L_{q,v}$ положим $\|T\| = \|T\|_{L_{p,w} \to L_{q,v}}$.

Keywords: *integral operator, fractional integral, boundedness*
2000 Mathematics Subject Classification: 47G10

Далее, неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ полагаются равными нулю. Соотношение вида $A \ll B$ означает $A \leq \beta B$, где положительная постоянная $\beta$, быть может, зависит от параметров $p$, $q$, $\alpha$; соотношение $A \approx B$ интерпретируется, как $A \ll B \ll A$. Множество всех целых чисел обозначается $Z$.

**2. Вспомогательные утверждения.** Для доказательства основных утверждений нам необходимы некоторые факты. Наряду с оператором (1) рассмотрим оператор

$$H_\alpha f(x) = \frac{1}{W^{1-\alpha}(x)} \int\limits_0^x f(s)w(s)ds, \quad x \in I. \tag{3}$$

Легко видеть, что для $f \geq 0$

$$K_\alpha f(x) \geq H_\alpha f(x) \quad \forall x > 0. \tag{4}$$

Здесь и далее $K_\alpha$ — оператор (1).

Вопросы ограниченности оператора вида (3) в весовых пространствах Лебега изучены достаточно полно. Полученные результаты, история вопроса и соответствующие литературные ссылки можно найти в [6,7].

**Теорема A. ([6, теорема 1.14]).** *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$. *Оператор* $H_\alpha$ *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$A_\alpha = \sup_{x>0} W^{\frac{1}{p'}}(x) \left( \int\limits_x^\infty W^{q(\alpha-1)}(s)v(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

*при этом* $\|H_\alpha\| \approx A_\alpha$.

**Теорема B. ([6, теорема 1.15 и 9.3]).** *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. *Оператор* $H_\alpha$ *ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$B_\alpha = \left( \int\limits_0^\infty (W(x))^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left( \int\limits_x^\infty W^{q(\alpha-1)}(s)v(s)ds \right)^{\frac{p}{p-q}} w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

*при этом* $\|H_\alpha\| \approx B_\alpha$.

**Теорема C. ([8]).** *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $a_k \geq 0$, $b_k > 0$, $k \in Z$. *Для* $f_k \geq 0$, $k \in Z$ *справедливо неравенство*

$$\left( \sum_{k \in Z} \left( a_k \sum_{j \geq k} f_j \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll C \left( \sum_{k \in Z} (b_k f_k)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

*где*

$$C = \sup_{k \in Z} \left( \sum_{j \leq k} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i \geq k} b_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Функция $W(\cdot)$ не убывает и непрерывна на $I$, причем $W(0) = 0$. Используя эти свойства функции $W$, для любого $k \in Z$ определим $x_k = \sup\{x : W(x) \leq 2^k, \ x \in I\}$. Очевидно, что $0 < x_k \leq x_{k+1}$ $\forall k \in Z$ и если, $x_k < +\infty$, то $W(x_k) = 2^k$, $2^k \leq W(x) \leq 2^{k+1}$ при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} w(s)ds = 2^{k-1}$, $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds \leq 2^k$. Эти факты ниже используются без напоминания.

Положим $I_k = [x_k, x_{k+1})$, $k \in Z$, $Z_0 = \{k : k \in Z,\ I_k \neq \varnothing\}$. Тогда $Z_0 \subseteq Z$ и $I = \bigcup\limits_{k\in Z} I_k = \bigcup\limits_{k\in Z_0} I_k$. Так как $I_k = 0$ $\forall k \in Z \setminus Z_0$ и интегралы по этим отрезкам равны нулю, то, не ограничивая общности, можно положить $Z_0 = Z$.

Пусть

$$\widetilde{A}_\alpha = \sup_{k\in Z} 2^{k\alpha} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(s)}{W^{\frac{q}{p}}(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\widetilde{B}_\alpha = \left( \sum_{k\in Z} \left( 2^{k\alpha} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(s)}{W^{\frac{q}{p}}(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

**Лемма 1.** *Пусть $0 < q < \infty$, $p > 1$. Тогда между величинами $A_\alpha$ и $\widetilde{A}_\alpha$ имеет место соотношение $A_\alpha \approx \widetilde{A}_\alpha$.*

**Доказательство.**

$$A_\alpha = \sup_{k\in Z} \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}} (W(x))^{\frac{1}{p'}} \left( \int\limits_x^\infty W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \sup_{k\in Z} (W(x_k))^{\frac{1}{p'}} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{-\frac{1}{p'}} \sup_{k\in Z} (W(x_{k+1}))^{\frac{1}{p'}} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq 2^{-\frac{1}{p'}} \sup_{k\in Z} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} [W(s)]^{q\alpha - \frac{q}{p}} v(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \geq 2^{-\frac{1}{p'}} \sup_{k\in Z} 2^{k\alpha} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(s)}{W^{\frac{q}{p}}(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} = 2^{-\frac{1}{p'}} \widetilde{A}_\alpha.$$

Следовательно, $A_\alpha \gg \widetilde{A}_\alpha$. С другой стороны,

$$A_\alpha \leq \sup_{k\in Z} (W(x_{k+1}))^{\frac{1}{p'}} \left( \int\limits_{x_k}^\infty W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \sup_{k\in Z} 2^{\frac{k+1}{p'}} \left( \sum_{i\geq k} 2^{-\frac{q}{p'}i} \cdot 2^{q\alpha(i+1)} \cdot 2^{\frac{q}{p'}i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{v(s)}{W^q(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \sup_{k\in Z} 2^{\frac{k+1}{p'}} \left( \sum_{i\geq k} 2^{-\frac{q}{p'}i} \cdot 2^{q\alpha i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{v(s)}{W^{\frac{q}{p}}(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \widetilde{A}_\alpha \sup_{k\in Z} 2^{\frac{k+1}{p'}} \left( \sum_{i\geq k} 2^{-\frac{q}{p'}i} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{j=0}^\infty 2^{-\frac{q}{p'}j} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \widetilde{A}_\alpha,$$

т.е. $A_\alpha \ll \widetilde{A}_\alpha$. Поэтому $A_\alpha \approx \widetilde{A}_\alpha$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. *Тогда* $B_\alpha \approx \widetilde{B}_\alpha$.

**Доказательство.**

$$B_\alpha = \left( \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [W(x)]^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left( \int\limits_x^\infty W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} \geq$$

$$\geq \left( \sum_{k\in Z} (W(x_{k-1}))^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left( \int\limits_{x_k}^\infty W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} \geq$$

$$\geq \left( \sum_{k\in Z} (2^{k-1})^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \cdot 2^{k-1} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2(p-1)}{p}} \left( \sum_{k\in Z} (2^{k+1})^{\frac{qp}{p'(p-q)}} \left( 2^{qk\alpha} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(s)}{W^q(s)} ds \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}} \gg$$

$$\gg \left( \sum_{k\in Z} \left( 2^{k\alpha} \left( (2^{k+1})^{\frac{q}{p'}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(s)}{W^q(s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}} \gg \widetilde{B}_\alpha.$$

Покажем обратное соотношение

$$B_\alpha = \left( \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} [W(x)]^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left( \int\limits_x^\infty W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} \leq$$

$$\leq \left( \sum_{k\in Z} [W(x_{k+1})]^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left( \int\limits_{x_k}^\infty W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} \leq$$

$$\leq \left( 2^{q-1} \left( \sum_{k\in Z} \left( 2^{k\frac{q}{p'}} \sum_{i\geq k} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $\frac{p}{p-q} > 1$, то (внутри наружной скобки) применяя теорему C, имеем

$$B_\alpha \ll \left( \sup_{j\in Z} \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{j} \left( 2^{k\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left( \sum_{i=j}^{\infty} \left( 2^{-\frac{iq}{p'}} \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{q}{p}} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left( \sum_{i\in Z} \left( 2^{\frac{iq}{p'}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} W^{q(\alpha-1)}(s) v(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{kq(p-1)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i\in Z} \left(2^{q\alpha}\cdot 2^{iq\alpha} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{v(s)}{W^{\frac{q}{p}}(s)} ds\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{i\in Z} \left(2^{i\alpha} \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{v(s)}{W^{\frac{q}{p}}(s)} ds\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{pq}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \widetilde{B}_\alpha.$$

Лемма 2 доказана.

**3. Критерий ограниченности оператора $\mathbf{K}_\alpha$.**

**Теорема 1.** *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*(i) оператор (1) ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,v}$*;*

*(ii) оператор (3) ограничен из* $L_{p,w}$ *в* $L_{q,v}$*;*

*(iii)* $A_\alpha < \infty$,

*при этом*

$$\|K_\alpha\| \approx \|H_\alpha\| \approx A_\alpha. \tag{5}$$

**Доказательство.** Из (4) легко следует импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ и соотношения

$$\|K_\alpha\| \geq \|H_\alpha\|. \tag{6}$$

Так как $1 < \frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$, то в силу теоремы А $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ и

$$\|H_\alpha\| \approx A_\alpha. \tag{7}$$

Покажем импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$ и соотношения $\|K_\alpha\| \ll A_\alpha$. Используя идею работы [4], имеем

$$\|K_\alpha f\|_{q,v}^q = \int\limits_0^\infty v(x) \left|\int\limits_0^x \frac{f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}\right|^q dx =$$

$$= \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left|\left(\int\limits_0^{x_{k-1}} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x}\right) \frac{f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}\right|^q dx \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left(\int\limits_0^{x_{k-1}} \frac{|f(s)|w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}\right)^q dx + \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x} \frac{|f(s)|w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}\right)^q dx =$$

$$= J_1 + J_2. \tag{8}$$

Оценим величины $J_1$ и $J_2$ по отдельности.

$$J_1 = \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left(\int\limits_0^{x_{k-1}} \frac{|f(s)|w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}\right)^q dx \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left(\int\limits_0^{x_{k-1}} \frac{|f(s)|w(s)ds}{(W(x_k)-W(x_{k-1}))^{1-\alpha}}\right)^q dx =$$

$$= 2^{2q(1-\alpha)} \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \left( \frac{1}{2^{k+1}} \right)^{1-\alpha} \int\limits_0^{x_{k-1}} |f(s)|w(s)ds \right)^q dx \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \frac{1}{W^{1-\alpha}(x)} \int\limits_0^x |f(s)|w(s)ds \right)^q dx = \|H_\alpha |f|\|_{q,v}^q. \tag{9}$$

Отсюда в силу теоремы A

$$J_1 \ll A_\alpha^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{10}$$

Применяя неравенства Гельдера и Йенсена, получим

$$J_2 = \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \int\limits_{x_{k-1}}^x \frac{|f(s)|w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \right)^q dx \le$$

$$\le \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \int\limits_{x_{k-1}}^x |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{q}{p}} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^x \frac{w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} dx \le$$

$$\le \sum_{k\in Z} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{q}{p}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \int\limits_0^x \frac{w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} dx \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{q}{p}} 2^{qk\alpha} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{[W(x)]^{\frac{q}{p}}} dx \le$$

$$\le \widetilde{A}_\alpha^q \left( \sum_{k\in Z} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \right) |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{q}{p}} \ll \widetilde{A}_\alpha^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{11}$$

Из (8), (10), (11) и на основании леммы 1 имеем $\|K_\alpha f\|_{q,v} \ll A_\alpha \|f\|_{p,w}$, т.е. оператор (1) ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ и

$$\|K_\alpha\| \ll A_\alpha. \tag{12}$$

Соотношения (6), (7) и (12) дают (5). Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < q < p < \infty$, $p > \frac{1}{\alpha}$. Тогда следующие положения эквивалентны:*

*$(i)$ оператор (1) ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$;*

*$(ii)$ оператор (3) ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$;*

*$(iii) B_\alpha < \infty$,*

*при этом*

$$\|K_\alpha\| \approx \|H_\alpha\| \approx B_\alpha. \tag{13}$$

**Доказательство.** В силу неравенства (4) и теоремы B следуют импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ и

$$\|K_\alpha\| \ge \|H_\alpha\|, \quad \|H_\alpha\| \approx B_\alpha. \tag{14}$$

Поэтому остается показать импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$ и соотношения $\|K_\alpha\| \ll B_\alpha$. Мы исходим из неравенства (8). На основании теоремы B из (9) получим

$$J_1 \ll B_\alpha^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{15}$$

Из оценки $J_2$ в теореме 1 имеем

$$J_2 \ll \sum_{k\in Z} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |f(s)|^p w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \left( 2^{qk\alpha} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{[W(x)]^{\frac{q}{p}}} dx \right).$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{p-q}$ и используя лемму 2, получим

$$J_2 \ll \left( \sum_{k\in Z} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} |f(s)|^p w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \left( \sum_{k\in Z} \left( 2^{k\alpha} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{[W(x)]^{\frac{q}{p}}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \le$$

$$\le 2^{\frac{q}{p}} \widetilde{B}_\alpha^q \|f\|_{p,w}^q \ll B_\alpha^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{16}$$

Из (8), (15) и (16) следует, что $\|K_\alpha f\|_{q,v} \ll B_\alpha \|f\|_{p,w}$, т.е. имеет место утверждение $(i)$ и $\|K_\alpha\| \ll B_\alpha$. Последнее соотношение вместе с (14) дает (13). Теорема 2 доказана.

**4. Двойственные результаты.**

Рассмотрим интегральный оператор

$$K_\alpha^* g(s) = \int_s^\infty \frac{g(x)v(x)dx}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}}$$

из $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$.

**Теорема 3.** *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $1 < p \le q < \frac{1}{1-\alpha}$. Тогда оператор $K_\alpha^*$ ограничен из $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$ тогда и только тогда, когда*

$$A_\alpha^* = \sup_{x>0} W^{\frac{1}{q}}(x) \left( \int_x^\infty \frac{v(s)ds}{W^{p'(1-\alpha)}(s)} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

*при этом $\|K_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \approx A_\alpha^*$.*

**Теорема 4.** *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < q < \min(p, \frac{1}{1-\alpha})$, $p > 1$. Тогда оператор $K_\alpha^*$ ограничен из $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$ тогда и только тогда, когда*

$$B_\alpha^* = \left( \int_0^\infty [W(x)]^{\frac{q}{p-q}} \left( \int_x^\infty \frac{v(s)ds}{W^{p'(1-\alpha)}(s)} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} w(x)dx \right)^{\frac{pq}{p-q}} < \infty,$$

*при этом $\|K_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \approx B_\alpha^*$.*

**Доказательство теорем 3 и 4.** Оператор $K_\alpha^*$ является дуальным к оператору (1) по отношению к билинейной форме $\int_0^\infty f(x)g(x)v(x)dx$ и оператор $K_\alpha^*$ при $1 < p, q < \infty$ ограничен из $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$ тогда и только тогда, когда оператор (1) ограничен из $L_{q',w}$ в $L_{p',v}$. Поэтому утверждение теоремы 3 и утверждение теоремы 4 при $1 < q < \min(p, \frac{1}{1-\alpha})$, соответственно, вытекают из теорем 1 и 2. Остается доказать справедливость утверждения теоремы 4, когда $0 < q \leq 1 < p < \infty$. Пусть $0 < q \leq 1 < p < \infty$ и оператор $K_\alpha^*$ ограничен из $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$. Легко видеть, что для любого $g \geq 0$

$$K_\alpha^* g(s) = \int_s^\infty \frac{g(x)v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \geq \int_s^\infty \frac{g(x)v(x)dx}{W^{1-\alpha}(x)} = H_\alpha^* g(s), \quad s > 0.$$

Следовательно, оператор $H_\alpha^*$ ограничен из $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$ и

$$\|K_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \geq \|H_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}}. \tag{17}$$

Тогда (см. [6, теорема 9.3 и замечание 9.10]) $B_\alpha^* < \infty$ и

$$\|H_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \approx B_\alpha^*. \tag{18}$$

Пусть $B_\alpha^* < \infty$. Покажем, что $\|K_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \ll B_\alpha^*$. Тогда из (17) и (18) имеем $\|K_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \approx B_\alpha^*$. Поступая как в теореме 1, имеем оценку

$$\|K_\alpha^* g\|_q^q = \sum_{k\in Z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \int_s^\infty \frac{g(x)v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \right|^q w(s)ds \ll J_1^* + J_2^* + J_3^*, \tag{19}$$

где

$$J_1^* = \sum_{k\in Z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \int_s^{x_{k+1}} \frac{|g(x)|v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \right)^q w(s)ds,$$

$$J_2^* = \sum_{k\in Z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{|g(x)|v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \right)^q w(s)ds,$$

$$J_3^* = \sum_{k\in Z} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \int_{x_{k+2}}^{\infty} \frac{|g(x)|v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \right)^q w(s)ds.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{1-q}$ и изменяя порядок интегрирования, имеем

$$J_1^* \leq \sum_{k\in Z} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds \right)^{1-q} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} \frac{|g(x)|v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} w(s)ds \right)^q \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} (2^k)^{1-q} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x)| \int_{x_k}^{x} \frac{w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} v(x)dx \right)^q \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} (2^k)^{1-q} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{|g(x)|W(x)}{W^{1-\alpha}(x)} v(x)dx \right)^q \ll \sum_{k\in Z} 2^k \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{|g(x)|v(x)dx}{W^{1-\alpha}(x)} \right)^q.$$

Дважды применяя неравенство Гельдера сначала в интеграле с показателями $p$ и $p'$, а затем в сумме с показателями $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{p-q}$, получим

$$J_1^* \ll \sum_{k\in Z} 2^k \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x)|^p v(x)dx \right)^{\frac{q}{p}} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)dx}{W^{p'(1-\alpha)}(x)} \right)^{\frac{q}{p'}} \leq$$

$$\leq \left( \sum_{k\in Z} [2^k]^{\frac{p}{p-q}} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)dx}{W^{p'(1-\alpha)}(x)} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left( \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x)|^p v(x)dx \right)^{\frac{q}{p}} = \widetilde{B}_\alpha^{*q} \|g\|_{p,v}^q. \tag{20}$$

Оценим $\widetilde{B}_\alpha^*$:

$$(\widetilde{B}_\alpha^*)^{\frac{pq}{p-q}} = \sum_{k\in Z} [2^k]^{\frac{p}{p-q}} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)dx}{W^{p'(1-\alpha)}(x)} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{p}{p-q}} \sum_{k\in Z} [2^{k-1}]^{\frac{q}{p-q}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} w(s)ds \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)dx}{W^{p'(1-\alpha)}(x)} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [W(s)]^{\frac{q}{p-q}} \left( \int\limits_{s}^{\infty} \frac{v(x)dx}{W^{p'(1-\alpha)}(x)} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} w(s)ds \leq (B_\alpha^*)^{\frac{pq}{p-q}}.$$

Следовательно, из (20) имеем

$$J_1^* \ll B_\alpha^{*q} \|g\|_{p,v}^q. \tag{21}$$

Поступая так же, как в оценке $J_1^*$, получим

$$J_2^* \leq \sum_{k\in Z} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds \right)^{1-q} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{|g(x)|v(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} w(s)ds \right)^q \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} (2^k)^{1-q} \left( \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{|g(x)|W(x)}{W^{1-\alpha}(x)} v(x)dx \right)^q \ll \sum_{k\in Z} 2^{k+1} \left( \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{|g(x)|}{W^{1-\alpha}(x)} v(x)dx \right)^q \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} 2^k \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{W^{p'(1-\alpha)}(x)} dx \right)^{\frac{q}{p'}} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x)|^p v(x)dx \right)^{\frac{q}{p}} \leq \widetilde{B}_\alpha^{*q} \|g\|_{p,v}^q \ll B_\alpha^{*q} \|g\|_{p,v}^q. \tag{22}$$

Оценку $J_3^*$ сводим к оценке оператора $H_\alpha^*$ следующим образом:

$$J_3^* \leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \int\limits_{x_{k+2}}^{\infty} \frac{|g(x)|v(x)dx}{(W(x_{k+2})-W(x_{k+1}))^{1-\alpha}} \right)^q w(s)ds \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \left( \frac{1}{2^{k+1}} \right)^{1-\alpha} \int\limits_{s}^{\infty} |g(x)|v(x)dx \right)^q w(s)ds \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \frac{1}{W^{1-\alpha}(s)} \int\limits_{s}^{\infty} |g(x)|v(x)dx \right)^q w(s)ds \leq \|H_\alpha^*|g|\|_{q,w}^q \ll (B_\alpha^*)^q \|g\|_{p,v}^q. \tag{23}$$

Из (19)–(23) имеем $\|K_\alpha^* g\|_{q,w} \ll B_\alpha^* \|g\|_{p,v}$, т.е. оператор $K_\alpha^*$ ограничен $L_{p,v}$ в $L_{q,w}$ и для его нормы имеет место оценка $\|K_\alpha^*\|_{L_{p,v}\to L_{q,w}} \ll B_\alpha^*$.

Теоремы 3 и 4 доказаны.

## Цитированная литература

1. **Ойнаров Р.** // Труды МИ РАН. 1993. Т. 204. С. 240–250.

2. **Newman S., Solomyak M.** // Integral Equations Operator Theory. 1994. V. 20. P.335–349.

3. **Meskhi A.** // Georgian Math.J. 1998. V.5. № 6, P.565–574.

4. **Prokhorov D.V.** // J.London Math. Soc. 2000. V. 61, № 2. P.617–628.

5. **Прохоров Д.В., Степанов В.Д.** // Доклады РАН. 2002. Т.382, №4. С.452–455.

6. **Opic B., Kufner A.** Hardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Scientific and Technical. Horlow, 1990.

7. **Sinnamon G., Stepanov V.D.** // J.London Math. Soc. 1996. V. 54, № 2, P.89–101.

8. **Gabisonija I., Meskhi A.** // Proceedings of A. Razmadze Math. Inst. 1998. V. 116. P.107–122.

*Поступила в редакцию 26.03.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 15 — 22*

*УДК 517.518*

# ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
г.Караганда ул.Университетская, 28 akishev@kargu.krg.kz

Через $L_q$ обозначим пространство измеримых по Лебегу на [0,1] функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_q = \Big(\int_0^1 |f(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 1 \le q < +\infty.$$

Рассмотрим мультипликативную систему Прайса (см. [1]).

Пусть дана последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ целых чисел $p_n \ge 2, n = 1, 2, ...$ Положим $G = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n -$целое число $, 0 \le\le x_n \le p_n - 1\}$ и $m_0 = 1, m_n = p_1 \cdot ... \cdot p_n$. Множество $G$ является группой с операцией сложения $\dot{+}$, как покоординатным сложением по модулю $p_n$, $n = 1, 2, ...$ Топология в группе $G$ определяется системой подгрупп

$$G_n = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G : x_k = 0 \text{ для } k = 1, 2, ..., n\}.$$

Рассмотрим отображение $\lambda : G \to [0, 1]$,

$$\lambda(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} = x,$$

где $\tilde{x} \in G$ и $x \in [0, 1], x_k = 0, 1, ..., p_k - 1$.

Это отображение является взаимно-однозначным всюду, кроме точек $\frac{l}{m_n}, l = 0, 1, ..., m_n - 1, \quad n = 1, 2, ...$ Заменяя отрезок $I \equiv [0, 1]$ модифицированным отрезком $I^*$ с соответствующими топологией и операцией сложения, как это сделано в [1], получим изоморфные топологические группы $I^*$, $G$.

На модифицированном отрезке $I^* = [0, 1]^*$ определим систему функций Прайса (см.[1]).

Keywords: *of Fourier coefficients, multiplicative system,convergence*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

Положим
$$\psi_0(x)=1,\psi_{m_k}(x)=exp(\frac{2\pi i x_{k+1}}{p_{k+1}}),\quad x\in I^*.$$
Если $n=\sum\limits_{k=0}^{r}\alpha_k m_k$, где $\alpha_k=0,1,...,p_{k+1}-1$, то положим
$$\psi_n(x)=\prod_{k=0}^{r}(\psi_{m_k}(x))^{\alpha_k}, x\in I^*.$$

Система функций $\{\psi_n\}$ является полной ортонормированной периодической мультипликативной системой (см.[1]).

Через $a_n(f)$ будем обозначать коэффициенты Фурье функций $f\in L_1$ по системе Прайса $\{\psi_n\}$.

$E_n(f)_q=\inf_{\{b_k\}}\|f-\sum\limits_{k=0}^{n-1}b_k\psi_k\|_q$ — наилучшее приближение функции $f\in L_q$, $1\le q<+\infty$ полиномами порядка не выше $n$ по системе Прайса $\{\psi_n\}$; $\omega_n(f)_q=\sup\limits_{0\le h<\frac{1}{m_n}}\|f(x\dot{+}h)-f(x)\|_q$ — групповой модуль непрерывности (см. [1]).

Рассмотрим функциональный класс (см. [2])
$$H_q^\omega=\big\{f\in L_q:\quad \omega_n\big(f\big)_q\le\omega_n, n\in\mathbb{N}\big\},$$
где $\omega=\{\omega_n\}$ — последовательность положительных чисел, $\omega_n\downarrow 0$, $n\to+\infty$.

Через $C(p,r,...)$ будем обозначать положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров, различные, вообще говоря, в разных формулах.

Запись $A(\varphi)\asymp B(\varphi)$ означает, что существуют положительные постоянные $c_1$ и $c_2$ такие, что $c_1\cdot A(\varphi)\le B(\varphi)\le c_2\cdot A(\varphi)$ для всех $\varphi$.

Условия сходимости ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^\gamma|a_n(f)|^\beta,\quad 0<\beta\le q'=\frac{q}{q-1},\quad \gamma\ge\frac{\theta}{q'}-1 \tag{1}$$
в терминах группового модуля непрерывности функции $f\in L_q$, $1<q\le 2$ исследованы в [3]–[11] ( также см. библ. в [1] и [2]).

В частности, известна

**Т е о р е м а А.** (см. [6]). *Пусть $1<q\le 2$, $0<\beta\le q'=\frac{q}{q-1}$ и система Прайса $\{\psi_n\}$ определена произвольной последовательностью $\{p_n\}$. Если $f\in L_q$ и*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln p_{n+1})^{1-\frac{\beta}{q'}}\omega_n^\beta(f)_q<+\infty, \tag{2}$$
*то ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\beta}{q'}-1}|a_n(f)|^\beta \tag{3}$$
*сходится.*

В [8] нами доказано, что условие
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega_\nu^\beta(f)_q\cdot\sum_{n=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1}\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\beta}{q}}}<+\infty \tag{4}$$

также дотаточно для сходимости ряда (3) для функции $f \in L_q$, $1 < q \le 2$, $0 < \beta < q$.

Ясно, что условие (4) эквивалентно соотношению

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu^\beta(f)_q \cdot \left[ (\ln m_{\nu+1})^{1-\frac{\beta}{q}} - (\ln m_\nu)^{1-\frac{\beta}{q}} \right] < +\infty. \tag{5}$$

Теперь сравним условия (2) и (5). В силу неравенства $b^\theta - a^\theta \le (b-a)^\theta$, $0 < \theta \le 1$, $0 < a < b < +\infty$ и равенства $\ln p_{\nu+1} = \ln m_{\nu+1} - \ln m_\nu$ нетрудно убедиться, что (2) влечет (5).

Однако обратное не всегда верно. Например, пусть $p_n = 3^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Тогда $\ln p_{n+1} = (n+1)\ln 3$, $m_n = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ и

$$(\ln m_{n+1})^{1-\frac{\beta}{q}} - (\ln m_n)^{1-\frac{\beta}{q}} = \left(\frac{\ln 3}{2}\right)^{1-\frac{\beta}{q}} (n+1)^{1-\frac{\beta}{q}} \times$$

$$\times \left[ (n+2)^{1-\frac{\beta}{q}} - n^{1-\frac{\beta}{q}} \right] \asymp (n+1)^{1-\frac{2\beta}{q}}.$$

Выберем число $\alpha$ такое, что $0 < \frac{2}{\beta} - \frac{2}{q} < \alpha < \frac{2}{\beta} - \frac{1}{q}$. Рассмотрим функцию $f_0 \in L_q$ такую, что $\omega_n(f_0)_q \asymp \frac{1}{n^\alpha}$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln p_{n+1})^{1-\frac{\beta}{q}} \omega_n^\beta(f_0)_q \tag{6}$$

расходится. Следовательно, функция $f_0 \in L_q$ не удовлетворяет условию (2), т.к. $1 - \frac{\beta}{q} < 1 - \frac{\beta}{q'}$.

Однако функция $f_0 \in L_q$ удовлетворяет условиям (4) и (5). Этим обосновано, что условие (4) слабее условия (2) (даже слабее, чем сходимость ряда (6)).

В [8] доказано, что условие (4) неулучшаемо на классе $H_q^\omega$.

В настоящей заметке мы рассмотрим условие сходимости ряда из коэффициентов Фурье по мультипликативной системе более общее, чем (1).

Сначала докажем некоторые вспомагательные утверждения.

**Теорема 1.** *Пусть мультипликативная система Прайса $\{\psi_n\}$ определена произвольной последовательностью $\{p_n\}$.*

*Если $\{a_n\}$ — последовательность чисел, $a_n \downarrow 0, n \to +\infty$ и удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} a_n^q < +\infty,$$

*то числа $a_n$ будут коэффициентами Фурье некоторой функции $f \in L_q$ по системе $\{\psi_n\}$ и*

$$\|f\|_q \le C \Big[ \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{q-2} a_n^q \Big]^{\frac{1}{q}}.$$

Подробное доказательство этой теоремы ранее изложено в [8]. Поэтому приведем краткую схему доказательства. Положим

$$T_{2^k}(x) = \sum_{\nu=0}^{2^k-1} a_\nu \psi_\nu(x), k = 1, 2, ...$$

Выберем число $q_0 \in (1, q)$. Пользуясь неравенством разных метрик для полиномов по мультипликативной системе (см. [12])

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} b_k \psi_k \Big\|_\theta \le C n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \Big\| \sum_{k=0}^{n} b_k \psi_k \Big\|_q, 1 \le q < \theta < +\infty.$$

и методом, примененным в [13], можем убедиться в справедливости неравенства

$$\|T_{2^l} - T_{2^k}\|_q \le C(q)\Big\{\sum_{n=k+1}^{l} 2^{nq(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})}\Big\|\sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n-1} a_\nu \psi_\nu\Big\|_{q_0}^q\Big\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (7)$$

Далее в силу преобразования Абеля, неравенства (см. [12])

$$\Big\|\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \psi_k\Big\|_q \le C(q)(\nu-\mu)^{1-\frac{1}{q}}, 1 < q < \infty$$

и монотонности последовательности $\{a_n\}$ получим

$$\Big\|\sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n-1} a_\nu \psi_\nu\Big\|_{q_0} \le C(q_0)a_{2^{n-1}}, n = 1, 2, ...$$

Поэтому из неравенства (7) следует, что

$$\|T_{2^l} - T_{2^k}\|_q \le C(q)\Big(\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^l-1} \nu^{q-2} a_\nu^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы.

В дальнейшем положим $e_0 = 0$, $e_{k+1} = e^{e_k}$, $\ln_0 x = x$, $\ln_{k+1} x = \ln(\ln_k x)$.

**Лемма 1.** *Пусть $1 < q < +\infty$. Тогда имеет место неравенство*

$$I_{q,r} = \Big\|\sum_{\nu=0}^{[e_r]-1} \psi_\nu + \sum_{\nu=[e_r]}^{n-1} (\nu+1)^{\frac{1}{q}-1}\big(\prod_{j=1}^{r-1} \ln_j(\nu+1)\big)^{-\frac{1}{q}} \psi_\nu\Big\|_q \le$$

$$\le C(q,r)(\ln_j(n))^{\frac{1}{q}}, \quad n > [e_r].$$

**Доказательство.** По теореме 1 имеем

$$I_{q,r} \le C(q,r)\Big\{\sum_{\nu=0}^{[e_r]-1} \nu^{q-2} + \sum_{\nu=[e_r]}^{n-1} \nu^{q-2}\Bigg(\frac{(\nu+1)^{\frac{1}{q}-1}}{\prod\limits_{j=1}^{r-1} \ln_j(\nu+1)}\Bigg)^q\Big\}^{\frac{1}{q}} \le C(q,r)\Big\{[e_r]^{q-1} +$$

$$+ \sum_{\nu=[e_r]}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)\prod\limits_{j=1}^{r-1} \ln_j(\nu+1)}\Big\}^{\frac{1}{q}} \le C(q,r)(\ln_r n)^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $0 < p < 1$, $0 < \beta < 1$, $b_n \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r} \ln_j n\Big)^{p-1} (\ln_r n)^\beta \cdot b_n^p \le$$

$$\le C(\beta,p,r)\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r} \ln_j n\Big)^{-1} (\ln_r n)^\beta \cdot \Big(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\Big)^p.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положим

$$W_n = \Big[\sum_{k=e_{r-1}}^{n}\Big(\prod_{j=0}^{r-1}\ln_j k\Big)^{-1}\Big]^{-1}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{p-1}(\ln_r n)^{\beta}.$$

Так как

$$\sum_{k=e_{r-1}}^{n}\Big(\prod_{j=0}^{r-1}\ln_j k\Big)^{-1} \geq C(r)\cdot \ln_r n,$$

то

$$W_n = C(r)\cdot\Big(\prod_{j=0}^{r-1}\ln_j n\Big)^{p-1}(\ln_r n)^{\beta+p-2}.$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера ($\theta = \frac{1}{p} > 1$) и пользуясь предыдущей оценкой, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} W_k\cdot b_k^p \leq \Big(\sum_{k=n}^{\infty} W_k^{\frac{1}{1-p}}\Big)^{1-p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\Big)^{p} \leq$$

$$\leq C(p,r)(\ln_r n)^{\beta-1}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\Big)^{p}. \tag{8}$$

Далее, меняя порядок суммирования и учитывая (8), будем иметь

$$\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{p-1}(\ln_r n)^{\beta}\cdot b_n^p =$$

$$= \sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r-1}\ln_j n\Big)^{-1}\sum_{k=n}^{\infty} W_k\cdot b_k^p \leq C(p,r)\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta}\cdot\Big(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\Big)^{p}.$$

Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** *Справедливость утверждения леммы 2 отмечена в книге [14] (стр. 422). Из доказанной леммы 2 в случае $r=1$, $\beta = 1-p$ следует теорема Д.65 [14] (стр. 423).*

Теперь изложим основные результаты.

**Т е о р е м а 2.** *Пусть $1 < q \leq 2$, $0 < \theta < q$, $0 < \beta < 1$, $q' = \frac{q}{q-1}$. Если $f \in L_q$ и*

$$\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j(n+1)\Big)^{-1}(\ln_r(n+1))^{\beta}E_n^{\theta}(f)_q < +\infty, \tag{9}$$

*то ряд*

$$\sum_{n=e_r}^{\infty}(n+1)^{\frac{\theta}{q'}-1}\Big(\prod_{j=1}^{r}\ln_j(n+1)\Big)^{\frac{\theta}{q}-1}(\ln_r n)^{\beta}|a_n(f)|^{\theta} \tag{10}$$

*сходится.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В лемме 2 полагая $p = \frac{\theta}{q} < 1$ и $b_n = n^{q-2}|a_n(f)|^q$, затем пользуясь теоремой Рисса о коэффициентах Фурье (см. [15, с. 211]), получим

$$\sum_{n=e_r}^{\infty}(n+1)^{\frac{\theta}{q'}-1}\Big(\prod_{j=1}^{r}\ln_j(n+1)\Big)^{\frac{\theta}{q}-1}(\ln_r n)^{\beta}|a_n(f)|^{\theta} \leq$$

$$\leq C(q,r,\theta)\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_j n)^{\beta}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}k^{q-2}|a_k(f)|^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}\leq$$

$$\leq C(q,r,\theta)\sum_{n=e_r}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta}E_n^{\theta}(f)_q.$$

В силу условия (9) отсюда следует сходимость ряда (10).

**Т е о р е м а 3.** *Пусть $1 < q \leq 2$, $0 < \theta < q$, $0 < \beta < 1$. Для того, чтобы для любой функции $f \in H_q^{\omega}$ ряд (10) сходился, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\omega_k^{\theta}\cdot\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta} < +\infty. \tag{11}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу монотонности наилучшего приближения и соотношения (см. [1, с. 239])

$$E_{m_\nu}(f)_q \leq \omega_\nu(f)_q \leq 2\cdot E_{m_\nu}(f)_q, \quad f\in L_q, \quad 1<q<+\infty$$

следует

$$\sum_{n=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta}\cdot E_n^{\theta}(f)_q \asymp$$

$$\asymp \omega_\nu(f)_q\cdot\sum_{n=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta}.$$

Следовательно, в силу условия (11) и теоремы 2 ряд (10) сходится.
Докажем необходимость. Пусть для любой функции $f \in H_q^{\omega}$ ряд (10) сходится. Допустим, что условие (11) не выполняется, т.е.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\omega_k^{\theta}\cdot\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta} = +\infty. \tag{12}$$

Выберем последовательность натуральных чисел $\{k_\nu\}$ следующим способом: $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, $k_{\nu+1} = \min\{k: \quad \omega_k < \frac{1}{2}\omega_{k_\nu}\}$.

Тогда

$$\omega_{k_{\nu+1}} < \frac{1}{2}\omega_{k_\nu}, \quad \omega_{k_{\nu+1}-1} \geq \frac{1}{2}\omega_{k_\nu}. \tag{13}$$

Из предположения (12) следует, что

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\omega_{k_\nu}^{\theta}\cdot\sum_{n=m_{k_\nu}}^{m_{k_{\nu+1}}-1}\Big(\prod_{j=0}^{r}\ln_j n\Big)^{-1}(\ln_r n)^{\beta} = +\infty.$$

Это эквивалентно соотношению

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\omega_{k_\nu}^{\theta}\cdot\Big[(\ln_r m_{k_{\nu+1}})^{\beta} - (\ln_r m_{k_\nu})^{\beta}\Big] = +\infty. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\omega_{k_\nu}\cdot(\ln_r m_{k_{\nu+1}})^{-\frac{1}{q}}\sum_{n=m_{k_\nu}}^{m_{k_{\nu+1}}-1}\frac{(n+1)^{\frac{1}{q}-1}}{\Big(\prod_{j=1}^{r-1}\ln_j n\Big)^{\frac{1}{q}}}\psi_n(x).$$

Пользуясь неравенством

$$\Big\|\sum_{n=m_{k_\nu}}^{m_{k_{\nu+1}}-1}\frac{(n+1)^{\frac{1}{q}-1}}{\prod_{j=1}^{r-1}\ln_j n}\psi_n\Big\|_q \le C(q)\cdot(\ln_r m_{k_{\nu+1}})^{\frac{1}{q}}, \tag{15}$$

которое следует из леммы 1, и первым соотношением в (13), получим, что $f_0\in L_q$, $1<q<+\infty$.

Пусть $k_s\le l<k_{s+1}$. Тогда в силу монотонности $\{\omega_n(f)_q\}$, определения наилучшего приближения, неравенств (15) и (13) будем иметь

$$\omega_l(f_0)_q\le\omega_{k_s}(f_0)_q\le 2E_{m_{k_s}}(f_0)_q\le C(q,r,\beta)\sum_{\nu=s}^{\infty}\omega_{k_\nu}\le$$

$$\le C(q,r,\beta)\cdot\omega_{k_s}\le 2\cdot C(q,r,\beta)\cdot\omega_{k_{s+1}-1}\le 2\cdot C(q,r,\beta)\cdot\omega_l,$$

т.е. функция $g_0=\frac{1}{2\cdot C(q,r,\beta)}f_0\in H_q^{\omega}$, $1<q<\infty$.

По свойству логарифма нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=m_{k_\nu}}^{m_{k_{\nu+1}}-1}(n+1)^{-1}\Big(\prod_{j=1}^{r-1}\ln_j(n+1)\Big)^{-1}(\ln_r(n+1))^{\beta+\frac{\theta}{q}-1}\ge$$

$$\ge C(r,\theta,q,\beta)\Big[(\ln_r m_{k_{\nu+1}})^{\beta+\frac{\theta}{q}}-(\ln_r m_{k_\nu})^{\beta+\frac{\theta}{q}}\Big].$$

Поэтому в силу (14) получим, что

$$\sum_{n=e_r}^{\infty}n^{\frac{\theta}{q'}-1}\Big(\prod_{j=1}^{r}\ln_j n\Big)^{\frac{\theta}{q}-1}(\ln_r n)^{\beta}|a_n(g_0)|^{\theta}=+\infty.$$

Теорема доказана.

**Замечание 2.** *В случае $r=1$ и $\beta=1-\frac{\theta}{q}$ теорема 3 ранее доказана в [8], а из теоремы 2 следуют результаты работ [7], [8]. Отметим, что теорема 2 верна для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы.*

## Цитированная литература

1. **Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.** Ряды и преобразования Уолша. М., 1987.

2. **Агаев Г.Н. и др.** Мультипликативные системы функции и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку, 1981.

3. **Onneweer C.W.** // Pacific J. Math. 1970. V.34. P.117–122.

4. **Mclaughlin J.R.** // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V.184. P.291–316.

5. **Quek T.S., Yap J.H.** // J. Math. Anal. and Appl. 1980. V.74. P. 1–14.

6. **Жантлесов Ж.Х.** // Изв. АН КазССР, серия физ.-матем. 1986. № 3. С.11–14.

7. **Даркенбаев С.З.** // Изв. АН КазССР, серия физ.-матем., 1990. №5. С.14–17.

8. **Акишев Г.** Об условиях сходимости рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам. // Рукопись депонир. в КазНИИНТИ. 1991. №3343.

9. **Бокаев Н.А.** // Сб. “Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики” межвуз. научно-метод. конф., посвященной 60-летию проф. К. Ж. Наурызбаева. Алматы, 1994. С.21–26.

10. **Смаилов Е.С.** // Тезисы докл. Воронежской зимн. матем. школы. 1997. С.184.
11. **Акишев Г.** // "Понтрягинские чтения-VIII." Воронеж, 1997.
12. **Борисова Е.А.** // Теория функций и ее приложения. М., 1986. С.7–10.
13. **Тиман М.Ф.** // Изв. вузов, матем. 1974. №10. С.61–74.
14. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М., 1948.
15. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М., 1961.

*Поступила в редакцию 22.01.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 23 — 34*

*УДК 519.6:537.12:531.1*

# ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРО-ГРАВИМАГНИТНОГО ПОЛЯ. УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЕЙ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Л. А. Алексеева

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125, alexeeva@math.kz

Как известно, система уравнений Максвелла для электромагнитного поля незамкнута. Она позволяет по известным электрической и магнитной напряженностям определять порождающие его электрические заряды и токи. Верно и обратное утверждение: при известных токах эти уравнения позволяют определять поле и заряды. Для замыкания этой системы уравнений в [1] на основе гипотезы о магнитном заряде предложены уравнения ньютоновского типа для описания движения зарядов и токов с учетом их массы. Для построения этих уравнений использовалась гамильтонова форма уравнений Максвелла [2,3]. Комплексификация электромагнитного поля с введением в уравнения плотности массы названа там А-полем, которое является электро-гравимагнитным (ЭГМ). Его дивергенция в действительной части дает плотность электрических зарядов, в мнимой — плотность массы. В [4] с введением комплексных градиентов поля построены уравнения А-поля в комплексных кватернионах.

Здесь этот подход развивается для построения уравнений взаимодействия ЭГМ-полей. На его основе построены аналоги всех трех известных в механике законов Ньютона для свободных, взаимодействующих полей и суммарного поля, законы сохранения энергии и заряда при взаимодействии полей. Приведены уравнения полей и рассмотрены частные случаи свободного нестационарного поля, статического и в случае гармонических колебаний даны примеры таких полей.

**1. Гамильтонова форма уравнений Максвелла. А-поле.** Запишем представленные в [1-3] соотношения для уравнений Максвелла в пространстве Минковского $M = \{(\tau, x) = (\tau = ct,\ x_1, x_2, x_3)\}$. При этом принимаем высказанную в [1] гипотезу.

Гипотеза. *Магнитный заряд эквивалентен массе, магнитные токи — количеству движения массы (массовым токам).*

Тогда гамильтонова форма уравнений Максвелла имеет вид:

$$\partial_\tau A + i\, rot\, A + J = 0, \tag{1}$$

Keywords: *Hamilton form of Maxwell equations, quaternion of A-field, newtonian laws, interacting electro-gravymagnetic fields, laws of transformation and conservations of energy*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

$$\rho = c^{-1} div\, A \tag{2}$$

где A — комплексный вектор напряженности A-поля: $A = \sqrt{\varepsilon}\, E + i\sqrt{\mu}\, H$, $J$ — ток, определяется через электрические и массовые (точнее, *гравимагнитные*) токи формулой: $J = \sqrt{\mu}\, j^E - i\sqrt{\varepsilon}\, j^H$, а комплексный заряд A-поля выражается через плотность электрических зарядов и плотность массы, как $\rho = \sqrt{\mu}\, \rho^E - i\sqrt{\varepsilon}\, \rho^H$, $\rho^E = \varepsilon\, div\, E$, $\rho^H = -\mu\, div\, H$. Здесь константы проницаемости среды $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — скорость ЭГМ-волн, $E, H$ — напряженности электрического и гравимагнитного полей, $x = (\, x_1,\, x_2,\, x_3\,)$, $t \geqslant 0$.

Если ввести действительный вектор скорости зарядов V, то $J = \rho V$, где $j^E = \rho^E V, j^H = \rho^H V$. Во введенной системе координат удобнее назвать зарядом выражение

$$\hat{\rho} = div\, A = \rho = (1/\sqrt{\varepsilon})\, \rho^E - i(1/\sqrt{\mu})\, \rho^H. \tag{3}$$

Тогда $J = \hat{\rho}\bar{V}$, где $\bar{V}$ — безразмерная скорость, $\bar{V} = V/c$. Для тока проводимости $\rho = 0,\ J \neq 0$. Заметим, что плотность энергии A-поля при такой записи определяется через модуль A: $W = 0,5\left(\varepsilon\, \|E\|^2 + \mu\, \|H\|^2\right) = 0,5\, \|A\|^2 = 0,5(A, A^*)$, вектор Пойнтинга $P = c^{-1} E \times H = 0,5[A^*, A]$, где $A^* = \sqrt{\varepsilon} E - i\sqrt{\mu} H$ — комплексно-сопряженное A.

Здесь и далее $(a, b), [a, b] = a \times b$ — скалярное и векторное произведения $a$ и $b$. Справедливы следующие теоремы [1].

**Т е о р е м а 1.** (*Закон сохранения заряда и энергии*)

$$\partial_\tau \rho + div\, J = 0, \tag{4}$$

$$\partial_\tau W + div\, P = -\operatorname{Re}(J, A^*). \tag{5}$$

**Т е о р е м а 2.** *Решение (??) является решением волнового уравнения вида*

$$\Box A = i\, rot\, J - grad\ \rho - \partial_\tau J. \tag{6}$$

Здесь $\Box = \partial_\tau^2 - \Delta$ — волновой оператор, $\Delta$ — оператор Лапласа.

**Т е о р е м а 3.** *Решение (??), описывающее излучаемые и затухающие на бесконечности волны, имеет вид свертки:* $A = -i\, rot\, (J * \psi) + c\, grad\, (\rho * \psi) + c^{-1} \partial_t\, (J * \psi)$, *где* $\psi$ — *фундаментальное решение волнового уравнения*

$$\Box \psi = \delta(x, \tau), \quad \psi = (4\pi R)^{-1} \delta(\tau - R), \tag{7}$$

$\delta(x, \tau)$ — обобщенная $\delta$-функция, $\delta(\tau - R)$ — *простой слой на расширяющейся сфере* $R = \tau$.

Заметим, что соотношения для A-поля (1)–(7) не содержат универсальных констант, в частности, скорость ЭГМ-волн, которая во введенной системе координат безразмерна и равна 1.

**2. К о м п л е к с н ы е к в а т е р н и о н ы.** Как показано в [4], удобным для описания A-поля является комплексное пространство кватернионов $K\{\mathbf{M}\} = \{\mathbf{F} = f(x, \tau) + F(x, \tau)\}$, где $f$ и $F$ — комплекснозначные функции и трехмерные вектор-функции, соответственно. $K$ — некоммутативная и неассоциативная алгебра со сложением и умножением ($\circ$) вида

$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = (af + bg) + (aF + bG),$$

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \tag{8}$$

**О п р е д е л е н и е.** Кватернион $\mathbf{F}^* = f^* - F^*$, где звездочка обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа, называется *сопряженным* $\mathbf{F}$. Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, то кватернион — *самосопряженный.*

В [4] введены дифференциальные кватернионные операторы $\mathbf{D}^+ = \partial_\tau + i\nabla$, $\mathbf{D}^- = \partial_\tau - i\nabla$, которые назовем *взаимными комплексными градиентами.* Здесь $\nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ — оператор Гамильтона.

Заметим, что в смысле данных выше определений каждый из них можно назвать самосопряженным оператором: $(\mathbf{D}^-)^* = \mathbf{D}^-$, $(\mathbf{D}^+)^* = \mathbf{D}^+$. Их действие на $K$ опредено как в алгебре кватернионов:

$$\mathbf{D}^+\mathbf{F} = (\partial_\tau + i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f - i\,(\nabla, F)) + \partial_\tau F + i\nabla f + i[\nabla, F],$$

$$\mathbf{D}^-\mathbf{F} = (\partial_\tau - i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f + i\,div\,F) + \partial_\tau F - i\;grad\,f - i\,rot\,F.$$

Волновой оператор ($\Box$) имеет вид

$$\mathbf{D}^- \circ \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^+ \circ \mathbf{D}^- = \partial_\tau^2 - \Delta = \Box \tag{9}$$

и

$$\mathbf{D}^-(\mathbf{D}^+\mathbf{F}) = \mathbf{D}^+(\mathbf{D}^-\mathbf{F}) = \Box\mathbf{F}. \tag{10}$$

Решения кватернионных дифференциальных уравнений типа

$$\mathbf{D}^\pm\mathbf{F} = \mathbf{G}(x, \tau) \tag{11}$$

представимы в виде

$$\mathbf{F} = \psi * \mathbf{D}^\mp\mathbf{G} + \mathbf{F}_0, \tag{12}$$

где $\mathbf{F}_0$ — решение однородного уравнения $\mathbf{D}^\pm\mathbf{F}_0 = 0$.

Эти представления очень удобны и эффективны для описания А-поля и уравнений взаимодействия полей.

**3. Кватернионы А-поля.** В [4] вектор напряженности А-поля рассмотрен как кватернион: $\mathbf{A} = 0 + A$ и получены следующие представления

$$0,5\,\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = 0,5(A^*, A) - 0,5[A^*, A] = W + i\,P, \tag{13}$$

$$\mathbf{D}^+\mathbf{A} = -(i\rho + J), \quad \rho = div\,A, \quad J = -\partial_\tau A - i\,rot\,A. \tag{14}$$

(Здесь и далее шапочку над $\rho$ убираем.)

**Определение.** *Назовем* $\mathbf{\Xi} = W + iP$ *кватернионом энергии-импульса* , $\Theta = i\,\rho + J$ — *кватернионом заряда-тока А-поля.*

Для потенциала А-поля $\mathbf{\Phi} = i\,\phi - \Phi$, комплексный градиент которого равен $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^-\mathbf{\Phi} = (\partial_\tau - i\,\nabla)(i\phi - \Phi) = i(\partial_\tau\phi - div\,\Phi) + i\,rot\,\Phi - \partial_\tau\Phi + grad\,\phi. \tag{15}$$

Поскольку скалярная часть $\mathbf{A}$ равна нулю, отсюда следует лоренцева калибровка для векторного потенциала

$$div\,\Phi = \partial_\tau\phi \tag{16}$$

и представление $A$ через скалярный и векторный потенциалы: $A = grad\,\phi - \partial_\tau\Phi + irot\,\Phi$.

Поскольку $\mathbf{D}^+\mathbf{A} = \mathbf{D}^+\mathbf{D}^-\mathbf{\Phi} = \Box\mathbf{\Phi}$, имеем волновое уравнение для потенциала

$$\Box\mathbf{\Phi} = -\mathbf{\Theta}, \tag{17}$$

из которого следуют волновые уравнения для скалярной и векторной частей $\mathbf{\Phi}$:

$$\Box\phi = -\rho, \quad \Box\Phi = J.$$

Так как

$$\mathbf{D}^{-}\mathbf{D}^{+}\mathbf{A} = -(\partial_\tau - i\nabla)(i\rho + J) = -i(\partial_\tau \rho + div\, J) - grad\, \rho - \partial_\tau J + i\, rot\, J = 0 + \Box A,$$

сравнивая кватернионы правой и левой частей, отсюда имеем закон сохранения заряда (см. теорему 1) и волновое уравнение для А-поля (см. теорему 2).

Итак, последовательное взятие комплексного градиента от кватерниона потенциала А-поля с лоренцевой калибровкой определяет кватернионы, соответствующие его напряженности, зарядам и токам, волновому уравнению для А-вектора и законам сохранения заряда и энергии. Комплексный градиент кватерниона напряженности А-поля дает соотношения Максвелла. Т.е., по сути, уравнения Максвелла определяют токи и заряды поля по его напряженности, но не определяют их движение. Замкнем эти уравнения уравнениями взаимодействия полей.

**4. Мощность и плотность объемных сил. Третий закон Ньютона**. Рассмотрим два поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, $\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Theta}'$ — соответствующие им заряды-токи.

Назовем кватернионы

$$\mathbf{F} = M - i\,F = -\,\mathbf{\Theta} \circ \mathbf{A}' = -(i\rho + J) \circ A' = (A', J) - i\rho A' + [A', J], \tag{18}$$

$$\mathbf{F}' = M' - i\,F' = -\,\mathbf{\Theta}' \circ \mathbf{A} = -(i\rho' + J') \circ A = (A, J') - i\rho' A + [A, J] \tag{19}$$

*плотностью мощности — силы*, действующей со стороны поля $\mathbf{A}'$ на $\mathbf{A}$ и, наоборот, соответственно. Действительно, с учетом (**??**), (**??**) скалярная часть имеет вид плотности мощности действующих сил:

$$M = (A', J) = c^{-1}((E', j^E) + (H', j^H)) + i\,((B', j^E) - (D', j^H)). \tag{20}$$

Выделяя действительную и мнимую части векторной составляющей кватерниона, получим выражения для плотности объемных сил ($F = F^H + iF^E$):

$$\mathrm{Re}\, F = \rho^E E' + \rho^H H' + j^E \times B' - j^H \times D' = F^H, \tag{21}$$

$$\mathrm{Im}\, F = \left(\rho^E B' - \rho^H D'\right) + c^{-1}\left(E' \times j^E + H' \times j^H\right) = F^E. \tag{22}$$

Здесь $B = \mu H$ — вектор *гравимагнитной* индукции, $D = \varepsilon E$ — вектор электрического смещения. В [1] также присутствуют все эти силы, что свидетельствует в пользу предложенной там гипотезы: магнитный заряд — это масса. Напряженность гравитационного поля описывается потенциальной частью вектора $H$, а роторная часть этого вектора описывает магнитное поле. Тогда скалярные части $\mathbf{\Theta}$ и $\mathbf{\Theta}'$ содержат плотности электрического заряда и массы, а векторные — плотности электрического тока и тока массы (количество движения массы). Исходя из этих предположений, в уравнении (**??**) имеем известные силы последовательно: кулоновская, гравитационная, сила Лоренца и новая — электромассовая сила. Интересно, что мощность силы Лоренца в действительную часть (**??**) не входит, т.к., как известно, она не работает на перемещениях массы. Но в действительной части стоит мощность кулоновских сил и гравимагнитных сил.

Естественно в силу третьего закона Ньютона о действующих и противодействующих силах предположить, что для (**??**) и (**??**) должно выполняться $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$. Следовательно, этот закон для полей имеет следующий вид.

*Закон о действии и противодействии полей*

$$\mathbf{\Theta} \circ \mathbf{A}' = -\mathbf{\Theta}' \circ \mathbf{A}. \tag{23}$$

Интересно, что в скалярной части он требует равенства мощностей соответствующих сил, действующих на заряды и токи другого поля, т.е. подобен известному в механике сплошных сред тождеству взаимности Бетти, которое обычно записывается для работы сил [ 7 ].

**5. Второй закон Ньютона и уравнения взаимодействия двух A-полей.** Согласно второму закону Ньютона производная от количества движения массы равна действующей на нее суммарной силе. Закон изменения поля под действием другого, подобный второму закону Ньютона, предложим в следующем виде.

*Уравнения взаимодействия A-полей*:

$$\kappa\mathbf{D}^{-}\mathbf{\Theta}=\mathbf{F}\equiv-\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{A}', \quad \kappa\mathbf{D}^{-}\mathbf{\Theta}'=-\mathbf{\Theta}'\circ\mathbf{A}, \tag{24}$$

$$\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{A}'=-\mathbf{\Theta}'\circ\mathbf{A}, \tag{25}$$

$$\mathbf{D}^{+}\mathbf{A}+\mathbf{\Theta}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{D}^{+}\mathbf{A}'+\mathbf{\Theta}'=\mathbf{0}, \tag{26}$$

Здесь (**??**) соответствует второму закону Ньютона, (**??**) – третьему. Вместе с уравнениями Максвелла для этих полей (**??**) они дают замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для определения полей. Введение константы связано с размерностью. Если размерность $A$ обозначить $[A]=\alpha$ ($\alpha^2$ — плотность энергии)), то $[\mathbf{\Theta}]=\frac{\alpha}{[x]}$, $[\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{A}']=\frac{\alpha^2}{[x]}$, $[\mathbf{D}^{-}\mathbf{\Theta}]=\frac{\alpha}{[x]^2}$. Следовательно, $[\kappa]=\alpha\,[x]$.

Раскрывая скалярную и векторную части (**??**), получим

*Уравнения трансформации A-поля*

$$i\kappa\,(\partial_\tau\rho+div\,J)=M, \tag{27}$$

$$i\kappa\,(\nabla\rho+\partial_\tau J-i\,rot\,J)=F. \tag{28}$$

Из (**??**) следует, что при взаимодействии полей закон сохранения заряда (см. теорему 1) изменяется. Появляется ненулевая правая часть в уравнении, связанная с мощностью $M$ сил воздействия со стороны другого поля. Из (**??**) в исходных обозначениях получим

$$\kappa\left(\mu^{-1/2}\partial_\tau\rho^H+\sqrt{\varepsilon}\,div\,j^H\right)=(E',j^E/c)+(H',j^H/c), \tag{29}$$

$$\kappa\left(\varepsilon^{-1/2}\partial_\tau\rho^E+\sqrt{\mu}\,div\,j^E\right)=(B',j^E/c)-(D',j^H/c). \tag{30}$$

Как видим, работа электрических и гравимагнитных сил второго поля влияет на массу и массовые токи первого. Правая часть (**??**) соответствует, как мы обсуждали в п.4 , силе. С учетом (**??**),(**??**) и (**??**) эти уравнения запишем в виде

$$\kappa\left(\mu^{-0,5}grad\,\rho^H+\sqrt{\varepsilon}\,\partial_\tau j^H+\sqrt{\mu}rot\,j^E\right)=\rho^E E'+\rho^H H'+j^E\times B'-j^H\times D', \tag{31}$$

$$\kappa\left(\varepsilon^{-0,5}grad\,\rho^E+\sqrt{\mu}\,\partial_\tau j^E-\sqrt{\varepsilon}rot\,j^H\right)=\left(\rho^E B'-\rho^H D'\right)+c^{-1}\left(E'\times j^E+H'\times j^H\right). \tag{32}$$

Аналогом производной по времени от количества движения во втором законе Ньютона в (**??**) является $\kappa\sqrt{\varepsilon}\,\partial_\tau j^H$ — плотность количества движения массы, но в левую часть входят также плотность ротора электрического тока и градиент плотности массы, что не случайно, как увидим далее, когда рассмотрим уравнение свободного поля. Второе уравнение (**??**) описывает воздействие внешнего поля на электрические токи.

Уравнения (**??**) — это линейные дифференциальные уравнения с нелинейными правыми частями, т.к. в них входят произведения напряженностей полей на кватернионы зарядов-токов. Если подставить в (**??**) заряды-токи, то систему уравнений (**??**)–(**??**) можно записать в более коротком, но более сложном виде

*Закон взаимодействия двух А-полей*

$$\square \mathbf{A} + \kappa^{-1}\mathbf{D}^{+}\mathbf{A}\circ\mathbf{A}' = \mathbf{0}, \quad \square \mathbf{A}' - \kappa^{-1}\mathbf{D}^{+}\mathbf{A}\circ\mathbf{A}' = \mathbf{0}. \tag{33}$$

Это замкнутая система уравнений относительно напряженностей полей, в которой нелинейные члены содержат младшие производные первого порядка.

В случае, когда второе поле ($A'$) намного сильнее первого (A), трансформацией второго можно пренебречь. Тогда уравнения (**??**), (**??**) и (**??**)$_1$ дают замкнутую систему для определения А-поля.

**6. Свободное А-поле. Первый закон Ньютона.** Рассмотрим $A$-поле в отсутствии других полей. Назовем такое поле *свободным.* Аналогом первого закона Ньютона об инерции массы в отсутствии действующих на нее сил здесь, как следует из (**??**), естественно принять

*Закон инерции для А-поля.* В отсутствии других полей $F = 0$, следовательно,

$$\mathbf{D}^{-}\mathbf{\Theta} = (\partial_\tau - i\nabla)\,\mathbf{\Theta} = \mathbf{0}, \tag{34}$$

что эквивалентно равенствам

$$\partial_\tau \rho + div\, J = 0, \tag{35}$$

$$grad\,\rho + \partial_\tau J - i\, rot\, J = 0 \quad \Leftrightarrow \ \square A = 0. \tag{36}$$

Оба уравнения (**??**) эквивалентны в силу теоремы 2. Действительные и мнимые части этих уравнений имеют следующий вид

$$\partial_t \rho^E + div\, j^E = 0, \ \ \partial_\tau j^E = \sqrt{\varepsilon/\mu}\ rot\, j^H - grad\,\rho^E, \tag{37}$$

$$\partial_t \rho^H + div\, j^H = 0, \ \ \partial_\tau j^H = -\sqrt{\mu/\varepsilon}\ rot\, j^E - grad\,\rho^H. \tag{38}$$

Первые равенства — это известные законы сохранения электрического заряда и массы, которые выполняются только для свободных полей. Из вторых уравнений следует, что гравимагнитная составляющая А-поля влияет на электрическую и, наоборот. Градиенты зарядов и роторы токов этих составляющих вызывают изменение токов во времени. Они дают замкнутую систему уравнений для определения плотностей электрических зарядов и токов, плотности массы и массовых токов А-поля в отсутствии других полей.

Если в уравнении (**??**) взять дивергенцию или ротор с учетом уравнения для заряда и тока, то получим волновые уравнения

$$\square \rho = 0, \quad \square J = 0. \tag{39}$$

Т.о., напряженность поля, заряды и токи являются решениями однородных волновых уравнений. Для построения свободного поля следует взять решение волнового уравнения для $A$ (**??**), далее найти заряды и токи, используя уравнения Максвелла (**??**) и ( **??**). При этом уравнение (**??**) выполняется автоматически в силу теорем 1,2.

ПРИМЕР 1. Пусть известно поле в некоторый момент времени, который примем за начальный: $A(x,0) = A_0(x), J(x,0) = J_0(x), \rho_0 = c^{-1} div\, A_0$. Тогда

$$4\pi A(x,t) = i\,(ct)^{-1} rot\left(J_0(x) \underset{x}{*} \delta_{S_{ct}}(x)\right) - t^{-1} grad\left(\rho_0(x) \underset{x}{*} \delta_{S_{ct}}\right) - c^{-2}\partial_t\left(t^{-1}\left(J_0 \underset{x}{*} \delta_{S_{ct}}\right)\right).$$

Здесь $\delta_{S_{ct}}(x)$ — простой слой на сфере радиуса ct. Если заряды и токи в начальный момент времени регулярные функции, то $\delta_{S_{ct}}(x) \underset{x}{*} F(x) = \int\limits_{\|x-y\|=ct} F(y)\, dS(y)$.

Для построения свободного поля в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ при $t > 0$ можно рассмотреть краевую задачу для векторного уравнения (**??**) в исследуемой области. При известных значениях реальной или мнимой частей $[J, n]$ на $S$ получим классические краевые задачи нестационарной электродинамики, решение которых можно искать, используя, например, метод граничных интегральных уравнения (см.[8,9]).

Используя теоремы Остроградского-Гаусса, Стокса, из (**??**),(**??**) легко получить ряд полезных интегральных равенств. А именно, если (**??**) проинтегрировать по фиксированному объему $\Omega$, ограниченному поверхностью $S$, с внешней нормалью $n$, то получим известный закон сохранения заряда (действительная часть — $Re$) и массы (мнимая часть — $Im$)

$$\partial_\tau \int\limits_\Omega \rho \, dV(x) = -\int\limits_S (J, n) \, dS(x), \quad dV(x) = dx_1 dx_2 dx_3. \tag{40}$$

Та же операция с (**??**) дает соотношения, которые описывают изменение электрических ($Re$) токов и количество движения ($Im$) в фиксированном объеме

$$\partial_\tau \int\limits_\Omega J \, dV(x) = -\int\limits_S \rho \, n \, dS(x) + i \int\limits_S [n, J] \, dS(x) \quad \Rightarrow \tag{41}$$

$$\partial_\tau \int\limits_\Omega j^E \, dV(x) = -c \int\limits_S \rho^E n \, dS(x) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int\limits_S \left[n, j^H\right] \, dS(x), \tag{42}$$

$$\partial_\tau \int\limits_\Omega j^H \, dV(x) = -c \int\limits_S \rho^H n \, dS(x) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int\limits_S \left[n, j^E\right] \, dS(x). \tag{43}$$

Если ( **??**) скалярно умножить на $n$ и проинтегрировать по поверхности $S$, натянутой на замкнутый контур $l$, получим формулы для определения скорости изменения потоков электричества и массы через замкнутую поверхность

$$\partial_\tau \int\limits_S (J, n) \, dS(x) = -\int\limits_S (grad\rho, n) \, dS(x) + i \int\limits_l (J, e_l) \, dl(x), \tag{44}$$

$$\partial_\tau \int\limits_S (j^E, n) \, dS(x) = -c \int\limits_S (grad\rho^E, n) \, dS(x) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int\limits_l (j^H, e_l) \, dl(x), \tag{45}$$

$$\partial_\tau \int\limits_S (j^H, n) \, dS(x) = -c \int\limits_S (grad\rho^H, n) \, dS(x) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int\limits_l (j^E, e_l) \, dl(x), \tag{46}$$

где $e_l$ — единичный касательный вектор к кривой $l$ в точке $x$. Добавим еще интегральную форму закона сохранения энергии

$$\partial_\tau \int\limits_\Omega W \, dV(x) + \int\limits_S (P, n) \, dS(x) = c^{-1} \int\limits_\Omega \left((E, j^E) - (H, j^H)\right) dV(x). \tag{47}$$

Эти соотношения можно использовать для определения свободных полей, если известны какие-то данные о поле.

Итак, в отсутствии других полей А-поле с течением времени изменяется так, чтобы его комплексный градиент был нулевым.

Рассмотрим частные случаи свободного поля, к которым с течением времени могут стремиться нестационарные поля.

*С т а т и ч е с к и е   п о л я.* Для статики, как следует из (**??**)-( **??**), выполняются следующие соотношения для постоянных зарядов и токов

$$grad\ \rho = i\, rot\, J \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A = 0, \tag{48}$$

$$J = -i\, rot\, A, \;\; \rho = div\, A. \tag{49}$$

Если ( **??**) дифференцируемы, то получим $\Delta\rho = 0, \;\; \Delta J = 0$. Т.е. заряды и компоненты токов и напряженности поля являются, как и $A$, гармоническими функциями. Если взять вектор напряженности поля $A$, удовлетворяющий уравнению Лапласа, далее по формулам (**??**) определить соответствующие заряды и токи, то они будут удовлетворять первому уравнению ( **??**) в силу операторного равенства: $rot\, rot = grad\, div - \triangle$.

Заметим, что чисто потенциальное поле удовлетворяет уравнениям (**??**), если градиент поля — гармоническая функция. Вихревое поле, потенциал которого является гармоническим вектором, тоже удовлетворяет (**??**).

Чтобы построить статическое свободное поле, можно в качестве $A$ взять гармонический вектор, затем используя уравнения Максвелла, найти заряды и токи.

ПРИМЕР 2. $A = (0, 0, f(x)), \;\; \rho = \partial_3 f, \;\; J = (-i\partial_2 f, i\partial_1 f, 0)$, где $f$ — гармоническая функция. В частности, можно взять функции вида

$$f(x) = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) \exp(i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2 \pm \|\xi\|\, x_3) d\Omega(\xi),$$

где $\Omega = R^2$, или область в $R^2$, или любое одномерное интегрируемое многообразие в $R^2$, $\tilde{f}(\xi)$ — интегрируемая финитная функция. Например, пусть $\Omega = \{\xi : \|\xi\| = a\}$, а $\tilde{f}(\xi) = f_3/2\pi a = const$. Тогда $A = e^{\pm a x_3}(0, 0, f_3 J_0(ar)), \;\; \rho = -f_3 J_1(ar) e^{\pm a x_3} \frac{x_3}{\|x\|^2}, \;\; J = i f_3 e^{\pm a x_3} \left\{ \frac{x_2}{\|x\|} J_1(ar), \frac{x_1}{\|x\|} J_1(ar), 0 \right\}$. Здесь $J_k(ar)$ — функции Бесселя.

Интегральные равенства (**??**)–(**??**) в статике принимают следующий вид

$$\int\limits_S (J, n)\, dS(x) = 0, \tag{50}$$

$$\int\limits_S \rho n\, dS(x) = i \int\limits_S [n, J]\; dS(x) \quad \Rightarrow \tag{51}$$

$$\int\limits_S \rho^E n\, dS(x) = \varepsilon \int\limits_S \left[n, j^H\right]\; dS(x), \;\; \int\limits_S \rho^H n\, dS(x) = \mu \int\limits_S \left[n, j^E\right]\; dS(x).$$

Закон сохранения энергии преобразуется к виду

$$\int\limits_S (P, n)\, dS(x) = c^{-1} \int\limits_{\Omega} \left((E, j^E) - (H, j^H)\right) dV(x). \tag{52}$$

Из (**??**) для поверхности, натянутой на контур $l$, получим

$$\int\limits_S (grad\ \rho, n)\, dS(x) = i \int\limits_l (J, e_l)\; dl(x) \quad \Rightarrow \tag{53}$$

$$c \int\limits_S (grad\ \rho^E, n)\, dS(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int\limits_l (j^H, e_l)\, dl(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int\limits_S (rot j^H, n)\, dS(x),$$

$$c\int\limits_S (grad\ \rho^H, n)\, dS(x) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int\limits_l (j^E, e_l)\, dl(x) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int\limits_S (rotj^E, n)\, dS(x).$$

Как видим, циркуляция электрического тока по контуру связана с потоком градиента массовой плотности через поверхность, натянутую на этот контур, а циркуляция массовых токов по контуру — с потоком градиента электрического заряда. Значит, если в покоящемся теле плотность массы переменная, в нем циркулируют вихревые электрические токи. Если в какой-то области $D$ соответственно $grad\ \rho^{E(H)} = 0$, то $\int\limits_l (j^{H(E)}, e_l)\, dl(x) = 0$ по любому замкнутому контуру. Верно и обратное, т.к. (**??**) верно для любой поверхности $S$, "опирающейся" на контур $l$. Следовательно, если тело электричеством не заряжено, то массовые токи в нем либо равны нулю, либо потенциальны.

*Свободные колебания.* В случае стационарного колебательного поля $\mathbf{A} = Ae^{-i\omega t} = Ae^{-ik\tau}$, $k = \omega/c$ ( аналогично для зарядов и токов). Комплексные амплитуды удовлетворяют следующим уравнениям

$$ik\rho = div\, J,\ grad\, \rho = i\,(k\, J + rot\, J)\,,\ \ \Delta A + k^2 A = 0, \tag{54}$$

$$\Delta\rho + k^2\rho = 0,\ \ \Delta J + k^2 J = 0. \tag{55}$$

Т.о., напряженность поля, заряды и токи являются решениями уравнения Гельмгольца. Для построения свободного поля следует взять решение этого уравнения для А (**??**), далее найти заряды и токи, используя уравнения Максвелла (**??**) и (**??**).

ПРИМЕР 3. $A = e^{-i\omega t}(0, 0, f(x))$, $\rho = e^{-i\omega t}\partial_3 f$, $J = e^{-i\omega t}(-i\partial_2 f, i\partial_1 f, -i\omega f)$, где $f$ — решение уравнения Гельмгольца. В частности, для широкого класса функций можно взять представление $f(x) = \int\limits_\Omega \tilde{f}(\xi)\exp\left(i((\xi, x) - \omega t)\right)d\Omega(\xi)$, где $\Omega = R^3$, или область в $R^3$, или любое двумерное или одномерное интегрируемое многообразие в $R^3$, $\tilde{f}(\xi)$ — локально интегрируемая функция, быстро убывающая на бесконечности. Например, пусть $\Omega = \{\xi : \|\xi\| = k\}$, а $\tilde{f}(\xi) = \frac{f_3}{4\pi k} = const$. Тогда амплитуды следующие

$$A = \left(0, 0, f_3\frac{\sin k\,\|x\|}{\|x\|}\right), \quad \rho = f_3\frac{x_3}{\|x\|^2}\left(k\cos k\,\|x\| - \frac{\sin k\,\|x\|}{\|x\|}\right),$$

$$J = if_3\left\{-\frac{x_2}{\|x\|^2}\left(k\cos a\,\|x\| - \frac{\sin k\,\|x\|}{\|x\|}\right),\ \frac{x_1}{\|x\|^2}\left(k\cos a\,\|x\| - \frac{\sin k\,\|x\|}{\|x\|}\right),\ -k\frac{\sin k\,\|x\|}{\|x\|}\right\}.$$

Аналогичный пример можно построить для других составляющих $A$ и взять любую линейную комбинацию этих трех решений, которые тоже дают решение (**??**).

Для построения поля можно рассмотреть краевую задачу для векторного уравнения Гельмгольца (**??**) в исследуемой области $\Omega \subset R^3$, t>0. При известных значениях реальной или мнимой частей комплексных амплитуд $[J, n]$ на $S$ получим классические краевые задачи стационарной электродинамики, решение которых можно искать, также используя метод граничных интегральных уравнения (см.[9]).

Приведем интегральные законы сохранения в этом случае:

$$ik\int\limits_\Omega \rho\, dV(x) = \int\limits_S (J, n)\, dS(x), \tag{56}$$

$$ik\int\limits_\Omega J\, dV(x) = \int\limits_S \rho n\, dS(x) - i\int\limits_S [n, J]\, dS(x), \tag{57}$$

$$ik \int\limits_S (J,n)\ dS(x) = c \int\limits_S (grad\,\rho, n) S(x) - i \int\limits_l (J, e_l)\ dl(x), \tag{58}$$

$$ik \int\limits_\Omega W\, dV(x) - \int\limits_S (P,n)\, dS(x) = -c^{-1} \int\limits_\Omega ((E, j^E) - (H, j^H))\, dV(x). \tag{59}$$

Эти соотношения можно использовать для определения свободных полей в случае стационарных колебаний, а также если известны какие-то данные о поле.

**7. Уравнения суммарного поля взаимодействий.** Если есть несколько (M) взаимодействующих полей, то уравнения (**??**) примут вид

$$\kappa \mathbf{D}^- \mathbf{\Theta}^k + \mathbf{\Theta}^k \circ \sum_{m \neq k} \mathbf{A}^m = \mathbf{0},\ \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^k + \mathbf{\Theta}^k = \mathbf{0}, \quad k = 1, ..., M, \tag{60}$$

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A}^m \circ \mathbf{A}^k + \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^m = 0, \quad k \neq m. \tag{61}$$

Первое уравнение — аналог второго закона Ньютона. Второе уравнение говорит о том, что напряженность поля является потенциалом для зарядов и токов. Третье уравнение — аналог третьего закона Ньютона.

А каким будет суммарное поле взаимодействующих полей? Здесь мы полагаем справедливость принципа суперпозиции полей, зарядов и токов, что подтверждается практическими наблюдениями. Суммарное (единое) поле порождается всеми зарядами и токами, и оно в силу третьего закона Ньютона (**??**) для полей, как легко видеть (суммируя (**??**) по k), является свободным, поскольку аналогично механике взаимодействующих тел все действующие силы внутренние. Итак, имеем

*Закон единого поля.* Взаимодействующие А-поля удовлетворяют второму закону Ньютона для полей ( **??**)-( **??**), а для суммарного заряда-тока выполняется тождество $\kappa \mathbf{D}^- \mathbf{\Theta} = \mathbf{D}^- \sum\limits_{m=1}^{M} \mathbf{\Theta}^m \equiv \mathbf{0}$ . Т.е. единое поле является свободным

$$grad\,\rho + \partial_\tau J - i\, rot\, J = 0 \quad \Leftrightarrow\ \Box A = 0,$$

его напряженность и заряд-ток определяются уравнениями Максвелла

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A} + \mathbf{\Theta} = \mathbf{D}^+ \sum_{m=1}^{M} \mathbf{A}_m + \mathbf{\Theta} = 0.$$

Если в начальный момент времени заряды-токи известны, система ( **??**)–( **??**) позволяет определять создаваемые ими поля и их совместное изменение во времени и пространстве.

Уравнения суммарного поля являются следствием и дают первые интегралы взаимодействующих полей. Если в начальный момент времени заряды-токи известны, система (7.1)–(7.2) позволяет определять создаваемые ими поля и их совместное изменение во времени и пространстве.

**8. Энергия взаимодействия полей.** Рассмотрим законы преобразования энергий при взаимодействии полей. Согласно (**??**) для единого поля имеем

$$\mathbf{\Xi} = \frac{1}{2}\, \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = \frac{1}{2}\, (\bar{A}, A) - \frac{1}{2}\, [A, \bar{A}] = W + i\, P, \tag{62}$$

$$\mathbf{\Xi} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{A}^k \circ \sum_{l=1}^{N} \mathbf{A}^{*l} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{N} \mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^{*k} + \sum_{k \neq l} \mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^{*l} \right) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{\Xi}^k + \delta \mathbf{\Xi}, \tag{63}$$

$$\delta\mathbf{\Xi} = \sum_{k\neq l} \mathbf{\Xi}^{kl}, \mathbf{\Xi}^{kl} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^{*l} + \mathbf{A}^l \circ \mathbf{A}^{*k}\right). \tag{64}$$

Назовем $\delta\mathbf{\Xi}$ кватернионом *энергии-импульса взаимодействия* полей, $\delta\mathbf{\Xi} = \delta W + i\delta P$. Здесь $\delta W$ — энергия взаимодействия, $\delta P$ — импульс взаимодействия, связанный с изменением вектора Пойнтинга. Соотношения (**??**), (**??**) можно записать в исходных величинах, используя равенство

$$\mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^{*l} = -\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_l}\left(\left(E^k, E^{*l}\right) + \left(E^l, E^{*k}\right)\right) + \sqrt{\mu_k\mu_l}\left(\left(H^k, H^{*l}\right) + \left(H^l, H^{*k}\right)\right) -$$
$$-i\left(\sqrt{\varepsilon_k\mu_l}\left(E^k, H^{*l}\right) + \sqrt{\varepsilon_l\mu_k}\left(E^l, H^{*k}\right)\right) - i\left(\sqrt{\varepsilon_l\mu_k}\left(H^k, E^{*l}\right) + \sqrt{\varepsilon_k\mu_l}\left(H^l, E^{*k}\right)\right) +$$
$$+\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_l}\left(\left[E^k, E^{*l}\right] + \left[E^l, E^{*k}\right]\right) - \sqrt{\mu_k\mu_l}\left(\left[H^k, H^{*l}\right] + \left[H^l, H^{*k}\right]\right) +$$
$$+i\left(\sqrt{\varepsilon_k\mu_l}\left[E^k, H^{*l}\right] + \sqrt{\varepsilon_l\mu_k}\left[E^l, H^{*k}\right]\right) + i\left(\sqrt{\varepsilon_l\mu_k}\left[H^k, E^{*l}\right] + \sqrt{\varepsilon_k\mu_l}\left[H^l, E^{*k}\right]\right) =$$
$$= 2\left(W^{kl} + iP^{kl}\right).$$

Из-за громоздкости выкладок это делать здесь не будем. Помечая скалярную и векторную части этого равенства соответствующими индексами, имеем

$$\delta\mathbf{\Xi} = \sum_{k\neq l} \delta W^{kl} + i\sum_{k\neq l} \delta P^{kl} = \sum_{k\neq l}\left(\delta W^{kl} + i\delta P^{kl}\right). \tag{65}$$

Из этих соотношений следует представление для энергии взаимодействия

$$\delta W = \sum_{k\neq l} \delta W^{kl} = \sum_{k\neq l}\left(W^{kl} + W^{lk}\right). \tag{66}$$

Поскольку энергия единого поля W — действительная неотрицательная величина (см.(**??**)), из соотношений (**??**),(**??**) следуют условия на выделение или поглощение энергии при взаимодействии А-полей:

1. выделение энергии, если $\operatorname{Re}\delta W > 0$,
2. поглощение энергии, если $\operatorname{Re}\delta W < 0$,
3. сохранение энергии-импульса, если $\delta\mathbf{\Xi} = \mathbf{0}$.

Кроме того, из этих же условий следует (для мнимой части (**??**))

*Второй закон взаимодействия А-полей*

$$\operatorname{Im}\delta W = \sum_{k\neq l} \operatorname{Im} W^{kl} = \sum_{k\neq l} \operatorname{Im}\left(W^{kl} + W^{lk}\right) = 0.$$

Этот закон тоже дает первый интеграл для взаимодействующих полей. Заметим, что уравнения взаимодействия А-полей содержат только одну универсальную размерную константу, что позволяет суммировать напряженности, заряды и токи А-полей и вводить единое поле. При переходе к исходным данным можно брать константы "проницаемости"для каждого поля взаимодействий разными, математическая теория это позволяет.

**9. З а к л ю ч е н и е.** Предложенные здесь уравнения взаимодействия А-полей основаны на гипотезе о магнитном заряде-массе, симметрирующем уравнения Максвелла. Это позволило назвать такие поля электро-гравимагнитными и построить законы их преобразования и взаимодействия, во многом аналогичные законам Ньютона для материальных тел. Поскольку размерность А-поля $[A] = \sqrt{[W]}$, а $[W]$ — это размерность плотности энергии, А-поле можно назвать *энергетическим*. На основе этих законов можно объяснить ряд наблюдаемых физических явлений.

Например, хорошо известно, что постоянные вращающиеся электрические токи порождают вихревые магнитные поля [6]. Из представленной теории следует (см. примеры в [1,3]), что аналогично вращающиеся массы создают вихревые электрические поля (это можно экспериментально проверить). Это объясняет, например, наличие электрической оси у Земли, обусловленной вихревой составляющей электрического поля Земли вследствие вращения ее массы. Подобное должно наблюдаться и у других планет. Поскольку Земля имеет отрицательный электрический заряд, то его вращение обуславливает и соленоидальное магнитное поле Земли.

Другой пример. Согласно этой теории следует учитывать, что электрическое поле Солнца порождает электромассовую силу, смещающую орбиты планет. Интересно, что в работе [10] для определения смещения перигелия Меркурия, необъяснимого в рамках классической теории гравитации, в уравнения Ньютона для двух тел введена дополнительная сила, названная авторами когравитацией, которая по виду подобна рассмотренной здесь электромассовой силе.

Представленная теория дает также уравнения изменения электрических токов и зарядов под действием электро-гравимагнитных полей и законы преобразования энергии-импульса, которые могут описать, например, некоторые закономерности химических реакций веществ.

## Цитированная литература

1. **Алексеева Л.А.** // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т.43, №5. С.759–766.

2. **Алексеева Л.А.** // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. 2002. Т.10, N 2(34). С.126–136.

3. **Алексеева Л.А.** // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39, №6. С.769–776.

4. **Алексеева Л.А.** Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла/ Математический журнал. Алма-Ата. 2003. №4. С.20–24.

5. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.

6. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. М., 1989.

7. **Новацкий В.** Теория упругости. М., 1970.

8. **Алексеева Л.А.** // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т.42, №1. С.76–88.

9. **Алексеева Л.А., Саутбеков С.С.** // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т.40, №4. С.611–622.

10. **Matos C.J., Tajmar M.** Advance of Mercury Perihelion Explained by Cogravity/Advanced Concepts and Studies Officer. E-mail: clovis.de.matos@esa.int

*Поступила в редакцию 27.04.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 35 – 46*

*УДК 517.95*

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ. II.

Г. И. Бижанова

Институт математики МО и Н РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 galya@math.kz

Построено решение задачи сопряжения для эллиптических уравнений второго порядка в пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, в явном виде. Получены формулы, устанавливающие асимптотическое поведение решений задач с наклонной производной и сопряжения при $|x| \to \infty$.

В первой части настоящей статьи были построены в явном виде решения задач Дирихле (Задачи I) и с наклонной производной (Задачи II) для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве $x_n > 0$, выведены асимптотические представления решения задачи Дирихле. Найдем решение задачи сопряжения для эллиптических уравнений (Задачи III), получим формулы, устанавливающие асимптотическое поведение решений Задач II, III при $|x| \to \infty$.

Пусть $D_1 := \mathbb{R}^n_-$ и $D_2 := \mathbb{R}^n_+$ — полупространства $x_n < 0$ и $x_n > 0$ в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, соответственно.

Рассмотрим модельную задачу сопряжения — Задачу III

$$\Delta u_1 - c_1 u = f_1(x),\ x \in \mathbb{R}^n_-, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 - c_2 u_2 = f_2(x),\ x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2}$$

$$u_1 - u_2|_{x_n=0} = 0, \tag{3}$$

$$b\nabla u_1 - d\nabla u_2 + b_0 u_1 + d_0 u_2|_{x_n=0} = \varphi(x'), \tag{4}$$

где $b = (b_1, \dots, b_n),\ d = (d_1, \dots, d_n),\ \nabla = (\partial_{x_1}, \dots \partial_{x_n}),\ \ c_k \geq 0,\ k = 1, 2,\ b_n > 0,\ d_n > 0,$ $b_0 + d_0 \geq 0$.

Для нахождения решения задачи (1)–(4), как и в [1] при построении решений Задач I и II, рассмотрим соответствующую задачу сопряжения для параболических уравнений $\partial_t v_k - \Delta v_k + c_k v_k = g_k(x,t),\ x \in D_k,\ t > 0,\ k = 1, 2$ с нулевыми начальными условиями, с условиями сопряжения (3), (4) и с функцией $\psi(x', t)$ в (4) вместо $\varphi(x')$. Применяя преобразования Лапласа по $t$

Keywords: *elliptic equation, boundary value problem, unbounded domain, asymptotic of solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J25, 35C05, 35B40

и Фурье по $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, найдем решение параболической задачи. Положив в найденных решениях $g_k(y, t-\tau) = -f_k(y)$, $\psi(y', t-\tau) = \varphi(y')$ и устремив $t$ к $\infty$, получим функции

$$
\begin{gathered}
u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')dy' \int_0^\infty e^{-b_0\bar\sigma - d_0\tilde\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}} e^{-\frac{(x'-y'-b'\bar\sigma+d'\tilde\sigma)^2}{4\tau}}\, d\tau \times \\
\times \int_0^\tau \frac{b_n\bar\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} \frac{d_n\tilde\sigma + \eta_n}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}}\, e^{-\frac{(b_n\bar\sigma - x_n)^2}{4(\tau-\tau_1)} - \frac{(d_n\tilde\sigma+\eta_n)^2}{4\tau_1}} \Big|_{\substack{\bar\sigma=\sigma \\ \tilde\sigma=\sigma}} e^{-c_1(\tau-\tau_1) - c_2\tau_1}\, d\tau_1 \Big|_{\eta_n=0} - \\
- \int_{\mathbb{R}^n_-} f_1(y)\, dy \int_0^\infty \big(\Gamma(x-y,\tau) - \Gamma(x'-y', x_n+y_n, \tau)\big) e^{-c_1\tau} d\tau - \\
-b_n \int_{\mathbb{R}^n_-} f_1(y)dy \int_0^\infty e^{-b_0\bar\sigma - d_0\tilde\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}} e^{-\frac{(x'-y'-b'\bar\sigma+d'\tilde\sigma)^2}{4\tau}}\, d\tau \times \\
\times \int_0^\tau \frac{b_n\bar\sigma - x_n - y_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} \frac{d_n\tilde\sigma + \eta_n}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} e^{-\frac{(b_n\bar\sigma - x_n - y_n)^2}{4(\tau-\tau_1)} - \frac{(d_n\tilde\sigma+\eta_n)^2}{4\tau_1}} \Big|_{\substack{\bar\sigma=\sigma \\ \tilde\sigma=\sigma}} e^{-c_1(\tau-\tau_1) - c_2\tau_1}\, d\tau_1 \Big|_{\eta_n=0} - \\
-d_n \int_{\mathbb{R}^n_+} f_2(y)dy \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}} e^{-\frac{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2}{4\tau}}\, d\tau \times \\
\times \int_0^\tau \frac{b_n\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} \frac{d_n\sigma + y_n}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} e^{-\frac{(b_n\sigma - x_n)^2}{4(\tau-\tau_1)} - \frac{(d_n\sigma+y_n)^2}{4\tau_1}} e^{-c_1(\tau-\tau_1) - c_2\tau_1}\, d\tau_1 := \\
:= w_1^{(1)}(x) - w_2^{(1)}(x) - b_n w_3^{(1)}(x) - d_n w_4^{(1)}(x),\ x_n < 0;
\end{gathered} \tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
u_2(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')dy' \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}} e^{-\frac{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2}{4\tau}}\, d\tau \times \\
\times \int_0^\tau \frac{b_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} \frac{d_n\sigma + x_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}}\, e^{-\frac{(b_n\sigma)^2}{4\tau_1} - \frac{(d_n\sigma+x_n)^2}{4(\tau-\tau_1)}} e^{-c_1\tau_1 - c_2(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 - \\
- \int_{\mathbb{R}^n_+} f_2(y)\, dy \int_0^\infty \big(\Gamma(x-y,\tau) - \Gamma(x'-y', x_n+y_n, \tau)\big) e^{-c_2\tau} d\tau - \\
-b_n \int_{\mathbb{R}^n_-} f_1(y)dy \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}} e^{-\frac{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2}{4\tau}}\, d\tau \times \\
\times \int_0^\tau \frac{b_n\sigma - y_n}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} \frac{d_n\sigma + x_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} e^{-\frac{(b_n\sigma - y_n)^2}{4\tau_1} - \frac{(d_n\sigma+x_n)^2}{4(\tau-\tau_1)}} e^{-c_1\tau_1 - c_2(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 - \\
-d_n \int_{\mathbb{R}^n_+} f_2(y)dy \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}} e^{-\frac{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2}{4\tau}}\, d\tau \times \\
\times \int_0^\tau \frac{b_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} \frac{d_n\sigma + x_n + y_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} e^{-\frac{(b_n\sigma)^2}{4\tau_1} - \frac{(d_n\sigma+x_n+y_n)^2}{4(\tau-\tau_1)}} e^{-c_1\tau_1 - c_2(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 := \\
:= w_1^{(2)}(x) - w_2^{(2)}(x) - b_n w_3^{(2)}(x) - d_n w_4^{(2)}(x),\ x_n > 0,
\end{gathered} \tag{6}
$$

где

$$
\Gamma(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-x^2/4t}
$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t v(x,t) - \Delta v(x,t) = 0$.

**Замечание 1.** *Для удобства при доказательстве Теоремы 4 в интегралах* $w_1^{(1)}$, $w_3^{(1)}$ *мы записали переменные* $\bar\sigma$ *и* $\tilde\sigma$ *вместо переменной интегрирования* $\sigma$, *а также ввели вспомогательную переменную* $\eta_n$, *затем положили* $\bar\sigma = \sigma$, $\tilde\sigma = \sigma$, $\eta_n = 0$.

**Т е о р е м а 4.** *Пусть в задаче (1)–(4)* $c_k > 0,\ k = 1,2,\ b_n > 0,\ d_n > 0,\ \ b_0 + d_0 \geq 0.$ *Предположим, что функции* $f_k(x)$ *принадлежат пространству Гельдера* $C^{\alpha}(D_k),\ k = 1,2,$ $\varphi(x')$ *– пространству* $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}),\ \ \alpha \in (0,1).$

*Тогда функции* $u_k(x),\ k = 1,2,$ *определяемые формулами (5), (6), являются решением задачи (1)–(4).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим функции $u_k(x) = w_1^{(k)} - w_2^{(k)} - b_n w_3^{(k)} - d_n w_4^{(k)},\ k = 1,2.$ В силу свойства фундаментального решения $\Gamma(x,\tau)$ уравнения теплопроводности $(\partial_\tau - \Delta)u(x,\tau) = 0,$ как и в Теоремах 1,2, получим

$$-(\Delta - c_1)w_2^{(k)}(x) = f_k(x),\ k = 1,2;\ (\Delta - c_k)w_m^{(k)}(x) = 0,\ k = 1,2,\ m = 1,3,4,$$

т.е. функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют уравнениям (1), (2), соответственно.

Так как в формулах (5), (6) интегралы по $\tau_1$ являются свертками, то $w_m^{(1)} - w_m^{(2)}|_{x_n=0} = 0,\ m = 1,3,4,$ кроме того, очевидно, что $w_2^{(k)}(x)|_{x_n=0} = 0,$ но тогда $u_1 - u_2|_{x_n=0} = 0.$

Покажем, что функции (5) и (6) удовлетворяют граничному условию (4). Подставим потенциалы $w_1^{(1)}(x)$ и $w_1^{(2)}(x)$ в условие (4). Учитывая, что у функции $w_1^{(1)}(x)$ под знаком интеграла по $\sigma$ имеет место равенство $b\nabla + b_0 = -\frac{d}{d\bar\sigma}$, возьмем интеграл по $\sigma$ по частям, после интегрирования под знаком интеграла по $\sigma$ получим производную $\frac{d}{d\bar\sigma}$, равную $d'\nabla' + d_n\partial_{\eta_n} - d_0$, поэтому можем записать

$$\begin{gathered}(b\nabla + b_0)w_1^{(1)} - (d\nabla - d_0)w_1^{(2)}|_{x_n=0} = \\ = u_0|_{x_n=0} + (d'\nabla'_{x'} + d_n\partial_{\eta_n} - d_0)w_1^{(1)} - (d\nabla - d_0)w_1^{(2)}|_{x_n=0} = u_0|_{x_n=0},\end{gathered} \tag{7}$$

где $\eta_n$ является вспомогательной переменной, равной нулю (см. формулу (5) и Замечание 1), $u_0(x)$ — функция, полученная вне интеграла по $\sigma$ при $\sigma = 0$ после интегрирования потенциала $w_1^{(1)}$ по частям по переменной $\sigma$,

$$\begin{aligned}u_0(x) = &\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')\,dy' \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}}\,d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2}{4\tau}}\, e^{-(b_0+d_0)\sigma} \times \\ &\times \frac{b_n\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} \frac{d_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} e^{-\frac{(b_n\sigma - x_n)^2}{4(\tau-\tau_1)} - \frac{(d_n\sigma)^2}{4\tau_1}}\, e^{-c_1(\tau-\tau_1) - c_2\tau_1}\, d\tau_1|_{\sigma=0} = \\ = &\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')dy' \int_0^\infty \frac{-x_n}{(2\sqrt{\pi\tau})^n\tau} e^{-\frac{(x'-y')^2 + x_n^2}{4\tau} - c_1\tau}\, d\tau \to \varphi(x'),\ x_n \to -0.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь была использована дважды формула скачка теплового потенциала двойного слоя при $\sigma \to +0$ и $x_n \to -0$.

Рассмотрим потенциалы $-w_2^{(1)}(x) - b_n w_3^{(1)}(x)$ и $-b_n w_3^{(2)}(x)$. Подставим их в условие (4). Как и выше, принимая во внимание равенство $b\nabla + b_0 = -\frac{d}{d\bar\sigma}$ в интеграле по $\sigma$ потенциала $w_3^{(1)}(x)$, возьмем его по частям, к внеинтегральному (по $\sigma$) члену применим формулу скачка теплового потенциала двойного слоя при $\sigma \to +0$, как в (8), а в полученном интеграле по $\sigma$ воспользуемся соотношением $\frac{d}{d\bar\sigma} = d'\nabla' + d_n\partial_{\eta_n} - d_0$. Тогда получим

$$\begin{gathered}(b\nabla + b_0)(-b_n w_3^{(1)})|_{x_n=0} \\ = b_n\int_{\mathbb{R}^n_-} f_1(y)\,dy \int_0^\infty \frac{y_n}{(2\sqrt{\pi\tau})^n\tau} e^{-\frac{(x'-y')^2 + y_n^2}{4\tau} - c_1\tau}\, d\tau - b_n(d'\nabla' + d_n\partial_{\eta_n} - d_0)w_3^{(1)}|_{x_n=0}.\end{gathered} \tag{9}$$

Для потенциала $w_2^{(1)}$ справедливо равенство

$$-(b\nabla + b_0)w_2^{(1)}\big|_{x_n=0} = -b_n\partial_{x_n} w_2^{(1)}\big|_{x_n=0} \equiv \tag{10}$$

$$\equiv -b_n\int_{\mathbb{R}^n_-} f_1(y)\,dy\int_0^\infty \frac{y_n}{(2\sqrt{\pi\tau})^n\tau}\,e^{-\frac{(x'-y')^2+y_n^2}{4\tau}-c_1\tau}\,d\tau.$$

Учитывая формулы (9),(10) и принимая во внимание, что потенциалы $w_3^{(1)}$ и $w_3^{(2)}$ являются свертками по переменной $\tau_1$, получим

$$(b\nabla+b_0)(-w_2^{(1)}-b_n\,w_3^{(1)})-(d\nabla-d_0)(-b_n\,w_3^{(2)})\big|_{x_n=0}= \tag{11}$$

$$=-b_n(d'\nabla'+d_n\partial_{\eta_n}-d_0)w_3^{(1)}+b_n(d\nabla-d_0)w_3^{(2)}\big|_{x_n=0}=0.$$

Аналогично устанавливается, что потенциалы $-d_nw_4^{(1)}$ и $-w_2^{(2)}-d_nw_4^{(2)}$ удовлетворяют условию

$$(b\nabla+b_0)(-d_nw_4^{(1)})-(d\nabla-d_0)(-w_2^{(2)}-d_n\,w_4^{(2)})\big|_{x_n=0}=0. \tag{12}$$

Объединяя соотношения (7), (8), (11), (12), получим, что функции $u_1$ и $u_2$ удовлетворяют также граничному условию (4).

**Замечание 2.** *В теоремах 1 и 2 следует добавить условия: $f(x)\in C^\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ и $\varphi(x')$ принадлежит пространству Гельдера $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ (теорема 1) и пространству $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ (теорема 2), $\alpha\in(0,1)$. В этих условиях и в условиях теоремы 4 решения задач I–III будут принадлежать пространству Гельдера $C^{2+\alpha}$ в своих областях определения.*

В дальнейшем нам понадобятся леммы, установленные в [1], приведем их.

**Лемма 1.** *Пусть $a>0,\ \omega>0,\ \lambda>0,\ p>-1$. Справедливы следующие оценки интегралов:*

$$j_p^{(1)}:=\int_a^\infty \sigma^p e^{-\omega\sigma}\,d\sigma\le \max{}^p(1,\omega)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^pe^{-\omega a},\ p-\text{целое}, \tag{13}$$

$$j_p^{(1)}\le \max{}^{1+p}(1,\omega)\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+[p])!(1+1/a)(1+a)^pe^{-\omega a},\ p-\text{нецелое}, \tag{14}$$

$$j_p^{(2)}:=\int_0^\infty (a+\lambda\sigma)^pe^{-\omega\sigma}\,d\sigma\le \max{}^p(\omega,\lambda)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^p,\ p-\text{целое}, \tag{15}$$

$$j_p^{(2)}\le \max{}^{1+p}(\omega,\lambda)\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+[p])!(1+1/a)(1+a)^p,\ p-\text{нецелое}. \tag{16}$$

**Лемма 2.** *Пусть $a>0,\ \omega>0$. Справедливы следующие оценки интегралов:*

$$\begin{aligned} i_p^{(1)}:=&\int_0^\infty \rho^p\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\,e^{-\omega\sqrt{\rho^2+a^2}}\,d\rho\le\\ &\le \max{}^{p-1}(1,\omega)\frac{1}{\omega^p}(p-1)!(1+a)^{p-1}\,e^{-\omega a},\ p\ge1,\ p-\text{целое},\end{aligned} \tag{17}$$

$$i_p^{(1)}\le \max{}^p(1,\omega)[p]!\frac{1}{\omega^{1+p}}(1+1/a)(1+a)^{p-1}e^{-\omega a},\ p>1,\ p-\text{нецелое}, \tag{18}$$

$$i_p^{(2)}:=\int_0^\infty \rho^pe^{-\omega\sqrt{\rho^2+a^2}}d\rho\le \max{}^{1+p}(1,\omega)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^{p+1}e^{-\omega a},\ p\ge0,\ p-\text{целое}, \tag{19}$$

$$i_p^{(2)}\le \max{}^{2+p}(1,\omega)\frac{1}{1+p}(2+[p])!\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+1/a)(1+a)^{1+p}e^{-\omega a},\ p>-1,\ p-\text{нецелое}. \tag{20}$$

**Лемма 3., Следствие 1.** *Для интеграла*

$$I_n=\int_0^\infty(-2\,\Gamma_{x_n}(\rho,x_n+a,\tau))\,e^{-c\tau}d\tau\equiv\int_0^\infty\frac{x_n+a}{(2\pi\sqrt{\tau})^n\tau}e^{-\frac{\rho^2+(x_n+a)^2}{4\tau}-c\tau}d\tau,\ c>0,\ a\geq 0$$

*справедливы следующие оценки при* $x_n>0$*:*

$$I_n\leq C_1\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x_n+a}{\rho^2+(x_n+a)^2}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m+1,\tag{21}$$

$$I_n\leq C_1\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}(1+1/x_n)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m+1,\tag{22}$$

$$I_n\leq C_2\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}(1+1/x_n)^{1+n/2}\frac{x_n+a}{\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m,\tag{23}$$

$$I_n\leq C_2\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}(1+1/x_n)^{1+n/2}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m.\tag{24}$$

В [1] было показано, что функция

$$\begin{gathered}u(x)=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')dy'\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}\,d\tau-\\-\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)dy\int_0^\infty[\Gamma(x-y,\tau)-\Gamma(x'-y',x_n+y_n,\tau)]e^{-c\tau}d\tau-\\-b_n\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)dy\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}d\sigma\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}d\tau:=\\:=-v_3-v_2-b_nv_4,\end{gathered}\tag{25}$$

является решением задачи с наклонной производной — задачи II: $\Delta u-cu=f(x),\ x\in\mathbb{R}^n_+,\ b\nabla\,u-b_0\,u|_{x_n=0}:=\sum_{i=1}^n b_i\partial_{x_i}u-b_0u|_{x_n=0}=\varphi(x')$. Для функции $v_2(x)$ в теореме 3 [1] были установлены формулы [1; (44), (45)]. Рассмотрим функции $v_3(x)$, $v_4(x)$.

**Теорема 5.** *Пусть* $c>0,\ b_0\geq 0,\ b_n>0$ *в задаче II. Для ее решения, определяемого формулой (25), справедливы следующие представления при* $x_n>0$*:*
*1. если* $\varphi(x')=e^{\beta|x'|},\ \beta>0,\ \sqrt{c}>\beta,\ (\sqrt{c}-\beta)b_n+b_0-\beta|b'|>0$*, тогда*

$$0<v_3(x)=\mu_{7,n}\Phi_{1,n}(x_n)e^{\beta|x'|-(\sqrt{c}-\beta)x_n},\tag{26}$$

*где*

$$\Phi_{1,n}(x_n)=\begin{cases}(1+1/x_n)^{n-2}(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}}, & n=2m+1,\\ (1+1/x_n)^n(1+x_n)^{n/2}, & n=2m;\end{cases}\tag{27}$$

*если* $\varphi(x')=|x'|^\gamma,\ \gamma>0$*, тогда*

$$0<v_3(x)=[\mu_{8,n}|x'|^\gamma+\mu_{9,n}(1+x_n)^\gamma\Phi_{2,n}(x_n;\gamma)]e^{-\sqrt{c}x_n},\tag{28}$$

*где*

$$\Phi_{2,n}=\begin{cases}\Phi_{1,n}, & \gamma-\text{целое},\\ \Phi_{3,n}, & \gamma-\text{нецелое},\end{cases}\quad \Phi_{3,n}=\begin{cases}(1+1/x_n)^{n-1}(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}}, & n=2m+1,\\ (1+1/x_n)^{n+1}(1+x_n)^{n/2}, & n=2m;\end{cases}\tag{29}$$

*2. если* $f(x)=e^{\beta|x|},\ \beta>0,\ \sqrt{c}>\beta,\ (\sqrt{c}-\beta)\,b_n+b_0-\beta|b|>0$*, тогда*

$$0<v_4(x)=\mu_{10,n}\Phi_{1,n}(x_n)\,e^{\beta|x|-(\sqrt{c}-\beta)x_n}\ \forall n;\tag{30}$$

*если* $f(x)=|x|^{\gamma},\ \gamma>0,$ *тогда*

$$0<v_4(x)=[\mu_{11,n}|x|^{\gamma}+\mu_{12,n}(1+x_n)^{\gamma}\Phi_{4,n}(x_n;\gamma)]e^{-\sqrt{c}x_n}, \tag{31}$$

$$\Phi_{4,n}=\begin{cases}\Phi_{1,n}, & \gamma-\textit{целое},\\ \Phi_{5,n}, & \gamma-\textit{нецелое},\end{cases}\quad \Phi_{5,n}=\begin{cases}(1+1/x_n)^n(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}}, & n=2m+1,\\ (1+1/x_n)^{n+2}(1+x_n)^{n/2}, & n=2m,\end{cases} \tag{32}$$

*где величины* $\mu_{7,n}-\mu_{12,n}$ *положительны и ограничены* $\forall x\in\mathbb{R}^n_+$.

**Доказательство**. 1. Пусть $\varphi(y')=e^{\beta|y'|}$. Запишем потенциал $v_3(x)$ в виде (26) $v_3(x)=\mu_{7,n}\Phi_{3,n}e^{\beta|x'|-(\sqrt{c}-\beta)x_n}$ и выразим $\mu_{7,n}$ через интеграл $v_3(x)$. К экспоненте $e^{\beta|y'|}$ применим неравенство Минковского

$$|y'|\equiv|x'-y'+b'\sigma-x'-b'\sigma|\le|x'-y'+b'\sigma|+|x'|+|b'|\sigma, \tag{33}$$

перейдем к сферическим координатам с радиусом $\rho=|x'-y'+b'\sigma|$, получим

$$\mu_{7,n}\le æ_{n-1}\Phi_{1,n}^{-1}e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n}\int_0^\infty e^{-(b_0-\beta|b'|)\sigma}d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}e^{\beta\rho}d\rho\int_0^\infty(-2\,\Gamma_{x_n}(\rho,x_n+b_n\sigma,\tau))\,e^{-c\tau}d\tau, \tag{34}$$

где $æ_{n-1}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$. Воспользуемся неравенствами (22), (24), тогда

$$\mu_{7,n}\le C_{20}\Phi_{1,n}^{-1}e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n}\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}}\,i_1,\ n=2m+1, \tag{35}$$

$$\mu_{7,n}\le C_{21}\Phi_{1,n}^{-1}e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n}\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{1+n/2}\,i_2,\ n=2m, \tag{36}$$

где

$$i_1=\int_0^\infty e^{-(b_0-\beta|b'|)\sigma}d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\,e^{-(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}d\rho,$$
$$i_2=\int_0^\infty e^{-(b_0-\beta|b'|)\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}\,e^{-(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\,d\rho.$$

Применим оценки (17), (19) и (15) к интегралам по $\rho$ и $\sigma$, соответственно,

$$i_1\le C_{22}\int_0^\infty(1+x_n+\sigma)^{n-3}e^{-\kappa\sigma-(\sqrt{c}-\beta)x_n}d\sigma\le C_{23}(1+x_n)^{n-3}e^{-(\sqrt{c}-\beta)x_n}, \tag{37}$$

$$i_2\le C_{24}\int_0^\infty(1+x_n+\sigma)^{n-1}e^{-\kappa\sigma-(\sqrt{c}-\beta)x_n}d\sigma\le C_{25}(1+x_n)^{n-1}e^{-(\sqrt{c}-\beta)x_n}, \tag{38}$$

где $\kappa=(\sqrt{c}-\beta)\,b_n+b_0-\beta|b'|>0$.

Привлекая эти оценки к неравенствам (35), (36), получим требуемую формулу (26).

Пусть $\varphi(y')=|y'|^{\gamma},\ \gamma>0$ в потенциале $v_3(x)$. Запишем его в форме (28) и воспользуемся неравенством $|y'|^{\gamma}\le C_{\gamma}|x'|^{\gamma}+C_{\gamma}^2(|x'-y'+b'\sigma|^{\gamma}+|b'|^{\gamma}\sigma^{\gamma})$, которое следует из неравенства (33) и следующего

$$(\alpha+\beta)^{\gamma}\le C_{\gamma}(\alpha^{\gamma}+\beta^{\gamma}),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0. \tag{39}$$

Тогда будем иметь

$$0<v_3(x)=[\mu_{8,n}|x'|^{\gamma}+\mu_{9,n}(1+x_n)^{\gamma}\Phi_{2,n}(x_n;\gamma)]e^{-\sqrt{c}x_n}\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}dy'\times$$
$$\times\int_0^\infty[C_{\gamma}|x'|^{\gamma}+C_{\gamma}^2(|x'-y'+b'\sigma|^{\gamma}+|b'|^{\gamma}\sigma^{\gamma})]e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty(-2\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+b_n\sigma,\tau))\,e^{-c\tau}d\tau.$$

Отсюда найдем оценки для $\mu_{8,n}, \mu_{9,n}$

$$\mu_{8,n} \leq C_\gamma e^{\sqrt{c}x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n})\, e^{-c\tau} d\tau = C_\gamma \frac{1}{b_0 + \sqrt{c}b_n}\ \forall\ n \geq 2, \tag{40}$$

$$\begin{gathered} \mu_{9,n} \leq C_{26}(1+x_n)^{-\gamma} \Phi_{2,n}^{-1} e^{\sqrt{c}x_n} \int_0^\infty e^{-b_0\sigma} d\sigma \times \\ \times \int_0^\infty \rho^{n-2}\left(\rho^\gamma + |b'|^\gamma \sigma^\gamma\right) d\rho \int_0^\infty \left(-2\,\Gamma_{x_n}(\rho, x_n + b_n\sigma, \tau)\right) e^{-c\tau} d\tau, \end{gathered} \tag{41}$$

где $\rho = |x' - y' + b'\sigma|$.

Привлекая оценки (22), (24), получим

$$\begin{aligned} \mu_{9,n} &\leq C_{27}(1+x_n)^{-\gamma} \Phi_{2,n}^{-1} e^{\sqrt{c}x_n} \frac{1}{x_n^{(n-3)/2}} \big(1+1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}} i_3,\ n = 2m+1, \\ \mu_{9,n} &\leq C_{28}(1+x_n)^{-\gamma} \Phi_{2,n}^{-1} e^{\sqrt{c}x_n} \frac{1}{x_n^{(n-2)/2}} \big(1+1/x_n\big)^{1+n/2} i_4,\ n = 2m, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$i_3 = \int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \rho^{n-2} (\sigma^\gamma + \rho^\gamma) \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (x_n + b_n\sigma)^2}} e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2 + (x_n + b_n\sigma)^2}}\, d\rho,$$

$$i_4 = \int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \rho^{n-2} (\sigma^\gamma + \rho^\gamma) e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2 + (x_n + b_n\sigma)^2}}\, d\rho.$$

Оценим интегралы $i_3, i_4$. При $\gamma$ — нецелом применим оценки (17)–(20) и (15), (16) к интегралам по $\rho$ и $\sigma$

$$\begin{gathered} i_3 \leq C_{29} \int_0^\infty (1 + \frac{1}{x_n + b_n\sigma})(1 + x_n + \sigma)^{n-3+\gamma} e^{-(\sqrt{c}b_n + b_0)\sigma - \sqrt{c}x_n} d\sigma \leq \\ \leq C_{30}(1+1/x_n)(1+x_n)^{n-3+\gamma} e^{-\sqrt{c}x_n}, \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} i_4 \leq C_{31}(1 + 1/x_n) \int_0^\infty (1 + x_n + \sigma)^{n-1+\gamma} e^{-(\sqrt{c}b_n + b_0)\sigma - \sqrt{c}x_n} d\sigma \leq \\ \leq C_{32}(1+1/x_n)(1+x_n)^{n-1+\gamma} e^{-\sqrt{c}x_n}. \end{gathered} \tag{44}$$

При целом $\gamma$ используем оценки (17), (19) и (15) к интегралам по $\rho$ и $\sigma$ в $i_3$, $i_4$

$$i_3 \leq C_{33}(1+x_n)^{n-3+\gamma} e^{-\sqrt{c}x_n},\ i_4 \leq C_{34}(1+x_n)^{n-1+\gamma} e^{-\sqrt{c}x_n}. \tag{45}$$

Подставим оценки (43)–(45) в неравенства (42)

$$\mu_{9,n} \leq C_{35}(1+1/x_n)^{n-2}(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}} \left\{ \begin{array}{cc} \Phi_{1,n}^{-1}, & \gamma - \text{целое}, \\ (1+1/x_n)\Phi_{3,n}^{-1}, & \gamma - \text{нецелое}, \end{array} \right. = C_{35},\ n = 2m+1, \tag{46}$$

$$\mu_{9,n} \leq C_{36}(1+1/x_n)^n(1+x_n)^{n/2} \left\{ \begin{array}{cc} \Phi_{1,n}^{-1}, & \gamma - \text{целое}, \\ (1+1/x_n)\Phi_{3,n}^{-1}, & \gamma - \text{нецелое}, \end{array} \right. = C_{36},\ n = 2m.$$

Оценки (40) и (46) доказывают формулу (28).

2. Рассмотрим объемный потенциал $v_4(x)$. Пусть $f(y) = e^{\beta|y|}$, $\beta > 0$. Представим потенциал в виде (30) и выразим $\mu_{10,n}$ через $v_4(x)$, к экспоненте $e^{\beta|y|}$ применим неравенство

$$|y| \leq \sqrt{(x' - y' + b'\sigma)^2 + (x_n + y_n + b_n\sigma)^2} + |b|\sigma + |x|, \tag{47}$$

в области $\mathbb{R}^{n-1}$ перейдем к сферическим координатам, положив $\rho=|x'-y'+b'\sigma|$,

$$\begin{gathered}\mu_{10,n}\le æ_{n-1}\Phi_{1,n}^{-1}e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n}\int_0^\infty e^{-(b_0-\beta|b|)\sigma}d\sigma\int_0^\infty \rho^{n-2}e^{\beta\rho}d\rho\times\\ \times\int_0^\infty dy_n\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(\rho,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}d\tau\end{gathered}\tag{48}$$

и воспользуемся оценками (21), (23)

$$\begin{gathered}\mu_{10,n}\le C_{37}\Phi_{1,n}^{-1}e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n}\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}\big(1{+}1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}}\,i_5,\ \ n=2m+1,\\ \mu_{10,n}\le C_{38}\Phi_{1,n}^{-1}e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n}\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}\big(1{+}1/x_n\big)^{1+n/2}\,i_6,\ \ n=2m,\end{gathered}\tag{49}$$

где

$$\begin{gathered}i_5=\int_0^\infty e^{-(b_0-\beta|b|)\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\,d\rho\times\\ \times\int_0^\infty\frac{x_n+y_n+b_n\sigma}{\sqrt{\rho^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2}}\,e^{-(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2}}\,dy_n.\end{gathered}\tag{50}$$

$$\begin{gathered}i_6=\int_0^\infty e^{-(b_0-\beta|b|)\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}\,d\rho\\ \times\int_0^\infty\frac{x_n+y_n+b_n\sigma}{\sqrt{\rho^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2}}\,e^{-(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2}}\,dy_n.\end{gathered}\tag{51}$$

В интеграле по $y_n$ произведем замену $(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2}=v$, применим неравенства (17), (19) и (15) к интегралам по $\rho$ и $\sigma$, соответственно,

$$i_5\le C_{39}\int_0^\infty(1+x_n+\sigma)^{n-3}e^{-\kappa\sigma-(\sqrt{c}-\beta)x_n}d\sigma\le C_{40}(1+x_n)^{n-3}e^{-(\sqrt{c}-\beta)x_n},\tag{52}$$

$$i_6\le C_{41}\int_0^\infty(1+x_n+\sigma)^{n-1}e^{-\kappa\sigma-(\sqrt{c}-\beta)x_n}d\sigma\le C_{42}(1+x_n)^{n-1}e^{-(\sqrt{c}-\beta)x_n},\tag{53}$$

где $\kappa=(\sqrt{c}-\beta)b_n+b_0-\beta|b|>0$. Подстановка этих оценок в (49) приводит к ограниченности величины $\mu_{10,n}$ и формуле (30).

При $f(y)=|y|^\gamma,\ \gamma>0$ запишем потенциал $v_4$ в форме (31), применим к плотности $|y|^\gamma$ неравенства (47) и (39)

$$|y|^\gamma\le C_\gamma^2[(\sqrt{(x'-y'+b'\sigma)^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2})^\gamma+|b|^\gamma\sigma^\gamma]+C_\gamma|x|^\gamma.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{gathered}\mu_{11,n}\le C_\gamma\,e^{\sqrt{c}x_n}\int_{\mathbb{R}^n_+}dy\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}d\tau=\\ =C_\gamma\frac{1}{\sqrt{c}(b_0+\sqrt{c}\,b_n)}\ \forall\ n\ \ge 2,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mu_{12,n}\le C_\gamma^2 æ_{n-1}\Phi_{4,n}^{-1}(1+x_n)^{-\gamma}e^{\sqrt{c}x_n}\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}d\rho\times\\ \times\int_0^\infty\big((\rho^2+(x_n+y_n+b_n\sigma)^2)^{\gamma/2}+|b|^\gamma\sigma^\gamma\big)\,dy_n\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(\rho,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}d\tau,\end{gathered}\tag{54}$$

где $\rho = |x' - y' + b'\sigma|$.

В неравенстве (54) используем оценки (21), (23)

$$\begin{aligned} \mu_{12,n} &\le C_{43}\Phi_{4,n}^{-1}(1+x_n)^{-\gamma}e^{\sqrt{c}x_n}\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}}\, i_7,\ n=2m+1,\\ \mu_{12,n} &\le C_{44}\Phi_{4,n}^{-1}(1+x_n)^{-\gamma}e^{\sqrt{c}x_n}\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{1+n/2}\, i_8,\ n=2m. \end{aligned} \tag{55}$$

Здесь интегралы $i_7, i_8$ такие же, как и интегралы (50), (51) соответственно с $\beta = 0$ и с плотностью $\big(\rho^2 + (x_n + y_n + b_n\sigma)^2\big)^{\gamma/2} + |b|^\gamma\sigma^\gamma$ в интегралах по $y_n$.

Пусть $\gamma$ – нецелое число. Рассмотрим интеграл $i_7$. В интеграле по $y_n$ произведем замену переменной $\sqrt{c}\sqrt{\rho^2 + (x_n + y_n + b_n\sigma)} = v$ и воспользуемся формулой (14)

$$i_7 \le C_{45}\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty \rho^{n-2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\,d\rho \int\limits_{\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}^{\infty}(\sigma^\gamma + v^\gamma)e^{-v}\,dv \le$$

$$\le C_{46}\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\times$$

$$\times\Big\{\sigma^\gamma + \big(1+\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\big)\big(1+\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}\big)^\gamma\Big\}\,e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}d\rho.$$

Применим неравенства Минковского и (39) к плотности $(1+\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2})^\gamma \le (1+\rho+x_n+b_n\sigma)^\gamma \le C_\gamma(\rho^\gamma + (1+x_n+b_n\sigma)^\gamma)$, затем неравенство $\sigma^\gamma \le (1+x_n+b_n\sigma)^\gamma/b_n^\gamma$ и оценки (17), (18) и (16) к интегралам по $\rho$ и $\sigma$, соответственно,

$$i_7 \le C_{47}(1+1/x_n)\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty \rho^{n-2}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\big(\rho^\gamma + (1+x_n+b_n\sigma)^\gamma\big)\times$$

$$\times e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\,d\rho \le C_{48}(1+1/x_n)^2\int_0^\infty(1+x_n+b_n\sigma)^{n-3+\gamma}e^{-(\sqrt{c}b_n+b_0)\sigma-\sqrt{c}x_n}\,d\sigma \le$$

$$\le C_{49}(1+\frac{1}{x_n})^2(1+\frac{1}{1+x_n})(1+x_n)^{n-3+\gamma}e^{-\sqrt{c}x_n} \le 2\,C_{49}(1+\frac{1}{x_n})^2(1+x_n)^{n-3+\gamma}e^{-\sqrt{c}x_n}. \tag{56}$$

Рассмотрим интеграл $i_8$. Как и выше, после интегрирования по $y_n$ такого же интеграла, что и в $i_7$, мы получим оценку

$$i_8 \le C_{50}(1+1/x_n)\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty \rho^{n-2}\big(\rho^\gamma + (1+x_n+b_n\sigma)^\gamma\big)e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+b_n\sigma)^2}}\,d\rho.$$

В силу оценок (19), (20) и (16) интегралов по $\rho$ и $\sigma$ будем иметь

$$\begin{aligned} i_8 &\le C_{51}(1+1/x_n)^2\int_0^\infty(1+x_n+b_n\sigma)^{n-1+\gamma}e^{-(\sqrt{c}b_n+b_0)\sigma-\sqrt{c}x_n}\,d\sigma \le\\ &\le C_{52}(1+1/x_n)^2(1+x_n)^{n+\gamma-1}e^{-\sqrt{c}x_n}. \end{aligned} \tag{57}$$

При целом $\gamma$ применение формул (13); (17), (19) и (15) к интегралам по $v$; $\rho$ и $\sigma$ соответственно приводит к оценкам

$$i_7 \le C_{53}(1+x_n)^{n+\gamma-3}e^{-\sqrt{c}x_n},\ i_8 \le C_{54}(1+x_n)^{n+\gamma-1}e^{-\sqrt{c}x_n}. \tag{58}$$

Из неравенств (55) в силу оценок (56)–(58) будет следовать ограниченность коэффициента $\mu_{12,n}$. Теорема доказана.

Рассмотрим решение задачи сопряжения (1)–(4) $u_k(x) = w_1^{(k)} - w_2^{(k)} - b_n w_3^{(k)} - d_n w_4^{(k)},\ k = 1, 2$. Для функций $w_2^{(k)}$ справедливы те же представления, что и для функции $v_2(x)$, установленные в теореме 3 [1].

**Теорема 6.** *Пусть $c_k > 0,\ k = 1, 2,\ b_0 + d_0 \geq 0,\ b_n > 0,\ d_n > 0$ в задаче (1)–(4). Для его решения, определяемого выражениями (5), (6), справедливы следующие формулы при $|x_n| > 0$:*
*1. если $\varphi(x') = e^{\beta|x'|},\ \beta > 0, \sqrt{c_0} > \beta,\ c_0 = \min(c_1, c_2),\ (\sqrt{c_0} - \beta)(b_n + d_n) + b_0 + d_0 - \beta|b' - d'| > 0$, тогда*

$$0 < w_1^{(k)}(x) = \mu_{13,n}\Phi_{1,n}(|x_n|)e^{\beta|x'| - (\sqrt{c_0} - \beta)|x_n|},\ k = 1, 2; \tag{59}$$

*если $\varphi(x') = |x'|^\gamma,\ \gamma > 0$, тогда*

$$0 < w_1^{(k)}(x) = \mu_{14,n}|x'|^\gamma\, e^{-\sqrt{c_k}|x_n|} + \mu_{15,n}(1 + |x_n|)^\gamma \Phi_{2,n}(|x_n|;\gamma)\, e^{-\sqrt{c_0}|x_n|},\ k = 1, 2; \tag{60}$$

*2. если $f_k(x) = e^{\beta|x|},\ \beta > 0,\ \sqrt{c_0} > \beta,\ (\sqrt{c_0} - \beta)(b_n + d_n) + b_0 + d_0 - \beta|b - d^*| > 0$, где $d^* = (d_1, \ldots, d_{n-1}, -d_n)$, тогда*

$$0 < w_m^{(k)}(x) = \mu_{16,n}\Phi_{1,n}(|x_n|)e^{\beta|x| - (\sqrt{c_0} - \beta)|x_n|},\ k = 1, 2,\ m = 3, 4; \tag{61}$$

*если $f_k(x) = |x|^\gamma,\ \gamma > 0,\ k = 1, 2$, тогда*

$$0 < w_m^{(k)}(x) = \mu_{17,n}|x|^\gamma\, e^{-\sqrt{c_k}|x_n|} + \mu_{18,n}(1 + |x_n|)^\gamma \Phi_{4,n}(|x_n|;\gamma)\, e^{-\sqrt{c_0}|x_n|},\ m = 3, 4, \tag{62}$$

*где функции $\Phi_{1,n}, \Phi_{2,n}, \Phi_{4,n}$ определяются формулами (27), (29), (32), соответственно, $\mu_{13,n}$–$\mu_{18,n}$ — положительные ограниченные величины $\forall\, x \in D_k$ $(D_1 = \mathbb{R}^n_-,\ D_2 = \mathbb{R}^n_+)$.*

**Доказательство.** 1. Рассмотрим функцию $w_1^{(1)}(x)$. Пусть $\varphi(y') = e^{\beta|y'|},\ \beta > 0$. Представим $w_1^{(1)}(x)$ в виде (59) и выразим коэффициент $\mu_{13,n}$ через интеграл $w_1^{(1)}$, применим неравенство Минковского к экспоненте $e^{\beta|y'|}$

$$|y'| \leq |x' - y' - (b' - d')\sigma| + |b' - d'|\sigma + |x'|. \tag{63}$$

В интеграле по $y'$ перейдем к сферическим координатам, положив $|x' - y' - (b' - d')\sigma| = \rho$, и воспользуемся следующей оценкой в интеграле по $\tau_1$

$$e^{-c_1(\tau - \tau_1) - c_2\tau_1} = e^{-c_0\tau} e^{-(c_1 - c_0)(\tau - \tau_1) - (c_2 - c_0)\tau_1} \leq e^{-c_0\tau}, \tag{64}$$

где $c_0 = \min(c_1,\, c_2)$. Тогда будем иметь

$$\mu_{13,n} \leq æ_{n-1}\Phi_{1,n}^{-1}\, e^{-(\sqrt{c_0} - \beta)x_n} \int_0^\infty e^{-(b_0 + d_0 - \beta|b' - d'|)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \rho^{n-2}\, e^{\beta\rho}\, d\rho$$
$$\times \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}}\, e^{-\frac{\rho^2}{4\tau} - c_0\tau}\, d\tau \int_0^\tau \frac{b_n\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi(\tau - \tau_1)^3}} \frac{d_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}} e^{-\frac{(b_n\sigma - x_n)^2}{4(\tau - \tau_1)} - \frac{(d_n\sigma)^2}{4\tau_1}}\, d\tau_1,\ x_n < 0.$$

Привлекая формулы

$$\int_0^\tau \frac{b_n\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi(\tau - \tau_1)^3}} \frac{d_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}}\, e^{-\frac{(b_n\sigma - x_n)^2}{4(\tau - \tau_1)} - \frac{(d_n\sigma)^2}{4\tau_1}}\, d\tau_1 = \frac{(b_n + d_n)\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi\tau^3}} e^{-\frac{((b_n + d_n)\sigma - x_n)^2}{4\tau}}$$

и

$$\frac{(b_n + d_n)\sigma - x_n}{(2\sqrt{\pi\tau})^n\tau}\, e^{-\frac{\rho^2 + ((b_n + d_n)\sigma - x_n)^2}{4\tau}} = 2\,\Gamma_{x_n}(\rho, (b_n + d_n)\sigma - x_n, \tau),$$

получим

$$\mu_{13,n} \leq æ_{n-1}\Phi_{1,n}^{-1} e^{-(\sqrt{c_0}-\beta)x_n} i_9,$$

$$i_9 = \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0-\beta|b'-d'|)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \rho^{n-2}\, e^{\beta\rho}\, d\rho \int_0^\infty 2\,\Gamma_{x_n}(\rho, (b_n+d_n)\sigma - x_n, \tau)\, e^{-c_0\tau}\, d\tau,\ x_n < 0.$$

Интеграл $i_9$ такой же, как и интеграл в неравенстве (34), который мы оценили при условии $(\sqrt{c}-\beta)b_n + b_0 - \beta|b'| > 0$. Это условие, обеспечивающее сходимость интеграла, соответствует условию $(\sqrt{c_0}-\beta)(b_n+d_n)+b_0+d_0-\beta|b'-d'| > 0$ для интеграла $i_9$. Применяя оценки (35)–(38), получим ограниченность коэффициента $\mu_{13,n}$ и формулу (59).

Предположим, что $\varphi(y') = |y'|^\gamma,\ \gamma > 0$ в потенциале $w_1^{(1)}(x)$. Представив его в виде (60), применим неравенства (63) и (39) к плотности $|y'|^\gamma$, перейдем к сферическим координатам, тогда получим

$$\mu_{14,n} \leq C_\gamma e^{-\sqrt{c_1}x_n} \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \frac{d_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}}\, e^{-\frac{(d_n\sigma)^2}{4\tau_1}} e^{-c_2\tau_1}\, d\tau_1 \times$$
$$\times \int_{\tau_1}^\infty \frac{b_n\sigma - x_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}}\, e^{-\frac{(b_n\sigma-x_n)^2}{4(\tau-\tau_1)}} e^{-c_1(\tau-\tau_1)}\, d\tau = C_\gamma \frac{1}{\sqrt{c_1}b_n + \sqrt{c_2}d_n + b_0 + d_0},$$

$$\mu_{15,n} \leq C_{55}\Phi_{4,n}^{-1}(1+|x_n|)^{-\gamma}\, e^{-\sqrt{c_0}x_n} \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty \rho^{n-2}(\rho^\gamma + |b'-d'|^\gamma\sigma^\gamma)\, d\rho \int_0^\infty 2\,\Gamma(\rho, (b_n+d_n)\sigma - x_n, \tau)\, e^{-c_0\tau} d\tau,\ x_n < 0.$$

Здесь интеграл такой же, как и в (41). Использование неравенства (46) сразу приводит к оценке $\mu_{15,n} \leq C_{56}\ \forall\, n \geq 2$.

2. Рассмотрим потенциал $w_3^{(1)}(x)$ с плотностью $f_1(y) = e^{\beta|y|}$. Представим $w_3^{(1)}(x)$ в виде (61) и найдем коэффициент $\mu_{16,n}$ : $\mu_{16,n} = \Phi_{1,n}^{-1} e^{-\beta|x|-(\sqrt{c_0}-\beta)x_n}\, w_3^{(1)}(x),\ x_n < 0$.

К экспоненте $e^{\beta|y|}$ применим неравенство

$$|y| \leq \sqrt{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2 + ((b_n+d_n)\sigma - x_n - y_n)^2} + |b-d^*|\sigma + |x|, \tag{65}$$

где $d^* = (d_1, \ldots, d_{n-1}, -d_n)$, в области $\mathbb{R}^{n-1}$ перейдем к сферическим координатам, положив $\rho = |x'-y'-(b'-d')\sigma|$, используем неравенство (64) и следующие формулы

$$\int_0^\tau \frac{b_n\sigma - x_n - y_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}} \frac{d_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}}\, e^{-\frac{(b_n\sigma-x_n-y_n)^2}{4(\tau-\tau_1)} - \frac{(d_n\sigma)^2}{4\tau_1}}\, d\tau_1 = \frac{(b_n+d_n)\sigma - x_n - y_n}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\, e^{-\frac{((b_n+d_n)\sigma-x_n-y_n)^2}{4\tau}} \tag{66}$$

и

$$\frac{(b_n+d_n)\sigma - x_n - y_n}{(2\sqrt{\pi\tau})^n\tau}\, e^{-\frac{\rho^2+((b_n+d_n)\sigma-x_n-y_n)^2}{4\tau}} = 2\,\Gamma_{x_n}(\rho, (b_n+d_n)\sigma - x_n - y_n, \tau). \tag{67}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \mu_{16,n} \leq æ_{n-1}\Phi_{1,n}^{-1} e^{-(\sqrt{c_0}-\beta)x_n} \int_0^\infty e^{-(b_0+d_0-\beta|b-d^*|)\sigma} d\sigma \int_0^\infty \rho^{n-2} e^{\beta\rho} d\rho \times \\ \times \int_{-\infty}^0 dy_n \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n}(\rho, (b_n+d_n)\,\sigma - x_n - y_n, \tau))\, e^{-c_0\tau} d\tau,\ x_n < 0. \end{aligned} \tag{68}$$

Мы получили такой же интеграл, как и в неравенстве (48), для которого установили оценки (49), (52), (53) при условии $\kappa = (\sqrt{c}-\beta)b_n + b_0 - \beta|b| > 0$. Для рассматриваемого интеграла в (68) оно соответствует условию $(\sqrt{c_0}-\beta)(b_n+d_n) + b_0 + d_0 - \beta|b-d^*| > 0$. Таким образом, коэффициент $\mu_{16,n}$ ограничен и формула (61) выполняется.

Формула (61) для функции $w_4^{(1)}$ устанавливается точно так же, как и для функции $w_3^{(1)}$.

Пусть $f_1(y)=|y|^\gamma,\ \gamma>0$ в потенциале $w_3^{(1)}$. Записав его в виде (62), применим неравенства (65) и (39) к плотности $|y|^\gamma$ и выразим коэффициенты $\mu_{17,n},\ \mu_{18,n}$ через интегралы. Тогда получим

$$\mu_{17,n}\leq C_\gamma e^{-\sqrt{c_1}x_n}\int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}d\sigma\int_{\mathbb{R}^n_-}dy\int_0^\infty\frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{n-1}}\,e^{-\frac{(x'-y'-(b'-d')\sigma)^2}{4\tau}}\times$$
$$\times\int_0^\tau\frac{b_n\sigma-x_n-y_n}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)^3}}\frac{d_n\sigma}{2\sqrt{\pi\tau_1^3}}e^{-\frac{(b_n\sigma-x_n-y_n)^2}{4(\tau-\tau_1)}-\frac{(d_n\sigma)^2}{4\tau_1}}e^{-c_1(\tau-\tau_1)-c_2\tau_1}d\tau_1= \tag{69}$$
$$=C_\gamma\frac{1}{\sqrt{c_1}(\sqrt{c_1}b_n+\sqrt{c_2}d_n+b_0+d_0)}\quad\forall n\geq 2.$$

Привлекая формулы (64), (66), (67), найдем

$$\mu_{18,n}\leq C_\gamma^2 æ_{n-1}\Phi_{4,n}^{-1}(1+|x_n|)^{-\gamma}e^{-\sqrt{c_0}x_n}\int_0^\infty e^{-(b_0+d_0)\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}d\rho\times \tag{70}$$
$$\times\int_{-\infty}^0\bigl((\rho^2+((b_n+d_n)\sigma-x_n-y_n)^2)^{\gamma/2}+|b-d^*|^\gamma\sigma^\gamma\bigr)\,dy_n\int_0^\infty 2\,\Gamma_{x_n}(\rho,(b_n+d_n)\sigma-x_n-y_n,\tau)\,e^{-c_0\tau}d\tau.$$

В (70) мы получили такое же выражение, как и в неравенстве (54). Воспользовавшись оценками (55)–(58), мы получим ограниченность коэффициента $\mu_{18,n}$, которая вместе с оценкой (69) приводит к формуле (62). Для функции $w_4^{(1)}$ формула (62) устанавливается так же, как и для $w_3^{(1)}$.

Представления (59)–(62) функций $w_m^{(2)},\ m=1,3,4$ выводятся аналогично.

## Цитированная литература

1. **Бижанова Г.И.** // Матем.журнал. 2004. Т 4, № 1. С.21–32.

*Поступила в редакцию 12.03.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 47 – 51*

*УДК 517.624.3*

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫБОРУ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д.С. Джумабаев, С.М. Темешева

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz
Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе пр. А.Молдагуловой, 34 nur15@mail.ru

На основе метода введения дополнительных параметров предложен способ выбора начального приближения для нелинейной двухточечной краевой задачи.

Исследуется нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

$$g[x(0),\, x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0,T] \times R^n \to R^n$, $g : R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывные функции.

Вопросы существования, единственности и построения приближенных методов нахождения решения задачи (1), (2) различными методами исследованы многими авторами [1–9]. Одним из основных условий сходимости предлагаемых в них методов является существование "хорошего" начального приближения.

В [10–12] задача (1), (2) изучалась методом параметризации, который заключается в следующем.

По шагу $h > 0 : Nh = T$ производится разбиение $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$ и задача (1), (2) сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \quad u_r[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{3}$$

$$g[\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \to Nh-0} u_N(t)] = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to sh-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \qquad s = \overline{1, N-1}. \tag{5}$$

Keywords: *additional parameter introduction method, nonlinear two-point boundary-value problem, initial approach*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

Здесь $\lambda_r = x[(r-1)h]$, $u_r(t) = x(t) - x[(r-1)h]$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $x(t)$ — решение задачи (1), (2).

Решением задачи (3)–(5) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_N^*)' \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_N^*(t))'$. Если пара $(\lambda^*, u^*[t])$ — решение задачи (3)–(5), то функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim\limits_{t\to T-0} u_N^*(t)$, будет решением задачи (1), (2). При фиксированных значениях параметра $\lambda_r \in R^n$ функция $u_r(t)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau))d\tau, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \qquad r = \overline{1,N}. \tag{6}$$

Подставим вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть (6) и, повторяя этот процесс $\nu$ $(\nu = 1, 2, ...)$ раз, получаем представление функции $u_r(t)$:

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\Bigg(\tau_1, \lambda_r + \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f\Bigg(\tau_2, \lambda_r + ... + \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu ...\Bigg)d\tau_2\Bigg)d\tau_1.$$

Отсюда, определив значения $\lim\limits_{t\to rh-0} u_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, подставив их в (4), (5) и умножив (4) на $h > 0$, получим систему уравнений относительно параметров $\lambda_r \in R^n$, $r = \overline{1,N}$:

$$hg\Bigg[\lambda_1, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f\Bigg(\tau_1, \lambda_N + ... + \int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N + u_N(\tau_\nu))d\tau_\nu ...\Bigg)d\tau_1\Bigg] = 0,$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f\Bigg(\tau_1, \lambda_s + ... + \int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu))d\tau_\nu ...\Bigg)d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0, \qquad s = \overline{1, N-1},$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(\lambda, u) = 0, \qquad \lambda \in R^{nN}. \tag{7}$$

Через $\widetilde{C}([(r-1)h, rh), R^n)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $[(r-1)h, rh)$ функций $u_r : [(r-1)h, rh) \to R^n$.
Пусть вектор $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN}$ является решением системы уравнений

$$Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0, \qquad \lambda \in R^{nN}, \tag{8}$$

и задача Коши (3) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ имеет решение $u_r^{(0)}(t) \in \widetilde{C}([(r-1)h, rh), R^n)$, $r = \overline{1,N}$.
Возьмем непрерывные на $[(r-1)h, rh]$ функции $R_r(t) \ge 0$, $r = \overline{1,N}$, число $\rho > 0$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \Big\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)' \in R^{nN} : \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho, r = \overline{1,N}\Big\},$$

$$S(u^{(0)}[t], R[t]\rho) = \Big\{u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))', \quad u_r(t) \in \widetilde{C}([(r-1)h, rh), R^n) :$$
$$\|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\| \le R_r(t)\rho, \ t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1,N}\Big\},$$

$$G_1^0(R[t], \rho) = \Big\{(t, x) : t \in [0, T], \ \|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| < [R_r(t) + 1]\rho, \ t \in [(r-1)h, rh),$$
$$r = \overline{1,N}, \ \|x - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t\to T-0} u_N^{(0)}(t)\| < [R_N(T) + 1]\rho\Big\},$$

$$G_2^0(R[t],\rho) = \Big\{(v,w) : \|v - \lambda_1^{(0)}\| < \rho,\ \|w - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t\to T-0} u_N^{(0)}(t)\| < [R_N(T)+1]\rho\Big\}.$$

**Условие А.** Функции $f(t,x)$, $g(v,w)$, соответственно, в $G_1^0(R[t],\rho)$, $G_2^0(R[t],\rho)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ и выполняются неравенства $\|f'_x(t,x)\| \le L(t)$, $\|g'_v(v,w)\| \le L_1$, $\|g'_w(v,w)\| \le L_2$, где $L(t)$ — непрерывная на $[0,T]$ функция, $L_1$, $L_2$ — постоянные.

**Теорема 1. [10]** *Пусть существуют* $h > 0:\ Nh = T,\ \nu \in \mathbb{N},\ R_r(t) \ge 0,\ \rho > 0,$ $\lambda^{(0)}$, $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1,N}$, *при которых выполняются условие* $A$ *и следующие предположения:*

*1) матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda,u[t])}{\partial\lambda}$ *обратима и* $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda,u[t])}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(h)$ *для всех* $(\lambda,u[t]) \in S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$;

*2)* $q_\nu(h) = \gamma_\nu(h)\max(L_2h,1)\max\limits_{r=\overline{1,N}}\Big\{e^{\int_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt} - \sum\limits_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt\Big)^i\Big\} < 1;$

*3)* $\dfrac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t])\| < \rho;$

*4)* $e^{\int_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1 \le R_r(t),\ t\in[(r-1)h,rh],\quad r=\overline{1,N}.$

*Тогда задача (3)–(5) в* $S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$ *имеет изолированное решение* $(\lambda^*,u^*[t])$ *и справедлива оценка*

$$\|\lambda^*-\lambda^{(0)}\| \le \frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\max(L_2h,1)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||u_r^{(0)}(t)||\cdot\frac{1}{\nu!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt\Big)^\nu. \tag{9}$$

Из оценки (9) видно, что $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ — решение системы уравнений (8) будет тем ближе к точному решению $\lambda^*$, чем меньше будет шаг разбиения $h>0$ или чем больше используется количество подстановок $\nu$.

В данной работе предлагается следующий алгоритм нахождения $\lambda^{(0)}$. Рассмотрим систему уравнений (8) при $\nu=1$:

$$hg\Big[\lambda_1,\lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau,\lambda_N)d\tau\Big] = 0, \tag{10}$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(\tau,\lambda_s)d\tau - \lambda_{s+1} = 0, \qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{11}$$

Специальная структура системы уравнений (10), (11) позволяет свести ее к системе $n$ уравнений.

Равенствами $F_r(y) = y + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} f(\tau,y)d\tau,\ \ r=\overline{1,N}$, определив вектор-функции $F_r : R^n \to R^n$, из (11) найдем $\lambda_{s+1}$ через $\lambda_1$:

$$\lambda_{s+1} = F_s(F_{s-1}(...(F_1(\lambda_1)))), \qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{12}$$

Подставляя значение $\lambda_N$ из (12) в (10) получим систему уравнений относительно $\lambda_1$

$$D(\lambda_1) \equiv g[\lambda_1, F_N(F_{N-1}(...(F_1(\lambda_1))))] = 0. \tag{13}$$

Так как $F_r$, $r=\overline{1,N}$ выражается через правую часть дифференциального уравнения (1), то $D(\lambda_1)$ полностью определяется через $f$, $g$, $h$ и для нахождения решений систем уравнений (13) можно применить различные известные методы.

Если $\lambda_1^{(0)}\in R^n$ — решение системы уравнений (13), то $\widetilde{\lambda}_{(1)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},...,\lambda_N^{(0)})'\in R^{nN}$, где $\lambda_{s+1}^{(0)}=F_s(F_{s-1}(...(F_1(\lambda_1^{(0)})))),\quad s=\overline{1,N-1},$ будет решением систем уравнений (10), (11).

Чтобы найти $\lambda_{(2)}^{(0)}$ — решение (8) при $\nu=2,$ в качестве начального приближения возьмем $\widetilde{\lambda}_{(1)}$ — решение (10), (11) и воспользуемся теоремой 1 из [10, с. 31].

Пусть выполнены следующие предположения:

1) функции $f(t,x)$, $g(v,w)$ удовлетворяют условию А, соответственно, в

$$G_1(\widetilde{\lambda}_{(1)},\rho_1)=\Big\{(t,x),t\in[0,T],||x-\lambda_s^{(0)}||<\rho_1,\ t\in[(s-1)h,sh),s=\overline{1,N-1},$$

$$||x-\lambda_N^{(0)}||<\rho_1,t\in[(N-1)h,Nh]\Big\},$$

$$G_2(\widetilde{\lambda}_{(1)},\rho_1)=\Big\{(v,w):||v-\lambda_1^{(0)}||<\rho_1,||w-\lambda_N^{(0)}||<\rho_1\Big\};$$

2) матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{2,h}(\lambda,0)}{\partial\lambda}$ обратима и $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{2,h}(\lambda,0)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\|\le\gamma_2(h)$

для всех $\lambda\in S(\widetilde{\lambda}_{(1)},\rho_1)$;

3) $\gamma_2(h)||Q_{2,h}(\widetilde{\lambda}_{(1)},0)||<\rho_1$.

Тогда по теореме 1 из [10] существует число $\alpha\ge1$ такое, что последовательность $\{\lambda_{(2)}^{(m)}\}$, $m=0,1,2,...$, определяемая итерационным процессом

$$\lambda_{(2)}^{(0)}=\widetilde{\lambda}_{(1)},\qquad \lambda_{(2)}^{(m+1)}=\lambda_{(2)}^{(m)}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{2,h}(\lambda_{(2)}^{(m)},0)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\cdot Q_{2,h}(\lambda_{(2)}^{(m)},0),$$

сходится к $\widetilde{\lambda}_{(2)}\in S(\widetilde{\lambda}_{(1)},\rho_1)$ — изолированному решению системы уравнений $Q_{2,h}(\lambda,0)=0$ и имеет место неравенство

$$||\widetilde{\lambda}_{(2)}-\widetilde{\lambda}_{(1)}||\le\gamma_2(h)||Q_{2,h}(\widetilde{\lambda}_{(1)},0)||. \tag{14}$$

Учитывая равенство $Q_{1,h}(\widetilde{\lambda}_{(1)},0)=0,$ из (14) получим оценку

$$||\widetilde{\lambda}_{(2)}-\widetilde{\lambda}_{(1)}||\le\gamma_2(h)\max(1,hL_2)\cdot\max_{r=\overline{1,N}}\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\cdot\max_{\tau\in[(r-1)h,rh)}\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}f(\tau_1,\lambda_r^{(0)})d\tau_1\right\|\right\}.$$

Пусть $\widetilde{\lambda}_{\nu-1}=(\lambda_1^{(\nu-1)},\lambda_2^{(\nu-1)},...,\lambda_N^{(\nu-1)})'\in R^{nN}$ — решение системы уравнений $Q_{\nu-1,h}(\lambda,0)=0$ и пусть выполнены следующие условия:

1) функции $f(t,x)$, $g(v,w)$ удовлетворяют условию А, соответственно, в

$$G_1(\widetilde{\lambda}_{(\nu-1)},\rho_{\nu-1})=\Big\{(t,x),t\in[0,T],||x-\lambda_s^{(0)}||<\rho_{\nu-1},\ t\in[(s-1)h,sh),s=\overline{1,N-1},$$

$$||x-\lambda_N^{(0)}||<\rho_{\nu-1},\ t\in[(N-1)h,Nh]\Big\},$$

$$G_2(\widetilde{\lambda}_{(\nu-1)},\rho_{\nu-1})=\Big\{(v,w):||v-\lambda_1^{(0)}||<\rho_{\nu-1},||w-\lambda_N^{(0)}||<\rho_{\nu-1}\Big\};$$

2) матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda,0)}{\partial\lambda}$ обратима и $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda,0)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(h)$

для всех $\lambda \in S(\widetilde{\lambda}_{(\nu-1)}, \rho_{\nu-1})$;

3) $\gamma_\nu(h)||Q_{\nu,h}(\widetilde{\lambda}_{(\nu-1)}, 0)|| < \rho_{\nu-1}$.

В качестве начального приближения взяв $\widetilde{\lambda}_{(\nu-1)}$ и используя итерационный процесс вышеуказанной теоремы 1 [10], найдем $\widetilde{\lambda}_{(\nu)}$ — решение системы уравнений (8) и установим оценку

$$\|\widetilde{\lambda}_{(\nu)} - \lambda_{(\nu-1)}\| \leq$$

$$\leq \gamma_\nu(h) \cdot \max(1, hL_2) \cdot \max_{r=1,N} \left\{ \frac{1}{(\nu-1)!} \left( \int_0^T L(t)dt \right)^{\nu-1} \max_{\tau \in [(r-1)h, rh]} \left\| \int_{(r-1)h}^{\tau} f(\tau_1, \lambda_r^{(0)}) d\tau_1 \right\| \right\}. \quad (15)$$

Таким образом, введение дополнительных параметров и рассмотрение эквивалентной задачи с параметром (3)–(5) позволяют проблему выбора начального приближения для нелинейной двухточечной краевой задачи (1), (2) свести к нахождению $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ — решения систем уравнений (8). Предлагаемый алгоритм нахождения $\lambda^{(0)}$ начинается с решения системы $n$ уравнений (13). Если $\lambda_1^{(0)} \in R^n$ — решение (13), то остальные компоненты вектора $\widetilde{\lambda}_{(1)} \in R^{nN}$ — решения (8) при $\nu = 1$ определяются по формулам (12). Продвижение по $\nu$ осуществляется на основе итерационных процессов, где в качестве начального приближения берется решение системы уравнений $Q_{\nu-1,h}(\lambda, 0) = 0$.

Оценка (15) устанавливает близость $\widetilde{\lambda}_{(\nu)}$, $\widetilde{\lambda}_{(\nu-1)}$, а оценка (9) показывает насколько, "хорошим" будет выбранное начальное приближение.

## Цитированная литература


1. **Абрамов А.А., Андреев В.Б.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т.3, №2. С. 377–381.
2. **Шаманский В.Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч.1. Киев, 1963.
3. **Keller H.B.** Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell, 1968.
4. **Roberts S.M., Shipman J.S.** Two-point boundary-value problems: Shooting methods. N.Y., 1972.
5. **Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений** // Под ред. Холла Дж., Уатта Дж. М., 1979.
6. **Монастырный П.И.** // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, №4. С. 732-740.
7. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. М., 1986.
8. **Кигурадзе И.Т.** // "Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. ( Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)" М., 1987.
9. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.
10. **Джумабаев Д.С.** // Матем. журнал МОН РК. 2001. Т. 1, № 1. С. 30–40.
11. **Темешева С.М.** // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. №1. С. 93-100.
12. **Темешева С.М.** // Матем. журнал МОН РК. 2004. Т. 4, №1. С. 73–83.


*Поступила в редакцию 20.05.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 52 — 59*

*УДК 517.977.55*

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

З. Н. Мурзабеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
480012 г. Алматы пр.аль-Фараби, 71

Рассматривается задача оптимального управления с закрепленными концами. Получены достаточные условия оптимальности для динамических систем с применением множителей Лагранжа специального вида и функции Ляпунова с заданными свойствами.

**1. Постановка задачи.** Пусть управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{$*$}$$

где $x \in R_n$ — фазовые координаты управляемого объекта, $u \in R_m$ — параметры управления; известная функция $f(x, u, t)$ описывает внутреннее устройство объекта и учитывает различные внешние факторы.

Под решением уравнения ($*$) будем понимать непрерывное решение интегрального уравнения при некотором допустимом управлении $u = u^*$

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(x(\tau), u^*(\tau), \tau) d\tau + x(t_0).$$

Будем предполагать, что параметры управления $u$ в каждый момент $t$ принадлежат некоторой области управления $U$, которая является подмножеством $m$-мерного евклидова пространство $R_m$. Управление $u = u(t)$ назовем допустимым, если его координаты являются кусочно-непрерывными функциями и $u(t) \in U \subset R_m$ при $t \in [t_0, T]$. Множество всех допустимых управлений обозначим через $U_0$. Будем обозначать через $x(t) = x(t, u) \in G(t) \subset R_n$ решение уравнения, соответствующее допустимому управлению $u = u(t) \in U_0$, $t \in [t_0, T]$ и начальному условию $x(t_0)$. Множество $G(t)$ называют фазовыми ограничениями. Векторная функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по $x \in G(t)$ и

Keywords: *optimal control, Lagrange multiplier, Lyapunov function, fixed ends*
2000 Mathematics Subject Classification: 49K15

$u \in U(t)$. При этих условиях может быть доказано существование и единственность решения уравнения $(*)$ с заданными начальными условиями $x(t_0)$ [1].

Пусть задан функционал

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)dt,$$

где функция $f_0(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе с частными производными по $x$ и $u$ при $(x, u, t) \in G(t) \times U(t) \times [t_0, T]$.

Ставится задача: найти такое управление $u = u(x, t)$, которое обеспечивает движение траектории (*) из некоторого начального состояния $x(t_0) = x_0$ в желаемое конечное состояние $x(T) = 0$ и минимизирует функционал $J(u)$.

Во многих работах [2,3,4] рассматривается вопрос о том, можно ли систему, описываемую некоторым уравнением, перевести из любого заданного начального состояния в любое желаемое состояние за конечный промежуток времени, выбирая надлежащим образом закон изменения управляющих сил. Это сформулированное свойство получило название управляемости.

Естественно, что при решении задачи об обеспечении асимптотической устойчивости движения для систем с конечным временем управления, возникает вопрос об управляемости этих систем, а также об использовании функции Ляпунова и теоремы об асимптотической устойчивости.

Заметим, что выбор функционала в виде квадратичной формы от состояния и управления имеет определенный физический смысл. Из дальнейшего изложения будет видно, что во многих случаях этот подход позволяет найти решение поставленной задачи.

Для линеаризованных стационарных и нестационарных систем полученные условия для определения управления связаны с известными условиями управляемости линейных систем.

В работе [5] рассматривается возможность построения синтезирующих и программных управлений из условия минимума преобразованного критерия качества системы, чтобы замкнутая система обладала функцией Ляпунова заданного вида. Полученные таким образом динамические системы управления обладают свойствами асимптотической устойчивости в целом по отношению к состояниям равновесия или невозмущенным траекториям движения. Следует отметить, что применение комбинированного подхода к оптимизации динамических систем приводят к законам управления, состоящим из синтезирующих и программных управлений. Синтезирующее управление обеспечивает оптимальную стабилизацию исходной системы на бесконечном промежутке времени. Программное управление представляет собой составляющую, ответсвенную за переходные процессы из начального состояния системы $x_0$ в момент $t = t_0$ в конечное состояние $x(T) = 0$ в момент $t = T$.

В данной работе предлагается один из вариантов реализации принципа оптимальности В.Ф.Кротова [3].

**2. Достаточные условия оптимальности динамических систем управления с закрепленными концами.** Рассмотрим задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)dt \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = 0, \tag{3}$$

$$x(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t), \quad t_0 \le t \le T. \tag{4}$$

Условие (3) означает, что в данной задаче левый и правый концы закреплены. В условии (4) подразумевается, что множество $G(t)$ является фазовым ограничением и управление $u(t)$ выбирается из класса кусочно-непрерывных функций. Возможно, что $G(t) = R_n$, $U(t) = R_m$ при всех $t \in [t_0, T]$. Тогда задача (1)–(4) называется задачей оптимального управления с закрепленными концами без ограничений на фазовые координаты и управления.

Изложим подход получения достаточных условий оптимальности системы управления с закрепленными концами. Будем производить выбор управления $u(x,t)$, обеспечивающий устойчивость объекта управления (2) и одновременно минимизирующий функционал (1), основанный на использовании аппарата функций Ляпунова и с применением множителей Лагранжа специального вида $\lambda = \lambda_0(x,t) + q(t)$. Множитель $\lambda_0(x,t)$ связан с построением синтезирующего управления, а множитель $q(t)$ связан с построением программного управления.

Рассмотрим вспомогательную задачу: минимизировать функционал

$$J^t(x,u) = \int\limits_t^T f_0(x,u,\tau)d\tau \tag{5}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x(\tau),u(\tau),\tau), \quad x(t) = x, \quad \tau \in [t,T], \tag{6}$$

$$u(\tau) \in U \text{ кусочно непрерывна}, \quad \tau \in [t,T], \tag{7}$$

где точка $x$ и момент $t$, $t_0 \le t \le T$ фиксированы.

Обозначим через $\Delta(x,t)$ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию (7), и соответствующих траекторий $x(\tau,u)$ системы (6), определенных на отрезке $t \le \tau \le T$.

Пусть $\lambda = \lambda_0(x,t)+q(t)$ — множитель Лагранжа, тогда вместо функционала (5) рассмотрим функционал вида

$$J^t(x,u,\lambda) = \int\limits_t^T [f_0(x,u,\tau) + (\lambda_0(x,\tau) + q(t))(f(x,u,\tau) - \dot{x}(\tau)]d\tau. \tag{8}$$

Введем положительно определенную функцию Ляпунова $v = v(x,t)$ и вычислим ее полную производную по времени $t$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение следующие конструкции

$$H(x,u,\lambda,\tau) = f_0(x,u,\tau) + (\lambda_0(x,\tau) + q(\tau))f(x,u,\tau),\ q(\tau) + \lambda_0(x,\tau) = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$R(x,u,v,\tau) = f_0(x,u,\tau) + (\frac{\partial v}{\partial x})^* f(x,u,\tau) + \frac{\partial v}{\partial \tau} = H(x,u,\lambda,\tau) + \frac{\partial v}{\partial \tau}. \tag{10}$$

**Л е м м а 1.** *Если пара $(x(t),u(t)) \in \Delta(x,t)$ и функция $v(x(t),t)$ переменной $t$ непрерывна и дифференцируема по $t$ на отрезке $[t_0,T]$, а также выполняется предельное соотношение $\lim v(x,t) = 0$ при $t \to T$, то функционал (5) при $u = u(x(t),t)$ имеет следующее представление*

$$J^t = J^t(x(t),u(t)) = \int\limits_t^T R(x(\tau),u(\tau),\tau,v(\tau))d\tau + v(x(t),t). \tag{11}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть существует функция $v(x(t),t)$ и справедливо (9):

$$\frac{dv(x(t),t)}{dt} = (\frac{\partial v(x(t),t)}{\partial x})^* f(x(t),u(t),t) + \frac{\partial v(x(t),t)}{\partial t}. \tag{12}$$

Так как $v(x(t),t)$ непрерывна по $t$, то, интегрируя (12), получим с учетом обозначения (10)

$$v(x(T),T) - v(x(t),t) = \int\limits_t^T [R(x(\tau),u(\tau),v(\tau),\tau) - f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)]d\tau.$$

Отсюда, суммируя полученное выражение с (5), в силу предельного соотношения $\lim\limits_{t\to T} v(x(t),t) = v(x(T),T) = 0$ получим утверждение леммы.

Пусть выполняются условия леммы 1 и формула (11) верна для любой допустимой пары $(x(t),u(t)) \in \Delta(x,t)$. Тогда справедливо следующее представление функционала

$$J^t = \int\limits_t^T \left[H(x(\tau),u(\tau),\tau,v(\tau)) + \frac{\partial v(x(\tau),\tau)}{\partial \tau}\right]d\tau + v(x(t),t). \qquad (13)$$

Для дальнейшего изложения предлагаемого подхода к решению задачи синтеза асимптотически устойчивых систем управления необходимо найти допустимую пару $(x^*(t),u^*(t)) \in \Delta(x,t)$. При фиксированных $x,v,t$ функция $H(x,u,v,t)$ становится функцией лишь параметра $u \in U$. Если точная нижняя грань значений непрерывной функции $H$ достигается в некоторой точке $u \in U$, то имеем необходимое условие оптимальности.

Пусть $\lambda = \lambda_0(x,t)+q(t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ является множителем Лагранжа специального вида. Будем считать, что функция $H(x,u,t,\lambda)$ при $t \in [t_0,T]$ является функцией Лагранжа и справедлива следующая теорема [1].

**Т е о р е м а 1.** *Пусть $G$ и $U$ — открытые множества в пространствах $R_n$ и $R_m$, соответственно; функции $f_0$, $f$ и их частные производные по $x$ непрерывны. Если $(x^*,u^*)$ — оптимальный процесс для задачи (5)–(7), то найдутся множители Лагранжа $\lambda = \lambda(t)$, не равные нулю и такие, что выполнены принцип минимума и условия стационарности:*

*а) по $u$ — принцип минимума*

$$\inf_{u\in U} H(x^*(t),u,t,\lambda) = H(x^*(t),u^*(t),t,\lambda); \qquad (14)$$

*б) по $x$ — условие стационарности*

$$\frac{\partial R(x^*(t),u^*(t),t)}{\partial x} = 0. \qquad (15)$$

Из условия (14) находится управление $u^*$, а из условия (15) определяются параметры функции $v(x,t)$ при конкретизации этой функции с учетом специфики задачи. В результате решения этих задач получаются алгоритмы, аналогичные алгоритмам, основанным на принципе максимума Л.С.Понтрягина и методе динамического программирования Р.Беллмана. Эти признаки оптимальности являются необходимыми условиями синтеза асимптотически устойчивых систем с конечным временем управления и указывают, главным образом, внутренние свойства оптимальных движений.

Пусть $(x^*(t),u^*(t)) \in \Delta(x,t)$ и найдено минимальное значение

$$R_{\min}(t) = \inf_{x\in G(t)} \inf_{u\in U(t)} R(x,u,t). \qquad (16)$$

Теперь перейдем к рассмотрению достаточных условий оптимальности для задач (1)–(4).

Допустимая пара $(x^*(t),u^*(t)) \in \Delta(x,t)$ называется оптимальной, если

$$\inf_{\Delta(x,t)} J(x(t),u(t)) = J(x^*(t),u^*(t)) = J^*. \qquad (17)$$

Управление $u^*(t)$ будем называть оптимальным управлением, $x^*(t) = x(u^*, t)$ — оптимальной траекторией, а пару $(x^*(t),\ u^*(t))$ — оптимальным решением рассматриваемой задачи. В данной задаче нижняя грань (17) берется по всем $u(t) \in U$, для которых соответствующая траектория $x(u^*, t)$ определена из (2) и удовлетворяет условиям

$$x^*(t_0) = x_0,\ \ x^*(t) \in G(t),\ \ t_0 \le t \le T,\quad \lim_{t\to T} x^*(t) = 0. \tag{18}$$

Теперь сформулируем следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.** *Для оптимальности пары* $(x^*(t),\ u^*(t)) \in \Delta(x,t)$ *достаточно существования функции* $v(x,t)$ *такой, что формула (11) верна для любой допустимой пары* $(x(t), u(t)) \in \Delta(x,t)$ *и выполняются следующие условия:*

*1) существует минимальное значение в задаче (16)*

$$R(x^*(t), u^*(t), t, v(t)) = R_{\min}(t),\ \ t \in [t_0, T];$$

*2)* $v(x,t)$ *— положительно определенная функция, допускающая бесконечно малый высший предел;*

*3) полная производная по времени* $t$ *от функции* $v(x,t)$*, полученная в силу уравнения (2), удовлетворяет неравенству*

$$\overset{*}{v}(x,t) + f_0(x^*(t), u^*(t), t) \le 0; \tag{19}$$

*4) выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{t\to T} v(x,t) = 0,$$

*где* $R_{\min}(t)$ *определяется согласно (16), а функция* $f_0(x,u,t)$ *является положительно определенной.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть произвольная допустимая пара $(x(t), u(t)) \in \Delta(x,t)$. Тогда согласно формуле (11) будем иметь

$$J(x(t), u(t)) - J(x^*(t), u^*(t)) = J - J^* =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [R(x(t), u(t), t, v(t)) - R(x^*(t), u^*(t), t, v(t))]dt + v(x, t_0) - v(x^*, t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [R(x(t), u(t), t, v(t)) - R_{\min}(t)]dt + v(x, t_0) - v(x^*, t_0) \ge 0,$$

отсюда следует

$$J^* = \inf_{\Delta(x,t)} J((x,t), u(t)). \tag{20}$$

Пусть существует функция $v(x,t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, тогда согласно (11) и (19) имеем следующие соотношения

$$\int_{t}^{T} R_{\min}(\tau)d\tau + v(x^*, t) = J^{t*} \ge 0,$$

$$R_{\min}(t) = \dot{v}(x^*, t) + f_0(x^*(t), u^*(t), t) \le 0.$$

Отсюда имеем

$$v(x^*,t) = J^* - \int\limits_t^T R_{\min}(\tau)d\tau \geq 0.$$

Из обозначения (10) для любого из допустимых управлений получим

$$\frac{dv}{dt} = R(x,u,t) - f_0(x,u,t).$$

Интегрируя последнее выражение по $t$, имеем

$$v(x,t) = \int\limits_t^T [f_0(x,u,\tau) - R(x,u,\tau)]d\tau,$$

$$\lim v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to T.$$

Итак, теорема полностью доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** *Задача синтеза динамических задач с закрепленными концами тесно связана с задачей об оптимальной стабилизации на неограниченном интервале [6]. Она является дальнейшим развитием проблемы стабилизации в теории управляемых систем с конечным временем управления. В этом случае происходит объединение методов вариационного исчисления с методом функции Ляпунова.*

**З а м е ч а н и е 2.** *В общей постановке задачи трудно получить достаточно конструктивные результаты для условий оптимальности управляемых систем с закрепленными концами. Вопрос о выборе функции Ляпунова определяется в каждом случае с учетом особенностей рассматриваемой прикладной задачи. Во многих случаях удовлетворяют условиям теоремы 2 функции, построенные в виде положительно определенной квадратичной формы от состояния системы и билинейной формы. Эти функции связаны с множителями Лагранжа специального вида* $\lambda = \lambda_0(x,t) + q(t)$.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда управление* $u^* = u(x^*,t)$ *разрешает задачу синтеза динамических систем управления с закрепленными концами (1)–(4) и выполняется равенство*

$$J^* = \int\limits_{t_0}^T f_0(x^*(t),u^*(t),t)dt = \int\limits_{t_0}^T R_{\min}(t)dt + v(x^*(t_0),t_0). \tag{21}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для любой допустимой пары $(x(t),u(t)) \in \Delta(x,t)$ справедлива лемма 1. Пусть $(x^*(t),u^*(t)) \in \Delta(x,t)$ — оптимальная пара, тогда вдоль оптимальной траектории выполняются условия теоремы 2

$$\frac{dv(x^*,t)}{dt} + f_0(x^*,u^*,t) = R_{\min}(t), \tag{22}$$

$$\frac{dv(x^*,t)}{dt} + f_0(x^*,u^*,t) \leq 0, \tag{23}$$

а также выполняется предельное соотношение

$$\lim v(x^*,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to T. \tag{24}$$

Интегрируя выражения (22) и (23) вдоль движения $x^*(t)$ в пределах от $t = t_0$ до $t = T$ и учитывая предельное соотношение (24), получим

$$J^* = \int_{t_0}^{T} f_0(x^*, u^*, t)dt = \int_{t_0}^{T} R_{\min}(t)dt + v(x^*(t_0), t_0), \tag{25}$$

$$J^* \leq v(x^*(t_0), t_0). \tag{26}$$

Пусть $(x(t), u(t)) \in \Delta(x, t)$ — произвольная допустимая пара, тогда вдоль траектории $\bar{x}(t)$ выполняются условия

$$\frac{dv(\bar{x}, t)}{dt} + f_0(x, u, t) \geq R_{\min}(t), \tag{27}$$

$$\frac{dv(\bar{x}, t)}{dt} \leq 0, \tag{28}$$

а также выполняется предельное соотношение

$$\lim v(\bar{x}, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to T. \tag{29}$$

Аналогично, интегрируя выражения (27) и (28) вдоль движения $x(t)$ в пределах от $t = t_0$ до $t = T$ и учитывая предельное соотношение (29), получим

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{T} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t)dt \geq v(\bar{x}(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{T} R_{\min}(t)dt, \tag{30}$$

$$v(\bar{x}(t_0), t_0) \geq 0. \tag{31}$$

Из выражений (25) и (30) находим

$$\bar{J} - J^* \geq v(\bar{x}(t_0), t_0) - v(x^*(t_0), t_0). \tag{32}$$

Поскольку $v(\bar{x}, t)$ и $v(x^*, t)$ — положительно определенные и монотонно убывающие функции, удовлетворяющие условиям (24) и (29), то имеем

$$\bar{J} \geq J^* = \int_{t_0}^{T} R_{\min}(t)dt + v(x^*(t_0), t_0). \tag{33}$$

Таким образом, получено утверждение теоремы.

**З а м е ч а н и е 3.** *Критерий оптимальности, который выражается равенством (22) и неравенством (23), соответствует известным методам вариационного исчисления. В данном подходе критерий приведен в форме условий минимума функционала (1). выполнение предельного соотношения* $\lim x(t) = 0$ *при* $t \to T$ *соответствует характеру основных теорем второго метода Ляпунова.*

**З а м е ч а н и е 4.** *При решении конкретной задачи с закрепленными концами используются множители Лагранжа специального вида* $\lambda = \lambda_0(x, t) + q(t)$*. Эти множители позволяют построить функцию Ляпунова с заданными свойствами. Множитель* $\lambda_0(x, t)$ *соответствует построению синтезирующих управлений, а* $q(t)$ *соответствует построению программных управлений. Комбинирование этих двух видов управлений позволяют эффективно решать задачи в теории оптимального управления для систем с закрепленными концами.*

## Цитированная литература

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М. 1979.

2. **Ройтенберг Я.Н.** Автоматическое управление. М., 1978.

3. **Кротов В.Ф., Гурман В.И.** Методы и задачи оптимального управления. М., 1973.

4. **Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.** Методы решения краевых задач. Алматы, 2002.

5. **Мурзабеков З.Н.** // Вестник КазНУ, сер. математика, механика, информатика. 2003. №2. С. 50–58.

6. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М., 1966.

*Поступила в редакцию 20.11.2003г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 60 — 67*

*УДК 681.324*

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

М. Отелбаев, Е. Н. Сейткулов

Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова
473033 г.Астана ул. Мунайтпасова, 5 erj@mail.ru

В статье рассматриваются несколько новых проблем криптографии и решаются некоторые из них. Причиной возникновения этих проблем явилась возможная доступность вычислительных систем желающим незаконно использовать результаты решения задач.

Проблема защиты информации является одной из важнейших проблем современности в области экономики, и военно-политическими проблемами. Актуальность этой проблемы возрастает вместе с развитием и продвижением всеобщей глобализации, расширением информационного поля, а также с возможностями раскрытия тайн. Развитие техники, средств вычислений и связи способствуют расширению задач, связанных с проблемами защиты информации, так как этими достижениями пользуются как преступный мир, так и государства, пораженные сепаратизмом или разными формами шовинизма, порождающие гнустные имперские амбиции.

Проблема тайного обмена информацией до сегодняшнего дня считается основной задачей теории криптографии. В этой проблеме основные опасности идут в следующей последовательности.

I. Предательство или беспечность сотрудников.

II. Чужие алгоритмы и чужие программы, ибо "чужой" может оказывать услуги противнику.

III. Компьютеры и средства связи, в которых тайно пришиты датчики.

IV. Хаккеры.

Так как теория криптографии фактически нацелена на борьбу с хаккерами [1–3], в настоящее время защищенность от хаккеров — надежная и случайные достижения хаккеров воспринимаются скорее как сенсации, способствующие дальнейшему развитию теории.

С опасностями типа III довольно легко бороться, хотя и требуются некоторые финансовые затраты и время. Борьба с опасностями типа II более дорогостоящая, поэтому алгоритмы и программы дешевле создавать в республике и для этого кадровый патенциал имеется у нас в избытке. Что касается опасностей типа I, борьба с математической точки зрения весьма трудна

Keywords: *Cryptography, information protection*
2000 Mathematics Subject Classification: 94A60

и эта задача, скорее всего, является делом руководства. Тем не менее предлагаемый нами метод может найти эффективное применение в борьбе с трудностями и этого типа.

Для решения классической задачи криптографии, обслуживающей тайный обмен информациями, существуют различные методы в зависимости от рассматриваемой ситуации. В данной работе, нами предлагаются методы решения иной проблемы, где субъекту $A$, у которого слабенькие вычислительные средства, надо решить сложную задачу с помощью вычислительных средств субъекта $C$, сохранив при этом в секрете от $C$ некоторые данные рассматриваемой задачи. Субъект $C$, вычислительными средствами которого $A$ желает воспользоваться, может быть компьютерной системой, выход к которому обеспечивается через общественные средства связи, или это партнер, выполняющий задание $A$ на договорной основе. В качестве $C$ могут выступить собственные вычислительные машины, так как из-за недобросовестных или беспечных сотрудников возможна утечка информации или в них тайно пришиты датчики. В рассматриваемом классе задач при формализации партнер одновременно является и противником и посланный ему текст представляет задачу, как правило, сложную, которую он должен решить в шифрованном виде и вернуть решение также в шифрованном виде, не зная ключи расшифровки.

Итак, нашу сторону, которая не в состоянии собственными силами справиться с задачей из-за отсутствии соответствующих вычислительных средств, обозначим буквой $A$, а через $C$ обозначим совокупность вычислительных средств, все виды общественной связи и партнера, который может быть противником, или своих же недобросовестные сотрудников.

Теперь приведем несколько простых примеров.

**1.** Пусть $H$ — гильбертово пространство (или банахово), $L$ — линейный оператор с областью определения $D(L) \subseteq H$. Нужно решить уравнение

$$Lx = f$$

относительно $x$. По условию решение $x$ и правая часть $f$ должны оставаться в секрете.

Пусть элемент $w \in D(L)$. Вычислим $Lw$ (предположим, мы сами можем его вычислить). Обозначим через $g$ элемент

$$g \equiv f - Lw.$$

Теперь $C$ решает уравнение

$$Ly = g.$$

Поскольку $L(x - w) = f - Lw = g$, то искомое решение дается формулой

$$x = y + w.$$

Так как $w$ выбран нами, то из последней формулы мы получаем $x$. Субъект $C$ не может определить $x$, так как он получает одно уравнение с двумя неизвестными. Задача решена.

Такие задачи особенно часто встречаются в экономике. Вообще, если некоторый процесс описывается линейной математической моделью, мы легко решаем задачу вышеуказанным способом. Таким методом решаются все линейные дифференциальные уравнения.

**2.** Пусть требуется решить краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = f(t) \\ y(0) = 0, \; y(1) = 0. \end{cases}$$

Здесь решение $y(t)$ и $f(t)$ — секретные функции.

Решение дается способом, описанным в 1 пункте, где $L$ — дифференциальный оператор.

**3.** Пусть дана задача

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = f(t), \\ y(0) = s_1,\ y(1) = s_2. \end{cases}$$

Нужно найти решение этой задачи, сохранив в секрете краевые условия $s_1$ и $s_2$ от $C$.

Пусть $y_1$ и $y_2$ — любая фундаментальная система решений однородного уравнения, $y_3$ — любое частное решение неоднородного уравнения. Эти решения $C$ может получить любым известным способом, составляя разностную схему.
Тогда обшее решение, как известно, дается формулой

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3,$$

где $c_1$ и $c_2$ — произвольные постоянные.

Чтобы найти искомое решение краевой задачи, для $A$ остается решить систему алгебраических уравнений относительно $c_1$ и $c_2$ :

$$\begin{cases} c_1y_1(0) + c_2y_2(0) + y_3(0) = s_1, \\ c_1y_1(1) + c_2y_2(1) + y_3(1) = s_2. \end{cases}$$

Из этой системы $c_1$ и $c_2$ определяются однозначно. Тем самым $A$ находит искомое решение краевой задачи.

Этот прием применим для всех линейных уравнений.

**4.** Рассмотрим нелинейное уравнение

$$y'' + a(t){y'}^2 + b(t)y'y + c(t)y^2 + d(t)y' + r(t)y = f(t)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Здесь $a(t), b(t), c(t), d(t), r(t)$ и $f(t)$ — секретные функции. Сделаем замену

$$x = \varphi(t),$$

$$y(t) = m(t)v(t) + l(t).$$

Здесь $m(t), l(t)$ и $\varphi(t)$ — функции, имеющие первые и вторые непрерывные производные и удовлетворяющие следующим условиям:
$\varphi(t)$ — монотонно возрастает,
$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1,$
$m(t) > 0,\ l(0) = l(1) = 0.$
После такой замены получим уравнение вида

$$\alpha_1 v''_{xx} + \alpha_2 {v'_x}^2 + \alpha_3 v'_x v + \alpha_4 v^2 + \alpha_5 v'_x + \alpha_6 v = g(x)$$

с краевыми условиями

$$v(0) = v(1) = 0.$$

Разделив это уравнение на $\alpha_1(x)$, полученное уравнение отправим $C$, который возвратит решение последней задачи. Если теперь $v(x)$ — решение этой задачи, то решение исходной задачи получаем с помощью проделанной замены. То, что секретные данные этой задачи действительно остаются тайной, показывается элементарно.

**5.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -y'' + y^3 = f(t), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Здесь $f(t)$ — секретная функция. Предполагается, что противник знает вид уравнения. В отличии от предыдущей задачи, несмотря на простой вид получить зашифрованное решение сложнее. В задачах 1,2,3,4 мы придумывали очень простые пути решения. В случае 5 авторы пока не знают простого пути решения задачи. Предложим для поставленной задачи метод приближенного решения.

Возьмем функцию двух переменных

$$F(t,\lambda),\ 0 \le t \le 1,\ \lambda \in \Omega,$$

где $\Omega$ — открытая область в комплексной плоскости. Выбор $F(t,\lambda)$ подчиним условиям $a)$ и $b)$ :
$a)$ $F(t,\lambda)$ в $\Omega$ аналитична по $\lambda$ при всех $t \in [0,1]$,
$b)$ при некотором $\lambda_0 \in \Omega\, F(t,\lambda_0) = f(t)$.
Возьмем некоторую замкнутую область $D$, содержащуюся вместе с некоторой окрестностью в $\Omega$, и точки $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \partial D,\ \partial D$ — граница $D$.

Теперь $A$ попросит $C$ решить задачи

$$\begin{cases} -y_j'' + y_j^3 = F(t,\lambda_j), \quad j = 1,2,...,n, \\ y_j(0) = y_j(1) = 0. \end{cases}$$

Решение $y(t,\lambda)$ задачи $-y'' + y^3 = F(t,\lambda), y(0) = y(1) = 0$ от $\lambda$ зависит аналитически, поэтому, зная $y(t,\lambda)$, по формуле Коши имеем

$$y(t) \equiv y(t,\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{y(t,\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda. \tag{1}$$

Если точки $\lambda_j\,(j = 1,2,...,n)$, расположены на $\partial D$ более-менее равномерно, то интеграл (1) можно вычислить приближенно, используя $y(t,\lambda_j)$, которые для $A$ вычисляет $C$. Так как выбором точки $\lambda_0$ распоряжается $A$, то $C$ не сможет определить $f(t)$.

Вычисляя приближенно интеграл по значениям $y(t,\lambda_j)$, как правило, можно решить исходную задачу методом прогонки. Мы привели этот пример для демонстрации возможности использования теории аналитических функций. Если вместо такой простой задачи потребуется решать краевую задачу для уравнений с частными производными, то, как правило, возникает необходимость использования мощных вычислительных средств. Поэтому идея использования формулы Коши оправдана.

**6.** Пусть $M,\ M_+,\ M_-$ — метрические пространства. Предположим, что $G$ есть некоторое преобразование, переводящее пару $(x,f),\ x \in M_+,\ f \in M_-$ в некоторый элемент из $M$, т.е.

$$G : (M_+ \times M_-) \to M.$$

Рассмотрим уравнение

$$G(x,f) = d \in M. \tag{2}$$

Нам при конкретном $f \in M_-$ необходимо решить уравнение (2) относительно $x$. Здесь $f$, $x$ являются секретами для $C$.

Далее, пусть $\tilde{M},\ \tilde{M}_+,\ \tilde{M}_-$ — метрические пространства и $\tilde{G}, \tilde{T}, \tilde{K}$ — отображения:

$$\tilde{G} : (\tilde{M}_+ \times \tilde{M}_-) \to \tilde{M},$$

$$\tilde{T} : M_- \to \tilde{M}_-,$$

$$\tilde{K} : M \to \tilde{M}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{T}f) = \tilde{K}d \equiv \tilde{d}$$

относительно неизвестного $\tilde{x}$.

Предположим, что преобразование $\tilde{A}$ восстанавливает по решению $\tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{T}f) = \tilde{d}$ решение $G(x, f) = d$ по формуле

$$x = \tilde{A}(\tilde{x}) \equiv \tilde{A}(\tilde{x}, f, d, \tilde{K}, \tilde{T}). \tag{3}$$

Теперь $A$ заказывает $C$ решить уравнение

$$\tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{f}) = \tilde{d}, \tag{4}$$

где $\tilde{f} = \tilde{T}f,\ \tilde{d} = \tilde{K}d$. Получив $\tilde{x}$ от $C$, $A$ восстанавливает по формуле (3) значение $x$.

Так как $C$ должен решить (4), то необходимо, чтобы $C$ знал $\tilde{M}_+,\ \tilde{M}_-, \tilde{G}, \tilde{d}, \tilde{f}$. Кроме того, предполагаем, что $C$ знает $G,\ M_+,\ M_-$. Поэтому $A$ должен иметь $\tilde{G},\ \tilde{M}_+,\ \tilde{M}_-, \tilde{T}$ и $\tilde{A}$ такие, что

*a*) вышеупомянутые знания не позволяют $C$ вычислить $x$ вообще, либо за приемлемое для него время;

*b*) $A$, у которого слабенькие вычислительные средства, может по $\tilde{x}$ восстановить $x = \tilde{A}(\tilde{x})$ за приемлемое для него время.

При решении задач 1–4 мы по существу действовали по этой схеме. В абстрактной постановке эта задача не нуждается в том, чтобы $L = \{M,\ M_+,\ M_-,\ \tilde{M},\ \tilde{M}_-,\ \tilde{M}_+\}$ были метрическими пространствами. Но задачи, действительно имеющие прикладные значения, как правило, не имеют точного решения или требуют весьма сложных построений. Кроме того, точные решения обычно не нужны. Поэтому мы считаем, что $L$ — метрические пространства, ибо наличие метрик позволяет решать задачи приближенно и потому целесообразно учесть этот момент с самого начала при постановке конкретной задачи.

Итак, $C$ знает $M_+, M_-, M, G, \tilde{M}_+, \tilde{M}_-, \tilde{M}, \tilde{f}, \tilde{d}$ и может решить уравнение (2) и (4) и сообщает решение (4) субъекту $A$.

Субъект $A$ не может решить ни одно из уравнений (2) и (4). Но по решению (4) при $\tilde{f} = \tilde{T}f, \tilde{d} = \tilde{K}d$ может восстановить $x$ за приемлемое для него время.

$C$, зная $M_+, M_-, M, G, \tilde{M}_+, \tilde{M}_-, \tilde{M}, \tilde{f}, \tilde{d}$, не может за приемлемое время найти $x$.

Эту задачу будем называть (*)-задачей.

В (*)-задаче предполагается, что $C$ не знает $f, d, \tilde{T}, \tilde{K}$. В задачах, имеющих действительно прикладные значения, $C$ может знать некоторых из этой четверки. Поэтому можно потребовать, чтобы $C$, зная $M_+, M_-, M, G, \tilde{M}_+, \tilde{M}_-, \tilde{M}, \tilde{f}, d, \tilde{d}, \tilde{T}, \tilde{K}$, не мог за приемлемое время определить $x$ и $f$.

Такую постановку задачи назовем (**)-задачей.

Известно, что классическая задача криптографии, обслуживающая тайный обмен информациями двух субъектов, имеет множество решений, нахождение которых приводит к проблеме разложения больших чисел на простые множители и к проблеме дискретного логарифма. Что касается задач (*) и (**), то в общем виде их решить, скорее всего, невозможно. Однако, сужая класс уравнений (2), иногда можно найти решения. Этими вопросами мы займемся в дальнейших работах. В этой работе мы будем решать конкретные задачи.

Отметим, что для использования идей классической теории криптографии можно взять метрические пространства в задачах (*) и (**) дискретными. В этом случае наличие метрики окажется излишним.

Рассмотрим общее уравнение (2) из (*)-задачи

$$G(x, f) = d \in M,\ x \in M_+,\ f \in M_-.$$

Возьмем случайные элементы $f_1, ..., f_N$ и $d_1, ..., d_N$ из $M_-$ и $M$, соответственно, одна пара из которых $(f_{i_0}, d_{i_0})$ совпадает с $(f, d)$. $A$ просит $C$ решить ему задачи

$$G(x_i, f_i) = d_i,\ i = 1, , 2, ..., N.$$

$C$, выполнив просьбу $A$, передает ему набор $(x_1, x_2, ..., x_N)$. $A$ берет $x_{i_0}$. $C$, хотя и знает, что среди пар $(f_i, f_i)\,(i = 1, 2, ..., N)$ находится $(f, d)$, не сможет распознать нужную пару. Предложенный способ — простое решение (*)-задачи, но имеет уязвимые места: большое количество наборов пар $\{f_i, d_i\}_{i=1}^N$ вызовет трудности как у $A$, так и у $C$. Кроме того, на практике $C$ может иметь дополнительные информации для распознавания пары $(f, d)$ среди $\{f_i, d_i\}_{i=1}^N$.

**7.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -y'' + y^3 = at^3, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Предположим, что нам необходимо вычислить $y(1)$. Секретом является $a$.
Положим $y = \alpha v,\ t = \beta\eta$. Тогда вместо (5) получим

$$\begin{cases} -\alpha\beta^{-2}v'' + \alpha^3 v^3 = a\beta^3\eta^3, \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases}$$

Или, полагая $\alpha = \beta^{-1}$, имеем

$$\begin{cases} -v'' + v^3 = a\beta^6\eta^3, \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{5$'$}$$

Выберем случайное число $m$ такое, что $m > 2\beta^{-1}$. Теперь попросим $C$ решить уравнение (5$'$) на $(0, m)$. Зная $v(\eta)$, мы берем его значение в точке $\eta = \beta^{-1}$. Имеем $y(1) = \beta^{-1}v(\beta^{-1})$. Так как $C$ значение $\beta$ не знает, он не сможет узнать $a$.

**8.** Задача, которую рассмотрим в этом пункте, явилась одной из причин возникновения той новой задачи теории криптографии, которой посвящены эти работы. Чтобы не заслонить идейные моменты, мы рассматриваем упрощенную постановку одной задачи, связанной с обработкой информации.

Пусть $\Omega$ — плоская область, в пределах которой обнаружено наличие полезных ископаемых. Допустим, что для составления карты распределения полезных ископаемых сняты пробы из $N$ точек $z_1, z_2, ..., z_N,\ (z_i = (x_i, y_i) \in \Omega,\ i = 1, 2, ...N)$ и в каждой точке $z_i$ определен вектор $u^{(i)} = u_i(z_i) = (u_{i1}, ..., u_{ik}),\ (1 \le k < \infty)$, компоненты которого являются носителями информации. В данном случае секретными должны быть $u^{(i)}(i = 1, 2, ..., N)$. Что касается самих точек $z_i$, то засекречивать их не имеет смысла, так как сторона противников может использовать данные своей разведки со спутников и обнаружить точки $z_i\,(i = 1, 2, ..., N)$. Например, если $z_i$ — точки бурения нефтяных скважин, то спутники хорошо "видят" их.

Цель составления карты — по данным в точке $z_i\,(i = 1, 2, ..., N)$ выписать вектор-функцию $u(x, y) = u(z)$, определенную для всех точек $z = (x, y) \in \Omega$. Эта задача по самому смыслу может быть решена приближенно.

За пределами области $\Omega$ полезные ископаемые, по предположению, отсутствуют. Поэтому функция $u$ должна удовлетворять условию

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

где $\partial\Omega$ — граница $\Omega$. Кроме этого, градиент вектор-функции $u$ должен быть не очень большой. Поэтому будем искать $u$ как вектор-функцию, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \left| u(z_i) - u^{(i)} \right|^2 + \int\limits_{\Omega} \left( \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 \right) dxdy. \tag{7}$$

Вводя $\delta$–функцию Дирака, (7) перепишем в виде

$$J(u)=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\left|u(x,y)-u^{(i)}\right|^{2}\delta(x_i,y_i)\,dxdy+\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{2}\right)dxdy. \tag{7$'$}$$

Возьмем бесконечно гладкую финитную неотрицательную функцию (шапка Соболева) $\psi(z)=\psi(x,y)$, интеграл от которой равен единице

$$\psi(x,y)\geq 0,\ \int\limits_{R^2}\psi(x,y)dxdy=1. \tag{8}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — малое число. Вместо (7$'$) будем минимизировать функционал

$$J(\varepsilon,u)=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\left|u(x,y)-u^{(i)}\right|^{2}\psi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon},\frac{y-y_i}{\varepsilon}\right)dxdy+\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2}+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{2}\right)dxdy. \tag{9}$$

Функция $\varepsilon^{-2}\cdot\psi(z\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon\to 0$ стремится к $\delta$-функции Дирака (в смысле распределения). Так как задачу мы с самого начала собираемся решить приближенно, переход от (7) к (9) оправдан. Для минимизации (9) используем обычный вариационный прием. Получим, что функция, доставляющая минимум функционалу $J(\varepsilon,u)$, есть решение задачи

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}\psi_i\cdot(u(x,y)-u^{(i)})-\Delta u=0,\\ u_{|\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

где

$$\psi_i=\varepsilon^{-2}\psi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon},\frac{y-y_i}{\varepsilon}\right).$$

Или

$$\begin{cases}-\Delta u+\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\psi_i\right)u=\sum\limits_{i=1}^{N}\psi_i u^{(i)},\\ u_{|\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{10}$$

Далее попросим $C$ решить задачи

$$\begin{cases}-\Delta w^j+\sum\limits_{i=1}^{N}\psi_i w^j=\psi_j,\\ w^j{}_{|\partial\Omega}=0\end{cases}$$

для $j=1,2,...,N$. Поскольку $\psi_i\geq 0$ и $\psi_i$ — бесконечно гладкие, последняя задача корректна. Получив от $C$ решения $w^1,w^2,...,w^N$ этих задач, по формуле

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{N}u^{(i)}w^i(x,y)$$

мы находим решение (10).

Таким образом, мы построили вектор-функцию $u(x,y)$. Значения векторов $u^{(i)}$ остались совершенно секретными для $C$.

## Цитированная литература

1. **Заурбеков С.С., Отелбаев М.** Защита информации и основы криптографии.(каз.) Астана, 2003.

2. **Нечаев В.И.** Элементы криптографии. Основы теории защиты. Москва, 1999.

3. **Ященко В.В.** Введение в криптографию. Санкт-Петербург, 2001.

*Поступила в редакцию 17.03.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 68 — 75*

*УДК 519.2*

# GOODNESS-OF-FIT TESTS FOR THE LOGISTIC DISTRIBUTION

N. Pya

Institute of Mathematics, Ministry of Education and Science Kazakhstan
Institute of Management, Economics and Strategic Research
480100 Almaty Pushkin str., 125
480100 Almaty Abay ave., 2

**1. Introduction.** In this paper a problem of testing of a compound parametric hypothesis $H_0$, according to which the probability distribution function of $n$ independent identically distributed (i.i.d.) random variables $X_1, X_2, ..., X_n$ belongs to the family of logistic distributions $G(\frac{x-\theta_1}{\theta_2})$ depending on the shift parameter $\theta_1$ and scale parameter $\theta_2$ is considered.

$$\mathbf{P}\{X_1 \le x \mid H_0\} = F(x;\boldsymbol{\theta}) = G\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right) = \frac{1}{1+\exp\{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)\}}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}^1, \quad \theta_2 > 0.$$

Under $H_0$ the density function of $X_i$ is

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\theta_2} g\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}\theta_2} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)}{\left[1+exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)\right]^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^1. \tag{1}$$

Consider the case of $r$ equiprobable intervals with random ends such that

$$p_1(\boldsymbol{\theta}) = ... = p_r(\boldsymbol{\theta}) = 1/r \tag{2}$$

and let

$$-\infty = y_0(\boldsymbol{\theta}) < y_1(\boldsymbol{\theta}) < ... < y_r(\boldsymbol{\theta}) = +\infty,$$

where

$$y_i(\boldsymbol{\theta}) = F^{-1}(p_1(\boldsymbol{\theta}) + ... + p_i(\boldsymbol{\theta})) = \frac{\sqrt{3}\theta_2}{\pi} ln(\frac{i}{r-i}) + \theta_1, \ i = \overline{1, r-1}. \tag{3}$$

Keywords: *logistic distribution, method of moments, modified chi-squared tests, EDF tests, power of goodness-of-fit tests.*
2000 Mathematics Subject Classification: 62F03, 65C05

Denote $\mathbf{V}^{(n)}$ a column $r$-vector of a standardized grouped frequency with components

$$v_i^{(n)} = (np_i(\boldsymbol{\theta}))^{1/2}(N_i^{(n)} - np_i(\boldsymbol{\theta})), \;\; i = \overline{1, r},$$

where

$$N_i^{(n)} =\neq \{i : X_i \in (y_{j-1}(\boldsymbol{\theta}), y_j(\boldsymbol{\theta})), \quad i = \overline{1, n}\},$$

$$p_j(\boldsymbol{\theta}) = \int_{y_{j-1}(\boldsymbol{\theta})}^{y_j(\boldsymbol{\theta})} dF(x; \boldsymbol{\theta}), \quad j = \overline{1, r}.$$

If the estimators $\tilde{\theta_1}$ and $\tilde{\theta_1}$ for the unknown parameters $\theta_1$ and $\theta_2$ are the point of minimum of the statistic

$$\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{[N_i^{(n)} - np_i(\boldsymbol{\theta})]^2}{np_i(\boldsymbol{\theta})},$$

then under certain regularity conditions the Pearson's statistic $\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta})$ possesses in the limit under $n \to \infty$ the chi-squared distribution with $r - 3$ degrees of freedom (Fisher(1928), Cramer (1946)). But if $\boldsymbol{\theta}$ is estimated by the non-grouped data $X_1, X_2, ..., X_n$ then the limit distribution of this statistic depends on the asymptotic properties of an estimator $\boldsymbol{\theta}_n^*$.

In this paper an application of the Dzaparidze-Nikulin (Dzaparidze, Nikulin (1974)) and Mirvaliev's statistics (Mirvaliev (2001)) for the logistic distribution is considered. An iterative procedure of obtaining of an asymptotically efficient estimator proposed by Fisher (1925) is applied for a non-effective method of moments estimator (MME) in the Nikulin-Rao-Robson statistic (Nikulin (1973a, 1973b), Rao and Robson (1974)). The power of these modified chi-squared tests for different number of $r$ equiprobable intervals with random ends is investigated. A power comparison with the Anderson-Darling statistic as the most powerful one among goodness-of-fit tests based on EDF (the empirical distribution function) (Colin Chen (2002)) is studied.

**2. The chi-squared goodness-of-fit tests for the logistic distribution.** For the $r$ equiprobable intervals with random ends

$$p_i(\boldsymbol{\theta}) = 1/r, \quad i = \overline{1, r}$$

let $q = (p_1^{1/2}(\boldsymbol{\theta}), ..., p_r^{1/2}(\boldsymbol{\theta}))^T$, and $\mathbf{B}$ be $r \times s$ matrix with elements

$$\frac{1}{\sqrt{p_i(\boldsymbol{\theta})}} \frac{\partial p_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}, \;\; i = 1, ..., r, \;\; j = 1, 2. \tag{4}$$

Using the orthogonal decomposition of the $r$-dimensional identity matrix Mirvaliev (2001) showed that

$$\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}_n^2(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{W}_n^2(\boldsymbol{\theta}), \tag{5}$$

where

$$\mathbf{U}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{V}^{(n)T}[\mathbf{I} - \mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathbf{T}} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}]\mathbf{V}^{(\mathbf{n})} \tag{6}$$

and

$$\mathbf{W}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{B}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B})^{-}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{(\mathbf{n})}. \tag{7}$$

The idempotent quadratic forms $\mathbf{U}_n^2(\boldsymbol{\theta})$ and $\mathbf{W}_n^2(\boldsymbol{\theta})$ are generalized chi-squared type statistics, which are invariant with respect to the way of the matrix $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}$ inverting. It is supposed here that the rank of $\mathbf{B}$ equals s. If an estimator $\boldsymbol{\theta}_n^*$ is efficient (e.g. MLE), then statistics $\mathbf{U}_n^2(\boldsymbol{\theta}_n^*)$ and $\mathbf{W}_n^2(\boldsymbol{\theta}_n^*)$ will be asymptotically independent. Otherwise (if e.g. $\boldsymbol{\theta}_n^*$ is MME $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n$) they will be asymptotically correlated (Mirvaliev (2001)).

It is well known that if $\boldsymbol{\theta}$ is replaced by a consistent estimator $\boldsymbol{\theta}_n^*$ then the Pearson's statistic $\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta}_n^*)$ will not be distributions free in the limit.

For the MME one can use the Mirvaliev's statistic $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ (**??**), which under rather general conditions possesses in the limit the chi-squared probability distribution $\chi_{r-1}^2$, the sum $\mathbf{W}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) + \mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) - \mathbf{Q}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ being asymptotically independent on $\mathbf{U}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ and distributed as $\chi_s^2$ (Mirvaliev (2001)). The Mirvaliev's test can be written down as

$$\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{U}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) + \mathbf{W}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) + \mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) - \mathbf{Q}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n), \tag{8}$$

where

$$\mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{C}_n\big(\mathbf{V}_n - \mathbf{C}_n^T\mathbf{C}_n\big)^{-1}\mathbf{C}_n^T\mathbf{V}^{(n)}, \tag{9}$$

$$\mathbf{Q}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{A}_n\big(\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n\big)\mathbf{L}_n^{-1}\big(\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n\big)^T A_n\mathbf{V}^{(n)}, \tag{10}$$

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n),\ \mathbf{V}_n = \mathbf{V}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n),\ \mathbf{C}_n = \mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n),$$

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{I} - \mathbf{q}\mathbf{q}^\mathbf{T} + \mathbf{C_n}(\mathbf{V_n} - \mathbf{C_n^T}\mathbf{C_n})^{-\mathbf{1}}\mathbf{C_n^T}$$

and

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{V}_n + (\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n)^T\mathbf{A}_n(\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n),$$

$\mathbf{C}$ is $r \times 2$ matrix with elements

$$p_i^{-1/2}(\boldsymbol{\theta})\left(\int_{\Delta_i} g_j(x)f(x;\boldsymbol{\theta})dx - p_i(\boldsymbol{\theta})m_j(\boldsymbol{\theta})\right),\ \ i = 1, ..., r,\ \ j = 1, 2,$$

$$\mathbf{V} = (\vartheta_{ij}),\ \ \vartheta_{ij} = m_{ij} - m_i m_j,$$

where

$$m_{ij} = E\big[g_i(X)g_j(X)\big], \quad i, j = 1, 2$$

and $\mathbf{K}$ is 2×2 matrix with elements

$$\int g_i(x)\frac{\partial f(x;\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}dx. \quad i, j = 1, 2.$$

Consider $r$ equiprobable intervals with random ends (**??**). For these intervals

$$p_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\left(1 + exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)} - \frac{1}{\left(1 + exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)} = 1/r,\ \ i = \overline{1, r}.$$

Elements of r×2 matrix $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ are

$$B_{i1} = \frac{\pi}{\sqrt{3p_i}\theta_2}\left[\frac{exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)}{\left(1 + exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)^2} - \frac{exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)}{\left(1 + exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)^2}\right], \tag{11}$$

$$B_{i2} = \frac{\pi}{\sqrt{3p_i}\theta_2}\left[\frac{(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta}) - \theta_1)exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)}{\left(1 + exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)^2} - \frac{(y_i(\boldsymbol{\theta}) - \theta_1)exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)}{\left(1 + exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)^2}\right]. \tag{12}$$

It is well known that the $2\times 2$ information matrix $\mathbf{J}$ for the logistic probability distribution is (Aguirre, Nikulin (1994))

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{9\theta_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2+3}{9\theta_2^2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

It can be easily verified that for the logistic distribution

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\theta_1 & 2\theta_2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix} \theta_2^2 & 2\theta_1\theta_2^2 \\ 2\theta_1\theta_2^2 & 4\theta_1\theta_2^2+\frac{16}{5}\theta_2^4 \end{pmatrix} \tag{15}$$

and elements of matrix $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$ for $r$ equiprobable random intervals can be written down as follows

$$C_{11}=\sqrt{r}\left(-\frac{(y_1(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_1(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}-\frac{\sqrt{3}\theta_2}{\pi}Ln\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_1(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)\right), \tag{16}$$

$$C_{i1}=\sqrt{r}\left(\frac{(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}-\frac{(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}\theta_2\sqrt{r}}{\pi}Ln\frac{\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}{\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)},\quad i=\overline{2,r-1}, \tag{17}$$

$$C_{r1}=\sqrt{r}\left(\frac{(y_{r-1}-\theta_1)}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_{r-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}+\frac{\sqrt{3}\theta_2}{\pi}Ln\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_{r-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)\right), \tag{18}$$

$$C_{12}=\sqrt{r}\left[\frac{(y_1^2(\boldsymbol{\theta})-\theta_1^2-\theta_2^2)}{\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_1(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}-\frac{2\sqrt{3}\theta_2 y_1(\boldsymbol{\theta})}{\pi}Ln\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_1(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{6\theta_2^2\sqrt{r}}{\pi^2}Li_2\left(-exp\left(\frac{\pi(y_1(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right), \tag{19}$$

$$C_{i2}=\sqrt{r}\left[\frac{(y_i^2(\boldsymbol{\theta})-\theta_1^2)}{\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}-\frac{(y_{i-1}^2(\boldsymbol{\theta})-\theta_1^2)}{\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}\right]+$$

$$+\frac{2\sqrt{3}\theta_2\sqrt{r}}{\pi}Ln\left[\frac{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)^{y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})}}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)^{y_i}}\right]-\frac{6\theta_2^2\sqrt{r}}{\pi^2}Li_2\left(-exp(\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2})\right)+$$

$$+\frac{6\theta_2^2\sqrt{r}}{\pi^2}Li_2\left(-exp(\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2})\right)+\frac{\theta_2^2\sqrt{r}}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_i(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}-$$

$$-\frac{\theta_2^2\sqrt{r}}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_{i-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}, \quad i=\overline{2,r-1}, \tag{20}$$

$$C_{r2}=\sqrt{r}\left[\frac{(y_{r-1}^2(\boldsymbol{\theta})-\theta_1^2-\theta_2^2)}{\left(1+exp\left(\frac{\pi(y_{r-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)}+\frac{2\sqrt{3}\theta_2 y_{r-1}(\boldsymbol{\theta})}{\pi}Ln\left(1+exp\left(-\frac{\pi(y_{r-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{6\theta_2^2\sqrt{r}}{\pi^2}Li_2\left(-exp\left(-\frac{\pi(y_{r-1}(\boldsymbol{\theta})-\theta_1)}{\sqrt{3}\theta_2}\right)\right), \tag{21}$$

where $Li_2(-x)$ is Euler's dilogarithm.

An iterative procedure of obtaining of an asymptotically efficient estimator, i.e. asymptotically equivalent to the maximum likelihood estimator (MLE) $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$, was proposed by Fisher (1925)

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{i+1}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{i}+\frac{1}{n}\left(\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^i}\left(\frac{\partial L_n}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^i}, \quad i=0,1,..., \tag{22}$$

where $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ is the Fisher's information matrix per single observation, $L_n = L_n(X_1,...,X_n;\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n logf(X_i,\boldsymbol{\theta})$.

The Nikulin-Rao-Robson test $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}_n^1})$ (Nikulin (1973a, 1973b), Rao and Robson (1974)), where $\tilde{\boldsymbol{\theta}_n^1}$ is improved by the formula (**??**) (i=0) MME $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n$ estimator of $\boldsymbol{\theta}$, can also be used for testing of the considered null hypothesis. $\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ can be presented as

$$\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)=\mathbf{U}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)+\mathbf{W}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)+\mathbf{P}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n), \tag{23}$$

where

$$\mathbf{P}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)=\mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{B}_n(\mathbf{J}_n-\mathbf{B}_n^T\mathbf{B}_n)^{-1}\mathbf{B}_n^T\mathbf{V}^{(n)},$$

$\mathbf{B}_n=\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$, $\mathbf{J}_n=\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$.

The Nikulin-Rao-Robson statistic possesses in the limit the chi-squared probability distribution $\chi^2_{r-1}$.

**3. Power comparison.** Since it is difficult to obtain the distribution of test statistic under the alternative hypothesis, Monte Carlo experiment was used to receive power estimates . The estimated power of Mirvaliev's $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}_n})$, Dzaparidze-Nikulin $\mathbf{U2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}_n})$ tests and their difference $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}_n})-\mathbf{U2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}_n})$ (Voinov, Naumov, Pya (2003)) for the significance levels $\alpha=0.10, 0.05$ and $0.01$ were obtained. $N = 10000$ samples of size $n = 100, 200$, and $1000$ for the normal (N), uniform (U), triangular (T) and double exponential (D) alternative distributions and for the number of equiprobable intervals with random ends $r = 4, 6, 8, 10, 14, 20, 30, 40$ were considered. At the same time the power comparison of modified chi-squared tests with the Anderson-Darling statistic $\mathbf{A^2}$ was made. We used $\mathbf{A^2}$ since the investigation has shown that this statistic gives the most powerful test among all EDF tests (the Kolmogorov-Smirnov $\mathbf{D}$, Cramer-Von Mises $\mathbf{W^2}$ and Anderson-Darling $\mathbf{A^2}$) for the considered null and alternative hypothesis (Pya (2004)).

Figure **??** shows these powers at $\alpha = 0.10$ and for $n = 200$ and for the normal alternative.

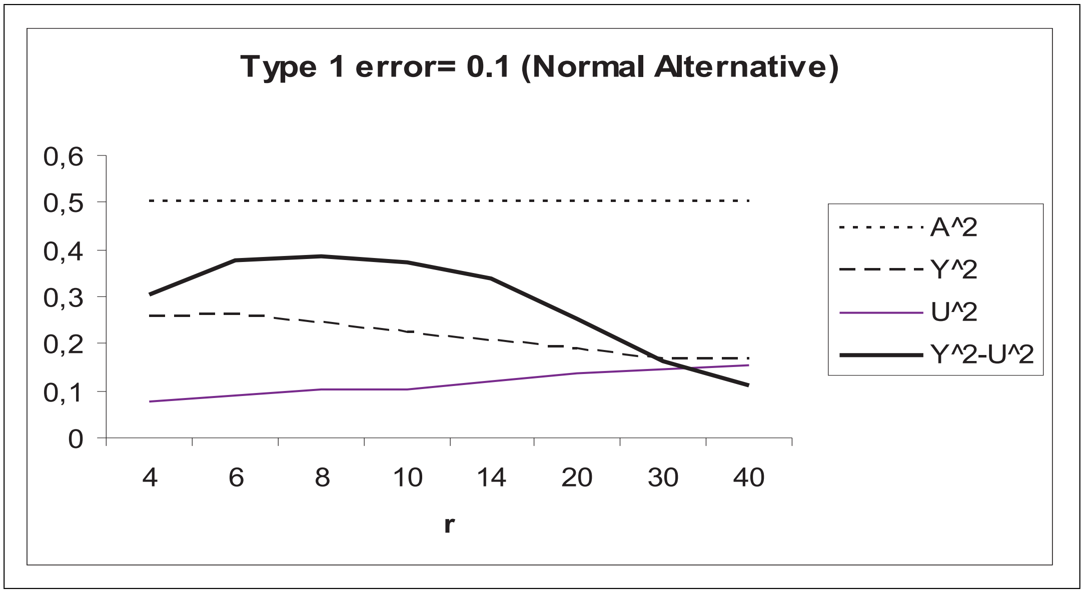


Figure 1.

From this figure one can see comparing modified chi-squared tests that the most powerful test for the given case is the proposed modified chi-squared test $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) - \mathbf{U2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$. The same result was obtained for the other three alternatives. And it is recommended to choose the test with the number of intervals $r$ between 6 and 14. It is remarkable to note that $\mathbf{U2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ for $r = \overline{4, 10}$ is insensitive for the normal, uniform, triangular alternatives. But the power of Anderson-Darling test $\mathbf{A^2}$ is greater or equal (for the uniform distribution) than the power of the chi-squared type statistics for all alternatives considered except the triangular one. The same results were obtained for $n = 100, 1000$ a $\alpha = 0.05$; $0.01$.

Now consider the same method of simulation for estimating power of $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ with the improved by (**??**) non-effective MME $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1$ of $\boldsymbol{\theta}$. The results for $n = 200$, $\alpha = 0.1$ and for the normal alternative distribution are given in Table **??**1.

Table 1.

| $r$ | Power of $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ | Power of $\mathbf{U}_n^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ | Power of $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1) - \mathbf{U}_n^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 0.2414 | 0.0892 | 0.2762 |
| 6 | 0.2943 | 0.1037 | 0.3700 |
| 8 | 0.3151 | 0.1182 | 0.3994 |
| 10 | 0.3096 | 0.1254 | 0.3944 |
| 14 | 0.2552 | 0.1487 | 0.3000 |
| 20 | 0.1873 | 0.1566 | 0.1884 |
| 30 | 0.0952 | 0.0906 | 0.1745 |
| 40 | 0.0795 | 0.0842 | 0.10450 |

Comparing $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ (using the non-effective MME $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$) and $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ (using the asymptotically efficient $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1$) one can see that for the same number of intervals $r = \overline{6, 14}$, the improvement of the non-effective MME has resulted in increase in the power compared to $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ (Figure **??**).

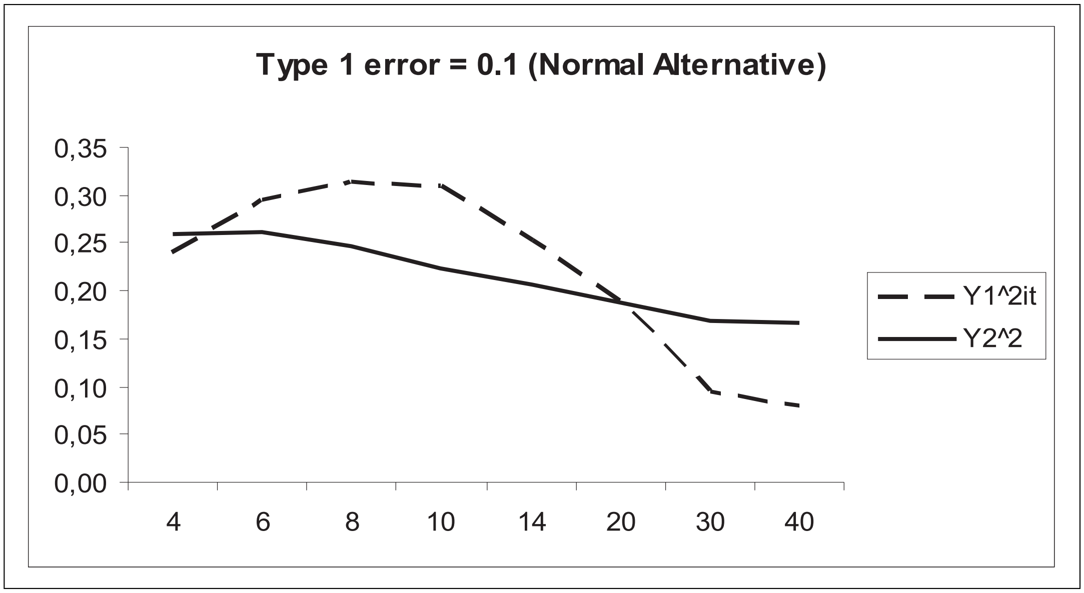


Figure 2.

Moreover, after such improvement the power of the Dzaparidze-Nikulin test $\mathbf{U}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ is increased compared to $\mathbf{U}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ for the considered number of intervals and the normal alternative.

**4. C o n c l u s i o n.** When testing a compound null hypothesis about the logistic distribution, one may use the Mirvaliev test $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ based on $r$ equiprobable intervals with random ends ($r = 6, ..., 14$). It should be noted that for the considered case the power of the Anderson-Darling test $\mathbf{A^2}$ is greater or equal (for the uniform distribution) than the power of the chi-squared type statistics. At the same time there is a possibility to use the Nikulin-Rao-Robson statistic $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ after improving of non-effective MME of the unknown parameter $\boldsymbol{\theta}$.

## REFERENCES

1. **Fisher R.A.** //Atti de Congresso Internazionale di Mathematici. Bologna. 1928. V.6. P.94–100.

2. **Cramer H.** Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press. 1946.

3. **Dzhaparidze K.O., Nikulin M.S.** // Theory of Probability and its Applications. 1974. V.19, № 4. P.851–852.

4. **Mirvaliev M.** An investigation of generalized chi-squared type statistics. Doctoral thesis. Academy of Science. Tashkent, 2001.

5. **Fisher R.A.** // Proc. Cambridge Philos.Soc. 1925. V. 22. P.700–725.

6. **Nikulin M.S.** // Theory of Probability and its Applications. 1973. V. 18, № 3. P.559–568.

7. **Nikulin M.S.** // Theory of Probability and its Applications. 1973. V. 18, № 3. P.638–639.

8. **Rao K.C., Robson D.S.** // Commun. in Statistics. 1974. V. 3. P.1139–1153.

9. **Colin Chen** // Commun. Statist.-Simula. 2002. V. 31(1). P.1509–1519.

10. **Aguirre N., Nikulin M.S.** // Kybernetika. 1994. V. 30. P.214–222.

11. **Voinov V.G., Naumov A., Pya N.Y.** // Proceedings of International Conference on Advances in Statistical Inferential Methods. Almaty, 2003. P.233–247.

12. **Pya N.Y.** // Mathematical Journal. Institute of Mathematics. Almaty. 2004. V. 4, № 1(11). P.66–72.

*Поступила в редакцию 13.04.2004г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 76 – 82*

*УДК 531.36:517.929*

# К МЕТОДУ К.П.ПЕРСИДСКОГО В ЗАДАЧАХ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ.

А. С. Андреев

Ульяновский государственный университет
432970 Россия г.Ульяновск ул. Л.Толстого, 42 AndreevAS@ulsu.ru

**1. О неустойчивости нулевого решения неавтономной системы.** Рассмотрим систему, движение которой описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ — вектор $n$-мерного действительного пространства $R^n$ с нормой $||\mathbf{x}||' = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$, (штрих означает транспонирование), $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ — вектор-функция, определенная и непрерывная в области $R^+ \times \Gamma$, $R^+ = [0, +\infty)$ — действительная полуось, $\Gamma \subset R^n$ — открытая область, содержащая точку $\mathbf{x} = 0$.

Допустим, что правая часть системы (1.1) $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица. Для любого компактного множества $K \subset \Gamma$ найдется число $L = L(K)$ такое, что

$$||\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_2) - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_1)|| \leq L||\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|| \tag{1.2}$$

для любого $t \in R^+$ и любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$.

Отсюда следует, что для каждого начального условия $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $(t_0, \mathbf{x}_0) \in R^+ \times \Gamma$ существует единственное решение системы (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$.

Кроме того, из предположения (1.2) и условия $\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0$ следует, что вектор-функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ ограничена по $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times K$, для каждого компактного множества $K \subset R^n$ существует $M = M(K)$ такое, что для всех $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times K$ выполняется неравенство $\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leq M$.

Для выявления свойств положительного предельного множества $\omega^+(t_0, \mathbf{x_0})$ решения системы (1.1) строится следующая топологическая динамика неавтономной системы [1–5].

Для каждого компактного множества $K$ и каждого малого $\varepsilon > 0$ зафиксируем числа

$$L_K = L(K) \;\text{ и }\; \delta_K = \frac{\varepsilon}{LM}. \tag{1.3}$$

Пусть $F$ есть семейство функций $\mathbf{X} : R \times \Gamma \to R^n$, непрерывных по $\mathbf{x}$ при фиксированном $t \in R$, измеримых по $t$ при фиксированном $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условиям: для каждой функции

Keywords: *Instability,functional differential equation, Persidsky method*
2000 Mathematics Subject Classification: 70H14, 70K20, 74H55

$\mathbf{X}$ на каждом компактном множестве $K \subset \Gamma$ найдутся две локально интегрируемые функции $\lambda_K(t)$ и $\eta_K(t)$ ($\lambda_K$, $\eta_K \in L_1$) такие что

$$\|\mathbf{X}(t,\mathbf{x})\| \le \lambda_K(t), \quad \|\mathbf{X}(t,\mathbf{x}_2) - \mathbf{X}(t,\mathbf{x}_1)\| \le \eta_K(t)\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$$

для всех $(t,\mathbf{x})$, $(t,\mathbf{x}_1)$, $(t,\mathbf{x}_2) \in R\times K$, при этом функции $\lambda_K(t)$ и $\eta_K(t)$ таковы, что для любого $t \in R$ и любого измеримого множества $E \subset [t,t+1]$ с мерой $\mu(E) \le \delta_K$ выполнены неравенства

$$\int\limits_E \lambda_K(\tau)d\tau \le \varepsilon, \quad \int\limits_t^{t+1} \eta_K(\tau)d\tau \le L_K,$$

где числа $L_K$ и $\delta_K$ фиксированы в соотношениях (1.3).

Посредством некоторой метрики семейство $F$ может быть представлено как компактное метрическое пространство. Семейство сдвигов $\{\mathbf{X}_\tau(t,\mathbf{x}) = \mathbf{X}(t+\tau,\mathbf{x}),\ \tau \in R\}$ каждой функции $\mathbf{X} \in F$, в том числе и правой части системы (1.1) (продолженной при необходимости для всех $t \in R$), оказывается предкомпактным в $F$. Соответственно определяется семейство предельных систем (зависимое от выбора последовательности $t_c \to +\infty$)[2]

$$\{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\lim_{l\to+\infty}\int\limits_0^t \mathbf{X}(t_l+\tau,\mathbf{x})d\tau. \tag{1.4}$$

Функция $\mathbf{X}^* : R\times\Gamma \to R^n$ в соответствии с этим определением и в силу условия (1.3) будет такова, что для каждой точки $(t_0,\mathbf{x}_0) \in R\times\Gamma$ решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ системы (1.4) является также единственным.

Введение предельных систем (1.4) позволяет определить следующее свойство квазиинвариантности положительного предельного множества $\omega^+(t_0,\mathbf{x}_0)$ решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ системы (1.1) относительно семейства предельных систем (1.4).

**Т е о р е м а 1. 1.** *[3,4] Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ — решение системы (1.1), определенное и ограниченное некоторым компактом $K \subset \Gamma$, $\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0) \in K$ при всех $t \ge t_0$.*

*Тогда для каждой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0,\mathbf{x}_0)$ существует предельная система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x})$ и решение этой системы $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $-\infty < t < +\infty$ такое, что $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{p}, \mathbf{x}^*(t) \in \omega^+(t_0,\mathbf{x}_0)$ для всех $t \in R$.*

Это свойство системы (1.1) аналогично свойству инвариантности множества $\omega^+(\mathbf{x}_0)$ решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ автономной системы $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$ [7].

Как показано в работах [5,6], существование функции Ляпунова $V = V(t,\mathbf{x})$ с производной $\dot{V}(t,\mathbf{x}) \le -W(t,\mathbf{x}) \le 0$ позволяет вывести новые способы исследования асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы (1.1), развивающие известные теоре-мы А.М.Ляпунова, Н.Г.Четаева, Н.Н.Красовского и др. [8-12].

Предположим, что для системы (1.1) известна некоторая непрерывная функция Ляпунова $V : R^+\times\Gamma \to R^+$, верхняя правосторонняя производная [7] которой в силу системы (1.1) $\dot{V}^+(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет для всех $(t,\mathbf{x}) \in R^+\times\Gamma$ неравенству

$$\dot{V}^+(t,\mathbf{x}) \ge W(t,\mathbf{x}) \ge 0,$$

где $W : R^+\times\Gamma \to R^+, W(t,0) = 0$ есть некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|W(t,\mathbf{x}_2) - W(t,\mathbf{x}_1)| \le L_W(K)\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|,$$

для любых $(t, \mathbf{x}_2), (t, \mathbf{x}_1) \in R^+ \times K$ и для каждого компакта $K \subset \Gamma$. При этом условии семейство сдвигов $\{W_\tau(t, \mathbf{x}) = W(\tau + t, \mathbf{x}), \tau \in R\}$ предкомпактно и соответственно предельной системе (1.4) можно определить предельную функцию

$$W^*(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \lim_{j \to \infty} \int_0^t W(t_{l_j} + \tau, \mathbf{x}) d\tau$$

и предельную пару $(\mathbf{X}^*, W^*)$ [5].

Соответственно предельной паре для каждого $t \in R$ и каждого $c \in R^+$ вводится предельное множество [5]

$$V_\infty^{-1}(t, c) = \{\mathbf{x} \in \Gamma : \exists \mathbf{x}_j \to \mathbf{x} : V(t_{l_j} + t, \mathbf{x}_j) \to c \text{ при } j \to \infty\}.$$

Известная теорема Н.Г.Четаева [11] о неустойчивости была обобщена К.П.Персидским в работах [13, 14] на основе введения понятия сектора.

**О п р е д е л е н и е 1. 1.** *[13] Пусть область $D \subset G$ такова, что для каждого $\tau \in R^+$ замыкание $\bar{D}(\tau)$ содержит точку $\mathbf{x} = 0$ и хотя бы одну точку с $\|\mathbf{x}\| = h > 0$. Область $D$ есть сектор, если для любого $t_0 \geq 0$ и для любого положительного числа $\varepsilon$, $\varepsilon < h$ найдется внутренняя точка $\mathbf{x}_0 \in \{0 < \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ такая, что решение системы (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ будет оставаться внутри $D$ для всех $t \geq t_0$, при которых $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < h$.*

Обозначив через $\bar{D}_\infty$ множество точек $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$, для каждой из которых существуют последовательности $t_l \to +\infty$ и $\{\mathbf{x}_l \in D(t_l), \mathbf{x}_l \to \mathbf{x}\}$, покажем, что теорему К.П. Персидского [13] можно развить следующим образом.

**Т е о р е м а 1. 2.** *Предположим, что*
*1) существует сектор $D$ и функция $V = V(t, \mathbf{x})$, ограниченная в этом секторе и принимающая для каждой точки $\mathbf{x} \in D(t_0)$ значение $V(t_0, \mathbf{x}) > 0$;*
*2) производная функции в области $D \cap \{V > 0\}$ удовлетворяет неравенству $\dot{V}^+(t, \mathbf{x}) \geq W(t, \mathbf{x}) \geq 0$;*
*3) существует последовательность $t_l \to +\infty$, для которой предельная пара $(\mathbf{X}_0^*, W_0^*)$ и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ таковы, что множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = const > 0\} \cap \{W_0^*(t, \mathbf{x}) = 0\} \cap \bar{D}_\infty$ не содержит решений системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_0^*(t, \mathbf{x})$.*
*Тогда нулевое решение системы (1.1) неустойчиво.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть для произвольного малого $\varepsilon > 0$ $\mathbf{x}_0$ есть точка сектора $D(t_0)$ $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| < \varepsilon\} \cap D(t_0)$ с решением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, существующим согласно определению сектора, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ для всех $t \geq t_0$, при которых $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < h_l$. Согласно условию 1) имеем $V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$.

Предположим, что это решение ограничено, так что для некоторого $h_1$, $0 < h_1 < h$ $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq h_1$ для всех $t \geq t_0$. Тогда из условий 1) и 2) следует существование предела

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) = V_1 \geq V_0 > 0. \tag{1.5}$$

По теореме 1.1 последовательность функций $\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{x}(t_l + t, t_0, \mathbf{x}_0)$ будет сходиться к решению $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in R$ предельной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_0^*(t, \mathbf{x})$ (равномерно по $t \in [-\beta, \beta]$, $\beta > 0$).

Из соотношения (1.5) предельным переходом при $t_l \to +\infty$ для каждого $t \in R$ получаем

$$\lim_{l \to \infty} V(t_l + t, \mathbf{x}_l(t)) = \lim_{l \to \infty} V(t_l + t, \mathbf{x}(t_l + t, t_0, \mathbf{x}_0)) = V_1 > 0$$

и, значит, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = V_1 = const > 0\}$ для $t \in R$.

Из неравенства $\dot V^+(t,\mathbf{x}) \geq W(t,\mathbf{x}) \geq 0$ для каждого $t \in R$ находим для функции $V[t] = V(t,\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0))$

$$V[t_l+t]-V[t_l-t] \geq \int_{t_l-t}^{t_l+t} W(\tau,\mathbf{x}(\tau,t_0,\mathbf{x}_0))d\tau =$$

$$= \int_{-t}^{t} W(t_l+\tau,\mathbf{x}(t_l+\tau,t_0,\mathbf{x}_0))d\tau = \int_{-t}^{t} W_l(\tau,\mathbf{x}_l(\tau))d\tau \geq 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $l \to \infty$, имеем

$$0 \geq \int_{-t}^{t} W^*(\tau,\boldsymbol{\varphi}(\tau))d\tau \geq 0$$

и, значит, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \{W^*(t,\mathbf{x}) = 0\}$ для всех $t \in R$.

Таким образом, находим решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ предельной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_0^*(t,\mathbf{x})$, содержащееся в множестве $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = const > 0\} \cap \{W_0^*(t,\mathbf{x}) = 0\} \cap \bar D_\infty$ для всех $t \in R$. А это противоречит условию 3) теоремы.

Ряд работ (см. [7])посвящен систематическому подходу исследования неустойчивости. Этот подход основан на развитии результатов Н.Г.Четаева и теории секторов К.П. Персидского. В дополнение к [7] могут быть получены следующие результаты.

Пусть $G_h = [0,+\infty[\cup\Gamma_h, \quad \bar\Gamma_h = \{\|\mathbf{x}\| \leq h > 0\} \subset \Gamma$ и пусть $D(t,\mathbf{x}) \subset G_h$ есть некоторое множество. Обозначим $D(t) = \{\mathbf{x} \in \Gamma_h : (t,\mathbf{x}) \in D\}$, $D^* = \{(t,\mathbf{x}) \in D; \quad \mathbf{x} \neq 0\}$; $\bar D(\tau)$ — замыкание $D$ для $t = \tau = const$, $\bar D_\infty$ — множество точек $\mathbf{x} \in \Gamma_h$ таких, что существуют последовательности $t_l \to +\infty$ и $\{\mathbf{x}_l \in D(t_k),\ \mathbf{x}_l \to \mathbf{x}\}$.

**О п р е д е л е н и е 1. 2.** *Множество $D$ называется экспеллером, если для любого малого $\delta > 0$ найдется точка $\mathbf{x}_0 \in D^*(t_0) \cap \{\|\mathbf{x}\| \leq \delta\}$ такая, что для решения системы (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ $(t_0 \leq t < \alpha)$ найдется значение $t^*$, $t_0 < t^* < \alpha$, для которого $(\mathbf{x}(t^*,t_0,\mathbf{x}_0) \notin D$. Множество $D$ есть абсолютный экспеллер, если указанное свойство имеет место для каждой точки $\mathbf{x}_0 \in D^*(t_0) \cap \{\|\mathbf{x}\| \leq \delta\}$.*

**Т е о р е м а 1. 3.** *Предположим, что*
*1) существует функция $V = V(t,\mathbf{x})$, принимающая при любом малом $\delta > 0$ в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| \leq \delta\} \cap D^*(t_0)$ значение $V(t_0,\mathbf{x}_0) > 0$, ограниченная в области $D \cap \{V(t,\mathbf{x}) > 0\}$;*
*2) производная функции в области $D \cap \{V(t,\mathbf{x}) > 0\}$ удовлетворяет неравенству $\dot V^+(t,\mathbf{x}) \geq W(t,\mathbf{x}) \geq 0$;*
*3) существует последовательность $t_l \to +\infty$, для которой предельная пара $(\mathbf{X}_0^*, W_0^*)$ и множество $V_\infty^{-1}(t,c)$ таковы, что множество $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = const > 0\} \cap \{W_0^*(t,\mathbf{x}) = 0\} \cap \bar D_\infty$ не содержит решений системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_0^*(t,\mathbf{x})$.*

Тогда множество $D$ — экспеллер.

**Т е о р е м а 1. 4.** *Если из условия 1) теоремы 1.3 значение функции $V(t_0,\mathbf{x}_0) > 0$ для каждой точки $\mathbf{x}_0 \in \{\|\mathbf{x}\| \leq \delta\} \cap D^*(t_0)$ и выполнены все остальные условия, то множество $D$ — абсолютный экспеллер.*

**З а м е ч а н и е 1. 1.** *Множество $\bar D_\infty$ в условиях 3) теорем 1.2–1.4 может быть уточнено. Теоремы справедливы, если множество $\bar D_\infty$ определяется по отношению к фиксированной паре $(\mathbf{X}_0^*, W_0^*)$ следующим образом: $\bar D_\infty(t) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$, существует последовательность точек $\{\mathbf{x}_l \in D(t_l+t), \mathbf{x}_l \to \mathbf{x} \in \bar D_\infty(t)\}$.*

## 2. О н е у с т о й ч и в о с т и п о л о ж е н и я р а в н о в е с и я м е х а н и ч е с к о й с и с т е м ы.

Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными связями, положение которой определяется обобщенными координатами $\mathbf{q} \in R^n$. Кинетическая энергия системы $2T = \dot{\mathbf{q}}' A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, где вектор $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ обозначен как вектор-столбец, $A(\mathbf{q})$ есть $(n \times n)$-матрица, положительно-определенная для всех $\mathbf{q} \in R^n$ так, что имеет место матричное неравенство $A(\mathbf{q}) \geq A = a_0 E$, $a_0 = const > 0$, $E$ — единичная матрица.

Движение системы под действием потенциальных сил может быть описано уранвнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}, \tag{2.1}$$

где $\Pi = \Pi(t, \mathbf{q})$ — потенциальная энергия.

Пусть $\partial\Pi/\partial\mathbf{q} = 0$ при $\mathbf{q} = 0$ так, что система имеет положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$. Допустим, что в некоторой достаточно малой окрестности $\mathbf{q} = 0$ функция $\Pi = \Pi(t, \mathbf{q})$ принимает отрицательные значения, при этом $\partial\Pi/\partial t \leq 0$ для всех $(t, \mathbf{q})$ таких, что $\Pi(t, \mathbf{q}) < 0$. Для производной от полной энергии $T + \Pi$ в области $\{\mathbf{q} : \Pi(t, \mathbf{q}) < 0\}$ будем иметь $d(T + \Pi) = \partial\Pi/\partial t \leq 0$. Отсюда следует, что множество $\{(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) : \dot{\mathbf{q}} \in R^n, \Pi(t, \mathbf{q}) < 0, t \in R\}$ является сектором по К.П.Персидскому.

Допустим, что для всех $\mathbf{q} \in \{\Pi(t, \mathbf{q}) < 0\}$ выполняется неравенство

$$\mathbf{q}' \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \leq 0.$$

Тогда для производной функции $V = \mathbf{q}' \cdot \partial T/\partial\dot{\mathbf{q}}$ в области $\{\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} : \dot{\mathbf{q}} \in R^n, \Pi(t, \mathbf{q}) < 0\}$ будем иметь

$$\dot{V} = 2T - \mathbf{q}' \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \geq 0.$$

На основании теоремы 1.2. находим, что при данных предположениях относительно потенциальной энергии $\Pi(t, \mathbf{q})$ нулевое положение равновесия системы (2.1) будет являться неустойчивым.

**3. К задаче о неустойчивости функционально-дифференциального уравнения.** Пусть $R = ]-\infty, +\infty[$ есть действительная ось, $R^+ = [0, +\infty[$, $R^n$ есть действительное линейное пространство $n$-векторов $\mathbf{x}$ с нормой $|\mathbf{x}|$, $h > 0$ – некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ – банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [\alpha, \beta] \to R^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup(|\boldsymbol{\varphi}(s)|, \alpha \leq s \leq \beta)$, $C_H = \{\boldsymbol{\varphi} \in C_{[-h,0]} : \|\boldsymbol{\varphi}\| < H\}$, для непрерывной функции $\mathbf{x} : ]-\infty, +\infty[ \to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $\mathbf{x}_t \in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t + s)$ для $-h \leq s \leq 0$, под $\dot{\mathbf{x}}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с конечным запаздыванием

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t), \qquad \mathbf{f}(t, 0) \equiv 0, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{f} : R^+ \times C_H \to R^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений (3.1).

В зависимости от условий теорем будем предполагать, что правая часть уравнения (3.1) удовлетворяет следующим первому или первому-второму предположениям.

**Предположение 3. 1.** Для каждого числа $r$, $0 < r < H$ существует $M = M(r)$ такое, что для $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \bar{C}_r$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi})| \leq M. \tag{3.2}$$

**Предположение 3. 2.** Для каждого компактного множества $K \subset C_H$ функция $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi})$ равномерно непрерывна по $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times K$, т.е. для любого $K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что для любых $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times K$; $(t_1, \boldsymbol{\varphi}_1)$, $(t_2, \boldsymbol{\varphi}_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2 \in K : \|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\| < \delta$ выполняются неравенства

$$|\mathbf{f}(t_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{f}(t_1, \boldsymbol{\varphi}_1)| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

При этом уравнение (3.1) будет предкомпактным в некотором пространстве $F$ непрерывных функций $\mathbf{f} : R^+ \times \Gamma \to R^n$, где $\Gamma-$ некоторое множество в $\Lambda$, содержащее множество $\{\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi} \in \Lambda, t \geq \alpha + h\}$ [15].

Функция $\mathbf{f}^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ называется предельной к $\mathbf{f}$, если существует последовательность $t_l \to +\infty$, такая, что $\{\mathbf{f}^{(l)}(t, \boldsymbol{\varphi}) = f(t_n + t, \boldsymbol{\varphi})\}$ сходится к $\mathbf{f}^*(t, \boldsymbol{\varphi})$ в $F$. Замыкание семейства $\{\mathbf{f}^\tau : \tau \in R^+\}$ в $F$ называется оболочкой $S^+(\mathbf{f})$. Уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t) \tag{3.4}$$

называется предельным к (3.1).

Пусть $V(t, \boldsymbol{\varphi}) : R^+ \times \Lambda \to R$ — некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов [16]. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ — некоторое решение (3.1), определенное для всех $t \geq \alpha - h$. Тогда для $V(t) = V(t, \mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}))$ можно определить верхнюю правостороннюю производную

$$\dot{V}^+(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{1}{h}(V(\alpha + h) - V(\alpha)).$$

Допустим, что для производной $\dot{V}^+$ имеет место следующая оценка [17]

$$\dot{V}^+(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -W(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0, \quad \forall (t, \boldsymbol{\varphi}) \in R \times \Lambda,$$

где непрерывный функционал $W = W(t, \boldsymbol{\varphi})$ ограничен и равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, $K$ – компакт из $\Lambda$.

**О п р е д е л е н и е 3. 1.** *Пусть $t_l \to +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t, c) \subset \Lambda$ следующим образом: точка $\boldsymbol{\varphi} \in V_\infty^{-1}(t, c)$, если существует последовательность $\{\boldsymbol{\varphi}_l \in \Gamma, \boldsymbol{\varphi}_l \to \boldsymbol{\varphi}\}$ такая, что $\lim_{l \to +\infty} V(t + t_l, \boldsymbol{\varphi}_l) = c$.*

Как и в случае $f(t, \boldsymbol{\varphi})$ при условиях типа (3.2) и (3.3) относительно $W(t, \boldsymbol{\varphi})$ семейство сдвигов $\{W^\tau(t, \boldsymbol{\varphi}), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором функциональном пространстве непрерывных функций $F_G = \{G : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

**О п р е д е л е н и е 3. 2.** *Функция $W^* \in F_G$ называется предельной к $W$, если существует последовательность $t_l \to +\infty$ такая, что $\{W^{(l)}(t, \boldsymbol{\varphi}) = W(t_l + t, \boldsymbol{\varphi})\}$ сходится к $W^*(t, \boldsymbol{\varphi})$ в $F_G$. При этом множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое той же последовательностью $t_l \to +\infty$, определим как соответствующее $W^*$.*

**О п р е д е л е н и е 3. 3.** *Пусть $D$ есть область, содержащаяся в $C_H$, $\bar{D}$ содержит точку $\boldsymbol{\varphi} = 0$ и для некоторого $r > 0$ хотя бы одну точку $\boldsymbol{\varphi}$ такую, что $||\boldsymbol{\varphi}|| = r$. Область $D$ есть сектор, для любого $\delta$, $0 < \delta < r$, найдутся момент $\alpha \geq 0$ и точка $\boldsymbol{\varphi}$, $||\boldsymbol{\varphi}|| < \delta$ такие, что решение $\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \in D$ для всех $t \geq \alpha$, при которых $||\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})|| < r$.*

**Т е о р е м а 3. 1.** *Предположим, что при условии (3.2) также*

*1) существуют сектор $D$ и функционал $V = V(t, \boldsymbol{\varphi})$ такие, что для некоторого $\alpha \in R^+$ и всех $\boldsymbol{\varphi} \in D$ $V(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) > 0$;*

*2) производная $\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) \geq W(t, \boldsymbol{\varphi}) \geq 0$ для всех $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times D$;*

*3) существует последовательность $t_l \to +\infty$ такая что $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = const > 0\} \bigcap \{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\} \bigcap \bar{D} = \varnothing$.*

*Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ уравнения (3.1) неустойчиво.*

**Т е о р е м а 3. 2.** *Предположим, что при условиях (3.2), (3.3) и условиях 1) и 2) теоремы 3.1 также существует последовательность $t_l \to +\infty$, для которой предельная пара $(\mathbf{f}^*, W^*)$ и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ таковы, что множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = const > 0\} \bigcap \{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\} \bigcap \bar{D}$ не содержит решений уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$.*

*Тогда решение уравнения (3.1) $\mathbf{x} = 0$ неустойчиво.*

**О п р е д е л е н и е 3.4.** *Множество $D \subset C_H$ называется экспеллером, если для любого малого $\delta > 0$ существует точка $\boldsymbol{\varphi}_0 \in D \bigcap \{||\boldsymbol{\varphi}|| < \delta\}$ такая, что для соответствующего решения уравнения (3.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi}_0)$, $\alpha - h \le t < \beta$ найдется момент $t = \gamma < \beta$, при котором $\mathbf{x}_\gamma(\alpha, \boldsymbol{\varphi}_0) \notin D$. Множество $D$ есть абсолютный экспеллер, если указанное свойство имеет место для каждой точки $\boldsymbol{\varphi}_0 \in D \bigcap \{||\boldsymbol{\varphi}|| \le \delta\}$.*

**Т е о р е м а 3. 3.** *Предположим, что выполнены условия (3.2) и (3.3), а также:*

*1) существует функционал $V = V(t, \boldsymbol{\varphi})$, принимающий при любом малом $\delta > 0$ в некоторой точке $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \{||\boldsymbol{\varphi}|| \le \delta\} \bigcap D$ значение $V(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) > 0$, ограниченный в области $\{V(t, \boldsymbol{\varphi}) > 0\} \bigcap D$;*

*2) производная $\dot V(t, \boldsymbol{\varphi}) \ge W(t, \boldsymbol{\varphi}) \ge 0$ в области $\{V(t, \boldsymbol{\varphi}) > 0\} \bigcap D$;*

*3) существует последовательность $t_l \to +\infty$, для которой предельная пара $(f^*, W^*)$ и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ таковы, что множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = const > 0\} \bigcap \{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\} \bigcap \bar D$ не содержит решений уравнения $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}_t)$.*

*Тогда множество $D$ — экспеллер.*

**Т е о р е м а 3. 4.** *Если в условии 1) теоремы 3.3 имеем $V(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) > 0$ для всех $\boldsymbol{\varphi} \in \{||\mathbf{x}|| \le \delta\} \bigcap D$, тогда множество $D$ — абсолютный экспеллер.*

Теоремы 3.1 – 3.4 развивают и обобщают известные теоремы из [13, 14] на случай функционально-дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00877) и ведущей научной школы (проект НШ-2000-2003.1 )

## Цитированная литература


1. **Sell G. R.** // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 241–283.
2. **Artstein Z.** // J. Differential Equations. 1977. V.23, № 2. P.216–223.
3. **Artstein Z.** // J. Differential Equations. 1978. V. 27, № 2. P. 172–189.
4. **Андреев А.С.** //Прикладная математика и механика. 1979. Т.49, № 5. С.796–805.
5. **Андреев А.С.** //Прикладная математика и механика. 1984. Т.48, № 2. С.225–232.
6. **Andreev A.** // Rend/Seminario.Mat.Univ.Padova. 1986. V.75, P.235–245.
7. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.
8. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
9. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. Л., 1950.
10. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М., 1966.
11. **Румянцев В.В.** //Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19, №5. С.739–776.
12. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. М., 1955.
13. **Персидский К.П.** //Изв. Акад.наук Казах. ССР. Серия мат. и мех. 1947. Т.42. С.48–55.
14. **Персидский К.П.** //УМН.1946. Т.1. Вып.5. С.250–255.
15. **Андреев А.С., Хусанов Д.Х.** // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34, №34. С.435–440.
16. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
17. **Андреев А.С., Хусанов Д.Х.** //Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34, №7. С.876–885.


*Поступила в редакцию 29.09.2003г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 83 — 93*

*УДК 517.9*

# О НЕКОТОРЫХ КУСОЧНО–ГЛАДКИХ ГОМЕОМОРФИЗМАХ ОКРУЖНОСТИ

Х. Ахадкулов

703004 Узбкистан г.Самарканд

**1. В в е д е н и е.** В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы с особенностями типа излома, т.е. отображения, гладкие всюду за исключением нескольких точек, в которых происходит разрыв первой производной. Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $T_f x$ единичной окружности

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0,1), \tag{1}$$

где скобка $\{\cdot\}$ означает дробную часть числа, а $f(x)$ — поднятие, определяющее $T_f$, которое удовлетворяет следующим условиям:
$a_1$) $f(x)$ — непрерывная, строго возрастающая функция;
$a_2$) $f(x+1) = f(x)+1$ для любого $x \in R^1$;
$a_3$) гомеоморфизм $T_f$ в точках $x_{p_i} = T^{p_i} x_0, \quad i = \overline{0,m}, \quad p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ имеет изломы. Кроме того, существуют конечные односторонние производные $f'(x_{p_i}\pm) > 0$ и $\frac{f'(x_{p_i}-0)}{f'(x_{p_i}+0)} = c_i(f) \neq 1, \quad i = \overline{0,m}$;
$a_4$) $f(x) \in C^2\left(S^1 \setminus \{x_{p_i}, i = \overline{0,m}\}\right), \quad f'(x) \geq const > 0, \quad x \in S^1 \setminus \{x_{p_i}\, i = \overline{0,m}\}$;
$a_5$) $\prod\limits_{i=0}^{m} c_i = c \neq 1$.

**З а м е ч а н и е.** *Условие $a_4$) означает, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^2$ на каждой связной компоненте множества $S^1 \setminus \{x_{p_i}\ , i = \overline{0,m}\}$. Вообще говоря, функция $f(x)$ определена с точностью до аддитивной целой константы, но мы устраним эту неоднозначность условием $0 \leq f(0) < 1$. Пуанкаре показал, что для любого $x_0 \in R^1$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n} = \rho \quad (\text{см.}[1]).$$

Здесь и далее $f^{(n)}(x)$ обозначает $n$-ую итерацию функции $f$. Число $\rho$, называемое числом вращения, не зависит от выбора $x_0$ и является важнейшей характеристикой гомеоморфизма $T_f$.

Условие $a_1) - a_4$) означает, что функция $f(x)$ определяет кусочно-гладкий гомеоморфизм окружности, достаточно гладкий всюду за исключением $m+1$ точек окружности, в которых

Keywords: *piecewise smooth homeomorphisms of a circle, singular and ergodic invariant messure*
2000 Mathematics Subject Classification: 58A05

имеются скачки первой производной или изломы. Пусть число вращения $\rho$ иррационально. Тогда отображение $T_f$ является строго эргодическим, т.е. обладает единственной вероятностной инвариантной мерой $\mu$. В теории гомеоморфизмов окружности важным является проблема абсолютной непрерывности инвариантной меры $\mu$ относительно меры Лебега $\lambda$. Для класса диффеоморфизмов окружности в этом направлении получено много фундаментальных и глубоких результатов (В.И. Арнольд [2], Ю. Мозер [3], М. Эрман [4], Й. Йокоз [5]). Наиболее сильные результаты здесь были получены Орнстейном и Катцельсоном [6], Ханиным и Синаем [7], и Старком [8].

Гомеоморфизмы окружности с одной точкой излома впервые были изучены в работе Вул и Ханина [9]. Такие гомеоморфизмы занимают промежуточное место между диффеоморфизмами и критическими отображениями окружности. С одной стороны, для однопараматрических семейств гомеоморфизмов с особенностями типа излома множество значений параметра, отвечающих иррациональным числам вращения, имеет лебегову меру нуль, а сама динамика характеризуется нетривиальными масштабными преобразованиями или скейлингами [9]. В работе Джалилова и Ханина [10] доказано, что если гомеоморфизм $T_f$ имеет одну точку излома $x_0$, $f(x) \in C^{2+\varepsilon}\left(S^1 \setminus \{x_0\}\right)$ при некотором $\varepsilon > 0$, и число вращения $\rho$ иррационально, то инвариантная мера $\mu$ сингулярна относительно меры Лебега $\lambda$, т.е. существует измеримое подмножество $A$ окружности, $A \subset S^1$ такое, что $\mu(A) = 1$, $\lambda(A) = 0$. В настоящей работе этот результат обобщается для кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с несколькими точками излома.

**Т е о р е м а 1.** *Пусть функция $f(x)$, определяющая гомеоморфизм $T_f$, удовлетворяет условиям $a_1) - a_5)$ и число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально. Тогда инвариантная мера $\mu$ сингулярна относительно меры Лебега $\lambda$.*

Отметим, что идея доказательства теоремы 1 с небольшими изменениями аналогична доказательству основной теоремы работы [10].

Теперь рассмотрим гомеоморфизм окружности $T_f$ с определяющей функцией $f(x)$, удовлетворяющей условиям $a_1) - a_2)$, а также условиям

$a_3')$ в точках $z^{(i)} \in S^1$, $i = \overline{1,r}$, $z^{(1)} < z^{(2)} < \ldots < z^{(r)}$ существуют конечные односторонние производные $f'(z^{(i)} \pm 0) > 0$ и $\frac{f'(z^{(i)}-0)}{f'(z^{(i)}+0)}) = c^{(i)} \neq 1, \quad i = \overline{1,r}$;

$a_4')$ $f(x) \in C^2\left(S^1 \setminus \{z^{(i)}, i = \overline{1,r}\}\right)$, $f'(x) \geq \mathrm{const} > 0$ для любого $x \in S^1 \setminus \{z^{(i)}, i = \overline{1,r}\}$.

Из единственности инвариантной меры $\mu$ легко вытекает ее эргодичность.

**О п р е д е л е н и е 1.** *Измеримое подмножество $A \subset S^1$ называется $T_f$–инвариантным, если $T_f^{-1}A = A$.*

**О п р е д е л е н и е 2.** *Гомеоморфизм $T_f$ называется эргодическим относительно меры Лебега $\lambda$, если любое $T_f$–инвариантное множество $A$ имеет лебегову меру 0 или 1.*

**Т е о р е м а 2.** *Предположим, что функция $f(x)$, определяющая гомеоморфизм $T_f$, удовлетворяет условиям $a_1) - a_2)$, $a_3') - a_4')$ и число вращения $\rho$ иррационально. Тогда гомеоморфизм $T_f$ является эргодическим относительно меры Лебега $\lambda$.*

**2. Н е о б х о д и м ы е о п р е д е л е н и я и ф а к т ы.** Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $T_f$ определяемый функцией $f(x)$, $x \in R^1$

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1.$$

Пусть число вращения $\rho$, отвечающее $T_f$, иррационально. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим траекторию этой точки под действием $T_f$, т.е. множество точек $\{x_i = T_f^i x_0,\ i \in Z^1\}$. Согласно классической теореме Пуанкаре (см. [1]) порядок точек вдоль траектории будет в точности таким же, как и для линейного $T_\rho$, т.е. для последовательности $\overline{x}_i = \{x_0 + \rho i\}$, $i \in Z^1$. Это важное свойство позволяет определить систему естественных разбиений окружности, связанных с разложением $\rho$ в непрерывную дробь. Пусть $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots]$ и $\frac{p_n}{q_n} =$

$[k_1, k_2, \ldots, k_n]$, $n \geq 1$. Числа $\frac{p_n}{q_n}$ называются подходящими дробями для $\rho$. Числитель $p_n$ и знаменатель $q_n$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = 1;$$
$$q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = k_1.$$

Для произвольной точки $x_0 \in S^1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ замкнутый интервал, концами которого служат точки $x_0$ и $x_{q_n} = T^{q_n} x_0$. Заметим, что при нечетном $n$ точка $q_n$ лежит слева от $x_0$, а при четном $n$ — справа. Через $\Delta_i^{(n)}(x_0)$ обозначим итерации интервала $\Delta_0^{(n)}(x_0)$, т.е. $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i \Delta_0^{(n)}(x_0), \quad i \geq 1$.

**Л е м м а 2.1.** *(см. [7]). Пусть $x_0 \in S^1$. Отрезок траектории этой точки $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ разбивает окружность на непересекающиеся ( за исключением концевых точек) отрезки $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n, \quad \Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j < q_{n-1}$.*

Лемма 2.1 носит по существу арифметический характер, поскольку структура разбиения определятся порядком точек траектории $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$, который совпадает с порядком точек для линейного поворота $T_\rho$. Возникающее разбиение обозначим через $\xi_n(x_0)$ и назовем динамическим разбиением $n$-го порядка. Ниже мы кратко опишем структуру динамических разбиений. При переходе от $\xi_n(x_0)$ к $\xi_{n+1}(x_0)$ происходит следующее. Все отрезки $n$ -го ранга сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_i^{(n-1)}(x_0), \quad 0 \leq i < q_n$ разбивается на $k_n + 1$ отрезков.

**Л е м м а 2.2.** *Пусть в точках $z^{(i)} \in S^1, \quad i = \overline{1, r}$, где $z^{(1)} < z^{(2)} < \cdots < z^{(r)}$, существуют конечные односторонние производные $f'(z^{(i)} \pm 0)$, $f \in C^1\left([z^{(i)}; z^{(i+1)}]\right)$, $1 \leq i \leq r$. Здесь $z^{(r+1)} = z^{(1)} + 1$ и $\overline{v} = \sum\limits_{i=1}^{r} var_{[z_i, z_{i+1}]} \ln f' < \infty$. Положим $v = \overline{v} + \sum\limits_{i=1}^{r} |\ln f'(z^i - 0) - \ln f'(z^i + 0)|$. Тогда для любого $y_0$ такого, что $y_s \notin \{z^i, i = \overline{1, r}\}$, $s = \overline{0, q_k - 1}$, $k \in N$ справедливо неравенство*

$$e^{-v} \leq \prod_{j=0}^{q_k - 1} f'(y_j) \leq e^v. \tag{2}$$

Лемма 2.2 доказывается так же, как аналогичное утверждение в работе [9]. Из леммы 2.2 следует, что отрезки, составляющие разбиение $\xi_n(x_0)$, имеют экспоненциально малую длину. Положим $\lambda = (1 + e^{-v})^{-\frac{1}{2}}$,

**С л е д с т в и е 2.1.** *Пусть $\Delta^{(n)}$ — произвольный элемент динамического разбиения $\xi_n(x_0)$. Тогда*

$$|\Delta^{(n)}| \leq const \lambda^n \tag{3}$$

**О п р е д е л е н и е 2.1.** *Два гомеоморфизма окружности $T_1$ и $T_2$ называются топологически эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $\varphi : S^1 \to S^1$, что $\varphi(T_1 x) = T_2 \varphi(x)$ для любого $x \in S^1$.*

При этом $\varphi$ называется сопрягающим гомеоморфизмом или сопряжением. Используя следствие 2.1, легко можно доказать следующую теорему.

**Т е о р е м а Д а н ж у а.** *Пусть гомеоморфизм $T$ с иррациональным числом вращения $\rho$ удовлетворяет условиям леммы 2.2. Тогда $T$ топологически эквивалентен линейному повороту $T_\rho$.*

Из следствия 2.1 вытекает, что траектория любой точки плотно заполняет окружность. Отсюда следует, что сопряжение существует и определяется единственным образом с точностью до поворота. С другой стороны, хорошо известно [11], что при помощи нормированной инвариантной меры $\mu$ сопряжение $\varphi$ можно определить следующим образом:

$$\varphi(x) = \mu([x_0, x]), \quad x \in S^1,$$

где $x_0$ — произвольная точка окружности.

**3. Формулировка основных лемм и доказательство теоремы 1.** В этом параграфе мы приведем основные леммы и, используя их, докажем теорему 1.

**Определение 3.1.** *Двойным отношением четверки* $(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ *называется число*

$$Cr(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_3)}.$$

**Лемма 3.1.** *Пусть* $f(x) \in C^2[a, b]$ *и* $f'(x) > 0$ *для любого* $x \in [a, b]$. *Тогда для любой четверки чисел* $(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\quad a \le z_1 < z_2 < z_3 < z_4 \le b$ *имеет место равенство*

$$\frac{Cr(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)} = 1 + [O(\max_{x,y\in[z_1,z_4]} |f''(x) - f''(y)|) + O(z_4 - z_1)](z_4 - z_1).$$

Пусть $z_i \in S^1$, $\quad i = \overline{1, 4}$, $\quad z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Введем обозначения: $\alpha = z_2 - z_1$, $\beta = z_3 - z_2$, $\gamma = z_4 - z_3$

**Лемма 3.2** *(см. [10]). Пусть в точке* $x = y_0$ *сопряжение* $\varphi(x)$ *имеет положительную производную* $\varphi'(y_0) = p_0 > 0$, $\quad x \in S^1$ *и для некоторой константы* $R > 1$ *выполнены следующие условия*

$$a)\ \frac{\alpha}{R} \le \beta \le R\alpha, \quad \frac{\alpha}{R} \le \gamma \le R\alpha;$$

$$b)\ \max_{1\le i\le 4} |z_i - y_0| \le R\alpha.$$

*Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что если все* $z_i$, $1 \le i \le 4$ *лежат в* $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, *то справедливо неравенство*

$$|\frac{Cr(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1| \le c_1\varepsilon,$$

*где константа* $c_1$ *зависит лишь от* $R$ *и* $p_0$ *и не зависит от* $\varepsilon$.

Пусть $x_0 \in [z_1, z_2]$, где $x_0$ — первый излом. Введем также следующие обозначения: $\tau = x_0 - z_1$, $\quad \alpha' = T^{p_m+1}z_2 - T^{p_m+1}z_1$, $\quad \beta' = T^{p_m+1}z_3 - T^{p_m+1}z_2$, $\quad \gamma' = T^{p_m+1}z_4 - T^{p_m+1}z_3$, $\mathrm{Cr}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$, $\quad \mathrm{Cr}(\alpha', \beta', \gamma') = \frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'}\frac{\gamma'}{\beta'+\gamma'}$, $\quad F(z) = \frac{(1+\xi)[(c^2-1)z+1]}{(c^2-1)z+1+\xi}$, где $z = \frac{\tau}{\alpha}$, $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$, $c = \prod_{i=o}^{m} c_i$.

**Лемма 3.3.** *Пусть функция* $f$, *определяющая гомеоморфизм* $T$, *принадлежит классу* $C^2\left(S^1 \setminus \{x_0, x_{p_1}, \ldots, x_{p_m}\}\right)$, $f'(x) \ge const > 0$ *и существует константа* $R > 1$ *такая, что выполняются неравенства*

$$\frac{\alpha}{R} < \beta < R\alpha, \qquad \frac{\alpha}{R} < \gamma < R\alpha. \tag{4}$$

*Тогда существует константа* $c_2 = c_2(f, R)$ *такая, что*

$$|\frac{Cr(\alpha', \beta', \gamma')}{Cr(\alpha, \beta, \gamma)} - F(z)| \le c_2(\alpha + \beta + \gamma). \tag{5}$$

**Определение 3.2.** *Скажем, что тройка отрезков* $([z_1, z_2],\ [z_2, z_3],\ [z_3, z_4])$ *покрывает особую точку* $x_0$, *если* $x_0 \in (z_1, z_4)$. *Тройка отрезков покрывает особую точку "правильным" образом с константой* $M$, $0 < M \le 1$, *если*

*1)* $x_0 \in (z_1, z_4]$,
*2)* $\frac{x_0 - z_1}{z_2 - z_1} \geq M$.

**Л е м м а 3.4** (см. [10]). *Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма $T$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для любых $y_0 \in S^1$ и $\delta > 0$ существует $N(\delta, y_0) > 0$ такое, что для всех $n > N(\delta, y_0)$ найдется тройка отрезков $[z_s, z_{s+1}] \subset (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $s = 1, 2, 3$ со следующими свойствами:*
*1)* $|T^j[z_1, z_4]| \leq const\lambda^n$, $\lambda = (1 + e^{-v})^{-\frac{1}{2}} \quad 0 \leq j < q_n$;
*2)* $\sum\limits_{j=0}^{q_n - 1} \left|T^j[z_1, z_4]\right| \leq 2$;
*3) отрезки $[z_s, z_{s+1}]$ и $T^{q_n}[z_s, z_{s+1}]$ $s = 1, 2, 3$ удовлетворяют условиям a) и b) леммы 3.2 с константой $R = e^{3v} + e^v + 1$;*
*4) тройка отрезков $T^j[z_1, z_2], T^j[z_2, z_3], T^j[z_3, z_4]$, $0 \leq j \leq q_n$ покрывает особые точки $x_{p_i}$, $i = \overline{0, m}$ ровно один раз. При этом покрытие является "правильным" с константами $M_{p_i} = 1$, $i = \overline{0, m}$.*

**Л е м м а 3.5.** *Предположим, что определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма $T$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$ удовлетворяют утверждениям 1)-4) леммы 3.4. Тогда для достаточно больших $n$ имеют место следующие неравенства*

$$a) \ \frac{Cr(T^{q_n}z_1, T^{q_n}z_2, T^{q_n}z_3, T^{q_n}z_4)}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)} \geq const > 1 \quad \textit{при} \quad c = \prod_{i=0}^{m} c_i > 1,$$

$$b) \ \frac{Cr(T^{q_n}z_1), T^{q_n}z_2, T^{q_n}z_3, T^{q_n}z_4)}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)} \leq const < 1 \quad \textit{при} \quad c = \prod_{i=0}^{m} c_i < 1,$$

*где константы зависят лишь от функции $f$.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Поскольку инвариантная мера $\mu$ не имеет атомов и $\varphi(x)$ задается монотонной функцией $\varphi(x) = \int_o^x d\mu(x)$, где $\mu(x)$ — инвариантная мера, нам достаточно показать, что для почти всех $x$ по мере Лебега $\varphi'(x) = 0$. Производная $\varphi'(x)$ существует в силу монотонности функции $\varphi$ для почти всех $x$ по мере Лебега. Мы покажем, что $\varphi'(x) = 0$ всюду, где производная определена. Предположим, что $\varphi'(y_0) = p_0 > 0$, $y_0 \in S^1$. Для определенности предположим, что величина излома $c = \prod\limits_{i=0}^{m} c_i > 1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем тройку отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$, $[z_s, z_{s+1}] \subset (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяющих условиям леммы 3.4. Тогда эти отрезки и отрезки $[T^{q_n}z_s, T^{q_n}z_{s+1}]$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям леммы 3.2. Из леммы 3.2 следует, что

$$|\frac{\mathrm{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4))}{\mathrm{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1| < c_1\varepsilon, \tag{6}$$

$$|\frac{\mathrm{Cr}(T^{q_n}z_1, T^{q_n}z_2, T^{q_n}z_3, T^{q_n}z_4)}{\mathrm{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1| < c_1\varepsilon. \tag{7}$$

Поскольку $\varphi$ осуществляет сопряжение с линейным поворотом, нетрудно видеть,что

$$\mathrm{Cr}\,(\varphi(T^{q_n}z_1), \varphi(T^{q_n}z_2), \varphi(T^{q_n}z_3), \varphi(T^{q_n}z_4)) = \mathrm{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)). \tag{8}$$

Из формул (6)–(8) непосредственно вытекает, что

$$\left|\frac{\mathrm{Cr}(T^{q_n}z_1, T^{q_n}z_2, T^{q_n}z_3, T^{q_n}z_4)}{\mathrm{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)} - 1\right| < c_3\varepsilon, \tag{9}$$

где константа $c_3 > 0$ не зависит от $\varepsilon$ и $n$. С другой стороны, из леммы 3.5 следует, что для достаточно больших $n$

$$\frac{\mathrm{Cr}(T^{q_n}z_1, T^{q_n}z_2, T^{q_n}z_3, T^{q_n}z_4)}{\mathrm{Cr}(z_1), z_2, z_3, z_4} \geq \mathrm{const} > 1.$$

При достаточно малых $\varepsilon$ последнее неравенство и неравенство (9) одновременно не могут выполняться. Это противоречие доказывает теорему 1.

**4. Доказательство теоремы 2.** Предположим, что множество $A \subset S^1$ является инвариантным и $\lambda(A) > 0$. Тогда $A$ имеет точку плотности $x_0 \in S^1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По определению точки плотности найдется такое $\delta > 0$, что для любого отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условиям $x_0 \in [a,b]$ и $[a,b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\lambda(A \bigcap [a,b]) \geq (1-\varepsilon)\lambda([a,b])$. Иначе, $\lambda(B \bigcap [a,b]) \leq \varepsilon\lambda[a,b]$, где $B = S^1 \setminus A$. Обозначим $V_0^{(n)}(x_0) = [x_{q_n-1}, x_{q_n}]$. При достаточно больших $n$, $V_0^{(n)}(x_0) \subset (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Значит, $\lambda(B \bigcap V_0^{(n)}(x_0)) \leq \varepsilon\lambda(V_0^{(n)}(x_0))$. Система отрезков $\{V_i^{(n)}(x_0),\ 0 \leq i < q_n\}$ покрывает окружность и каждая точка окружности принадлежит не более, чем двум отрезкам $V_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=0}^{q_n-1} |V_i^{()n}(x_0)| \leq 2$. Теперь разделим систему отрезков $\{V_i^{(n)}(x_0)\}_{i=0}^{q_n-1}$ на две группы. Скажем, что $V_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j < q_n$ — из первой группы, если она сохраняет по меньшей мере одну особую точку. В противном случае, скажем, что $V_j^{(n)}(x_0)$ — из второй группы. Обозначим через $V_{m_1}^{(n)}(x_0)$, $V_{m_2}^{(n)}(x_0)$,..., $V_{m_l}^{(n)}(x_0)$, $m_1 < m_2 < \ldots < m_l$ элементы первой группы, число которых не больше, чем $2r$, т.е. $l \leq 2r$. Зафиксируем $y_0 \in V_0^{(n)}(x_0) \setminus \{T^i(z^j),\ i \in Z^1,\ 1 \leq j \leq r\}$ и оценим

$$C = \frac{|V_k^{(n)}(x_0)|}{|V_0^{(n)}(x_0)|} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1} f'(y_i)}, \tag{10}$$

где $y_i = T^i(y_0)$ для любого $1 \leq k < q_n$.

I) Пусть $k \leq m_1$. Тогда

$$C = \frac{|V_k^{(n)}(x_0)|}{|V_0^{(n)}(x_0)|} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1} f'(y_i)} = \frac{1}{|V_0^{(n)}(x_0)|} \int_{V_0^{(n)}(x_0)} \frac{d}{dx} f^k(x) \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1} f'(y_i)} dx =$$

$$= \frac{d}{dx} f^k(\overline{x}) \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1} f'(y_i)} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{f'(\overline{x_i})}{f'(y_i)} = \exp\{\sum_{i=0}^{k-1} \ln[1 + \frac{f''(\theta_i)(T^i\overline{x}_0 - T^i y_0)}{f'(y_i)}]\}.$$

Далее,

$$|\sum_{i=0}^{k-1} ln[1 + \frac{f''(\theta_i)(T^i\overline{x}_0 - T^i y_0)}{f'(T^i y_0)}]| \leq c_3 \sum_{i=0}^{k-1} |T^i\overline{x_0} - T^i y_0| \leq c_3,$$

где $c_3 = \frac{M}{m}$, $\quad M = \sup\limits_{x \in S^1} |f''(x)|, \quad m = \inf\limits_{x \in S^1} |f(x)|.$

Далее,

$$\exp(-c_3) \leq C \leq \exp(c_3). \tag{11}$$

II) Пусть $m_1 < k \leq m_l$ и $m_{j_0} < k \leq m_{j_0+1}$ при некотором $0 \leq j_0 \leq l$. Тогда

$$\frac{|V_k^{(n)}(x_0)|}{|V_0^{(n)}(x_0)|} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1} f'(y_i)} = \frac{|V_{m_1}^{(n)}(x_0)|}{|V_0^{(n)}(x_0)|} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m_1-1} f'(y_i)} \cdot$$

$$\cdot\frac{|V^{(n)}_{m_1+1}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_1}(x_0)|}\cdot\frac{1}{f'(y_{m_1})}\cdot\frac{|V^{(n)}_{m_2}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_1+1}(x_0)|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=m_1+1}^{m_2-1}f'(y_i)}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{|V^{(n)}_{m_{j_0}}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_{j_0-1}+1}(x_0)|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=m_{j_0-1}+1}^{m_{j_0-1}}f'(y_i)}\cdot\frac{|V^{(n)}_{m_{j_0}+1}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_{j_0}}(x_0)|}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{f'(y_{m_{j_0}})}\cdot\frac{|V^{(n)}_{k}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_{j_0}+1}(x_0)|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=m_{j_0}+1}^{k-1}f'(y_i)}.$$

Теперь оценим каждые из $A_0=\frac{|V^{(n)}_{m_1}(x_0)|}{|V^{(n)}_{0}(x_0)|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m_1-1}f'(y_i)}$, $A_j=\frac{|V^{(n)}_{m_j+1}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_j}(x_0)|}\cdot\frac{1}{f'(y_{m_j})}$, $1\le j\le j_0$ и $B_0=\frac{|V^{(n)}_{k}(x_0)|}{|V_{m_{j_0}+1}(x_0)|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=m_{j_0}+1}^{k-1}f'(y_i)}$, $B_\xi=\frac{|V^{(n)}_{m_{\xi+1}}(x_0)|}{|V^{(n)}_{m_\xi+1}(x_0)|}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=m_\xi+1}^{m_{\xi+1}-1}f'(y_i)}$, $1\le\xi\le j_0$. Имеем

$$A_0=\frac{1}{|V^{(n)}_0(x_0)|}\int_{V^{(n)}_0(x_0)}\frac{d}{dx}f^{m_1}(x)\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m_1-1}f'(y_i)}dx,$$

$$B_0=\frac{1}{|V^{(n)}_{m_{j_0}+1}(x_0)|}\int_{V^{(n)}_{m_{j_0}+1}(x_0)}\frac{d}{dx}f^{k-m_{j_0}-1}\frac{1}{\prod_{i=m_{j_0}+1}^{k-1}f'(y_i)}dx,$$

$$B_\xi=\frac{1}{|V^{(n)}_{m_\xi+1}(x_0)|}\int\limits_{V^{(n)}_{m_\xi+1}}\frac{d}{dx}f^{m_{\xi+1}-m_\xi-1}\frac{1}{\prod\limits_{i=m_\xi+1}^{m_{\xi+1}-1}f'(y_i)}dx.$$

Так как подинтегральные функции непрерывны, имеем

$$\begin{array}{c}\exp(-c_3)\le A_0\le\exp(c_3),\\ \exp(-c_3)\le B_0\le\exp(c_3),\\ \exp(-c_3)\le B_\xi\le\exp(c_3),\end{array}\tag{12}$$

$$A_j=\frac{1}{|V^{(n)}_{m_j}(x_0)|}\int_{V^{(n)}_{m_j}(x_0)}\frac{d}{dx}f(x)\ \frac{1}{f'(y_{m_j})}dx,$$

$$\frac{1}{\bar{c}_3}\le A_j\le\bar{c}_3,\quad 1\le j\le j_0,\quad \text{где}\quad \bar{c}_3=\frac{\overline{M}}{m},\quad \overline{M}=\sup_{S^1}|f'(x)|.\tag{13}$$

Из (11)–(13) вытекает, что

$$(\frac{1}{\bar{c}})^{j_0}exp(-(j_0+2)c_3)\le C\le\exp((j_0+2)c_3)(\bar{c})^{j_0}.$$

III) $m_l<k\le q_n-1$. Этот случай аналогичен случаю II). Имеем

$$(\frac{1}{\bar{c}})^{l}\exp(-(l+2)c_3)\le C\le\exp((l+2)c_3)(\bar{c})^{l}.\tag{14}$$

Значит, для любого $0 \le k \le q_n - 1$

$$const \le C \le Const. \tag{15}$$

Используя (15) и инвариантность $B$, получаем

$$\lambda(B\bigcap V_k^{(n)}(x_0)) = \lambda\left(T^k B\bigcap T^k V_0^{(n)}(x_0)\right) = \lambda(T^k(B\bigcap V_0^{(n)})(x_0)) =$$

$$= \int\limits_{B\bigcap V_0^{(n)}(x_0)} \frac{d}{dx}f^k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(y_i) \int\limits_{B\bigcap V_0^{(n)}(x_0)} \frac{d}{dx}f^k(x)\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{k-1} f'(y_i)}dx \le$$

$$\le \mathrm{const}\frac{\left|V_k^{(n)}(x_0)\right|}{\left|V_0^{(n)}(x_0)\right|}\cdot\lambda\left(B\bigcap V_0^{(n)}(x_0)\right) \le \mathrm{const}\,\varepsilon\left|V_k^{(n)}(x_0)\right|.$$

Просуммируем неравенство по $k$ от 0 до $q_n - 1$. Получим

$$\lambda(B) = \sum_{k=0}^{q_n-1}\lambda(B\bigcap V_k^{(n)}(x_0)) \le \mathrm{const}\varepsilon\sum_{k=0}^{q_n-1}|V_k^{(n)}(x_0)| \le \mathrm{const}\,\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ $\lambda(B) = 0$. Отсюда следует, что $\lambda(A) = 1$. Теорема 2 доказана.

**5. Доказательство лемм 3.1, 3.3, 3.5.**

**Доказательство леммы 3.1.** Пусть $f \in C^2[a,b]$. Легко проверить, что

$$f(b) = f(a) + f'(b)(b-a) + \int_a^b f''(y)(a-y)dy,$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(y)(b-y)dy.$$

В дальнейшем нам необходимы следующие равенства

$$\frac{1}{f'(b)(b-a)}\int_a^b f''(y)(y-a)dy = \int_a^b \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy + \xi_1(a,b), \tag{16}$$

$$\frac{1}{f'(a)(b-a)}\int_a^b f''(y)(b-y)dy = \int_a^b \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy + \xi_2(a,b), \tag{17}$$

где $\xi_1(a,b)$ и $\xi_2(a,b)$ удовлетворяют следующим оценкам:

$$|\xi_i(a,b)| \le c_1 \max_{x,y\in[a,b]}|f''(x) - f''(y)|(b-a) + c_2(b-a)^2, \quad i = 1,2. \tag{18}$$

Здесь $c_1$ и $c_2$ — постоянные, зависящие только от $f$. Докажем оценку (18). Для случая $i = 1$ (случай $i = 2$ доказывается аналогично). Из равенства (16) получим

$$|\xi_1(a,b)| = |\int_a^b \frac{f''(y)(y-a)}{f'(b)(b-a)}dy - \frac{f''(b)}{2f'(b)}(b-a) + \frac{f''(b)}{2f'(b)}(b-a) - \int_a^b \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy| =$$

$$= |\int_a^b \frac{[f''(y) - f''(b)](y-a)}{f'(b)(b-a)}dy + \int_a^b \frac{[f''(b) - f''(y)]}{2f'(b)}dy + \int_a^b \frac{[f'(y) - f'(b)]f''(y)}{2f'(b)f'(y)}dy| \le$$

$$\leq \frac{1}{\min\limits_{y\in[a,b]} f'(y)} \max_{x,y\in[a,b]} |f''(x)-f''(y)|(b-a) + \left[\frac{\max\limits_{y\in a,b} f''(y)}{2\min\limits_{y\in[a,b]} f'(y)}\right]^2 (b-a)^2.$$

Оценка (18) доказана.

Используя равенства (16), (17) и оценку (18), получим

$$\mathrm{Cr}(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \frac{f(z_2)-f(z_1)}{f(z_3)-f(z_1)} \cdot \frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_4)-f(z_2)} =$$

$$= \frac{f'(z_1)(z_2-z_1) + \int_{z_1}^{z_2} f''(y)(z_2-y)dy}{f'(z_1)(z_3-z_1) + \int_{z_1}^{z_3} f''(y)(z_3-y)dy} \cdot \frac{-f'(z_4)(z_3-z_4) - \int_{z_4}^{z_3} f''(y)(z_3-y)dy}{-f'(z_4)(z_2-z_4) - \int_{z_4}^{z_2} f''(y)(z_2-y)dy} =$$

$$= \mathrm{Cr}(z_1,z_2,z_3,z_4) \frac{1+\int_{z_1}^{z_2} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy + \xi_2(z_1,z_2)}{1+\int_{z_1}^{z_3} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy + \xi_2(z_1,z_2)} \cdot \frac{1-\int_{z_3}^{z_4} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy - \xi_1(z_3,z_4)}{1-\int_{z_2}^{z_4} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy - \xi_1(z_2,z_4)} =$$

$$= \mathrm{Cr}(z_1,z_2,z_3,z_4) \left[1 + (-\int_{z_2}^{z_3} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy + \xi_2(z_1,z_2) - \xi_2(z_1,z_3))(1+\mathrm{O}(z_4-z_1))\right] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + (\int_{z_2}^{z_3} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy - \xi_1(z_1,z_3) + \xi_1(z_2,z_4))(1+\mathrm{O}(z_4-z_1))\right] =$$

$$= 1 + \xi_1(z_2,z_4) - \xi_1(z_3,z_4) + \xi_2(z_1,z_2) - \xi_2(z_1,z_3) + \mathrm{O}((z_4-z_1)^2) =$$

$$= 1 + \left[\mathrm{O}(\max_{x,y\in[z_1,z_4]} |f''(x)-f''(y)|) + \mathrm{O}(z_4-z_1)\right](z_4-z_1).$$

Лемма (3.1) доказана.

**Доказательство леммы 3.3.** По условию $x_0 \in [z_1, z_2]$. Следовательно, отрезок $[z_2, z_4]$ не содержит особую точку $x_0$. Очевидно, что

$$\frac{\gamma'}{\beta'+\gamma'} = \frac{T^{p_m+1}z_4 - T^{p_m+1}z_3}{T^{p_m+1}z_4 - T^{p_m+1}z_2} = \frac{\left[f^{p_m+1}(x_0+0)\right]'\gamma + \mathrm{O}(\gamma^2)}{\left[f^{p_m+1}(x_0+0)\right]'(\beta+\gamma) + \mathrm{O}((\beta+\gamma)^2)} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma+\beta} \frac{1+\mathrm{O}(\gamma)}{1+\mathrm{O}(\beta+\gamma)} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}(1+\mathrm{O}(\beta+\gamma)). \frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'} = \tag{19}$$

$$= \frac{\left[f^{p_m+1}(x_0-0)\right]'\tau + \left[f^{p_m+1}(x_0+0)\right]'(\alpha-\tau) + \mathrm{O}(\alpha)^2}{\left[f^{p_m+1}(x_0-0)\right]'\tau + \left[f^{p_m+1}(x_0+0)\right]'(\alpha+\beta-\tau) + \mathrm{O}((\alpha+\beta)^2)} =$$

$$= \frac{(c_2-1)z + 1 + \mathrm{O}(\alpha)}{(c^2-1)z + 1 + \xi + \mathrm{O}(\alpha+\beta)} = \frac{(c^2-1)z+1}{(c^2-1)z+1+\xi}(1+\mathrm{O}(\alpha+\beta)).$$

Из полученного соотношения вытекает, что

$$\frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{(1+\xi)((c^2-1)z+1)}{(c^2-1)z+1+\xi}(1+\mathrm{O}(\alpha+\beta)).$$

Отсюда и из равенства (19) легко получить неравенство (5). Лемма 3.3 доказана.

**Доказательство леммы 3.5.** Предположим для определенности, что $c = \prod_{i=0}^{m} c_i > 1$. В случае $c = \prod_{i=0}^{m} c_i < 1$ лемма 3.5 доказывается аналогично. Пусть отрезки $[z_s, z_{s+1}]$,

$s=\overline{1,3}$ удовлетворят условиям леммы 3.4 и тройка отрезков $\left(T^{i_0}[z_1,z_4],\, T^{i_0}[z_2,z_3],\, T^{i_0}[z_3,z_4]\right)$ покрывает особую точку $x_0$. Очевидно, что

$$I=\frac{\mathrm{Cr}(T^{q_n}z_1,T^{q_n}z_2,T^{q_n}z_3,T^{q_n}z_4)}{\mathrm{Cr}(z_1,z_2,z_3,z_4)}=\prod_{i=0}^{i_0-1}\frac{\mathrm{Cr}(T^{i+1}z_1,T^{i+1}z_2,T^{i+1}z_3,T^{i+1}z_4)}{\mathrm{Cr}(T^{i}z_1,T^{i}z_2,T^{i}z_3,T^{i}z_4)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\mathrm{Cr}(T^{i_0+p_m+1}z_1,T^{i_0+p_m+1}z_2,T^{i_0+p_m+1}z_3,T^{i_0+p_m+1}z_4)}{\mathrm{Cr}(T^{i_0}z_1,T^{i_0}z_2,T^{i_0}z_3,T^{i_0}z_4)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=i_0+p_m+1}^{q_n-1}\frac{\mathrm{Cr}(T^{i+1}z_1,T^{i+1}z_2,T^{i+1}z_3,T^{i+1}z_4)}{\mathrm{Cr}(T^{i}z_1,T^{i}z_2,T^{i}z_3,T^{i}z_4)}. \tag{20}$$

Теперь оценим первой сомножитель в (20); третий сомножитель оценивается аналогично.

Используя лемму 3.1 и условие 1) леммы 3.4, получим

$$\prod_{i=0}^{i_0-1}\frac{\mathrm{Cr}(T^{i+1}z_1,T^{i+1}z_2,T^{i+1}z_3,T^{i+1}z_4)}{\mathrm{Cr}(T^{i}z_1,T^{i}z_2,T_{i}z_3,T^{i}z_4)}=\prod_{i=0}^{i_0-1}(1+[\mathrm{O}(\max_{x,y\in[T^iz_1,T^iz_4]}|f''(x)-f''(y)|)+$$

$$+\mathrm{O}(T^iz_4-T^iz_1)](T^iz_4-T^iz_1))=\exp\left\{\sum_{i=0}^{i_0-1}\ln(1+[\mathrm{O}(\max_{x,y\in[T^iz_1,T^iz_4]}|f''(x)-f''(y)|)+\right.$$

$$\left.+\mathrm{O}(T^iz_4-T^iz_1)](T^iz_4-T^iz_1))=1+\omega(\delta,f'')+\mathrm{O}(\max_i\left[T^i_{z_1};\ T^i_{z_4}\right])\right\}, \tag{21}$$

где

$$\omega(\delta,f'')=\max_{0\le i<q_n}(\max_{x,y\in[T^iz_1,T^iz_4]}|f''(x)-f''(y)|).$$

Теперь оценим второй сомножитель в (20)

$$\left|\frac{\mathrm{Cr}(T^{i_0+p_m+1}z_1,T^{i_0+p_m+1}z_2,T^{i_0+p_m+1}z_3,T^{i_0+p_m+1}z_4)}{\mathrm{Cr}(T^{i_0}z_1,T^{i_0}z_2,T^{i_0}z_3,T^{i_0}z_4)}-F(x)\right|\le c_2\lambda^n, \tag{22}$$

где $F(x)=\frac{(1+\xi)((c^2-1)x+1)}{(c^2-1)x+1+\xi}$, $\quad\xi=\frac{|T^{i_0}z_3-T^{i_0}z_2|}{|T^{i_0}z_2-T^{i_0}z_1|}$, $\quad x=\frac{|x_0-T^{i_0}z_1|}{|T^{i_0}z_2-T^{i_0}z_1|}$.

Легко видеть, что функция $F(x),\, 0\le x\le 1$ является строго возрастаюшей (при $c=\prod_{i=0}^{m}c_i>1$), причем $F(0)=1$. По предположению тройка отрезков $\left([T^{i_0}z_1,T^{i_0}z_2],[T^{i_0}z_2,T^{i_0}z_3],[T^{i_0}z_3,T^{i_0}z_4]\right)$ "правильном" образом покрывает особую точку с константой $M=1$. Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{Cr}(T^{i_0+1+p_m}z_1,T^{i_0+1+p_m}z_2,T^{i_0+1+p_m}z_3,T^{i_0+1+p_m}z_4)}{\mathrm{Cr}(T^{i_0}z_1,T^{i_0}z_2,T^{i_0}z_3,T^{i_0}z_4)}\ge F(1)-c_2\lambda^n. \tag{23}$$

Поскольку $F(1)=\frac{c^2(1+\xi)}{c^2+\xi}$ и $\xi\ge\frac{1}{R}=\left(e^{3v}+e^v+1\right)^{-1}$, то

$$F(1)\ge\frac{c^2(R+1)}{Rc^2+1}=1+\frac{c^2-1}{Rc^2+1}\ge 1.$$

Отсюда и из (20)–(23) легко вытекает утверждение леммы 3.5.

Автор выражает свою искреннюю благодарность А.А. Джалилову за постановку задач и внимание к работе.

## Цитированная литература


1. **Poincare H.** // J. Math. Pures et Appl., P. 1881–1886.
2. **Арнольд В.И.** //Изв. АН СССР. 1961. Т.25, №1. Сер. мат. С. 21–86.
3. **Mozer J.** // Ann. Scuola Norm. Sup. Di Pisa. Part II. ser. III. 1996. V.20. P. 499–535.
4. **Herman M.** // Publ., Math., I.H.E.S. 1979. V.49. P. 5–233.
5. **Yoccoz J.C.** // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. ser. 4. 1984. V.17. P. 333—359.
6. **Katznelson Y., Ornstein D.** //Ergodic Theory and Dyn. Systems. 1989. V.9, N4. P. 643–680.
7. **Синай Я.Г., Ханин К.М.** // УМН. 1989. Т. 44, вып.1. С. 57–82.
8. **Stark J.** //Nonlinearity. 1988. V.1. P. 541–575.
9. **Khanin K. M., Vul E. B.** // Advances in Soviet Mathematics. 1991. V.3. P. 57–98.
10. **Джалилов А.А., Ханин К.М.** // Функ. анализ и его приложения. 1998. Т. 32, № 3. С. 11–21.
11. **Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.** Эргодическая теория. М. 1980.


*Поступила в редакцию 26.06.2003г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 94 — 97*

*УДК 514.7*

# ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

А. А. Джалилов

Самаркандский государственный университет Механико-математический факультет
Узбекистан 703004 г. Самарканд kdzhalilov@yahoo.com

В настоящей работе изучаются кусочно-гладкие гомеоморфизмы окружности с несколькими изломами на одной траектории и с иррациональным числом вращения. Доказано, что в случае, когда произведение величин изломов не равно 1, инвариантная мера таких гомеоморфизмов гёлдеровского типа и является сингулярной относительно меры Лебега.

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома, т.е. отображения, гладкие всюду за исключением нескольких точек, в которых происходит разрыв первой производной. Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $T_f$ единичной окружности

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0,1) \tag{1}$$

где скобка $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть, а $f(x)$ — определяющая функция $T_f$ удовлетворяет следующим условиям:

$b_1)$ $f(x)$ — непрерывная, строго возрастающая функция;

$b_2)$ $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in R^1$;

$b_3)$ гомеоморфизм $T_f$ в точках $x_{p_i} = T_f^{p_i} x_0$, $i = \overline{0,m}$, $p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_m$, имеет изломы. Это означает, что существуют конечные односторонние производные $f'(x_{p_i} \pm 0) > 0$ и

$$\frac{f'\left(x_{p_i} - 0\right)}{f'\left(x_{p_i} + 0\right)} = c_i \neq 1, \quad i = \overline{0,m}.$$

$b_4)$ $f(x) \in C^{2+\epsilon}\left(S^1 \setminus \left\{x_{p_i}, i = \overline{0,m}\right\}\right)$, при некотором $\epsilon > 0$, $f'(x) \geq \text{const} > 0$ для $\forall x \in S^1 \setminus \left\{x_{p_i}, i = \overline{0,m}\right\}$;

**З а м е ч а н и е.** *Условие $b_4)$ означает, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{2+\epsilon}$ на каждой связной компоненте множества $S^1 \setminus \left\{x_{p_i},\ i = \overline{0,m}\right\}$.*

Числа $c_i(f)$, $i = \overline{0,m}$ называются величинами излома гомеоморфизма $T_f$ в точках $x_{p_i}$, $i = \overline{0,m}$, соответственно. Заметим, что величины излома $c_i(f)$, $i = \overline{0,m}$ являются инвариантами при гладкой замене переменных.

Keywords: *circle gomeomorphism, invariant measure, singularity*
2000 Mathematics Subject Classification: 58A05

Условия $b_1$) – $b_4$) означают, что функция $f(x)$ определяет гомеоморфизм окружности, достаточно гладкий всюду за исключением $(m+1)$ точек окружности, лежащих на одной траектории, в которых имеются скачки первой производной или изломы. Вообще говоря, функция $f(x)$ определена с точностью до аддитивной константы, но мы устраним эту неоднозначность условием $0 < f(0) < 1$. Пуанкаре показал, что для любого $x \in R^1$ существует предел ([1], [2])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \rho.$$

Здесь и далее $f^n(x)$ обозначает $n$-ю итерацию функции $f$. Число $\rho$ называется числом вращения, не зависит от выбора $x_0$ и является важнейшей характеристикой гомеоморфизма $T_f$.

Поведение $T_f$ существенно зависит от арифметических свойств числа вращения. Так, если $\rho = p/q$ рационально, то существуют периодические траектории периода $q$, обходящие $p$ раз окружность, и в общем случае траектории почти всех точек притягиваются к устойчивым периодическим траекториям. Напротив, если $\rho$ иррационально, то для достаточно гладких диффеоморфизмов траектория любой точки всюду плотна на окружности, а сам диффеоморфизм с помощью гомеоморфной замены координат приводится к повороту на угол $\rho$. Соответствующий результат был доказан Данжуа [3]. Точнее, Данжуа показал, что если $f \in C^1\left(R^1\right)$ и $Var \ln f'(x) < \infty$, то существует гомеоморфизм окружности $T_\varphi$ такой, что $T_\varphi \circ T_f = T_\rho \circ T_\varphi$, где $T_\rho x = \{x + \rho\}$ — поворот окружности на угол $\rho$.

В теории гомеоморфизмов окружности существует важная проблема выяснения связи между гладкостью $f$, свойствами числа вращения $\rho$ и классом гладкости сопряжения $\varphi$. С этой проблемой тесно связан и вопрос о существовании абсолютно непрерывной инвариантной меры для $T_f$. В самом деле, единственная с точностью до нормировки инвариантная мера для $T_f$ является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ — абсолютно непрерывная функция. Это соображение впервые было использовано Арнольдом в [4], где он изучал гладкость $\varphi(x)$. Им было показано, что для типичных чисел вращения $\rho$ и для аналитических диффеоморфизмов $T_f$, достаточно близких к повороту $T_\rho$, приведение осуществляется с помощью аналитического диффеоморфизма. В дальнейшем результаты типа теоремы Арнольда, полученные в рамках метода теории КАМ, получили название локальных теорем приведения, поскольку здесь весьма важную роль играют условия близости $T_f$ и $T_\rho$.

Впервые глобальная теорема приведения, т.е. теорема, не требующая близости диффеоморфизма к повороту, была доказана М. Эрманом [5]. Наиболее сильные результаты в этой области были получены Синаем и Ханиным [6], Старком [7], Кацнельсоном и Орнстейном [8]. В работе Синая и Ханина показано, что итерации изучаемых диффеоморфизмов в перенормированных координатах асимптотически близки к дробно-линейным отображениям.

В работе [9] показано, что гомеоморфизмы с одной точкой излома занимают промежуточное место между диффеоморфизмами и критическими отображениями окружности. С одной стороны, для однопараметрических семейств гомеоморфизмов с особенностями типа излома множество значений параметра, отвечающих иррациональным числам вращения, имеет лебегову меру нуль. Инвариантные меры таких гомеоморфизмов являются сингулярными относительно меры Лебега [10].

С другой стороны, как и в случае диффеоморфизмов окружности, ренормгрупповое поведение для подобных отображений выглядит достаточно просто. В перенормированных координатах итерации отображений асимптотически приближаются к дробно-линейным преобразованиям, зависящим только от двух параметров. В случае гомеоморфизмов окружности с несколькими изломами ситуация более трудная. Здесь, хотя имеются точки излома, для некоторых отображений инвариантная мера является абсолютно непрерывной [11].

Для гомеоморфизмов, удовлетворяющих условиям $b_1$)– $b_4$), возможны только следующие два случая: $g_1$) $\prod_{i=0}^{m} c_i = 1$; $g_2$) $\prod_{i=0}^{m} c_i \neq 1$.

Если гомеоморфизм $T_f$ удовлетворяет условиям $b_1)$ – $b_4)$ и $g_1)$, то для типичных иррациональных чисел вращения $\rho$ сопряжение $\varphi(x)$ является кусочно-гладкой функцией [11].

Цель настоящей работы состоит в изучении инвариантных мер гомеоморфизмов окружности, удовлетворяющих условиям $b_1)$–$b_4)$ и $g_2)$, с иррациональным числом вращения.

Обозначим через $\mathcal{B}$ борелевскую $\sigma$-алгебру.

**Определение 1.** *Мера $\mu$ на измеримом пространстве $\left(S^1, \mathcal{B}\right)$ называется сингулярной относительно меры Лебега $\lambda$, если существует $A \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0$.*

Теперь сформулируем основной результат нашей работы об инвариантных мерах гомеоморфизмов окружности с несколькими изломами, лежащими на одной траектории.

**Теорема 1.** *Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма $T_f$ удовлетворяет условиям $b_1) - b_4)$ и $g_2$ число вращения $\rho = \rho(f)$ — иррационально. Тогда инвариантная мера $\mu$ является сингулярной относительно меры Лебега $\lambda$.*

Хорошо известно, что гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения является строго эргодическим, т.е. имеет единственную инвариантную меру $\mu$. Отсюда вытекает, что преобразование $T_f$ является эргодическим относительно меры $\mu$.

**Определение 2.** *Преобразование $T_f$ называется эргодическим относительно меры Лебега $\lambda$, если любое $T_f$–инвариантное множество $A \in \mathcal{B}$ имеет лебегову меру 0 или 1.*

**Теорема 2.** *Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма $T_f$ удовлетворяет условиям $b_1) - b_4)$ и число вращения $\rho(f)$ является иррациональным. Тогда $T_f$ является эргодическим преобразованием относительно меры Лебега $\lambda$.*

Для описания многих физических явлений часто изучаются статистические свойства сингулярных мер [12].

Определим две важные функции на окружности, характеризующие инвариантную меру $\mu$:

$$\underline{\tau}(x) = \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \mu([x, x+\varepsilon])}{\ln \varepsilon}, \quad \overline{\tau}(x) = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \mu([x,\ x+\varepsilon])}{\ln \varepsilon}.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ называются, соответственно, нижним и верхним показателями сингулярности инвариантной меры $\mu$.

**Определение 3.** *Сингулярная инвариантная мера $\mu$ называется гельдеровской, если существуют константы $m$ и $M$, $0 < m < M < 1$ такие, что на множестве "полной" $\mu$ меры справедливы неравенства*

$$m \le \underline{\tau}(x) \le \overline{\tau}(x) \le M.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно $T_f$. Отсюда, а также из эргодичности $T_f$ относительно мер $\mu$ и $\lambda$ следует, что обе эти функции являются почти постоянными по мере $\mu$ и по мере $\lambda$. Эти постоянные обозначим $\underline{\tau}(\mu)$, $\overline{\tau}(\mu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$, соответственно.

**Теорема 3.** *Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма $T_f$ удовлетворяет условиям $b_1) - b_4)$ и $q_2)$ и число вращения $\rho(f)$ является иррациональным типа константы. Тогда справедливы следующие неравенства:*
*I)* $0 < \underline{\tau}(\mu) \le \overline{\tau}(\mu) < 1$;
*II)* $1 < \underline{\tau}(\lambda) \le \overline{\tau}(\lambda) < +\infty$.

Из первого утверждения теоремы 3 непосредственно следует справедливость гёльдеровской сингулярной инвариантной меры $\mu$.

При доказательстве теоремы 3 существенно используется ренормгрупповое поведение гомеоморфизмов окружности с несколькими изломами, лежащими на одной траектории.

Отметим, что теоремы 1–3 являются обобщениями соответствующих утверждений для случая гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома ([10], [11]).

## Цитированная литература


1. **Poincare H.** J. Math. Pures et Appl. P. 1881–1886.
2. **Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория. М. 1980.
3. **Denjoy A.** J. Math. Pures et Appl. 1932. V.11. P. 333–375.
4. **Арнольд В. И.** Изв. АН СССР, Сер.мат. 1961. Т.25. № 1., С. 21–86.
5. **Herman M.** Publ. Math. I.H.E.S. 1979. V.49. P. 5–233
6. **Синай Я. Г., Ханин К. М.** Успехи мат. наук. 1989. Т.44., № 1. С. 57–82.
7. **Stark J** . Nonlinearity. 1988. V.1. P. 541–575.
8. **Katznelson Y., Ornstein D.** Ergodic Theory and Dyn. Systems. 1989. V. 9., № 4. P. 643–680.
9. **Khanin K. M., Vul E. B.** Advances. Sov. Math. 1991. V.3. P. 57–93.
10. **Джалилов А. А., Ханин К. М.** Функ. анализ и его приложения. 1998. Т.32. № 3. С. 11–21.
11. **Джалилов А. А.** Теор. и матем. физика. 1999. Т.121. № 3. С. 355–366.
12. **Halsey T. C., Jensen M. N., Kadanoff L. P., Procaccia I. and Shraiman B. I.** Phys. Rev. 1986. A33. P. 1141–1147.


*Поступила в редакцию 26.09.2003г.*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 98 — 103*

*УДК 681.5*

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ "В БОЛЬШОМ" ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ КВАДРАТИЧНОГО ТИПА

Р. С. Ивлев

Институт проблем информатики и управления МО и Н РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 ivlevruslan@newmail.ru

В работе развивается цикл исследований [1, 2] по устойчивости динамических систем с интервальной неопределенностью параметров. В настоящей работе получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нелинейной интервальной динамической системы с нелинейностью квадратичного типа.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается динамическая система, возмущенное движение которой может быть описано в пространстве состояний в условиях интервальной неопределенности параметров с помощью следующего дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathbf{A}x(t) + X(t)\mathbf{B}x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где $t$ — независимая переменная (время), $x(t) = (x_i(t))$ — вектор состояний, компонентами которого являются непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $x_i(t)$, т.е. $x_i(t) \in C[t_0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; в начальный момент времени $t_0$ значение вектора состояний предполагается известным $x_0$. Матрица $X(t)$ является блочно-диагональной

$$X(t) = \mathrm{Diag}\{\underbrace{x^T(t), x^T(t), \ldots, x^T(t)}_{n}\},$$

т.е. $X(t)$ имеет одинаковые блочно-диагональные элементы, равные транспонированному вектору состояний $x^T(t)$. Многозначность в правой части дифференциального включения (1) обусловливается наличием интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и интервальной матрицы $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{n^2\times n}$. Здесь $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов [3, 4]. Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, заданная своими нижней $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и верхней $\overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ границами, определяется согласно следующему соотношению

$$\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \underline{A} \le A \le \overline{A}\}, \tag{2}$$

Keywords: *asymptotic stability, interval uncertainty of parameters, quadratic nonlinearity.*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D20

где неравенства понимаются в покомпонентном смысле. Интервальная матрица $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{n^2\times n}$ имеет следующий блочный вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{B}_i \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальные матрицы, заданные своими нижними $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и верхними $\overline{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ границами, $i = 1, 2, \ldots, n$, определяются аналогичным соотношению (2) образом

$$\mathbf{B}_i = [\underline{B}_i, \overline{B}_i] = \{B_i \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \underline{B}_i \le B_i \le \overline{B}_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

В силу соотношений (2) и (3) для дифференциального включения (1) имеем следующее эквивалентное представление в виде семейства дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X(t)Bx(t), \qquad A \in \mathbf{A},\ B \in \mathbf{B}, \qquad x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, \infty). \tag{4}$$

Для каждого представителя семейства (4) дифференциальных уравнений выполнены все условия существования и единственности решения, поэтому для любого начального условия $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при фиксированных значениях матриц $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$ существует единственное решение, проходящее через $x_0$, уравнения семейства (4). При всевозможных значениях матриц $A$ и $B$ из соответствующих интервальных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ через $x_0$ проходит семейство интегральных кривых, порожденных каждым представителем семейства (4). Для нулевого начального условия $x_0 = 0$ имеем тривиальное решение $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$, являющееся положением равновесия дифференциального включения (1).

**Определение 1.** *Тривиальное решение $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$ системы (1) называется экспоненциально устойчивым при $t \to \infty$, если существуют такие положительные постоянные $N$ и $\alpha$, что для любых значений $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$ и всякого решения $x(t, t_0, x_0)$ этой системы справедливо неравенство*

$$||x(t, t_0, x_0)|| \le N||x(t_0)|| \exp\left(-\alpha(t - t_0)\right),$$

*где $||\cdot||$ — евклидова норма.*

Множество всех тех $x \in \mathbb{R}^n$, которые для любых $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$ притягиваются с течением времени к началу координат, будем называть областью притяжения начала координат.

**Задача.** Определить условия экспоненциальной устойчивости положения равновесия $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$ нелинейной интервальной динамической системы (1) в смысле определения 1.

**2. Основной результат.** Для определения условий экспоненциальной устойчивости воспользуемся прямым методом Ляпунова и выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T H x, \tag{5}$$

где $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = H^T \rhd 0$ — симметрическая положительно определенная матрица.

Прежде чем приступить к формулировке основного результата, выполним необходимые построения и приведем известные определения из интервального анализа. Используя арифметические операции классической интервальной арифметики [3, 4], вычислим интервальные матрицы $\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j^T$ и $\mathbf{B}_j\mathbf{B}_i^T$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и осуществим их симметрирование, т.е.

$$\mathbf{C}_{ij} = \left(\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_j\mathbf{B}_i^T\right)/2, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Введем в рассмотрение величины

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} \max \left\{ \left| \min_{C_{ij}=C_{ij}^T \in \mathbf{C}_{ij}} \lambda(C_{ij}) \right|, \left| \max_{C_{ij}=C_{ij}^T \in \mathbf{C}_{ij}} \Lambda(C_{ij}) \right| \right\},$$

где $\lambda(\cdot)$ и $\Lambda(\cdot)$ — соответственно, минимальное и максимальное собственные числа квадратной вещественной симметрической матрицы.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ построим замкнутое множество

$$\mathcal{E}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \le \Lambda(H)\mu / \max_i \{l_i\} \right\}, \tag{6}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$. Множество (6) является в $\mathbb{R}^n$ гиперэллипсоидом, содержащим начало координат в качестве своего центра.

**О п р е д е л е н и е 2.** *Интервальную квадратную матрицу* $\mathbf{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{q}_{ij} = [\underline{q}_{ij}, \overline{q}_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *будем называть положительно определенной и записывать* $\mathbf{Q} \rhd 0$, *если положительно определена любая матрица* $Q \in \mathbf{Q}$, *т.е.* $\forall Q \in \mathbf{Q}$ *квадратичная форма* $z^T Q z > 0$ $\forall z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

**О п р е д е л е н и е 3.** *[5] Множество матриц вида*

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = [\underline{Q}^{\mathrm{sym}}, \overline{Q}^{\mathrm{sym}}] = \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} | Q = Q^T, \underline{Q}^{\mathrm{sym}} \le Q \le \overline{Q}^{\mathrm{sym}}\},$$

*где знак неравенства понимается в покомпонетном смысле, будем называть симметрической интервальной матрицей и записывать* $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})^T$.

**О п р е д е л е н и е 4.** *Множество квадратных матриц* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *вида*

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) = \\ &\quad = \left\{ H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall B \in \mathbf{B})(\exists Q \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})(A^T H + HA + HH = -Q) \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

*называется допустимым множеством решений интервального матричного уравнения*

$$\mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} + HH = -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}. \tag{8}$$

Условия экспоненциальной устойчивости исследуемой системы дает следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.** *Пусть для заданных интервальных матриц* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n^2\times n}$ *и некоторой интервальной симметрической положительно определенной матрицы* $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ *выполнены следующие условия:*

- *допустимое множество решений (7) интервального матричного уравнения (8) непусто, т.е. существует* $H^* \in \Sigma_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) \ne \varnothing$,
- *матрица* $H^*$ *является симметрической положительно определенной.*

*Тогда тривиальное решение* $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$ *дифференциального включения (1) экспоненциально устойчиво и множество (6) при* $0 < \mu < \min_{Q\in\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}} \lambda(Q)$ *принадлежит области притяжения начала координат.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о**. Вычисляя первую производную по времени функции (5) на траекториях движения каждого представителя семейства (4), получим семейство производных

$$\dot V(x)\mid_{(\dot x(t)=Ax(t)+X(t)Bx(t))}, \qquad A\in\mathbf{A}, B\in\mathbf{B}. \tag{9}$$

Учитывая конкретное выражение для функции Ляпунова, выполним несложные преобразования

$$\begin{aligned}
&\dot V(x)=\dot x^T(t)Hx(t)+x^T(t)H\dot x(t)=\\
&=(Ax(t)+X(t)Bx(t))^T Hx(t)+x^T(t)H\left(Ax(t)+X(t)Bx(t)\right)=\\
&=x^T(t)(A^TH+HA)x(t)+x^T(t)(B^TX^T(t)H+HX(t)B)x(t)=\\
&=x^T(t)(A^TH+HA)x(t)+x^T(t)(B^TX^T(t)H+HX(t)B)x(t)-\\
&-x^T(t)(X(t)BB^TX(t)+HH)x(t)+x^T(t)(X(t)BB^TX(t)+HH)x(t)=\\
&=x^T(t)(A^TH+HA)x(t)+x^T(t)(X(t)BB^TX(t)+HH)x(t)-\\
&-x^T(t)(X(t)BB^TX(t)-B^TX^T(t)H-HX(t)B+HH)x(t)+\\
&=x^T(t)(A^TH+HA+HH)x(t)-x^T(t)(X(t)B-H)(X(t)B-H)^Tx(t)+\\
&+x^T(t)X(t)BB^TX(t)x(t)\le\\
&\le x^T(t)(A^TH+HA+HH)x(t)+x^T(t)X(t)BB^TX(t)x(t).
\end{aligned}$$

Согласно первому условию теоремы и принимая во внимание определение множества (7), заключаем, что для любых значений $A\in\mathbf{A}$ и $B\in\mathbf{B}$ существует такая симметрическая положительно определенная матрица $Q^*\in\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$, что справедливым является следующее равенство

$$A^TH^*+H^*A+H^*H^*=-Q^*.$$

Далее для любых матриц $A\in\mathbf{A}$ и $B\in\mathbf{B}$ при положительных значениях $\mu$ и $\Delta\mu$, удовлетворяющих неравенству $0<\mu<\mu+\Delta\mu<\min_{Q\in\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}}\lambda(Q)$, справедливым будет следующее выражение

$$\begin{aligned}
&x^T(t)(A^TH^*+H^*A+H^*H^*)x(t)+x^T(t)X(t)BB^TX^T(t)x(t)<\\
&<-(\mu+\Delta\mu)x^T(t)x(t)+x^T(t)X(t)BB^TX^T(t)x(t).
\end{aligned}$$

Определим множество таких $x$, при которых правая часть в последнем выражении будет отрицательной для любой $B\in\mathbf{B}$. Для этого достаточно найти множество таких $x$, при которых для любой $B\in\mathbf{B}$ симметрическая матрица

$$\mu I-X(t)BB^TX^T(t), \tag{10}$$

где $I$ — единичная матрица порядка $n$, неотрицательно определена, т.е. все ее собственные значения располагаются в правой полуплоскости комплексной плоскости. Используя теорему Гершгорина [6], заключаем, что для этого достаточно, чтобы круги Гершгорина матрицы (10) располагались в правой полуплоскости комплексной плоскости. Принимая во внимание развернутое представление

$$X(t)BB^TX^T(t)=\begin{pmatrix}
x^T(t)B_1B_1^Tx(t) & x^T(t)B_1B_2^Tx(t) & \dots & x^T(t)B_1B_n^Tx(t)\\
x^T(t)B_2B_1^Tx(t) & x^T(t)B_2B_2^Tx(t) & \dots & x^T(t)B_2B_n^Tx(t)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
x^T(t)B_nB_1^Tx(t) & x^T(t)B_nB_2^Tx(t) & \dots & x^T(t)B_nB_n^Tx(t)
\end{pmatrix},\ B\in\mathbf{B},$$

получаем неравенство

$$\mu - x^T(t)B_iB_i^Tx(t) \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |x^T(t)B_iB_j^Tx(t)|, \qquad B_i \in \mathbf{B}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\mu \geq x^T(t)B_iB_i^Tx(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |x^T(t)B_iB_j^Tx(t)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x^T(t)B_iB_j^Tx(t)|, \; B_i \in \mathbf{B}_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

поскольку

$$x^T(t)B_iB_i^Tx(t) \geq 0, \qquad B_i \in \mathbf{B}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оценим сверху сумму

$$\sum_{j=1}^{n} |x^T(t)B_iB_j^Tx(t)|, \qquad B_i \in \mathbf{B}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

для чего выполним следующие преобразования

$$\sum_{j=1}^{n} |x^T(t)B_iB_j^Tx(t)| = \sum_{j=1}^{n} |\frac{1}{2}x^T(t)B_iB_j^Tx(t) + \frac{1}{2}x^T(t)B_jB_i^Tx(t)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\frac{1}{2}x^T(t)(B_iB_j^Tx(t) + B_jB_i^T)x(t)| \leq$$

$$\leq ||x(t)||^2 \sum_{j=1}^{n} \max \left\{ \left| \min_{B_i \in \mathbf{B}_i B_j \in \mathbf{B}_j} \lambda(\frac{1}{2}(B_iB_j^T + B_jB_i^T)) \right|, \right.$$

$$\left. \left| \max_{B_i \in \mathbf{B}_i B_j \in \mathbf{B}_j} \Lambda(\frac{1}{2}(B_iB_j^T + B_jB_i^T)) \right| \right\} \leq$$

$$\leq ||x(t)||^2 \sum_{j=1}^{n} \max \left\{ \left| \min_{C_{ij} = C_{ij}^T \in \mathbf{C}_{ij}} \lambda(C_{ij}) \right|, \left| \max_{C_{ij} = C_{ij}^T \in \mathbf{C}_{ij}} \Lambda(C_{ij}) \right| \right\} =$$

$$= l_i ||x(t)||^2, \qquad B_i \in \mathbf{B}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), запишем

$$||x(t)||^2 \leq \mu / l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

С другой стороны

$$V(x) = x^T(t)Hx(t) \leq \Lambda(H)x^T(t)x(t) = \Lambda(H)||x(t)||^2.$$

Комбинируя последние два соотношения, можно записать

$$V(x) \leq \Lambda(H)\mu / \max_i l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, для всех $x$, удовлетворяющих последнему неравенству, т.е. для $x \in \mathcal{E}(\mu)$ симметрическая матрица (10) будет неотрицательно определенной для любой $B \in \mathbf{B}$. Тогда в области $\mathcal{E}(\mu)$ первая производная по времени функции Ляпунова (5) на траекториях движения каждой системы семейства (4) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x)\,|_{(\dot{x}(t)=Ax(t)+X(t)Bx(t))} < -(\mu+\Delta\mu)x^T(t)x(t) + x^T(t)X(t)BB^TX^T(t)x(t) \leq -\Delta\mu x^T(t)x(t)$$

равномерно по $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$. Привлекая известные результаты, например [7, 8], заключаем, что тривиальное решение $x(t, t_0, x_0) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво, а множество (6) принадлежит области притяжения начала координат. Теорема доказана.

## Цитированная литература

1. **Соколова С. П., Ивлев Р. С.** //Математический журнал. Алматы, 2002. Том 2, № 2. С.71–79
2. **Ивлев Р. С.** //Математический журнал. Алматы, 2002. Том 2, № 4(6). С.43–48
3. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М., 1987.
4. **Neumaier A.** Interval methods for systems of equations. Cambradge, 1990.
5. **Jansson C.** //Computing 46. Hamburg-Harburg, 1990.
6. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., 1988.
7. **Барбашин Е. А., Табуева В. А.** Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., 1969.
8. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

*Поступила в редакцию 24.09.2003г*

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 2 (12) . С. 104 — 109*

*УДК 517.0*

# ТЕОРЕМА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ-ПРАЙСА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНСА

Е. С. Смаилов, А. У. Бимендина

Карагандинский Государственный Университет им. Е.А.Букетова
г.Караганда ул.Университетская, 26 esmailov @ kargu.krg.kz

В теории тригонометрических рядов Фурье одним из важных результатов является теорема Харди-Литтлвуда, определяющая необходимое и достаточное условие принадлежности суммы тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами пространству $L_p[0,2\pi]$, $1 < p < +\infty$. Условие выражается в терминах коэффициентов разложения и дается двухсторонняя оценка нормы суммы [1]. Данная классическая теорема играет существенную роль в гармоническом анализе. Дело в том, что с помощью этой теоремы доказывается неулучшаемость многих важных теорем теории функций.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ — мультипликативная система Прайса [2].

Пусть $1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству Лоренца $L_{p\theta}[0,1]$, если

$$\|f\|_{p\theta} = \left\{ \frac{\theta}{p} \int\limits_0^1 t^{\frac{\theta}{p}-1} \left[ \frac{1}{t} \int\limits_0^t f^*(x)dx \right]^\theta dt \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

где $f^*(x)-$ невозрастающая перестановка функции $|f(x)|, \ x \in [0,1]$[3].

Для изложения основных результатов приведём следующие вспомогательные утверждения.

**Л е м м а 1 [4].** *Для любого $x \in [0,1]$ и целого $n \geq 0$ имеет место неравенство*

$$|D_n(x)| \leq 2q(x),$$

*где функция $q(x)$ определяется на $[0,1]$ следующим образом*

$$q(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}}, \qquad \textit{если } x \in \left[ \frac{l}{m_{n+1}}, \frac{l+1}{m_{n+1}} \right], \ l = 1,2,\ldots, \left[ \frac{p_{n+1}}{2} \right],$$

$$q(-x) = q(x), \textit{если } x \in \left[ \frac{p_{n+1}-l}{m_{n+1}}, \frac{p_{n+1}-l+1}{m_{n+1}} \right], \ l = 1,2,\ldots, \left[ \frac{p_{n+1}}{2} \right], \ n = 0,1,2,\ldots$$

Keywords: *Fourier-Price series, Lorentz space, generation sequence, monotone decrease, Abel transform*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

**Л е м м а 2 [5].** *Пусть $\beta \geq 1$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{\sin^{\beta} \frac{\pi j}{p_{k+1}}} \leq \begin{cases} p_{k+1} \ln p_{k+1}, & \beta = 1, \\ c_{\beta} p_{k+1}^{\beta}, & \beta > 1. \end{cases}$$

Теперь приведем основные результаты работы.

**Т е о р е м а 1.** *Пусть $f(x) \in L_1[0,1]$ и*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi(x)$$

*— её ряд Фурье-Прайса. Пусть образующая последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ системы Прайса ограничена и последовательность коэффициентов Фурье-Прайса монотонно убывает. Тогда*

*а) если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{m_k}^{\theta} m_k^{\theta(1-\frac{1}{p})} < +\infty, \quad 1 < p < +\infty, \quad 1 < \theta < +\infty,$$

*то $f(x) \in L_{p\theta}[0,1]$. При этом справедливо неравенство*

$$\|f\|_{p\theta}^{\theta} \leq c_{p\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m_k}^{\theta} m_k^{\theta(1-\frac{1}{p})};$$

*б) если $f(x) \in L_{p\theta}[0,1] (1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty)$, то сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{m_k}^{\theta} m_k^{\theta(1-\frac{1}{p})}$$

*и при этом справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{m_k}^{\theta} m_k^{\theta(1-\frac{1}{p})} \leq c_p \|f\|_{p\theta}^{\theta}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Мы будем пользоваться следующим легко проверяемым тождеством, называемым преобразованием Абеля

$$\sum_{k=m_n}^{N} a_k \varphi_k = \sum_{k=m_n}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) D_k(x) + a_N D_N(x) - a_{m_n} D_{m_n}(x).$$

Отсюда, в силу монотонности последовательности $\{a_n\}$ и леммы 1 следует, что

$$\left| \sum_{k=m_n}^{N} a_k \varphi_k(x) \right| \leq 2q(x) \sum_{k=m_n}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) + 4q(x) a_{m_n} = 6q(x) a_{m_n}.$$

Следовательно,

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{m_n-1} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=m_n}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{m_n-1} a_k + 6q(x) a_{m_n}.$$

Учитывая свойства для невозрастающей перестановки, получим

$$f^{**}(x)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(x)dx=\frac{1}{t}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\int\limits_M |f(x)|dx\le$$

$$\le\frac{1}{t}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)dx\le$$

$$\le\frac{1}{t}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\left\{\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)^\theta dx\right\}^{\frac{1}{\theta}}\left(\int\limits_M dx\right)^{\frac{1}{\theta'}}=$$

$$=\frac{1}{t}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\left\{\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)^\theta dx\right\}^{\frac{1}{\theta}}t^{\frac{1}{\theta'}}=$$

$$=t^{-1+\frac{1}{\theta'}}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\left\{\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)^\theta dx\right\}^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=t^{-\frac{1}{\theta}}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\left\{\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)^\theta dx\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Тогда

$$\|f\|_{p\theta}^\theta=\frac{\theta}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}}t^{\frac{\theta}{p}-1}(f^{**})^\theta dt=$$

$$=\frac{\theta}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}}t^{\frac{\theta}{p}-2}\sup_{M\subset[0,1],|M|=t}\left\{\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)^\theta dx\right\}dt\le$$

$$\le c_{p\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\sup_{M\subset[0,1],|M|=\frac{1}{m_n}}\left\{\int\limits_M\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k+6q(x)a_{m_n}\right)^\theta dx\right\}\left(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1}=$$

$$=c_{p\theta}(I_1+I_2),$$

где

$$I_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k\right)^\theta\frac{1}{m_n}\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k\right)^\theta 2\left(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}a_k\right)^\theta;$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1} \int\limits_0^{\frac{1}{m_n}} (q(x)a_{m_n})^\theta dx.$$

Оценим сумму $I_1$. Для этого предварительно заметим, что

$$\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\theta}{p}+1} dx = \frac{p}{\theta}\left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}},$$

$$\left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} a_k\right)^\theta = \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} a_k\right)^\theta \frac{\theta}{p} \int\limits_{m_n}^{m_{n+1}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\theta}{p}+1} dx \le$$

$$\le c_{p\theta} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} a_k\right)^\theta \sum_{\nu=m_n}^{m_{n+1}-1} \nu^{-\frac{\theta}{p}-1} \le c_{p\theta} \sum_{\nu=m_n}^{m_{n+1}-1} \nu^{-\frac{\theta}{p}-1} \left(\sum_{k=0}^{\nu} a_k\right)^\theta.$$

Теперь, используя неравенство Харди-Литтлвуда, сумму $I_1$ можем оценить следующим образом

$$I_1 \le c_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=m_n}^{m_{n+1}-1} \nu^{-\frac{\theta}{p}-1} \left(\sum_{k=0}^{\nu} a_k\right)^\theta \le c_{p\theta} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{-\frac{\theta}{p}-1} \left(\sum_{k=0}^{\nu} a_k\right)^\theta \le$$

$$\le c_{p\theta} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^\theta a_\nu^\theta \nu^{-\frac{\theta}{p}-1} = c_{p\theta} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta.$$

Для последней суммы в силу монотонности $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ справедлива оценка

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{\nu=m_j}^{m_{j+1}-1} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m_j}^\theta \int\limits_{m_j}^{m_{j+1}} x^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} dx = c_{p\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m_j}^\theta (m_{j+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})} - m_j^{\theta(1-\frac{1}{p})}) =$$

$$c_{p\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m_j}^\theta m_{j+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})} \left[1 - \left(\frac{1}{p_{j+1}}\right)^{\theta(1-\frac{1}{p})}\right] \le c_{p\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m_j}^\theta m_{j+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})}.$$

Поэтому

$$I_1 \le c'_{p\theta} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m_j}^\theta m_j^{\theta(1-\frac{1}{p})}.$$

Теперь оценим сумму $I_2$. Учитывая, что функция $q(x)$ на промежутке $\left[\frac{j}{m_{n+1}}, \frac{j+1}{m_{n+1}}\right]$ принимает постоянное значение, равное $\frac{m_n}{\sin\frac{\pi j}{p_{n+1}}}$, и лемму 3, имеем

$$I_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1} \int\limits_0^{\frac{1}{m_n}} (q(x)a_{m_n})^\theta dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1} \sum_{j=0}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\frac{j}{m_{n+1}}}^{\frac{j+1}{m_{n+1}}} |q(x)|^{\theta} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{p}-1} \sum_{j=0}^{p_{n+1}-1} \left(\frac{m_n}{\sin \frac{\pi j}{p_{n+1}}}\right)^{\theta} \left(\frac{j+1}{m_{n+1}} - \frac{j}{m_{n+1}}\right) \leq$$

$$\leq c_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} \frac{m_n^{\theta}}{m_{n+1}} \frac{1}{m_{n+1}^{\frac{\theta}{p}-1}} p_{n+1}^{\theta} = c_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} \frac{m_{n+1}^{\theta}}{m_{n+1}^{\frac{\theta}{p}}} = c_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} m_{n+1}^{\theta-\frac{\theta}{p}} = c'_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} m_n^{\theta(1-\frac{1}{p})}.$$

Тогда

$$\|f\|_{p\theta}^{\theta} \leq c_{p\theta}(I_1 + I_2) = c_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_n}^{\theta} m_n^{\theta(1-\frac{1}{p})}.$$

Первый пункт теоремы доказан. Теперь докажем обратную оценку. Для этого введем обозначение

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \quad F_1(x) = \int\limits_0^x |f(t)|dt.$$

Учитывая, что

$$D_{m_n}(x) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \varphi_k(x) = \begin{cases} m_n, & x \in [0, \frac{1}{m_n}], \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{m_n}] \end{cases}$$

и монотонность последовательности $\{a_n\}$, имеем

$$F(\frac{1}{m_{n+1}}) = \frac{1}{m_{n+1}} \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} a_n \geq a_{m_{n+1}}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_{n+1}}^{\theta} m_{n+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left[F\left(\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right]^{\theta} m_{n+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})} \leq c_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} m_{n+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})} \left[F_1\left(\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right]^{\theta}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} x^{-\theta(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} dx = c_{p\theta} m_{n+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})},$$

то предыдущее неравенство продолжим следующим образом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m_{n+1}}^{\theta} m_{n+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})} \leq c'_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[F_1\left(\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right]^{\theta} \int\limits_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} x^{-\theta(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})} dx =$$

$$= c'_{p\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} \left[\left(\frac{1}{x} F_1(x)\right) x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}\right]^{\theta} dx = c'_{p\theta} \int\limits_0^1 \left[\frac{F_1(x)}{x}\right]^{\theta} x^{\frac{\theta}{p}-1} dx;$$

Так как

$$\frac{1}{x}F_1(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x|f(x)|dt\leq\frac{1}{x}\left(\sup_{M\subset[0,1],|M|=x}\int\limits_M|f(x)|dt\right)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x f^*(t)dt=f^{**}(x),$$

то отсюда получим

$$\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}a_{m_{n+1}}^{\theta}m_{n+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\leq c_{p\theta}\left\{\int\limits_0^1 x^{\frac{\theta}{p}-1}(f^{**}(x))^{\theta}dx\right\}^{\frac{1}{\theta}}=c_{p\theta}\|f\|_{p\theta}.$$

Теорема полностью доказана.

**Т е о р е м а 2.** *Пусть $f(x)\in L_1[0,1]$ и*

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\varphi_k(x)$$

*— её ряд Фурье-Прайса. Если образующая последовательность системы Прайса ограничена и последовательность коэффициентов Фурье монотонно убывает, то для того, чтобы $f(x)\in L_{p\theta}[0,1]$ при $1<p<+\infty, 1<\theta<+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\theta(1-\frac{1}{p})-1}a_n^{\theta}<+\infty.$$

*При этом существуют константы $c_i(\theta,p)>0, \quad i=1,2$, независящие от $f(x)$ такие, что*

$$c_1(\theta,p)\|f\|_{p\theta}\leq\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\theta(1-\frac{1}{p})-1}a_n^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\leq c_2(\theta,p)\|f\|_{p\theta}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу $a_n\downarrow 0,\ n\to+\infty$ и ограниченности последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ следует, что

$$c'(p,\theta)\sum_{k=0}^{+\infty}m_{k+1}^{\theta(1-\frac{1}{p})}a_{m_k}^{\theta}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\theta(1-\frac{1}{p})-1}a_n^{\theta}\leq c''(p,\theta)\sum_{n=0}^{+\infty}m_k^{\theta(1-\frac{1}{p})}a_{m_k}^{\theta}.$$

Теперь остаётся воспользоваться утверждениями теоремы 1.

## Цитированная литература


1. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. М., 1965. Т.2, № 2. "Мир"

2. **Голубов Б. И., Ефимов А. Б., Скворцов В. А.** Ряды и преобразования Уолша. М., 1987.

3. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. М., 1974.

4. **Шербаков В. И.** О сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам. МГУ., № 5120-82. Деп.

5. **Жантлесов Ж. Х.** Коэфициенты Фурье и аппроксимативные свойства рядов Фурье по мультипликативной системе. Дисс. на степень кандидата физ.-мат. наук. Караганда., 1988.


*Поступила в редакцию 03.05.2004г.*

## РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.51 2000 MSC: 47G10

Abylaeva A.M., Oinarov R. **Boundedness criteria of a class of fractional integral operators.** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P.5–14.

For a class of integral operators of fractional type one necessary and sufficient conditions of boundedness in weighted Lebesgue spaces are given. In addition, the weight of space from which the considering integral operator is acting connects with its kernel.
References — 8.

УДК: 517.51 2000 MSC: 47G10

Абылаева А.М., Ойнаров Р. **Бөлшекті интгралдайтын опреторлардың бір класының шектелу нысаны.**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б.5–14.

Лебег салмақты кеңістігінде бөлшекті интегралдау типтес интегралдық операторладың бір класы үшін шектелу нышыны тағайындалды, сонымен бірге интегралдық оператор қарастырылып отырған кеңістіктің салмағы оның өзегімен байланысты.
Библ. — 8.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A16

Akishev G. **On condition of the convergence series of Fourier coefficients with respect to multiplicative systems.**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P. 15–22.

It's proved the sufficient conditions of convergence of series of Fourier coefficients with respect to multiplicative system in terms of group modulus of continuity and the best approximation.
References — 15.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A16

Ақышев Ғ. **Мультипликативтік жүйе бойынша Фурье коэффициенттерінен құрылған қатардың жинақталу шарттары.**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б. 15–22.

Мультипликативтік жүйе бойынша Фурье коэффициенттерінен құрылған қатардың жинақталу шарттары дәлелденген. Осы шарттардың жақсартылмайтындығы көрсетілген.
Библ. — 15.

УДК: 519.6:537.12:531.1 2000 MSC: 35Q60

Alexeyeva L.A. **On one model of electro-gravymagnetic field. Fields interaction equations and conservation laws** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P. 23–34.

Equations of one model of electro-gravimagnetic field in complex quaternions are constructed. Electro-gravymagnetic fields interaction equations are bilt, and on their base the analogues of three Newton laws well-known in mechanics are constructed for free and interacting fields and for total field. The laws of energy transformation and conservation during fields interaction are considered.
References — 10.

УДК: 519.6:537.12:531.1 2000 MSC: 35Q60

Алексеева Л.А. **Электро-гравимагниттік өрістің бір моделі туралы. Өрістердің әсерлесу теңдеулері мен сақталу заңдары**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б. 23–34.

Электро-гравимагниттік өорістің комплекстік кватерниондар түріндегі математикалық моделі берілген. Электромагниттік өрістердің әсерлесу теңдеулері, сонымен бірге оның негізінде еркін, әсерлесетін және қортқы өрістер үшін механикадағы Ньютонның үш белгілі заңдарының баламалары тұрғызылған. Өрістердің әсерлесу кезіндегі энергиясы мен зарядтардың сақталу заңдары қарастырылған. Еркін бейстационар, статикалық және гармоникалық өрістің дербес жағыдайлары қарастырылған.
Библ. — 10.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J25, 35C05, 35B40

Bizhanova G.I. **On the asymptotic solutions of the boundary value problems for the elliptic equations in a half-space. II.**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P.35–46.

Solutions of conjunction problem for the elliptic equations in $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ in the closed form is constructed. The formulas establishing the asymptotic behavior of the problem with conventional derivative and conjunction one as $|x| \to \infty$ are derived.
References — 1.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J25, 35C05, 35B40

Бижанова Г.И. **Жартылай кеңістіктегі эллипстік теңдеулердің шеттік есептерінің асимптотикалық шешімдері туралы. II.**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б.35–46.

Екінші ретті эллипстік теңдеулер үшін түйындестіру есептің $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, кеңістіктерінде айқын түрде шешімі турғызылды. Көлбеу туындылы және туйындестіру есептердің шешімдерінің $|x| \to \infty$ асимптотикалық тәртібін тағайындайтын формулалары алынды.
Библ. — 1.

УДК: 517.624.3 2000 MSC: 34B15

Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. **On one approach of choosing of initial approximation for nonlinear two-points boundary value problem**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P.47–51.

On one approach of choosing of initial approximation for nonlinear two-points boundary problem is proposed using additional parameter introduction method.

References — 12.

УДК: 517.624.3 2000 MSC: 34B15

Жұмабаев Д.С., Темешева С.М. **Сызықсыз екі нүктелі шеттік есеп үшін алғашқы жуықтауды таңдаудың бір тәсілі туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б.47–51.

Қосымша параметрлер енгізу әдісінің негізінде сызықсыз екі нүктелі шеттік есеп үшін алғашқы жуықтауды таңдау тәсілі ұсынылған.

Библ. — 12.

УДК: 517.977.55 2000 MSC: 49K15

Murzabekov Z.N. **Sufficient conditions of optimality for dynamical control systems with fixed ends**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P.52–59.

The optimal control system with fixed ends is considered. Sufficient conditions of optimality for dynamical control systems are received using Lagrange multiplier of special form and Lyapunov function .

References — 6.

УДК: 517.977.55 2000 MSC: 49K15

Мұрзабеков З.Н. **Шеттері бекітілген динамикалық басқару жүйелерінің тиімділігінің жеткілікті шарттары**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б.52–59.

Шеттері бекітілген тиімді басқару есебі қарастырылған. Тиімді жеткілікті шарттың динамикалық жүйеге арнайы түрде және Ляпунов функцияларының берілген қасиеттерін Лагранж көпмүшелігіне қолданылуы алынған.

Библ. — 6.

УДК: 681.324 2000 MSC: 94A60

Otelbaev M., Seytkulov E.N. **Mathematical methods of information protection by using computation systems**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 2 (12). P.60–67.

This problems appeared due to the availability of computation systems to someone who's illegal using of computation information and data.

References — 3.

УДК: 681.324 2000 MSC: 94A60

Отелбаев М., Сейткулов Е.Н. **Математикалық ақпарат қорғау әдісінің есептеу жүйелерін қолданған кезде**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б.60–67.

Бұл мақалада криптографияның кейбір тыі проблемалары қарастырылып, олардың біразының шешімдері берілді. Мұндай проблемалардың туындауына көп жағдайда нәтиженің заңсыз қолданғысы келетіндердің есептеу жүйелеріне қол сұға алатындығы себепкер.

Библ. — 3.

УДК: 519.2 2000 MSC: 62F03, 65C05

Пя Н. **Критерии согласия для логистического распределения**//Математический журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12).С.68–75.

В данной статье рассматривается применение модифицированных критериев хи-квадрат (Джапаридзе-Никулина и Мирвалиева) и статистики Андерсона-Дарлинга, основанного на эмпирической функции распределения, для проверки сложной нулевой гипотезы о логистическом распределении вероятностей. Исследована зависимость мощностей данных критериев от числа равновероятных интервалов со случайными границами. Применен итерационный метод Фишера улучшения неэффективных оценок, полученных по методу моментов, для критерия Никулина-Рао-Робсона, основанного на равновероятных интервалах со случайными границами.

Источники — 12.

УДК: 519.2 2000 MSC: 62F03, 65C05

Пя Н. **Логистикалық үнстұруге арналған келісім белгілері** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 2 (12). Б.68–75.

Бұл мақалады модификациялық белгілері хи-квадрат (Джапаридзе-Никулиннің және Мирвалиевтің) және эмпиризмдік функцияның үлестірілуінде негізделген Андерсон-Дарлингтің статистикасының қолданылуы қарастырылған. Кездейсоқ шектері бар, тең ықтимал аралықтағы санға берілген белгілердің қуаттылығының тәуелділігі зерттелген. Сондай-ақ, тең ықтимал аралықтары мен кездейсоқ шектерімен негізделген Никулин-Рао-Робсон белгісі үшін мезеттер әдісімен алынған Фишердің тиімді емес бағалауларды жақсартуға арналған итерациондық әдісі қолданылған.

Библ. — 12.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   **Цитированная литература**

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.