

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

MATHEMATICAL JOURNAL

2011, том 11, № 3–4 (41, 42)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МОН РК

АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 11, № 3–4 (41, 42), 2011

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Главный редактор:

Н.К.Блиев

Заместители главного редактора:

Д.Б.Базарханов, Г.И.Бижанова

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, А.Т.Асанова, Б.С.Байжанов, Р.Г.Бияшев, В.Г.Воинов,
М.Т.Дженалиев, Н.С.Даирбеков, Н.Т.Данаев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев,
Т.Ш.Кальменов, А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак,
М.Г.Перетяцкий, М.А.Садыбеков, М.И.Тлеубергенов, С.Н.Харин,
Г.К.Бухарбаева, Ж.К.Джобулаева, И.Н.Панкратова

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),

8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),

факс: 8 (727) 2 72 70 24,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2011г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 11

№ 3–4 (41, 42)

2011

<i>A. H. Abdalla, A. Kaltayev</i> , Weighted essentially non-oscillatory schemes for supersonic air flow with perpendicular hydrogen injection	5
<i>С. А. Айсагалиев, Ш. А. Айпанов, Т. Ш. Иманкул</i> , Предельные циклы в динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством	14
<i>А. Т. Асанова</i> , Функционалдық параметрі бар екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін шеттік есептің шешілімдігі туралы	25
<i>А. А. Джумабаева, Н. Т. Тлеуханова</i> , Анизотропные классы множителей	30
<i>Т. Ш. Иманкул</i> , Вопросы восстановления правой части системы дифференциальных уравнений по дополнительной информации	37
<i>С. Д. Маусумбекова</i> , Численное исследование обтекания двух препятствий, расположенных тандемом, потоком сжимаемого газа	42
<i>А. Сакабеков, Д. Аужани</i> , О разрешимости начально-краевой задачи для одномерной нелинейной моментной системы Больцмана	50
<i>Л. П. Фалалеев</i> , О непрерывных методах суммирования коэффициентов Фурье функций из различных пространств	59
Хроника	63
Рефераты	67

CONTENTS

Volume 11

No. 3–4 (41, 42)

2011

<i>A. H. Abdalla, A. Kaltayev</i> , Weighted essentially non-oscillatory schemes for supersonic air flow with perpendicular hydrogen injection	5
<i>S. A. Aisagaliev, Sh. A. Aipanov, T. Sh. Imankul</i> , Limit cycles in dynamical systems with cylindrical phase space	14
<i>A. T. Asanova</i> , On a solvability of boundary value problem for the systems of hyperbolic equations of second order with a functional parameter	25
<i>A. A. Jumabayeva, N. T. Tleukhanova</i> , Anisotropic classes of multipliers	30
<i>T. Sh. Imankul</i> , The restoration of the right-hand side of the system of differential equations on additional information	37
<i>S. D. Mausumbekova</i> , Numerical study of flowover of two obstacles located in tandem, by the flow of gas compressed	42
<i>A. Sakabekov, D. Auzhani</i> , About solvability of the initial and boundary value problem for the onedimensional nonlinear Boltzmann's moment system	50
<i>L. P. Falaleev</i> , On continuous methods of summation of Fourier coefficients of functions from different spaces	59
Chronicle	63
Reviews	67

УДК 532.526

WEIGHTED ESSENTIALLY NON-OSCILLATORY SCHEMES FOR SUPERSONIC AIR FLOW WITH PERPENDICULAR HYDROGEN INJECTION

A.H. ABDALLA, A. KALTAYEV

Department of Mechanics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
050040, Almaty, 71 Al Farabi st, e-mail: amr.hassan1@hotmail.com

Two-dimensional numerical model of the supersonic turbulent multi-species flow with the perpendicular injection of hydrogen from the slots located symmetrically on the lower and the upper walls of a channel is constructed. An algorithm is developed for solving the Favre-averaged Navier - Stokes equations for the flow of a thermally perfect multi-species gas based on the fourth order weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes. The effect of the jet pressure ratio on the wall was compared with the results obtained by ENO scheme (essentially non-oscillatory scheme) and the experimental work.

Transverse injection into a supersonic cross flow has been encountered in many engineering applications ranging from scramjet combustors and solid rocket motor or liquid engine thrust vector control systems to high-speed flight vehicle reaction control jets. Efficient combustion via mixing enhancement is the goal in scramjet fuel injection systems, whereas in thrust vector control systems and reaction control jet applications the objective is to divert the main flow in order to gain additional side forces. The difficulty of numerical modeling of the interaction of the transverse jet with a supersonic turbulent flow is due to the fact that the use of schemes of order higher than one causes oscillations in solutions and discontinuities in computed functions.

A considerable success in solving the problem pointed were achieved by introducing additional dissipative terms in difference equations, which refinement the difference operators in the discontinuity neighborhood [1, 2].

Recently for solving this problem the monotone conservative schemes of higher order accuracy without introducing artificial dissipative terms, such as the TVD-scheme (Total Variation Diminution Schemes) are using [3]. The main disadvantage of the TVD-scheme is that the solution in the neighborhood of a shock region has accuracy of the first order, as a result of a very strong spreading of shocks structure appearing in the flow ahead of the jet. To overcome this disadvantage a finite difference schemes of high order accuracy, such as the ENO-schemes (Essentially Non-oscillatory Schemes) and WENO-scheme (Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes) are used.

Keywords: *Turbulence, supersonic flow*

2010 Mathematics Subject Classification: 76F40

© A.H. Abdalla, A. Kaltayev, 2011.

The basic idea of WENO schemes is the same as the standard cell-average version of ENO schemes but the main difference is that, instead of choosing one interpolating polynomial for the ENO schemes reconstruction, we use a convex combination of all candidates to achieve the essentially non-oscillatory property, while additionally obtaining one order of improvement in accuracy. This is done by introducing weight coefficient to the convex combination.

In this article planar turbulent supersonic air flow with a transverse hydrogen injection from the channel walls is numerically simulated based on the method developed for solving the Navier-Stokes equations for multi-component gas mixture flow. For the convenience of computation we consider the injecting of the jet with the bottom wall. Flow scheme is shown in Fig.1. The computational code has been developed on the basis of the fourth order weighted essentially non-oscillatory (WENO) schemes.

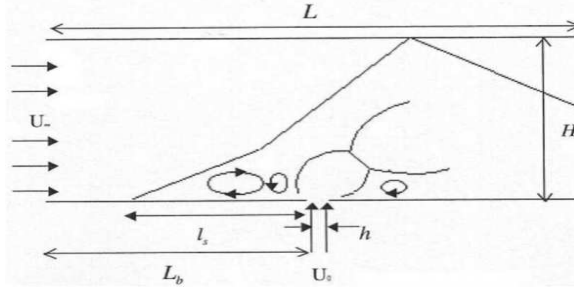


Fig.1. Flow diagram.

Model equations

In Cartesian coordinates two-dimensional Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for N different species flow in conservation form are:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \\ \rho Y_i \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u w \\ (E_t + P) u \\ \rho u Y_i \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w w \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P) w \\ \rho w Y_i \end{pmatrix},$$

The components \vec{E}_v , \vec{F}_v are written in the form:

$$\vec{E}_v = (0, \quad \tau_{xx}, \quad \tau_{xz}, \quad u\tau_{xx} + u\tau_{xz} - q_x, \quad J_{ix})^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \quad \tau_{xz}, \quad \tau_{zz}, \quad w\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, \quad J_{iz})^T,$$

$$P = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{W_i} \right), \quad \sum_{i=1}^N Y_i = 1, \quad (2)$$

$$E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{i=1}^N Y_i h_i - P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad (3)$$

$$h_i = h_i^0 + \int_{T_0}^T c_{Pi} dT, \quad c_{Pi} = C_{Pi}/W,$$

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{\mu}{Re}(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_x)), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re}(u_x + w_z), \quad \tau_{zz} = \frac{\mu}{Re}(2u_z - \frac{2}{3}(u_z + w_z)), \\ q_x &= \left(\frac{\mu}{PrRe}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{i=1}^N h_i J_{ix}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{PrRe}\right)\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{i=1}^N h_i J_{iz}, \\ J_{ix} &= -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \quad J_{iz} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_i}{\partial z}.\end{aligned}$$

Here the quantity Y_i is the mass concentration of the i -th component, the mass concentration index $i = 1$ corresponds to O_2 , $i = 2$ corresponds to H_2 and $i = 3$ corresponds to N_2 ; $N = 3$ is the number of components in the mixture of gases. The mass concentrations of O_2 , H_2 and N_2 are members in the vector \vec{U} of the system (1), the molar specific heat C_{P_i} of the i -th component is given in terms of the fourth degree polynomial with respect to temperature which constants can be found in the JANAF Thermochemical Tables [4], where W_i is the molar weight of the i -th component, $\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz}, \tau_{zx}$ are the viscous stress tensors and q_x, q_z are the heat fluxes, J_{ix}, J_{iz} are the diffusion fluxes (diffusion fluxes are defined from Fick's Law), Pr , Sc and Re are the Prandtl, Schmidt, and Reynolds numbers, $\mu = \mu_L + \mu_t$ is the sum of the coefficients of the laminar and turbulent viscosity, the Baldwin - Lomax model is used for determining μ_t .

The system of equations (1)-(3) is written in a dimensionless form. The governing parameters are the entrance parameters, the pressure and total energy are normalized to $\rho_\infty u_\infty^2$, the enthalpy — to $R^0 T_\infty / W_\infty$, the molar specific heat — to R^0 .

The boundary conditions

The boundary conditions have the following form:

at the entrance

$$W_i = W_{i\infty}, P = P_\infty, T = T_\infty, u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R^0 T_\infty}{W_\infty}}, w = 0, Y_i = Y_{i\infty}, x = 0, 0 \leq z \leq H;$$

on the lower wall

the no-slip and adiabatic wall conditions are imposed, i.e.

$$u = 0, w = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ and } \frac{\partial P}{\partial z} = 0;$$

on the jet

$$W_i = W_{i0}, P = nP_\infty, T = T_0, w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R^0 T_0}{W_0}}, u = 0, Y_i = Y_{i0}, z = 0, L_b \leq x \leq L_b + h$$

($n = P_0/P_\infty$ is the jet pressure ratio, P_0 is the jet pressure, and P_∞ is the flow pressure. In the equations index "0" refers to the jet parameters and " ∞ " refers to the inflow parameters);

on the upper boundary

the condition of symmetry is assumed, i.e.

$$w = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0;$$

on the outflow

the non-reflecting boundary condition is taken [5].

Method of solution

As known that in the region near the wall where the boundary layer exists and at the jet level there is a difference in the values of parameters (Pressure, Temperature, etc.) between the flow and injection jet; this difference causes a large gradient in the region. For this reason a linear coordinates transformation is used to increase the grid points in this region. For that the system of equations (1) is written in transformed new coordinate system form as following:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta}, \quad (4)$$

where $\vec{E}_v = \vec{E}_{v2} + \vec{E}_{vm}$, $\vec{F}_v = \vec{F}_{v2} + \vec{F}_{vm}$ ("v2" refers to second order derivative and "vm" refers to second order mixed derivative), $\tilde{U} = U/J$, $\tilde{E} = \xi_x E/J$, $\tilde{F} = \eta F/J$, $\tilde{E}_{v2} = \xi_x E_{v2}/J$, $\tilde{E}_{vm} = \xi_x E_{vm}/J$, $\tilde{F}_{v2} = \eta_z F_{v2}/J$, $\tilde{F}_{vm} = \eta_z F_{vm}/J$, $J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, z)}$ is the Jacobian of the transformation. The parameters of coordinate transformation are as follows [6]:

$$\xi(x) = K + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh} \left[\left(\frac{x}{x_c} - 1 \right) \operatorname{sh}(\tau K) \right], \quad \eta(z) = H \frac{\left[(\beta+1) - (\beta-1) \left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^{1-\frac{z}{a}} \right]}{\left[\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^{1-\frac{z}{a}} + 1 \right]},$$

$\zeta(y) = K + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh} \left[\left(\frac{y}{y_c} - 1 \right) \operatorname{sh}(\tau K) \right]$, where $K = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{(1 + (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L})}{(1 - (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L})} \right]$, β, τ are the clustering coefficients with $\beta, \tau > 1$, a is the computational region height in the new coordinate system and x_c is the point with respect to which the clustering is done.

In the paper [7] the approximation of convection terms of (4) is carried out by using the ENO scheme which is constructed according to a principle of Godunov's scheme, and using Newton's polynomial of third degree to interpolate the piecewise polynomial function. In this work the convection terms are approximated by using WENO scheme construction technique with the same basic idea as ENO scheme. However, in WENO scheme instead of choosing one interpolating polynomial, we use a convex combination of all corresponding polynomials. This is done by introducing weight coefficients to the convex combination. The WENO scheme is constructed for the system (4) by using an accurate flux representation at each nodal point and getting the modified fluxes (will be defined later).

The one step of the finite difference scheme for the integration in time of system (4) is presented formally as:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left[(\hat{A}_\xi^+ + \hat{A}_\xi^-) \frac{\partial \vec{E}^M}{\partial \xi} + (\hat{B}_\eta^+ + \hat{B}_\eta^-) \frac{\partial \vec{F}^M}{\partial \eta} \right] - \\ - \left[\frac{\partial (\tilde{E}_{v2}^{n+1} + \tilde{E}_{vm}^n)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\tilde{F}_{v2}^{n+1} + \tilde{F}_{vm}^n)}{\partial \eta} \right] = o\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

where $(\hat{A}_\xi^\pm, \hat{B}_\eta^\pm)$ are the split normalized Jacobian matrices. They are given by

$$\hat{A}_\xi^\pm = R \left(\frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1}, \quad \hat{B}_\eta^\pm = T \left(\frac{1 \pm \operatorname{sign}(\Lambda_\eta)}{2} \right) T^{-1}, \quad (6)$$

where R and T are the matrices of the left and right eigenvectors respectively and $(\Lambda_\xi, \Lambda_\eta)$ are diagonal matrices of eigenvalues. Here \vec{E}^M and \vec{F}^M are called the modified fluxes vectors at nodal points (i, j) which consist of the original convective fluxes vectors (\vec{E}, \vec{F}) and additional terms of a high order of accuracy $(\vec{E}_\xi, \vec{D}_\xi, \vec{E}_\eta, \vec{D}_\eta)$, i.e.

$$\vec{E}_{ij}^M = \vec{E}_{ij} + (\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ij}, \quad \vec{F}_{ij}^M = \vec{F}_{ij} + (\vec{F}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ij}. \quad (7)$$

For positive and negative eigenvalues λ_{ij} the vectors $(\vec{E}_\xi)_{ij}$ and $(\vec{D}_\xi)_{ij}$ are represented in a convex combination form as following:

for positive eigenvalues $\lambda_{ij} > 0$

$$(\vec{E}_\xi)_{ij} = \frac{\alpha_{2ij}}{\sum_{k=0}^2 \alpha_{kij}} (\bar{E}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\alpha_{1ij}}{\sum_{k=0}^2 \alpha_{kij}} ((\bar{E}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + (\bar{E}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j}) + \frac{\alpha_{0ij}}{\sum_{k=0}^2 \alpha_{kij}} (\bar{E}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j},$$

$$(\vec{D}_\xi)_{ij} = \frac{\alpha_{2ij}}{\sum_{k=0}^2 \alpha_{kij}} \Delta_+ (\bar{D}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\alpha_{1ij}}{\sum_{k=0}^2 \alpha_{kij}} (\Delta_- (\bar{D}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + \Delta_+ (\hat{D}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j}) + \frac{\alpha_{0ij}}{\sum_{k=0}^2 \alpha_{kij}} \Delta_- (\hat{D}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j};$$

for negative eigenvalues $\lambda_{ij} < 0$

$$\begin{aligned} (\vec{E}_\xi)_{ij} &= \frac{\bar{\alpha}_{2ij}}{\sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{kij}} (\bar{E}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\bar{\alpha}_{1ij}}{\sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{kij}} ((\bar{E}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + (\bar{E}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j}) + \frac{\bar{\alpha}_{0ij}}{\sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{kij}} (\bar{E}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j}, \\ (\vec{D}_\xi)_{ij} &= \frac{\bar{\alpha}_{2ij}}{\sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{kij}} \Delta_+ (\hat{D}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\bar{\alpha}_{1ij}}{\sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{kij}} (\Delta_- (\hat{D}_\xi)_{i+\frac{1}{2}j} + \\ &\quad + \Delta_+ (\bar{D}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j}) + \frac{\bar{\alpha}_{0ij}}{\sum_{k=0}^2 \bar{\alpha}_{kij}} \Delta_- (\bar{D}_\xi)_{i-\frac{1}{2}j}, \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} (\bar{E}_\xi)_{i\pm\frac{1}{2}j} &= (R \text{sign}(\Lambda_\xi) R^{-1})_{i\pm\frac{1}{2}j} \left[\frac{I - \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi}\right) (R |\Lambda_\xi| R^{-1})_{i\pm\frac{1}{2}j}}{2} \right] \Delta_\pm \tilde{E}_{ij}, \\ (\bar{D}_\xi)_{i\pm\frac{1}{2}j} &= (R \text{sign}(\Lambda_\xi) R^{-1})_{i\pm\frac{1}{2}j} \left[\frac{\left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi}\right) (R |\Lambda_\xi| R^{-1})_{i\pm\frac{1}{2}j}\right]^2 - I}{6} \right] \Delta_\pm \tilde{E}_{ij}, \\ (\hat{D}_\xi)_{i\pm\frac{1}{2}j} &= (\bar{E}_\xi)_{i\pm\frac{1}{2}j} + (\bar{D}_\xi)_{i\pm\frac{1}{2}j}, \end{aligned}$$

where $\alpha_{kij}, \bar{\alpha}_{kij} > 0$ are defined as

$$\alpha_{kij} = \frac{C_{kij}}{(\varepsilon + IS_{i+kj})^3} \quad \text{and} \quad \bar{\alpha}_{kij} = \frac{\bar{C}_{kij}}{(\varepsilon + IS_{i+kj})^3}, \quad (9)$$

where $C_{0ij} = \frac{1}{12}, C_{1ij} = \frac{1}{2}, C_{2ij} = \frac{1}{4}, \bar{C}_{0ij} = \frac{1}{4}, \bar{C}_{1ij} = \frac{1}{2}, \bar{C}_{2ij} = \frac{1}{12}$ [8] and IS_{ij} is the smoothness indicator of the solution and is defined by the summation of all average of square values of the same order differences; it is represented as

$$IS_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right) [(\Delta \tilde{U}_{i-2j})^2 + (\Delta \tilde{U}_{i-1j})^2] + [\Delta^2 \tilde{U}_{i-2j}]^2, \quad (10)$$

where $\Delta \tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{i+1j} - \tilde{U}_{ij}$ and $\Delta^2 \tilde{U}_{ij} = \Delta \tilde{U}_{i+1j} - \Delta \tilde{U}_{ij}$.

In order to avoid undefined values of α_{kij} and $\bar{\alpha}_{kij}$ in (9) a small positive number $10^{-7} \leq \varepsilon \leq 10^{-5}$ is added in the denominator. The other vectors $(\vec{E}_\eta)_{ij}$ and $(\vec{D}_\eta)_{ij}$ are written similarly. To get the implicit algorithm for solving equation (5), the terms which containing second derivatives are presented in the form of two vectors: the vectors of the second derivatives and the vectors of dissipative terms. The vectors of the mixed derivatives are approximated explicitly with second order of accuracy [9]. The convection terms are linearized by using the homogeneity property. After applying the factorization to the system (5) we have two operators:

first step:

$$\left[I + \Delta t \left[(\hat{A}_{1-\frac{1}{2}j}^+ \Delta_- (A_\xi^n)_{ij} + \hat{A}_{i+\frac{1}{2}j}^- \Delta_+ (A_\xi^n)_{ij}) + \Delta \left(\frac{\mu t \xi_x^2}{ReJ} \right)_{ij} \Delta \left(\frac{1}{U_1^n} \right)_{ij} \right] \right] U_{ij}^* = [RHS_\xi^n + RHS_\eta^n]_{ij},$$

second step:

$$\left[I + \Delta t \left[(\hat{B}_{1-\frac{1}{2}j}^+ \Delta_- (B_\eta^n)_{ij} + \hat{B}_{i+\frac{1}{2}j}^- \Delta_+ (B_\eta^n)_{ij}) + \Delta \left(\frac{\mu t \eta_z^2}{ReJ} \right)_{ij} \Delta \left(\frac{1}{U_1^n} \right)_{ij} \right] \right] \tilde{U}_{ij}^{n+1} = U_{ij}^*, \quad (11)$$

where

$$(RHS_{\xi}^n)_{ij} = \hat{A}_{i+\frac{1}{2}j}^- [(\vec{E}_{\xi} + \vec{D}_{\xi})_{i+1j} - (\vec{E}_{\xi} + \vec{D}_{\xi})^{ij}]^n + \hat{A}_{i-\frac{1}{2}j}^+ [(\vec{E}_{\xi} + \vec{D}_{\xi})_{ij} - (\vec{E}_{\xi} + \vec{D}_{\xi})^{i-1j}]^n,$$

here $(\vec{E}_{\xi})_{ij}$ and $(\vec{D}_{\xi})_{ij}$ are given in (8). The second term $(RHS_{\eta}^n)_{ij}$ is written similarly.

The approximation of the first derivatives in the system (11) is carried out by using Upwind differences of first order accuracy, and a central differences of the second order accuracy have been used for the approximation of the second derivatives. The system of the equations (11) is solved with respect to the vector of thermodynamics parameters by the matrix sweep, and the vector of mass concentrations of the mixture is computed by tridiagonal inversion. As follows from (6), it is necessary to determine the Jacobi matrices components of the left and right eigenvectors R , R^{-1} , T and T^{-1} . The Jacobi matrices whose computation in the case of a thermally perfect gas faces the difficulties related to the explicit determination of pressure in terms of the variables sought for. One of the ways to bridge over these difficulties was presented in [2]. Similarly to this work, we introduce the effective adiabatic exponent of the gaseous mixture, namely

$$\bar{\gamma} = \frac{h_{sm}}{e_{sm}}, \quad (12)$$

where $h_{sm} = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i \int_{T^0}^T C_{P_i} dT$ and $e_{sm} = \sum_{i=1}^{N_p} Y_i \int_{T^0}^T C_{v_i} dT$ are the enthalpy and the internal energy of the mixture without regard for the formation heat and energy, T^0 is the standard formation temperature, which enables one to write the following expression for the pressure:

$$P = (\bar{\gamma} - 1) [E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) - \rho \frac{h^0}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2}] + \frac{\rho T^0}{M_{\infty}^2 W}. \quad (13)$$

It follows from the first equation of (3) that the temperature satisfies the following equation:

$$f(T) = E_t - \frac{\rho}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2 W} (\tilde{H}(T) - PT) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = 0. \quad (14)$$

where $\tilde{H}(T)$ is the molar enthalpy of the mixture of gases. The temperature is found by using the Newton-Raphson iteration process from (14).

Numerical Results and Discussions

The following numerical experiment was performed to test the method: the sound hydrogen jet was injected perpendicularly to the main air flow in two-dimensional channel through a slot of width $D = 0.1cm$ with spatial grid 241x181 and parameters: $M_{\infty} = 3.75$, $M_0 = 1$, $Pr = 0.7$, $Re = 62.73 \times 10^6$, $P_{\infty} = 11090Pa$, pressure ratio $n = 10.29$, $T_0 = 800k$ and $T_{\infty} = 629.34k$. The channel height and length were $H = 15.2cm$ and $L = 45cm$, respectively. The slot was located at a distance of $L_b = 33cm$ from the input section. Figure 2 shows the pressure on the walls: "...experimental data [10], curves 1, 2 – the numerical computations obtained by WENO scheme, and ENO scheme respectively. As seen from the figure, the curve of the computed results received by WENO scheme is more lower in the region ahead of the jet than the other two curves representing results that obtained by the ENO scheme (curve 2) and "...experimental data [10]. This difference explains by the dissipative character of WENO scheme which is more than in the case of applying ENO scheme. In general there is a good agreement between the three curves.

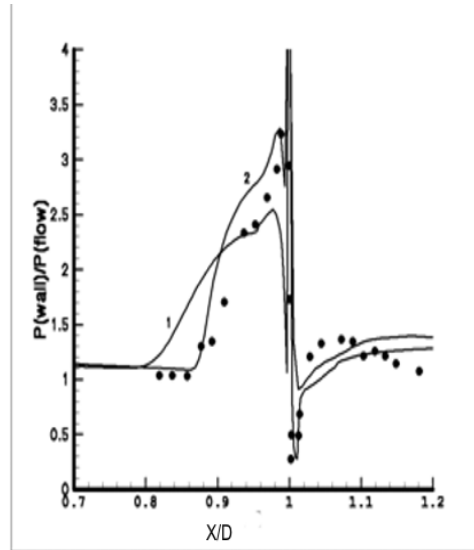


Fig. 2. Pressure ratio distribution on the wall "... experimental data [10], curve 1-WENO scheme, curve 2- ENO scheme.

The next numerical experiment was done on a staggered spatial grid 241×181 with range of parameters: $2 \leq M_\infty \leq 4$, $M_0 = 1$, $Pr = 0.7$, $2 \leq n \leq 15$, $T_0 = 642$, $T_\infty = 800$, $D = 0.1 \text{ cm}$, $H = 3.0 \text{ cm}$, $L_b = 5 \text{ cm}$ and $L = 10 \text{ cm}$. Figures 3 and 4 present the computed results for the sound flow of hydrogen ($H_2(Y_2 = 1)$) injected perpendicularly to the air flow plane (Oxygen $O_2(Y_1 = 0.2)$), and Nitrogen $N_2(Y_3 = 0.8)$ with Pressure ratio $n = 10.26$, $M_\infty 3.75$ and $P_\infty = 1000 \text{ Pa}$. Figures 3 and 4 show the numerical results obtained by using WENO and ENO schemes.

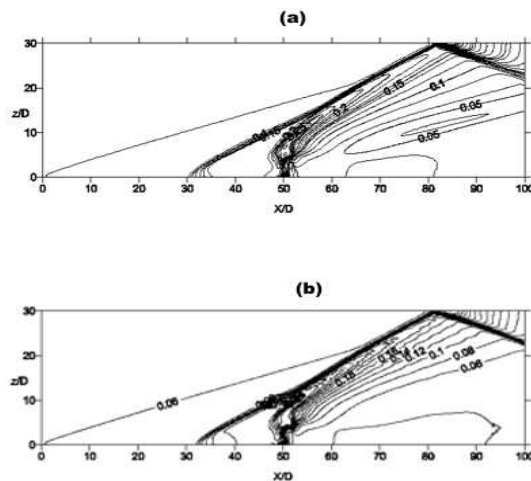


Fig. 3. Isobars: a - WENO scheme, b - ENO scheme

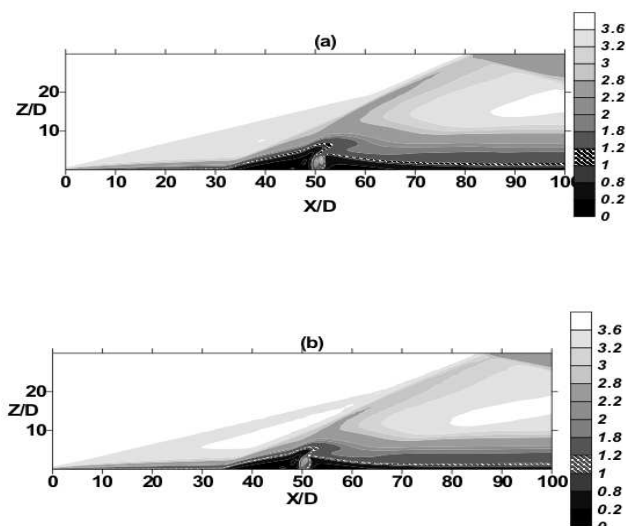


Fig.4. Mach number distribution: a - WENO scheme, b - ENO scheme.

The pressure and Mach number contours (see Fig. 4, contours of the local Mach number $M = \frac{\sqrt{u^2+w^2}}{c}$, $c = \frac{\gamma P}{\rho}$ is the local sound velocity, with $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, where C_P is the local specific heat for the constant pressure and C_V is the local specific heat for constant volume) show that the overall shape of the shockwave structure is similar with the multi-component gas flow [7]. In Fig.3 the numerical experiment shows, that because of deceleration of the incoming flow, the pressure ahead of the jet increases, and a bow shock wave is formed. In Fig.(3a), (4a) appearing the bow shock wave for WENO scheme results is more wider than that of ENO scheme results (Fig.(3b), (4b)). An oblique shock wave extracts to upstream from the bow shock wave. In addition to the separation region, there is also a supersonic flow region behind the oblique shock wave; subsequent flow deceleration is accompanied by emergence of a second shock wave: barrel shock parallel to the jet axis. The separation shock wave, bow shock wave, and barrel shock wave intersect at one point to form a complicated λ -shaped structure of shock waves.

Цитированная литература

- [1]. Drummond J.P. *Numerical solution for perpendicular sonic hydrogen injection into a ducted supersonic airstream*, AIAA J., 1979, V. 17, № 5, P. 531 – 533.
- [2]. Shun J.Sh. and Yun S. *Numerical investigation of the flows with chemical reactions based on the LU-factored scheme constructed by the method of the symmetric successive overrelaxation*, Aerokosmich. Tekhnika, 1990, № 10, P. 102 – 113.
- [3]. Grasso F. and Magi V. *Simulation of transverse gas injection in turbulent supersonic air flows*, AIAA J., 1995, V. 33, № 1, P. 56 – 62.
- [4]. Kee R.J., Rupley F.M., and Miller J.A. *CHEMKIN-II: a FORTRAN chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics*, SANDIA Report SAND- 1989- 89-8009.
- [5]. Poinot T. J. and Lele S. K. *Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flow*, Journal of Computational Physics, 1992, V. 101, P. 104 – 129.
- [6]. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1984, 609 p.
- [7]. A.O. Beketaeva and A.Zh.Naimanova. *Application of ENO(Essentially NonOscillatory) Scheme for modeling the flow of a multicomponent gas mixture*, Journal of Computational Technologies, 2007, V.12, № 4, P. 17 – 25.

-
- [8]. Liu X., Osher S., and Chan T. *Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes*, Journal of Computational Physics, 1994, V. 115, P. 200 – 212.
- [9]. Beketaeva A. O., Naimanova Zh. *Numerical modeling of supersonic flow with a transverse injection of jets*, J. Appl. Mech and Techn. Phys., 2004, V.45, № 3, P. 367 – 374.
- [10]. Chenault C.F., Beran P.S. *Numerical Investigation of Supersonic Injection Using a Reynolds Stress Turbulence Model*, AIAA J., 1999, V.37, № 10, P.1257 – 1269.

Статья поступила в редакцию 15.08.2011 г.

УДК 62-50

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

С. А. АЙСАГАЛИЕВ, Ш. А. АЙПАНОВ, Т. Ш. ИМАНКУЛ

Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр.аль-Фараби 71, e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Разработаны методы построения предельных циклов первого и второго рода и круговых движений в многомерных фазовых системах. Получены необходимые и достаточные условия существования периодических решений и предложен метод их построения путем минимизации последовательностей.

Введение

Развитие теории систем с цилиндрическим фазовым пространством (фазовых систем) было обусловлено возможностью ее использования для исследования устойчивости синхронных и асинхронных электрических машин, систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) и самосинхронизации неуравновешенных роторов [1–3]. Системы ФАПЧ в последние годы широко применяются для управления тактовыми генераторами цифровых сигнальных процессоров, многопроцессорных кластеров и других устройств цифровой обработки информации [4]. Основные принципы общей теории фазовых систем были заложены в работе Ф. Трикоми. [5], посвященной исследованию устойчивости синхронных электрических машин. В дальнейшем эта теория получила развитие в работах Л. Америо, Г. Зейферта, С. Бёма, В.Д. Хейза, а также в исследованиях А.А. Андропова, А.А. Витта, С.Э. Хайкина [6], Е.А. Барбашина, В.А. Табуевой [7] и др. Современная теория устойчивости фазовых систем сформировалась на основе работ Ю.Н. Бакаева, А.А. Гужа, Г.А. Леонова и др. [8–10]. Данная статья посвящена одному из малоизученных аспектов этой теории, а именно: вопросам построения периодических решений для многомерных фазовых систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma, t), \quad \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где A , B , C , R — постоянные матрицы порядков $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(m \times n)$, $(m \times m)$ соответственно, вектор-функция $\varphi(\sigma, t) = (\varphi_1(\sigma_1, t), \dots, \varphi_m(\sigma_m, t))$ является периодической

Keywords: *Dynamical system, phase system, cylindrical phase space, limit cycle*

2010 Mathematics Subject Classification: 34C05, 34C07, 34C25

© С. А. Айсагалиев, Ш. А. Айпанов, Т. Ш. Иманкул, 2011.

по σ и непрерывной по совокупности аргументов (σ, t) . Системы вида (1), где правые части уравнений являются периодическими функциями по угловым координатам $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, в теории синхронизации называют динамическими системами с цилиндрическим фазовым пространством или просто фазовыми системами.

Определение 1. *Говорят, что система (1) имеет периодическое решение, если существует число $T > 0$ такое, что $x(t) = x(t+T)$, $\sigma(t) = \sigma(t+T)$ для любого $t \geq 0$. Такое периодическое решение часто называют предельным циклом первого рода.*

Определение 2. *Решение системы (1) называется предельным циклом второго рода, если существуют число $T > 0$ и целое число $k \neq 0$ такие, что $x(t) = x(t+T)$, $\sigma(t+T) = \sigma(t) + k\Delta$ $\forall t \geq 0$, где $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m) > 0$ — период функции $\varphi(\sigma, t)$, т.е. $\varphi_i(\sigma_i, t) = \varphi_i(\sigma_i + \Delta_i, t)$ ($i = \overline{1, m}$) $\forall t \geq 0$.*

Определение 3. *Говорят, что система (1) имеет круговое решение, если существуют числа $T > 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) > 0$ такие, что при всех $t \geq T$ выполняется неравенство $\dot{\sigma}(t) \geq \varepsilon$.*

Ставятся следующие задачи.

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия существования предельных циклов первого рода в системе (1) и разработать методы их построения.*

Задача 2. *Найти необходимые и достаточные условия существования предельных циклов второго рода в системе (1) и найти такие предельные циклы.*

Задача 3. *Найти необходимые и достаточные условия существования круговых движений в системе (1) и найти такие решения.*

Обзор научной литературы по решению вышеперечисленных задач можно найти в работах [10, 11]. Данная работа является продолжением научных исследований, приведенных в [12–15]. Из-за ограниченности объема статьи ниже подробно изложено только решение задачи 1. Решения задач 2 и 3 основаны на решении задачи 1.

2. Принцип погружения

Введем следующие обозначения:

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix}, \quad P_1 = (O, I_m),$$

где A_1, B_1, P_1 — постоянные матрицы порядков $((m+n) \times (m+n))$, $((m+n) \times m)$, $(m \times (m+n))$ соответственно; I_m — единичная матрица порядка $(m \times m)$. Теперь уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{\eta} = A_1 \eta + B_1 \varphi(P_1 \eta, t), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Если система (2) имеет периодическое решение (предельный цикл первого рода), то $\eta_*(t) = \eta_*(t + T_*) \forall t \geq 0$, где T_* — период. Тогда вдоль периодического решения выполняется равенство

$$p(t) = A_1 \eta_*(t) + B_1 \varphi(P_1 \eta_*(t), t) = p(t + T_*) \quad \forall t \geq 0.$$

Пусть $\eta_*(0) = \eta_0^*$, тогда $\eta_*(T_*) = \eta_0^*$. Поскольку периодическое решение определяется значениями фазовых координат в пределах периода, для построения периодического решения следует рассмотреть значения $t \in I_* = [0, T_*]$. Таким образом, как следует из постановки задачи 1, необходимо: а) найти вектор η_0^* ; б) найти период T_* ; в) проверить условие $p(t) = p(t + T_*) \forall t \geq 0$.

Основой предлагаемого подхода к решению задачи 1 является принцип погружения, который позволяет свести исходную задачу к задаче оптимального управления со свободными правыми концами траекторий.

Рассмотрим управляемую систему следующего вида

$$\dot{y} = A_1 y + B_1 u(t), \quad y(0) = y(T) = \eta_0, \quad t \in I_0 = [0, T], \quad (3)$$

$$u(\cdot) \in L_2(I_0, R^m), \quad (4)$$

где $\eta_0 \in R^{n+m}$ — неизвестный вектор, T — неизвестный момент времени.

Введем следующие обозначения:

$$W(0, t) = \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 B_1^* e^{-A_1^* \tau} d\tau, \quad (5)$$

$$\lambda_1(t, T, \eta_0) = B_1^* e^{-A_1^* t} W^{-1}(0, T) (e^{-A_1 T} - I_{n+m}) \eta_0, \quad (6)$$

$$N_1(t, T) = -B_1^* e^{-A_1^* t} W^{-1}(0, T) e^{-A_1 T}, \quad (7)$$

$$\lambda_2(t, T, \eta_0) = e^{A_1 t} [W(0, t) W^{-1}(0, T) (e^{-A_1 T} - I_{n+m}) + I_{n+m}] \eta_0, \quad (8)$$

$$N_2(t, T) = -e^{A_1 t} W(0, t) W^{-1}(0, T) e^{-A_1 T}. \quad (9)$$

Обозначим через $\text{rang } Q$ ранг матрицы Q .

Лемма 1. Если $\text{rang } Q = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{m+n-1}B \\ R & CB & \dots & CA^{m+n-1}B \end{pmatrix} = n + m$, то матрица $W(0, T)$ положительно определена для любого $T > 0$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что $\text{rang}(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{m+n-1} B_1) = \text{rang } Q$. Если $\text{rang } Q = n + m$, то система $z^* A_1^k B_1 = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n + m - 1$) имеет единственное решение $z = 0$, так как $e^{-A_1 t} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k(t) A^k$, где функции $\alpha_k(t)$ ($k = \overline{0, n + m - 1}$) линейно независимы. Уравнение $z^* A_1^* B_1 = 0$ равносильно уравнению $z^* e^{-A_1 t} B_1 = 0$, которое также имеет единственное решение $z = 0$. Тогда квадратичная форма

$$z^* W(0, T) z = \int_0^T z^* e^{-A_1 t} B_1 B_1^* e^{-A_1^* t} z dt = \int_0^T |z^* e^{-A_1 t} B_1|^2 dt.$$

Поскольку $z^* W(0, T) z \geq 0 \quad \forall z \in R^{n+m}$ и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $z = 0$, то отсюда следует, что $W(0, T) > 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\text{rang } Q = n + m$. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I_0, R^m)$ переводит траекторию системы (3), (4) из любого начального состояния $y(0) = \eta_0 \in R^{n+m}$ в состояние $y(T) = \eta_0 \in R^{n+m}$ тогда и только тогда, когда

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I_0, R^m) \mid u(t) = v(t) + \lambda_1(t, T, \eta_0) + N_1(t, T) z(T, v) \quad \forall v(\cdot) \in L_2(I_0, R^m), \quad t \in I_0\}, \quad (10)$$

где функция $z(t) = z(t, v)$, $t \in I_0$, является решением дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_0, \quad (11)$$

$$v(\cdot) \in L_2(I_0, R^m). \quad (12)$$

Решение дифференциального уравнения (3) при условии (4), соответствующее управлению $u(t) \in U$, определяется по формуле

$$y(t, \eta_0, T) = z(t) + \lambda_2(t, T, \eta_0) + N_2(t, T) z(T, v), \quad t \in I_0. \quad (13)$$

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (3), исходящее из точки $y(0) = \eta_0$ при любом $u(t) \in L_2(I_0, R^m)$, равно

$$y(t) = e^{A_1 t} \eta_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau, \quad t \in I_0.$$

Отсюда при $t = T$ имеем

$$y(T) = e^{A_1 T} \eta_0 + \int_0^T e^{A_1(T-t)} B_1 u(t) dt.$$

Тогда искомое управление $u(t)$, для которого $y(T) = \eta_0$, является решением следующего уравнения:

$$\int_0^T e^{A_1(T-t)} B_1 u(t) dt = \eta_0 - e^{A_1 T} \eta_0. \quad (14)$$

После умножения правой и левой частей соотношения (14) слева на неособую матрицу $e^{-A_1 T}$, получим

$$\int_0^T e^{A_1 t} B_1 u(t) dt = e^{-A_1 T} (I_{n+m} - e^{A_1 T}) \eta_0. \quad (15)$$

Можно показать, что общее решение интегрального уравнения (15) имеет вид (10), где $\lambda_1(t, T, \eta_0)$, $N_1(t, T)$ определяются формулами (5)–(7), а решение дифференциального уравнения (3), соответствующее управлению $u(t) \in U$, запишется в виде (13). Здесь $\lambda_2(t, T, \eta_0)$, $N_2(t, T)$ определяются формулами (5), (8), (9). Теорема доказана.

Вдоль периодического решения системы (2) выполнено тождество $p(t) = p(t + T_*)$, $t \geq 0$. Следовательно, $A_1 \eta_*(t) + B_1 \varphi(P_1 \eta_*(t), t) = A_1 \eta_*(t + T_*) + B_1 \varphi(P_1 \eta_*(t + T_*), t + T_*)$, где $\eta_*(t) = \eta_*(t + T_*)$, $t \geq 0$. Отсюда следует, что для значений $t \in I_* = [0, T_*]$ данное тождество имеет вид $B_1 [\varphi(P_1 \eta_0^*, 0) - \varphi(P_1 \eta_0^*, T_*)] = 0$.

С учетом особенностей периодических решений исходная задача может быть записана в виде

$$\dot{\eta} = A_1 \eta + B_1 \varphi(P_1 \eta, t), \quad \eta(0) = \eta(T) = \eta_0, \quad t \in I_0 = [0, T], \quad (16)$$

$$B_1 [\varphi(P_1 \eta_0, 0) - \varphi(P_1 \eta_0, T)] = 0, \quad T \in R^1, \eta_0 \in R^{n+m}. \quad (17)$$

Лемма 2. Пусть $\text{rang } Q = n + m$. Тогда краевая задача (16), (17) равносильна следующей задаче:

$$v(t) + \lambda_1(t, T, \eta_0) + N_1(t, T)z(T, v) = \varphi(P_1 y(t), t), \quad t \in I_0, \quad (18)$$

$$B_1 [\varphi(P_1 \eta_0, 0) - \varphi(P_1 \eta_0, T)] = 0, \quad (19)$$

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_0, \quad (20)$$

$$v(\cdot) \in L_2(I_0, R^m), \quad \eta_0 \in R^{n+m}, \quad T \in R^1, \quad (21)$$

где функция $y(t) = y(t; 0, \eta_0)$, $t \in I_0$, определяется по формуле (13).

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(v, \eta_0, T) = \int_0^T |v(t) + \lambda_1(t, T, \eta_0) + N_1(t, T)z(T) - \varphi(P_1 y(t), t)|^2 dt + \\ + |B_1 [\varphi(P_1 \eta_0, 0) - \varphi(P_1 \eta_0, T)]|^2 \rightarrow \inf \quad (22)$$

при условиях (20), (21).

Вводя обозначения

$$F_0 = F_0(v(t), \eta_0, T, z(t), z(T), t) = F_0(q(t), T, t) = |v(t) + \lambda_1(t, T, \eta_0) + N_1(t, T)z(T) - \varphi(P_1 y(t), t)|^2, \quad \Phi(\eta_0, T) = |B_1[\varphi(P_1 \eta_0, 0) - \varphi(P_1 \eta_0, T)]|^2,$$

функционал (22) можно представить в виде

$$J(v, \eta_0, T) = \int_0^T F_0(q(t), T, t) dt + \Phi(\eta_0, T),$$

где $y(t) = z(t) + \lambda_2(t, T, \eta_0) + N_2(t, T)z(T)$, $t \in I_0$, $q(t) = (v(t), \eta_0, z(t), z(T))$. Обозначим $X = L_2(I_0, R^m) \times R^{n+m} \times R^1$. Допустимым управлением для задачи (22), (20), (21) является тройка $\xi = (v, \eta_0, T) \in X$. Следует отметить, что а) функционал $J(\xi) = J(v, \eta_0, T)$, $\xi \in X$, ограничен снизу, так как $J(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X$; б) задача (22), (20), (21) является задачей оптимального управления со свободными правыми концами траекторий с нестандартным функционалом; в) в отличие от исходной задачи, уравнение движения системы является линейным.

Пусть $X_* = \{\xi_* \in X \mid J(\xi_*) = \inf J(\xi_*) = \inf J(\xi) = J_*, \xi \in X\}$, $\xi_* = (v_*, \eta_0^*, T_*)$.

Теорема 2. Пусть $\text{rang } Q = n + m$, множество $X_* \neq \emptyset$. Для того, чтобы краевая задача (16), (17) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J(\xi_*) = J_* = 0$, где $\xi_* \in X$ — оптимальное управление для задачи (22), (20), (21). Если $J_* = J(\xi_*) = 0$, то функция

$$\eta_*(t) = z(t, v_*) + \lambda_2(t, T_*, \eta_0^*) + N_2(t, T_*)z(T_*, v_*), \quad t \in I_* = [0, T_*], \quad (23)$$

удовлетворяющая условию $p(t) = p(t + T_*) \quad \forall t \geq 0$, является периодическим решением системы (2).

В случае $J(\xi_*) = 0$ выполнены соотношения (18)–(21), $\eta_*(t) = y_*(t)$, $t \in I_*$. Заметим, что, если $J_* = J(\xi_*) > 0$, то система (2) не имеет периодического решения.

3. Существование периодического решения

Как следует из теоремы 2, необходимым и достаточным условием существования периодического решения в системе (2) является $J(\xi_*) = J_* = 0$. Однако, без эффективных способов проверки указанного условия теорема 2 не пригодна для решения прикладных задач. Ниже изложены способы проверки условий теоремы 2, ориентированные на применение вычислительной техники.

Рассмотрим оптимизационную задачу (22), (20), (21). Пусть последовательность $\{T_k\} \subset R^1$ такова, что $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k < \dots$. Тогда рассматриваемая оптимизационная задача для значений $T = T_k$ запишется в виде: минимизировать функционал

$$J_k(v, \eta_0) = \int_0^{T_k} F_{0k}(q(t), t) dt + \Phi_k(\eta_0) \rightarrow \inf \quad (24)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_k = [0, T_k], \quad (25)$$

$$v(\cdot) \in L_2(I_k, R^m), \quad \eta_0 \in R^{n+m}, \quad (26)$$

где $q(t) = (v(t), \eta_0, z(t), z(T_k))$, $(v(t), \eta_0) \in X_1 = L_2(I_k, R^m) \times R^{n+m}$.

Теорема 3. Пусть $\text{rang } Q = n + m$. Для того, чтобы функционал (24) при условиях (25), (26) был выпуклым, достаточно, чтобы

$$F_{0k}(\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2, t) \leq \alpha F_{0k}(q_1, t) + (1 - \alpha)F_{0k}(q_2, t) \quad (27)$$

$$\forall q_1 = (v_1, \eta_{01}, z_1, \bar{z}_1), \quad q_2 = (v_2, \eta_{02}, z_2, \bar{z}_2) \in R^m \times R^{n+m} \times R^{n+m} \times R^{n+m},$$

$$\Phi_k(\alpha \eta_{01} + (1 - \alpha)\eta_{02}) \leq \alpha \Phi(\eta_{01}) + (1 - \alpha)\Phi(\eta_{02}), \quad (28)$$

$$\forall \eta_{01} \in R^{n+m}, \quad \eta_{02} \in R^{n+m},$$

при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Доказательство. Можно показать, что при выполнении неравенств (27), (28) $J_k(\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2, \alpha \eta_{01} + (1 - \alpha)\eta_{02}) \leq \alpha J_k(v_1, \eta_{01}) + (1 - \alpha)J_k(v_2, \eta_{02}) \quad \forall v_1, v_2 \in L_2(I, R^m), \forall \eta_{01}, \eta_{02} \in R^{n+m}$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $\text{rang } Q = n + m$, функции $\varphi(\sigma, t)$, $F_{0k}(q, t)$, $\Phi(\eta)$ непрерывны по совокупности аргументов вместе с частными производными по $\sigma \in R^m$, $q \in R^m \times R^{n+m} \times R^{n+m} \times R^{n+m}$, $\eta \in R^{n+m}$ и выполнены следующие условия:

$$|\varphi(\sigma + \Delta\sigma, t) - \varphi(\sigma, t)| \leq l_1|\Delta\sigma|, \quad \left\| \frac{\partial\varphi(\sigma + \Delta\sigma, t)}{\partial\sigma} - \frac{\partial\varphi(\sigma, t)}{\partial\sigma} \right\| \leq l_2|\Delta\sigma|,$$

$$|F_{0k}(q + \Delta q, t) - F_{0k}(q, t)| \leq l_3|\Delta q|, \quad \left\| \frac{\partial F_{0k}(q + \Delta q, t)}{\partial q} - \frac{\partial F_{0k}(q, t)}{\partial q} \right\| \leq l_4|\Delta q|,$$

$$\left| \frac{\partial\Phi_k(\eta + \Delta\eta)}{\partial\eta} - \frac{\partial\Phi_k(\eta)}{\partial\eta} \right| \leq l_5|\Delta\eta|,$$

где $l_i > 0$ ($i = \overline{1, 5}$) — постоянные Липшица. Тогда функционал (24) при условиях (25), (26) дифференцируем в смысле Фреше в любой точке $\xi = (v(t), \eta_0) \in X_1$, градиент $J'_k(\xi) = (J'_{k1}(\xi), J'_{k2}(\xi)) \in X_1$ вычисляется по формуле

$$J'_{k1}(\xi) = \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial v} - B_1^* \psi(t), \quad J'_{k2}(\xi) = \int_0^{T_k} \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial \eta_0} dt + \frac{\partial \Phi_k(\eta_0)}{\partial \eta_0}, \quad (29)$$

где функция $z(t)$, $t \in I_k$, является решением системы (25) при $v = v(t)$, а функция $\psi(t)$, $t \in I_k$, — решением сопряженной системы

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial z} - A_1^* \psi, \quad \psi(T_k) = - \int_0^{T_k} \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial z(T_k)} dt. \quad (30)$$

Кроме того, градиент $J'_k(\xi)$, $\xi \in X_1$, удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'_k(\xi_1) - J'_k(\xi_2)\| \leq l_k \|\xi_1 - \xi_2\| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in X_1. \quad (31)$$

Доказательство. Можно показать, что приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta J = J(\xi + \Delta\xi) - J(\xi) = & \int_0^{T_k} [\Delta v^*(t) \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial v} + \Delta \eta_0^* \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial \eta_0} + \\ & + \Delta z^*(t) \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial z} + \Delta z^*(T_k) \frac{\partial F_{0k}(q(t), t)}{\partial z(T_k)}] dt + \langle \Delta \eta_0, \frac{\partial \Phi_k(\eta_0)}{\partial \eta_0} \rangle + \sum_{i=1}^6 R_i, \end{aligned}$$

где $|R_i| \leq c_i \|\Delta\xi\|^2$, $c_i = \text{const} > 0$ ($i = \overline{1, 6}$). Отсюда следует соотношение (29), где $\psi(t)$, $t \in I_k$, — решение системы (30). Для градиента функционала верно неравенство

$$\|J'_k(\xi_1) - J'_k(\xi_2)\|^2 \leq c_7 \|\Delta\xi\|^2 + c_8 \int_0^{T_k} |\Delta\psi(t)|^2 dt,$$

где $c_7, c_8 = \text{const} > 0$. Отсюда, с учетом того, что $|\Delta\psi(t)| \leq c_9 \|\Delta\xi\|$, $c_9 = \text{const} > 0$, получим условие Липшица (31). Теорема доказана.

Пусть $\xi_0 = (v_0(t), \eta_0^0) \in X_1$ — некоторая фиксированная точка. На основе формул (29)–(31) построим следующие последовательности:

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_{nk} J'_{k1}(\xi_n), \quad \eta_0^{n+1} = \eta_0^n - \alpha_{nk} J'_{k2}(\xi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (32)$$

где $\alpha_{nk} > 0$, $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_{nk} \leq 2/(l_k + 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $l_k > 0$ — постоянная Липшица из (31). В частности, при $\varepsilon = l_k/2$ значение $\alpha_{nk} = 1/l_k = \text{const} > 0$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4, последовательности $\{v_n\}$, $\{\eta_0^n\}$ определяются по формуле (32). Тогда

- 1) числовая последовательность $\{J_k(v_n, \eta_0^n)\}$ строго убывает;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} J'_{k1}(v_n, \eta_0^n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} J'_{k2}(v_n, \eta_0^n) = 0$.

Доказательство. Для любого фиксированного k можно показать, что

$$J_k(v_n, \eta_0^n) - J_k(v_{n+1}, \eta_0^{n+1}) \geq \frac{1}{2l_k} \|J'_k(v_n, \eta_0^n)\|^2 > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует, что, если $J'_k(v_n, \eta_0^n) \neq 0$, то числовая последовательность $\{J_k(v_n, \eta_0^n)\}$ строго убывает. Так как функционал $J_k(\xi)$, $\xi \in X_1$, ограничен снизу, то числовая последовательность $\{J_k(v_n, \eta_0^n)\}$ ограничена снизу. Следовательно, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} J_k(v_n, \eta_0^n)$, откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [J_k(v_n, \eta_0^n) - J_k(v_{n+1}, \eta_0^{n+1})] = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} J'_k(v_n, \eta_0^n) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4, имеют место неравенства (27), (28), последовательность $\{\xi_n\} = \{v_n, \eta_0^n\} \subset X_1$ определяется по формуле (32), множество $\Lambda_k = \{\xi \in X_1 \mid J_k(\xi) \leq J_k(\xi_0)\}$ ограничено. Тогда для любого фиксированного $T_k > 0$ верны следующие утверждения:

- 1) множество Λ_k слабо бикомпактно, последовательность $\{\xi_n\} \subset \Lambda_k$;
- 2) множество $X_1^* = \{\xi_* \in X_1 \mid J_k(\xi_*) = \inf_{\xi \in X_1} J_k(\xi)\} \neq \emptyset$;
- 3) последовательность $\{\xi_n\} \subset X_1$ является минимизирующей, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} J_k(\xi_n) = J_k(\xi_*) = \inf_{\xi \in X_1} J_k(\xi)$;
- 4) последовательность $\{\xi_n\} \subset X_1$ слабо сходится к точке $\xi_* \in X_1$, т.е. $\xi_n \xrightarrow{c_n} \xi_*$ при $n \rightarrow \infty$;
- 5) справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J_k(\xi_n) - J_k(\xi_*) \leq c_1/n, \quad c_1 = \text{const} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

б) для того, чтобы система (2) имела периодическое решение, необходимо, чтобы $J_k(\xi_*) = 0$.

4. Построение периодического решения

Полагаем, что известны значения $T = T_* = T_k$, $J_k(\xi_*) = 0$. Как следует из теоремы 6, выполнены необходимые условия существования периодического решения в системе (2). Заметим, что последовательность $\{\xi_n\}$ слабо сходится к точке ξ_* . Для построения периодического решения необходимо найти слабо предельную точку ξ_* .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_s(v, \eta_0) = \int_0^{T_*} F_0(q(t), t) dt + \varepsilon_s \int_0^{T_*} [|v(t)|^2 + |\eta_0|^2 + |z(t)|^2 + |z(T_*)|^2] dt + \Phi(\eta_0) \rightarrow \inf \quad (33)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_* = [0, T_*], \quad (34)$$

$$v(t) \in L_2(I_*, R^m), \quad \eta_0 \in R^{n+m}, \quad (35)$$

где $\varepsilon_s > 0$ ($s = 1, 2, \dots$), $\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon_s = 0$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда функционал (33) при условиях (34), (35) дифференцируем в смысле Фреше в любой точке $\xi \in X_1$, градиент $J'_s(\xi) = (J'_{s1}(\xi), J'_{s2}(\xi)) \in X_1$ вычисляется по формуле

$$J'_{s1}(\xi) = \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial v} + 2\varepsilon_s v - B_1^* \psi_1, \quad J'_{s2}(\xi) = \int_0^{T_*} \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial \eta_0} dt + \frac{\partial \Phi(\eta_0)}{\partial \eta_0} + 2\varepsilon_s T_* \eta_0, \quad (36)$$

где функция $z(t)$, $t \in I_*$, является решением системы (34), а функция $\psi_1(t)$, $t \in I_*$, — решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial z} - A_1^* \psi_1 + 2\varepsilon_s z(t), \quad (37)$$

$$\psi_1(T_*) = - \int_0^{T_*} \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial z(T_*)} dt - 2\varepsilon_s T_* z(T_*). \quad (38)$$

Кроме того, градиент $J'_s(\xi)$, $\xi \in X_1$, удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'_s(\xi_1) - J'_s(\xi_2)\| \leq L_s \|\xi_1 - \xi_2\| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in X_1. \quad (39)$$

На основе соотношений (36)–(39) строим последовательности

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_{ns} J'_{s1}(\xi_n), \quad \eta_0^{n+1} = \eta_0^n - \alpha_{ns} J'_{s2}(\xi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (40)$$

где $\alpha_{ns} = 1/L_s = \text{const} > 0$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 4, имеют место неравенства (27), (28), последовательность $\{\xi_n\} \subset X$ построена по правилу (40). Тогда для любого $\varepsilon_s > 0$ ($s = 1, 2, \dots$) верны следующие утверждения:

1) последовательность $\{\xi_n\} \subset X_1$ сходится к единственной точке

$$\xi_{*s} \in X_s^* = \{\xi_{*s} \in X_1 \mid J_s(\xi_{*s}) = J_s^* = \inf_{\xi \in X_1} J_s(\xi)\},$$

где $\xi_{*s} = (v_{*s}, \eta_{0s}^*) \in X_1$ — оптимальное управление для задачи (33)–(35);

2) справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$0 \leq J_s(\xi_n) - J_s(\xi_{*s}) \leq \bar{c}_1/n, \quad \bar{c}_1 = \text{const} > 0,$$

$$\|\xi_n - \xi_{*s}\| \leq c_2/n, \quad c_2 = \text{const} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 8, последовательность $\{\xi_n\} \subset X_1$ определяется по правилу (40). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) последовательность $\{\xi_{*s}\} \subset X_1$ сходится к элементу

$$\xi_* \in X_* = \{\xi_* \in X_1 \mid J(\xi_*) = \inf_{\xi \in X_1} J(\xi)\},$$

т.е. $v_{*s} \rightarrow v_*$, $\eta_{0s}^* \rightarrow \eta_0^*$ при $s \rightarrow \infty$, где $\xi_* = (v_*, \eta_0^*)$ — оптимальное управление для задачи (22), (20), (21);

2) если значение $J(\xi_*) = 0$, то функция $\eta_*(t) = z(t, v_*) + \lambda_2(t, T_*, \eta_0^*) + N_2(t, T_*)z(T_*, v_*)$, $t \in I_*$, удовлетворяющая условию $p(\eta_*(t), t) = p(\eta_*(t + T_*), t + T_*) \quad \forall t \geq 0$, является периодическим решением системы (2).

Доказательство теоремы следует из сильной выпуклости функционала (33) при условиях (34), (35) и рефлексивности пространства X_1 .

5. Пример

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \varphi(\sigma, t), \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1, \quad \dot{\sigma} = x_1 + \varphi(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad (41)$$

где $\varphi(\sigma, t) = t \sin \sigma - t \sin(\sin t) + (3 \cos t - \sin t)/5$. Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 0), \quad R = 1, \quad n = 2, \quad m = 1.$$

Вводя обозначения

$$\eta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = (0, 0, 1),$$

систему (41) запишем в виде

$$\dot{\eta} = A_1 \eta + B_1 \varphi(P_1 \eta, t), \quad t \geq 0. \quad (42)$$

Необходимо найти периодическое решение системы (42).

а) Определим ранг матрицы Q . Поскольку

$$Q = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \\ R & CB & CAB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = 2,$$

то $\text{rang } Q = n + m = 2 + 1 = 3$. Следовательно, матрица $W(0, T) > 0$ для любого $T > 0$.

б) Вычислим матрицу $W(0, t)$. Можно показать, что

$$e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-A_1 t} B_1 B_1^* e^{-A_1^* t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} & e^t(2 - e^t) \\ -te^{2t} & t^2 e^{2t} & -te^t(2 - e^t) \\ e^t(2 - e^t) & -te^t(2 - e^t) & (2 - e^t)^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $W(0, t) = \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 B_1^* e^{-A_1^* \tau} d\tau$.

в) Вычислим

$$\lambda_1(t, 2\pi, \eta_0) = B_1^* e^{-A_1^* t} W^{-1}(0, 2\pi) (e^{-2\pi A_1} - I_3) \eta_0,$$

$$\begin{aligned} N_1(t, 2\pi) &= -B_1^* e^{-A_1^* t} W^{-1}(0, 2\pi) e^{-2\pi A_1}, \\ \lambda_2(t, 2\pi, \eta_0) &= e^{A_1 t} [W(0, t) W^{-1}(0, 2\pi) (e^{-2\pi A_1} - I_3) + I_3] \eta_0, \\ N_2(t, 2\pi) &= -e^{A_1 t} W(0, t) W^{-1}(0, 2\pi) e^{-2\pi A_1}, \end{aligned}$$

где $\eta_0 = \eta(0) = (\eta_{10}, \eta_{20}, \eta_{30})^T$.

г) Вычислим

$$\begin{aligned} w(t) &= v(t) + \lambda_1(t, 2\pi, \eta_0) + N_1(t, 2\pi) z(2\pi, v), \\ y(t) &= z(t, v) + \lambda_2(t, 2\pi, \eta_0) + N_2(t, 2\pi) z(2\pi, v), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

д) Оптимизационная задача (22), (20), (21) при $T = 2\pi$ запишется в виде

$$J(v, \eta_0) = \int_0^{2\pi} |w(t) - \varphi(P_1 y(t), t)|^2 dt + 8\pi^2 \sin^2 \eta_{30} \rightarrow \inf \quad (43)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in I_* = [0, 2\pi], \quad (44)$$

$$v(\cdot) \in L_2(I_*, R^1), \quad \eta_0 \in R^3, \quad (45)$$

где

$$B_1 [\varphi(P_1 \eta_0, 0) - \varphi(P_1 \eta_0, 2\pi)] = \begin{pmatrix} -2\pi \sin \eta_{30} \\ 0 \\ -2\pi \sin \eta_{30} \end{pmatrix}.$$

Решение оптимизационной задачи (43)–(45) имеет вид

$$x_1^*(t) = (2 \cos t + \sin t)/5, \quad x_2^*(t) = (3 \sin t + \cos t)/10, \quad \sigma_*(t) = \sin t, \quad t \geq 0.$$

Вдоль полученного периодического решения выполняется равенство

$$p(t) = \begin{pmatrix} (\cos t - 2 \sin t)/5 \\ (3 \cos t - \sin t)/10 \\ \cos t \end{pmatrix} = p(t + 2\pi).$$

Заключение

В работе приведены теоретические основы построения предельных циклов первого рода для динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством. Научная новизна полученных результатов состоит в том, что проблема предельных циклов сведена к решению краевой задачи оптимального управления специального вида и создана конструктивная теория для решения таких задач оптимального управления. На основе полученных результатов могут быть решены задачи построения предельных циклов второго рода и круговых движений в динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством.

Цитированная литература

- [1]. Янко-Триницкий А.А. *Новый метод анализа анализа синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках*, М.: Госэнергоиздат, 1958, 103 с.
- [2]. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. *Системы фазовой автоподстройки частоты*, М.: Связь, 1972, 447 с.
- [3]. Блехман И.И. *Вибрационная механика*, М.: Физматгиз, 1994, 400 с.
- [4]. Леонов Г.А., Селеджи С.М. *Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике*, СПб.: Невский диалект, 2002, 112 с.

- [5]. Tricomi F. *Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica*, Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa, 1933, V. 2, № 2, P. 1 – 20.
- [6]. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*, М.: Физматгиз, 1959, 914 с.
- [7]. Барбашин Е.А., Табуева В.А. *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством*, М.: Наука, 1969, 300 с.
- [8]. Бакаев Ю.Н. *Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем*, Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, Вып. 800, М., 1959, 70 с.
- [9]. Бакаев Ю.Н., Гуж А.А. *Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Доплера*, Радиотехника и электроника, 1965, Т. 10, № 1, С. 175 – 196.
- [10]. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*, М.: Наука, 1978, 400 с.
- [11]. Айсагалиев С.А. *Краевые задачи оптимального управления*, Алматы: Қазақ университеті, 1999, 214 с.
- [12]. Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С. *Конструктивный метод построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Известия НАН РК, Серия физ.-матем.наук, 1997, № 5, С. 3 – 11.
- [13]. Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С. *Методы решения краевых задач*, Алматы: Қазақ университеті, 2002, 348 с.
- [14]. Айсагалиев С.А. *Конструктивная теория краевых задач оптимального управления*, Алматы: Қазақ университеті, 2007, 328 с.
- [15]. Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А., Иманкул Т.Ш. *Управляемость динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством*, Вест. Нац. инж. акад. РК, 2011, № 1, С. 40 – 47.

Статья поступила в редакцию 26.05.2011 г.

УДК 517.956

ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ПАРАМЕТРІ БАР ЕКІНШІ РЕТТІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕЛЕРІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІГІ ТУРАЛЫ

А.Т.АСАНОВА

ҚР БҒМ Математика институты
050010, Алматы, Пушкин көш., 125, e-mail: anarasanova@list.ru

Функционалдық параметрі бар екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп қарастырылады. Жаңа белгісіз функциялар енгізу негізінде зерттеліп отырған есептің шешілімдігі жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін параметрі бар шеттік есептер әулетіне келтірілген. Бастапқы берілімдер терминінде параметрі бар шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары тағайындалған.

Функционалдық параметрі бар гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген шеттік есеп $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$ облысында қарастырылады

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + D(t, x)\mu(x) + f(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad u(T, x) = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

мұнда $u(t, x) = colon(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$ — белгісіз функция, $\mu(x) = colon(\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))$ — белгісіз функционалдық параметр, $(n \times n)$ -өлшемді $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$ матрицалары, n -өлшемді $f(t, x)$ вектор-функциясы $\bar{\Omega}$ облысында үзіліссіз, n -өлшемді $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi(t)$ вектор-функциялары сәйкес $[0, \omega]$, $[0, T]$ аралықтарында үзіліссіз дифференциалданады, және $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_1(\omega) = \psi(T)$ келісім шарттары орындалады.

(1)–(3) функционалдық параметрі бар шеттік есебінің шешімі деп (1) теңдеулер жүйесін және (2), (3) шеттік шарттарды қанағаттандыратын $(u(t, x), \mu(x))$ функциялар жұбы аталады, мұнда $u(t, x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ функциясының $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ дербес туындылары бар, ал $\mu(x) \in C([0, \omega], R^n)$.

Keywords: *System of hyperbolic equations, boundary value problem, functional parameter, classical solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37

© А.Т.Асанова, 2011.

Қарастырылып отырған (1)–(3) есебі бейлокал шеттік есептерге жатады, бұл есептер көптеген ғылыми еңбектерде зерттелген (шолу мен жұмыстардың библиографиясын [1-3] монографияларынан көруге болады). Сонымен қатар, функционалдық параметрі бар шеттік есептер кері есептер санатына да жатқызылады [4].

Жаңадан $v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, $w(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ белгілеулерін енгізіп (1) - (3) есебінен келесі пара-пар есепке көшейік

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + B(t, x)w(t, x) + C(t, x)u(t, x) + D(t, x)\mu(x) + f(t, x), \quad (4)$$

$$v(0, x) = \dot{\varphi}_1(x), \quad v(T, x) = \dot{\varphi}_2(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$u(t, x) = \psi(t) + \int_0^x v(t, \xi) d\xi, \quad w(t, x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} d\xi, \quad (6)$$

(4)–(6) есебінің шешімі (4) теңдеулер жүйесін, (5) шеттік шартын және (6) функционалдық қатынастарын қанағаттандыратын $\{v(t, x), u(t, x), w(t, x), \mu(x)\}$ функциялар төрттігі болып табылады, мұнда $v(t, x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ t айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданады, $u(t, x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $w(t, x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\mu(x) \in C([0, \omega], R^n)$.

Егер u , w функциялары белгілі деп ойласақ, (4), (5) есебі $\mu(x)$ параметр-функциясы бар жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қос нүктелі шеттік есептер әулеті болады. Әулет параметрінің ролін x айнымалысы атқарады.

(4)–(6) есебінің шешімін – $\{v(t, x), u(t, x), w(t, x), \mu(x)\}$ функциялар төрттігін табу үшін келесі А алгоритмі ұсынылады.

0-қадам. а) $u(t, x) = \psi(t)$, $w(t, x) = \dot{\psi}(t)$ деп санап, (4), (5) шеттік есептер әулетінен $\{v^{(0)}(t, x), \mu^{(0)}(x)\}$ жұбын табамыз. б) (6) функционалдық қатынастарынан $v(t, x) = v^{(0)}(t, x)$, $\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(0)}(t, x)}{\partial t}$ болғанда $u^{(0)}(t, x)$ пен $w^{(0)}(t, x)$ функцияларын анықтаймыз.

1-қадам. а) $u(t, x) = u^{(0)}(t, x)$, $w(t, x) = w^{(0)}(t, x)$ деп санап, (4), (5) шеттік есептер әулетінен $\{v^{(1)}(t, x), \mu^{(1)}(x)\}$ жұбын табамыз. б) (6) функционалдық қатынастарынан $v(t, x) = v^{(1)}(t, x)$, $\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(1)}(t, x)}{\partial t}$ болғанда $u^{(1)}(t, x)$ пен $w^{(1)}(t, x)$ функцияларын анықтаймыз.

Т с.с.

k-қадам. а) $u(t, x) = u^{(k-1)}(t, x)$, $w(t, x) = w^{(k-1)}(t, x)$ деп санап, (4), (5) шеттік есептер әулетінен $\{v^{(k)}(t, x), \mu^{(k)}(x)\}$ жұбын табамыз. б) (6) функционалдық қатынастарынан $v(t, x) = v^{(k)}(t, x)$, $\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial v^{(k)}(t, x)}{\partial t}$ болғанда $u^{(k)}(t, x)$ пен $w^{(k)}(t, x)$ функцияларын анықтаймыз.

Көріп отырғандай, А алгоритмінің басты пункті функционалдық параметрі бар жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін қос нүктелі шеттік есептер әулетінің шешілімдігі болып отыр. Сондықтан (4), (5) шеттік есептер әулетінің шешімінің бар болуы, жалғыздығы және оны табу мәселелерін жеке қарастыру қажеттілігі туындайды.

Осы мақсатта келесі функционалдық параметрі бар қос нүктелі шеттік есептер әулетін қарастырайық

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + D(t, x)\mu(x) + F(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$v(0, x) = \Phi_1(x), \quad v(T, x) = \Phi_2(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (8)$$

(7), (8) есебінің шешімі деп (7) жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесін және (8) шартты қанағаттандыратын, $(v(t, x), \mu(x))$ функциялар жұбын айтамыз, мұнда $v(t, x)$ функциясы $\bar{\Omega}$ облысында үзіліссіз, t бойынша үзіліссіз туындысы бар, ал $\mu(x)$ функциясы $[0, \omega]$ аралығында үзіліссіз.

Алдымен (7), (8) есебінің шешілімділік шарттарын (7) теңдеуінің дифференциалдық бөлігінің $X(t, x)$ фундаменталдық матрицасының көмегімен тағайындайық. Келесі тұжырым орынды

1 теорема. $Q(T, x) = \int_0^T X(T, x)X^{-1}(\tau, x)D(\tau, x)d\tau$ матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтарымды болсын. Онда (7), (8) параметрі бар шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімі – $(v^*(t, x), \mu^*(x))$ функциялар жүйесі бар болады.

Шынымен де, (8) шарттың бірінші $v(0, x) = \Phi_1(x)$ қатынасын ескере отырып, (7) теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінің шешімін $X(t, x)$ фундаменталдық матрицасы арқылы жазайық:

$$v(t, x) = X(t, x)\Phi_1(x) + \int_0^t X(t, x)X^{-1}(\tau, x)\{D(\tau, x)\mu(x) + F(\tau, x)\}d\tau. \quad (9)$$

Осы (9) өрнегінен $t = T$ болғандағы $v(t, x)$ функциясының мәнін тауып, оны (8) шарттың екінші қатынасына қойяық

$$Q(T, x) \cdot \mu(x) = \Phi_2(x) - X(T, x)\Phi_1(x) - \int_0^T X(T, x)X^{-1}(\tau, x)F(\tau, x)d\tau, \quad x \in [0, \omega]. \quad (10)$$

$Q(T, x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтарымды болсын деп жорамалдайық. Онда (10) функционалдық теңдеулер жүйесінен жалғыз $\mu(x)$ функциясын анықтап таба аламыз:

$$\mu^*(x) = [Q(T, x)]^{-1} \left\{ \Phi_2(x) - X(T, x)\Phi_1(x) - \int_0^T X(T, x)X^{-1}(\tau, x)F(\tau, x)d\tau \right\}, \quad x \in [0, \omega]. \quad (11)$$

Табылған (11) өрнегін (10) кейіптемесіндегі $\mu(x)$ функциясының орнына қойып ізделінді $v(t, x)$ функциясын табамыз

$$v^*(t, x) = X(t, x)\Phi_1(x) + \int_0^t X(t, x)X^{-1}(\tau, x)D(\tau, x)d\tau \cdot [Q(T, x)]^{-1} \left\{ \Phi_2(x) - X(T, x)\Phi_1(x) - \int_0^T X(T, x)X^{-1}(\tau, x)F(\tau, x)d\tau \right\} + \int_0^t X(t, x)X^{-1}(\tau, x)F(\tau, x)d\tau. \quad (12)$$

Сонымен, (7), (8) есебінің жалғыз шешімі – $(v^*(t, x), \mu^*(x))$ функциялар жүйесі $Q(T, x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтарымды болғанда бар болады (11) және (12) қатынастардан бірмәнді анықталады.

Енді (7), (8) есебін фундаменталдық матрицаны пайдаланбай шешу жолын қарастырайық. Ол үшін [5] жұмыстағы ұсынылған тәсілді қолданайық.

Қайтадан (8) шартының бірінші $v(0, x) = \Phi_1(x)$ қатынасын қолданып (7) теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінің шешімін интегралдық түрде жазайық

$$v(t, x) = \Phi_1(x) + \int_0^t A(\tau, x)v(\tau, x)d\tau + \int_0^t D(\tau, x)d\tau\mu(x) + \int_0^t F(\tau, x)d\tau. \quad (13)$$

Осындағы $v(\tau, x)$ функциясының орнына (13) қатынасының оң жағын қойып және осы үдерісті ν ($\nu \in \mathbb{N}$) рет қайталап келесі өрнекті аламыз

$$v(t, x) = \tilde{\Phi}_\nu(t, x) + G_\nu(t, x, v) + \tilde{D}_\nu(t, x)\mu(x) + \tilde{F}_\nu(t, x), \quad (14)$$

мұнда

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\nu(t, x) &= \left\{ I + \int_0^t A(\tau_1, x) d\tau_1 + \int_0^t A(\tau_1, x) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2, x) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 \right\} \Phi_1(x), \\ G_\nu(t, x, v) &= \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) v(\tau_\nu, x) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \\ \tilde{D}_\nu(t, x) &= \int_0^t D(\tau_1, x) d\tau_1 + \int_0^t A(\tau_1, x) \int_0^{\tau_1} D(\tau_2, x) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &\quad + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} D(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ \tilde{F}_\nu(t, x) &= \int_0^t F(\tau_1, x) d\tau_1 + \int_0^t A(\tau_1, x) \int_0^{\tau_1} F(\tau_2, x) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &\quad + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu, x) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1.\end{aligned}$$

(14) өрнегінен $v(t, x)$ функциясының $t = T$ болғандағы мәнін табайық және оны (8) шарттың екінші қатынасына қойып келесі функционалдық теңдеуді аламыз

$$\tilde{D}_\nu(T, x)\mu(x) = \Phi_2(x) - \tilde{\Phi}_\nu(T, x) - \tilde{F}_\nu(T, x) - G_\nu(T, x, v), \quad x \in [0, \omega]. \quad (15)$$

Сонымен, $(v(t, x), \mu(x))$ функциялар жұбын – (7), (8) есебінің шешімін табу үшін (13) интегралдық және (15) функционалдық теңдеулерін, яғни теңдеулердің тұйық жүйесін алдық.

Егер $\mu(x)$ функциясы белгілі болса, онда (13) интегралдық теңдеуінен $v(t, x)$ функциясын табуға болады, керісінше, егер $v(t, x)$ функциясы белгілі болса, онда (15) функционалдық теңдеуінен $\mu(x)$ функциясын таба аламыз. Екі функция да белгісіз болғандықтан, (7), (8) есебінің шешімін – $(v(t, x), \mu(x))$ функциялар жұбын табу мақсатында итерациялық үдеріс қолданылады және келесі В алгоритмі ұсынылады:

0-қадам. а) $\tilde{D}_\nu(T, x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтарымды деп жорамалдап және $v(t, x) = v_0(t, x) = \frac{T-t}{T}\Phi_1(x) + \frac{t}{T}\Phi_2(x)$ дей отырып, (11) функционалдық теңдеулер жүйесінен $\mu^{(0)}(x)$ алғашқы жуықтауын бірмәнді анықтай аламыз:

$$\mu^{(0)}(x) = [\tilde{D}_\nu(T, x)]^{-1} \left\{ \Phi_2(x) - \tilde{\Phi}_\nu(T, x) - \tilde{F}_\nu(T, x) - G_\nu(T, x, v_0) \right\}, \quad x \in [0, \omega].$$

б) (13) интегралдық теңдеуінен $\mu(x) = \mu^{(0)}(x)$ болғанда $v^{(0)}(t, x)$ функциясын табамыз.

1-қадам. а) (11) функционалдық теңдеулер жүйесінде $v(t, x) = v^{(0)}(t, x)$ деп есептеп, $\mu^{(1)}(x)$ функциясын анықтаймыз. б) (13) интегралдық теңдеуінен $\mu(x) = \mu^{(1)}(x)$ болғанда $v^{(1)}(t, x)$ функциясын табамыз.

Т с.с.

к-қадамда $(\mu^{(k)}(x), v^{(k)}(t, x))$ функциялар жұбын табамыз.

Келесі тұжырым (7), (8) есебінің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттарын береді, бұған қоса ұсынылған алгоритмнің жүзеге асуын және жинақтылығын қамтамасыз етеді.

2 теорема. Қандай да бір ν , $\nu \in \mathbb{N}$, үшін $\tilde{D}_\nu(T, x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтарымды болсын және келесі теңсіздіктер орындалсын

$$a) \quad \|[\tilde{D}_\nu(T, x)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(T, x),$$

$$b) \quad q_\nu(T, x) = \gamma_\nu(T, x) \cdot T \left[e^{\alpha(x)T} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{\alpha(x)T^j}{j!} \right] \leq \chi < 1,$$

мұнда $\gamma_\nu(T, x)$ - оң, $x \in [0, \omega]$ бойынша үзіліссіз функция, $\chi - const$.

Онда (7), (8) есебінің жалғыз шешімі бар болады.

Осы теоремадан бастапқы (1) - (3) шеттік есебі үшін келесі тұжырым шығады.

3 теорема. Қандай да бір ν , $\nu \in \mathbb{N}$, $\tilde{D}_\nu(T, x)$ матрицасы барлық $x \in [0, \omega]$ үшін қайтарымды болсын және 2 теореманың а), b) теңсіздіктері орындалсын.

Онда (1)–(3) шеттік есебінің жалғыз шешімі бар болады.

2-3 теоремалардың дәлелдеуі [5] жұмыстағы сәйкес теоремалардың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

Әдебиеттер тізімі

[1]. Пташник Б. И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, Киев, "Наук. думка", 1984.

[2]. Самойленко А. М., Ткач Б. П. *Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными*, Киев, "Наук. думка", 1992.

[3]. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. *Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений*, М. Труды МИРАН, 1998, Т. 222, С. 1 – 191.

[4]. Денисов А. М. *Обратные задачи для квазилинейного гиперболического уравнения в случае движущейся точки наблюдения*, Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45, № 11, С. 1543 – 1553.

[5]. Асанова А. Т. *Об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с данными на пересекающихся линиях для систем гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45, № 3, С. 373 – 381.

Мақала редакцияға 01.09.2011ж. келіп түсті.

УДК 517.5

АНИЗОТРОПНЫЕ КЛАССЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

А. А. ДЖУМАБАЕВА, Н. Т. ТЛЕУХАНОВА

Евразийский Национальный университет имени Л.Н.Гумилева

010010, Астана, ул.Мунайтпасова 7, e-mail: jumabaeva2010@yandex.kz, tleukhanova@rambler.ru

В работе получены достаточные условия принадлежности множителя φ классу $M_{\bar{p}_0\bar{q}_0}^{\bar{p}_1\bar{q}_1}$. Эти условия выражены в терминах анизотропных пространств Лоренца и сетевых пространств. Построен пример, показывающий точность соответствующей теоремы вложения.

Пусть $f \in L_2([0, 1]^2)$ — функция и $\{a_{\bar{k}}(f)\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2}$ — последовательность ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i(k, \bar{x})}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2}$. $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$. Запись $\bar{1} \leq \leq \bar{p}, \bar{q} \leq \infty$ будет означать, что $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$, $i = 1, 2$.

Будем предполагать, что функция f обладает свойствами, достаточными, чтобы последовательность $\{a_{\bar{k}}(f)\}$ принадлежала классу $l_{\bar{p}\bar{q}}$.

Возьмем функцию $\varphi \in L_1([0, 1]^2)$. Рассмотрим отображение

$$T_\varphi : \{a_{\bar{k}}(f)\} \rightarrow \{a_{\bar{k}}(f\varphi)\},$$

где $\{a_{\bar{k}}(f\varphi)\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции $f\varphi$, $\bar{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\bar{k}, \bar{x}) = k_1x_1 + k_2x_2$.

Будем говорить, что функция φ принадлежит классу $M_{\bar{p}_0\bar{q}_0}^{\bar{p}_1\bar{q}_1}$, если линейный оператор T_φ ограничен из $l_{\bar{p}_0\bar{q}_0}$ в $l_{\bar{p}_1\bar{q}_1}$ и

$$\|\varphi\|_{M_{\bar{p}_0\bar{q}_0}^{\bar{p}_1\bar{q}_1}} = \|T_\varphi\|_{l_{\bar{p}_0\bar{q}_0} \rightarrow l_{\bar{p}_1\bar{q}_1}}.$$

Задача заключается в нахождении гладкостных и метрических характеристик функции φ , гарантирующих ограниченность оператора T_φ из $l_{\bar{p}_0\bar{q}_0}$ в $l_{\bar{p}_1\bar{q}_1}$.

В случае, когда $p_0 = p_1 = q_0 = q_1$, эта задача рассматривалась в работах С.Б.Стечкина [1], И.И.Хиршмана [2], С.Л.Эдельштейна [3], М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [4], Г.Е.Караджова [5] и других.

В настоящей работе получены достаточные условия принадлежности множителя φ классу $M_{\bar{p}_0\bar{q}_0}^{\bar{p}_1\bar{q}_1}$. Эти условия выражены в терминах анизотропных пространств Лоренца и сетевых пространств. Построены примеры, показывающие точность соответствующих теорем вложения.

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$ — векторы, такие, что если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если же $q_j = \infty$, то $0 < p_j \leq \infty$, $j = 1, 2$. В дальнейшем будем считать, что векторы \bar{p} и \bar{q} удовлетворяют этим условиям.

Keywords: *Fourier series, multipliers, anisotropic space*

2010 Mathematics Subject Classification: 42B15

© А. А. Джумабаева, Н. Т. Тлеуханова, 2011.

Определим функционал

$$\Phi_{\bar{p}\bar{q}}(\varphi) = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty |t_1^{p_1} t_2^{p_2} \varphi(t_1, t_2)|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, \quad (1)$$

здесь выражение $(\int_0^\infty (F(t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$ при $q = \infty$ понимается, как $\sup_{t>0} F(t)$.

Под областью определения функционала $\Phi_{\bar{p}\bar{q}}$ будем понимать множество всех определенных на $(0, \infty)^2$ монотонно невозрастающих по каждому аргументу функций $\varphi(t_1, t_2)$, для которых конечна величина (1).

Пусть μ — линейная мера Лебега, S — множество всех измеримых подмножеств e из $[0, 1]$ таких, что $0 < \mu e < \infty$. Фиксированное семейство множеств $M \subset S$ назовем сетью в $[0, 1]$. Пусть M_1, M_2 — соответственно сети в $[0, 1]$. Рассмотрим семейство множеств M в $[0, 1]^2$ вида

$$M = \{e = e_1 \times e_2 \subset [0, 1]^2 : e_j \in M_j, j = 1, 2.\},$$

т.е. $M = M_1 \times M_2$, которое будем называть сетью в $[0, 1]^2$. Для функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, интегрируемой на каждом e из M , определим функцию

$$\bar{f}(t; M) = \bar{f}(t_1, t_2; M) = \sup_{|e_j|>t_j, e \in M} \frac{1}{|e|} \left| \int_e f(x) dx \right|,$$

здесь $e = e_1 \times e_2$, $|e_j| = \mu e_j$, $|e| = |e_1| \cdot |e_2|$.

Пусть $0 < \bar{p} = (p_1, p_2), \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$. Через $N_{\bar{p}\bar{q}}$ обозначим множество всех функций f , для которых

$$\|f\|_{N_{\bar{p}\bar{q}}(M)} = \Phi_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{f}(\cdot; M)) < \infty.$$

Пусть $f(x_1, x_2)$ — измеримая функция, заданная в $[0, 1]^2$, $*$ $= (j_1, j_2)$ — некоторая перестановка последовательности чисел $\{1, 2\}$. Через $f^*(t) = f^{*j_1, *j_2}(t_1, t_2)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным x_{j_1}, x_{j_2} в $[0, 1]^2$, соответствующей вектору $*$ $= (j_1, j_2)$ (см.[6]). Пространство $L_{\bar{p}\bar{q}}^*([0, 1]^2)$ определяется, как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\bar{p}\bar{q}}^*([0, 1]^2)} = \Phi_{\bar{p}\bar{q}}(f^*(\cdot)) < \infty.$$

Если $*$ $= (1, 2)$, тогда пространство $L_{\bar{p}\bar{q}}^*([0, 1]^2)$ будем обозначать через $L_{\bar{p}\bar{q}}([0, 1]^2)$. Аналогично определяются дискретные пространства $n_{\bar{p}\bar{q}}$ и $l_{\bar{p}\bar{q}}^*$.

Если W_j — некоторые фиксированные семейства конечных наборов e_j мультииндексов из \mathbb{Z} , $j = 1, 2$, то семейство $W = W_1 \times W_2$ подмножеств \mathbb{Z}^2 назовем анизотропной сетью в \mathbb{Z}^2 .

Через $n_{\bar{p}\bar{q}}(W)$ будем обозначать следующий класс:

$$\begin{aligned} \{\{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} : \|a\|_{n_{\bar{p}\bar{q}}(W)} &= \left(\sum_{k_2=1}^\infty k_2^{q_2-1} \left(\sum_{k_1=1}^\infty k_1^{q_1-1} (\bar{a}_{k_1 k_2}(W))^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_2}} = \\ &= F_{\bar{p}\bar{q}}(\{\bar{a}_k(W)\}) < \infty\}, \end{aligned}$$

здесь

$$\bar{a}_{\bar{k}}(W) = \sup_{|e_j|>k_j, e \in W} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{k \in e} a_k \right|,$$

где $|e|$ — количество элементов множества $e = e_1 \times e_2$, а $|e_j|$ — количество элементов e_j , $j = 1, 2$.

Пусть $*$ = (j_1, j_2) , определим пространство

$$l_{\bar{p}\bar{q}}^* = \{ \{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} : \|a\|_{l_{\bar{p}\bar{q}}^*} = F_{\bar{p}\bar{q}}(\{a_{\bar{k}}\}) < \infty \},$$

где $a_{\bar{k}}^* = a_{k_1 k_2}^{*j_1 j_2}$ — невозрастающая перестановка последовательности $\{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2}$, взятая последовательно по переменным k_{j_1}, k_{j_2} . Это пространство было рассмотрено в работе [7].

Для доказательства основных результатов нам понадобятся следующие теоремы из работ [7], [8], которые сформулируем для двумерного случая.

Теорема А ([7]). Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{p}' = (p'_1, p'_2)$, $\bar{1} < \bar{p} < \bar{2}$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} = 1$, $i = 1, 2$, $*$ = $(2, 1)$. Если $f \in L_{\bar{p}\bar{q}}^*([0, 1]^2)$, то последовательность её коэффициентов Фурье $a = \{a_{\bar{r}}\}_{\bar{r} \in \mathbb{N}^2}$ принадлежит $l_{\bar{p}'\bar{q}}$ и верно неравенство

$$\left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{q_2}{p'_2}-1} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{\frac{q_1}{p'_1}-1} (a_{k_1 k_2}^{*1*2})^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_2}} < c \|f\|_{L_{\bar{p}\bar{q}}^*}.$$

Теорема В ([7]). Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{p}' = (p'_1, p'_2)$, $\bar{2} < \bar{p} < \infty$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} = 1$, $i = 1, 2$, $*$ = $(2, 1)$. Если последовательность $a = \{a_{\bar{r}}\}_{\bar{r} \in \mathbb{N}^2}$ принадлежит $l_{\bar{p}'\bar{q}}$, т.е.

$$A = \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{q_2}{p'_2}-1} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{\frac{q_1}{p'_1}-1} (a_{k_1 k_2}^{*1*2})^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty,$$

тогда ряд $\sum_{\bar{r} \in \mathbb{Z}^2} a_{\bar{r}} e^{2\pi i(\bar{r}, \bar{x})}$ является рядом Фурье некоторой функции f из $L_{\bar{p}\bar{q}}^*([0, 1]^2)$ и $\|f\|_{L_{\bar{p}\bar{q}}^*} \leq cA$.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, 2\}$ — вершины двумерного единичного куба. Через $(L_{p_\varepsilon, r}; \varepsilon \in E)_{\bar{\theta}\bar{q}}$ обозначается интерполяционное пространство для семейства пространств $L_{\bar{p}_\varepsilon, \bar{r}}$, $\varepsilon \in E$, относительно интерполяции анизотропного метода с параметрами $\bar{\theta}$, \bar{q} ([7], [8]).

Теорема С ([8]). Пусть $\bar{1} \leq \bar{p}_0 = (p_1^0, p_2^0) < \bar{p}_1 = (p_1^1, p_2^1) \leq \infty$, $\varepsilon \in E$, $\bar{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, p_2^{\varepsilon_2})$, $0 < \bar{r} = (r, r) \leq \infty$, $0 < \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$, $*$ = (j_1, j_2) либо $(1, 2)$, либо $(2, 1)$. Тогда

$$(L_{\bar{p}_\varepsilon \bar{r}}(\Omega); \varepsilon \in E)_{\bar{\theta}\bar{q}^*} = L_{\bar{p}\bar{q}}^*(\Omega),$$

где $0 < \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2) < 1$, $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Теорема D ([7]). Пусть $2 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q < \infty$, $f \sim \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} a_{\bar{k}} e^{2\pi i(\bar{k}, \bar{x})}$.

а) Если M_0 — множество всех прямоугольников в $[0, 1]^2$ со сторонами, параллельными осям координат, тогда

$$\|f\|_{N_{p', q}(M_0)} \leq c \|a\|_{l_{pq}},$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

б) Если W_0 — множество всех прямоугольников в \mathbb{N}^2 , тогда

$$\|a\|_{n_{p', q}(W_0)} \leq c \|f\|_{L_{pq}[0, 1]^2},$$

где константа c зависит только от параметров p и q .

Теорема 1. Пусть $\bar{1} < \bar{q} < \bar{2} < \bar{p} < \infty$, $\bar{0} < \bar{h} \leq \infty$, $\bar{1} < \bar{r} < \infty$, $*$ = (2, 1) и $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{\bar{p}}$. Тогда имеет место вложение

$$L_{\bar{r}\infty}^* \hookrightarrow M_{\bar{q}\bar{h}}^{\bar{p}\bar{h}}.$$

Доказательство. Сначала докажем случай, когда $\bar{h} = (1, 1)$. Для этого последовательно используем теорему А, неравенство Гельдера и теорему В, получим

$$\begin{aligned} \|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}\bar{1}}} &= \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{\frac{1}{\bar{p}}-1} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{\frac{1}{\bar{p}}-1} a_{k_1 k_2}^{*1*2}(f\varphi) \right) \right) < c \|f\varphi\|_{L_{\bar{p}'\bar{1}}^*} = \\ &= c_1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 t_1^{\frac{1}{\bar{p}'}-1} t_2^{\frac{1}{\bar{p}'}-1} (f\varphi)^{*2*1}(t_1, t_2) dt_1 \right) dt_2 \right) \leq \\ &\leq c_2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 t_1^{\frac{1}{\bar{p}'}-1} t_2^{\frac{1}{\bar{p}'}-1} f^{*2*1}(t_1, t_2) \varphi^{*2*1}(t_1, t_2) dt_1 \right) dt_2 \right) \leq \\ &\leq c_2 \left(\sup_{t_1>0, t_2>0} t_1^{\frac{1}{\bar{p}'}} t_2^{\frac{1}{\bar{p}'}} \varphi^{*2*1}(t_1, t_2) \right) \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (t_1^{\frac{1}{\bar{q}'}} t_2^{\frac{1}{\bar{q}'}} f^{*2*1}(t_1, t_2)) \frac{dt_1}{t_1} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right) = \\ &= c_2 \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|f\|_{L_{\bar{q}\bar{1}}^*} \leq c_3 \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}\bar{1}}}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\bar{p}'} = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{q}'}$.

Таким образом, получили, что

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}\bar{1}}} \leq c \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}\bar{1}}}. \tag{2}$$

Теперь применим интерполяционные теорему С, где базовыми будут неравенства типа (2), r — фиксированный, а параметры

$$\bar{p}_{00} = (p_1^0, p_2^0), \bar{p}_{11} = (p_1^1, p_2^1), \bar{p}_{01} = (p_1^0, p_2^1), \bar{p}_{10} = (p_1^1, p_2^0),$$

$$\bar{q}_{00} = (q_1^0, q_2^0), \bar{q}_{11} = (q_1^1, q_2^1), \bar{q}_{01} = (q_1^0, q_2^1), \bar{q}_{10} = (q_1^1, q_2^0)$$

выберем так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{q}_{ij}} - \frac{1}{\bar{p}_{ij}}, \quad i = 0, 1, j = 0, 1.$$

Имеем

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}_{00}\bar{1}}} \leq c \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}_{00}\bar{1}}},$$

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}_{11}\bar{1}}} \leq c \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}_{11}\bar{1}}},$$

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}_{01}\bar{1}}} \leq c \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}_{01}\bar{1}}},$$

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}_{10}\bar{1}}} \leq c \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}_{10}\bar{1}}}.$$

Используя интерполяционную теорему С, получим

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{\bar{p}\bar{h}}} \leq c \|\varphi\|_{L_{\bar{r}\infty}^*} \|a(f)\|_{l_{\bar{q}\bar{h}}}.$$

Теорема доказана.

Покажем точность полученного результата.

Теорема 2. Пусть $\bar{1} < \bar{q} < \bar{2} < \bar{p} < \infty$, $\bar{0} < \bar{h} \leq \infty$, $\bar{1} < \bar{r} < \infty$ и $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{q}} - \frac{1}{\bar{p}}$. Для любого $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, найдется $\varphi \in L_{\bar{r}-\bar{\varepsilon}, \infty}^*$, но $\varphi \notin M_{\bar{q}\bar{h}}^{\bar{p}\bar{h}}$.

Доказательство. Пусть α_1 и α_2 удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_i > \frac{1}{(r_i - \varepsilon)'} = 1 - \frac{1}{r_i - \varepsilon}, \quad \beta_i > \frac{1}{q_i}, \quad \alpha_i + \beta_i < 1 - \frac{1}{r_i} + \frac{1}{q_i}, \quad i = 1, 2.$$

Выберем последовательности $b = \{b_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2}$, $a = \{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2}$,

$$b_{\bar{k}} = \frac{1}{(|k_1| + 1)^{\alpha_1} (|k_2| + 1)^{\alpha_2}}, \quad a_{\bar{k}} = \frac{1}{(|k_1| + 1)^{\beta_1} (|k_2| + 1)^{\beta_2}},$$

$$\begin{aligned} (a * b)_{\bar{m}} &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|k_1| + 1)^{\beta_1} (|k_2| + 1)^{\beta_2} (|k_1 - m_1| + 1)^{\alpha_1} (|k_2 - m_2| + 1)^{\alpha_2}} \approx \\ &\approx \int_R \int_R \frac{dx_1 dx_2}{|x_1|^{\beta_1} |x_2|^{\beta_2} |x_1 - m_1|^{\alpha_1} |x_2 - m_2|^{\alpha_2}}, \\ I &= \int_R \int_R \frac{dx_1 dx_2}{|x_1|^{\beta_1} |x_2|^{\beta_2} |x_1 - m_1|^{\alpha_1} |x_2 - m_2|^{\alpha_2}} = \\ &= |m_1|^{-\alpha_1 - \beta_1 + 1} |m_2|^{-\alpha_2 - \beta_2 + 1} \int_R \int_R \frac{dy_1 dy_2}{|y_1|^{\beta_1} |y_2|^{\beta_2} |y_1 - y_1^0|^{\alpha_1} |y_2 - y_2^0|^{\alpha_2}}, \end{aligned}$$

где $y_1^0 = \frac{m_1}{|m_1|}$, $y_2^0 = \frac{m_2}{|m_2|}$ по модулю равны 1, поэтому интеграл не зависит от m_1, m_2 ;

$$a * b \sim \left\{ (|m_1| + 1)^{-\alpha_1 - \beta_1 + 1} (|m_2| + 1)^{-\alpha_2 - \beta_2 + 1} \right\}_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty},$$

$$\begin{aligned} \|a * b\|_{l_{\bar{p}\bar{h}}} &= \left(\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} |m_2|^{\frac{h_2}{p_2} - 1} \left(\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} |m_1|^{\frac{h_1}{p_1} - 1} ((|m_1| + 1)^{-\alpha_1 - \beta_1 + 1} (|m_2| + 1)^{-\alpha_2 - \beta_2 + 1})^{h_1} \right)^{\frac{h_2}{h_1}} \right)^{\frac{1}{h_2}} = \\ &= \left(\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} |m_2|^{\frac{h_2}{p_2} - 1} (|m_2| + 1)^{(-\alpha_2 - \beta_2 + 1)h_2} \right)^{\frac{1}{h_2}} \left(\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} |m_1|^{\frac{h_1}{p_1} - 1} (|m_1| + 1)^{(-\alpha_1 - \beta_1 + 1)h_1} \right)^{\frac{1}{h_1}} \sim \\ &\sim \left(\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} |m_2|^{\frac{h_2}{p_2} - 1 + (-\alpha_2 - \beta_2 + 1)h_2} \right)^{\frac{1}{h_2}} \left(\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} |m_1|^{\frac{h_1}{p_1} - 1 + (-\alpha_1 - \beta_1 + 1)h_1} \right)^{\frac{1}{h_1}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $a * b \notin l_{\bar{p}\bar{h}}$ и, в то же время, $\varphi = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} b_{\bar{k}} e^{2\pi i(\bar{k}, \bar{x})}$, $\varphi \in L_{\bar{r}-\bar{\varepsilon}, \infty}^*$ и $\{a_{\bar{k}}\} \in l_{\bar{q}\bar{h}}$.

Теорема 3. Пусть $1 < q < 2 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $q' = \frac{q}{q-1}$, G — множество всех прямоугольников в $[0, 1]^2$, тогда имеет место неравенство

$$\sup_{Q \in G} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{1}{r}}} \int_Q \varphi(x) dx \leq \|\varphi\|_{M_q^p} \leq \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} t_1^{\frac{1}{r}} t_2^{\frac{1}{r}} \varphi(t_1 t_2).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in M_q^p$, $Q = Q_1 \times Q_2$ — произвольный прямоугольник в $[0, 1]^2$, $f_0(x_1, x_2) = \chi_Q(x_1, x_2)$ — характеристическая функция прямоугольника Q . Заметим, что

$$\|a_{\bar{k}}(f_0)\|_{l_q} \sim \|f_0\|_{L_{q'}} \sim |Q|^{\frac{1}{q'}}. \quad (3)$$

По теореме D, учитывая вложение $N_{pq_0} \hookrightarrow N_{pq_1}$ при $q_0 < q_1$ и соотношение (3), имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{M_q^p} &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|\widehat{f\varphi}\|_{l_p}}{\|\widehat{f}\|_{l_q}} \geq \frac{\|\widehat{f_0\varphi}\|_{l_p}}{\|\widehat{f_0}\|_{l_q}} \geq c \frac{\|f_0\varphi\|_{N_{p'p'}}}{|Q_1|^{\frac{1}{q'}}|Q_2|^{\frac{1}{q'}}} = \\ &= \frac{c}{|Q_1|^{\frac{1}{q'}}|Q_2|^{\frac{1}{q'}}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p'}} t_2^{\frac{1}{p'}} \left(\sup_{|W_j| \geq t_j, W \in G} \frac{1}{|W|} \int_{W \cap Q} f_0 \varphi dx \right)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\geq \frac{c_1}{|Q_1|^{\frac{1}{q'}}|Q_2|^{\frac{1}{q'}}} \sup_{t > 0} t_1^{\frac{1}{p'}} t_2^{\frac{1}{p'}} \left(\sup_{|W_j| \geq t_j, W \in G} \frac{1}{|W|} \int_{W \cap Q} f_0 \varphi dx \right) \geq \\ &\geq \frac{c_1}{|Q_1|^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'}}|Q_2|^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{p'}}} \left(\sup_{W \in G} \frac{1}{|W_1||W_2|} \int_{W \cap Q} f_0 \varphi dx \right) \geq \\ &\geq \frac{c_1}{|Q_1|^{\frac{1}{q'} + \frac{1}{p}}|Q_2|^{\frac{1}{q'} + \frac{1}{p}}} \int_Q f_0 \varphi dx = \frac{c_1}{|Q_1|^{\frac{1}{q'} + \frac{1}{p}}|Q_2|^{\frac{1}{q'} + \frac{1}{p}}} \int_Q \varphi dx. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора отрезка Q получим

$$\|\varphi\|_{M_q^p} \geq c \sup_{Q \in G} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{1}{r}}} \int_Q \varphi dx,$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Доказательство верхней оценки следует из теоремы 1 и вложения $l_{qq} \hookrightarrow l_{qp}$, $q < p$. Из теоремы 1 имеем

$$\|a(f\varphi)\|_{l_{ph}} \leq c \|\varphi\|_{L_{r\infty}} \|a(f)\|_{l_{qh}}.$$

При $h = p$

$$\|a(f\varphi)\|_{l_p} \leq c \|\varphi\|_{L_{r\infty}} \|a(f)\|_{l_{qp}} \leq \|\varphi\|_{L_{r\infty}} \|a(f)\|_{l_{qq}} = \|\varphi\|_{L_{r\infty}} \|a(f)\|_{l_q},$$

т.е.

$$\|\varphi\|_{M_q^p} \leq \sup_{t_1 > 0, t_2 > 0} t_1^{\frac{1}{r}} t_2^{\frac{1}{r}} \varphi(t_1 t_2),$$

теорема доказана.

Цитированная литература

- [1]. Стечкин С.Б. *О билинейных формах*, ДАН СССР, 71, 1950, № 3, С. 237 – 240.
- [2]. Hirschman I.I. *On multiplier transformations*, Duke Math.J., 26, 1959, № 2, P. 221 – 242.
- [3]. Эдельштейн С.Л. *Ограниченность свертки в $L_p(Z_m)$ и гладкость символа оператора*, Мат. заметки, 22, 1977, № 6, С. 873 – 884.
- [4]. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева, приложение к спектральной теории*, В.: Х мат.школа, Киев, 1974, С. 5 – 189.

[5]. Караджов Г.Е. *Тригонометрическая проблема множителей*, Конструктивная теория функций'81, София, 1983, С. 82 – 86.

[6]. Blozinski A.P. *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms*, Trans. Amer. Math. Soc., 1981, V.263, № 1, P. 149 – 167.

[7]. Нурсултанов Е.Д. *О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств*, Известия РАН, 2000, Т.64, №1, С. 95 – 122.

[8]. Нурсултанов Е.Д. *Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения*, Доклады РАН, 2004, Т.394, № 1, С. 1 – 4

Статья поступила в редакцию 09.06.2011 г.

УДК 5197.9

ВОПРОСЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Т. Ш. ИМАНКУЛ

Институт математики и механики КазНУ имени аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: imankul.t.sh@mail.ru

Для неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений с переопределенными двухточечными краевыми условиями решается задача восстановления решений и специальных правых частей. При этом удается выполнить полное описание всевозможных допустимых правых частей.

1. Основной результат и его обсуждение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)v(t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

при условиях

$$\alpha_1 y(t_0) + \beta_1 y(t_1) = b, \quad (2)$$

$$\alpha_2 y(t_0) + \beta_2 y(t_1) = a, \quad (3)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – заданные матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $(n \times n)$, $(n \times m)$ соответственно, $\mu(t), t \in I$, – заданная n -мерная функция с кусочно-непрерывными элементами, $\nu(t) = (\nu_1(t), \dots, \nu_n(t))$ – искомая вектор-функция, моменты времени t_0, t_1 фиксированы, $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1 \in R^n$ – заданные вектора. Предполагаем, что

1) ранг матрицы (α_1, β_1) равен n ,

2) однородная задача $\frac{dy}{dt} = A(t)y, \alpha_1 y(t_0) + \beta_1 y(t_1) = 0$ имеет только тривиальное решение.

Отметим, что задача типа (1) – (3) возникает в различных разделах математики. Во-первых, рассматриваемая задача (1) – (3) может быть интерпретирована, как определение правой части неоднородного уравнения (1) по дополнительной информации. В таком случае задача (1) – (3) представляет собой так называемую обратную задачу, обзор по которой имеется в недавнем изданной монографии С.И. Кабанихина [1]. Во-вторых, рассматриваемая задача (1) – (3)

Keywords: *Asymptotical properties, regulated systems, equilibrium state*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B40

© Т. Ш. Иманкул, 2011.

представляет собой переопределенную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В таком случае важно знать довольно общие условия разрешимости задачи (1) – (3). Теория переопределенных задач освещена в работе П.И. Дудникова [2]. В-третьих, решение задачи (1) – (3) может представлять исходный шаг при разработке алгоритмов решения задач оптимального управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных $A(t), B(t), \mu(t), \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, a, b$. Подобный подход при $\beta_1 = 0, \alpha_2 = 0$ детально разработан в работах [3 - 5]. Аналоги задач (1) – (3) для абстрактных операторных уравнений и уравнений с частными производными можно найти в работе [6].

Основной результат данной работы сформулирован для случая постоянной матрицы A , хотя легко переформулировать его для непрерывной матрицы.

Теорема. Если $w(t) \in L_2(0, t_1)$, то множество

$$T = \left\{ \nu(t) = w(t) + B^* \chi^* \left(\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) dt \right)^{-1} (\xi - z(t_1)) \right\}$$

дает полное описание таких функций $\nu(t)$, т.е. существуют решения уравнения (1) с условиями (2) и (3), где

$$\chi(\tau, t_1) = \left(\beta_2 e^{A(t_1-\tau)} - (\alpha_2 E + \beta_2 e^{At_1}) (\alpha_1 E + \beta_1 e^{At_1})^{-1} \beta_1 e^{A(t_1-\tau)} \right), \quad (4)$$

$$\xi = a - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \mu(\tau) d\tau - (\alpha_2 E + \beta_2 e^{At_1}) (\alpha_1 E + \beta_1 e^{At_1})^{-1} \left(b - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \mu(\tau) d\tau \right). \quad (5)$$

Справедливо также обратное утверждение.

Если выполняются требования (2), то задача (1) – (3), вообще говоря, переопределена, т.е. $\nu(t)$ в правой части уравнения (1) не может быть произвольной и выбирается согласно теореме.

Замечание. В теореме дано полное описание управлений $\nu(t)$, для которых решение задачи (1) – (3) существует. Причем указано, что семейство таких управлений $\nu(t)$ зависит от произвольной квадратично-суммируемой функции.

2. Вспомогательные утверждения и доказательство теоремы

Для доказательства теоремы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 1. Пусть заданы $A(t), B(t), \mu(t), \nu(t)$ и числа α_1, β_1, b . Тогда решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), имеет вид

$$y(t) = e^{At} (\alpha_1 E + \beta_1 e^{At_1})^{-1} \left(b - \beta_1 \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B(\tau) \nu(\tau) d\tau + \beta_1 \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \mu(\tau) d\tau \right) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) \nu(\tau) d\tau + \beta_1 \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau, \quad (6)$$

если матрица $(\alpha_1 E + \beta_1 e^{At})$ не является вырожденной.

Доказательство леммы 1. Общее решение системы (1) имеет вид

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)\nu(\tau)d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau. \quad (7)$$

Из условия (2) имеем

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \left(e^{At_1}y_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B(\tau)\nu(\tau)d\tau + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mu(\tau)d\tau \right) = b, \quad (8)$$

откуда

$$y_0 = (\alpha_1 E + \beta_1 e^{At})^{-1} \left(b - \beta_1 \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B(\tau)\nu(\tau)d\tau + \beta_1 \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mu(\tau)d\tau \right). \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в соотношение (7), получим формулу (6). Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. Пусть заданы $A(t), B(t), \mu(t), \nu(t)$ и числа $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, a, b$. Тогда

$$\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1)B(\tau)\nu(\tau)d\tau = \xi, \quad (10)$$

где $\chi(\tau, t_1)$ и ξ определяются выражениями (4) и (5).

Доказательство леммы 2. Аналогично предыдущему случаю из условия (3) имеем

$$\alpha_2 y_0 + \beta_2 \left(e^{At_1}y_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B(\tau)\nu(\tau)d\tau + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mu(\tau)d\tau \right) = a, \quad (11)$$

откуда

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 E + \beta_2 e^{At_1}) (\alpha_1 E + \beta_1 e^{At_1})^{-1} \left(\beta_1 \int_0^t e^{A(t_1-\tau)}B(\tau)\nu(\tau)d\tau + \beta_1 \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\mu(\tau)d\tau \right) + \\ & + \beta_2 \int_0^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)\nu(\tau)d\tau = a - \beta_2 \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Используя равенства (4), (5) и (11), получим (10). Лемма 2 доказана полностью.

Доказательство теоремы. Сначала неизвестную функцию $\nu(t)$, удовлетворяющую уравнению (10), ищем в виде

$$\nu(t) = B^*(\tau)\chi^*(\tau, t_1)C,$$

где C – постоянный вектор. Тогда выражение (10) преобразуется к виду

$$\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1)B(\tau)B^*(\tau)\chi^*(\tau, t_1)d\tau C = \xi. \quad (12)$$

Отсюда при предположении, что $\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) d\tau$ – невырожденная матрица, находим

$$C = \left(\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) d\tau \right)^{-1} \xi. \quad (13)$$

Частное решение неоднородного уравнения (11) имеет вид

$$\nu(\tau) = B^*(\tau) \chi^*(\tau) \cdot \left(\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) d\tau \right)^{-1} \xi. \quad (14)$$

Теперь общее решение однородного уравнения

$$\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) u(\tau) d\tau = 0$$

ищем в виде

$$u(t) = \omega(t) + \sigma(t), \quad (15)$$

где $\omega(t)$ – произвольная вектор-функция, $\sigma(t)$ – неизвестная вектор-функция. Из уравнения (14) следует, что

$$\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) \sigma(\tau) d\tau = - \int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) \omega(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Нетрудно понять, что

$$Z_1(t) = \int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) \omega(\tau) d\tau,$$

где $Z_1(t)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= AZ + B\omega, \\ \alpha_1 Z(0) + \beta_1 Z(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда аналогично тому, как решили уравнение (10), из соотношения (16) получаем

$$\sigma(\tau) = -B^*(\tau) \chi^*(\tau) \left(\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) d\tau \right)^{-1} Z_1(t).$$

Значит,

$$u(t) = \omega(\tau) - B^*(\tau) \chi^*(\tau) \left(\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) d\tau \right)^{-1} Z_1(t).$$

В итоге получим, что

$$\nu(t) = \omega(\tau) + B^*(\tau) \chi^*(\tau) \left(\int_0^{t_1} \chi(\tau, t_1) B(\tau) B^*(\tau) \chi^*(\tau, t_1) d\tau \right)^{-1} (\xi - Z_1(t)).$$

Теорема доказана.

Цитированная литература

- [1]. Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*, Учебник для высших учебных заведений, Новосибирск: Сибирское научное издание, 2009, 457 с.
- [2]. Дудников П.И. *Линейные переопределенные системы уравнения с частными производными, граничные и начально-граничные задачи для них*, Итоги науки и техники. Сер. совр. пробл. матем. фонд. направления ВИНТИ, 1991, Т. 65. 453 с.
- [3]. Айсагалиев С.А. *Краевые задачи оптимального управления*, Алматы: Қазақ университеті, 1999, 214 с.
- [4]. Айсагалиев С.А. *Теория регулируемых систем*, Алматы: Қазақ университеті, 2000, 234 с.
- [5]. Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш. *Теория фазовых систем*, Алматы: Қазақ университеті, 2005, 272 с.
- [6]. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, New York, 1972.

Статья поступила в редакцию 25.11.2010 г.

УДК 532.526

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ДВУХ ПРЕПЯТСТВИЙ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ТАНДЕМОМ, ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

С.Д. МАУСУМБЕКОВА

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр.аль-Фараби 71, e-mail: smausumbekova@mail.ru

В работе моделируется процесс образования и взаимодействия вихрей при обтекании последовательно расположенных тел потоком сжимаемого газа. Численно исследованы влияния расстояний между препятствиями на структуру течений. Для повышения аппроксимации динамических характеристик на препятствии применяется линейная и билинейная интерполяции. Приводятся качественные сравнения изменения коэффициента подъемной силы с численными расчетами других авторов.

Введение

Разрушения теплообменных агрегатов, которые непосредственно связаны с вибрациями, возбуждаемыми потоком, зачастую приводят к многочисленному простоям энергетических установок. Причину возникновения вибраций обычно связывают с одной из следующих причин: срывом вихрей импульсной турбулентности, гидроупругой неустойчивостью, зависящей от режима колебаний. Когда частота срыва вихрей приближается к частоте собственных поперечных акустических колебаний ограниченного объема в поперечном направлении (т.е. акустической моды, связанной, главным образом, с движением акустической среды в направлении, перпендикулярном как к оси труб, так и к направлению потока, и затухающей вне пучка), может наступить резонанс. Основную часть сооружений таких, как трубы теплообмена, охлаждающие системы атомных электростанций, морские платформы, дымовые трубы, электрические кабели и т.д., формируют цилиндры с круговым сечением. Упомянутые конструкции подвергаются воздействию потока воздуха или воды, следовательно, вырабатывают возбуждаемые потоками вибрации, которые приводят к разрушению конструкции. Чтобы избежать эту ситуацию и улучшить дизайн конструкций, необходимо понимать детали взаимодействия "поток - конструкция". Эти знания могут быть улучшены экспериментальными и численными моделями. В прошлых десятилетиях несжимаемые течения вокруг одного цилиндра хорошо изучались и сейчас рассматриваются, как классический случай для обоснования новых численных схем. С точки зрения геометрической конфигурации, течение вокруг двух цилиндров

Keywords: *Turbulence, interpolation, obstacle tandem*

2010 Mathematics Subject Classification: 76F40

© С.Д. Маусумбекова, 2011.

может рассматриваться, как расширенный случай изолированного цилиндра. Несмотря на это, соответствующая задача имеет свои трудности, связанные с взаимодействием течений между препятствиями. Положение каждого препятствия в потоке относительно соседних определяет возмущения и изменения, вносимые в поток перед препятствием и за ним. Ввиду интереса к характеристикам течения, исследование течений вокруг пары цилиндров остается актуальным.

Постановка задачи

Геометрическое положение двух цилиндров в общем случае можно разделить на: расположенные параллельно, тандемом и в шахматном порядке в соответствии с направлением свободного потока. Эти расположения экспериментально и численно изучались многими исследователями [1-4]. Однако, основное внимание при этом обращалось на вносимые конструкцией возмущения в поток. Почти совсем не уделялось внимания динамическим характеристикам конструкций и их влиянию на течение вниз по потоку. Для определения гидродинамических сил необходимо знать распределение динамических характеристик натекающего потока, то есть решать полную систему уравнений Навье-Стокса. Для определения этих сил поставим задачу обтекания одиночного препятствия, двух тел, расположенных тандемом, а также расположенных вертикально, потоком сжимаемого турбулентного газа в поле силы тяжести (без учета сил Кориолиса) в ограниченной области $\Omega_1 \in R^2$ с границей S . Задача сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений в частных производных:

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{Fr} \rho e_z - \frac{1}{\gamma M^2} \nabla P + K \Delta V, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{dt} + K \Delta T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V = 0, \quad (3)$$

$$P = \rho R T. \quad (4)$$

Уравнения (1)-(4) записаны в безразмерной форме. В качестве параметров обезразмеривания приняты характерные величины для рассматриваемого течения: высота рассматриваемой области H , максимальная скорость невозмущенного потока V_0 , температура T_0 , плотность ρ_0 на входе, масштаб времени t_0 . Здесь

$$Fr = V_0^2 / gH$$

— число Фруда,

$$M = \frac{V_0}{(\gamma R T_0)^{1/2}}$$

— число Маха.

Граничные условия

Рассматриваемая проблема решается при следующих начальных и граничных условиях: в начальный момент времени газ находится в состоянии покоя, начальное распределение температуры почти не изменяется с высотой: $T = 1 - mz$, $m = 0.01$. На входе задан линейный рост поля скоростей по времени. На нижней и верхней границах условия для поля скоростей совпадают с условиями на входе и для температуры имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

На поверхности обтекаемого тела

$$u = 0, \quad w = 0, \quad T = 1 - mz. \quad (5)$$

На выходе приняты мягкие граничные условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Метод решения

Основные трудности, возникающие при численном интегрировании системы (1)-(8) для малых чисел Маха, указаны и исследованы в работах [5,6]. При решении уравнений Навье-Стокса возникает необходимость точного удовлетворения граничных условий на препятствии. Точное удовлетворение граничных условий на препятствии влияет на определение сил, действующих со стороны жидкости на тело. Известны подходы к разрешению этих проблем. Наиболее эффективными среди них можно назвать метод виртуальных границ [6], метод фиктивных областей [7], отличающийся простой реализацией. В данной работе во избежание традиционного преобразования уравнений в систему координат, связанную с профилем обтекаемого препятствия, для решения системы (1)-(8) применяется метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Для исключения трудностей, возникающих при численном интегрировании исходной системы уравнений для малых чисел Маха, использована модель гипозвуковых течений [8]. Для повышения порядка аппроксимации динамических характеристик потока в работе применяется линейная и билинейная интерполяции для переопределения значений скоростей на приграничных точках с учетом точного удовлетворения граничных условий на препятствии. На рис.1(а, б) показаны примеры использования билинейной и линейной интерполяций соответственно. На рис.1 P_1 — точка, в которой мы хотим удовлетворить граничным условиям прилипания, $U_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4$ — известные скорости в четырех точках, окружающих точку P_1 . P_1 определяется, как точка пересечения виртуальной границы и нормали к поверхности тела, проходящей через точку переопределения U_1 . Когда названные точки находятся вне тела, как показано на рис. 1(а), скорость U_1 определяется из билинейной интерполяции.

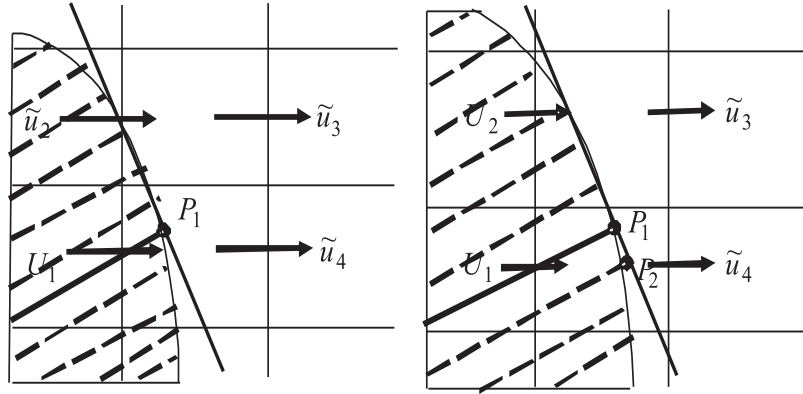


Рис. 1: Схематическая диаграмма для интерполяции: а) билинейная интерполяция, б) линейная интерполяция.

Рассмотрим линейную интерполяцию 2-го порядка. На рис.2 приведено расположение точек интерполяции для случая

$$0 < h \leq y_A, \quad h = C'P_2, \quad y_A = AP_2,$$

$$U_1^k = -\tilde{u}_{C'}^k, \quad C'P_2 = P_2C,$$

P_2 — точка, где ставится условие прилипания,

$$f(x_0) = 0, \quad f(x) = \tilde{u}_{C'}^k, \quad x = h, \quad x_1 = y_A, \quad 0 \leq \tilde{u} \leq \tilde{u}_{C'}^k \leq \tilde{u}_A^k, \quad \Delta = \tilde{u}_A^k, \quad x - x_0 = h,$$

$$h = y_A, \quad \tilde{u}_{C'}^k = 0 + \frac{h}{y_A} \tilde{u}_A^k = \frac{h}{y_A} \tilde{u}_A^k,$$

следовательно, $U_1^k = -\frac{h}{y_A} \tilde{u}_A^k$ при $0 \leq h \leq y_A$.

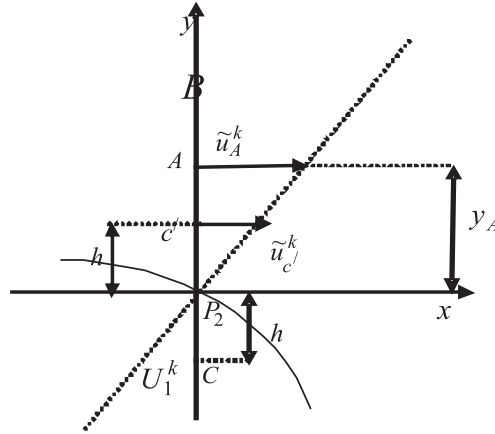


Рис. 2: Расположение точек интерполяции для случая $0 \leq h \leq y_A$.

Определим U_i^k с использованием линейной интерполяции для случая $y_A < h < y_B$.

На рис.3 приведено расположение точек интерполяции для случая $h = C'P_2$, $y_A = AP_2$, $\tilde{u}_A^k \leq \tilde{u}_{C'}^k \leq \tilde{u}_B^k$,

$$f(x) = \tilde{u}_{C'}^k, \quad f(x_0) = \tilde{u}_A^k, \quad f(x_1) = \tilde{u}_B^k, \quad \Delta = \tilde{u}_B^k - \tilde{u}_A^k, \quad x = h, \quad x_0 = y_A, \quad x_1 = y_B,$$

следовательно

$$U_1^k = -\frac{(y_B - h) \tilde{u}_A^k + (h - y_A) \tilde{u}_B^k}{y_B - y_A},$$

$$\tilde{u}_{C'}^k = \tilde{u}_A^k + \frac{h - y_A}{y_B - y_A} (\tilde{u}_B^k - \tilde{u}_A^k) = \tilde{u}_A^k \left(1 - \frac{h - y_A}{y_B - y_A}\right) + \frac{h - y_A}{y_B - y_A} \tilde{u}_B^k =$$

$$= \tilde{u}_A^k \left(\frac{y_B - y_A - h + y_A}{y_B - y_A}\right) + \frac{h - y_A}{y_B - y_A} \tilde{u}_B^k = \frac{y_B - h}{y_B - y_A} \tilde{u}_A^k + \frac{h - y_A}{y_B - y_A} \tilde{u}_B^k =$$

$$= \frac{(y_B - h) \tilde{u}_A^k + (h - y_A) \tilde{u}_B^k}{y_B - y_A},$$

откуда

$$U_1^k = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{h}{y_A} \tilde{u}_A^k, \leq h \leq y_A \\ -\frac{(y_B - h) \tilde{u}_A^k + (h - y_A) \tilde{u}_B^k}{y_B - y_A}, y_A < h < y_B \end{array} \right\}.$$

Результаты расчетов и их анализ

С целью изучения возможностей и свойств вычислительного алгоритма и определения значений свободных параметров авторами были проведены расчеты обтекания одиночного цилиндра, двух цилиндров, расположенных тандемом и рядом поперек, потоком вязкого газа.

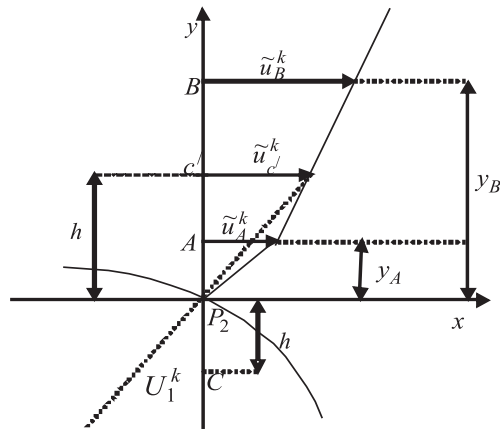


Рис. 3: Расположение точек интерполяции для случая $y_A < h < y_B$.

Расчетная сетка состоит из (858×641) ячеек с шагами $h_x = 0,035$, $h_z = 0,025$, $\tau = 0,0025$. В качестве препятствия было принято $z = c \pm (b^2 - x^2/a^2)^{1/2}$ – цилиндрическое тело круглого сечения, где $c = 0,75$, $a^2 = 0,04$, $b^2 = 0,04$. На рис.4 приведены линии тока и завихренности соответственно, полученные при обтекании одного препятствия потоком сжимаемого газа с применением линейной интерполяции для точного удовлетворения граничных условий на препятствии ($Re = 100$, $M = 0,026$, $Fr = 0,007$, $m = 0,01$) для различных моментов времени. Видно, что в начальный момент времени образуются вихри противоположных знаков. Затем вихри, оторвавшись от тела и увеличиваясь в размерах, вытягиваются в направлении потока. Распределения завихренности и поля скоростей показывают образование вихревой дорожки за телом.

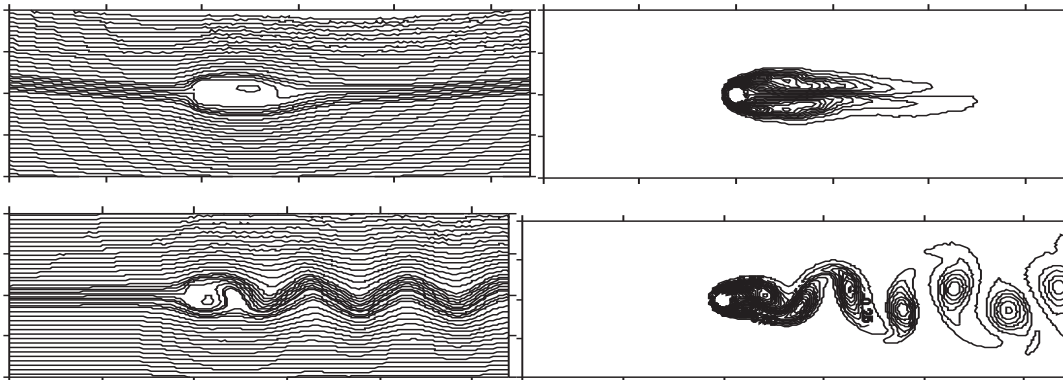


Рис. 4: Картина течения при обтекании одного цилиндра при $t=30, 45$ без интерполяции.

На рис.5 также приведены линии тока и завихренности без применения интерполяции для повышения точности удовлетворения граничных условий на препятствии. Как видно из рисунков, качественных изменений не наблюдается, однако, имеется количественное различие в коэффициентах подъемной силы. Важно отметить, что при достаточно малом значении параметра метода фиктивных областей оба подхода привели к идентичным и устойчивым результатам.

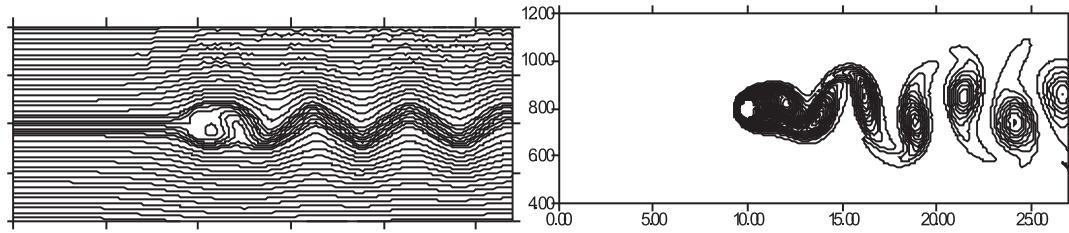


Рис. 5: Картина течения при обтекании одного цилиндра при $t=45$ с применением интерполяции

На рис.6 приведена зависимость коэффициента подъемной силы от времени при обтекании одного цилиндра сжимаемым газом. Виден периодический характер течения. Полученные результаты сравнивались с расчетами [5]. Численные расчеты показали, что максимальное значение коэффициента подъемной силы при обтекании одного препятствия равно 0.286, что соответствует расчетам [6].

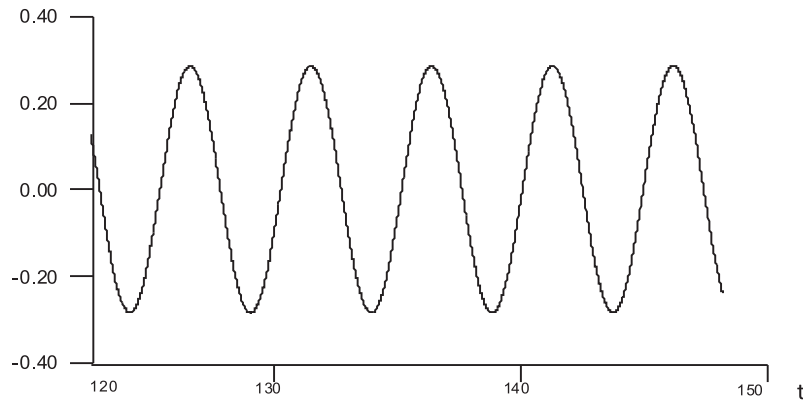


Рис. 6: Зависимость коэффициента подъемной силы от времени при обтекании одного препятствия

Картины обтекания двух цилиндров, расположенных на расстоянии $\ell_x = 2d$, приведены на рис.7 ($Re = 100$, $M = 0,026$, $Fr = 0,007$, $m = 0,01$) для различных моментов времени. Видно, что в начальный момент времени, аналогично обтеканию одиночного тела, за каждым телом образуются вихри противоположных знаков. Затем поток, оторвавшийся от переднего тела, присоединяется ко второму, в результате чего затрудняется сход вихрей с переднего тела, происходит замыкание области, состоящей из переднего тела, следа за ним и второго препятствия, и, как следует из рисунка, осуществляется обтекание одного широкого препятствия. И в этом случае вихри, формирующиеся за вторым препятствием, характеризуются значительными горизонтальными размерами.

На рис.8 приведена зависимость коэффициента подъемной силы от времени при обтекании двух препятствий, расположенных тандемом. Как видно из рисунка, максимальные значения коэффициентов за первым (0,331) и вторым (1,591) препятствиями отличаются существенно.

Заключение

На основе численных экспериментов проведено сравнение численных результатов задачи обтекания препятствий, расположенных тандемом, поперек потоку, полученных с применением интерполяции и без интерполяции для определения динамических характеристик вблизи

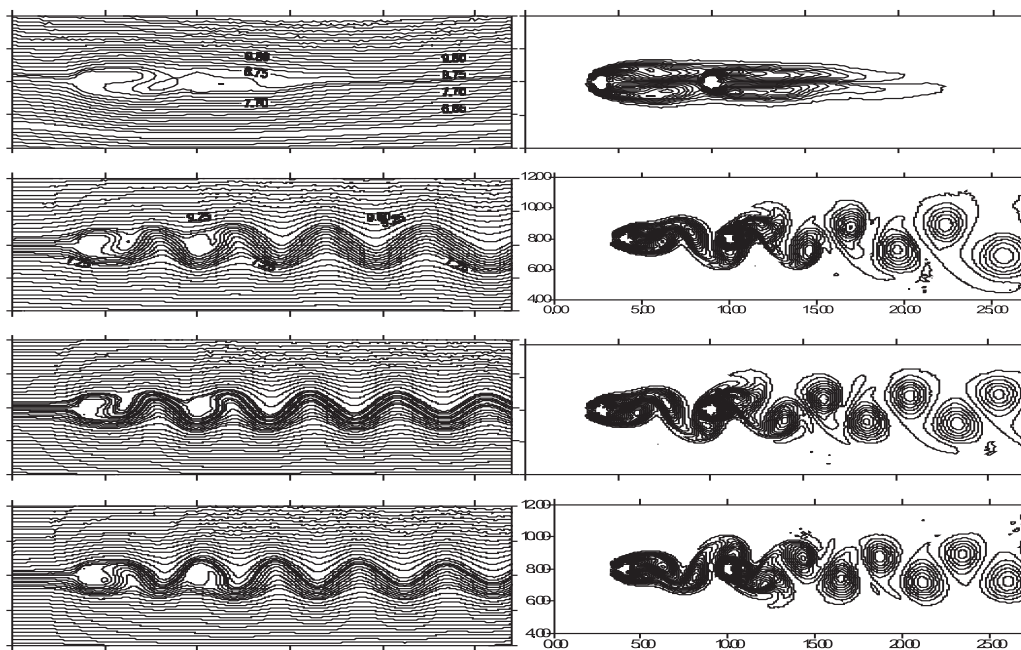


Рис. 7: Картина течения при обтекании двух цилиндров

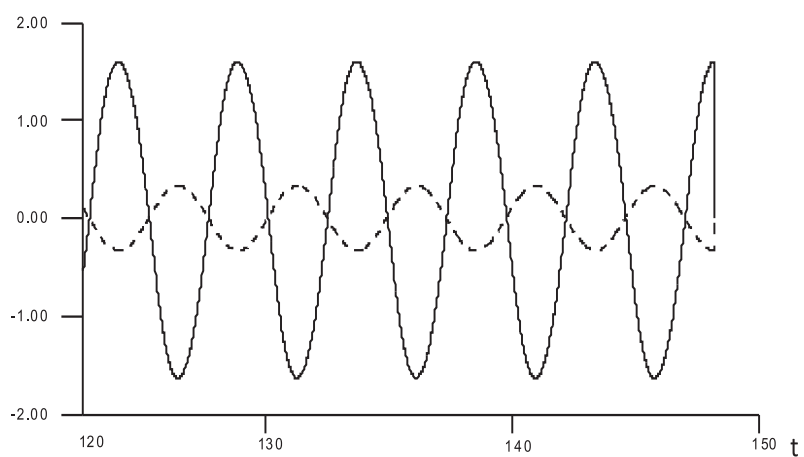


Рис. 8: Зависимость коэффициента подъемной силы от времени при обтекании двух препятствий

препятствия. На примере определения коэффициентов подъемной силы показано, что при выборе достаточно малого значения параметра метода фиктивных областей полученные численные решения при обоих подходах идентичны. Получено также удовлетворительное согласие с результатами других авторов.

Цитированная литература

- [1]. Zdravkovich M.M. *Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements*, Journal of Fluid Engineering, 1977, V.99, P. 618 – 633.
- [2]. Bearman P.W., Wadcock A.J. *The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream*, Journal of Fluid Mechanics, 1973, V.61, P. 499 – 511.
- [3]. Williamson C.H. *Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies*, Journal of Fluid Mechanics, 1985, V.159, P. 1 – 18.
- [4]. Mittal S, Kumar V. *Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangements*, International Journal for Numerical Methods in fluids, 1999, V.31, P. 1087 – 1120.
- [5]. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. *Внутренние течения газовых смесей*, М.: Наука, 1989, 368 с.
- [6]. Kim J., Kim D., Choi H. *An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries*, Journal of Computational Physics, 2001, V.171, P. 132 – 150.
- [7]. Вабищевич П.Н. *Метод фиктивных областей в задачах математической физики*, М.: МГУ, 1991, 156 с.
- [8]. Алиева Б.К., Найманова А.Ж. *Численное моделирование явления резонанса в дорожке тупа Кармана*, Вычислительные технологии, 2004, Т.9, С. 193 – 2004.
- [9]. Braza M., Chassanig P, Minh H. *Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields near wake of circular cylinder*, Journal of Fluid Mechanics, 1986, V.165, P. 1087 – 1120.
- [10]. Liu C., Zheng X., Sung C.H. *Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows*, Journal of Computational Physics, 1998, V.139, P. 132 – 150.

Статья поступила в редакцию 07.07.2011 г.

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ БОЛЬЦМАНА

А. САКАБЕКОВ, Д. АУЖАНИ

Казахстанско–Британский технический университет
050000, Алматы, ул. Толе би, 59, e-mail: a.sakabekov@kbtu.kz

В работе доказано существование глобального по времени решения начально–краевой задачи для одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана во втором приближении в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых по пространственным переменным.

Моментные уравнения Больцмана являются промежуточным между Больцмановским (кинетическая теория) и гидродинамическим уровнями описания состояния разреженного газа и образует ранее неизученный класс нелинейных уравнений в частных производных. В большинстве встречающихся задач газовой динамики нет необходимости использовать детальное микроскопическое описание газа с помощью функции распределения. Поэтому естественно искать менее детальное описание, используя макроскопические гидродинамические переменные (плотность, гидродинамическую скорость, температуру).

Если умножить обе части уравнения Больцмана на базисные функции, образующие полную систему, и проинтегрировать по всем скоростям молекул, то получится бесконечная система уравнений, которой должна удовлетворять функция распределения. Эта бесконечная система уравнений эквивалентна уравнению Больцмана в силу полноты базисных функций. Общая идея так называемых моментных методов состоит в том, чтобы удовлетворить только конечному числу моментных уравнений. Моментные уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. Тип системы уравнений, а следовательно, характер соответствующей этой системе граничной задачи, очевидно, определяются дифференциальными частями моментных уравнений, получающихся из дифференциального оператора Больцмана. Моментная система уравнений, записанная для нестационарного одномерного нелинейного уравнения Больцмана, является квазилинейной гиперболической системой уравнений в частных производных.

В [1] приведена система моментных уравнений Больцмана и доказана теорема о существовании и единственности локального по времени решения начально–краевой задачи для системы

Keywords: *Moment system of Boltzmann equations, global solution, onedimensional nonlinear system*

2010 Mathematics Subject Classification: 35F30

© А. Сакабеков, Д. Аужани, 2011.

моментных уравнений Больцмана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным. В [2] доказано существование глобального по времени решения начальной задачи для одномерной системы моментных уравнений Больцмана во втором приближении в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых по пространственным переменным.

Рассмотрим одномерную нелинейную систему моментных уравнений Больцмана во втором приближении [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_{00} - \sqrt{2/3} \varphi_{10} + \frac{2}{\sqrt{3}} \varphi_{02} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{02}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varphi_{01} \right) &= I_{02}, \\ \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\sqrt{2/3} \varphi_{01} \right) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in [-a, a], \end{aligned} \tag{1}$$

где $I_{02} = \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{2} \left(\varphi_{00} \varphi_{02} - \frac{\varphi_{01}^2}{\sqrt{3}} \right)$ — квадратичная форма, $\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{10}$ — моменты функции распределения частиц, $\sigma_0, \sigma_2, \alpha$ — постоянные.

Для уравнения Больцмана выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии, а также H-теорема Больцмана. Система уравнений (1) содержит три однородных уравнения, которые соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Моментные уравнения (1) обладают некоторыми внутренними свойствами, аналогичными закону сохранения массы и H-теореме Больцмана.

Систему уравнений (1) приведем к каноническому виду. Для этого будем находить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где A — матрица, составленная из коэффициентов при производных по x : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{3}, \lambda_4 = -\sqrt{3}$ — собственные значения матрицы A . Соответствующие ортонормированные собственные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} &(0, \sqrt{2/5}, 0, \sqrt{3/5}), \quad (0, -\sqrt{2/15}, \sqrt{5/3}, (2/3)\sqrt{2/5}), \\ &(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3}, 1/3), \quad (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3}, 1/3). \end{aligned}$$

С помощью ортогонального преобразования систему уравнений (1) приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \psi_3 \\ -\sqrt{3} \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10}(D\theta\psi, \theta\psi) \\ -2(D\theta\psi, \theta\psi) \\ -2(D\theta\psi, \theta\psi) \end{pmatrix}, \quad t > 0, \quad x \in [-a, a], \tag{2}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$,

$$(D\theta\psi, \theta\psi) = \left[\sqrt{\frac{2}{5}} \psi_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \right) \right] \left[\frac{\sqrt{5}}{3} \psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} (\psi_3 + \psi_4) \right] - \frac{(\psi_4 - \psi_3)^2}{2\sqrt{3}},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2/5} & -2/\sqrt{15} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{3/5} & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

θ — матрица, составленная из собственных векторов матрицы A .

Для системы уравнения (2) зададим начальные условия:

$$\psi_i(0, x) = \psi_i^0(x), \quad x \in [-a, a], \quad i = \overline{1, 4}, \quad (3)$$

и граничные условия:

$$\psi_i(t, -a) = \psi_i(t, a), \quad i = 3, 4, \quad t > 0, \quad (4)$$

где $\psi_i^0(x)$ — заданные неотрицательные функции, $\psi_3(t, a)$ и $\psi_4(t, -a)$ — непрерывные, неотрицательные функции при $t \in [0, T]$.

Для задачи (2)–(4) справедлива теорема.

Теорема. Пусть начальные функции удовлетворяют условиям

$$\psi_i^0 \in L^1[-a, a], \quad \psi_i^0 \geq 0 \quad \forall x \in [-a, a], \quad \int_{-a}^a \psi_i^0 |\ln \psi_i^0| dx < \infty \quad (5)$$

и выполняется граничное условие (4). Тогда задача (2) – (4) имеет неотрицательное решение, принадлежащее пространству $C([0, T]; L^1[-a, a])$; более точно: $C([0, T]; L^1 \ln L^1)$, причем

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{-a}^a \left(\sum_{i=1}^4 \psi_i(1 + |\ln \psi_i|) \right) dx < \infty, \quad 0 < T < \infty. \quad (6)$$

Доказательство. Доказательство проведем по методике работ [3–5]. Нетрудно доказать, что решение задачи (2)–(4) неотрицательно, если начальные функции $\psi_i^0 \geq 0 \quad \forall x \in [-a, a]$. Для системы уравнений (2) выполняется аналог закона сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 + 4\psi_2 + \sqrt{10}\psi_3 + \sqrt{10}\psi_4) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{30}(\psi_3 - \psi_4) = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \int_{-a}^a (\psi_1 + 4\psi_2 + \sqrt{10}\psi_3 + \sqrt{10}\psi_4) dx + \frac{1}{\alpha} \sqrt{30}(\psi_3 - \psi_4) \Big|_{-a}^a = 0.$$

Учитывая начальное условие (3) и граничное условие (4), получим

$$\int_{-a}^a [\psi_1 + 4\psi_2 + \sqrt{10}(\psi_3 + \psi_4)] dx = \int_{-a}^a [\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}(\psi_3^0 + \psi_4^0)] dx \quad \forall t > 0. \quad (7)$$

Из равенства (7) следует, что решение задачи (2)–(4) принадлежит пространству $C([0, \infty]; L^1[-a, a])$ при условии, что $\psi_i^0 \in L^1[-a, a]$. Кроме того, для системы уравнений (2) выполняется аналог Н-теоремы Больцмана:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 \ln \psi_1 + 4\psi_2 \ln \psi_2 + \sqrt{10}\psi_3 \ln \psi_3 + \sqrt{10}\psi_4 \ln \psi_4) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{30}(\psi_3 \ln \psi_3 - \psi_4 \ln \psi_4) \leq 0. \quad (8)$$

Граничное условие (4) эквивалентно следующему условию:

$$\psi_3 \ln \psi_3 \Big|_{x=a} = \psi_3 \ln \psi_3 \Big|_{x=-a} \quad \text{и} \quad \psi_4 \ln \psi_4 \Big|_{x=a} = \psi_4 \ln \psi_4 \Big|_{x=-a}.$$

Тогда из неравенства (8) получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a [\psi_1 \ln \psi_1 + 4\psi_2 \ln \psi_2 + \sqrt{10}(\psi_3 \ln \psi_3 + \psi_4 \ln \psi_4)] dx \leq \\ & \leq \int_{-a}^a [\psi_1^0 \ln \psi_1^0 + 4\psi_2^0 \ln \psi_2^0 + \sqrt{10}(\psi_3^0 \ln \psi_3^0 + \psi_4^0 \ln \psi_4^0)] dx \quad \forall t. \end{aligned} \tag{9}$$

Умножим первое уравнение системы (2) на x^2 , второе — на $4x^2$, третье — на $\sqrt{10}(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t)^2$, четвертое — на $\sqrt{10}(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t)^2$, сложим и проинтегрируем по $[-a, a] \times (0, t)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (x^2 \psi_1 + 4x^2 \psi_2) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \tau \right)^2 \psi_3 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \tau \right)^2 \psi_4 \right] dx d\tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \int_{-a}^a \int_0^t [4\sqrt{10}x^2 - \\ & - 2\sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \tau \right)^2 - 2\sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \tau \right)^2] (D\theta\psi, \theta\psi) dx d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[x^2 \psi_1 + 4x^2 \psi_2 + \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_3 + \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_4 \right] dx = \\ & = \int_{-a}^a x^2 (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx + \frac{12a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau - \\ & - \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \frac{12\sqrt{10}}{\alpha^2} \int_{-a}^a \int_0^t \tau^2 (D\theta\psi, \theta\psi) dx d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая второе уравнение системы (2), равенство (10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[x^2 \psi_1 + 4x^2 \psi_2 + \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_3 + \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_4 \right] dx = \\ & = \int_{-a}^a x^2 (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx + \\ & + \frac{12a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau - \frac{12(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} \int_{-a}^a \int_0^t \tau^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} dx d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

К последнему интегралу в правой части равенства (11) применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int_{-a}^a \int_0^t \tau^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} dx d\tau = t^2 \int_{-a}^a \psi_2 dx - 2 \int_{-a}^a \int_0^t \tau \psi_2 dx d\tau. \quad (12)$$

Учитывая (12), равенство (11) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[x^2 \psi_1 + 4x^2 \psi_2 + \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_3 + \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_4 \right] dx + \frac{\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} \int_{-a}^a t^2 \psi_2 dx = \\ & = \int_{-a}^a x^2 (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx + \\ & + \frac{12a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau + \frac{2\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} \int_{-a}^a \int_0^t \tau \psi_3 dx d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда, применяя (6), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left[x^2 \psi_1 + 4x^2 \psi_2 + \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_3 + \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha} t \right)^2 \psi_4 \right] dx \leq \\ & \leq a^2 \int_{-a}^a [\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0] dx + \frac{12a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau + \\ & + \frac{2\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} T \int_{-a}^a (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что для любой неотрицательной функции F имеет место равенство [1, 3]:

$$\int_{-a}^a F |\ln F| dx = \int_{-a}^a F \ln F dx - 2 \int_{F \leq 1} F \ln F dx \quad (15)$$

и

$$-2 \int_{F \leq 1} F \ln F dx \leq 2 \int_{-a}^a x^2 F dx + C, \quad (16)$$

где C — положительная постоянная, независящая от F . Применяя неравенство (16) к функ-

циям $F = \psi_1(t, x)$, $F = \psi_2(t, x)$, $F = \psi_3(t, x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t)$, $F = \psi_4(t, x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t)$, получим

$$\begin{aligned}
 -2 \int \psi_1 \ln \psi_1 \Big|_{\psi_1 \leq 1} dx &\leq 2 \int_{-a}^a x^2 \psi_1 dx + C_1, \\
 -2 \int \psi_2 \ln \psi_2 \Big|_{\psi_2 \leq 1} dx &\leq \frac{1}{2} \int_{-a}^a 4x^2 \psi_2 dx + C_2, \\
 -2 \int \psi_3 \ln \psi_3 \Big|_{\psi_3 \leq 1} dx &\leq \frac{2}{\sqrt{10}} \int_{-a}^a \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right)^2 \psi_3 dx + C_3, \\
 -2 \int \psi_4 \ln \psi_4 \Big|_{\psi_4 \leq 1} dx &\leq \frac{2}{\sqrt{10}} \int_{-a}^a \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right)^2 \psi_4 dx + C_4.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Используя (15), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-a}^a (\psi_1 |\ln \psi_1| + 4\psi_2 |\ln \psi_2| + \sqrt{10}\psi_3 |\ln \psi_3| + \sqrt{10}\psi_4 |\ln \psi_4|) dx = \\
 &= \int_{-a}^a (\psi_1 \ln \psi_1 + 4\psi_2 \ln \psi_2 + \sqrt{10}\psi_3 \ln \psi_3 + \sqrt{10}\psi_4 \ln \psi_4) dx - \\
 &-2 \left(\int \psi_1 \ln \psi_1 \Big|_{\psi_1 \leq 1} dx + \int \psi_2 \ln \psi_2 \Big|_{\psi_2 \leq 1} dx + \int \psi_3 \ln \psi_3 \Big|_{\psi_3 \leq 1} dx + \int \psi_4 \ln \psi_4 \Big|_{\psi_4 \leq 1} dx \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда на основании системы неравенств (17) получим

$$\begin{aligned}
 &\int_{-a}^a (\psi_1 |\ln \psi_1| + 4\psi_2 |\ln \psi_2| + \sqrt{10}\psi_3 |\ln \psi_3| + \sqrt{10}\psi_4 |\ln \psi_4|) dx \leq \\
 &\leq \int_{-a}^a (\psi_1 \ln \psi_1 + 4\psi_2 \ln \psi_2 + \sqrt{10}\psi_3 \ln \psi_3 + \sqrt{10}\psi_4 \ln \psi_4) dx + \\
 &+ 2 \int_{-a}^a \left[x^2 \psi_1 + 4x^2 \psi_2 + \sqrt{10} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right)^2 \psi_3 + \sqrt{10} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right)^2 \psi_4 \right] dx.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда из (9), (14), (18) имеем оценку

$$\begin{aligned}
 &\int_{-a}^a (\psi_1 |\ln \psi_1| + 4\psi_2 |\ln \psi_2| + \sqrt{10}\psi_3 |\ln \psi_3| + \sqrt{10}\psi_4 |\ln \psi_4|) dx \leq \\
 &\leq \int_{-a}^a (\psi_1^0 \ln \psi_1^0 + 4\psi_2^0 \ln \psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 \ln \psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0 \ln \psi_4^0) dx + \\
 &\quad + 2a^2 \int_{-a}^a (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx +
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{24a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau + \\
& + \frac{4\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} T \int_{-a}^a (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx.
\end{aligned}$$

В правой части (19) переходим к абсолютной величине логарифмов:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a}^a (\psi_1 |\ln \psi_1| + 4\psi_2 |\ln \psi_2| + \sqrt{10}\psi_3 |\ln \psi_3| + \sqrt{10}\psi_4 |\ln \psi_4|) dx \leq \\
& \leq \int_{-a}^a (\psi_1^0 |\ln \psi_1^0| + 4\psi_2^0 |\ln \psi_2^0| + \sqrt{10}\psi_3^0 |\ln \psi_3^0| + \sqrt{10}\psi_4^0 |\ln \psi_4^0|) dx + \\
& + 2 \int_{-a}^a (\psi_1^0 \ln \psi_1^0 \Big|_{\psi_1^0 \leq 1} + 4\psi_2^0 \ln \psi_2^0 \Big|_{\psi_2^0 \leq 1} + \sqrt{10}\psi_3^0 \ln \psi_3^0 \Big|_{\psi_3^0 \leq 1} + \sqrt{10}\psi_4^0 \ln \psi_4^0 \Big|_{\psi_4^0 \leq 1}) dx + \quad (20) \\
& + 2a^2 \int_{-a}^a (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx + \frac{24a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau + \\
& + \frac{2\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} T \int_{-a}^a (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx.
\end{aligned}$$

Выбросив второе отрицательное слагаемое в правой части последнего соотношения, усилим неравенство (20):

$$\begin{aligned}
& \int_{-a}^a (\psi_1 |\ln \psi_1| + 4\psi_2 |\ln \psi_2| + \sqrt{10}\psi_3 |\ln \psi_3| + \sqrt{10}\psi_4 |\ln \psi_4|) dx \leq \\
& \leq \int_{-a}^a (\psi_1^0 |\ln \psi_1^0| + 4\psi_2^0 |\ln \psi_2^0| + \sqrt{10}\psi_3^0 |\ln \psi_3^0| + \sqrt{10}\psi_4^0 |\ln \psi_4^0|) dx + \\
& + 2a^2 \int_{-a}^a (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx + \quad (21) \\
& + \frac{4\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2} T \int_0^t (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0) dx + \\
& + \frac{24a\sqrt{10}}{\alpha} \int_0^t (\psi_3|_{x=a} + \psi_4|_{x=-a}) \tau d\tau.
\end{aligned}$$

Итак, если начальные функции ψ_i^0 удовлетворяют ограничениям (5) и выполняется граничное условие (4), то в силу (6) и (21) решение задачи (2)–(4) принадлежит пространству $C([0, T]; L^1[-a, a])$; более точно: $\psi \in C([0, T]; L^1 \ln L^1)$.

Каждое уравнение системы (2) интегрируем по характеристическому направлению:

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) &= \psi_1^0(x), \\ \psi_2(t, x) &= \psi_2^0(x) + \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \int_0^t \sqrt{10}(D\theta\psi, \theta\psi)(\tau, x) d\tau, \\ \psi_3(t, x) &= \beta(t_0 - t)\psi_3^0\left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right) - \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \int_0^t 2(D\theta\psi, \theta\psi)\left(\tau, x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}(t - \tau)\right) d\tau, \\ \psi_4(t, x) &= \beta(t_0 - t)\psi_4^0\left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right) - \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \int_0^t 2(D\theta\psi, \theta\psi)\left(\tau, x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}(t - \tau)\right) d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\beta(t)$ — характеристическая функция области $(0, +\infty)$,

$$t_0 = t_0(x) = \sup\left\{t > 0, x \pm \frac{\sqrt{3}}{\alpha}s \in [-a, a], 0 < s < t\right\}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i(t, x) &= \psi_i(t, x) - \psi_i^0(x), \quad i = 1, 2, \\ \tilde{\psi}_3(t, x) &= \psi_3(t, x) - \beta(t_0 - t)\psi_3^0\left(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right), \\ \tilde{\psi}_4(t, x) &= \psi_4(t, x) - \beta(t_0 - t)\psi_4^0\left(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}t\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда систему уравнений (22) можно записать в виде

$$\tilde{\psi}_i(t, x) = Q_i^{-1}(\tilde{\psi} + \psi^0, \tilde{\psi} + \psi^0), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

или в векторной форме

$$\tilde{\psi}(t, x) = Q^{-1}(\tilde{\psi} + \psi^0, \tilde{\psi} + \psi^0), \tag{24}$$

где $\tilde{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)'$, $Q^{-1} = (Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1})'$, $Q_1^{-1} = 0$, $Q_i^{-1}(\tilde{\psi} + \psi^0, \tilde{\psi} + \psi^0)$ — интегральный оператор, стоящий в правой части системы (22), причем вместо $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ поставлены их значения из (23). Вместо уравнения (24) рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\psi_\varepsilon = \frac{Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0, \psi_\varepsilon + \psi^0)}{1 + \varepsilon \|Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0, T]; L^1[-a, a])}} \equiv L\psi_\varepsilon, \tag{25}$$

где $0 < \varepsilon < 1$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Интегральное уравнение (25) имеет в шаре*

$$\bar{S}(0, N) = \left\{ \psi_\varepsilon \in C([0, T]; L^1[-a, a]) : \|\psi_\varepsilon\|_{C([0, T]; L^1[-a, a])} \leq N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\}$$

хотя бы одно решение.

Лемма доказывается по методике, приведенной в [1–5].

Уравнение (25) эквивалентно задаче:

$$\frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} \sqrt{10} (D\theta\psi_\varepsilon, \theta\psi_\varepsilon)}{1 + \varepsilon \|Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T]; L^1[-a,a])}},$$

$$\frac{\partial \psi_{3\varepsilon}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{3} \psi_{3\varepsilon} = \frac{\frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} (-2) (D\theta\psi_\varepsilon, \theta\psi_\varepsilon)}{1 + \varepsilon \|Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T]; L^1[-a,a])}}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi_{4\varepsilon}}{\partial t} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{3} \psi_{4\varepsilon} = \frac{\frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}} (-2) (D\theta\psi_\varepsilon, \theta\psi_\varepsilon)}{1 + \varepsilon \|Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T]; L^1[-a,a])}},$$

$$(t, x) \in (0, T] \times [-a, a],$$

$$\psi_{i\varepsilon}(0, x) = \psi_i^0(x), \quad x \in [-a, a], \quad i = \overline{1, 4}, \quad (27)$$

$$\psi_{i\varepsilon}(t, -a) = \psi_{i\varepsilon}(t, a), \quad i = \overline{3, 4}, \quad t > 0. \quad (28)$$

В системе (26)–(28) переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда и получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Цитированная литература

- [1]. Сакабеков А. *Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана*, Алматы: Изд-во "Гылым", 2002, 276 с.
- [2]. Сакабеков А., Аужани Д. *Задача Коши для одномерной системы моментных уравнений Больцмана во 2-ом приближении*, Матем. журнал, 2008, Т.8, № 4(30), С. 27 – 33.
- [3]. Diperna R.J., Lions P.L. *Solution globales de l'equation de Boltzmann*, C.R/ Acad. Sci.Paris, 1988, Т. 306, Ser. I, P. 343 – 346.
- [4]. Сакабеков А. *О существовании глобального решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана*, ДАН СССР, 1991, Т. 321, № 1, С. 75 – 78 (Сибир. Матем. Журнал, 1993, Т. 34, № 1, С. 145 – 156).
- [5]. Султангазин У.М., Сакабеков А. *Начально-краевые задачи для одномерной модели Бродвелла и дискретной модели уравнения Больцмана*, Доклады НАН РК, 2000, № 3, С. 9 – 16.

Статья поступила в редакцию 25.11.2010 г.

УДК 517.51

О НЕПРЕРЫВНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

Институт Математики МОН РК
050010, Алматы, Пушкина, 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

Найдены оценки порядков убывания коэффициентов Фурье по тригонометрической системе функций из пространств С.Л. Соболева, С.М. Никольского, О.В. Бесова ($1 < p < 2$) при суммировании методом Пуассона.

В заметке приведено доказательство результатов, анонсированных в [1–4].

Введем необходимые определения. Последовательность действительных чисел S_ν называется суммируемой в смысле Пуассона $((A, l), l > 0)$ к числу S , если

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta \rho^{\nu l} S_\nu = S, \quad 0 < \rho < 1, \quad \Delta b_n = b_n - b_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Будем говорить, что 2π -периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

принадлежит пространству С.М. Никольского $H_p^{(r)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $r = \bar{r} + \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $\bar{r} \geq 0$ — целое число, если $f(x)$ имеет \bar{r} -ую производную такую, что $f^{(\bar{r})}(x) \in L_p$ и

$$\|f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f^{(\bar{r})}(x) + f^{(\bar{r})}(x-h)\|_p \leq |h|^\alpha,$$

причем в этом неравенстве для $0 < \alpha < 1$ вторую разность можно заменить первой. А.Ф. Тиман и М.Ф. Тиман в 1950 г. показали (см. [5]), что, если 2π -периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Keywords: *Fourier series, Cesaro numbers, linear summation method, trigonometric system, Poisson method, asymptotic behavior*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Л. П. Фалалеев, 2011.

принадлежит классу $H_p^{(r)}$, то ее коэффициенты необходимо удовлетворяют условию ($1 < p < 2$):

$$\left(\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k|^p \cdot |k|^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

В [1, 2] и др. определены порядки стремления к 0 коэффициентов Фурье функций из классов $H_p^{(r)}$ в случае, если сходимость последовательности понимается в смысле Λ -методов (Чезаро, Рисс, Зигмунд).

В настоящей заметке установлены порядки убывания к 0 модулей коэффициентов Фурье в случае, когда сходимость последовательности понимается в смысле обобщенного метода суммирования (A, l) , $l > 0$. При $l \geq 1$ это более сильный метод, чем рассмотренные нами Λ -методы. Пусть $l = 1$, c_n — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_p$.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in H_p^{(r)}$ ($1 < p < 2$, $r > 0$). При $\rho \rightarrow 1-$ последовательность $\{|c_n| \cdot n^\beta\}_{n=0}^{\infty}$ суммируется к 0 методом $(A, 1)$ для $\beta \in (r - \frac{1}{p}, r + \frac{1}{q})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Так как

$$\sum_0^{\infty} = \sum_0^N + \sum_{N+1}^{\infty},$$

то полагая $N = [\frac{1}{1-\rho}]$, $[y]$ — целая часть y (см. [6]), имеем

$$(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot k^\beta \cdot \rho^k = (1-\rho) \sum_{k=0}^N |c_k| \cdot k^\beta \cdot \rho^k + O((1-\rho)^{r+1}), \quad \rho \rightarrow 1-$$

(в силу (1)). Применив неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} (1-\rho) \sum_{k=0}^N |c_k| \cdot k^\beta \cdot \rho^k &\leq c(1-\rho) \left[\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \cdot k^{\frac{p-2}{p} \cdot p} \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\rho^q)^k \cdot k^{(\frac{\beta-p-r \cdot p+2-p}{p} \cdot q)} \right]^{\frac{1}{q}} + O((1-\rho)^{r+1}) = \\ &= c(1-\rho) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\rho^q)^k \cdot k^{\frac{\beta-p-r \cdot p+2-p}{p} \cdot \frac{p}{p-1}} \right\}^{\frac{p-1}{p}} + O((1-\rho)^{r+1}) = \\ &= c(1-\rho) (1-\rho)^{\left[\frac{\beta-p-r \cdot p+2-p}{p-1} \right] \frac{1-p}{p}} + O((1-\rho)^{r+1}) = \\ &= c(1-\rho)^{1-\beta+r-\frac{1}{p}} + O((1-\rho)^{r+1}) = c(1-\rho)^{r+\frac{1}{q}-\beta} + O((1-\rho)^{r+1}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 1, \end{aligned}$$

когда $r + \frac{1}{q} - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < r + \frac{1}{q}$.

При подсчетах мы воспользовались разложением в степенной ряд функции $1 - \rho^q$ в окрестности точки $\rho = 1$, теоремой Чезаро о равносходимости степенных рядов

$$\sum_{\nu} A_{\nu}^{\alpha} \cdot x^{\nu} \quad \text{и} \quad \sum_{\nu} \nu^{\alpha} \cdot x^{\nu}, \quad \alpha > -1,$$

где A_{ν}^{α} — числа Чезаро, и известным разложением

$$\frac{1}{(1-\rho)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha} \cdot \rho^{\nu}, \quad |\rho| < 1, \quad \alpha > -1.$$

Из неравенства $\alpha > -1$ следует другое ограничение на параметры β, p, r :

$$\frac{\beta \cdot p - r \cdot p + 2 - p}{p - 1} > -1 \Leftrightarrow \beta > r - \frac{1}{p}.$$

Теорема доказана полностью.

Для более слабых методов (Чезаро, Рисс, Зигмунд) с показателем α в [1, 2] было использовано дополнительное условие $\alpha > \frac{1}{p}$, что связано с примененным методом доказательства.

Напомним, что 2π -периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

(c_k — коэффициенты Фурье в комплексной форме) принадлежит классу $W_{\frac{1}{p}}^{(0)}$, если функция

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k [\ln(|k| + 1)]^{\frac{1}{p}} e^{ikx} \in L_p[0, 2\pi].$$

Известно [5], что если $f(x) \in W_{\frac{1}{p}}^{(0)}$, то ее коэффициенты необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p (|k| + 1)^{p-2} \ln(|k| + 1) < \infty, \quad 1 < p < 2. \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in W_{\frac{1}{p}}^{(0)}$, $1 < p < 2$. Тогда при $\rho \rightarrow 1-$ последовательность $\{ |c_n| \cdot n^\beta \}_{n=0}^{\infty}$ суммируется к 0 методом $(A, 1)$ для $\beta \in (0, \frac{1}{q})$.

Доказательство. Будем использовать необходимое условие (2). Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot k^\beta \cdot \rho^k &= (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot k^{\frac{p-2}{p}} \cdot \ln^{\frac{1}{p}}(k+1) \rho^k \cdot k^\beta \cdot k^{\frac{2-p}{p}} \cdot \ln^{-\frac{1}{p}}(k+1) \leq \\ &\leq c(1 - \rho) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\rho^q)^k \cdot k^{(\beta + \frac{2-p}{p})q} \right\}^{\frac{1}{q}} = c(1 - \rho) \left\{ \frac{1}{(1 - \rho)^{\frac{\beta p + 1}{p-1}}} \right\}^{\frac{p-1}{p}} = c(1 - \rho)^{1 - \frac{1}{p} - \beta} = c(1 - \rho)^{\frac{1}{q} - \beta} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\beta < \frac{1}{q}$, $\rho \rightarrow 1-$.

В промежуточных выкладках использована теорема Чезаро о равносходимости степенных рядов

$$\sum_{\nu} A_{\nu}^{\alpha} \cdot x^{\nu} \text{ и } \sum_{\nu} \nu^{\alpha} \cdot x^{\nu}, \quad \alpha > -1,$$

где A_{ν}^{α} — числа Чезаро, и известное разложение

$$\frac{1}{(1 - \rho)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha} \cdot \rho^{\nu}, \quad |\rho| < 1, \quad \alpha > -1.$$

Для более слабых Λ -методов с показателем α (Рисс, Чезаро, Зигмунд) в аналогичной теореме использовано дополнительное условие $\alpha > \frac{1}{2}$ (см. [1, 2]). Пусть $f(x) \in B_p^{(0)}$, $1 < p \leq 2$. Необходимым условием принадлежности функции этому классу является следующее:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p (|k| + 1)^{p-2} \ln(|k| + 1) < \infty. \quad (3)$$

Теорема 3. Пусть $f(x) \in B_p^{(0)}$, $1 < p \leq 2$. Тогда при $\rho \rightarrow 1-$ последовательность $\{n^\beta |c_n|\}$ суммируется к 0 методом $(A, 1)$ для $\beta \in (0, \frac{1}{q})$.

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера к условию (3), получим

$$\begin{aligned} (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot k^\beta \cdot \rho^k &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot k^{\frac{p-2}{p}} \cdot k^{\frac{2-p}{p}} \cdot \ln^{\frac{1}{p}}(k+1) \ln^{-\frac{1}{p}}(k+1) \cdot k^\beta \cdot \rho^k \leq \\ &\leq c(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k^{\frac{2-p}{p} \cdot q} \ln^{-\frac{q}{p}} \cdot k^{\beta \cdot q} (\rho^q)^k \leq c(1-\rho) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} k^{(\frac{2-p}{p} + \beta)q} \cdot (\rho^q)^k \right\}^{\frac{1}{q}} = \\ &= c(1-\rho) \left\{ \frac{1}{(1-\rho)^{\frac{2-p+\beta \cdot p+p-1}{p-1}}} \right\}^{\frac{p-1}{p}} = c(1-\rho)^{1-\frac{1}{p}-\beta} = c(1-\rho)^{\frac{1}{q}-\beta} \rightarrow 0 \text{ для } \beta \in (0, \frac{1}{q}), \rho \rightarrow 1-. \end{aligned}$$

Для более слабых Λ -методов в аналогичной теореме понадобилось требование $\alpha > \frac{1}{p}$ (см. [1, 2]). Заметим, что, несмотря на совпадение результатов в теоремах 2 и 3, пространства $B_p^{(0)}$ и $W_{\frac{1}{p}}^{(0)}$ совпадают лишь при $p = 2$, для других значений $p \in (1, \infty)$ — нет.

Цитированная литература

- [1]. Фалалеев Л.П. *О поведении коэффициентов Фурье функций из различных пространств*, Тез. докл. межд. конф. "Функциональные пространства. Теория приближений. Нелинейный анализ.", посв. 100-летию С.М. Никольского, Москва, 2005, С. 233.
- [2]. Фалалеев Л.П. *О порядке убывания коэффициентов Фурье*, Тез. докл. межд. конф. "Современные проблемы математики, механики и информатики", посв. 75-летию ТулГУ и 85 - летию со дня рождения профессора С.Б. Стечкина, Тула, 2005, С. 155.
- [3]. Фалалеев Л.П. *О непрерывных методах суммирования коэффициентов Фурье*, Укр. матем. конгресс, Киев, 2009, www.icmath.kiev.ua/congress2009/Abstracts/FALALEEV.pdf.
- [4]. Фалалеев Л.П. *О непрерывных методах суммирования коэффициентов Фурье*, Тез. докл. межд. конф., посв. 100-летию С.Л. Соболева, Новосибирск, 2008, С. 368.
- [5]. Потапов М.К. *О коэффициентах Фурье*, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Баку, 1965, С. 475 – 483.
- [6]. Ульянов П.Л. *О приближении функций*, Сиб. матем. журнал, 1964, Т.5, № 2, С. 418 – 437.

Статья поступила в редакцию 17.06.2010 г.

ЗАСЕДАНИЕ СЕМИНАРА ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

В период с августа 2010 г. в Институте математики МОН РК проводился научный семинар лабораторий уравнений математической физики и функционального анализа и его приложений.

Заседание 19 августа 2010 г.

Д.Т. Ажымбаев "Построение стохастических дифференциальных уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения" (Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, г.Актобе).

Доклад посвящен построению множества стохастических дифференциальных уравнений лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры по заданному интегральному многообразию. Ранее в работах А.С. Галиуллина, В.М. Туладхара и др. задачи построения дифференциальных уравнений в виде уравнений Лагранжа, уравнений Гамильтона и уравнений Биркгофа по заданным свойствам движения рассматривались в классе обыкновенных дифференциальных уравнений без дополнительного предположения о наличии случайных возмущений. В работе на основе метода Н.П. Еругина и метода квазиобращения при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов получены необходимые и достаточные условия прямого и косвенного аналитических представлений системы уравнений в форме Лагранжа, Ито, Гамильтона и Биркгофа по заданному интегральному многообразию при наличии случайных возмущений.

Заседание 26 августа 2010 г.

К.И. Усманов "Корректная разрешимость краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения с нагрузками" (Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Яссауи, г.Туркестан).

Доклад посвящен линейным двухточечным краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений, содержащих производные от решения в интегральных членах, интегро-дифференциальных уравнений с нагрузками и нагруженных дифференциальных уравнений. Предлагается вариант метода параметризации для линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения с нагрузками, когда оба конца интервала являются точками нагружения. Установлена взаимосвязь между корректной разрешимостью линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих производные от решения в интегральных членах, и аппроксимирующей ее краевой задачей для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагрузками. Для последней задачи в терминах краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости. Найдены коэффициентные признаки

корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для одного класса систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих производные от решения в интегральных членах. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Заседание 09 сентября 2010 г.

Сеилханова Р.Б. "Задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи для вырождающихся многопеременных гиперболических уравнений" (г.Актобе).

Заседание 14 сентября 2010 г.

А.А.Тенгаева "Об условиях базисности систем собственных функций обобщенных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений" (Южно-Казахстанский Государственный Университет им. М.О.Ауезова, г.Шымкент).

Изложены результаты исследований спектральных свойств обобщенных спектральных задач для оператора двукратного дифференцирования и одномерного оператора Шредингера. Проведено исследование двухточечных краевых задач в случае оператора двукратного дифференцирования и получены условия базисности в терминах коэффициентов краевых условий. В случае оператора Шредингера получены необходимые и достаточные условия с тригонометрическим рядом Фурье соответствующих спектральных разложений.

Заседание 21 сентября 2010 г.

С.М.Темешева "Метод параметризации исследования и решения нелинейных краевых задач" (Институт математики МОН РК, г.Алматы).

Докладывались основные результаты диссертации по исследованию нелинейных краевых задач и построению приближенных методов нахождения их решений. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются двухточечная краевая задача и задача нахождения ограниченного на всей оси решения. Для системы гиперболических уравнений со смешанной производной изучается нелокальная краевая задача с условиями на характеристиках. Краевые задачи исследуются и решаются методом параметризации. Построены алгоритмы нахождения решений рассматриваемых задач и в терминах исходных данных получены условия их сходимости. Для нелинейной двухточечной краевой задачи с непрерывно дифференцируемыми правой частью дифференциального уравнения и функцией краевых условий дана модификация известного определения изолированного решения. Определения изолированных решений введены также для задачи нахождения ограниченного на всей оси решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейной нелокальной краевой задачи для одного класса систем нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными. Установлены необходимые и достаточные условия существования изолированных, в смысле определения, решений исследуемых задач. Построены системы уравнений относительно введенных параметров, позволяющие определить начальные приближения изучаемых краевых задач. Доказана разрешимость этих систем уравнений при существовании изолированных решений и предложен метод нахождения их решений.

Заседание 22 сентября 2010 г.

Б.А.Шалдыкова "Граничные задачи для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности со строго монотонным законом движения нагрузки" (Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова, г. Караганда).

Заседание 07 октября 2010 г.

Ж.М.Кадирбаева "Нелокальные краевые задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений со смешанной производной" (Институт математики МОН РК, г.Алматы).

Докладывались основные результаты диссертационной работы по исследованию семейства периодических краевых задач для систем линейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений, полупериодической краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений и построению приближенных методов нахождения их решений. Получены коэффициентные критерии корректной разрешимости исследуемых задач.

Заседание 14 октября 2010 г.

А.Е.Иманчиев "Метод параметризации решения многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений" (Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, г.Актобе).

В докладе изложены результаты по развитию метода параметризации на многоточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, построению алгоритмов нахождения решений и нахождению коэффициентных условий разрешимости исследуемых задач. Устанавливаются условия однозначной разрешимости линейных многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и существования решений нелинейных многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных, а также предлагаются алгоритмы их нахождения.

Заседание 19 октября 2010 г.

А.С.Баегизова "Обобщенные решения задач для волновых уравнений и их свойства" (Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана).

Заседание 20 октября 2010 г.

Д.Б.Базарханов "Исследование пространств функций смешанной гладкости и вопросы приближения операторов" (Институт математики МОН РК, г.Алматы).

Заседание 28 октября 2010 г.

Р.У.Жахина "Построение решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, связанных с допустимыми дифференциальными уравнениями" (Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, г.Актобе).

В докладе изложены результаты по развитию метода Фробениуса-Латышевой для исследования различных специальных классов систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, связанных с допустимыми дифференциальными уравнениями. Показаны возможности приведения уравнения эллиптического типа к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Получены необходимые и достаточные условия существования нормальных, нормально-регулярных решений и конечных решений систем, связанных с одним допустимым дифференциальным уравнением. Показана связь выделенных классов систем с конкретными нормальными формами допустимых уравнений.

Заседание 01 ноября 2010 г.

А.Ш.Шалданбаев "Спектральные разложения решений корректных и некорректных начально-краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений" (Южно-Казахстанский Государственный Университет им. М.О.Ауезова, г.Шымкент).

Доклад посвящен введению и обоснованию нового метода решения корректных и некоррект-

ных задач для уравнений математической физики единым методом спектральных разложений, связанных с самосопряженными операторами. Для исследования корректных задач широко применяются методы спектрального анализа операторов. Однако, их область применимости (например, вариационных методов) ограничивается, в основном, полуограниченными операторами. Отмечено, что случай неполуограниченных операторов менее изучен и поэтому создание и разработка методов, пригодных для задач математической физики с неполуограниченными операторами, представляет существенную математическую проблему.

Заседание 04 ноября 2010 г.

А.А.Аниязров "Резольвенты конечномерных возмущений корректных задач для оператора Лапласа" (Государственный педагогический институт Семей, г.Семей).

В работе для уравнения Пуассона в круге построены конечномерные возмущения задачи Дирихле, которые при этом корректно разрешимы. С помощью теории расширений операторов изучается разрешимость краевых задач в ограниченной области.

Заседание 11 ноября 2010 г.

1. А.О.Султанбекова "О показателях Ляпунова линейных дифференциальных уравнений с параметром" (Университет Международного Бизнеса, г.Алматы).

Доклад посвящен одному из основных направлений качественной теории дифференциальных уравнений – теории устойчивости, одним из разделов которой является теория показателей Ляпунова. С точки зрения классификации по Бэру исследуются показатели Ляпунова и верхние генеральные показатели однопараметрических семейств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Доказывается строгая принадлежность показателей Ляпунова и верхних генеральных показателей второму бэровскому классу, как функций линейного параметра, а также устанавливаются коэффициентные признаки их непрерывности.

2. О.А.Ауелбеков "Задачи тепло и массообмена без условия дополненности" (Казахский государственный женский педагогический институт, г.Алматы).

Заседание 12 ноября 2010 г.

С.С.Жуматов "Качественные свойства программного многообразия неявных дифференциальных систем" (Институт математики МОН РК, г. Алматы).

Доклад посвящен разработке метода исследования качественных вопросов дифференциальных систем в окрестности заданного многообразия. Выделен класс неявных дифференциальных систем, исследование которых проводится модификацией метода функций Ляпунова, установлены условия, позволяющие решить обратные задачи построения систем обыкновенных дифференциальных уравнений по заданному многообразию. Решены задачи синтеза дифференциальных систем, обладающих заданным качеством в окрестности программного многообразия.

Заседание 18 ноября 2010 г.

1. Е.К.Курмангалиев "Многопериодические по части переменных решения систем уравнений в частных производных от счетного множества переменных" (Актюбинский государственный педагогический институт, г.Актобе).

2. В.В.Вербовский "Методы теории стабильности в исследовании упорядоченных структур" (Институт проблем информатики и управления МОН РК, г.Алматы).

Ученый секретарь семинара Ж.К.Джобулаева

РЕФЕРАТТАР — REVIEWS

УДК: 532.526

2010 MSC: 76F40

Абдалла А. Х., Қалтаев А. **Дыбыс жылдамдығынан жоғары ағындардағы ағыншаларды үрлеу есебіне арналған салмақты коэффициенттері бар айтарлықтай осцилляцияланбайтын сұлба** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). Б. 5 – 13.

Осы жұмыста дыбыс жылдамдығынан жоғары еркін ағынның қабырғадағы тесіктен көлденең бағытта үрленетін ағыншамен байланысы сандық түрде модельденеді. Жазық көп компонентті газды ағынға арналған Фавр бойынша орташаланған Навье-Стокс теңдеулерін шешу үшін тұтқырланбайтын ағынның мүшелерін аппроксимациялайтын WENO (Weighted Essentially Non oscillatory scheme) нобайы негізінде сандық алгоритм жасалынған. Турбулентті динамикалық тұтқырлық коэффициенті Болдуин-Ломакс моделі көмегімен анықталады. Алынған нәтижелер ENO схемасы бойынша алынған нәтижелермен және де эксперименталды жұмыстармен салыстырылған. Осы жұмыста WENO нобайына негізделіп дамытылған сандық алгоритм көпкомпонентті газ ағынының ағысын модельдеуге және қалыңдану секірістері мен құйындық аймақтардың пайда болуы сияқты күрделі физикалық құбылыстарды ескеруге қолдануға болатыны туралы қорытынды жасалған.

Әдебиеттер тізімі – 10.

Абдалла А. Х., Қалтаев А. **Существенно неосциллирующая схема с весовыми коэффициентами для сверхзвуковых течений с вдувом струй** // Математический журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). С. 5 – 13.

В данной работе численно моделируется взаимодействие сверхзвукового свободного потока с перпендикулярным вдувом струи через щель на стенке. Разработан численный алгоритм решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для плоского многокомпонентного течения газа, основанный на WENO (Weighted Essentially Non oscillatory scheme) схеме для аппроксимации членов невязкого потока. Коэффициент турбулентной динамической вязкости определяется с помощью модели Болдуина-Ломакса. Результаты вычислений сравниваются с результатами, полученными с использованием ENO схемы, и экспериментальными данными. Сделан вывод, что численный алгоритм, который развит в этой работе, основанной на WENO схеме, может использоваться, чтобы моделировать поток многокомпонентного течения газа и учитывать такие сложные физические явления, как возникновение скачков уплотнения и вихревых зон.

Цитированная литература – 10.

УДК: 62-50

2010 MSC: 34C05, 34C07, 34C25

Айсағалиев С. Ә., Айпанов Ш. А., Иманқұл Т. Ш. **Цилиндрлік фазалық кеңістігі бар динамикалық жүйелердегі шектік циклдар** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). Б. 14 – 24.

Көпөлшемді фазалық жүйелерде бірінші және екінші текті шектік циклдар мен айналмалы қозғалыстарды құру әдістері жасалған. Периодты шешімдердің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған, оларды тізбектерді минимумдау арқылы құру әдісі ұсынылған. Әдебиеттер тізімі – 15.

Aisagaliev S. A., Aipanov Sh. A., Imankul T. Sh. **Limit cycles in dynamical systems with cylindrical phase space**// Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 14 – 24.

Methods for constructing the limit cycles of the first and second types, and circular motions in multidimensional phase systems are developed. Necessary and sufficient conditions of the existence of periodic solutions are received and the method for constructing the solutions by sequences minimization is suggested.

References – 15.

УДК: 517.956

2010 MSC: 35R12, 35L20, 34B37

Асанова А. Т. **О разрешимости краевой задачи для систем гиперболических уравнений второго порядка с функциональным параметром** // Математический журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). С. 25 – 29.

Исследуется краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с функциональным параметром. На основе введения новых неизвестных функций разрешимость исследуемой задачи сведена к разрешимости семейства краевых задач с параметром для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлены достаточные условия существования единственного решения семейства краевых задач с параметром в терминах исходных данных.

Цитированная литература – 5.

Asanova A. T. **On a solvability of boundary value problem for the systems of hyperbolic equations of second order with a functional parameter**// Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 25 – 29.

We study the boundary value problem for the system of hyperbolic equations of second order with a functional parameter. By introducing new unknown functions solvability of the problem is reduced to the solvability of a family of boundary value problems with parameter for the systems of ordinary differential equations. Sufficient conditions of the existence of a unique solution of the family of boundary value problems with a parameter in terms of initial data are obtained.

References – 5.

УДК: 517.5

2010 MSC: 42B15

Жұмабаева А.А., Тлеуханова Н.Т. **Анизотроптық көбейткіштер класы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). С. 30 – 36.

Жұмыста φ көбейткішінің $M_{p_0q_0}^{\bar{p}_1\bar{q}_1}$ класына тиістілігінің жеткілікті шарттары алынған. Бұл шарттар анизотропты Лоренц кеңістігі және анизотропты торлы кеңістіктер терминінде өрнектелген. Сәйкес салыну теоремасының дәлдігін көрсететін мысал құрылған.

Әдебиеттер тізімі – 8.

Jumabayeva A.A., Tleukhanova N.T. **Anisotropic classes of multipliers** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 30 – 36.

We have obtained sufficient conditions of a belonging multiplier φ to the class $M_{\rho_0 \bar{q}_0}^{\bar{p}_1 \bar{q}_1}$. These conditions are expressed in terms of Anisotropic Lorentz spaces and Net spaces. We also construct example showing the accuracy constants obtained for corresponding embedding theorems.

References – 8.

УДК: 5197.9

2010 MSC: 34B40

Иманқұл Т. Ш. **Қосымша ақпараттар бойынша дифференциалдық теңдеулер жүйесінің оң жағын қалпына келтіру мәселелері** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). Б. 37 – 41.

Шамадан тыс анықталған екі нүктелі шеттік шарттары бар сызықты дифференциалдық теңдеулердің біртекті емес жүйелері үшін олардың шешімдері мен арнайы оң жақтарын қалпына келтірілу есебі шешіледі. Сонымен қатар, барлық мүмкін қолайлы оң жақтардың толық сипаттамасы ұсынылады.

Әдебиеттер тізімі – 6.

Imankul T. Sh. **The restoration of the right-hand side of the system of differential equations on additional information** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 37 – 41.

The problem of reconstructing solutions and right-hand sides is solved for the inhomogeneous systems of nonlinear differential equations with the redefined two-point boundary conditions. A complete description of all possible available right-hand sides is given.

References – 6.

УДК: 532.526

2010 MSC: 76F40

Маусымбекова С.Д. **Қатар тұрған екі бөгетті сығылатын газ ағыны арқылы орағыту процесін сандық есептеу** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). Б. 42 – 49.

Жазық дыбысқа дейінгі турбулентті газдың бөгеттер болғандағы сандық моделі көмегімен құйындардың пайда болуы мен өзара әрекеттесуі, денелердің ара қашықтықтарының ағыс құрылымына әсер етуі үдерісі зерттеледі. Бөгеттегі динамикалық сипаттамалардың аппроксимациясын арттыру үшін сызықтық және бисызықтық интерполяциялар қолданылады. Нәтижелердің басқа авторлардың нәтижелерімен сапалық салыстырмалары келтірілген.

Әдебиеттер тізімі – 10.

Mausumbekova S.D. **Numerical study of flowover of two obstacles located in tandem, by the flow of gas compressed** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 42 – 49.

The process of formation and interaction of whirlwinds at the presence of obstacles is investigated by the numerical model of turbulence gas. An influence of distances between bodies on the structure of current is studied. The linear and bilinear interpolations are applied for the increasing approximation of dynamics characteristics on the obstacle. The comparison of qualitative results with the results of the other authors are given.

References – 10.

УДК: 517.958

2010 MSC: 35F30

Сақабеков Ә., Аужани Д. **Болыцманның бір өлшемді сызықсыз моменттік теңдеулер жүйесі үшін алғашқы–шеттік есептің шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). Б. 50 – 58.

Жұмыста Болыцманның бір өлшемді сызықсыз моменттік теңдеулер жүйесі үшін алғашқы–шеттік есептің уақыт бойынша үзіліссіз және кеңістіктік айнымалылар бойынша қосындыланатын функциялар кеңістігінде уақыт бойынша глобал шешімінің бар екендігі дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 5.

Sakabekov A., Auzhani D. **About solvability of the initial and boundary value problem for the onedimensional nonlinear Boltzmann's moment system** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 50 – 58.

We have proved the existence of the global on time solution of the initial and boundary value problem for onedimensional nonlinear system of Boltzmann's moment equations in second approximation, in the space of functions which are continuous by time and summable by space variables.

References – 5.

УДК: 517.51

2010 MSC: 42A10

Фалалеев Л.П. **Түрлі кеңістіктердегі функциялардың Фурье коэффициенттерін қосындылаудың үздіксіз тәсілдері туралы** // Математикалық журнал. 2011. Т. 11. № 3-4 (41, 42). Б. 59 – 62.

С.Л.Соболев, С.М.Никольский, О.В.Бесов ($1 < p < 2$) кеңістіктеріндегі функциялардың тригонометриялық жүйелері бойынша Фурье коэффициенттерін Пуассон әдісі бойынша қосындылағандағы кему реттерінің бағалары табылды.

Әдебиеттер тізімі – 6.

Falaleev L.P. **On continuous methods of summation of Fourier coefficients of functions from different spaces** // Mathematical journal. 2011. Vol. 11. № 3-4 (41, 42). P. 59 – 62.

Estimations of orders of a decrease of the Fourier coefficients by trigonometric system of the functions from the S.M.Nikolskii, S.L.Sobolev and O.V.Besov spaces ($1 < p < 2$) by Poisson methods of summations are given in the paper.

References – 6.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении нужно отразить актуальность, новизну, имеющиеся результаты по теме представленной работы. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе \LaTeX -2 ϵ и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Цитированная литература

[1]. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О., *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*, М., "Наука", 1988. (для монографий)

[2]. Женсыкбаев А. А., *Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы*, Успехи матем. наук, 1981, Т. 36, вып. (или №) 4, С. 107 – 159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":

Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: <http://www.math.kz>

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 11, №3–4 (41, 42), 2011

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),
8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: <http://www.math.kz>

Подписано в печать 18.04.2012г.

Тираж 300 экз. Объем 72 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г. Алматы

пр. Достык, 85а, офис 309б

Тел./факс: 8 (727) 2 91 55 24, 2 72 03 88

e-mail: la_creation@inbox.ru,

web-site: <http://www.lacreation.kz>