ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2010 том 10 № 2 (36)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 2 (36) 2010

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(727)2-72-01-66, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 10, № 2 (36), 2010

О корректной разрешимости задачи нахождения ограниченного на всей оси решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений
А. Д. Абильдаева, С. М. Темешева 5

Осцилляторность полулинейного разностного уравнения второго порядка со знакопеременным коэффициентом
М. Алдай 12

Об одной некорректной задаче для уравнения Пуассона с дополнительным условием
М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, К. Б. Иманбердиев 19

Стратегии игроков в дифференциальной игре с терминальным множеством
С. Н. Амиргалиева 26

Математические преобразования формулы Эрланга
Д. У. Ашигалиев, Ж. С. Кемельбекова 30

Дп-минимальные и упорядоченно стабильные упорядоченные структуры
В. В. Вербовский 35

О корректной разрешимости линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с близкими ядрами
Д. С. Джумабаев, К. И. Усманов 39

Применение методов математической морфологии в анализе топологии фотосферных активных магнитных областей солнца
Л. М. Каримова 48

Критерий безсопряженности полулинейного уравнения второго порядка
С. Е. Кудабаева, Р. Ойнаров 56

Математическая модель температуры и электрической проводимости дуги в металлической и газовой фазах
А. Т. Кулахметова, С. Н. Харин, Ю. Р. Шпади 67

О неалгебраических 1-типах в счетно-категоричных слабо о-минимальных теориях
Б.Ш. Кулпешов 77

Об одном классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка
М. К. Куспекова, А. Б. Тунгатаров, Б. Уаисов 86

Об одной краевой задаче для многомерного аналога системы Коши-Римана
С. З. Сапакова, Ж. А. Токибетов 90

Обобщенная спектральная задача с возмущенными периодическими краевыми условиями и ее базисные характеристики
А. А. Тенгаева 96

Восстановление уравнений движения намагниченного динамически симметричного спутника в геомагнитном поле с учетом влияния гравитационного момента
К. С. Жилисбаева 99

ХРОНИКА

Заседание семинара по уравнениям математической физики и функциональному анализу 104

Рефераты 106

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 5—11*

УДК 519.62

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Д. Абильдаева, С. М. Темешева

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 anar@math.kz, azizakz@mail.ru

В терминах ограниченной обратимости двусторонне-бесконечных матриц установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи нахождения ограниченного на всей оси решения.

На всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$, $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}(t)|$, $a_{ij}(t)$ – элементы матрицы $A(t)$, $i, j = 1 : n$.

Задача 1. *Найти ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение дифференциального уравнения* (1).

Задача 1 исследуется методом параметризации [1].

Возьмем числа $\omega_- > 0$, $\omega_+ > 0$, $T = N\omega_0 > 0$, где $\omega_0 = \dfrac{\omega_- + \omega_+}{2}$, составим множество $\omega = \{\omega_-, \omega_0, \omega_+\}$ и обозначим $\omega^* = \max\{\omega_-, \omega_0, \omega_+\}$, $\omega_* = \min\{\omega_-, \omega_0, \omega_+\}$. Произведем разбиение интервалов $(-\infty, -T)$, $[-T, T]$, (T, ∞) соответственно с шагами ω_-, ω_0, ω_+.

Сужение функции $x(t) \in \widetilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ на r-ый интервал $[(r-1)\omega, r\omega)$ ($\omega \in \{\omega_-, \omega_0, \omega_+\}$) обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)$ – вектор-функция размерности n, определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[(r-1)\omega, r\omega)$, $r \in \mathbb{Z}$.

Введем следующие пространства: $\widetilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$; m_n – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda = (\ldots, \lambda_r, \ \lambda_{r+1}, \ldots)$, $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$, с нормой $\|\lambda\|_2 = \|(\ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots)\|_2 = \sup\limits_{r \in \mathbb{Z}} \|\lambda_r\|$; $\widetilde{C}(\mathbb{R}, \omega, m_n)$ – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей функций $x[t] = (\ldots, x_r(t), x_{r+1}(t), \ldots)$ с нормой $\|x[\cdot]\|_3 =$

Keywords: *Parametrization method, nonlinear ordinary differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B16, 34B40

$=\sup\limits_{r\in\mathbb{Z}}\sup\limits_{t\in[(r-1)\omega,r\omega)}\|x_r(t)\|$, где функция $x_r:[(r-1)\omega,r\omega)\to\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет конечный предел при $t\to r\omega-0$, $r\in\mathbb{Z}$; $L(m_n)$ – пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda:m_n\to m_n$ с индуцированной нормой.

Задача 1 эквивалентна следующей сингулярной многоточечной краевой задаче:

$$\frac{dx_r}{dt}=A(t)x_r+f(t),\qquad t\in[(r-1)\omega,r\omega),\quad r\in\mathbb{Z},\quad x_r\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to r\omega-0}x_r(t)=x_{r+1}(r\omega),\qquad r\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$x[t]=(\ldots,x_r(t),x_{r+1}(t),\ldots)\in\widetilde{C}(\mathbb{R},\omega,m_n). \tag{4}$$

Здесь (3) – условия склеивания решения в точках разбиения $\mathbb{R}$.

Решением задачи (2)–(4) является двусторонне-бесконечная последовательность $x^*[t]=(\ldots,x_r^*(t),x_{r+1}^*(t),\ldots)\in\widetilde{C}(\mathbb{R},\omega,m_n)$, где непрерывно дифференцируемая функция $x_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) при всех $t\in[(r-1)\omega,r\omega)$ (при $t=(r-1)\omega$ уравнению (2) удовлетворяет правосторонняя производная функции $x_r^*(t)$) и для $\lim\limits_{t\to r\omega-0}x_r^*(t)$, $x_{r+1}^*(r\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, имеют место равенства (3).

Через λ_r обозначим значение функции $x_r(t)$ в точке $t=(r-1)\omega$ и на каждом интервале $[(r-1)\omega,r\omega)$ произведем замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r\in\mathbb{Z}$. Получим сингулярную многоточечную краевую задачу с параметром:

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)(\lambda_r+u_r)+f(t),\quad t\in[(r-1)\omega,r\omega),\quad r\in\mathbb{Z}, \tag{5}$$

$$u_r((r-1)\omega)=0,\quad r\in\mathbb{Z}, \tag{6}$$

$$\lambda_r+\lim_{t\to r\omega-0}u_r(t)=\lambda_{r+1},\quad r\in\mathbb{Z}, \tag{7}$$

$$(\lambda,u[t])\in m_n\times\widetilde{C}(\mathbb{R},\omega,m_n). \tag{8}$$

Если пара $(\lambda^*,u^*[t])$ с элементами $\lambda^*=(\ldots,\lambda_r^*,\lambda_{r+1}^*,\ldots)$, $u^*[t]=(\ldots,u_r^*(t),u_{r+1}^*(t),\ldots)$, является решением задачи (5)–(8), то функция, определяемая равенствами $x^*(t)=\lambda_r^*+u_r^*(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r\in\mathbb{Z}$, принадлежит пространству $\widetilde{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t\in\mathbb{R}$, т.е. будет решением задачи 1. И, обратно, если $\widetilde{x}(t)$ – решение задачи 1, то пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$ с элементами $\widetilde{\lambda}=(\ldots,\widetilde{\lambda}_r,\widetilde{\lambda}_{r+1},\ldots)$, $\widetilde{u}[t]=(\ldots,\widetilde{u}_r(t),\widetilde{u}_{r+1}(t),\ldots)$, где $\widetilde{\lambda}_r=\widetilde{x}_r((r-1)\omega)$, $\widetilde{u}_r(t)=\widetilde{x}_r(t)-\widetilde{x}_r((r-1)\omega)$, $t\in[(r-1)\omega,r\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, $\widetilde{x}_r(t)$ – сужение функции $\widetilde{x}(t)$ на интервал $[(r-1)\omega,r\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, является решением сингулярной краевой задачи с параметром (5)–(8).

Введем в рассмотрение линейный оператор [2, с. 145]:

$$X(t)=I+\int_{(r-1)\omega}^{t}A(\tau_1)d\tau_1+\sum_{j=2}^{\infty}\int_{(r-1)\omega}^{t}A(\tau_1)\int_{(r-1)\omega}^{\tau_1}A(\tau_2)\ldots\int_{(r-1)\omega}^{\tau_{j-1}}A(\tau_j)d\tau_j\ldots d\tau_2d\tau_1,$$

где I – единичная матрица размерности $(n\times n)$. Оператор $X(t)$ удовлетворяет задаче:

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X,\qquad X((r-1)\omega)=I,\qquad r\in\mathbb{Z}. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что $X^{-1}(t)$ существует и

$$\frac{dX^{-1}(t)}{dt}=-X^{-1}(t)A(t),\qquad X^{-1}((r-1)\omega)=I,\qquad r\in\mathbb{Z}. \tag{10}$$

Рассмотрим $U(t,\tau)=X(t)X^{-1}(\tau)$ – эволюционный оператор дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$. Оператор $U(t,\tau)$ обладает следующими фундаментальными свойствами:

1^0. $U(t,t)=I$;

2^0. $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)$;

3^0. $U(t,\tau)=U^{-1}(\tau,t)$.

Тогда единственное решение задачи Коши (5), (6) при фиксированных значениях параметра λ_r имеет вид:

$$u_r(t)=\int_{(r-1)\omega}^{t}U(t,\tau)A(\tau)d\tau\cdot\lambda_r+\int_{(r-1)\omega}^{t}U(t,\tau)f(\tau)d\tau,\qquad t\in[(r-1)\omega,r\omega),\quad r\in\mathbb{Z}. \tag{11}$$

Отсюда найдем $\lim\limits_{t\to r\omega-0}u_r(t)$ и, подставляя его в (7), получим двусторонне-бесконечную систему уравнений относительно λ_r:

$$\Big(I+\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}U(r\omega,\tau)A(\tau)d\tau\Big)\cdot\lambda_r-\lambda_{r+1}=-\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}U(r\omega,\tau)f(\tau)d\tau,\quad r\in\mathbb{Z}. \tag{12}$$

Преобразуем коэффициент при λ_r. Согласно определению $U(t,\tau)$ имеем:

$$I+\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}U(r\omega,\tau)A(\tau)d\tau=I+X(r\omega)\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau.$$

В силу (10),

$$\begin{aligned}I+\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}U(r\omega,\tau)A(\tau)d\tau&=I-X(r\omega)\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}\frac{d}{d\tau}(X^{-1}(\tau))d\tau=\\&=I-X(r\omega)(X^{-1}(r\omega)-X^{-1}((r-1)\omega))=X(r\omega)X^{-1}((r-1)\omega)=U(r\omega,(r-1)\omega).\end{aligned}$$

Тогда двусторонне-бесконечную систему уравнений (12) запишем в виде:

$$U\big(r_-\omega_-,(r_--1)\omega_-\big)\lambda_{r_-}-\lambda_{r_-+1}=-\int_{(r_--1)\omega_-}^{r_-\omega_-}U(r_-\omega_-,\tau)f(\tau)d\tau,$$
$$r_-=-N,-N-1,-N-2,\ldots, \tag{13}$$

$$U\big(r_0\omega_0,(r_0-1)\omega_0\big)\lambda_{r_0}-\lambda_{r_0+1}=-\int_{(r_0-1)\omega_0}^{r_0\omega_0}U(r_0\omega_0,\tau)f(\tau)d\tau,$$
$$r_0=-N+1,-N+2,\ldots,0,1,\ldots,N, \tag{14}$$

$$U\big(r_+\omega_+,(r_+-1)\omega_+\big)\lambda_{r_+}-\lambda_{r_++1}=-\int_{(r_+-1)\omega_+}^{r_+\omega_+}U(r_+\omega_+,\tau)f(\tau)d\tau,$$
$$r_+=N+1,N+2,N+3,\ldots. \tag{15}$$

Блочно-ленточную двусторонне-бесконечную матрицу, соответствующую левой части уравнений (13)–(15), обозначим через $Q_*(\omega)$ и систему (13)–(15) запишем в виде:

$$Q_*(\omega)\lambda=-F_*(f,\omega),\qquad\lambda\in m_n, \tag{16}$$

где $F_*(f,\omega)=(\ldots,F_r(f,\omega),F_{r+1}(f,\omega)),\ldots)$, $F_r(f,\omega)=\displaystyle\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}U(r\omega,\tau)f(\tau)d\tau$.

Так как [2, с. 148]

$$\|U(t,\tau)\| \leqslant \exp\Big(\int_\tau^t \|A(\tau)\| d\tau\Big) \qquad (\tau \leqslant t), \tag{17}$$

то $\|U(t,\tau)\| \leqslant e^{\alpha|t-\tau|}$, где $\alpha = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|$. Поэтому $Q_*(\omega)$ отображает m_n в m_n и $F(f,\omega) \in m_n$.

Лемма. *Если функция $x^*(t)$ – решение задачи 1, то двусторонне-бесконечная последовательность $\lambda^* = (\dots,\lambda_r^*,\lambda_{r+1}^*,\dots)$, составленная из значений $x^*(t)$ в точках разбиения $\mathbb{R}$: $\lambda_r^* = x^*((r-1)\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, удовлетворяет уравнению* (16). *И, наоборот, если $\widetilde{\lambda} = (...,\widetilde{\lambda}_r,\widetilde{\lambda}_{r+1},...)$ – решение* (16), *то функция $\widetilde{x}(t)$, определенная равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t\in[(r-1)\omega, r\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, где $\widetilde{u}_r(t)$ является решением задачи Коши* (5), (6) *при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, будет решением задачи 1.*

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ – решение задачи 1. Тогда, ввиду эквивалентности задачи 1 и сингулярной краевой задачи с параметром (5)–(8), параметр $\lambda^* = (\dots,\lambda_r^*,\lambda_{r+1}^*,\dots)$, где $\lambda_r^* = \ = x^*((r-1)\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, принадлежит пространству m_n и удовлетворяет двустроннебесконечной системе уравнений (13)–(15), т.е. является решением (16).

Теперь предположим, что $\widetilde{\lambda} = (\dots,\widetilde{\lambda}_r,\widetilde{\lambda}_{r+1},\dots)$ – решение (16) и $\widetilde{u}_r(t)$ – решение задачи Коши (5), (6) при $\lambda = \widetilde{\lambda}_r$, $r\in\mathbb{Z}$. Используя представление

$$\widetilde{u}_r(t) = \int_{(r-1)\omega}^t U(t,\tau)A(\tau)d\tau\cdot\widetilde{\lambda}_r + \int_{(r-1)\omega}^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad t\in[(r-1)\omega,r\omega), \quad r\in\mathbb{Z}, \tag{18}$$

и оценку (17) получим, что $\widetilde{u}[t] = (\dots,\widetilde{u}_r(t),\widetilde{u}_{r+1}(t),\dots) \in \widetilde{C}(\mathbb{R},\omega,m_n)$. На основе (18) и свойств эволюционного оператора $U(t,\tau)$ из (13)–(15) следует справедливость условий склеивания (7). Таким образом, пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$ является решением сингулярной многоточечной краевой задачи с параметром (5)–(8). Поэтому функция $\widetilde{x}(t)$, определенная равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t\in[(r-1)\omega,r\omega)$, $r\in\mathbb{Z}$, будет решением задачи 1. Лемма доказана.

Определение. *Задача 1 называется корректно разрешимой, если для любой функции $f(t)\in\widetilde{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ дифференциальное уравнение* (1) *имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x^*(t)$ и справедлива оценка $\|x^*\|_1 \leqslant K\|f\|_1$, где $K - const$, не зависящая от $f(t)$.*

Число K называется константой корректной разрешимости задачи 1.

Теорема 1. *Для корректной разрешимости задачи 1 необходима ограниченная обратимость двусторонне-бесконечной матрицы $Q_*(\omega): m_n \to m_n$ при любых $\omega_- > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_+ > 0$ и достаточна ее ограниченная обратимость при некоторых $\widetilde{\omega}_- > 0$, $\widetilde{\omega}_0 > 0$, $\widetilde{\omega}_+ > 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть заданы числа $\omega_- > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_+ > 0$. Возьмем натуральные числа N_-, N_0, N_+ так, чтобы $\beta^* = \max\{\beta_-,\beta_0,\beta_+\}$, где $\beta_- = \omega_-/N_-$, $\beta_0 = \omega_0/N_0$, $\beta_+ = \omega_+/N_+$, имело место неравенство

$$\frac{2}{\alpha\beta^*}\big(e^{\alpha\beta^*} - 1 - \alpha\beta^*\big) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда, согласно лемме [3, с. 57] для любого $b\in\mathbb{R}^n$ существует непрерывная на $[0,\beta^*]$ вектор-функция $f_b(t)$, обладающая следующими свойствами:

1) $f_b(0) = 0$, $f_b(\beta^*) = 0$;

2) $\max\limits_{t\in[0,\beta^*]} \|f_b(t)\| \leqslant \frac{3}{2}\|b\|$;

3) $\frac{1}{\beta^*}\int_0^{\beta^*} U(\beta^*,\tau)f_b(\tau)d\tau = \frac{1}{\beta^*}\int_0^{\beta^*} f_b(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{\beta^*}\int_0^{\beta^*} A(\tau_1)\int_0^{\tau_1} f_b(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +$

$$+\frac{1}{\beta^*}\int_0^{\beta^*} A(\tau_1)\int_0^{\tau_1} A(\tau_2)\int_0^{\tau_2} f_b(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \ldots = b.$$

Рассмотрим уравнение

$$Q_*(\beta)\lambda = c, \qquad \lambda \in m_n, \qquad c \in m_n, \tag{19}$$

с блочно-ленточной двусторонне-бесконечной матрицей $Q_*(\beta) = (d_{rj})$, $r \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ll}
d_{rr} = U(r\beta_-, (r-1)\beta_-), & r = -NN_0, -NN_0 - 1, -NN_0 - 2, \ldots, \\
d_{rr} = U(r\beta_0, (r-1)\beta_0), & r = -NN_0 + 1, -NN_0 + 2, \ldots, 0, 1, \ldots, NN_0, \\
d_{rr} = U(r\beta_+, (r-1)\beta_+), & r = NN_0 + 1, NN_0 + 2, NN_0 + 3, \ldots, \\
d_{r,r+1} = -I, & r \in \mathbb{Z}, \\
d_{rj} = 0, & j \neq r, \quad j \neq r+1, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Покажем, что $\operatorname{Ker} Q_*(\beta)$ состоит только из нулевого элемента пространства m_n. Предположим обратно: существует $\widetilde{\lambda} \in m_n$, для которого $Q_*(\beta)\widetilde{\lambda} = 0$ и $\|\widetilde{\lambda}\|_2 \neq 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1), где $f(t) = 0$. В этом случае уравнение (16) имеет вид $Q_*(\omega)\lambda = 0$. Тогда, согласно лемме функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами: $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)\omega, r\omega)$, $r \in \mathbb{Z}$, будет ненулевым ограниченным на $\mathbb{R}$ решением дифференциального уравнения (1), что противоречит корректной разрешимости задачи 1. Поэтому $\operatorname{Ker} Q_*(\beta) = \{0\}$ и матрица $Q_*(\beta)$ обратима.

Введем матрицу

$$H = \operatorname{diag}(\ldots, \beta_-, \beta_-, \ldots, \beta_-, \underbrace{\beta_0, \ldots, \beta_0}_{(2N-1)N_0}, \beta_+, \ldots, \beta_+, \beta_+, \ldots).$$

По элементам $c = (\ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots)$, используя лемму [3, с. 57], построим непрерывную и ограниченную на $\mathbb{R}$ функцию $f_c(t)$, для которой $H^{-1} \cdot F_*(f_c, \beta) = -c$.

Пусть $\widehat{Q}_\beta = H^{-1}Q_*(\beta)$ и $x_c(t)$ – решение задачи 1 при $f(t) = f_c(t)$. Используя лемму и корректную разрешимость задачи 1, имеем

$$\|\lambda_c\|_2 = \|\widehat{Q}_\beta^{-1} H^{-1} F_*(f_c, \beta)\|_2 = \|\widehat{Q}_\beta^{-1} c\|_2 \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x_c(t)\| \leqslant K \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_c(t)\| \leqslant \frac{3}{2}K\|c\|. \tag{20}$$

Таким образом, уравнение (19) для любого $c \in m_n$ имеет единственное решение $\lambda_c \in m_n$ и справедлива оценка (20), т.е. $\|\widehat{Q}_\beta^{-1}\|_{L(m_n)} \leqslant \dfrac{3K}{2}$. Поскольку $Q_*(\beta) = H\widehat{Q}_\beta$, то $(Q_*(\beta))^{-1} = \widehat{Q}_\beta^{-1} H^{-1}$ и

$$\|(Q_*(\beta))^{-1}\|_{L(m_n)} \leqslant \|\widehat{Q}_\beta^{-1}\|_{L(m_n)} \cdot \|H^{-1}\|_{L(m_n)} \leqslant \frac{3K}{2\beta_*} = \gamma. \tag{21}$$

Итак, матрица $Q_*(\beta) : m_n \to m_n$ обратима и для ее обратной справедлива оценка (21).

В уравнениях (13)–(15) выразив λ_{-N-N_-+i}, $i = 2 : (N_- + 1)$, через λ_{-N-N_-+1}, а λ_{N+N_++i}, $i = (-N+1) : 2$, через λ_{N+1}, получим на строках с номерами $r_- = -N - kN_-$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\Big(\ldots \quad U(-T, -T-\beta_-) \times U(-T-\beta_-, -T-2\beta_-) \times \ldots \times U(-T-(N_- - 1)\beta_-, -T-N_-\beta_-) \quad -I \quad \ldots\Big),$$

а на строках с номерами $r_+ = N + kN_+$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\Big(\ldots \quad U(T+N_+\beta_+, T+(N_+ - 1)\beta_+) \times U(T+(N_+ - 1)\beta_+, T+(N_+ - 2)\beta_+) \times \ldots \times U(T+\beta_+, T) \quad -I \quad \ldots\Big).$$

Оставив в матрице $Q_*(\beta)$ строки с номерами r_-, $r_0 = (-N+1) : N$, r_+, и, используя полугрупповое свойство 2^0 эволюционного оператора $U(t,\tau)$, получим матрицу:

$$Q_*(\omega) =$$

$$\begin{pmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & U(-T-\omega_-,-T-2\omega_-) & -I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & U(-T,-T-\omega_-) & -I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & U(-T+\omega_0,-T) & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & U(-T+2\omega_0,-T+\omega_0) & -I & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & U(T-\omega_0,T-2\omega_0) & -I & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & U(T,T-\omega_0) & -I & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & U(T+\omega_+,T) & -I & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & U(T+2\omega_+,T+\omega_+) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix},$$

Покажем ограниченную обратимость матрицы $Q_*(\omega) : m_n \to m_n$ для любых $\omega_- > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_+ > 0$. Для этой цели рассмотрим уравнение

$$Q_*(\omega)\mu = \widetilde{c}, \qquad \mu \in m_n, \qquad \widetilde{c} \in m_n.$$

Ядро $\operatorname{Ker} Q_*(\omega)$ состоит только из нулевого элемента пространства m_n. Действительно, предполагая существование $\mu \in m_n$, для которого $Q_*(\omega)\mu = 0$ и $\mu \neq 0$, и учитывая структуру матриц $Q_*(\beta)$ и $Q_*(\omega)$, получим существование ненулевого решения уравнения $Q_*(\beta)\lambda = 0$, принадлежащего пространству m_n, что противоречит обратимости матрицы $Q_*(\beta)$. Следовательно, матрица $Q_*(\omega) : m_n \to m_n$ обратима.

Перейдем к оценке $(Q_*(\omega))^{-1}$. Возьмем любой $\widetilde{b} \in m_n$. Составим столбец $\widetilde{\widetilde{b}}$, дополнив столбец $\widetilde{b}$ нулями. Известно, что для любого $\widetilde{\widetilde{b}}$ существует единственное решение уравнения $Q_*(\beta)\lambda = \widetilde{\widetilde{b}}$: $\lambda = (Q_*(\beta))^{-1}\widetilde{\widetilde{b}}$. Из всех $\widetilde{\widetilde{\lambda}}$ рассмотрим только те, которые соответствуют матрице $Q_*(\omega)$: $Q_*(\omega)\widetilde{\lambda} = \widetilde{b}$, и оценим. Так как $\|\widetilde{\widetilde{\lambda}}\|_2 \leqslant \gamma\|\widetilde{\widetilde{b}}\|_2$, то $\|\widetilde{\lambda}\|_2 \leqslant \|\widetilde{\widetilde{\lambda}}\|_2 \leqslant \gamma\|\widetilde{\widetilde{b}}\|_2 \leqslant \|\widetilde{b}\|_2$, следовательно, $\|Q_*(\omega)^{-1}\|_{L(m_n)} \leqslant \gamma = \dfrac{3K}{2\beta_*}$.

Достаточность. Пусть матрица $Q_*(\omega) : m_n \to m_n$ ограниченно обратима. Используя лемму и оценку (17), получим существование решения задачи 1 – функции $x^*(t)$ – и неравенство

$$\|x^*\|_1 \leqslant K\|f(t)\|_1,$$

где $K - \mathrm{const}$, не зависящая от $f(t)$. Покажем единственность решения задачи 1.

Пусть существует еще одно решение задачи 1 – функция $\widetilde{x}(t)$. Тогда, согласно лемме, параметр $\widetilde{\lambda} = (\ldots, \widetilde{\lambda}_r, \widetilde{\lambda}_{r+1}, \ldots)$, где $\widetilde{\lambda}_r = \widetilde{x}((r-1)\omega)$, $r \in \mathbb{Z}$, является решением (16) и $\Delta\lambda = \lambda^* - \widetilde{\lambda} \in m_n$ и $Q_\omega \Delta\lambda = 0$. Так как Q_ω ограниченно обратима, то $\Delta\lambda = 0$, т.е. $\lambda_r^* = \widetilde{\lambda}_r$ для всех $r \in \mathbb{Z}$. В силу единственности решения задачи Коши (5), (6) получим, что $x^*(t) = \widetilde{x}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Теорема 1 доказана.

В доказанной теореме двусторонне-бесконечная матрица $Q_*(\omega)$ составлена с помощью эволюционного оператора $U(t,\tau)$.

В следующих утверждениях условия корректной разрешимости даны в терминах самой матрицы $A(t)$.

По выбранным $\omega_- > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_+ > 0$ и натуральному числу ν составим двусторонне-бесконечную блочно-ленточную матрицу $Q_\nu(\omega) = (d_{r,j}^\nu)$, где

$$\begin{aligned}
&d_{rr}^\nu = I + D_{\nu,r}(\omega_-), && r = -N, -N-1, -N-2, \ldots, \\
&d_{rr}^\nu = I + D_{\nu,r}(\omega_0), && r = -N+1, -N+2, \ldots, 0, 1, \ldots, N, \\
&d_{rr}^\nu = I + D_{\nu,r}(\omega_+), && r = N+1, N+2, N+3, \ldots, \\
&d_{r,r+1}^\nu = -I, && r \in \mathbb{Z}, \\
&d_{rj}^\nu = 0, && j \neq r, \quad j \neq r+1, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

$$D_{\nu,r}(\omega)=\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}A(\tau_1)d\tau_1+\sum_{j=2}^{\nu}\int_{(r-1)\omega}^{r\omega}A(\tau_1)\dots\int_{(r-1)\omega}^{\tau_{j-1}}A(\tau_j)d\tau_j\dots d\tau_1.$$

Достаточные условия существования единственного ограниченного на всей оси решения дифференциального уравнения (1) устанавливает

Теорема 2. *Пусть при некоторых* $\omega_- > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_+ > 0$, $\nu\in\mathbb{N}$, *матрица* $Q_\nu(\omega): m_n\to m_n$ *обратима и выполняются неравенства*

$$\|(Q_\nu(\omega))^{-1}\|_{L(m_n)}\leqslant\gamma_\nu(\omega), \tag{22}$$

$$q_\nu(\omega)=\gamma_\nu(\omega)\Big(e^{\alpha\omega^*}-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha\omega^*)^j}{j!}\Big)<1. \tag{23}$$

Тогда задача 1 корректно разрешима.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [1, с. 389].

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 2 не только достаточны, но и необходимы для корректной разрешимости задачи 1.

Теорема 3. *Задача 1 корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любых* $\omega_- > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_+ > 0$ *найдется* $\nu=\nu(\omega_-,\omega_0,\omega_+)\in\mathbb{N}$ *при которых матрица* $Q_\nu(\omega): m_n\to m_n$ *обратима и выполняются неравенства* (22), (23).

Доказательство. Необходимость. Пусть задача 1 корректно разрешима и заданы $\omega_- > 0$, $\omega_0>0$, $\omega_+>0$. Тогда, согласно теореме 1 $Q_*(\omega)$ ограниченно обратима и $\|(Q_*(\omega))^{-1}\|\leqslant\gamma_*(\omega)$. Выберем $\widetilde{\nu}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma_*(\omega)\Big(e^{\alpha\omega^*}-\sum_{j=0}^{\widetilde{\nu}}\frac{(\alpha\omega^*)^j}{j!}\Big)<\frac{1}{2}. \tag{24}$$

Так как

$$\|Q_*(\omega)-Q_\nu(\omega)\|_{L(m_n)}\leqslant e^{\alpha\omega^*}-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha\omega^*)^j}{j!},$$

то по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [4, с. 142] для всех $\nu\geqslant\widetilde{\nu}$

$$\|(Q_\nu(\omega))^{-1}\|_{L(m_n)}<2\gamma_*(\omega)$$

и в силу (24)

$$q_\nu(\omega)=2\gamma_*(\omega)\Big(e^{\alpha\omega^*}-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha\omega^*)^j}{j!}\Big)<1.$$

Теорема 3 доказана.

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д.С.** //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388–404.

2. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.

3. **Джумабаев Д.С.** //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.

4. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 22.05.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 12—18*

УДК 517.962.24

ОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

М. Алдай

Евразийский Национальный Университет им Л.Н. Гумилева
010008 Астана Мунайтпасова, 5 saiajan@yandex.ru

Для полулинейного разностного уравнения второго порядка устанавливаются достаточные условия его осцилляторности, когда коэффициент при неизвестных меняет знак.

1. Введение. Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка:

$$\Delta(a_k|\Delta x_k|^{p-2}\Delta x_k) + b_{k+1}|x_{k+1}|^{p-2}x_{k+1} = 0, \;\; k \geq 1, \tag{1}$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $1 < p < \infty$, a_k , b_{k+1} , $k \geq 1$ – действительные числа, причем $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$.

Последовательность действительных чисел $x = \{x_k\}_{k\geq 1}$ называется решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $k \geq 1$.

Пусть $x = \{x_k\}_{k\geq 1}$ решение уравнения (1). Если для некоторого $m \geq 1$ $x_m = 0$ или $x_m x_{m+1} <0$, то говорят, что решение x имеет обобщенный нуль на промежутке $[m, m+1)$.

Если решение x имеет бесконечное число обобщенных нулей, то решение x называется осцилляторным, в противным случае оно называется неосцилляторным.

Уравнение (1) называется осцилляторным (неосцилляторным), если все его ненулевые решения осцилляторны (неосцилляторны).

Уравнение (1) называется сопряженным на отрезке $[m, n]$, если оно имеет хотя бы одно ненулевое решение, имеющее по крайней мере два или более обобщенных нулей на промежутке $[m, n+1)$, в противном случае уравнения (1) называется безсопряженным на отрезке $[m, n]$.

Понятия сопряженность или безсопряженность уравнения (1) на заданном отрезке имеют важное значение при установлении его осцилляторности или неосцилляторности.

При $p = 2$ уравнение (1) становится линейным разностным уравнением второго порядка:

$$\Delta(a_k\Delta x_k) + b_{k+1}x_{k+1} = 0, \;\; k \geq 1. \tag{2}$$

Keywords: *Half–linear difference equation, oscillation criteria, conjugacy criteria, variational method*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

Уравнение (2) обычно записывается в виде:

$$a_{k+1}y_{k+1} - a_k y_{k-1} + c_k y_k = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots,$$

где $y_k = x_{k+1}$, $k \geq 0$, $y_{-1} = 0$, $c_k = b_{k+1} - a_{k+1} - a_k$, связывающим его с матрицей Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} c_0 & a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & c_1 & a_2 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & c_2 & a_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \;\; a_k > 0.$$

Уравнения (1) и (2) соответственно являются дискретными аналогами полулинейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$(a(t)|x'(t)|^{p-2}x'(t))' + b(t)|x(t)|^{p-2}x(t) = 0, \;\; t \geq 0, \tag{3}$$

и уравнения Штурма-Лиувилля:

$$(a(t)x'(t))' + b(t)x(t) = 0, \;\; t \geq 0. \tag{4}$$

Если история исследования качественных свойств линейного уравнения (4) охватывает почти двухсотлетний период, то исследования качественных свойств уравнения (3) начались в 80-х годах прошлого века и полученные до 2005г. результаты подытожены в монографии [1]. По сравнению с уравнением (3) качественная теория уравнения (1) начала развиваться сравнительно недавно.

Основные базовые свойства уравнения (1) получены в 2001г. и даны в так называемой "круговой" теореме [2] (см. еще [1]):

"Круговая" теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) уравнение (1) является безсопряженным на отрезке $[m, n]$, $n > m \geq 1$;

(ii) уравнение (1) имеет решение, не имеющее обобщенных нулей на $[m, n+1)$;

(iii) обобщенное уравнение Рикатти

$$\Delta w_k - b_{k+1} + w_k \left(1 - \frac{a_k}{\Phi(\Phi^{-1}(a_k) + \Phi^{-1}(w_k))}\right) = 0$$

имеет решение w_k *на* $[m, n+1]$ *такое, что* $a_k + w_k > 0$ *на* $[m, n]$, *где* $\Phi(u) = |u|^{p-2}u$, $\Phi^{-1}(v) = |v|^{p'-2}v$.

(iv) функционал $F(\xi, m, n) = \sum\limits_{k=m}^{n} \{a_k|\Delta\xi_k|^p - b_{k+1}|\xi_{k+1}|^p\} > 0$ *для любых ненулевых* $\xi = \{\xi_k\}_{k=m}^{n+1}$, *удовлетворяющих условию* $\xi_m = \xi_{n+1} = 0$.

На основании этой "круговой" теоремы было установлено, что для уравнения (1) имеют место теоремы Штурма о сравнении и о чередовании нулей решений, а также для уравнения вида (1) справедлив вариационный принцип.

Из теоремы Штурма о чередовании нулей следует, что, если одно ненулевое решение уравнения (1) осцилляторно (неосцилляторно), то уравнение (1) осцилляторно (неосцилляторно).

Приведенная "круговая" теорема непосредственно допускает два основных метода исследования осцилляционных свойств уравнения (1). Первый, так называемая "техника Рикатти", основывается на эквивалентности утверждений (*i*) и (*iii*), второй – вариационный метод – на эквивалентности (*i*) и (*iv*).

При исследования осцилляционных свойств уравнения вида (1) многие исследователи применяют "технику Рикатти". Однако, из-за громоздности уравнения типа Рикатти для уравнения (1) по сравнению с аналогичным уравнением типа Рикатти для уравнения (3) не все полученные результаты для дифференциального уравнения (3) перенесены для уравнения (1).

Мы здесь применяем вариационный метод. Из эквивалентности утверждений (i) и (iv) следует

Теорема A. *Для того чтобы уравнение (1) было сопряженным на отрезке* $[m,n]$, $n > m \geq 1$, *необходимо и достаточно существование хотя бы одного ненулевого набора действительных чисел* $\tilde{x} = \{\tilde{x}_i\}_{i=m}^{n+1}$, $x_m = x_{n+1} = 0$, *для которого*

$$\sum_{k=m}^{n}\{a_k|\Delta\tilde{x}_k|^p - b_{k+1}|\tilde{x}_{k+1}|^p\} \leq 0. \tag{5}$$

Пусть $\overset{\circ}{X}_m$, $m \geq 1$ – множество всех ненулевых последовательностей действительных чисел $x = \{x_k\}_{k\geq 1}$ таких, что существует целое $n = n(x) > m$ и $x_k = 0$ при $1 \leq k \leq m$ и $k \geq n$.

Из теоремы Штурма о чередовании нулей решений уравнения (1) и из утверждения теоремы A имеем

Теорема B. *Для того, чтобы уравнение (1) было осцилляторным необходимо и достаточно, чтобы для любого* $m \geq 1$ *существовал* $\tilde{x} \in \overset{\circ}{X}_m$ *такой, что*

$$\sum_{k=m}^{\infty}(a_k|\Delta\tilde{x}_k|^p - b_{k+1}|\tilde{x}_{k+1}|^p) \leq 0. \tag{6}$$

Различные признаки осцилляторности, неосцилляторности уравнения вида (1) в основном установлены (см.например, [1–4]), когда $a_k > 0$, $b_{k+1} \geq 0$, $k \geq 1$.

Здесь мы рассматриваем более общий случай, когда знаки b_{k+1}, $k \geq 1$, могут быть непостоянными.

2. Основные результаты. Пусть $b_{k+1}^+ := \max\{0, b_{k+1}\}$, $b_{k+1}^- := \max\{0, -b_{k+1}\}$, $k \geq 1$. Тогда $b_{k+1} = b_{k+1}^+ - b_{k+1}^-$, $k \geq 1$.

Для $1 \leq m < t < l \leq \infty$ положим:

$$\varphi_{t,m}^- = \min_{m+1\leq j\leq t}\left\{\sum_{i=j}^{t-1} b_i^- + \left(\sum_{i=j-1}^{t-1} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right\},$$

$$\varphi_{t,l}^+ = \min_{t\leq j\leq l}\left\{\sum_{i=t+1}^{j} b_i^- + \left(\sum_{i=t}^{j} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right\}, \text{ если } l < \infty,$$

и

$$\varphi_{t}^+ = \inf_{t\leq j}\left\{\sum_{i=t+1}^{j} b_i^- + \left(\sum_{i=t}^{j} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right\}, \text{ если } l = \infty,$$

где $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Здесь и далее считаем, что сумма вида $\sum\limits_{i=t}^{s}$ равна нулю, если $s < t$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq m < l < \infty$. *Если существует* s, t : $m < t \leq s \leq l$ *и выполняется неравенство*

$$\sum_{i=t}^{s} b_i \geq \varphi_{t,m}^- + \varphi_{s,l}^+, \tag{7}$$

то уравнение (1) сопряженно на отрезке $[m,l]$.

Доказательство теоремы 1. Пусть для некоторых s, t: $m < t \le s < l$ выполняется неравенство (7). Тогда из определения $\varphi^-_{t,m}$, $\varphi^+_{s,l}$ существуют k: $m+1 \le k \le t$ и n: $s \le n \le l$, для которых

$$\sum_{i=t}^{s} b_i \ge \sum_{i=k}^{t-1} b_i^- + \left(\sum_{i=k-1}^{t-1} a_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \sum_{i=s+1}^{n} b_i^- + \left(\sum_{i=s}^{n} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}. \tag{8}$$

Введем набор чисел $\tilde{x} = \{\tilde{x}_i\}_{i=m}^{l+1}$:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=k-1}^{i-1} a_j^{1-p'} \left(\sum\limits_{j=k-1}^{t-1} a_j^{1-p'}\right)^{-1}, & k \le i \le t, \\ 1, & t \le i \le s, \\ \sum\limits_{j=i}^{n} a_j^{1-p'} \left(\sum\limits_{j=s}^{n} a_j^{1-p'}\right)^{-1}, & s \le i \le n, \\ 0, & m \le i \le k-1 \text{ или } n+1 \le i \le l+1. \end{cases} \tag{9}$$

Вычислим $\Delta\tilde{x}_i$, $m \le i \le n$:

$$\Delta\tilde{x}_i = a_i^{1-p'} \left(\sum_{j=k-1}^{t-1} a_j^{1-p'}\right)^{-1} \quad \text{при } k-1 \le i \le t-1,$$

$$\Delta\tilde{x}_i = -a_i^{1-p'} \left(\sum_{j=s}^{n} a_s^{1-p'}\right)^{-1} \quad \text{при } s \le i \le n,$$

$\Delta\tilde{x}_i = 0$ при $m \le i \le k-2$, $n+1 \le i \le l$ и при $t \le i \le s-1$, если соответственно $k-1 > m$, $l > n$ и $s > t$. Тогда

$$\sum_{i=m}^{l} a_i |\Delta\tilde{x}_i|^p = \sum_{i=k-1}^{t-1} a_i \left(a_i^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=k-1}^{t-1} a_j^{1-p'}\right)^{-p} + \sum_{i=s}^{n} a_i \left(a_i^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=s}^{n} a_j^{1-p'}\right)^{-p} =$$

$$= \left(\sum_{i=k-1}^{t-1} a_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{n} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=m}^{l} b_{i+1} |\tilde{x}_{i+1}|^p = \sum_{i=m+1}^{l+1} b_i |\tilde{x}_i|^p = \sum_{i=k}^{t-1} b_i \left(\sum_{j=k-1}^{i-1} a_j^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=k-1}^{t-1} a_j^{1-p'}\right)^{-p} +$$

$$+ \sum_{i=t}^{s} b_i + \sum_{i=s+1}^{n} b_i \left(\sum_{j=i}^{n} a_j^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=s}^{n} a_j^{1-p'}\right)^{-p} = \sum_{i=t}^{s} b_i +$$

$$+ \sum_{i=k}^{t-1} b_i^+ \left(\sum_{j=k-1}^{i-1} a_j^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=k-1}^{t-1} a_j^{1-p'}\right)^{-p} + \sum_{i=s+1}^{n} b_i^+ \left(\sum_{j=i}^{n} a_j^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=s}^{n} a_j^{1-p'}\right)^{-p} -$$

$$- \sum_{i=k}^{t-1} b_i^- \left(\sum_{j=k-1}^{i-1} a_j^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=k-1}^{t-1} a_j^{1-p'}\right)^{-p} - \sum_{i=s+1}^{n} b_i^- \left(\sum_{j=i}^{n} a_j^{1-p'}\right)^p \left(\sum_{j=s}^{n} a_j^{1-p'}\right)^{-p} \ge$$

$$\geq \sum_{i=t}^{s} b_i - \sum_{i=k}^{t-1} b_i^- - \sum_{i=s+1}^{n} b_i^- . \tag{11}$$

Из (10) и (11) имеем:

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i|\Delta\tilde{x}_i|^p - b_{i+1}|\tilde{x}_{i+1}|^p) \leq -\sum_{i=t}^{s} b_i + \sum_{i=k}^{t-1} b_i^- + \left(\sum_{i=k-1}^{t-1} a_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \sum_{i=s+1}^{n} b_i^- + \left(\sum_{i=s}^{n} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}.$$

Откуда и из (8) следует, что для набора чисел (9) выполнено (5). Тогда на основании теоремы А уравнение (1) сопряженно на отрезке $[m,l]$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leq m < l < \infty$. *Если*

$$\sum_{i=m+1}^{l} b_i \geq a_m + a_l, \tag{12}$$

то уравнение (1) сопряженно на отрезке $[m,l]$.

Если выполнено (12), то выполняется (7) при $s = l$, $t = m+1$, поэтому уравнение сопряженно на отрезке $[m,l]$ в силу теоремы 1.

Отметим, что утверждение следствия 1 является утверждением теоремы 5 из работы [5], которая доказана довольно сложным образом с помощью "техники Рикатти". Утверждение следствия 1 можно доказать непосредственно, не ссылаясь на теорему 1. Для этого достаточно набор чисел $\tilde{x} = \{x_i\}_m^{l+1}$ задать в виде $x_i = 1$, $i = m+1, m+2, \ldots, l$, и $x_m = 0$, $x_{l+1} = 0$.

Следствие 2. *Пусть* $1 \leq m < l < \infty$. *Если существует* $t \in [m+1,l]$ *такой, что* $b_t \geq \varphi_{t,m} + \varphi_{t,l}$, *то уравнение (1) сопряженно на отрезке* $[m,l]$.

Теорема 2. *Если для любого целого* $m \geq 1$ *существуют целые* $s,t : s \geq t > m$ *такие, что*

$$\sum_{i=t}^{s} b_i > \varphi_{t,m}^- + \varphi_s^+, \tag{13}$$

то уравнения (1) осцилляторно.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условия теоремы 2.

Тогда из определения $\varphi_{t,m}^-, \varphi_s^+$ и из (13) следует, что существуют целое $k : m+1 \leq k \leq t$, целое $n : s \leq n$ такие, что выполняется (8).

Введем последовательность $\tilde{x} = \{\tilde{x}_i\}_{i\geq 1}$, определяя $\tilde{x}_i$ при $k \leq i \leq n$ как в (9) и $\tilde{x}_i = 0$ при $m \leq i \leq k-1$ и при $i \geq n+1$. Тогда, очевидно, что $\tilde{x} \in \overset{\circ}{X}_m$. Вычисляя $\Delta\tilde{x}_i, i \geq 1$, как в теореме 1, имеем:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i|\Delta\tilde{x}_i|^p = \left(\sum_{i=k-1}^{t-1} a_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{n} a_i^{1-p'}\right)^{1-p}, \tag{14}$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_{i+1}|\tilde{x}_{i+1}|^p = \sum_{i=k}^{n} b_i|\tilde{x}_i|^p \geq \sum_{i=t}^{s} b_i - \sum_{i=k}^{t-1} b_i^- - \sum_{i=s+1}^{n} b_i^- . \tag{15}$$

Тогда, из (14) и (15), на основании (8) как при доказательстве теоремы 1 получим, что выполнено (6):

$$\sum_{i=m}^{\infty}(a_i|\Delta\tilde{x}_i|^p - b_{i+1}|\tilde{x}_{i+1}|^p) \leq 0.$$

Следовательно, в силу теоремы В, уравнение (1) осцилляторно. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Если существуют три последовательности натуральных чисел* m_k, t_k, s_k : $m_k < t_k \le s_k, k \ge 1$ *такие, что* $m_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$ *и*

$$\sum_{i=t_k}^{s_k} b_i > \varphi^-_{t_k,m_k} + \varphi^+_{s_k},\ \forall k \ge 1, \tag{16}$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Следствие 4. *Если существуют две последовательности натуральных чисел* m_k, s_k : $s_k \ge m_k + 1, k \ge 1$, *такие, что* $m_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$ *и*

$$\sum_{i=m_k+1}^{s_k} b_i \ge a_{m_k} + a_{s_k},\ \forall k \ge 1, \tag{17}$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Следствие 4 вытекает из следствия 3, так как в силу $\varphi_{m_k+1,m_k} = a_{m_k}$, $\varphi^+_{s_k} < a_{s_k}$ из (17) следует (16).

Отметим, что утверждение следствия 4 является основным содержанием теоремы 8.2.17 из [1].

Следствие 5. *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{1-p'} = \infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$. *Если для любого* $m \ge 1$

$$\sup_{t \ge m+1} (\varphi^-_{t,m})^{-1} \sum_{i=t}^{\infty} b_i > 1,$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Доказательство следствия 5. Пусть m_k, $k \ge 1$, последовательность натуральных чисел такая, что $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Для m_k по определению sup существует $t_k \ge m_k + 1$ такой, что

$$\sum_{i=t_k}^{\infty} b_i > \varphi^-_{t_k,m_k}.$$

Так как $\varphi^+_s \le \lim\limits_{j\to\infty} \left\{ \sum\limits_{i=s+1}^{j} b_i^- + (\sum\limits_{i=t}^{j} a_i^{1-p'})^{1-p} \right\} = \sum\limits_{i=s+1}^{\infty} b_i^-$, то $\varphi^+_s \to 0$ при $s \to \infty$. Поэтому существует целое $s_k \ge t_k$ такое, что

$$\sum_{i=t_k}^{s_k} b_i > \varphi^-_{t_k,m_k} + \varphi^+_{s_k}.$$

Следовательно, по следствию 4 уравнение (1) осцилляторно.

Аналогично из следствия 5 имеем

Следствие 6. *Пусть* $a_k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *сходится. Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k^{-1} \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} b_j > 1$, *то уравнение (1) осцилляторно.*

Следствие 7. *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{1-p'} < \infty$. *Если для любого* $t \ge 1$ $\sup\limits_{s>t} (\varphi^+_s)^{-1} \sum\limits_{i=t}^{s} b_i > 1$, *то уравнение (1) осцилляторно.*

Доказательство следствия 7. По определению sup существует $s_t \ge t$ такой, что $(\varphi^+_{s_t})^{-1} \sum\limits_{i=t}^{s_t} b_i > 1$.

По определению $\varphi_{s_t}^+$ существует $j_s \geq s_t$ такой, что

$$\varphi_{s_t}^+ + 1 \geq \sum_{i=s_t+1}^{j_s} b_i^- + \left(\sum_{i=s_t}^{j_s} a_i^{1-p'} \right)^{1-p} \geq \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=s_t}^{\infty} a_i^{1-p'} \right)^{p-1}} .$$

Откуда следует, что $\varphi_{s_t}^+ \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда существует $s_{t_1} \geq t$ такой, что

$$\left(\varphi_{s_{t_1}}^+ \right)^{-1} \sum_{i=t}^{s_{t_1}} b_i > \frac{\varphi_{t,m}^-}{\varphi_{s_{t_1}}^+} + 1.$$

Откуда $\sum\limits_{i=t}^{s_{t_1}} b_i > \varphi_{t,m}^- + \varphi_{s_{t_1}}^+$ для любого $t > m \geq 1$. Следовательно, по следствию 3 уравнение (1) осцилляторно.

Аналогично доказывается следующее

Следствие 8. *Пусть $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Если для любого $m \geq 1$ $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} a_s^{-1} \sum\limits_{j=m+1}^{s} b_j > 1$, то уравнение (1) осцилляторно.*

Цитированная литература

1. **Dosly O., Rehak P.** Half-linear differential equations, North-Holland, Math. Studies, 2005.
2. **Rehak P.** //Czech. Math. J 2001. Vol. 51 (126). P. 303–321.
3. **Алимагамбетова А.З., Ойнаров Р.** //Матем.журнал. Алматы, 2007. Т. 7, № 1(23). С. 15–24.
4. **Алдай М., Ойнаров Р.** //Евразийский математический журнал. 2008. № 1. С. 37–46.
5. **Rehak P.** //Journal Math.Anal. and Appl. 2000. V. 252. P. 813–827; V. 34. P. 257–269.

Поступила в редакцию 31.05.2010г.

УДК 517.956, 517.977.1/.5

ОБ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, К. Б. Иманбердиев

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 dzhenali@math.kz
КазНУ им. аль-Фараби
050012 Алматы Масанчи, 39/47 kanzharbek-ikb@mail.ru

В ограниченной двумерной прямоугольной области рассматривается задача Коши-Дирихле для уравнения Пуассона с дополнительным условием. Изучаемая проблема сведена к задаче оптимального управления. В терминах решения сопряженной граничной задачи установлены необходимые и достаточные условия оптимальности, которые применяются к вопросу сильной разрешимости некорректной граничной задачи.

Введение. В последнее время среди специалистов по уравнениям математической физики значительно возрос интерес к задачам, не являющимися корректными по J.Hadamard [1]. Они всегда привлекали внимание исследователей. Здесь можно отметить классические работы J.Hadamard [1], А.Н.Тихонова [2], М.М.Лаврентьева [3] и многих других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

В данной работе для решения некорректной задачи с дополнительным условием применяются методы теории оптимального управления.

1. Постановка задачи. В области $\Omega = \{x,t|\ 0 < x < \pi,\ -1 < t < 1\}$ рассматривается следующая задача:

$$y_{tt}(x,t) + y_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in (-1,1), \tag{1}$$

$$y(0,t) = 0,\ y(\pi,t) = 0, \tag{2}$$

$$y(x,-1) = \varphi_1(x),\ y_t(x,-1) = \varphi_2(x), \tag{3}$$

$$y_t(x,1) \in \mathscr{U}_g - \text{выпуклое замкнутое множество из } L_2(0,\pi). \tag{4}$$

Дополнительное условие определяется соотношением (4). Будем предполагать, что данные в задаче (1)–(4) удовлетворяют условиям:

$$f \in L_2(\Omega),\ \varphi_1 \in H_0^1(0,\pi),\ \varphi_2 \in L_2(0,\pi). \tag{5}$$

Keywords: *spectral problem, eigenfunction, spectrum*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

В книге R.Lattes, J.-L.Lions [4] указывается, что задача (1)–(3) является некорректно поставленной в пространстве $L_2(\Omega)$ (по этому поводу см. также работу [5, гл.9, с.253–268]).

Отметим, что критерий корректности однородной смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона в прямоугольной области был установлен в работе Кальменова Т.Ш. и Исказовой У.А. [6] В ней критерий корректности был получен в терминах собственных значений и коэффициентов разложения правой части уравнения по полной ортонормированной системе собственных функций некоторого семейства обобщенных спектральных задач с наличием оператора отклонения-инвертирования по одной из двух независимых переменных. В работе [7] рассматривается некорректная задача для уравнения теплопроводности. Общий метод регуляризации построения приближенного решения некорректных задач математической физики был предложен Тихоновым А.Н. [2]. В работе R.Lattes и J.-L.Lions [4] для регуляризации некорректно поставленных краевых задач предлагается метод квазиобращения путем замены исходного уравнения семейством вспомогательных (имеющих более высокий дифференциальный порядок) с малым параметром, для каждого из которых решается корректная граничная задача. Особенности и вопросы регуляризации задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучают Melnikova I.V. и Anufrieva U.A. [8], где на основе применения методов полугрупп ими получены алгоритмы построения точных и регуляризованных решений.

2. Задача оптимизации. Поставим в соответствие задаче (1)–(4) следующую оптимизационную задачу:

$$y_{tt}(x,t) + y_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{6}$$

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \tag{7}$$

$$y_t(x,-1) = \varphi_2(x),\ y_t(x,1) = \psi(x), \tag{8}$$

функционал оптимальности:

$$\mathcal{J}(\psi) = \int\limits_0^\pi |y_x(x,-1) - \varphi_1'(x)|^2 dx \to \min_{\psi\in\mathscr{U}_g}, \tag{9}$$

где ψ играет роль функции управления.

Как известно из теории оптимального управления задача (6)–(9) также является некорректной.

3. Регуляризация задачи оптимизации. Эффективным инструментом решения некорректной задачи является метод регуляризации. В нашем случае функционал $\alpha\cdot\int\limits_0^\pi|\psi(x)|^2dx$ ($\alpha>0$) может служить стабилизатором.

Рассмотрим задачу минимизации функционала:

$$\mathcal{J}_\alpha(\psi) = \int\limits_0^\pi |y_x(x,-1) - \varphi_1'(x)|^2 dx + \alpha\int\limits_0^\pi |\psi(x)|^2 dx \to \min_{\psi\in\mathscr{U}_g}. \tag{10}$$

Для задачи оптимизации (6)–(8) и (10) необходимо получить условия оптимальности.

Определение 1. *Элемент* $\overline{\psi}\in L_2(0,\pi)$ *, удовлетворяющий условию*

$$\mathcal{J}\left(\overline{\psi}\right) = \inf_{\psi\in\mathscr{U}_g}\mathcal{J}(\psi),$$

назовем оптимальным.

Ведем следующие обозначения:

$y(x,t;\psi)$ – есть решение задачи (6)–(8), соответствующее заданному управлению $\psi(x) \in \mathscr{U}_g$;

$y(x,t;0)$ соответствует решению задачи (6)–(8) при $\psi(x) \equiv 0$;

$$\pi(\psi_1,\psi_2) = \int\limits_0^\pi [y_x(x,-1;\psi_1) - y_x(x,-1;0)]\times$$
$$\times [y_x(x,-1;\psi_2) - y_x(x,-1;0)]dx + \alpha\cdot\int\limits_0^\pi \psi_1(x)\cdot\psi_2(x)dx;$$

$$L(\psi_1) = \int\limits_0^\pi [\varphi_1'(x) - y_x(x,-1;0)][y_x(x,-1;\psi_1) - y_x(x,-1;0)]dx,$$

здесь $\pi(\psi_1,\psi_2)$ – билинейная непрерывная форма на $\mathscr{U}_g$, а $L(\psi_1)$ – линейная непрерывная форма на $\mathscr{U}_g$. Используя эти обозначения, функционал (10) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{J}_\alpha(\psi) = \pi(\psi,\psi) - 2L(\psi) + \int\limits_0^\pi |y_x(x,-1;0) - \varphi_1'(x)|^2dx.$$

4. Существование решения регуляризованной задачи и вариационное неравенство. Справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. *Так как $\pi(\psi,\psi)$ – билинейная непрерывная симметричная форма на $\mathscr{U}_g$, удовлетворяющая условию*

$$\pi(\psi,\psi) \geq c\|\psi\|^2, \quad (c = \text{const} > 0),$$

то для задачи (6)–(8), (10) найдется такой элемент $\overline{\psi} \in \mathscr{U}_g$:

$$\mathcal{J}(\overline{\psi}) = \inf_{\psi\in\mathscr{U}_g} \mathcal{J}(\psi),$$

и этот элемент будет единственным.

Решение задачи (6)–(8), (10) обозначим:

$$\overline{\psi}(x) = \arg\min_{\psi\in\mathscr{U}_g} \mathcal{J}_\alpha(\psi).$$

Согласно результатам работы [9] справедливо следующее

Утверждение 1. *$\overline{\psi} \in \mathscr{U}_g$ является функцией оптимального управления, тогда и только тогда, когда выполняется следующее неравенство:*

$$\left\langle \mathcal{J}_{\alpha\psi}\left(\overline{\psi}\right), \psi - \overline{\psi}\right\rangle \geqslant 0,\ \ \forall\ \psi \in \mathscr{U}_g,$$

т.е. выполняется:

$$\int\limits_0^\pi \left[y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right) - \varphi_1'(x)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{y_\psi\left(x,-1;\overline{\psi}\right)\cdot\left[\psi(x) - \overline{\psi}(x)\right]\right\}dx +$$
$$+\alpha\cdot\int\limits_0^\pi \overline{\psi}(x)\cdot\left[\psi(x) - \overline{\psi}(x)\right]dx \geqslant 0,\ \ \forall\ \psi \in \mathscr{U}_g. \quad (11)$$

Преобразуем неравенство (11). Для этого производную решения $y(x,t;\psi)$ граничной задачи (6)–(8) по направлению $\psi-\overline{\psi}$ представим в виде:

$$y_\psi\left(x,t;\overline{\psi}\right)\cdot\left[\psi-\overline{\psi}\right]=y(x,t;\psi)-y\left(x,t;\overline{\psi}\right).$$

Таким образом, неравенство (11) принимает вид:

$$\int\limits_0^\pi\left[y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right)-\varphi_1'(x)\right]\cdot\left[y_x(x,-1;\psi)-y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right)\right]dx+$$
$$+\alpha\cdot\int\limits_0^\pi\overline{\psi}(x)\cdot\left[\psi(x)-\overline{\psi}(x)\right]dx\geqslant 0,\ \ \forall\,\psi\in\mathscr{U}_g. \quad (12)$$

5. Сопряженная граничная задача. Введем сопряженную задачу:

$$\left\{\begin{array}{l} v_{tt}(x,t)+v_{xx}(x,t)=0,\ \ x\in(0,\pi),\ \ t\in(-1,1);\\ v(0,t)=v(\pi,t)=0,\ \ t\in(-1,1);\\ \int\limits_\eta^x v_t(\xi,-1)d\xi=-y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right)+\varphi_1'(x)+y_\eta\left(\eta,-1;\overline{\psi}\right)-\varphi_1'(\eta),\\ \forall\ 0<\eta<x<\pi,\ \ v_t(x,1)=0, \end{array}\right. \quad (13)$$

и рассмотрим следующее выражение

$$\int\limits_{-1}^1\int\limits_0^\pi\left[\tilde{y}_{tt}\left(x,t\right)+\tilde{y}_{xx}\left(x,t\right)\right]\cdot v(x,t;\overline{\psi})dxdt=0,$$

где $\tilde{y}(x,t)=y(x,t;\psi)-y(x,t;\overline{\psi})$. Преобразуя это выражение, находим:

$$\int\limits_{-1}^1\int\limits_0^\pi[\tilde{y}_{tt}(x,t)+\tilde{y}_{xx}(x,t)]\cdot v(x,t;\overline{\psi})dxdt=\int\limits_0^\pi[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]v(x,1;\overline{\psi})dx+$$
$$+\int\limits_0^\pi\left[y\left(x,-1;\psi\right)-y\left(x,-1;\overline{\psi}\right)\right]\cdot v_t(x,-1;\overline{\psi})dx=0. \quad (14)$$

6. Условия оптимальности. Используя равенство $\int\limits_\eta^x v_t(\xi,-1)d\xi=-y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right)+\varphi_1'(x)+y_\eta\left(\eta,-1;\overline{\psi}\right)-\varphi_1'(\eta),\ \forall\ 0<\eta<x<\pi,$ перепишем выражение (14) в виде:

$$\int\limits_0^\pi[y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right)-\varphi_1'(x)]\cdot[y_x\left(x,-1;\psi\right)-y_x\left(x,-1;\overline{\psi}\right)]dx=-\int\limits_0^\pi v(x,1)\cdot[\psi(x)-\overline{\psi}(x)]dx. \quad (15)$$

Из соотношений (15) и (12) придем к неравенству:

$$\int\limits_0^\pi\left[-v(x,1;\overline{\psi})+\alpha\cdot\overline{\psi}(x)\right]\cdot\left[\psi(x)-\overline{\psi}(x)\right]dx\geqslant 0,\ \ \forall\,\psi\in\mathscr{U}_g. \quad (16)$$

Таким образом, получаем условия оптимальности в виде утверждения:

Утверждение 2. *Чтобы элемент* $\overline{\psi}$ *был оптимальным решением в задаче (6)–(8) и (10), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (6)–(8), (13) и вариационному неравенству (16).*

7. Применение метода разделения переменных. Для разрешения условий оптимальности (6)–(8), (13) и (16) используем метод разделения переменных. Будем искать решения граничных задач (6)–(8) и (13) в виде

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)X_k(x), \quad v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)X_k(x),$$

где

$$X_k(x)=\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi/2}}, \quad \lambda_k=k^2, \;\; k=1,2,..., \tag{17}$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи:

$$-X''(x)=\lambda\cdot X(x), \quad X(0)=X(\pi)=0.$$

Из (6)–(8), (13) и (16) соответственно получаем:

$$\begin{cases} y_k''(t)-k^2y_k(t)=f_k(t), \; t\in(-1,1), \\ y_k'(-1)=\varphi_{2k}; \;\; y_k'(1)=\overline{\psi}_k; \;\; k=1,2,..., \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} v_k''(t)-k^2v_k(t)=0, \;\; t\in(-1,1), \\ v_k'(-1)=k^2[y_k(-1)-\varphi_{1k}]; \;\; v_k'(1)=0; \;\; k=1,2,..., \end{cases} \tag{19}$$

$$\left[-v_k(1)+\alpha\cdot\overline{\psi}_k\right]\cdot\left[\psi_k-\overline{\psi}_k\right]\geqslant 0, \quad \text{для } \forall\; \psi_k, \; k=1,2,..., \tag{20}$$

где $f_k(t)$, φ_{1k}, φ_{2k}, $\overline{\psi}_k$, ψ_k, $k=1,2,...,$ — коэффициенты Фурье функций $f(x,t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\overline{\psi}(x)$, $\psi(x)$ по системе (17).

Выпишем решения граничных задач (18) и (19):

$$y_k(t)=\overline{\psi}_k\cdot\frac{\operatorname{ch}k(t+1)}{\operatorname{sh}2k}-\varphi_{2k}\cdot\frac{\operatorname{ch}k(1-t)}{k\operatorname{sh}2k}+\int\limits_{-1}^{1}G_k(t,\tau)\cdot f_k(\tau)d\tau; \tag{21}$$

$$v_k(t)=-[y_k(-1)-\varphi_{1k}]\cdot\frac{k\operatorname{ch}k(1-t)}{\operatorname{sh}2k}; \tag{22}$$

где

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases} -\dfrac{\operatorname{ch}k(1-t)\cdot\operatorname{ch}k(1+\tau)}{\operatorname{sh}2k}, \; -1<\tau<t<1; \\ -\dfrac{\operatorname{ch}k(1-\tau)\cdot\operatorname{ch}k(1+t)}{\operatorname{sh}2k}, \; -1<t<\tau<1. \end{cases}$$

Из (21)–(22) и (20) находим:

$$-v_k(1)=[y_k(-1)-\varphi_{1k}]\cdot\frac{k}{\operatorname{sh}2k},$$

$$y_k(-1;\overline{\psi}_k)=-\varphi_{2k}\frac{\operatorname{cth}2k}{k}+\overline{\psi}_k\frac{1}{\operatorname{sh}2k}+\int\limits_{-1}^{1}G_k(-1,\tau)f_k(\tau)d\tau,$$

$$\left[A_{k\alpha}\overline{\psi}_k - \varphi_{1k} - \varphi_{2k}\frac{\operatorname{cth} 2k}{k} + \int\limits_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) f_k(\tau) d\tau\right] \cdot \left[\psi_k - \overline{\psi}_k\right] \geq 0 \quad \text{для} \quad \forall\ \psi_k. \tag{23}$$

где $A_{k\alpha} = \dfrac{k + \alpha \operatorname{sh}^2 2k}{k \operatorname{sh} 2k}$, $k = 1, 2, ...$

8. Применение к некорректной задаче. Теперь освободимся от дополнительного условия (4), т.е. рассмотрим некорректную граничную задачу Коши-Дирихле для уравнения Пуассона (1)–(3).

Так как для функций $\psi(x)$ нет ограничений, кроме принадлежности пространству $L_2(0,\pi)$, то из (23) находим оптимальные значения Фурье-коэффициентов $\overline{\psi}_k$, $k = 1, 2, ...$:

$$\overline{\psi}_k = A_{k\alpha}^{-1}\left[\varphi_{1k} + \varphi_{2k}\frac{\operatorname{cth} 2k}{k} - \int\limits_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) f_k(\tau) d\tau\right]. \tag{24}$$

Далее, при $\alpha \to 0$ из (21) и (24) имеем:

$$y_{k0}(t) = \lim_{\alpha \to 0} y_k(t) = \varphi_{1k} \operatorname{ch} k(1+t) + \varphi_{2k}\frac{\operatorname{sh} k(1+t)}{k} -$$

$$-\operatorname{ch} k(1+t)\int\limits_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) f_k(\tau) d\tau + \int\limits_{-1}^{1} G_k(t,\tau) \cdot f_k(\tau) d\tau, \tag{25}$$

$$\overline{\psi}_{k0} = \lim_{\alpha \to 0} \overline{\psi}_k = \varphi_{1k} \operatorname{sh} 2k + \varphi_{2k}\frac{\operatorname{ch} 2k}{k} - \operatorname{sh} 2k\int\limits_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) f_k(\tau) d\tau. \tag{26}$$

Кроме того, решения $y_k(t)$, найденные по формуле (21) в соответствии с оптимальными коэффициентами Фурье $\overline{\psi}_k$, $k = 1, 2, ...$ (24), должны удовлетворять предельным соотношениям: $\lim\limits_{\alpha \to 0} y_k(-1) = \varphi_{1k}$, которые действительно имеют место. Это согласуется с условием $y(x,-1) = \varphi_1(x)$ из (3).

Таким образом, для нахождения точного решения задачи (6)–(9) в соответствии (26) составим следующее выражение:

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2/\pi} \operatorname{sh} 2k\left[\varphi_{1k} + \varphi_{2k}\frac{\operatorname{cth} 2k}{k} - \int\limits_{-1}^{1} G_k(-1,\tau) f_k(\tau) d\tau\right] \sin kx,$$

а для исходной задачи Коши-Дирихле (1)–(3) получим решение на основе формул (25).

Из равенств (25) и (26) непосредственно следует:

во-первых, что с ростом индекса k и при $\alpha \to 0$ коэффициенты Фурье функции $\overline{\psi}(x)$ и соответственно решение $y_k(t)$ могут неограниченно возрастать, если этот рост не будет "подавляться" соответствующим более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ и значений норм $\|f_k(t)\|_{L_2(-1,1)}$;

во-вторых, что граничная задача (1)–(3) при условиях (5) имеет единственное L_2-сильное решение [10], тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &\{\exp\{2k\} \cdot \varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{k^{-1}\exp\{2k\} \cdot \varphi_{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}, \\ &\left\{\exp\{2k\} \cdot \|f_k(\tau)\|_{L_2(-1,1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset l_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, становиться ясным не только смысл регуляризации в задаче (6)–(8) и (10), но и природа некорректности в задаче Коши-Дирихле (1)–(3) [6, 7]. А регуляризация позволяет найти приближенное решение.

В-третьих, рассмотрим пример Адамара [11, с.37]. Для того чтобы получить аналог примера Адамара в задаче (1)–(3) необходимо принять:

$$f(x,t)=0,\ \varphi_1(x)=0,\ \varphi_2(x)=\sqrt{2/\pi}\cdot k\cdot\exp\{-\sqrt{k}\}\sin kx,\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Действительно, решение задачи Коши-Дирихле для уравнения Лапласа будет иметь вид:

$$y(x,t)=\sqrt{2/\pi}\cdot\exp\{-\sqrt{k}\}\sin kx\cdot\operatorname{sh}k(t+1),\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Это решение задачи в рассматриваемом нами примере Адамара единственно. Более того, при $k\to\infty$ функция $\varphi_2(x)$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все ее производные и принадлежит пространству $L_2(0,\pi)$. Однако решение (28) при любом $t>-1$ имеет вид синусоиды со сколь угодно большой амплитудой и не принадлежит пространству $L_2((0,\pi)\times(-1,1))$.

Для того чтобы функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяло условию (27), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье φ_{2k} имели асимптотику для больших k порядка $\exp\{-(2+\varepsilon)k\}$, где $\varepsilon>0$. В рассматриваемом нами примере Адамара имеем асимптотику всего лишь равную $\exp\{-\sqrt{k}\}$, что явно недостаточно для корректности задачи Коши-Дирихле для уравнения Пуассона.

Цитированная литература

1. **Адамар Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

2. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М., 1979.

3. **Лаврентьев М.М.** //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.

4. **Lattes R., Lions J.-L.** Methode de quasireversibilite et applications. Paris, 1967.

5. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство. Новосибирск, 2009.

6. **Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.** //Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.

7. **Дженалиев М.Т., Кальменов Т.Ш., Рамазанов М.И.** //Материалы "Совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям". (Алматы, 16–18 марта 2009). Алматы: КазНУ им.аль-Фараби, 2009. С. 162–167.

8. **Melnikova I. V., Anufrieva U. A.** //Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 148, № 4. P. 481–632.

9. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описывемыми уравнениями с частными производными. Москва, 1972.

10. **Дезин А.А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.

11. **Соболев С.Л.** Уравнения математической физики. М., 1966.

Поступила в редакцию 23.06.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 26—29*

УДК 518.9

СТРАТЕГИИ ИГРОКОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ

С. Н. Амиргалиева

Казахстанско-Британский Технический Университет
050000 Алматы Толе би, 59 s.amirgalieva@kbtu.kz

В статье рассмотрены стратегии игроков в дифференциальной игре, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Характерная особенность дифференциальных игр заключается в том, что игроки не знают действия противника в будущем. Исследованы стратегии игроков, использующие ту или иную информацию о текущей позиции и о действиях противника в игре с терминальным множеством.

Существует возможность ввести целый ряд новых эквивалентных определений ε – стратегий. В статье остановимся на одном из них и исследуем игру в этих стратегиях. Используя модификации ε – стратегий можно доказать теорему об альтернативе, аналогичную [1], согласно которой пространство игры разбивается на два подмножества. Первое подмножество описывает все начальные позиции, благоприятные для игрока P, второе – для игрока E.

Рассмотрим динамику игры, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, v), \tag{1}$$

где $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$, U и V – компакты в евклидовых пространствах.

Параметрами U и V распоряжаются соответственно игроки P (догоняющий) и E (убегающий). Под допустимыми управлениями игроков P и E будут пониматься функции $u(t)$ и $v(t)$ со значениями в U и V соответственно. Множество всех допустимых управлений игроков P и E, определенных на отрезке $[a, b]$ (полуинтервале $[a, b)$), будем соответственно обозначать через $U[a, b]$ и $V[a, b]$ ($U[a, b)$ и $V[a, b)$).

Считаем, что в дальнейшем функция f и множества U и V удовлетворяют следующим предположениям.

Предположение 1. *Функция $f(z, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных и локально Липшицева по z (т.е. удовлетворяет условию Липшица по z на каждом компакте $K \subset E^n$ с константой L_K, зависящей от K).*

Предположение 2. *Существует константа $C \geq 0$ такая, что для всех $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$*

Keywords: *Differential game, strategy, terminal set*
2000 Mathematics Subject Classification: 49M40, 91A23

$$|\langle z, f(z,u,v)\rangle| \leq C(1+\|z\|^2).$$

Предположение 3. *Множество $f(z,U,v)$ выпукло для всех $z \in E^n$, $v \in V$.*

Предположения 1 и 2 гарантируют существование, единственность и продолжимость решения $z(t)$ уравнения (1) на всю полуось $[0,+\infty)$ при произвольном начальном условии $z(0)=z_0$ и при подстановке в (1) вместо параметров u и v любых допустимых уравнений $u(t)$ и $v(t)$ игроков P и E соответственно.

Будем обозначать решение $z(t)$ уравнения (1), соответствующее $u(t)$, $v(t)$ и начальному условию $z(0)=z_0$ через

$$z(t|u(\cdot),v(\cdot),z_0).$$

Рассмотрим произвольный интервал $[0,\theta]$, $\theta < +\infty$. Предположение 3 гарантирует в топологии равномерной сходимости на отрезке $[0,\theta]$ компактность множества решений, соответствующих различным допустимым управлениям $u(\cdot)$ игрока P и начальной позиции z_0. Сказанное остается в силе, если начальная позиция z_0 не фиксирована и пробегает некоторое компактное множество $K \subset E^n$.

Из описанного свойства следует, что, если $u_k(\cdot) \in U[0,\theta]$, $x_k \in K$, $k=1,2,...$, – некоторые последовательности и

$$z_k(t) = z(t|u_k(\cdot),v(\cdot),x_k)$$

– последовательность соответствующих решений уравнения (1), то существует подпоследовательность $\{\,z_{k_m}(\cdot)\}$ последовательности $\{\,z_k(\cdot)\}$, которая равномерно на $[0,\theta]$ сходится к функции $z_0(\cdot)$. Причем существуют такие $u(\cdot) \in U[0,\theta]$, $x \in K$, что

$$z_0(t) = z(t|u(\cdot),v(\cdot),x).$$

Данное утверждение справедливо, если рассматривать не последовательности, а направленности [1].

Рассмотрим игры с терминальным множеством, где цели игроков описываются с помощью терминального множества $M \subset E^n$ и множества фазовых ограничений $N \subset E^n$. Множества M и N предполагаются замкнутыми, причем $M \subset N$.

Зафиксируем момент $\theta > 0$. Цель игрока P состоит в том, чтобы добиться включений $z(\theta) \in M$, $z(t) \in N$, для всех $t \in [0,\theta]$, т.е. вывести траекторию $z(t)$ на M в момент θ, удержав ее во множестве N. Цель игрока E – противоположная и состоит в том, чтобы добиться условий: либо $z(\theta) \notin M$, либо для некоторого $t < \theta$ $z(t) \notin N$.

В играх с терминальным множеством M и N выбираются не произвольными, а замкнутыми подмножествами в E^n. Это делается для удобства построения соответствующего математического аппарата.

Игрок E будет выбирать свое текущее управление, пользуясь в основном знанием текущей позиции.

Для игрока P используются различные стратегии. Это ε-стратегии [1], в которых предполагается наибольшая информационная дискриминация противника: игрок E сообщает свое управление игроку P на некоторое время $\varepsilon > 0$ вперед. Кроме того, игрок P пользуется информацией о текущей позиции. Поскольку параметром ε распоряжается игрок E, то ε-стратегии эквивалентны стратегиям, в которых игрок P выбирает свое текущее управление, зная начальную позицию и всю предысторию действий противника. Эти стратегии строятся на основе некоторых вольтерровских отображений. Частным случаем последних стратегий являются стратегии, в которых игрок P выбирает свое текущее управление, зная начальную позицию и текущее управление противника. Такую стратегию будем называть контрстратегией [2].

Определение 1. *Через P_ε, $\varepsilon \geq 0$, обозначим оператор, который ставит в соответствие каждому замкнутому множеству $M \subset E^n$ множество $P_\varepsilon M$ всех точек $z_o \in E^n$ таких, что для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, игрока E существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, игрока P, такое что для соответствующего решения $z(t) = z(t|u(\cdot), v(\cdot), z_0)$ уравнения (1) с началом в z_0 выполняется включение $z(\varepsilon) \in M$, т.е. траектория $z(t)$ с началом в z_0 попадает на M в момент ε.*

Формально с помощью операций объединения и пересечения оператор P_ε можно описать следующим образом:

$$P_\varepsilon M = \bigcap_{v(\cdot) \in V[0,\varepsilon]} \bigcup_{u(\cdot) \in U[0,\varepsilon]} \{z_0 \in E^n : z(\varepsilon|u(\cdot), v(\cdot), z_0) \in M\}. \tag{2}$$

Замечание 1. *В определении 1 можно считать, что управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ определены только на полуоткрытом интервале $[0, \varepsilon)$, поскольку изменение значений управлений $u(t)$ и $v(t)$ в одной точке не изменяет траекторию. При этом решение $z(t)$, определенное на $[0, \varepsilon)$, всегда можно единственным образом непрерывно продлить на отрезок $[0, \varepsilon]$, положив $z(\varepsilon) = \lim\limits_{t \to \varepsilon} z(t)$.*

Замечание 2. *Множество $P_\varepsilon M$ можно интерпретировать как множество начальных позиций z_0, начиная из которых игрок P может вывести траекторию $z(t)$ на M в момент ε, зная управление $v(t)$ игрока E наперед на всем интервале $[0, \varepsilon]$. Если же $z_o \notin P_\varepsilon M$, то существует такое управление игрока E, что для всех допустимых управлений игрока P справедливо $z(\varepsilon) \notin M$. В этом случае стратегии игроков являются программными, т.е. они выбирают свои управления сразу на всем интервале $[0, \varepsilon]$. При этом игрок E знает z_0, а игрок P пользуется информацией о z_0 и о уже выбранном управлении $v(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$.*

Лемма 1. *Множество $P_\varepsilon M$ является замкнутым для множества M.*

Опишем стратегии и ход игры. Характерной чертой ε- стратегий является то, что игрок P пользуется информацией о будущем управлении игрока E на некотором временном интервале, длина которого определяется игроком E.

Рассмотрим некоторое неформальное описание хода игры. Игра может проходить на конечном отрезке $[0, \theta]$ или на бесконечной полуоси $[0, +\infty)$. В первом случае игрок E в начальный момент времени выбирает конечное разбиение $\omega = \{\tau_0 = 0 \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_k = \theta\}$ отрезка $[0, \theta]$, во втором случае игрок E выбирает разбиение $\omega = \{\tau_0 = 0 \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_k \leq ...\}$ полуоси $[0, +\infty)$ точками τ_i, не имеющими точек сгущения.

Пусть в момент τ_{i-1} динамическая система находится в точке $z(\tau_{i-1})$, $i = 1, 2, ...$ Пользуясь этой информацией игрок E выбирает свое управление $v_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$. Считаем, что игрок P знает τ_{i-1}, $z(\tau_{i-1})$ и $v_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$ и выбирает свое управление $u_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$. Подставляя $v_i(t)$ и $u_i(t)$ в (1) можно найти решение $z(t)$ уравнения (1) с началом в $z(\tau_{i-1})$. В силу Липшицевости $z(t)$ это решение можно продлить на отрезок $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Таким образом, динамическая система в момент τ_i находится в точке $z(\tau_i)$ и повторяем процесс дальше. Поскольку число точек τ_i либо конечно, либо они не имеют точек сгущения, то с помощью описанного процесса строится решение уравнения (1) на всем отрезке $[0, \theta]$ или на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Отметим, что в ходе игры игрок P в каждый момент τ_{i-1} знает управление игрока E на время $\varepsilon_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ вперед, т.е. возникает информационная дискриминация игрока E.

Опишем формальное определение ε-стратегий [1].

Определение 2. *ε-стратегией игрока P называется отображение $\Gamma_P(z, \tau, v(\cdot), \varepsilon)$, которое точке $z \in E^n$, моменту $\tau \geq 0$, числу $\varepsilon > 0$ и управлению $v(\cdot) \in V[0, \varepsilon)$ ставит в соответствие управление $u(\cdot) \in U[0, \varepsilon)$.*

Определение 3. *Под ε- стратегией игрока E называется пара объектов: разбиение $\omega = \{\tau_0 = 0 \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_k \leq ...\}$, точками τ_i, не имеющими точек сгущения и отображения $\Gamma_E(z, i)$, которое ставит в соответствие точке $z \in E^n$ и целому числу $i > 0$ управление $v(\cdot) \in V[0, \varepsilon_i)$, где $\varepsilon_i = \tau_i - \tau_{i-1}$.*

Опишем теперь формально ход игры, применяя определенные выше ε-стратегии. Таким образом, считаем, что заданы отображения Γ_P, Γ_E и разбиение ω.

Пусть z_0 – начальная позиция. В момент $\tau_0 = 0$ игрок E выбирает допустимое управление:

$$v(t) = \Gamma_E(z_0, 1)(t), t \in [0, \varepsilon_i).$$

Игрок P, зная z_0, $\tau = \tau_0 = 0$, ε_1 и $v(t)$, $[0, \varepsilon_1)$, строит на интервале $[0, \varepsilon_1)$ управление:

$$u(t) = \Gamma_P(z_0, 0, v(\cdot), \varepsilon_1)(t), t \in [0, \varepsilon_1).$$

Пусть $z(t)$ – решение (1), соответствующее $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ с началом в z_0 на интервале $[0, \varepsilon_1)$. Это решение можно продолжить на интервал $[0, \varepsilon_1]$. В момент τ_1 возьмем точку $z(\tau_1)$ за начальную и повторим описанный процесс.

В результате к моменту τ_i будут построены управления $u(t)$ и $v(t)$ на интервале $[0, \tau_i)$ и траектория $z(t)$ на интервале $[0, \tau_i]$. В момент τ_i игрок E выбирает управление:

$$v(t + \tau_i) = \Gamma_E(z(\tau_i), i + 1)(t), t \in [0, \varepsilon_{i+1}),$$

а игрок P – управление:

$$u(t + \tau_i) = \Gamma_P(z(\tau_i), \tau_i, v(t + \tau_i), \varepsilon_{i+1})(t), t \in [0, \varepsilon_{i+1}).$$

В результате получаем управления $u(t)$ и $v(t)$ на $[0, \tau_{i+1})$ и решение $z(t)$, $t \in [0, \tau_{i+1}]$.

Продолжая процесс дальше, построим управления $u(t)$, $v(t)$ и решение $z(t)$ на интервале $[0, \theta]$ или полуоси $[0, +\infty)$.

Замечание 3. *Опишем модификации ε – стратегий, которые, как будет видно из изложенного ниже, эквивалентны определенным в определениях 1, 2.*

1. Игрок E может сообщить заранее игроку P свое разбиение ω, выбранное в начальный момент. В этом случае информационная дискриминация игрока E усиливается, игрок P может подругому строить свое управление, однако свое положение он не улучшит.

2. Игрок E может не выбирать заранее в момент $\tau_0 = 0$ разбиение ω, а указывать моменты τ_i в процессе игры. При этом выбор τ_i может зависеть от τ_{i-1} и $z(\tau_{i-1})$. Если множество $\{\tau_i, i = 1, 2, ...\}$ не имеет точек сгущения, то игра проходит таким же образом, который был описан выше. Управления $u(t)$, $v(t)$ и решение (1) $z(t)$ определяются на всем $[0, \theta]$ или $[0, +\infty)$. Если существуют точки сгущения, то необходимо введение новых понятий, которые бы позволили продолжать решение на весь отрезок $[0, \theta]$ или полуось $[0, +\infty)$.

В описанном случае множество стратегий игрока E шире того, которое было описано в определении 3.

Цитированная литература

1. **Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.** Дифференциальные игры. Киев, 1992.

2. **Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В.** Выпуклый анализ и дифференциальные игры. Алматы, 2005.

Поступила в редакцию 22.01.2010г.

УДК 621.391

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛЫ ЭРЛАНГА

Д. У. Ашигалиев, Ж. С. Кемельбекова

Институт проблем информатики и управления МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125

В работе исследуется классическая формула Эрланга для системы массового обслуживания с отказами. С помощью математических преобразований получены ее различные представления, более удобные для вычисления вероятности потерь нагрузки. Получено рекуррентное соотношение подсчета вероятности потерь и представление формулы Эрланга в интегральном виде.

Интенсивные разработки по проектированию и практическому внедрению вычислительных сетей в различные сферы производственной и научной деятельности выдвинули ряд наиболее актуальных проблем, связанных с модернизацией технологических процессов в развитии и совершенствовании электросвязи, являющейся одной из наиболее динамичных отраслей экономики Республики Казахстан. Такие теоретические исследования в области анализа и синтеза вычислительных сетей и их практическое внедрение основаны, главным образом, на использовании широко известных математических моделей, разработанных в теории систем массового обслуживания. Также следует отметить, что в области информатики и теории сетей связи с успехом используется накопленный математический аппарат, позволяющий исследователям решать сложные технические задачи. Например, существует эффективный математический метод, связанный с применением теории графов и позволяющий адекватно описать и исследовать структуру и комбинаторные свойства систем распределения информации. Существенную помощь в таких исследованиях оказывают алгебраические методы (в частности, основанные на применении матриц), а также другие современные методы, объединенные понятием математическая кибернетика.

Другой эффективный метод распределения информации, или, точнее, целевая совокупность методов, занимающих важное место в этой теории, связана с применением теории вероятности. Исследование подобных методов привело к формированию теоретического направления, получившего название теории массового обслуживания и нашедшего широкое применение во многих областях науки техники [1, 2]. Использование теории вероятности в области распределения информации тесно связано с вычислением статистических параметров информационной сети, а также обуславливается измерением нагрузки и решением аналитических задач вычисления характеристик качества обслуживания абонентов сети.

Keywords: *Erlangs formula, probability of losses*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

Для широкого круга читателей, занимающихся проблемами телетрафика, хорошо известна классическая задача о пропускной способности полнодоступного пучка телефонных каналов [3, 4]. Если в пучке, который обслуживает сколь угодно большое число источников нагрузки, создающих пуассоновский поток вызовов и интенсивностью λ, имеется только v каналов, каждый из которых занимается обслуживанием вызова в среднем на время T, то вероятность потерь сообщения (или блокировки) находится при помощи равенства

$$P(A;v)=\frac{A^v}{v!\sum_{j=0}^{v}\frac{A^j}{j!}}\,, \tag{1}$$

называемого формулой Эрланга. Величина $A=\lambda T$ называется нагрузкой и ее интенсивность принято измерять в эрлангах. Вышеприведенная задача названа классической потому, что именно с рассмотрения такой задачи Эрлангом и начала развиваться теория массового обслуживания. В свое время Эрланг исследовал функционирование системы обслуживания с отказами на примере работы автоматизированного узла связи. В результате им была получена формула расчета вероятностей состояния системы (1), которая считается актуальной и в наше время. А именно, простейшие предположения при получении выражения (1) хорошо согласуются с экспериментальными данными, относящимися к различным потокам телефонной нагрузки, исходящей непосредственно от абонентских аппаратов. По этой причине формула Эрланга широко применяется для расчетов при проектировании телефонных сетей связи. Эта формула определена для положительных значений v и позволяет по заданной нагрузке А и по числу обслуживающих нагрузку каналов v найти вероятность потерь P.

В данной работе исследуется формула Эрланга (1) и с помощью математических преобразований получаем ее различные представления, которые на наш взгляд более удобны для вычисления вероятности потерь нагрузки. В частности, приведено доказательство вычисления вероятности блокировки вызова через производные v-го порядка функции A^v, где A – нагрузка сети коммутации каналов, v – число обслуживающих вызовы каналов. В процессе исследования формулы Эрланга получено рекуррентное соотношение подсчета вероятностей потерь и представление этой формулы в интегральном виде.

В начале докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любых $A>0$ и целых $v>0$ выполняется следующее равенство:*

$$\sum_{s=0}^{v+1}\frac{d^s(A^{v+1})}{dA^s}=A^{v+1}+(v+1)\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}, \tag{2}$$

при этом без потери общности будем полагать, что

$$\frac{d^0(A^{v+1})}{dA^0}=A^{v+1},\frac{d^0(A^v)}{dA^0}=A^v. \tag{3}$$

Доказательство. Раскрывая сумму левой части равенства (2) и вычисляя соответствующие производные, получим следующее выражение:

$$\sum_{s=0}^{v+1}\frac{d^s(A^{v+1})}{dA^s}=\frac{d^0(A^{v+1})}{dA^0}+\frac{d^1(A^{v+1})}{dA^1}+\frac{d^2(A^{v+1})}{dA^2}+...=$$

$$=A^{v+1}+(v+1)A^v+v(v+1)A^{v-1}+...=$$

$$A^{v+1}+(v+1)(A^v+vA^{v-1}+...)=A^{v+1}+(v+1)\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s},$$

что и требовалось доказать.

Докажем следующую теорему

Теорема 1. *Для любых $A \geq 0$ и целых $v \geq 0$ выполняется следующее равенство:*

$$v\,!\sum_{s=0}^{v}\frac{A^s}{s\,!}=\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}. \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение данной теоремы будем доказывать с помощью метода математической индукции. Легко проверить, что при $v = 1$ равенство (4) выполняется. Предположим, что выражение (4) справедливо и для $v = k$, то есть имеет место равенство:

$$k\,!\sum_{s=0}^{k}\frac{A^s}{s\,!}=\sum_{s=0}^{k}\frac{d^s(A^k)}{dA^s}.$$

Покажем, что оно справедливо и для $v = k+1$. При $v = k+1$ выражение (4) запишется в виде:

$$(k+1)\,!\sum_{s=0}^{k+1}\frac{A^s}{s\,!}=\sum_{s=0}^{k+1}\frac{d^s(A^{k+1})}{dA^s}.$$

В силу леммы 1 будем иметь следующее (левую часть последнего равенства преобразуем, а правую его часть заменяем выражением (2)):

$$(k+1)\,!\sum_{s=0}^{k}\frac{A^s}{s\,!}+A^{k+1}=A^{k+1}+(k+1)\sum_{s=0}^{k}\frac{d^s(A^k)}{dA^s}.$$

Сделав несложные преобразования в последнем выражении, окончательно получим утверждение теоремы для предположения $v = k$, тем самым считаем теорему 1 доказанной.

Из вышеуказанной теоремы вытекают два важных следствия.

Следствие 1. *Формула Эрланга* (1) *эквивалентна следующей формуле:*

$$P(A,v)=\frac{A^v}{\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}}. \tag{5}$$

Доказательство этого следствия мы опускаем, ввиду того, что формула (5) очевидна, если знаменатель дроби формулы (1) заменить соотношением (4).

Следствие 2. *Имеет место рекуррентная формула подсчета вероятности блокировки:*

$$P(A,v+1)=\frac{1}{1+\frac{v+1}{AP(A,v)}}. \tag{6}$$

Доказательство. Используя (5) для $v = v+1$, а также формулу(2), получим:

$$P(A,v)=\frac{A^{v+1}}{\sum_{s=0}^{v+1}\frac{d^s(A^{v+1})}{dA^s}}=\frac{A^{v+1}}{A^{v+1}+(v+1)\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}}.$$

Далее, с учетом (1) выражение (4) запишется как

$$\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}=\frac{A^v}{P(A,v)}.$$

Подставив этот результат в последнее выражение, получим:

$$P(A, v+1) = \frac{A^{v+1}}{A^{v+1} + \frac{(v+1)A^v}{P(A,v)}}.$$

Разделив числитель и знаменатель этого равенства на величину A^{v+1}, окончательно получим формулу (6), что и требовалось доказать.

Далее произведем следующие преобразования. Введем обозначение:

$$H(A, v) = \int_A^\infty e^{-y} y^v dy. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что с другой стороны

$$H(A, v+1) = A^{v+1} e^{-A} + (v+1) H(A, v). \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$H(A, 0) = \int_A^\infty e^{-y} dy = e^{-A}. \tag{9}$$

Теорема 2. Для всех $A \geq 0$ и целых $v \geq 0$ справедлива следующая формула:

$$H(A, v) = e^{-A} \sum_{s=0}^{v} \frac{d^s(A^v)}{dA^s}. \tag{10}$$

Доказательство. Как и для теоремы 1 при доказательстве этой теоремы мы будем использовать метод математической индукции. Пусть $v = 0$, тогда с учетом равенства (9) и как следует из (3) $\frac{d^0(A^0)}{dA^0} = A^0 = 1$, получаем, что $e^{-A} = e^{-A}$, то есть соотношение (10) при $v = 0$ выполняется. Легко проверить, что при $v = 1$ равенство (10) выполняется. Допустим, что формула (10) справедлива и для $v = k$, то есть выполняется равенство:

$$H(A, k) = e^{-A} \sum_{s=0}^{k} \frac{d^s(A^k)}{dA^s}. \tag{11}$$

Покажем, что при $v = k+1$, равенство (10) также выполняется. Для $v = k+1$ выражение (10) запишется в виде:

$$H(A, k+1) = e^{-A} \sum_{s=0}^{k+1} \frac{d^s(A^{k+1})}{dA^s}. \tag{12}$$

Используя соотношения (2) и (8), выражение (12) принимает следующий вид:

$$A^{k+1} e^{-A} + (k+1) H(A, k) = e^{-A} [A^{k+1} + (k+1) \frac{d^s(A^k)}{dA^s}],$$

или проведя несложные преобразования легко получить равенство (11), что и доказывает исходную теорему.

Заменяя в формуле (5) знаменатель дроби равенством (10), а также учитывая соотношение (7), мы получим формулу Эрланга в интегральном представлении:

$$P(A, v) = \frac{A^v e^{-A}}{\int_A^\infty e^{-y} y^v dy}. \tag{13}$$

Формула (13), в отличие от формулы (1), справедлива для любых произвольных значений v и представляет интерес для многих расчетов, не связанных с заданием целочисленности значений v.

Таким образом, в результате математических преобразований формулы Эрланга (1) получены эквивалентные формулы (5), (6) и (13), в которых отсутствие факториала значительно облегчает вычисления вероятностей блокировок абонентских сообщений.

Цитированная литература

1. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. М., 1979.
2. **Хинчин А.Я.** Работы по математической теории массового обслуживания. М., 1963.
3. **Овчаров Л.А.** Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., 1969.
4. **Нейман В.И.** Теоретические основы единой автоматизированной сети связи. М., 1984.

Поступила в редакцию 27.04.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 35—38*

УДК 510.67

ДП-МИНИМАЛЬНЫЕ И УПОРЯДОЧЕННО СТАБИЛЬНЫЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

В. В. Вербовский

Институт проблем информатики и управления МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 vvv@ipic.kz

В статье доказывается, что дп-минимальные теории являются упорядоченно стабильными.

1. Введение. Пусть $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ – линейно упорядоченная структура, а A и B – подмножества для M. Как обычно, будем писать $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Разбиение $\langle C, D\rangle$ множества M называется *сечением*, если $C < D$. Если дано сечение $\langle C, D\rangle$, то можно построить частичный тип $\{c < x < d : c \in C,\ d \in D\}$, который так же будем называть сечением и будем обозначать символом $s_{\langle C,D\rangle}$.

Повсюду в статье под теорией будем понимать полную теорию логики предикатов первого порядка.

Пусть T – теория языка $\mathcal{L}$, а $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ – некоторая формула. Про формулу φ говорят, что она обладает *свойством независимости* (относительно T), если для любого $n < \omega$ существует модель $\mathcal{M} \models T$ и две последовательности $(\bar{a}_i : i < n)$ и $(\bar{b}_J : J \subseteq n)$ в M, такие что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_J)$ в том и только в том случае, когда $i \in J$. Теория T обладает свойством независимости, если некоторая формула обладает свойством независимости относительно T.

Пусть q – частичный n-тип, A – множество. Тогда

$$S^n_q(A) \triangleq \{p \in S^n(A) : p \cup q \text{ совместно}\}.$$

Заметим, что q может и не быть частичным типом над множеством A.

Определение 1. *(Б. Байжанов, В. Вербовский)*

1. *Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M}$ называется упорядоченно стабильной в λ, если для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности не больше λ и для любого сечения $s = s_{\langle C,D\rangle}$ в $\mathcal{M}$ существует самое большее λ 1-типов над A, которые совместны с сечением s, то есть $|S^1_s(A)| \leq \lambda$.*

2. *Теория T называется упорядоченно стабильной в λ, если каждая ее модель такова. Иногда будем писать, что T упорядоченно λ-стабильна.*

Keywords: *Model Theory, totally ordered structure, dp-minimal, o-stable*
2000 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03C52, 03C64

3. *Теория T называется упорядоченно стабильной, если существует бесконечный кардинал λ в котором теория T упорядоченно стабильна.*

4. *Теория T упорядоченно суперстабильна, если существует такой кардинал λ, что теория T упорядоченно стабильна во всех $\mu \geq \lambda$.*

Определение 2. *Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ обладает свойством строгого порядка внутри сечения, если существует формула $\phi(x, \bar{y})$, такая что для любого натурального числа n существуют кортежы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ и сечение $s_n = s_{\langle C_n, D_n\rangle}$ в $\mathcal{M}$, такие что в некотором $|M|^+$-насыщенном элементарном расширении $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ имеет место следующее:*

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap s_n(\mathcal{N}) \subset \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap s_n(\mathcal{N}) \subset \dots \subset \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap s_n(\mathcal{N}).$$

Теория обладает свойством строгого порядка внутри сечения, если некоторая ее модель обладает этим свойством.

В работе [1] было доказано, что упорядоченно стабильная теория не обладает свойством независимости. Затем в работе [2] был получен следующий критерий упорядоченной стабильности.

Теорема 1. *[2] Пусть язык L содержит символ „$<$", а теория T языка L содержит аксиомы линейного порядка для предиката $x < y$. Теория T упорядоченно стабильна в том и только в том случае, когда она не обладает ни свойством независимости, ни свойством строгого порядка внутри сечения.*

Определение 3. *(С. Шелах)*

1. *Паттерном независимого разбиения длины κ называется такая последовательность пар $\langle(\varphi^\alpha(\bar{x}; \bar{y}^\alpha), k^\alpha) : \alpha < \kappa\rangle$ формул и натуральных чисел, для которой существует такая матрица $\left(\bar{b}_i^\alpha : \alpha < \kappa, i < \omega\right)$ кортежей $\bar{b}_i^\alpha$, что строка $\{\varphi^\alpha(\bar{x}; \bar{b}_i^\alpha) : i < \omega\}$ является k^α-несовместной для любого $\alpha < \kappa$, но путь $\{\varphi^\alpha(\bar{x}; \bar{b}_{\eta(\alpha)}^\alpha) : \alpha < \kappa\}$ совместен при любой $\eta \in \omega^\kappa$.*

2. *Теория T называется* пнр-минимальной*, если не существует паттерна независимого разбиения длины 2 для случая одной свободной переменной x, то есть для формул вида $\varphi(x; \bar{y})$.*

Определение 4. *(А. Онішуус, А. Усвяцов) Теория называется дп-минимальной, если она пнр-минимальна и не обладает свойством независимости.*

Некоторые свойства дп-минимальных теорий можно найти в работе [3]. Заметим, что при помощи стандартных аргументов Ердоша-Радо, не умаляя общности, можно предположить, что каждая последовательность $\langle \bar{b}_i^\alpha : i < \omega\rangle$ является неразличимой над множеством остальных кортежей: $\{\bar{b}_i^\beta : \beta \neq \alpha, i < \omega\}$. Если же мы работаем в упорядоченных структурах, как в данной статье, то можно предположить также, что каждая последовательность $\langle \bar{b}_i^\alpha : i < \omega\rangle$ является возрастающей.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ – линейно упорядоченная структура, чья элементарная теория является пнр-минимальной. Тогда для любой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ существует натуральное число $n = n_\varphi$, такое что для любого сечения $s = s_{\langle C, D\rangle}$ структуры $\mathcal{M}$ число кортежей $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$, таких что $s(x) \cup \{\varphi(x, \bar{a}_i)\}$ совместно для каждого $i = 1, \dots, k$ и что $s(x) \vdash \neg\exists x(\varphi(x, \bar{a}_i) \wedge \varphi(x, \bar{a}_j))$ для любых $1 \leq i < j \leq k$, не превышает числа n.*

Доказательство. Предположим противное, что для каждого натурального числа n существует сечение $s_n(x)$ и кортежи $\bar{a}_1^n, \dots, \bar{a}_{k_n}^n$, такие что $k_n \geq n$ и $s(x) \cup \{\varphi(x, \bar{a}_i^n)\}$ совместно для каждого $i = 1, \dots, k_n$ и что $s(x) \vdash \neg\exists x(\varphi(x, \bar{a}_i^n) \wedge \varphi(x, \bar{a}_j^n))$ для любых $1 \leq i < j \leq k_n$. Обогатим язык структуры $\mathcal{M}$, добавив в него предикаты $P(x)$ и $R(x, y)$, которые проинтерпретируем следующим образом. Отношение $P(\mathcal{M})$ — некоторое счетное подмножество множества

M, будем считать, что оно реализуется множеством $\{b_n : n < \omega\}$, а для каждого $b_n \in P(\mathcal{M})$ отношение $R(\mathcal{M}, b_n) = C_n$, где $s_{\langle C_n, D_n\rangle}$ — это сечение s_n. Для элементов $c \notin P(\mathcal{M})$ отношение $R(\mathcal{M}, c)$ пусто. Таким образом, в новом языке множество рассматриваемых сечений s_n равномерно формульно.

Тогда в обогащенном языке можно записать следующее множество формул, которое в силу наших предпосылок, будет локально совместным:

$$\begin{aligned} p(\bar{x}_n : n < \omega; y) \ &:= \ \{P(y)\} \cup \\ &\cup \ \{\forall u, v(R(u,y) \wedge \neg R(v,y) \to \exists t[\varphi(t, \bar{x}_n) \wedge u < t < v]) : n < \omega\} \cup \\ &\cup \ \{\exists u, v(R(u,y) \wedge \neg R(v,y) \wedge \neg\exists t(\varphi(t, \bar{x}_n) \wedge \varphi(t, \bar{x}_k) \wedge u < t < v)) : \\ &\qquad\qquad 0 \le n < k < \omega\}. \end{aligned}$$

Существует $\aleph_1$-насыщенное элементарное расширение $\mathcal{N}^+$ модели $\mathcal{M}^+$ в новом языке, реализующее тип $p(\bar{x}_n : n < \omega; y)$. Рассмотрим обеднение $\mathcal{N}$ полученной модели до исходного языка. В этой модели есть сечение $s = s_{\langle C, D\rangle}$ и кортежи $\bar{b}_i$, где $i < \omega$, которые удовлетворяют следующему свойству: $s(x) \cup \{\varphi(x, \bar{b}_i)\}$ совместно для каждого $i < \omega$ и $s(x) \vdash \neg\exists x(\varphi(x, \bar{b}_i) \wedge \varphi(x, \bar{b}_j))$ для любых $0 \le i < j < \omega$. Так как формула $\varphi(x, \bar{b}_j)$ совместна с сечением s, она реализуется сколь угодно большими элементами из множества C или сколь угодно малыми из множества D. Так как рассматриваемое множество формул бесконечно, не умаляя общности, можно считать, что все эти формулы реализуются сколь угодно большими элементами из множества C.

Так как модель $\mathcal{N}$ достаточно насыщенна, существуют элементы $\gamma \in C$ и $\delta \in D$, такие что множество формул $\{\varphi(x, \bar{b}_n) \wedge \gamma < x < \delta : n < \omega\}$ попарно несовместно.

Пусть элементы $c_n^1 \in C$ реализуют формулы $\varphi(x, \bar{b}_n) \wedge x > \gamma$. Поскольку модель $\mathcal{N}$ достаточно насыщенна, существуют элементы d_0 и d_1 из C, такие что

$$d_0 < \inf\{c_n^1 : n < \omega\} \le \sup\{c_n^1 : n < \omega\} < d_1.$$

Предположим, что элемент d_k уже найден. Пусть элементы $c_n^{k+1} \in C$ реализуют формулы $\varphi(x, \bar{b}_n) \wedge x > d_k$. Поскольку модель $\mathcal{N}$ достаточно насыщенна, существует элемент d_{k+1} из C, такой что

$$d_k < \inf\{c_n^{k+1} : n < \omega\} \le \sup\{c_n^{k+1} : n < \omega\} < d_{k+1}.$$

В результате получили, что и множество формул $\{\varphi(x, \bar{b}_n) : n < \omega\}$ и множество интервалов $\{d_n < x < d_{n+1} : n < \omega\}$ попарно несовместны, но каждая формула из первого множества совместна с каждой формулой из второго. Таким образом, мы построили паттерн независимого разбиения длины 2, что противоречит исходным посылкам. □

Теорема 2. *Если элементарная теория линейно упорядоченной структуры является дп-минимальной, то она является и упорядоченно стабильной.*

Доказательство. Предположим, что теория T является дп-минимальной, но не является при этом упорядоченно стабильной. Так как в силу условий теория T не обладает свойством независимости, то по теореме 1 она обладает свойством строгого порядка внутри сечения. Пусть формула $\varphi(x; \bar{y})$ обладает свойством строгого порядка внутри сечения $s = s_{\langle C, D\rangle}$ некоторой достаточно насыщенной модели $\mathcal{M}$ теории T. Пусть последовательность кортежей $\bar{a}_n$, где $n < \omega$, будет такой, что

$$s(x) \vdash \varphi(x; \bar{a}_i) \to \varphi(x; \bar{a}_j) \text{ для любых } i < j < \omega.$$

Определим формулу

$$\psi(x, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}) := \neg\varphi(x, \bar{a}_i) \wedge \varphi(x, \bar{a}_j).$$

Тогда формула $\psi(x, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$ совместна с сечением s при каждом $i < \omega$, но при этом данное множество формул попарно несовместно, что противоречит лемме 1. □

Теорема 3. *Существует упорядоченно стабильная теория, которая не является дп-минимальной.*

Доказательство. Рассмотрим элементарную теорию T группы $(\mathbb{R}, <, +, 0, Q)$, в которой одноместный предикат Q проинтерпретирован множеством рациональных чисел. Очевидно, что эта теория не является дп-минимально в силу леммы 1, так как класс смежности $\mathbb{Q} + r$ формулен и совместен с любым сечением каким бы ни было вещественное число r. В работе [2] было доказано, что эта теория является упорядоченно стабильной. Доказательство этого факта следует из того, что теория T допускает элиминацию кванторов. $\square$

Цитированная литература

1. **Вербовский В.** //Вестник ИА РК. 2008. № 1. С. 16–20.

2. **Вербовский В.** //Вестник Карагандинского государственного университета. 2008. № 2. С. 16–23.

3. **Goodrick J.** //The Journal of Symbolic Logic. 2010. V. 75, № 1. P. 221–238.

Поступила в редакцию 14.04.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 39—47*

УДК 519.968.72

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЛИЗКИМИ ЯДРАМИ

Д. С. Джумабаев, К. И. Усманов

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 anar@math.kz

Установлена взаимосвязь между корректными разрешимостями линейных двухточечных краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений с близкими ядрами.

Краевые задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений различными методами исследованы многими авторами [1–8].

В [9] был предложен метод параметризации решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

В [10] линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения аппроксимируется краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений. В терминах аппроксимирующих краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

В настоящей работе рассматривается следующая линейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K_1(t,s)x(s)ds + \int\limits_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $[n \times n]$ матрица $A(t)$ и n-мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $[n \times n]$ матрицы $K_1(t,s)$ и $K_2(t,s)$ непрерывны на $[0,T] \times [0,T]$.

Keywords: *System of integro-differential equations with loadings, two-point boundary value problem, the unique solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 45J05

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

Отметим, что в [9, 10] задача (1), (2) рассматривается при $K_2(t,s)\equiv 0$, т.е. когда в правой части интегро-дифференциального уравнения производная от решения не содержится в интегральном члене.

Задачу (1), (2) исследуем методом параметризации.

Отрезок интегрирования $[0,T]$ разобьем на части с шагом $h>0: mh=T$ и через $K_{2j}(t)$ обозначим матрицы $K_2[t,(j-1)h]$, т.е. $K_{2j}(t)=K_2[t,(j-1)h]$, $t\in[0,T]$, $j=\overline{1,m}$. Рассмотрим двухточечную краевую задачу для систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int\limits_0^T K_1(t,s)y(s)ds+\sum_{j=1}^m K_{2j}(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\dot y(s)ds+f(t),\quad t\in[0,T],\quad y\in R^n,\qquad(3)$$

$$By(0)+Cy(T)=d,\quad d\in R^n.\qquad(4)$$

Равенствами $K_{2h}(t,s)=K_{2j}(t)$, $t\in[0,T]$, $s\in[(j-1)h,jh)$, $j=\overline{1,m-1}$, $K_{2h}(t,s)=K_{2m}(t)$, $s\in[(m-1)h,mh]$ определим кусочно непрерывную на $[0,T]\times[0,T]$ матрицу $K_{2h}(t,s)$ и через $\varepsilon(h)$ обозначим $\sup\limits_{t,s\in[0,T]\times[0,T]}\|K_2(t,s)-K_{2h}(t,s)\|$. Из равномерной непрерывности $K_2(t,s)$ на $[0,T]\times[0,T]$ следует, что $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Определение. *Краевая задача (1),(2) $\Big($(3),(4)$\Big)$ называется корректно разрешимой, если она для любых $f(t)\in([0,T],R^n)$, $d\in R^n$ имеет единственное решение $x(t)$ $\Big(y(t)\Big)$ и для него справедливо неравенство:*

$$\|x\|_1\le\gamma\max(\|f\|_1,\|d\|),$$

$$\Big(\|y\|_1\le\gamma^*\max(\|f\|_1,\|d\|)\Big),$$

где $\gamma\Big(\gamma^*\Big)$ – константа, не зависящая от $f(t)$, d.

Число $\gamma\Big(\gamma^*\Big)$ называется константой корректной разрешимости задачи (1),(2) $\Big($(3),(4)$\Big)$.

Условие А. *Предположим, что интегральное уравнение Фредгольма второго рода*

$$z(t)=\int\limits_0^T K_2(t,s)z(s)ds+F(t)\qquad(5)$$

имеет единственное решение при любой функции $F(t)\in C([0,T],R^n)$.

При условии А существует $\Gamma_2(t,s;1)$ – резольвента интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K_2(t,s)$. Решение уравнения (5) запишется в виде:

$$z(t)=F(t)+\int\limits_0^T\Gamma_2(t,s;1)F(s)ds$$

и для него справедлива оценка:

$$\|z\|_1\le\mu\|F\|_1,$$

где

$$\mu=T\max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|\Gamma(t,s;1)\|+1.$$

Введём обозначение: $\alpha = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(t)\|$, $\beta_1 = \max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} \|K_1(t,s)\|$, $\beta_2 = \max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} \|K_2(t,s)\|$, $\alpha, \beta_1, \beta_2 - const.$

Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть выполнено условие A, краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой γ_1 и для выбранного $h > 0 : mh = T$ имеет место неравенство*

$$q_1(h) = \varepsilon(h)T\mu\Big[\gamma_1(\alpha + \beta_1 T) + 1\Big] < 1. \tag{6}$$

Тогда краевая задача (3),(4) корректно разрешима с константой

$$\gamma_1^* = \frac{\gamma_1}{1 - \varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha + \beta_1 T) + 1]}$$

и справедлива оценка

$$\|y - x\|_1 \le \frac{\gamma_1 \varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha + \beta_1 T) + 1]}{1 - \varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha + \beta_1 T) + 1]} \max(\|f\|_1, \|d\|), \tag{7}$$

где $x(t)$ – решение задачи (1),(2), $y(t)$ – решение задачи (3),(4).

Доказательство. Используя корректную разрешимость задачи (1),(2) и ее константу γ_1, методом последовательных приближений найдем решение задачи (3),(4). Полагаем $y^{(0)}(t) = x(t)$ и $y^{(1)}(t)$ определим, решая краевую задачу:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^T K_1(t,s)y(s)ds + \int_0^T K_2(t,s)\dot{y}(s)ds + f(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_{2j}(t) - K_2(t,s)\Big]\dot{y}^{(0)}(s)ds, \tag{8}$$

$$By(0) + Cy(T) = d. \tag{9}$$

Так как матрицы $K_{2j}(t), j = \overline{1,m}$, $K_2(t,s)$ непрерывны соответственно на $[0,T]$, $[0,T]\times[0,T]$, то функция $F(t) = \sum\limits_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} [K_{2j}(t) - K_2(t,s)]\dot{y}^{(0)}(s)ds$ непрерывна на $[0,T]$. Поэтому, используя корректную разрешимость задачи (1),(2), найдем $y^{(1)}(t)$ – единственное решение задачи (7),(8) и для функции $\Delta^{(1)}(t) = y^{(1)}(t) - y^{(0)}(t)$, являющейся решением краевой задачи:

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(t)\Delta + \int_0^T K_1(t,s)\Delta(s)ds + \int_0^T K_2(t,s)\dot{\Delta}(s)ds + \sum_{j=1}^m \int_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_{2j}(t) - K_2(t,s)\Big]\dot{y}^{(0)}(s)ds,$$

$$B\Delta(0) + C\Delta(T) = 0,$$

установим оценку $\|\Delta^{(1)}\|_1 \le \gamma_1\varepsilon(h)T\|\dot{y}^{(0)}\|_1 = \gamma_1\varepsilon(h)T\|\dot{x}\|_1$.

Продолжая процесс, $(k+1)$-приближение определим из краевой задачи:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^T K_1(t,s)y(s)ds + \int_0^T K_2(t,s)\dot{y}(s)ds + f(t) + \sum_{j=1}^m \int_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_{2j}(t) - K_2(t,s)\Big]\dot{y}^{(k)}(s)ds,$$

$$By(0)+Cy(T)=d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k+1)}(t)=y^{(k+1)}(t)-y^{(k)}(t)$, $k=1,2,...$, будет решением краевой задачи:

$$\frac{d\Delta}{dt}=A(t)\Delta+\int\limits_0^T K_1(t,s)\Delta(s)ds+\int\limits_0^T K_2(t,s)\dot{\Delta}(s)ds+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_{2j}(t)-K_2(t,s)\Big]\dot{\Delta}^{(k)}(s)ds,$$

$$B\Delta(0)+C\Delta(T)=0$$

и имеет место оценка:

$$\|\Delta^{(k+1)}\|_1\le\gamma_1\varepsilon(h)T\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1,\qquad k=1,2,\ \ldots. \tag{10}$$

Обозначив $\dot{\Delta}^{(k+1)}(t)$ функцией $z^{(k+1)}(t)$ получим, что эта функция является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$z(t)=\int\limits_0^T K_2(t,s)z(s)ds+F^{(k+1)}(t),$$

где $F^{(k+1)}(t)=A(t)\Delta^{(k+1)}(t)+\int\limits_0^T K_1(t,s)\Delta^{(k+1)}(s)ds+\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_{2j}(t)-K_2(t,s)\Big]\dot{\Delta}^{(k)}(s)ds$. Используя условие А и неравенство (10) имеем:

$$\|\dot{\Delta}^{(k+1)}\|_1\le\mu\Big[\gamma_1\varepsilon(h)T(\alpha+\beta_1T)\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1+\varepsilon(h)T\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1\Big]=$$

$$=\varepsilon(h)T\mu\Big[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1\Big]\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1=q_1(h)\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1. \tag{11}$$

Отсюда и из условия (6) получим равномерную на $[0,T]$ сходимость последовательности функций $\dot{y}^{(k+1)}(t)$ к непрерывной на $[0,T]$ функции $v(t)$ при $k\to\infty$. Тогда в силу неравенства (10) последовательность $y^{(k+1)}(t)$ при $k\to\infty$ равномерно на $[0,T]$ сходится к $y(t)$ – решению задачи (3), (4) и $v(t)=\dot{y}(t)$. На основе неравенств (10), (11) имеем:

$$\|y^{(k+1)}-x\|_1\le\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\|_1+\|y^{(k)}-y^{(k-1)}\|_1+...+\|y^{(2)}-y^{(1)}\|_1+$$

$$+\|y^{(1)}-y^{(0)}\|_1\le\gamma_1\varepsilon(h)T\Big[\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1+\|\dot{\Delta}^{(k-1)}\|_1+...+\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1+\|\dot{x}\|_1\Big]\le$$

$$\le\gamma_1\varepsilon(h)T\Big\{[q_1(h)]^k\|\dot{x}\|_1+[q_1(h)]^{k-1}\|\dot{x}\|_1+...+q_1(h)\|\dot{x}\|_1+\|\dot{x}\|_1\Big\}=$$

$$=\gamma_1\varepsilon(h)T\Big[[q_1(h)]^k+[q_1(h)]^{k-1}+...+1\Big]|\dot{x}\|_1<\frac{\gamma_1\varepsilon(h)T}{1-q_1(h)}\|\dot{x}\|_1.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим:

$$\|y-x\|_1\le\frac{\gamma_1\varepsilon(h)T}{1-q_1(h)}\|\dot{x}\|_1. \tag{12}$$

Так как

$$\|\dot{x}\|_1\le\mu\Big(\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1\Big)\max(\|f\|_1,\|d\|),$$

то
$$\|y-x\|_1 \le \frac{\gamma_1\varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1]}{1-\varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1]}\max(\|f\|_1,\|d\|).$$

Отсюда и из корректной разрешимости задачи (1), (2) следует неравенство:

$$\|y\|_1 \le \|y-x\|_1+\|x\|_1 \le \frac{\gamma_1\varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1]}{1-\varepsilon_(h)T\mu[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1]}\max(\|f\|_1,\|d\|)+\|x\|_1=$$

$$=\frac{\gamma_1}{1-\varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1]}\max(\|f\|_1,\|d\|). \tag{13}$$

Покажем единственность решения задачи (3), (4). Пусть $y(t)$, $\widetilde{y}(t)$ являются решениями задачи $(3),(4)$. Тогда их разность $\Delta y(t)=y(t)-\widetilde{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\Delta y}{dt}=A(t)\Delta y+\int\limits_0^T K_1(t,s)\Delta y(s)ds+\int\limits_0^T K_2(t,s)\Delta\dot{y}(s)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^m\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_{2j}(t)-K_2(t,s)\Big]\Delta\dot{y}(s)ds, \tag{14}$$

и однородным краевым условиям:

$$B\Delta y(0)+C\Delta y(T)=0. \tag{15}$$

Из корректной разрешимости задачи (1),(2) следует, что функция $\Delta y(t)$ является единственным решением задачи (14), (15) и для него справедлива оценка:

$$\|\Delta y\|_1 \le \gamma_1\varepsilon(h)T\|\Delta\dot{y}\|_1. \tag{16}$$

Из (16) и уравнения (14), аналогично (11), следует неравенство:

$$\|\Delta\dot{y}\|_1 \le \varepsilon(h)T\mu\Big[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1\Big]\|\Delta\dot{y}\|_1=q_1(h)\|\Delta\dot{y}\|_1.$$

Учитывая, что $q_1(h)<1$, получим $\|\Delta\dot{y}\|_1=0$. Тогда из (16) следует, что $\|\Delta y\|_1=0$, т.е. $y(t)=\widetilde{y}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Отсюда и из (13) следует корректная разрешимость задачи (3),(4) с константой:
$$\gamma_1^*=\frac{\gamma_1}{1-\varepsilon(h)T\mu[\gamma_1(\alpha+\beta_1T)+1]}.$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K_{2h}(t,s)$:

$$\widetilde{z}(t)=\int\limits_0^T K_{2h}(t,s)\widetilde{z}(s)ds+\widetilde{F}(t),\quad \widetilde{F}(t)\in C[0,T], \tag{17}$$

и выберем число $h_0>0$ удовлетворяющим неравенству:

$$\mu\varepsilon(h_0)\le\frac{1}{2}. \tag{18}$$

Тогда для любого $h \in (0, h_0] : mh = T$ по теореме о малых возмущениях [11, с. 236] уравнение (17) имеет единственное решение $\widetilde{z}(t)$ и справедливо неравенство:

$$\|\widetilde{z}\|_1 \leq \mu_h \|\widetilde{F}(t)\|_1,$$

с $\mu_h = \dfrac{\mu}{1 - \mu\varepsilon(h)} \leq 2\mu$.

Теорема 2. *Пусть имеет место условие A и для $h \in (0, h_0] : mh = T$ краевая задача (3), (4) корректно разрешима с константой γ_1^*. Тогда при выполнении неравенства*

$$q_2(h) = \varepsilon(h) T \mu_h \Big[\gamma_1^*(\alpha + \beta_1 T) + 1\Big] < 1 \tag{19}$$

краевая задача (1), (2) корректно разрешима с константой

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_1^*}{1 - \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^*(\alpha + \beta_1 T) + 1]}$$

и справедлива оценка

$$\|x - y\|_1 \leq \frac{\gamma_1^* \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^*(\alpha + \beta_1 T) + 1]}{1 - \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^*(\alpha + \beta_1 T) + 1]} \max(\|f\|_1, \|d\|), \tag{20}$$

где $x(t)$–решение задачи (1),(2), $y(t)$–решение задачи (3),(4).

Доказательство. Решение задачи (1),(2) и её оценку найдем методом последовательных приближений. Полагаем $x^{(0)}(t) = y(t)$ и $x^{(1)}(t)$ определим, решая краевую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K_1(t,s)x(s)ds + \sum_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} K_{2j}(t)\dot{x}(s)ds +$$

$$f(t) + \sum_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_2(t,s) - K_{2j}(t)\Big]\dot{x}^{(0)}(s)ds, \tag{21}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d. \tag{22}$$

Используя корректную разрешимость задачи (3),(4), найдем единственное решение $x^{(1)}(t)$ задачи (21),(22) и для функции $\Delta^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)$, являющейся решением краевой задачи:

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(t)\Delta + \int\limits_0^T K_1(t,s)\Delta(s)ds + \sum_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} K_{2j}(t)\dot{\Delta}(s)ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_2(t,s) - K_{2j}(t)\Big]\dot{x}^{(0)}(s)ds,$$

$$B\Delta(0) + C\Delta(T) = 0,$$

установим оценку $\|\Delta^{(1)}\|_1 \leq \gamma_1^* \varepsilon(h) T \|\dot{x}^{(0)}\|_1 = \gamma_1^* \varepsilon(h) T \|\dot{y}\|_1$.

Продолжая последовательные приближения , $(k+1)$-приближение определим из краевой задачи:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K_1(t,s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} K_{2j}(t)\dot{x}(s)ds + f(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_2(t,s) - K_{2j}(t)\Big]\dot{x}^{(k)}(s)ds,$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k+1)}(t) = x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)$,$k = 1,2,...$, будет решением краевой задачи:

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(t)\Delta + \int\limits_0^T K_1(t,s)\Delta(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} K_{2j}(t)\dot{\Delta}(s)ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_2(t,s) - K_{2j}(t)\Big]\dot{\Delta}^{(k)}(s)ds,$$

$$B\Delta(0) + C\Delta(T) = 0$$

и имеет место оценка

$$\|\Delta^{(k+1)}\|_1 \le \gamma_1^* \varepsilon(h) T \|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1, \qquad k = 1,2,\ \dots\ . \tag{23}$$

Вновь через $\widetilde{z}^{(k+1)}(t)$ обозначив $\dot{\Delta}^{(k+1)}(t)$, получим, что эта функция является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\widetilde{z}(t) = \int\limits_0^T K_{2h}(t,s)\widetilde{z}(s)ds + \widetilde{F}^{(k+1)}(t),$$

где $\widetilde{F}^{(k+1)}(t) = A(t)\Delta^{(k+1)}(t) + \int\limits_0^T K_1(t,s)\Delta^{(k+1)}(s)ds + \sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_2(t,s) - K_{2j}(t)\Big]\dot{\Delta}^{(k)}(s)ds.$

Так как, $h \in (0,h_0] : mh = T$, то из (18) следует неравенство

$$\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 \le \mu_h \Big[\gamma_1^* \varepsilon(h) T(\alpha + \beta_1 T)\|\dot{\Delta}^{(k-1)}\|_1 + \varepsilon(h) T \|\dot{\Delta}^{(k-1)}\|_1\Big] =$$

$$= \varepsilon(h) T \mu_h \Big[\gamma_1^*(\alpha + \beta_1 T) + 1\Big]\|\dot{\Delta}^{(k-1)}\|_1. \tag{24}$$

Из неравенства (24) и из условия (19) получим равномерную на $[0,T]$ сходимость последовательности функций $\dot{x}^{(k+1)}(t)$ к непрерывной на $[0,T]$ функции $w(t)$ при $k \to \infty$. Тогда в силу неравенства (22) последовательность $x^{(k+1)}(t)$ при $k \to \infty$ равномерно на $[0,T]$ сходится к $x(t)$ – решению задачи (1), (2) и $w(t) = \dot{x}(t)$. На основании неравенств (23),(24) имеем:

$$\|x^{(k+1)} - y\|_1 \le \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1 + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_1 + ... + \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_1 +$$

$$+\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 \le \gamma_1^* \varepsilon(h) T \Big[\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 + \|\dot{\Delta}^{(k-1)}\|_1 + ... + \|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1 + \|\dot{y}\|_1\Big] \le$$

$$\leq \gamma_1^* \varepsilon(h) T \Big\{ [q_1(h)]^k \|\dot{x}\|_1 + [q_1(h)]^{k-1} \|\dot{x}\|_1 + ... + q_1(h)\|\dot{x}\|_1 + \|\dot{x}\|_1 \Big\} =$$

$$= \gamma_1^* \varepsilon(h) T \Big[[q_1(h)]^k + [q_1(h)]^{k-1} + ... + 1 \Big] |\dot{y}\|_1.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим:

$$\|x - y\|_1 \leq \frac{\gamma_1^* \varepsilon(h) T}{1 - q_1(h)} \|\dot{y}\|_1. \tag{25}$$

Так как

$$\|\dot{y}\|_1 \leq \mu_h \Big(\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1 \Big) \max(\|f\|_1, \|d\|),$$

то

$$\|x - y\|_1 \leq \frac{\gamma_1^* \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1]}{1 - \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1]} \max(\|f\|_1, \|d\|).$$

Отсюда и из корректной разрешимости задачи (3), (4) следует:

$$\|x\|_1 \leq \|x - y\|_1 + \|y\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{\gamma_1^* \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1]}{1 - \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1]} \max(\|f\|_1, \|d\|) + \|y\|_1 = \frac{\gamma_1^* q_2(h) + \gamma_1^* - \gamma_1^* q_2(h)}{1 - q_2(h)} \max(\|f\|_1, \|d\|) =$$

$$= \frac{\gamma_1^*}{1 - \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1]} \max(\|f\|_1, \|d\|). \tag{26}$$

Покажем единственность решения задачи (1), (2). Пусть $x(t)$, $\widetilde{x}(t)$ являются решениями задачи (1), (2). Тогда их разность $\Delta x(t) = x(t) - \widetilde{x}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x + \int\limits_0^T K_1(t, s)\Delta x(s) ds + \sum_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} K_{2j}(t)\Delta \dot{x}(s) ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K_2(t, s) - K_{2j}(t) \Big] \Delta \dot{x}(s) ds \tag{27}$$

и однородным краевым условиям

$$B\Delta x(0) + C\Delta x(T) = 0. \tag{28}$$

Из корректной разрешимости задачи (3), (4) следует, что функция $\Delta x(t)$ является единственным решением задачи (27), (28) и для него справедлива оценка:

$$\|\Delta x\|_1 \leq \gamma_1^* \varepsilon(h) T \|\Delta \dot{x}\|_1. \tag{29}$$

Из (28) и уравнения (26), аналогично (23), следует неравенство:

$$\|\Delta \dot{x}\|_1 \leq \varepsilon(h) T \mu_h \Big[\gamma_1^* (\alpha + \beta_1 T) + 1 \Big] \|\Delta \dot{x}\|_1 = q_2(h) \|\Delta \dot{x}\|_1.$$

Учитывая, что $q_2(h) < 1$, получим $\|\Delta \dot{x}\|_1 = 0$. Тогда из (29) следует, что $\|\Delta x\|_1 = 0$, т.е. $x(t) = \widetilde{x}(t)$ для всех $t \in [0, T]$. Отсюда и из (26) следует корректная разрешимость задачи (1), (2) с константой:

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_1^*}{1 - \varepsilon(h) T \mu_h [\gamma(\alpha + \beta_1 T) + 1]}.$$

Теорема 2 доказана.

Задача (3), (4) является линейной двухточечной краевой задачей для интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^T K_1(t,s)y(s)ds + \sum_{j=1}^{m} K_{2j}(t)[y(jh) - y((j-1)h)] + f(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in R^n, \tag{30}$$

$$By(0) + Cy(T) = d \quad d \in R^n. \tag{31}$$

Теперь используя доказанные теоремы и результаты для задачи (30), (31) аналогично [10] можно получить необходимые и достаточные условия корректной разрешимости исходной задачи (1), (2) в терминах аппроксимирующих краевых задач (30), (31).

Цитированная литература

1. **Некрасов А.И.** //Тр. ЦАГИ, 1934. вып. 190. С. 1–25.
2. **Быков Я.В.** О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1957.
3. **Виграненко Т.И.** //Зап. Ленинградского горн. ин-та. 1956. Т. 33, вып. 3. С. 177–187.
4. **Кривошейн А.И.** Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1962.
5. **Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А.** //Укр. матем. журнал. 1996. Т. 48, № 11. С. 1576–1579.
6. **Шароглазов В.С., Васильев В.В.** //Дифф. и интегр. ур-ния. 1975. вып. 3. С. 212–217.
7. **Артыков А.Ж.** //Исслед. по интегро-дифф.ур-ниям. Бишкек:Илим. 1994. вып. 25. С. 110–113.
8. **Фодчук О.В.** //Методы исследования дифф. и функц.-дифф. ур-ний. АН ССР. Ин-т. матем. Киев, 1990. С. 101–109.
9. **Джумабаев Д.С.** //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 8, № 2. С. 44–48.
10. **Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А.** //Дифф. ур-ния. 2010. Т. 46, № 4. С. 550–564.
11. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 28.05.2010г.

IDC 452

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 48–55*

УДК 523.98, 530.182

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОРФОЛОГИИ В АНАЛИЗЕ ТОПОЛОГИИ ФОТОСФЕРНЫХ АКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ОБЛАСТЕЙ СОЛНЦА

Л. М. Каримова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 klyailya@mail.ru

Методами геометрии случайных полей описывается эволюция активных областей Солнца (АО). Оцениваются характеристика Эйлера и периметр по множеству выбросов поля за заданный уровень для фрагментов Michelson Doppler Imager (MDI), содержащих вспышечные АО. Полученные результаты показывают, что топология АО и фона вблизи АО качественно не отличаются. Однако динамика морфологических функционалов АО отличается от динамики фоновых областей. Как правило, серии вспышек предшествуют сильные изменения в морфологических характеристиках.

Основной целью данной работы является описание динамических режимов магнитного поля активных областей (АО) по MDI данным. Кроме того, в статье приводятся сравнительные характеристики топологии фона и АО, а также рассматриваются прогностические аспекты подхода, путем сопоставления временных вариаций функционалов Минковского для АО с потоком вспышек в них. Экспериментальная выборка содержала вспышечно-активные АО с событиями класса M и X. Идеи о связи сложности магнитного поля с возможностью возникновения вспышки были неявно выражены еще в основных критериях прогноза в работе [1], где рассматривались изменения конфигурации магнитного поля, связанные с возникновением новых полей внутри или поблизости от АО и слияние отдельных пятен вследствие их эволюции. Другим критерием служило число и характер изгибов нейтральной линии, которая формируется топологией магнитных полей в АО, хотя и определяется метрическими свойствами. Признаки, основанные на метрике, доступнее для вычислений. Поэтому топологические перестройки были сведены к метрическим.

В недавнем модифицированном списке [2], основанном на большой статистике, полученной по данным MDI, предвестниками считаются максимальное значение градиента продольного магнитного поля магнитограммы, длина нейтральной линии и число сингулярных точек поля. Числом сингулярных точек предлагается считать арифметическую сумму максимумов и седел векторного поля магнитограммы [3, 4]. Однако сумма числа максимумов и седел не является гомотопическим инвариантом в отличие от характеристики Эйлера. Последняя представляет собой сумму числа максимумов и минимумов за вычетом числа седел [5].

Keywords: *Solar magnetic field, Mathematical morphology, Solar active region, Random field*
2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

В данной работе для описания топологии АО используются два функционала Минковского [6]: характеристика Эйлера χ и периметр W_1. Первый из них оценивает сложность поля на множестве его выбросов выше заданного уровня. Второй связан с полной вариацией скалярного поля в ограниченной области.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приводятся необходимые математические сведения из функционального анализа, которые позволяют ввести единственную конечную меру для компактной области магнитограммы. Этой мерой является полная вариация продольной компоненты магнитного поля, связанная с функционалом формулой ко-площади. Раздел 2 содержит результаты оценок топологии поля АО в сравнении с фоном. В Разделе 3 сравниваются вариации функционалов со вспышечной динамикой области. Заключение резюмирует результаты исследования.

Полная вариация поля, периметр и характеристика Эйлера.

Двумя из трех упомянутых выше предвестников вспышек являются максимальные значения горизонтального градиента магнитного поля

$$|\nabla_h B_z|(x_1, x_2) = (|\partial B_z/\partial x_1|^2 + |\partial B_z/\partial x_2|^2)^{1/2} \tag{1}$$

и длина нейтральной линии [2]. В данной работе используется более корректная мера – полная вариация поля в замкнутой области

$$\mu(A) = \int_A |\nabla_h B_z| dx_1 dx_2. \tag{2}$$

Она вычисляется через сумму периметров изолиний поля на различных уровнях u множества выбросов

$$A_u = \{(x_1, x_2)|B_z \geq u\}$$

и таким образом связана с функционалом Минковского W_1.

Пусть $X \subset R$ и $g : X \to [-\infty, \infty]$ – непрерывная функция. Проведем на графике $(x, g(x))$ горизонтальную прямую $g(x) = h$ и рассмотрим для разных h целочисленную многозначную функцию, равную числу пересечений графика $g(x)$ с нашей прямой:

$$N(h, g) = \sharp\{x|g(x) = h\}. \tag{3}$$

При некоторых значениях h она может равняться нулю или бесконечности. Эту функцию называют индикатрисой Банаха. На $X = [a, b]$ она равна нульмерной мере Хаусдорфа $\mu_H^0(\Omega)$ для множества точек $\Omega = (g^{-1}(\alpha) \cap [a, b])$ [7]. Индикатриса связана с очень важной для нас величиной – мерой на компактном подмножестве A цифрового изображения.

Пусть $\Omega \in R^2$ и $f(x, y) \in C^2$ – гладкая поверхность. Тогда все ее Морсовские критические точки изолированы: они не образуют связного множества, т.е. не лежат на некоторой кривой. Иначе говоря, такое множество $E = \{(x, y)|\nabla f = 0\}$ имеет нулевую «длину» $\mu_H^1(E) = 0$, где μ_H^1 одномерная мера Хаусдорфа. С другой стороны, множество ее уровней $S = f^{-1}(t) \cap \Omega$ будет одномерным C^2-многообразием почти для каждого уровня t. Индикатрисой Банаха является множество $\mu_H^1(f^{-1}(t) \cap \Omega)$, образованное длинами изолиний $length[f^{-1}(t) \cap \Omega]$, полученных пересечением графика $\{(x, y), z = f(x, y)\}$ с плоскостью $z = t$. Вариация $\|f\|_V$ определяется теперь так называемой формулой *ко-площади*, которая справедлива для всех липшиц-непрерывных функций [9, 10]:

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} length[f^{-1}(t) \cap \Omega] dt. \tag{4}$$

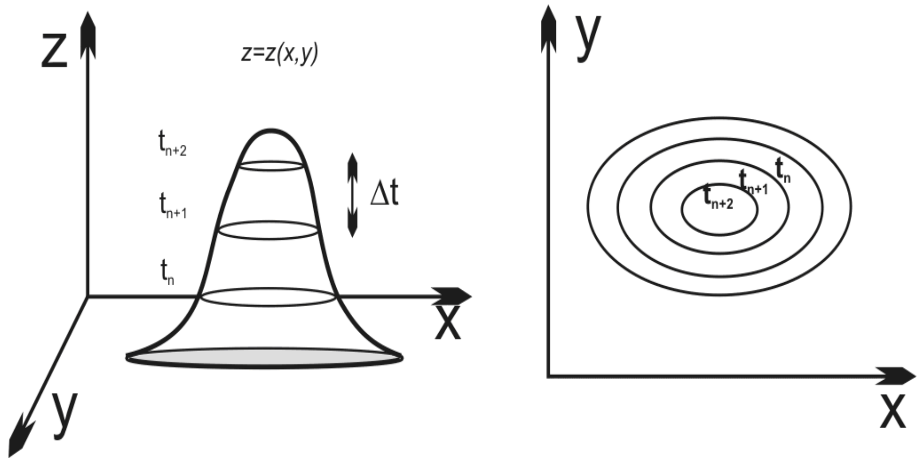

Рис. 1: Иллюстрация формулы ко-площади.

Таким образом, полную вариацию скалярного поля в замкнутой области можно измерить суммой длины периметров изолиний (Рис.1).

В случае стохастического поля, для которого условие $f(x, y) \in C^2$ выполнимо лишь в слабом смысле, множество уровня $S = f^{-1}(t) \cap \Omega$ может и не быть кусочно-непрерывной кривой. Поэтому вместо множества уровней обычно рассматривают множество выбросов за уровень $A_t = \{(x, y)|f(x, y) \geq t\}$. Следует заметить, что упомянутые периметры не имеют отношения к традиционной нейтральной линии. Вторым морфологическим фукционалом, который используется в работе, является характеристика Эйлера. Она подробно описана в предыдущих статьях [11,12]. Напомним, что она измеряет топологическую сложность поля [13,14,15] с помощью альтернированной суммы числа критических точек:

$$\chi = \sharp M + \sharp m - \sharp S,$$

где $\sharp M$,$\sharp m$ и $\sharp S$ – количество максимумов, минимумом и седловых точек, соответственно.

Рис.2 иллюстрирует применение модели для гладкого поля. Для 3D поля (Рис.2A) на заданном уровне были получены выбросы поля (Рис.2B). Одно из множеств выбросов выше уровня показано на Рис.2D. Видны три максимума (M) и одно седло (S). На Рис.2C приведено антиградиентное векторное поле с характеристикой Эйлера $\chi = 3 * \sharp M - 1 * \sharp S$.

Оба функционала легко вычисляются по множеству выбросов поля и обладают морфологическими свойствами [16]. Кроме того, характеристика Эйлера является гомотопическим инвариантом [17], а периметр интегральной характеристикой, которая хорошо определена.

Топология поля активных областей.

В предыдущих статьях [11, 12] описывалась топология фонового магнитного поля. Оказалось, что характеристика Эйлера для фонового поля ассиметрична, отличается от аналога для гауссовского поля. В этой работе проверяется различие в топологии поля АО и фона. Кроме того, возникает вопрос меняется ли топология поля АО на интервалах времени порядка 10 дней и связаны ли эти изменения со вспышками? Для анализа полей АО были использованы MDI-магнитограммы полного диска Солнца космической обсерватории SOHO [18]. Размер изображения полного диска 1024×1024 пикселей с разрешением $2''$/пиксель, а дискрет по времени 96 минут. Уровень шума составляет 20 Гс [19]. Выборка содержала 10 областей, которые являются примерами наиболее активных областей по вспышкам класса X и M.

Для ответа на первый вопрос из магнитограмм полного диска Солнца для разных активных областей брались фрагменты размером 200×200 пикселей, содержащие рассматриваемую АО

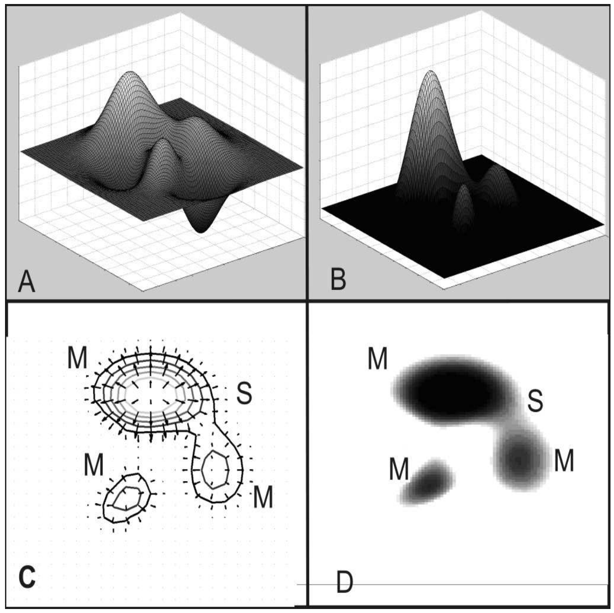

Рис. 2: Верхняя панель: Скалярное 3D поле (слева) и его выбросы за уровень. Нижняя панель: множество уровней (справа) и векторное антиградиентное поле для него (слева).

область, и фрагменты фонового поля такого же размера. В качестве примера на Рис.3 приведены полученные графики $\chi(u)$ для АО 09393, в сравнении с фоновым полем, находящимся вблизи АО. Больший размах характеристики Эйлера для фона объясняется более мелкой структурой фона по сравнению со структурой АО. Формы кривых очень похожи, с характерной ассиметрией в область низких значений поля, хотя и отличаются по масштабу. Абсолютные значения отношений $k = |\frac{\chi_{min}}{\chi_{max}}|$ для активной области и фона вблизи активной области близки и равны 1.81 и 1.90 соответственно. Этот результат неудивителен, поскольку основной вклад в значения $\chi(u)$ вносит фон, расположенный вблизи АО. Известно, что большие отрицательные значения характеристики эквивалентны большому количеству пор областей одной полярности на фоне противоположной полярности. Топология фонового поля довольно хорошо описывается логнормальной моделью (Рис.4), что указывает на наличие перемежаемости поля [12]. Для проверки правомерности такой модели для топологии АО также был использован пакет программ Infinitely Divisible Cascades (IDC), написанный в среде MatLab. Модель бесконечно делимых каскадов была предложена Чайнайс, Абри и Риди [19] и позволяет моделировать 1D и 2D мультифрактальные процессы с предписанной регулярностью, в частности, логнормальный процесс с заданными первыми двумя моментами – средним m и стандартным отклонением σ. Оказалось, что модель с параметрами $m = -0.15$ и $\sigma = 0.2$ также достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальную кривую $\chi(u)$ для АО.

Эволюция топологических характеристик активных областей.

Для различных АО был проведен анализ изменения характеристики Эйлера и периметра во времени в сравнении с изменением уровня вспышечной активности. Из магнитограммы вырезался фрагмент 200×200 пикселей, содержащий АО. Выборка для каждой области состояла примерно из 85 фрагментов, т.е. 6–8 суток. Фрагменты, соответствующие краям лимба, исключались. Для каждого фрагмента вычислялись характеристика Эйлера $\chi(u)$ и периметр W_1. В результате была получена возможность проследить вариации во времени характеристик при переходе от фрагмента к фрагменту на одном и том же уровне с дискретом 96 минут.

Ниже на Рис. 5–7 представлена эволюция характеристики Эйлера χ во времени для несколь-

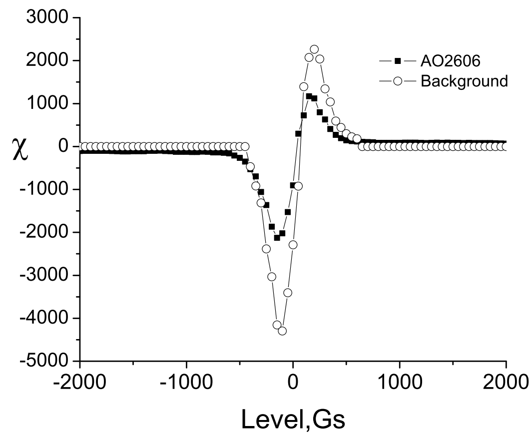

Рис. 3: Сравнение характеристики Эйлера для активной области и фона. Уровень напряженности поля по оси абсцисс в гауссах.

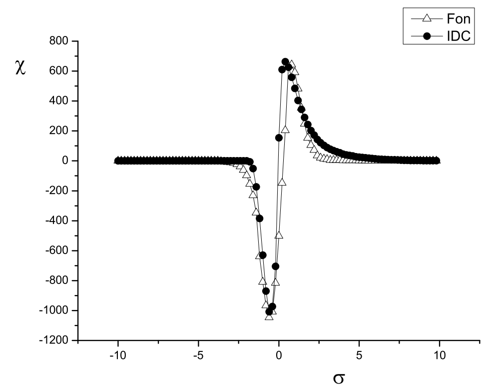

Рис. 4: Моделирование поля фона логнормальным полем. Сравнение характеристик Эйлера для модели IDC и поля фона вблизи АО.

ких уровней, на примере областей АО 9393 и АО 10656. На всех приведенных графиках время и мощность вспышек представлена столбиками. Мощность вспышки отложена на правой вертикальной шкале. Высота столбика соответствует величине вспышки. Перевод класса вспышки в числовую величину осуществлялся стандартным способом. Балл вспышки класса С остается без изменений, класса М умножается на 10, класса Х умножается на 100, а для класса В делится на 10. В данной работе анализировались вспышки класса М и Х. Вспышки меньших баллов не рассматривались.

Выбор указанных областей был обусловлен прежде всего тем, что для них существовал достаточно длительный спокойный интервал времени, предваряющий серию вспышек. Кроме того, предполагается, что они являются представителями типичных сценариев вспышечной активности. Активная область АО 9393 была самой большой группой пятен в 23 цикле. Группа была видна на диске с 27 марта по 2 апреля 2001г. Она дала серию мощных вспышек класса М и Х: 29 марта вспышку класса Х 1.7, затем серию М вспышек, 2 апреля серию Х вспышек, в том числе вспышка классом больше Х 17. На Рис. 5 видно, что примерно за 12 часов перед серией вспышек наблюдается симметричный «провал» характеристики Эйлера на всех уровнях, после чего она возвращается к предшествующему уровню. Затем происходит возрастание абсолютных значений характеристики, предваряя вспышечные явления 2-го июля.

Аналогичный сценарий наблюдается для области АО 10656 (Рис. 6). Эта группа стала видна на диске 7 августа 2004 года и по 11 число вела себя спокойно. 12.08 она дала небольшую вспышку класса М1.2; 13.08 началась серия вспышек со вспышки М1.2 , затем вспышку класса Х1.0. Далее, 14.08 происходит серия М-вспышек. 15.08 мощная М9.4 вспышка. Отличие от области АО 09393, заключается в том, что серия вспышек началась без интервала задержки, а фактически сразу же после возврата характеристики Эйлера на предвспышечный уровень. Следует отметить, что перед одиночной М вспышкой 11 числа, возникли две резких депрессии в характеристике, которые хотелось бы также считать предвестником.

Переходя к результатам поведения периметра, следует напомнить, что W_1 позволяет отследить вклад различных уровней напряженности в полную вариацию поля. В рамках гипотезы о всплытии потока, предваряющего вспышки, изменения в W_1 могут быть интерпретированы

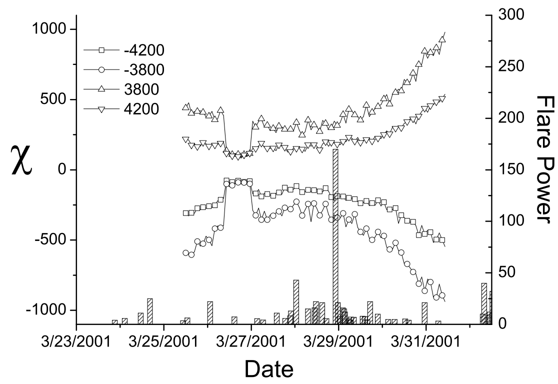

Рис. 5: Изменение характеристики Эйлера для разных уровней напряженности с течением времени для АО 09393.

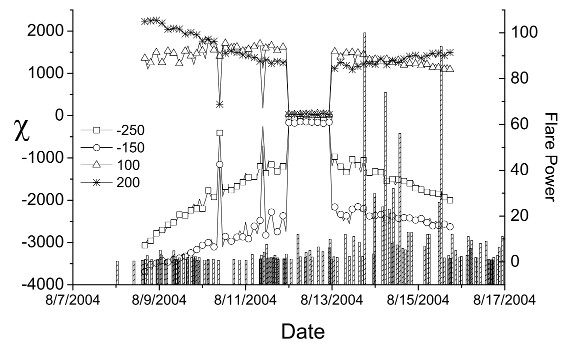

Рис. 6: Изменение характеристики Эйлера для разных уровней напряженности с течением времени для АО 10656.

как сопутствующие изменения в текстуре поля, вызванные новым магнитным полем, которые заключаются в появлении дополнительных контуров, окружающих новые магнитные элементы. Оказалось, что практически всем сериям вспышек сопутствует значительное увеличение значений периметра с последующим спадом. На Рис.7 приведена типичная картина такого изменения для больших уровней напряженности. Лишь однажды, для АО10656 (см. Рис.8), серия вспышек сопровождалась резкой депрессией.

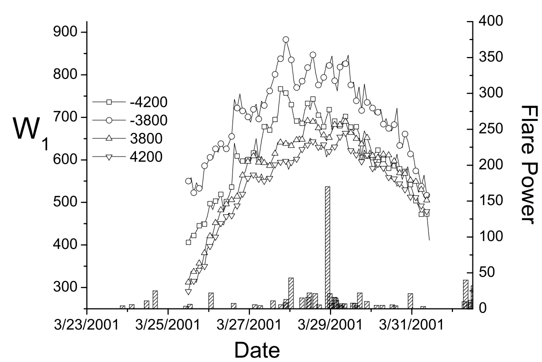

Рис. 7: Эволюция периметра во времени для АО 09393.

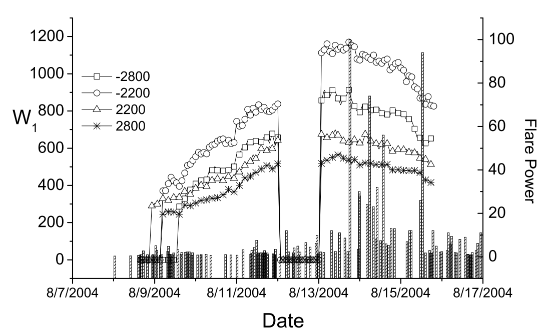

Рис. 8: Изменение периметров W_1 для разных уровней напряженности с течением времени для АО 10656.

Заключение.

Целью работы являлось описание эволюции магнитного поля активных областей Солнца в терминах функционалов Минковского и геометрии случайных полей. Морфологические функционалы обладают свойствами инвариантности, непрерывности и аддитивности и, следовательно, являются идеальными характеристиками пространственной сложности магнитограмм. Были использовали два из них: характеристика Эйлера $\chi \equiv W_2$ и периметр W_1 для фрагментов MDI, содержащих АО. Характеристика Эйлера, которая является суммой числа максимумов и минимумов поля за вычетом числа седел, оценивает сложность поля по уровням. Периметр связан формулой ко-площади с единственной конечной мерой скалярного поля- ее полной вариацией. Она выражается интегралом от модуля градиента, который известен как один из предвестников вспышек. Был исследован ряд наиболее вспышечно-продуктивных активных областей по классам M и X. Для того, чтобы проследить эволюцию упомянутых характеристик были использованы фрагменты магнитограмм SOHO в дискретной сетке временного аргумента $t = k\triangle, \triangle = 96^m$. Для каждого фрагмента, содержащего АО, были построены множества выбросов, образованных пикселями изображения, в которых значения поля $B_z \geq u$, где u заданный уровень напряженности в Гауссах. В итоге были получены два типа зависимостей: $\chi(u)$ и $W_1(u)$, которые удобно сравнивать с теоретическими моделями случайных полей и с аналогичными графиками для фона. Было найдено, что формы кривых $\chi(u)$ для АО и фона практически совпадают с точностью до масштабного множителя. Для обоих полей характерна ассиметрия характеристики $\chi(u)$. Топология выбросов поля в АО удовлетворительно аппроксимируется моделью логнормального поля.

Второй тип зависимости – это эволюция характеристик на одном и том же уровне напряженности для каждой АО. Эволюционные зависимости сопоставлялись с синхронным потоком вспышек класса M и X в АО. Исследуемые активные области демонстрируют разные сценарии развития морфологических характеристик во времени. Но в отличии от фоновых полей, когда графики $\chi(u, t)$ и $W_1(u, t)$ представляют собой хаотические флуктуации относительно какого-то уровня или тренда, для активных областей наблюдаются значительные, синхронизованные на разных уровнях напряженности скачки и перепады в характеристиках. Вспышки, как правило, предваряются значительными депрессиями в уровне Эйлеровой характеристики, причем эти изменения синхронизуются на многих уровнях напряженности. Вспышкам сопутствует или предваряет значительный подъем периметра на высоких уровнях напряженности.

Описанные дескрипторы обобщают три известных критерия вспышечной активности: значения градиента, длину нейтральной линии и число сингулярных точек векторного поля. Периметр и характеристика Эйлера обладают морфологическими свойствами. Характеристика Эйлера, кроме того, является гомотопическим инвариантом. Таким образом описанные характеристики позволяют отслеживать эволюцию топологии АО и демонстрируют интересные связи со вспышечной активностью, которые могут оказаться полезными для практики прогноза.

Благодарности.

Автор благодарен Н.Г. Макаренко за полезные замечания и обсуждения в проводимых исследованиях.

Цитированная литература

1. **Смит Дж.Б.** Наблюдения и прогноз солнечной активности. М., 1976.
2. **Cui Y., Li R., Zhang L.,He Y., Wang H.** //Solar Phys. 2006. V.237. P. 45–59.
3. **Wang H, Wang J.** //Astron. Astrophys. J. 1996. V. 313. P. 285–296.
4. **Wang H.** // Solar Phys. 1997. V. 174. P. 265–279.
5. **Matsumoto Y.** //An Introduction to Morse Theory. Translation of Mathematical Monographs. 2002. V. 208.
6. **Мекке K.** //Integralgeometrie in der Statistischen Physik : Perkolation, komplexe Flussigkeiten und die Struktur des Universums. Reihe Physik; Bd.25. Verlag Harri Deutsch. 1994.
7. **Morgan F.** Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide. Academic Press. 2000.

8. **Ziemer W. P.** Weakly differentiable functions, Graduate Texts in Mathematics 120, Springer-Verlag. NY. 1989.

9. **Chan T.F., J.Shen J.** Image processing and analysis. Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods. SIAM. Philadelphia, 2005.

10. **Каримова Л.М.** //Матем. журнал. 2010. Т. 10, № 1. P. 60–69.

11. **Князева И.С., Каримова Л.М., Мильков Д.А., Макаренко Н.Г.** //ПАЖ. 2009. В печати.

12. **Adler R.J.** The Geometry of Random Fields. John Wiley. N.Y. 1981.

13. **Worsley K.J.** //Chance. 1996. V.9. P. 27–39.

14. **Longuet-Higgins M.S.** //Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1957. V. 249. P. 321–387.

15. **Serra J.** Image analysis and mathematical morphology. Academ.Press. 1988.

16. **Guillemin V., Pollack A.** Differential Topology. NY. Prentice-Hall. 1974.

17. http://soi.stanford.edu/magnetic/index5.html

18. **Scherrer P.H., Kosovichev A.G., Rosenberg W., et al.** //Solar Phys. 1995. V. 162. P. 129–188.

19. **Chainais P.** //European Physical Journal B. 2006. V. 51, № 2. P. 229–243.

Поступила в редакцию 26.04.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 56—66*

УДК 517.925.46

КРИТЕРИИ БЕЗСОПРЯЖЕННОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. Е. Кудабаева, Р. Ойнаров

Евразийский Национальный Университет им Л.Н.Гумилева
010008 Астана Мунайтпасова, 5 o_ryskul@mail.ru

Вариационным методом получены критерии безсопряженности полулинейного дифференциального уравнения $(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0$, $1 < p < \infty$, с неотрицательными коэффициентами, которые могут быть сингулярными на концах интервала.

1. Введение Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. На интервале I рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, \tag{1}$$

где ρ, v и $\rho^{1-p'}$ – неотрицательные локально суммируемые на I функции, причем $v \ne 0$.

Функцию $y : I \to R$ назовем решением уравнения (1), если она вместе с $\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t)$ локально абсолютно непрерывная на I и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду (п.в.) на I.

Пусть $I_0 \subseteq I$ – замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал.

Следуя определениям из [1, с.20], уравнение (1) назовем безсопряженным на I_0, если любое нетривиальное его решение имеет не более одного нуля на I_0, в противном случае уравнение (1) называется сопряженным на I_0.

К понятиям безсопряженности, сопряженности близки следующие понятия (см. [1, с.193]).

Пусть $c \in I$. Точка β, $c < \beta < b$, называется первой правой фокусной точкой точки c по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение y уравнения (1) такое, что $y'(c) = 0 = y(\beta)$ и $y(t) \ne 0$ на $[c, \beta)$. Подобным образом, с условием $y'(c) = 0 = y(\alpha)$ и $y(t) \ne 0$ на $(\alpha, c]$, $a < \alpha < c$, определяется первая левая фокусная точка α точки c.

Уравнение (1) называется право безфокусным (лево безфокусным) на $[c, \beta)$ ($(\alpha, c]$), если не существует правой (левой) фокусной точкой точки $c \in I$ по отношению к уравнению (1) в (c, β) ((α, c)).

Качественные свойства уравнения (1), особенно вопросы осцилляторности, неосцилляторности, достаточно хорошо изучены и полученные результаты подытожены в книге [1].

Keywords: *Half-linear differential equation,conjugate points, disconjugate,variational method,Hardy inequalities*
2000 Mathematics Subject Classification: 34C10, 34C15

Однако мало исследованы вопросы сопряженности, безсопряженности уравнения (1) на заданном интервале с возможным сингулярным концом, а также существования или не существования фокусной точки для заранее заданной точки.

В данной работе на основе вариационного принципа исследования осцилляционных свойств уравнения (1) и с применением результатов по весовым неравенствам Харди даются новые критерии сопряженности, безсопряженности уравнения (1) на заданном интервале, существования или не существования для заданной точки фокусной точки по отношению к этому уравнению.

Отметим, что уравнение (1) при $p = 2$ переходит в классическое уравнение Штурма-Лиувилля:

$$(\rho(t)y'(t))' + v(t)y(t) = 0. \tag{2}$$

Хотя вопросам безсопряженности уравнения (2) посвящены многочисленные работы (см., например, [1, 2, 3]), ниже из основных результатов при $p = 2$ могут быть получены новые признаки безсопряженности для уравнения (2).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $1 \le p < \infty$, $L_{p,\rho} \equiv L_{p,\rho}(I)$ – пространство п.в. конечных измеримых на I функции f для которых конечна норма

$$||f||_{p,\rho} = \left(\int\limits_a^b \rho(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если $\rho(t) \equiv 1$, то в этом случае будем писать $L_{p,\rho}(I) \equiv L_p(I)$, $||f||_{p,\rho} \equiv ||f||_p$.

Пусть $W^1_{p,\rho} \equiv W^1_p(\rho, I)$ совокупность локально абсолютно непрерывных на I функций f для которых конечна норма

$$||f||_{W^1_{p,\rho}} = ||f'||_{p,\rho} + |f(t_0)|, \tag{3}$$

где $t_0 \in I$ некоторая фиксированная точка.

Пусть $\overset{\circ}{AC}_p(I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : suppf \subset I\}$, а $AC_{p,l}(I)$, $AC_{p,r}(I)$ совокупность функций из $W^1_{p,\rho}$, обращающихся в нуль в некоторой (для каждой функции своей) окрестности соответственно в левом, правом конце интервала I.

Замыкания множества $\overset{\circ}{AC}_p(I)$, $AC_{p,l}(I)$ и $AC_{p,r}(I)$ по норме (3) обозначим через $\overset{\circ}{W}(\rho, I)$, $W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I)$ соответственно.

Пусть $I_0 = (\alpha, \beta)$,$a < \alpha < \beta < b$. Тогда в силу наложенных условий на функцию ρ

$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I_0) = \{f \in W^1_p(\rho, I_0) : f(\alpha) = f(\beta) = 0\}$, $W^1_{p,l}(\rho, I_0) = \{f \in W^1_p(\rho, I_0) : f(\alpha) = 0\}$, $W^1_{p,r}(\rho, I_0) = \{f \in W^1_p(\rho, I_0) : f(\beta) = 0\}$ и функционал $||f'||_{p,\rho,I_0}$ становится нормой эквивалентной норме (3) в этих подпространствах . Функцию $f \in W^1_p(\rho, I)$ будем считать нетривиальной и пишем $f \neq 0$, если $||f'||_{p,\rho,} \neq 0$.

Из вариационного принципа в качественной теории полулинейных дифференциальных уравнений [1, с.286] имеем:

Теорема A. *Пусть $I_0 = (\alpha, \beta) \subset I$. Уравнение (1) право (лево) безфокусно на $[\alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta]$) тогда и только тогда, когда*

$$F(f, \alpha, \beta) = \int\limits_\alpha^\beta \left[\rho(t)|f'(t)|^p - v(t)|f(t)|^p\right] dt \ge 0 \tag{4}$$

для всех нетривиальных функций $f \in W^1_{p,l}(\rho, I_0)$ ($f \in W^1_{p,r}(\rho, I_0)$).

Теорема B. *Уравнение (1) безсопряженно на $I_0 = (\alpha, \beta) \subseteq I$ тогда и только тогда, когда $F(f, \alpha, \beta) > 0$ для всех нетривиальных $f \in \overset{\circ}{AC}_p(I_0)$.*

Пусть $I_0 = (\alpha, \beta) \subseteq I$. На множествах $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I_0)$, $W^1_{p,l}(\rho, I_0)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I_0)$ рассмотрим весовое неравенство Харди в дифференциальной форме [2]:

$$\int_{\alpha}^{\beta} v(t)|f(t)|^p dt \le C \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)|f'(t)|^p dt. \qquad (5)$$

Неравенство (5) и его различные обобщения в последнее пятидесятилетие стали предметом исследования многих авторов. Историю вопроса и результаты исследований можно найти в книгах [4,5,6].

Наилучшую постоянною C в (5) на множествах $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I_0)$, $W^1_{p,l}(\rho, I_0)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I_0)$ соответственно обозначим $C = J_0(I_0)$, $C = J_l(I_0)$ и $C = J_r(I_0)$.

Из результатов работ, приведенных в книге [6] и в [7], имеет место

Теорема C. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\max\{A_1(\alpha,\beta),\ A_2(\alpha,\beta)\} \le J_l(\alpha,\beta) \le \min\{\gamma_{p,1}A_1(\alpha,\beta),\ \gamma_{p,2}A_2(\alpha,\beta)\}, \qquad (6)$$

$$\max\{A_1^*(\alpha,\beta),\ A_2^*(\alpha,\beta)\} \le J_r(\alpha,\beta) \le \min\{\gamma_{p,1}A_1^*(\alpha,\beta),\ \gamma_{p,2}A_2^*(\alpha,\beta)\},$$

где $\gamma_{p,1} = p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}$, $\gamma_{p,2} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}$,

$$A_i(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha<x<\beta} A_i(\alpha,\beta,x),\ A_i^*(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha<x<\beta} A_i^*(\alpha,\beta,x),\ i=1,2;$$

$$A_1(\alpha,\beta,x) = \left(\int_{\alpha}^{x} \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1} \int_{x}^{\beta} v(t)dt,\ A_1^*(\alpha,\beta,x) = \left(\int_{x}^{\beta} \rho^{1-p'}ds\right)^{p-1} \int_{\alpha}^{x} v(t)dt,$$

$$A_2(\alpha,\beta,x) = \left(\int_{\alpha}^{x} \rho^{1-p'}ds\right)^{-1} \int_{\alpha}^{x} v(t) \left(\int_{\alpha}^{t} \rho^{1-p'}ds\right)^{p} dt,$$

$$A_2^*(\alpha,\beta,x) = \left(\int_{x}^{\beta} \rho^{1-p'}ds\right)^{-1} \int_{x}^{\beta} v(t) \left(\int_{t}^{\beta} \rho^{1-p'}ds\right)^{p} dt, \quad \alpha < x < \beta.$$

Весовая функция ρ может вырождаться на концах интервала I, поэтому имеет место

Теорема D. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*

(i) если $\rho^{1-p'} \in L_1(I)$, *то для любой функции* $f \in W^1_p(\rho, I)$ *существует* $\lim\limits_{t\to a+} f(t) \equiv f(a)$, $\lim\limits_{t\to b-} f(t) \equiv f(b)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = \{f \in W^1_p(\rho, I):\ \ f(a) = f(b) = 0\};$$

(ii) если $\rho^{1-p'} \in L_1(a,c)$ *и* $\rho^{1-p'} \notin L_1(c,b)$, $c \in I$, *то для любой функции* $f \in W^1_p(\rho, I)$ *существует* $f(a)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I) = \{f \in W^1_p(\rho, I):\ f(a) = 0\};$$

(iii) если $\rho^{1-p'} \notin L_1(a,c)$ *и* $\rho^{1-p'} \in L_1(c,b)$, $c \in I$, *то для любой функции* $f \in W^1_p(\rho, I)$ *существует* $f(b)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_{p,r}(\rho, I) = \{f \in W^1_p(\rho, I):\ f(b) = 0\};$$

(iv) если $\rho^{1-p'} \notin L_1(a,c)$ *и* $\rho^{1-p'} \notin L_1(c,b)$, $c \in I$, *то*

$$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I) = W^1_{p,r}(\rho, I) = W^1_p(\rho, I).$$

Утверждение теоремы D возможно известно, его можно вывести из леммы 1.6 работы [8], но мы приведем доказательство утверждения (ii), а остальные утверждения доказываются аналогичным образом.

Пусть $\rho^{1-p'} \in L_1(a,c)$ и $\rho^{1-p'} \notin L_1(c,b)$, $c \in I$. Тогда для $f \in W_p^1(\rho, I)$ имеем:

$$\int_a^c |f'(t)|dt \leq \left(\int_a^c \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b \rho |f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Откуда следует существование $f(a)$. Положим $M = \{f \in W_p^1(\rho, I) : \ f(a) = 0\}$.

Пусть $f \in W_{p,l}^1(\rho, I)$. Тогда существует $\{f_n\} \subset AC_{p,l}(I)$ такая, что $||f - f_n||_{W_{p,\rho}^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \int_t^{t_0} |f'(s) - f_n'(s)|ds + |f(t_0) - f_n(t_0)|$$

при $a < t < t_0 < b$, то, применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \max\left\{1, \left(\int_a^{t_0} \rho^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\right\} ||f - f_n||_{W_{p,\rho}^1}.$$

Откуда следует $f(a) = 0$, следовательно $W_{p,l}^1(\rho, I) \subset M$. Пусть $a < \alpha < b$. Тогда

$$f(\alpha) \left(\int_a^\alpha \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_a^\alpha \rho |f'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Пусть точка $\alpha^* = \alpha^*(a,\alpha) \in (a,\alpha)$ такова, что $\int_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'} = \int_a^{\alpha^*} \rho^{1-p'}$.

Пусть $f \in M$. Введем функцию

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & a < t \leq \alpha^*, \\ f(\alpha) \left(\int_{\alpha^*}^{t} \rho^{1-p'}\right) \left(\int_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-1}, & \alpha^* \leq t \leq \alpha, \\ f(t), & \alpha \leq t < b. \end{cases}$$

Очевидно, $f_\alpha \in AC_{p,l}(I)$. С учетом (7) имеем:

$$||f - f_\alpha||_{W_p^1} = \left(\int_a^\alpha \rho |f' - f_\alpha'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_a^\alpha \rho |f'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + |f(\alpha)| \left(\int_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \left(1 + 2^{\frac{1}{p'}}\right) \left(\int_a^\alpha \rho |f'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда следует, что $||f - f_\alpha||_{W_p^1} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Следовательно, $f \in W_{p,l}^1(\rho, I)$ и $W_{p,l}^1(\rho, I) = \{f \in W_p^1(\rho, I) : \ \ f(a) = 0\}$.

Теперь покажем, что $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I)$. В силу $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) \subset W^1_{p,l}(\rho, I)$ достаточно показать $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) \supset W^1_{p,l}(\rho, I)$. Пусть $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $a < \alpha < \beta < b$. В силу условия $\int\limits_\beta^b \rho^{1-p'} ds = \infty$ для каждого $\beta \in I$ найдется точка $\beta^* = \beta^*(\beta, b) \in (\beta, b)$ такая, что

$$|f(\beta)| \left(\int\limits_\beta^{\beta^*} \rho^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \left(\int\limits_\beta^b \rho(t) |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Построим функцию $f_{\alpha,\beta} \in \overset{\circ}{AC}_p\,(I)$:

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} f_\alpha(t), & a < t \leq \beta, \\ f(\beta) \left(\int\limits_\beta^{\beta^*} \rho^{1-p'} \right)^{-1} \int\limits_t^{\beta^*} \rho^{1-p'}, & \beta \leq t \leq \beta^*, \\ 0, & \beta^* \leq t < b. \end{cases}$$

Тогда на основания (7) и (8) имеем:

$$||f - f_{\alpha,\beta}||_{W^1_{p,\rho}} \leq \left(1 + 2^{\frac{1}{p'}}\right) \left(\int\limits_a^\alpha \rho |f'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + 2 \left(\int\limits_\beta^b \rho |f'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда $||f - f_{\alpha,\beta}||_{W^1_{p,\rho}} \to 0$, при $\alpha \to a$, $\beta \to b$. Следовательно, $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I)$. Теорема D доказана.

3. Основные результаты На основании теорем A и C имеем:

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $(\alpha, \beta) \subset I$. *Тогда*

(i) выполнение условия

$$\max\{A_1(\alpha, \beta),\ A_2(\alpha, \beta)\} \leq 1 \tag{9}$$

необходимо, а выполнение одного из условий

$$A_1(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1}, \quad A_2(\alpha, \beta) \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \tag{10}$$

достаточно, чтобы уравнение (1) было лево безфокусно на $(\alpha, \beta]$;

(ii) выполнение условия

$$\max\{A_1^*(\alpha, \beta),\ A_2^*(\alpha, \beta)\} \leq 1$$

необходимо, а выполнение одного из условий

$$A_1^*(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1}, \quad A_2^*(\alpha, \beta) \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p$$

достаточно, чтобы уравнение (1) было право безфокусно на $[\alpha, \beta)$.

Доказательство Теоремы 1. Докажем часть (i), а часть (ii) доказывается аналогичным образом. На основании теоремы A уравнение (1) лево безфокусно на $(\alpha, \beta]$, если и только, если выполнено (4) для всех нетривиальных $f \in W^1_{p,l}(\rho, (\alpha, \beta))$, что эквивалентно условию $J_l(\alpha, \beta) \leq 1$. Поэтому, если уравнение (1) лево безфокусно на $(\alpha, \beta]$, то $J_l(\alpha, \beta) \leq 1$. Откуда, в силу левой части оценки (6) имеем (9).

Обратно, если выполнено (10), то из правой оценки (6) имеем $J_l(\alpha,\beta)\le 1$, то есть уравнение (1) лево безфокусно на $(\alpha,\beta]$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Если выполнено условие*

$$\max\{A_1(\alpha,\beta),\ A_2(\alpha,\beta)\}>1 \quad (\max\{A_1^*(\alpha,\beta),\ A_2^*(\alpha,\beta)\}>1)\,,$$

то на полуинтервале $(\alpha,\beta]$ ($[\alpha,\beta)$) по отношению к уравнению (1) существует левая (правая) фокусная точка точки β (α).

Теперь исследуем вопрос безсопряженности уравнения (1) на интервале I.

Пусть

$$\int\limits_a^b \rho^{1-p'}(s)ds<\infty. \tag{11}$$

Точку $c_i\in I$, $i=1,2$, назовем серединной точкой для (A_i,A_i^*), если $A_i(a,c_i)=A_i^*(c_i,b)\equiv T_i(a,b)<\infty$, $i=1,2$.

Теорема 2. *Пусть $1<p<\infty$ и выполнено (11). Если уравнение (1) безсопряженно на I, то существует серединная точка для (A_i,A_i^*) и $T_i(a,b)\le 1$, $i=1,2$. Обратно, если существует серединная точка для (A_i,A_i^*) и $T_i(a,b)<\gamma_{p,i}^{-1}$, $i=1,2$, то уравнение (1) безсопряженно на I.*

Теорема 2 следует из следующей теоремы, имеющей самостоятельное значение.

Теорема 3. *Пусть $1<p<\infty$ и выполнено (11). Величина $J_0(a,b)<\infty$ тогда и только тогда, когда существует серединная точка для (A_i,A_i^*), $i=1,2$, и при этом имеет место оценка:*

$$\max\{T_1(a,b),\ T_2(a,b)\}\le J_0(a,b)\le\min\{\gamma_{p,1}T_1(a,b),\ \gamma_{p,2}T_2(a,b)\}. \tag{12}$$

Сначала из теоремы 3 выведем утверждение теоремы 2.

Доказательство Теоремы 2. Пусть уравнение (1) безсопряженно на I. Тогда по теореме В $F(f,a,b)>0$ или

$$\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^p dt<\int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt$$

для $0\ne f\in \overset{\circ}{AC}_p\,(I)$, следовательно,

$$\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^p dt\le\int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt$$

для $0\ne f\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho,I)$ и $J_0(a,b)\le 1$. Откуда в силу теоремы 3 $T_i(a,b)\le 1$, $i=1,2$.

Обратно, пусть существует серединная точка для (A_i,A_i^*). Тогда по теореме 3 выполнено (12). Откуда, если $T_i(a,b)<\gamma_{p,i}^{-1}$, $i=1,2$, то $J_0(a,b)<1$, из которого вытекает $F(f,a,b)>0$ для $0\ne f\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho,I)$ и, в частности, для $0\ne f\in \overset{\circ}{AC}_p\,(I)$. Тогда по теореме В уравнение (1) безсопряженно на I. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие теоремы 2 и существует серединная точка для $(A_{i_0},A_{i_0}^*)$, $1\le i_0\le 2$. Если $T_{i_0}(a,b)>\gamma_{p,i_0}^{-1}$, тогда уравнение (1) лево безфокусно на $(a,c_{i_0}]$; право безфокусно на $[c_{i_0},b)$ и любые нетривиальные его решения с условием $y'(c_{i_0})=0$, $y(c_{i_0})\ne 0$ не обращается в нуль на I.*

Следствие 3. *Пусть выполнено условие теоремы 2 и существует серединная точка для $(A_{i_0},A_{i_0}^*)$, $1\le i_0\le 2$. Если $T_{i_0}(a,b)>1$, тогда уравнение (1) сопряженно на интервале I.*

В доказательстве теоремы 3 используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (10). Тогда серединная точка для (A_i, A_i^*), $i = 1, 2$, существует тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to a}\sup A_i(a,c,x) < \infty,\ \lim_{x\to b}\sup A_i^*(c,b,x) < \infty,\ c \in I. \tag{13}$$

Доказательство Леммы 1. Пусть существует серединная точка для (A_i, A_i^*), $i = 1, 2$. Так как функции $A_i(a,c), A_i^*(c,b)$, $i = 1, 2$, непрерывны по c и первая неубывает, а вторая невозрастает по c, то $A_i(a,c) \le A_i^*(c_i,b)$, при $a < c < c_i$ и $A_i(a,c_i) \ge A_i^*(c,b)$, при $c_i < c < b$. Откуда следует (13). Обратно из условия (13) следует, что

$$\lim_{c\to a} A_i(a,c) < \infty, \quad \lim_{c\to b} A_i^*(c,b) < \infty,\ \ i = 1, 2.$$

Покажем, что

$$\lim_{c\to b} A_i(a,c) > \lim_{c\to b} A_i^*(c,b),\ i = 1, 2. \tag{14}$$

Действительно, если

$$\lim_{c\to b} A_i(a,c) \le \lim_{c\to b} A_i^*(c,b) < \infty, \tag{15}$$

то из $A_1(a,c) < \infty$ имеем

$$\int_c^b v(t)dt < \infty,\ c \in I.$$

Тогда в силу (11)

$$\lim_{c\to b} A_i^*(c,b) = 0,\ i = 1, 2. \tag{16}$$

При $i = 1$ это очевидно, а при $i = 2$ оно следует из неравенства:

$$\left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int_c^b v(t)\left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^p dt \le \left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \int_c^b v(t)dt.$$

Так как $A_i(a,c)$ неотрицательная, неубывающая и непрерывная функция по $c \in I$, то из (15) и (16) следует $A_i(a,b) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда $v(t) \equiv 0$ на I, что противоречит условиям наложенным на v. Следовательно, имеет место (14). Точно также устанавливаем

$$\lim_{c\to a} A_i^*(c,b) > \lim_{c\to a} A_i(a,c),\ i = 1, 2. \tag{17}$$

Из (14) и (17) в силу непрерывности и монотонности $A_i(a,c)$, $A_i^*(c,b)$ по $c \in I$, следует существование точек $c_i \in I$ таких, что $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b)$, $i = 1, 2$. Лемма 1 доказана.

Из теоремы 2 и из леммы 1 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Если не выполнено хотя бы одно из условий (13), то уравнение (1)сопряженно на I .*

Доказательство Теоремы 3. Пусть $J_0(a,b) < \infty$ и $a < c^- < c^+ < b$. Положим:

$$f_0(t) = \begin{cases} \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_a^t \rho^{1-p'}, & a < t \le c^-, \\ 1, & c^- \le t \le c^+, \\ \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_t^b \rho^{1-p'}, & c^+ \le t < b. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, что $f_0 \in \mathring{W}_p^1(\rho, I)$. Непосредственные вычисления дают:

$$\int_a^b \rho(t)|f_0'(t)|^p dt = \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}, \tag{19}$$

$$\int_a^b v(t)|f_0(t)|^p dt = \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int_a^{c^-} v(t) \left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^p dt +$$

$$+ \int_{c^-}^{c^+} v(t)dt + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int_{c^+}^b v(t) \left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^p dt. \tag{20}$$

Из (19) и (20) имеем:

$$J_0(a,b) \geq \frac{\left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int_a^{c^-} v(t) \left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^p dt + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int_{c^+}^b v(t) \left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^p dt}{\left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}}, \tag{21}$$

$$J_0(a,b) \geq \frac{\int_{c^-}^{c} v(t)dt + \int_c^{c^+} v(t)dt}{\left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}}, \quad c \in (c^-, c^+). \tag{22}$$

Умножая числитель и знаменатель правой части (21) и (22) на $\left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}$ и переходя в полученном выражении к пределу при $c^- \to a$, имеем:

$$J_0(a,b) \geq \limsup_{c^- \to a} \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int_a^{c^-} v(t) \left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^p dt =$$

$$= \limsup_{x \to a} A_1(a, c, x), \tag{23}$$

$$J_0(a,b) \geq \limsup_{x \to b} A_2(c, b, x). \tag{24}$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель правой части (21) и (22) на $\left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}$ и переходя к пределу при $c^+ \to b$, получим:

$$J_0(a,b) \geq \limsup_{x \to b} A_i^*(c, b, x), \; i = 1, 2. \tag{25}$$

В силу леммы 1 из (23), (24), и (25) следует существование серединной точки $c_i \in I$ для (A_i, A_i^*), то есть $A_i(a, c_i) = A_i^*(c_i, b) \equiv T_i(a, b)$, $i = 1, 2$.

Так как $A_i(a,c_i,x)$, $A_i^*(c_i,b,x)$ непрерывны по x на $(a,c_i]$, $[c_i,b)$ соответственно и $A_i(a,c_i) \geq \limsup_{x\to a} A_i(a,c_i,x)$, $A_i^*(c_i,b) \geq \limsup_{x\to b} A_i^*(c_i,b,x)$, то существуют точки c_i^-, c_i^+: $a < c_i^- \leq c_i$, $c_i \leq c_i^+ < b$ такие, что $A_i(a,c_i) = A_i(a,c_i,c_i^-)$, $A_i^*(c_i,b) = A_i^*(c_i,b,c_i^+)$, причем $c_1^- \neq c_1$, $c_1^+ \neq c_1$.

Пусть в (21) $c^- = c_2^-$, $c^+ = c_2^+$, а в (21) $c = c_1$, $c^- = c_1^-$, $c^+ = c_2^+$.

Тогда из (21) имеем:

$$J_0(a,b) \geq \frac{A_2(a,c_2,c_2^-)\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1} + A_2^*(c_2,b,c_2^+)\left(\int\limits_{a}^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}}{\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1} + \left(\int\limits_{a}^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}} =$$

$$= A_2(a,c_2) = A_2^*(c_2,b) \equiv T_2(a,b) \tag{26}$$

Аналогично из (22) имеем:

$$J_0(a,b) \geq A_1(a,c_1) = A_1^*(c_1,b) \equiv T_1(a,b). \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует левая оценка(12).

Пусть существует серединная точка $c_i \in (c,b)$ для (A_i, A_i^*), $i = 1,2$. Тогда в силу теоремы C для $f \in \mathring{W}_p^1(\rho, I)$ получим:

$$\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^p dt = \int\limits_a^{c_i} v(t)|f(t)|^p dt + \int\limits_{c_i}^b v(t)|f(t)|^p dt$$

$$\leq \gamma_{p,i} A_i(a,c_i)\int\limits_a^{c_i}\rho(t)|f'(t)|^p dt + \gamma_{p,i}A_i^*(a,c_i)\int\limits_{c_i}^b \rho(t)|f'(t)|^p dt$$

$$\leq \gamma_{p,i}T_i(a,b)\int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt.$$

Откуда следует правая оценка(12). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 расширяет разные оценки величины $J_0(a,b)$ данные в книге [5]. Например, в теореме 8.8 [5] в предположении $A_1(a,a) = A_1^*(b,b) = 0$ получено $\frac{1}{2}A \leq J_0(a,b) \leq \gamma_{p,1}A$, где $A = \inf_{a<c<b}\max\{A_1(a,c), A_1^*(c,b)\}$. В указанных предположениях легко установить, что $A = T_1(a,b)$.

Пусть $c \in I$ и

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)ds = \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)ds < \infty. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (28). Тогда условие*

$$\max\{A_1(a,b), A_2(a,b)\} \leq 1 \tag{29}$$

необходимо, а выполнение одного из условий

$$A_1(a,b) < \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}, \quad A_2(a,b) < \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \tag{30}$$

достаточно для безсопряженности уравнения (1) на I.

Доказательство Теоремы 4. Пусть уравнение (1) безсопряженно на I. Тогда по теореме B $J_0(a,b) \le 1$. В силу теоремы D из условия (28) следует $\mathring{W}_p^1(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I)$. Следовательно, $J_0(a,b) = J_l(a,b) \le 1$. Тогда из нижней оценки (6) имеем (29).

Обратно, пусть выполнено по крайней мере одно из условий из (30). Тогда из верхней оценки (6) $J_0(a,b) = J_l(a,b) < 1$. Откуда $F(f,a,b) > 0$ для всех $0 \ne f \in \mathring{W}_p^1(\rho, I)$ и, в частности, для всех $0 \ne f \in \mathring{AC}_p\,(I)$, следовательно, по теореме B уравнение (1) безсопряженно на I. Теорема 4 доказана.

Если

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)ds < \infty, \quad \int_c^b \rho^{1-p'}(s)ds = \infty, \tag{31}$$

то по аналогии с теоремой 4 на основании теорем B,C и D имеет место

Теорема 5. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (31). Тогда условие $\max\{A_1^*(a,b), A_2^*(a,b)\} \le 1$ необходимо, а выполнение одного из условий $A_1^*(a,b) < \gamma_{p,1}^{-1}$, $A_2^*(a,b) < \gamma_{p,2}^{-1}$ достаточно для безсопряженности уравнения (1) на I.*

Пусть

$$\int_a^c \rho^{1-p'}(s)ds = \infty, \quad \int_c^b \rho^{1-p'}(s)ds = \infty. \tag{32}$$

В этом случае на основании теоремы D $\mathring{W}_p^1(\rho, I) = W_p^1(\rho, I)$. Так как постоянная функция $f(t) \equiv 1 \in W_p^1(\rho, I)$, то $J_0(a,b) = \infty$, следовательно, существует нетривиальная функция $\tilde{f} \in \mathring{AC}_p\,(I)$ такая, что $F(\tilde{f}, a, b) < 0$. Действительно, пусть $a < \alpha < \alpha + h < \beta - h < \beta < b$, $h > 0$, и в определении функции (18) положим $a = \alpha$, $c^- = \alpha + h$, $c^+ = \beta - h$, $b = \beta$ и обозначим её через $\tilde{f}_0$.

Положим $\tilde{f}_{\alpha,\beta}(t) = \tilde{f}_0(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$ и $\tilde{f}(t) = 0$ при $t \in I \setminus (\alpha, \beta)$. Тогда $\tilde{f}_{\alpha,\beta} \in \mathring{AC}_p\,(I)$. В силу (32), (19) и (20) при $\alpha \to a$ и $\beta \to b$ $\int_a^b \rho(t)|\tilde{f}'_{\alpha,\beta}(t)|^p dt \to 0$, а $\int_a^b v(t)|\tilde{f}_{\alpha,\beta}(t)|^p dt$ оставаясь положительным растет, поэтому $F(\tilde{f}_{\alpha,\beta}, a, b) < 0$, когда α, β достаточно близко к a и b соответственно. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (32). Тогда уравнение (1) на интервале I имеет сопряженные точки.*

Рассмотрим уравнение (1) с параметром $\lambda \in R$:

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \lambda v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0. \tag{33}$$

Совокупность значений $\lambda \in R$ при которых уравнение (33) является безсопряженным на I называется областью безсопряженности уравнения (33). В [1, с.219] показано, что если уравнение (33) безсопряженно для всех $\lambda \in R$, то $v(t) \equiv 0$, а в случае $v(t) \ne 0$ существует $\lambda_0 \in R$ такое, что при $\lambda < \lambda_0$ уравнение (33) безсопряженно, а при $\lambda > \lambda_0$ уравнение (33) имеет сопряженные точки на I.

Из теоремы 2 имеем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (11). Тогда при*

$$\lambda < [\min\{\lambda_{p,1}T_1(a,b),\ \lambda_{p,2}T_2(a,b)\}]^{-1}$$

уравнение (33) безсопряженно на I, а при

$$\lambda > [\max\{T_1(a,b),\ T_2(a,b)\}]^{-1}$$

уравнение (33) имеет сопряженные точки на I.

Аналогичные утверждения вытекают из теорем 4 и 5.

Из теоремы 6 имеем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (32). Тогда уравнение (33) при всех $\lambda > 0$ сопряженно на I.*

Цитированная литература

1. **Dosly O., Rehark P.** Half-linear differential equations. North-Holland, Math.studies 202, 2005.

2. **Coppel W.A.** Disconjugacy. Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

3. **Mingarelli A.B., Halvorsen S.G.** Non–Oscillation Domains of Differential Equations with Two Parametrs. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1988.

4. **Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. Изд. 2-е, М., 2006.

5. **Opic B., Kufner A.** Hardy-type inequalities. Longman Scientific and Technikal. 1990.

6. **Kufner A., Malegranda L., Persson L.E.** The Hardy Inequality. About its History and some related results. Pilsen, 2007.

7. **Wedestig A.** Weighted Inequalities of Hardy Type and their Limiting Inequalities. Ph.D. Thesis Lulea University of Technology, 2003.

8. **Oinarov R.** //J.London Math. Soc. 1993. V. 48, № 2. P. 103–116.

Поступила в редакцию 10.03.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 67—76*

УДК 519.624

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ДУГИ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ И ГАЗОВОЙ ФАЗАХ

А. Т. Кулахметова, С. Н. Харин, Ю. Р. Шпади

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 kulakhmetova@mail.ru

Получен новый критерий стабилизации дуги, который позволяет найти зависимость продолжительности металлической фазы дуги от заданных параметров цепи и свойств контактного материала.

Для увеличения производительности выключателей, достигаемой за счет уменьшения продолжительности дуги и эрозии, очень важным является исследование динамических явлений дуги, протекающих в процессе размыкания электрических контактов. Модели Майера и Кассини [1] и их обобщение [2], которые основаны на методе энергетического баланса, не могут быть применены для описания температурного поля дуги в ее начальной стадии, сразу после воспламенения. Уравнение Эленбааса-Геллера дает информацию о радиальном распространении температуры дуги, однако это правильно только для стационарных дуг [3]. Динамика дуги может быть описана только нестационарным уравнением теплопроводности, принимающим во внимание нелинейность параметров дуги. Это первая цель этой статьи. Вторая цель состоит в разработке метода вычисления дуговой эрозии в динамике.

1 Математическая модель температурного поля и электрической проводимости металлической фазы дуги

1.1 Уравнение температурного поля. Температура дуги $\Theta(r,t)$ размыкающихся контактов сразу после зажигания меньше порогового значения, необходимого ионизации газа, однако она достаточна, чтобы ионизировать металлические пары в контактном промежутке, температура которых равна Θ_{im} :

$$\Theta_{im} < \Theta < \Theta_{ig}.$$

Эта начальная стадия, называемая металлической фазой дуги, имеет очень короткую продолжительность и случается в малых контактных промежутках. Поэтому дуга имеет форму диска, толщина которого много меньше его радиуса, и аксиальной компонентой температуры

Keywords: *Mathematical model, arc erosion, arc phases*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

можно пренебречь по сравнению с радиальной компонентой. В этом случае уравнение теплопроводности для дуги может быть записано в форме

$$C\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\frac{\partial\Theta}{\partial r}) + \sigma E^2 - W_r, \tag{1}$$

где C – произведение удельной теплоемкости и плотности плазмы дуги, λ и σ – удельные теплопроводность и электрическая проводимость плазмы дуги, E – напряженность электрического поля и W_r – потери мощности вследствие дугового излучения и теплового потока в электроды. Начальное распределение температуры вдоль радиуса

$$\Theta(r,0) - f(r), \tag{2}$$

может быть получено из решения уравнения теплопроводности для металлического пара на преддуговой стадии [4–5]. Мы можем аппроксимировать функцию $f(r)$ параболой

$$f(r) = \Theta_0\left(1 - \frac{r^2}{r_A^2}\right),$$

или функцией Бесселя

$$f(r) = \Theta_0 J_0\left(\mu_1\frac{r}{r_A}\right), \tag{3}$$

где $\mu_1 = 2,405$ – первый корень функции Бесселя, Θ_0 – температурный максимум в центре диска дуги. Температура на границе $r = r_A$ между воздухом окружающей среды и плазмы дуги должна быть равна пороговой температуре металлической ионизации

$$\Theta(r_A, t) = \Theta_{im}. \tag{4}$$

Нужно заметить, что тепловая и электрическая проводимости плазмы, λ и σ, существенно зависят от температуры и эта зависимость не может быть усреднена. Напротив, радиацией дуги W_r в металлической фазе дуги, температура которой относительно мала $\Theta_m < \Theta_{ig} \approx 5000^o$, можно пренебречь (рисунок 1).

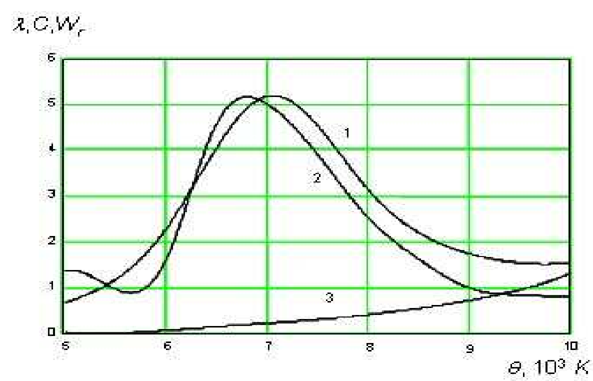

Рис. 1: Температура изменения λ, σ, W **1** – $\lambda, WM^{-1}K^{-1}$; **2** – $C, 10^2 Jm^{-3}K^{-1}$; **3** – $W_r, 10^{11}Wm^{-3}$[6] .

1.2 Уравнение для электрической проводимости σ . Для решения уравнения теплопроводности (1) мы используем подстановку Кирхгофа

$$S(\Theta) = \int\limits_{\Theta_{mi}}^{\Theta} \lambda(\Theta)d\Theta. \tag{5}$$

В результате уравнение (1) преобразуется к уравнению:

$$\frac{C}{\lambda}\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial S}{\partial r}) + \sigma E^2 - W_r. \tag{6}$$

Разрешая уравнение (5) относительно Θ, получим:

$$\Theta = \Theta_{mi} + g(S). \tag{7}$$

Так как функция $\sigma = \sigma(\Theta)$ известна (рисунок 1), можем, используя (5), определить зависимость σ от S, то есть считать $\sigma = \sigma(S)$. Линеаризация этой функции дается выражением (рисунок 2):

$$\sigma = bS, \qquad b = tg\varphi = \frac{\sigma_g}{S_{gi}}, \tag{8}$$

где σ_g представляет электрическую проводимость в момент перехода металлической фазы дуги к газовой фазе, то есть при $\Theta = \Theta_g$, и

$$S_{gi} = \int\limits_{\Theta_{mi}}^{\Theta_{gi}} \lambda(\Theta)d\Theta. \tag{9}$$

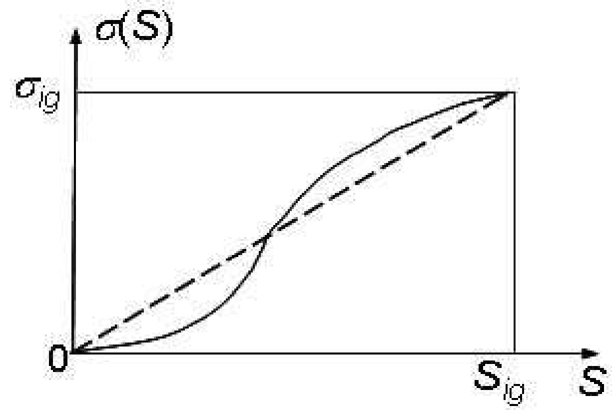

Рис. 2: Линейная аппроксимация σ_s .

Подставляя (8) в (7) и используя обозначения:

$$r = \frac{x}{E\sqrt{b}}, \quad \tau = \frac{C}{\lambda E^2 b}, \tag{10}$$

можем записать уравнение относительно σ:

$$\tau\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \sigma. \tag{11}$$

Можно заметить, что τ можно считать постоянной, так как коэффициент температуропроводности $a^2 = \frac{C}{\lambda}$ приблизительно является постоянной (рисунок 1). Уравнение (11) определено в области $0 < x < x_0$, где $x_0 = r_A E\sqrt{b}$. Граничные условия (2)–(4) преобразуются к виду:

$$\sigma(x,0) = F(x), \tag{12}$$

при

$$F(x) = b \int\limits_{\Theta_{mi}}^{f(x/E\sqrt{b})} \lambda(\Theta) d\Theta, \qquad \sigma(x_0, t) = 0. \tag{13}$$

$$\sigma(x,0) = bS(r,0) = b \int\limits_{\Theta_{mi}}^{\Theta(r,0)} \lambda(\Theta) d\Theta = b \int\limits_{\Theta_{mi}}^{\Theta_0 J_0(\mu_1 r/r_A)+\Theta_{im}} \lambda(\Theta) d\Theta =$$

$$= b \int\limits_{\Theta_{mi}}^{\Theta_0 J_0(\mu_1 x/x_0)+\Theta_{im}} \lambda(\Theta) d\Theta \approx \Theta_0 b J_0(\mu_1 x/x_0) \cdot \lambda_0 = \sigma_0 J_0(\mu_1 x/x_0).$$

Решение задачи (11)–(13) может быть найдено в виде ряда Фурье-Бесселя:

$$\sigma(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n exp[-(k^2-1)t/\tau] J_0(k_n x), \tag{14}$$

где

$$C_n = \frac{2}{x^2 J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^{x_0} F(x) J_0(k_n x) x dx, \qquad k_n = \mu_n / x_0,$$

а μ_n – это корни функции Бесселя:

$$J_0(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Для приближения (3)

$$\sigma(x,0) = \sigma_0 J_0(\mu_1 x/x_0)$$

и для решения (14) получаем простое выражение:

$$\sigma(x,t) = \sigma_0 exp\left[-\left(\frac{\mu_1^2}{x_0^2} - 1\right) t/\tau\right] J_0(\mu_1 x/x_0).$$

Применяя подстановку (10), получаем окончательное выражение для электрической проводимости дуги в виде:

$$\sigma(r,t) = \sigma_0 exp\left[-\left(\mu_1^2 - E^2 b r_A^2\right) \frac{a^2 t}{r_A^2}\right] J_0(\mu_1 r/r_A). \tag{15}$$

Температура дуги теперь может быть найдена из выражений (5) и (8). Введем критерий образования дуги:

$$\xi = E^2 b r_A^2 - \mu_1^2. \tag{16}$$

Мы могли бы выделить три случая (рисунок 3):

1) $\xi > 0$. Возрастание удельной проводимости дуги, мощности и температуры в результате джоулева нагрева.

2) $\xi = 0$. Максимальное значение удельной проводимости дуги и мощности

3) $\xi < 0$. Удельная проводимость дуги, мощность и температура уменьшаются, дуга должна погаснуть.

1.3 Взаимодействие дуги с поверхностью контакта.

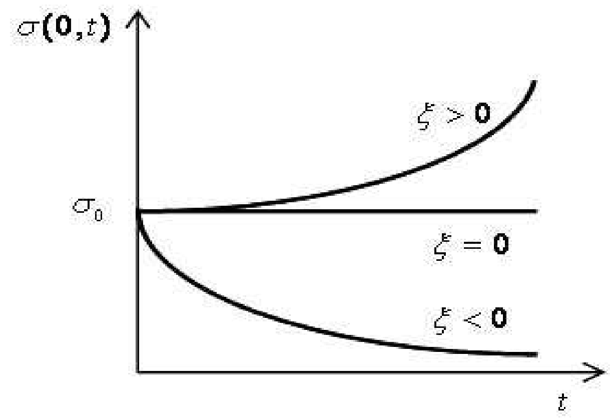

Рис. 3: Эволюция удельной проводимости дуги.

На первой стадии открытия контакта $\xi > 0$, но затем изменяет свой знак. Чтобы найти критическую точку (момент) $\xi = 0$, нам необходимо знать динамику радиуса дуги r_A , который расширяется в процессе образования дуги. Затем используя формулу

$$E = \frac{I}{\pi r_A^2 \sigma} \tag{17}$$

и выражение (16), можем найти критическое время $t = t_{cr}$ при котором $\xi = 0$. С этой целью рассмотрим область D_A , занятую дугой, взаимодействующей с контактной поверхностью (рисунок 4). Это взаимодействие приводит к фазе преобразования контактного материала и формированию трех зон:

1) Зона испарения материала

$$D_b : 0 \le r \le r_b, \quad 0 \le z \le r_b,$$

2) Зона расплавленного материала

$$D_m : \begin{cases} \sigma_b(r,t) \le z \le \sigma_m(r,t), & 0 \le r \le r_b(t), \\ 0 \le z \le \sigma_m(r,t), & r_b(t) \le r \le r_m(t), \end{cases}$$

3) Твердая зона

$$D_s : \begin{cases} \sigma_m(r,t) \le z \le \infty, & 0 \le r \le r_m(t), \\ 0 \le z \le \infty, & r_m(t) \le r \le \infty. \end{cases}$$

Температура контакта $T_c(r,z,t)$ может быть представлена в виде суммы:

$$T_c(r,z,t) = T_J(r,z,t) + T_s(r,z,t), \tag{1.18}$$

где $T_c(r,z,t)$ и $T_s(r,z,t)$ – температура компонентов, определяемая соответственно объемным джоулевым нагревом и тепловым потоком из дуги в поверхность контакта. Выражение для вычисления первого компонента приведено выше. Можно показать, что джоулев компонент $T_J(r,z,t)$ существен только на преддуговой стадии и им можно пренебречь после зажигания дуги. Выражение для второго компонента может быть найдено подобным образом в виде:

$$T_s(r,z,t) = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \left[P_c(r_1,t_1) - P_b(r_1,t_1) - P_m(r_1,t_1)\right] G(r,r_1,z,t-t_1) r_1 dr_1. \tag{19}$$

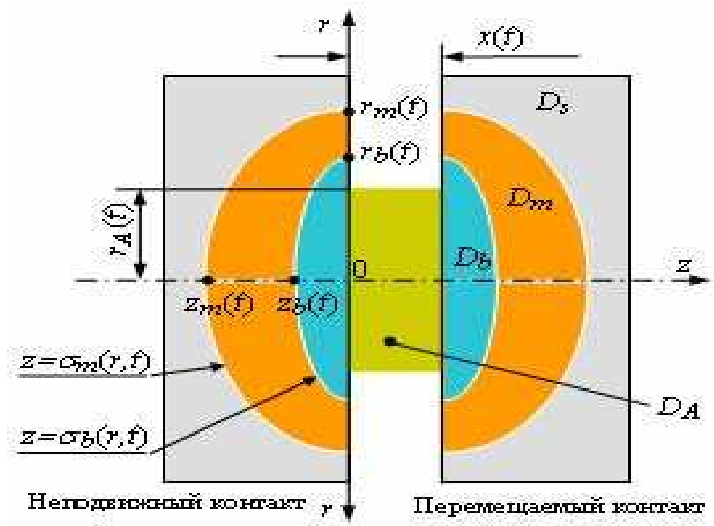

Рис. 4: Геометрия дуги и контактов: дуга $D_A D_b D_m D_s$.

Здесь $P_c(r,t)$ – плотность полного теплового потока, поступающего через поверхность контакта в процессе зажигания дуги, $P_b(r,t)$ и $P_m(r,t)$ – составные части полного потока, расходуемые на испарение и плавление материала контакта, которые можно найти из выражений

$$P_b(r,t) = L_b \gamma \frac{\partial \sigma_b(r,t)}{\partial t}, \qquad P_m(r,t) = L_m \gamma \frac{\partial \sigma_m(r,t)}{\partial t}, \tag{20}$$

где L_b и L_m – удельная теплота испарения и плавления, γ – плотность контактного материала. Справедливо предположить, что изотермальные поверхности $z = \sigma_b(r,t)$ $z = \sigma_m(r,t)$ являются эллипсоидами вращения

$$\frac{r^2}{r_b^2} + \frac{z^2}{z_b^2} = 1, \qquad \frac{r^2}{r_m^2} + \frac{z^2}{z_m^2} = 1,$$

другими словами,

$$\sigma_b(r,t) = z_b(t)\sqrt{1 - r^2/r_b^2(t)}, \qquad \sigma_m(r,t) = z_m(t)\sqrt{1 - r^2/r_m^2(t)}. \tag{21}$$

Функции $r_b(t), z_b(t), r_m(t)$ и $z_m(t)$ могут быть найдены из уравнений:

$$T_c(r_b(t),0,t) = T_b, \quad T_C(0,z_b(t),t) = T_b,$$

$$T_C(r_m(t),0,t) = T_m, \quad T_C(0,z_m(t),t) = T_m, \tag{22}$$

где T_m – температура плавления контактного материала.

Если тепловые потоки $P_c(r,t)$, $P_b(r,t)$ и $P_m(r,t)$ удовлетворяют нормальному радиальному распределению Гаусса

$$P_c(r,t) = P_c(t) exp\left(-\frac{r^2}{r_A^2}\right), \quad P_b(r,t) = P_b(t) exp\left(-\frac{r^2}{r_A^2}\right),$$

$$P_m(r,t) = P_m(t) exp\left(-\frac{r^2}{r_A^2}\right), \tag{23}$$

то интеграл относительно r в формуле (19) может быть вычислен и выражение для контактной температуры получает очень простую форму:

$$T_s(r,z,t) = \frac{a}{\lambda\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\left[P_c(t_1) - P_b(t_1) - P_m(t_1)\right] r_A^2(t_1)}{\left[r_A^2 + 4a^2(t-t_1)\right]\sqrt{t-t_1}} \times$$

$$\times exp\left[-\frac{z^2}{4a^2(t-t_1)} - \frac{r^2}{r^2(t_1) + 4a^2(t-t_1)}\right] dt_1. \tag{24}$$

Тепловой поток $P_c(t)$ может быть вычислен, если принять во внимание положительные компоненты, такие как излучение дуги, бомбардировку электронами (ионами) анодной (катодной) контактной поверхности, обратных электронов из столба дуги, и отрицательные компоненты, такие как потери энергии при испарении, излучении, охлаждения за счет электронной эмиссии и теплопроводности внутри контакта. Выражения для всех этих компонентов можно найти в [7]. Однако, модель в рассматриваемом случае может быть упрощена ввиду того, что информация о токе, напряжении и смещении имеется из эксперимента. Поэтому более удобно вычислить мощность W_A , выделяемую дугой, непосредственно по измерениям значений напряжения на дуге U_A , тока дуги I_A и затем найти тепловой поток, входящий в контакт выражением:

$$P_c(t) = \frac{I_A(t) \cdot U_A(t)}{2\pi r_A^2(t)} = \frac{P_A(t)}{2\pi r_A^2(t)}. \tag{25}$$

Это выражение является последним уравнением, которое позволяет совместно с другими вышеприведенными вычислить динамику плавления контактов, радиуса дуги $r_A(t)$ и мощности дуги $P_A(t)$. На рисунках 5 и 6 изображена динамика изменения мощности и температуры для $AgCdO$ – контактов, вычисленная с помощью представленной выше модели при условиях: подаваемое напряжение $U_0 = 14B$, ток $I_0 = 20A$, индуктивность $L = 47.5$ Мгн , скорость размыкания $V = 0.2$ м/с [2].

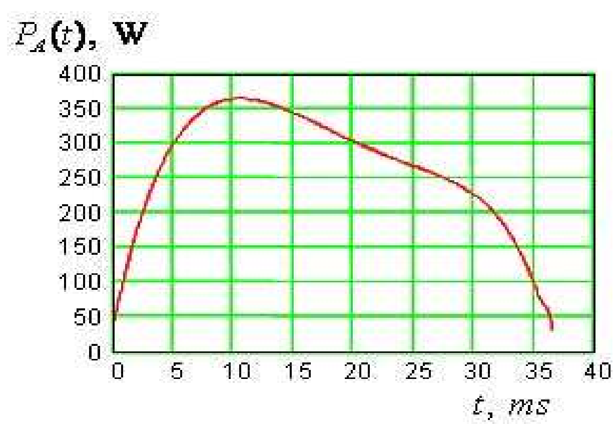

Рис. 5: Динамика мощности дуги.

Можно заметить, что критическое время в этом случае составляет $t_{cr} = 10\,mc$, однако максимум температуры дуги достигается немного позже, при $t = 15\,mc$, ввиду тепловой инерции.

2 Переход металлической фазы дуги в газовую

2.1 Температурное поле и эррозия. Продолжительность металлической фазы очень коротка, следовательно толщина дуги остается малой и приведенная выше модель может быть применена для описания перехода металлической фазы дуги в газовую, если мы заменим все параметры

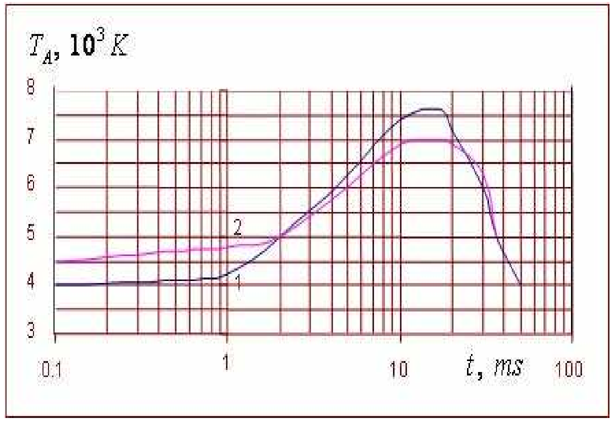

Рис. 6: Температура дуги. 1 – экспериментальные данные [2], 2 – данные вычислений.

металлического пара параметрами газового пара. Динамика этого перехода представлена на рисунке 7. На нем можно видеть, что на первой стадии размыкания контактов, когда ширина контактной щели не превышает 20 мкм , температура анода возрастает очень резко по сравнению с температурой катода.

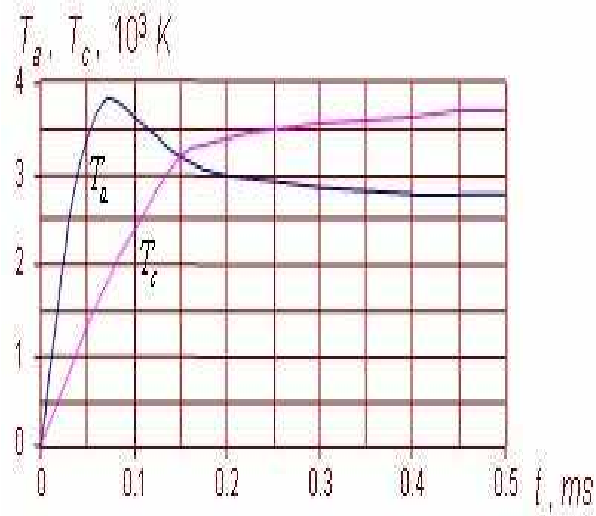

Рис. 7: Динамика температуры анода и катода в центре дуги.

Это может быть объяснено тем фактом, что в короткой дуге, длина которой сравнима с длиной ионизационной зоны, температура электронов T_e много больше температуры ионов T_i и, следовательно, кинетическая энергия электронов, бомбардирующих анод, $\frac{3}{2}\frac{kT_e}{e}j_e$, значительно превышает кинетическую энергию поступающих в катод ионов, $\frac{3}{2}\frac{kT_i}{e}j_i$. Вместе с тем вычисление показывает, что в этом диапазоне контактной щели электронный компонент плотности тока j_e много больше ионного компонента J_i , что является дополнительной причиной для перегрева анода и переноса материала с анода на катод. Однако интенсивное испарение с анода и возрастание радиуса пятна дуги на аноде, что влечет за собой уменьшение плотности тока, вызывает охлаждение анода и уменьшение его температуры, в то время как температура катода возрастает. Точка пересечения анодной и катодной температур наблюдается при $t_{ac} = 0,15$ мс и соответствует изменению направления переноса материала на противоположное и образованию компенсационной стадии дуги, которая продолжается до момента $t_1 = 1,8$ мс и переходит затем в стадию катодной дуги (рисунок 8).

Вычисление позволяет заключить, что стадия катодной дуги начинается в металлической фазе при температуре около 4700 K , что меньше чем порог ионизации, однако переход (завершение перехода) в газовую фазу случается при $t_1 = 2$ мс . Результат вычисления эрозии, приведенный на рисунке 8, представляет данные факта, что главная порция эрозии в индуктивной цепи случается в газовой фазе. Вычисленные значения металлической фазы слегка больше чем экспериментальные данные. Это можно объяснить эффектом повторяемости, то есть осаждением испаряемого материала, которое игнорируется в математической модели.

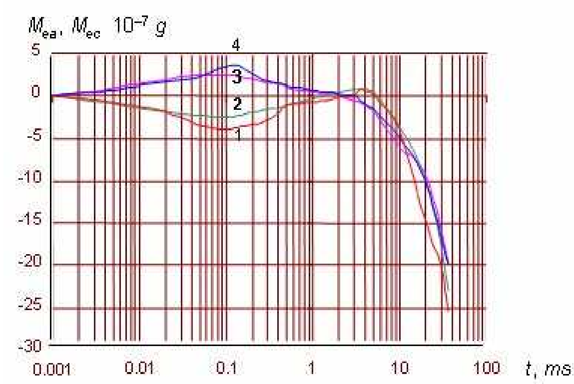

Рис. 8: Изменение массы анода и катода 1 – M_{ec}-вычисленное, 2 – M_{ec}-эксперимент [2], 3 – M_{ea}-эксперимент [2], 4 – M_{ea}-вычисленное.

2.2 Влияние индуктивности на продолжительность дуги. Аналогичные вычисления были выполнены для различных значений индуктивности в диапазоне от 1 мГн до 400 мГн. Было найдено, что продолжительность дуги возрастает пропорционально индуктивности и зависит от тока при относительно малых значениях индуктивности (рисунок 9). Однако для индуктивности более чем 10 мГн эта зависимость становится пренебрежимо малой. Этот результат соответствует экспериментальным данным, приведенным в [2].

Возрастание продолжительности дуги с ростом индуктивности происходит при учете увеличения газовой фазы дуги, пока вариации металлической фазы относительно малы. Подобное заключение можно высказать о возрастании эрозии. Однако дальнейшее возрастание индуктивности на несколько миллигенри в диапазоне малых токов приводит к уменьшению продолжительности дуги и эрозии в соответствии с переходом к тлеющему разряду, который обсуждается ниже.

Выводы

1. Динамика температуры и электрической проводимости дуги может быть удовлетворительно рассчитана с помощью математической модели, основанной на нелинейной задаче для осесимметрического уравнения теплопроводности.

2. Получен новый критерий стабилизации дуги, который позволяет найти зависимость продолжительности металлической фазы дуги от заданных параметров цепи и свойств контактного материала.

3. Предложена математическая модель фазовых переходов внутри электродов в процессе горения дуги, которая описывает динамику дуговой эрозии в металлической и газовой фазах дуги.

4. Причиной возрастания продолжительности дуги и эрозии контактов, происходящего с ростом индуктивности цепи, является расширение газообразной фазы дуги относительно ее

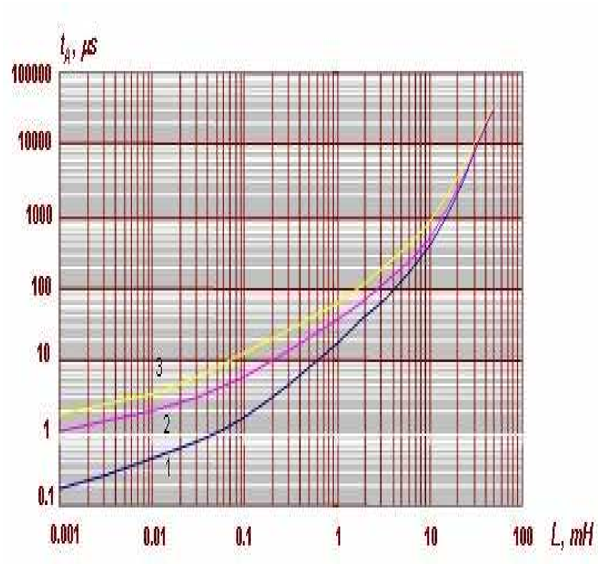

Рис. 9: $1 - I_0 = 0.6A, 2 - I_0 = 1A, 3 - I_0 = 20A$.

металлической фазы.

Цитированная литература

1. **Browne T.E.** Circuit Interruption, Theory and Techniques. New York and Basel: Marcel Dekker, 1984.

2. **Kharin S.N., Nouri H., Davies T.** //Proc. of the 48th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. Orlando, Florida, USA, 2002. P. 203–214.

3. **Slade P.** Electrical Contacts. Principles and Applications. Marcel Dekker Ed. Basel, Switzerland, 1999.

4. **Kharin S.N., Nouri H., Bizjak M.** //IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies. 2009. V. 32, № 1. P. 180–190.

5. **Kharin S.N., Nouri H., Amft D.** //Proceedings of the 48th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts. Orlando, Florida, USA, 2002.

6. **Engelsht S.** Dynamics of Electrical Arc. Frunze, 1988.

7. **Kharin S.N.** //Proc. of 43-th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. Philadelphia, USA, 1997. P. 289–305.

Поступила в редакцию 11.05.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 77—85*

УДК 510.67

О НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ 1–ТИПАХ В СЧЕТНО–КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О–МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Б. Ш. Кулпешов

Институт проблем информатики и управления МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 kbsh@ipic.kz

Найдены необходимые и достаточные условия бинарности каждого неалгебраического 1-типа в произвольной $\aleph_0$-категоричной слабо о-минимальной теории.

1 Предварительные сведения. Пусть L – счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Для произвольных подмножеств A, B структуры M мы пишем $A < B$, если $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Если $A \subset M$ и $x \in M$, то мы пишем $A < x$, если $A < \{x\}$. Для любого подмножества A структуры M $A^+ := \{b \in M | A < b\}$ и $A^- := \{b \in M | b < A\}$. Для произвольного полного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Мы обозначаем через $<_{lex}$ отношение лексикографического упорядочения. Для произвольного кортежа $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ длины n мы обозначаем через $\bar{b}_i$ кортеж $\langle b_1, b_2, \ldots, b_i \rangle$, через $\bar{b}^j$ — кортеж $\langle b_j, b_{j+1}, \ldots, b_n \rangle$ и через $\bar{b}_i^j$ — кортеж $\langle b_j, b_{j+1}, \ldots, b_i \rangle$ для любых $1 \leq i, j \leq n-1$. Если $B \subseteq M$ и E — отношение эквивалентности на B, мы обозначаем через B/E множество представителей E–классов, лежащих в B. Если f — функция на M, мы обозначаем через $Dom(f)$ область определения функции f. Подмножество A структуры M является *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Данная статья касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [2]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$, такая что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вещественно-замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур.

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [2].

Пусть $Y \subset M^{n+1}$ – $\emptyset$-определимо, $\pi : M^{n+1} \to M^n$ – проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$.

Keywords: *Weakly o-minimal, $\aleph_0$-categorical, convexity rank*
2000 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C35, 03C64

Предположим, что для любого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ – $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \text{ и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ $\sim$-класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\emptyset$-определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ если и только если $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, тогда существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\emptyset$-определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ – Дедекиндово пополнение структуры M, и обозреваем $\overline{Z}$ как естественно вложенную в $\overline{M}$. Аналогично, мы можем получать сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Пусть $A, D \subseteq M$, D бесконечно, $Z \subseteq \overline{M}$ – A-определимый сорт и $f : D \to Z$ – A-определимая функция. Мы говорим, что f – *локально возрастающая* (*локально убывающая, локально константа*) на D, если для любого $a \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий $\{a\}$, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J; мы также говорим, что f является *локально монотонной* на D, если она является локально возрастающей или локально убывающей на D. Пусть E – A-определимое отношение эквивалентности на D. Мы говорим, что f является *строго возрастающей (убывающей) на D/E*, если для любых $a, b \in D$ таких, что $a < b$ и $\neg E(a, b)$, мы имеем $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$.

Определение 1. *(Б.С. Байжанов, [3].) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический.*
(1) A-определимая формула $F(x, y)$ называется p-стабильной, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$ такие, что $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$.
(2) p-стабильная формула $F(x, y)$ называется выпуклой вправо (влево), если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha)$ выпукло, α – левая (правая) концевая точка множества $F(M, \alpha)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

Пример 1. *[4] Пусть $M_n := \langle Q^n; =, <, E_1^2, E_2^2, \ldots, E_{n-1}^2 \rangle$, где Q^n – множество n-кортежей $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ рациональных чисел, упорядоченное лексикографически посредством $<$, и для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ E_i – отношение эквивалентности, определяемое следующим образом: $E_i(x, y) \Leftrightarrow$ для всех $j < n - i$, $x_j = y_j$. Тогда для каждого i классы эквивалентности по E_i являются выпуклыми подмножествами множества Q^n. Более того, E_{i-1} утончает E_i для каждого $2 \leq i \leq n-1$.*

В Примере 1 формула $E_i(x, y)$ является p-стабильной для каждого $1 \leq i \leq n-1$, где $p(x) := \{x = x\}$; $F_i(x, y) := E_i(x, y) \wedge y \leq x$ и $F'_i(x, y) := E_i(x, y) \wedge y \geq x$ являются p-стабильными выпуклой вправо и выпуклой влево формулами соответственно.

Определение 2. *Пусть $F(x, y)$ – p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула. Мы говорим, что $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место следующее:*

$$M \models \forall x[x \geq \beta \to [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]] \quad (M \models \forall x[x \leq \beta \to [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]]).$$

Очевидно, что вышеприведенные формулы $F_i(x, y)$ и $F'_i(x, y)$ являются эквивалентность-генерирующими.

Лемма 1. *[5] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический. Предположим, что $F(x, y)$ – p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ – отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.*

Теорема 1. *[5] Пусть T – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.*

Предложение 1. *([1], Предложение 2.7) Пусть T – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p \in S_1(A)$ – неалгебраический, f – A-определимая функция в A-определимый сорт, так что $p(M) \subseteq Dom(f)$ и f не является константой на $p(M)$. Тогда существует A-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f является строго монотонной на $p(M)/E$.*

Определение 3. *(Б.С. Байжанов, [6]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические. Мы говорим, что p не является слабо ортогональным типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.*

Лемма 2. *([6], Следствие 34 (iii)) Отношение не слабой ортогональности является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Мы говорим, что кортеж $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \in M^n$ является *возрастающим*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Пусть $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ – неалгебраические. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *слабо ортогональным над* A, если каждый s-кортеж $\langle a_1, \ldots, a_s\rangle \in p_1(M) \times \ldots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над A. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *ортогональным над* A, если для любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\ldots$, $\bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/A) = tp(\bar{a}'_1/A)$, $\ldots$, $tp(\bar{a}_s/A) = tp(\bar{a}'_s/A)$, мы имеем $tp(\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s\rangle/A) = tp(\langle \bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/A)$. Если $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ и $p_1 \perp^w p_2$, то, очевидно, что $\{p_1, p_2\}$ слабо ортогонально над A. В [1] доказывается, что в $\aleph_0$-категоричных слабо о-минимальных теориях конечного ранга выпуклости любое семейство попарно слабо ортогональных 1-типов является ортогональным.

Пусть $p \in S_1(A)$ – неалгебраический. Мы говорим, что p является *бинарным над* A, если для любого $n < \omega$ и для любых $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, $b'_1 < b'_2 < \ldots < b'_n \in p(M)$ таких, что $tp(\langle b_i, b_j\rangle/A) = tp(\langle b'_i, b'_j\rangle/A)$ для всех $1 \leq i < j \leq n$, мы имеем $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$. Если неалгебраический $p \in S_1(\emptyset)$ является бинарным над $\emptyset$, то мы говорим просто, что p – *бинарный.*

Пример 2. *([1], Пример 3.8) Пусть $M = \langle Q \cup W, <, E^3, P^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура, где Q — множество рациональных чисел; W – множество всех Q-последовательностей из $\{0,1\}$ с конечным числом ненулевых координат, исключая нулевую Q-последовательность, упорядоченное лексикографически; $P(M) = Q$, $\neg P(M) = W$ и $P(M) < \neg P(M)$. Для любого $a \in P(M)$ $E(a, y_1, y_2)$ – отношение эквивалентности на $\neg P(M)$, определяемое следующим образом: для любых $a \in P(M)$, $b_1, b_2 \in \neg P(M)$ $E(a, b_1, b_2) \Leftrightarrow b_1(q) = b_2(q)$ для всех $q \leq a$, т.е. q-тые координаты элементов b_1 и b_2 совпадают для всех $q \leq a$.*

Может быть доказано, что M – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p_1 := \{P(x)\}$, $p_2 := \{\neg P(x)\}$. Нетрудно понять, что $p_1 \perp^w p_2$. В [1] показано, что $\{p_1, p_2\}$ не является ортогональным над $\emptyset$. Рассмотрим следующую формулу: $\Theta(x,y,z) := \exists u[E(u,x,y) \wedge \neg E(u,y,z)]$. Тогда очевидно $\neg\Theta(x,y,z) \equiv \forall u[E(u,x,y) \to E(u,y,z)]$. Возьмем произвольные b_1, b_2, b_3, $b_4 \in W$ такие, что

$b_1(q) = b_2(q)$ для всех $q < 0$ и $b_1(0) = 0, b_2(0) = 1$ (следовательно, $b_1 < b_2$);

$b_2(q) = b_3(q)$ для всех $q < -1$ и $b_2(-1) = 0, b_3(-1) = 1$ (следовательно, $b_2 < b_3$);

$b_2(q) = b_4(q)$ для всех $q < 1$ и $b_2(1) = 0, b_4(1) = 1$ (следовательно, $b_2 < b_4$).

Тогда, имеем $tp(\langle b_1, b_3\rangle/\emptyset) = tp(\langle b_1, b_4\rangle/\emptyset)$, $tp(\langle b_2, b_3\rangle/\emptyset) = tp(\langle b_2, b_4\rangle/\emptyset)$, и $M \models \Theta(b_1, b_2, b_3) \wedge \neg\Theta(b_1, b_2, b_4)$, т.е. p_2 не является бинарным.

В Разделе 2 мы доказываем ортогональность всех семейств неалгебраических попарно слабо ортогональных бинарных 1-типов в произвольной $\aleph_0$-категоричной слабо о-минимальной теории (Теорема 2). Наконец, в Разделе 3 мы представляем теорему, описывающую необходимые и достаточные условия бинарности каждого неалгебраического 1-типа в произвольной $\aleph_0$-категоричной слабо о-минимальной теории (Теорема 3).

2 Ортогональность.

Лемма 3. *Пусть T – произвольная $\aleph_0$-категоричная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $m, n < \omega$, $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, $\bar{a}' = \langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle \in M^m$, $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, \ldots, b'_n \rangle \in M^n$ такие, что $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$, $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$ и $tp(\langle a, \bar{b}_{n-1} \rangle/A) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'_{n-1} \rangle/A)$. Тогда $tp(\langle a, \bar{b} \rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle/A)$ влечет существование $b''_n \in M$ такого, что $tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle/A) = tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A)$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 3. Так как $tp(\langle a, \bar{b} \rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle/A)$, то существует A-определимая формула $R(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $M \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \neg R(\bar{a}', \bar{b}')$. Пусть $A(\bar{x})$ – A-определимая формула, изолирующая $tp(\bar{a}/A)$, $B(\bar{y})$ – A-определимая формула, изолирующая $tp(\bar{b}/A)$. Допустим противное: предположим, что $M \models \theta(\bar{a}, \bar{b}_{n-1})$, где

$$\theta(\bar{a}, \bar{b}_{n-1}) := A(\bar{a}) \wedge \forall y [B(\bar{b}_{n-1}, y) \rightarrow R(\bar{a}, \bar{b}_{n-1}, y)].$$

Тогда, в силу условий леммы мы получим $M \models \theta(\bar{a}', \bar{b}'_{n-1})$, противореча нашему допущению.

Лемма 4. *Пусть T – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические, $p_1 \perp^w p_2$. Предположим, что p_2 бинарный над A. Тогда, для любых $a_1, a'_1 \in p_1(M)$, $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2 \in p_2(M)$ таких, что $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/A) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle/A)$, имеем $tp(\langle a_1, b_1, b_2 \rangle/A) = tp(\langle a'_1, b'_1, b'_2 \rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 4. Допустим противное: предположим, что существуют a_1, $a'_1 \in p_1(M)$, $b_1 < b_2$, $b'_1 < b'_2 \in p_2(M)$ такие, что $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/A) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle/A)$, но $tp(\langle a_1, b_1, b_2 \rangle/A) \neq tp(\langle a'_1, b'_1, b'_2 \rangle/A)$. Тогда, в силу Леммы 3 существует $b''_2 \in p_2(M)$ такой, что $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/A) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle/A)$ и $tp(\langle a_1, b_1, b_2 \rangle/A) \neq tp(\langle a_1, b_1, b''_2 \rangle/A)$. Следовательно, существует A-определимая формула $R(x, y, z)$ такая, что $M \models R(a_1, b_1, b_2) \wedge \neg R(a_1, b_1, b''_2)$.

Пусть $p_2^1 := tp(b_1/A \cup \{a_1\})$ и $p_1^1 := tp(a_1/A \cup \{b_1\})$. В силу слабой ортогональности p_1 и p_2 мы имеем $p_2^1(M) = p_2(M)$ и $p_1^1(M) = p_1(M)$. Тогда можем считать, что $R(a_1, y, z)$ – p_2-стабильная выпуклая вправо формула. Тогда в силу Теоремы 1 $R(a_1, y, z)$ является эквивалентность-генерирующей и, следовательно, по Лемме 1 $E(a_1, y, z) := R(a_1, y, z) \vee R(a_1, z, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $p_2(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Заметим, что E_{a_1} не является A-определимым, так как в противном случае мы имеем $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/A) \neq tp(\langle b_1, b''_2 \rangle/A)$, противореча выбору b''_2.

Так как $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/A) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle/A)$, мы можем считать, что существуют A-определимые отношения эквивалентности $E_0(x, y)$ и $E_1(x, y)$, разбивающие $p_2(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что $M \models \neg E_0(b_1, b_2) \wedge \neg E_0(b_1, b''_2) \wedge E_1(b_1, b_2) \wedge E_1(b_1, b''_2)$. Тогда рассматривая формулы $F_0(x, y) := E_0(x, y) \wedge x \leq y$ и $F_1(x, y) := E_1(x, y) \wedge x \leq y$, мы имеем $F_0(b_1, M) \subset R(a_1, b_1, M) \subset F_1(b_1, M)$ и, следовательно, $E_1(b_1, M)$ разбивается на бесконечное число E_{a_1}-классов, каждый из которых содержит бесконечное число E_0-классов.

Рассмотрим следующую формулу: $\Theta(x, y, z) := \exists u [E(u, x, y) \wedge \neg E(u, y, z)]$.

Очевидно $\neg \Theta(x, y, z) \equiv \forall u [E(u, x, y) \rightarrow E(u, y, z)]$. Возьмем произвольные $b_2, b_3 \in p_2(M)$ такие, что

$$E(a, b_1, b_2) \wedge \neg E_0(b_1, b_2) \wedge b_1 < b_2 \wedge \neg E(a, b_2, b_3) \wedge \neg E_0(b_2, b_3) \wedge b_2 < b_3.$$

Очевидно, имеем $\Theta(b_1, b_2, b_3)$. Рассмотрим следующее множество:

$$D := \bigcap_{\{a \in p_1(M) : E(a, b_1, b_2)\}} E(a, b_2, M) \cap \{b \in p_2(M) : b_2 < b \wedge \neg E_0(b_2, b)\}$$

Заметим, что каждый E_a-класс не имеет концевых точек в M и пересечение произвольного конечного числа

$$\bigcap_{\{a_i \in p_1(M): E(a_i,b_1,b_2), 1\le i\le n\}} E(a_i, b_2, M)$$

бесконечно и, следовательно, существует $b_4 \in p_2(M)$ такой, что $b_2 < b_4$, $\neg E_0(b_2, b_4)$ и $\neg\Theta(b_1, b_2, b_4)$, противореча бинарности p_2 над A.

Лемма 5. *Пусть T – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические и бинарные над A 1-типы, $p_1 \perp^w p_2$. Тогда для любых $m, n < \omega$ и возрастающих $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$, $\bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_m'\rangle \in [p_1(M)]^m$, $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$, $\bar{b}' = \langle b_1', b_2', \ldots, b_n'\rangle \in [p_2(M)]^n$ таких, что $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$, $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$, мы имеем $tp(\langle\bar{a}, \bar{b}\rangle/A) = tp(\langle\bar{a}', \bar{b}'\rangle/A)$.*

Доказательство Леммы 5. Мы докажем индукцией по $k \ge 3$, где $k = m + n$, рассматривая случаи $(k-2, 2)$, $(k-3, 3)$, …, $(1, k-1)$ последовательно.
Шаг $k = 3$ следует из Леммы 4. Мы предположим, что лемма установлена для всех $k < m + n$ и докажем ее для $k = m + n$.
Шаг $k = m + n$. Случай (m, n), где $n = 2$. Допустим противное: предположим, что существуют $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$, $\bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_m'\rangle \in [p_1(M)]^m$, $b_1 < b_2$, $b_1' < b_2' \in p_2(M)$ такие, что $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$, $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1', b_2'\rangle/A)$, но $tp(\langle\bar{a}, b_1, b_2\rangle/A) \ne tp(\langle\bar{a}', b_1', b_2'\rangle/A)$. Тогда, в силу Леммы 3 существует $b_2'' \in p_2(M)$ такой, что $tp(\langle b_1, b_2\rangle/A) = tp(\langle b_1, b_2''\rangle/A)$ и $tp(\langle\bar{a}, b_1, b_2\rangle/A) \ne tp(\langle\bar{a}, b_1, b_2''\rangle/A)$. Следовательно, существует A-определимая формула $R(\bar{x}, y, z)$ такая, что $R(\bar{a}, b_1, b_2) \wedge \neg R(\bar{a}, b_1, b_2'')$.

Пусть $p_2^1 := tp(b_1/A \cup \{\bar{a}\})$. В силу индукционного предположения (случай $(m, 1)$) $p_2^1(M) = p_2(M)$. Тогда, можем считать, что $R(\bar{a}, y, z)$ – p_2-стабильная выпуклая вправо формула и, следовательно, в силу Леммы 1 и Теоремы 1 $E(\bar{a}, y, z) := R(\bar{a}, y, z) \vee R(\bar{a}, z, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $p_2(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда, рассматривая следующую формулу $\Theta(x, y, z) := \exists\bar{u}[E(\bar{u}, x, y) \wedge \neg E(\bar{u}, y, z)]$ по аналогии с Леммой 4, можем найти элементы $b_1^0, b_2^0, b_3^0, b_4^0 \in p_2(M)$ такие, что $tp(\langle b_1^0, b_3^0\rangle/A) = tp(\langle b_1^0, b_4^0\rangle/A)$, $tp(\langle b_2^0, b_3^0\rangle/A) = tp(\langle b_2^0, b_4^0\rangle/A)$ и $\Theta(b_1^0, b_2^0, b_3^0) \wedge \neg\Theta(b_1^0, b_2^0, b_4^0)$, противореча бинарности p_2 над A.

Не умаляя общности, предположим, что шаг $k = m + n$ установлен для всех случаев $(m_1, n_1) >_{lex} (m - s, n + s)$, где $s \ge 1$. Случай $(m - s, n + s)$. Очевидно, $n + s > 2$. Допустим противное: существуют кортежи $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{m-s}\rangle$, $\bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_{m-s}'\rangle \in [p_1(M)]^{m-s}$, $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{n+s}\rangle$, $\bar{b}' = \langle b_1', b_2', \ldots, b_{n+s}'\rangle \in [p_2(M)]^{n+s}$ такие, что $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$, $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$, но $tp(\langle\bar{a}, \bar{b}\rangle/A) \ne tp(\langle\bar{a}', \bar{b}'\rangle/A)$. Тогда в силу Леммы 3 существует $b_{n+s}'' \in p_2(M)$ такой, что $tp(\langle\bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}\rangle/A) = tp(\langle b_{n+s-1}, b_{n+s}''\rangle/A)$ и $tp(\langle\bar{a}, \bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}\rangle/A) \ne tp(\langle\bar{a}, \bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}''\rangle/A)$. Следовательно, существует A-определимая формула $R(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $M \models R(\bar{a}, \bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}) \wedge \neg R(\bar{a}, \bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}'')$.

Пусть $p_1^1 := tp(a_1/\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1})$, $p_2^{n+s} := tp(b_{n+s}/\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1})$. Очевидно, $p_1^1 \not\perp^w p_2^{n+s}$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $R(\bar{a}, \bar{b}_{n+s-1}, M)^- = p_2^{n+s}(M)^-$, $R(\bar{a}, \bar{b}_{n+s-1}, M) \subset p_2^{n+s}(M)$ и $b_{n+s} < b_{n+s}''$.

Пусть $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}(x) := \sup R(x, \bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}, M)$. Функция $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}$ не может быть константой на $p_1^1(M)$, так как иначе мы имеем $tp(\langle\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}\rangle/A) \ne tp(\langle\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}, b_{n+s}''\rangle/A)$, противореча индукционному предположению (случай $(m - s - 1, n + s)$). Следовательно, существует $A \cup \{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}\}$–определимое отношение эквивалентности $E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}$, разбивающее $p_1^1(M)$ на бесконечное число выпуклых классов так, что $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}$ является строго монотонной на $p_1^1(M)/E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}$. В силу индукционного предположения (случай $(m - s, n + s - 1)$) $p_1^1(M) = s_1(M)$, где $s_1 := tp(a_1/\bar{a}^2)$. Также в силу индукционного предположения (случай $(m - s + 1, n + s - 1)$) $E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}$ $A \cup \{\bar{a}^2\}$–определимо и в силу бинарности p_1 над A оно является A–определимым. Поэтому далее мы обозначаем $E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}$ просто через E'.

Пусть $g_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}(y) := \sup R(\bar a, y, \bar b^2_{n+s-1}, M)$, $p^1_2 := tp(b_1/\bar a, \bar b^2_{n+s-1})$. Функция $g_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$ не может быть константой на $p^1_2(M)$, так как иначе мы имеем $tp(\langle \bar a, \bar b^2_{n+s-1}, b_{n+s}\rangle/A) \neq tp(\langle \bar a, \bar b^2_{n+s-1}, b''_{n+s}\rangle/A)$, противореча индукционному предположению (случай $(m-s, n+s-1)$). Следовательно, существует $A \cup \{\bar a, \bar b^2_{n+s-1}\}$–определимое отношение эквивалентности $E''_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$, разбивающее $p^1_2(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что $g_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$ является строго монотонной на $p^1_2(M)/E'_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$. В силу индукционного предположения (случай $(m-s, n+s-1)$) $p^1_2(M) = s_2(M)$, где $s_2 := tp(b_1/\bar b^2_{n+s-1})$. Докажем, что $E''_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$ A-определимо. Если это не так, то рассмотрим следующую формулу: $\Theta(x, y, z, \bar b^2_{n+s-1}) := \exists \bar u[E''(\bar u, \bar b^2_{n+s-1}, x, y) \wedge \neg E''(\bar u, \bar b^2_{n+s-1}, y, z)]$. По аналогии с Леммой 4 мы можем найти элементы $b^0_1, b^0_2, b^0_3, b^0_4 \in p_2(M)$ такие, что $tp(\langle b^0_1, b^0_3\rangle/A) = tp(\langle b^0_1, b^0_4\rangle/A)$, $tp(\langle b^0_2, b^0_3\rangle/A) = tp(\langle b^0_2, b^0_4\rangle/A)$ и $\Theta(b^0_1, b^0_2, b^0_3, \bar b^2_{n+s-1}) \wedge \neg\Theta(b^0_1, b^0_2, b^0_4, \bar b^2_{n+s-1})$, противореча бинарности p_2 над A. Поэтому, далее мы обозначаем отношение $E''_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$ просто через E''.

Не умаляя общности, допустим, что $f_{\bar a^2,\bar b_{n+s-1}}$ и $g_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}$ обе являются строго возрастающими на $s_1(M)/E'$ и $s_2(M)/E''$ соответственно. Возьмем произвольный $b'_1 \in s_2(M)$ такой, что $b'_1 < b_1$ и $\neg E''(b'_1, b_1)$. Тогда мы имеем $g_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}(b'_1) < g_{\bar a,\bar b^2_{n+s-1}}(b_1)$, т.е. $f_{\bar a^2,b'_1,\bar b^2_{n+s-1}}(a_1) < f_{\bar a^2,\bar b_{n+s-1}}(a_1)$. Пусть $U_1(x)$ — $\{\bar a^2\}$-определимая формула, изолирующая s_1. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(x) := U_1(x) \wedge \exists x_0[E'(x, x_0) \wedge \forall z(R(a_1, \bar a^2, b_1, \bar b^2_{n+s-1}, z) \to R(x_0, \bar a^2, b'_1, \bar b^2_{n+s-1}, z))],$$

$$\Phi_n(x) := U_1(x) \wedge \exists x_0[E'(x, x_0) \wedge \forall x_1 \forall z(\neg\Phi_{n-1}(x_1) \wedge U_1(x_1) \wedge R(x_1, \bar a^2, b_1, \bar b^2_{n+s-1}, z) \to$$
$$\to R(x_0, \bar a^2, b'_1, \bar b^2_{n+s-1}, z))], \quad n \geq 2.$$

Тогда получаем $\Phi_1(M) \supset \Phi_2(M) \supset \ldots \supset \Phi_n(M) \supset \ldots$, противореча $\aleph_0$-категоричности теории T.

Теорема 2. *Пусть T – $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, p_1, p_2, $\ldots$, $p_m \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические попарно слабо ортогональные бинарные 1-типы. Тогда $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ ортогонально над $\emptyset$.*

Доказательство Теоремы 2. Будем доказывать индукцией по $m \geq 2$. Шаг $m = 2$ следует из Леммы 5. В силу Шага 2 мы имеем следующее: для всех $n_1 < \omega$ и $\bar a \in [p_1(M)]^{n_1}$ p_2 имеет единственное расширение p'_2 над $\{\bar a\}$, т.е. $p_2(M) = p'_2(M)$, и p'_2 является бинарным над $\{\bar a\}$.

Предположим, что теорема установлена для всех $k < m$ и докажем ее для m.

Шаг m. Возьмем произвольные $n_1, n_2, \ldots, n_{m-2} < \omega$ и $\bar a_1 \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar a_2 \in [p_2(M)]^{n_2}$, $\ldots$, $\bar a_{m-2} \in [p_{m-2}(M)]^{n_{m-2}}$. Пусть $A := \{\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_{m-3}\}$. В силу индукционного предположения p_{m-1} и p_m имеют единственные расширения p'_{m-1} и p'_m над $A \cup \{\bar a_{m-2}\}$, т.е. $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$, $p_m(M) = p'_m(M)$ (поэтому далее для удобства мы обозначаем эти расширения через p_{m-1} и p_m соответственно). Также p_{m-1} и p_m являются бинарными над $A \cup \{\bar a_{m-2}\}$. Докажем, что $p_{m-1} \perp^w p_m$ как типы над $A \cup \{\bar a_{m-2}\}$ индукцией по длине $\bar a_{m-2}$. Предположим что мы уже доказали слабую ортогональность p_{m-1} и p_m для всех $n' < n_{m-2}$ и докажем это для n_{m-2}. Допустим противное: $p_{m-1} \not\perp^w p_m$. Тогда, существуют A–определимая формула $R(\bar x, y, z)$, $b \in p_{m-1}(M)$, $c, c'' \in p_m(M)$ такие, что $R(\bar a_{m-2}, b, c) \wedge \neg R(\bar a_{m-2}, b, c'')$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $R(\bar a_{m-2}, b, M)^- = p_m(M)^-$, $R(\bar a_{m-2}, b, M) \subset p_m(M)$ и $c < c''$.

Пусть $f_{\bar a^2_{m-2},b}(x) := \sup R(x, \bar a^2_{m-2}, b, M)$, $g_{\bar a_{m-2}}(y) := \sup R(\bar a_{m-2}, y, M)$, $p^1_{m-2} := tp(a_1/A \cup \{\bar a^2_{m-2}, b\})$, и $s^1_{m-2} := tp(a_1/A \cup \{\bar a^2_{m-2}\})$. Функция $f_{\bar a^2_{m-2},b}$ не может быть константой на $p^1_{m-2}(M)$, так как иначе мы имеем $tp(\langle \bar a^2_{m-2}, b, c\rangle/A) \neq tp(\langle \bar a^2_{m-2}, b, c''\rangle/A)$, противореча индукционному предположению (длина $\bar a^2_{m-2}$ равна $n_{m-2} - 1$). Следовательно, существует $A \cup \{\bar a^2_{m-2}, b\}$–определимое отношение эквивалентности $E'_{\bar a^2_{m-2},b}$, разбивающее $p^1_{m-2}(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что $f_{\bar a^2_{m-2},b}$ является строго монотонной на $p^1_{m-2}(M)/E'_{\bar a^2_{m-2},b}$. В силу индукционного предположения (шаг $m-1$) $p^1_{m-2}(M) = s^1_{m-2}(M)$ и $E'_{\bar{a}^2_{m-2},b}$ A-определимо (поэтому далее мы обозначаем $E'_{\bar{a}^2_{m-2},b}$ просто через E'). Функция $g_{\bar{a}_{m-2}}$ также не может быть константой на $p_{m-1}(M)$, так как иначе мы имеем $tp(\langle \bar{a}_{m-2}, c\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}_{m-2}, c''\rangle/A)$, противореча индукционному предположению (шаг $m-1$). Следовательно, существует $A \cup \{\bar{a}_{m-2}\}$-определимое отношение эквивалентности $E''_{\bar{a}_{m-2}}$, разбивающее $p_{m-1}(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что $g_{\bar{a}_{m-2}}$ строго монотонна на $p_{m-1}(M)/E''_{\bar{a}_{m-2}}$. В силу индукционного предположения (шаг $m-1$) мы также имеем, что $E''_{\bar{a}_{m-2}}$ A-определимо (поэтому далее мы обозначаем $E''_{\bar{a}_{m-2}}$ просто через E'').

Не умаляя общности, предположим, что $f_{\bar{a}^2_{m-2},b}$ и $g_{\bar{a}_{m-2}}$ обе являются строго возрастающими на $s^1_{m-2}(M)/E'$ и $p_{m-1}(M)/E''$ соответственно. Возьмем произвольный $a'_1 \in s^1_{m-2}(M)$ такой, что $a'_1 < a_1$ и $\neg E'(a'_1, a_1)$. Тогда мы имеем $f_{\bar{a}^2_{m-2},b}(a'_1) < f_{\bar{a}^2_{m-2},b}(a_1)$, т.е. $g_{a'_1,\bar{a}^2_{m-2}}(b) < g_{\bar{a}_{m-2}}(b)$.

Пусть $p'_{m-1} := tp(b/A \cup \{a'_1, \bar{a}^2_{m-2}\})$, $p'_m := tp(c/A \cup \{a'_1, \bar{a}^2_{m-2}\})$, $s_{m-1} := tp(b/A)$ и $s_m := tp(c/A)$. В силу индукционного предположения (шаг $m-1$) $p_{m-1}(M) = s_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$ и $p_m(M) = s_m(M) = p'_m(M)$.

Пусть $U_{m-1}(x)$ – A-определимая формула, изолирующая s_{m-1}. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y) := U_{m-1}(y) \wedge \exists y_0[E'(y, y_0) \wedge \forall z(R(a_1, \bar{a}^2_{m-2}, b, z) \to R(a'_1, \bar{a}^2_{m-2}, y_0, z))],$$

$$\Phi_n(y) := U_{m-1}(y) \wedge \exists y_0[E'(y, y_0) \wedge \forall y_1 \forall z(\neg\Phi_{n-1}(y_1) \wedge U_{m-1}(y_1) \wedge R(a_1, \bar{a}^2_{m-2}, y_1, z) \to$$
$$\to R(a'_1, \bar{a}^2_{m-2}, y_0, z))], \quad n \geq 2$$

Тогда получаем $\Phi_1(M) \supset \Phi_2(M) \supset \ldots \supset \Phi_n(M) \supset \ldots$, противореча $\aleph_0$-категоричности теории T. Таким образом, $p_{m-1} \perp^w p_m$ как типы над $A \cup \{\bar{a}_{m-2}\}$. Тогда, применяя Лемму 5 к p_{m-1} и p_m, мы завершим доказательство Шага m.

3 Основная теорема.

Лемма 6. *Пусть T – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические бинарные типы, $p_1 \not\perp^w p_2$. Тогда для любых $n_1, n_2 < \omega$ и возрастающих $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\rangle$, $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n_1}\rangle \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n_2}\rangle \in [p_2(M)]^{n_2}$ таких, что $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{a}'/\emptyset)$, $tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$ and $tp(\langle a_i, b_j\rangle/\emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j\rangle/\emptyset)$ для всех $i, j:\ 1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$, мы имеем $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'\rangle/\emptyset)$.*

Доказательство Леммы 6. Будем доказывать индукцией по (n_1, n_2). Шаг $(1,1)$ является тривиальным. Предположим, что лемма установлена для всех (k_1, k_2) с условием $(k_1, k_2) <_{lex} (n_1, n_2)$ и докажем ее для (n_1, n_2). Допустим противное: предположим, что $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'\rangle/\emptyset)$. Тогда, по Лемме 3 существует $b''_{n_2} \in p_2(M)$ такой, что

$$tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/\emptyset), \quad tp(\langle a_i, b_{n_2}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$$

для всех $1 \leq i \leq n_1$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/\emptyset)$. Следовательно, существует $\emptyset$-определимая формула $R(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $R(\bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}) \wedge \neg R(\bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2})$.

Пусть $p^1_1 := tp(a_1/\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1})$, $p^2_2 := tp(b_{n_2}/\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1})$. Очевидно, $p^1_1 \not\perp^w p^2_2$. Не умаляя общности, можем считать, что $R(\bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, M)^- = p^2_2(M)^-$, $R(\bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, M) \subset p^2_2(M)$ и $b_{n_2} < b''_{n_2}$.

Пусть $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}(x) := \sup R(x, \bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}, M)$. Функция $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$ не может быть константой на $p^1_1(M)$, так как иначе мы имеем $tp(\langle \bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$, противореча индукционному предположению (шаг (n_1-1, n_2)). Следовательно, существует $A \cup \{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}\}$-определимое отношение эквивалентности $E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$, разбивающее $p^1_1(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$ является строго монотонной на $p^1_1(M)/E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$. Докажем, что $E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$ $\emptyset$-определимо. Если это не так, тогда рассматривая формулу $\Theta(x, y, z, \bar{a}^2) :=$

$\exists \bar{u}[E'(\bar{a}^2, \bar{u}, x, y) \wedge \neg E'(\bar{a}^2, \bar{u}, y, z)]$, мы получаем противоречие с бинарностью p_1. Поэтому далее мы обозначаем $E'_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$ просто через E'.

Пусть $g_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}(y) := \sup R(\bar{a}, y, \bar{b}^2_{n_2-1}, M)$, $p_2^1 := tp(b_1/\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1})$. Функция $g_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$ не может быть константой на $p_2^1(M)$, так как иначе мы имеем $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}, b_{n_2}\rangle/A) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}, b''_{n_2}\rangle/A)$, противореча индукционному предположению (шаг (n_1, n_2-1)). Следовательно, существует $\{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}\}$-определимое отношение эквивалентности $E''_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$, разбивающее $p_2^1(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что $g_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$ является строго монотонной на $p_2^1(M)/E'_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$. Докажем, что $E''_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$ A-определимо. Если это не так, тогда рассматривая формулу $\Theta(x, y, z, \bar{b}^2_{n_2-1}) := \exists \bar{u}[E''(\bar{u}, \bar{b}^2_{n_2-1}, x, y) \wedge \neg E''(\bar{u}, \bar{b}^2_{n_2-1}, y, z)]$, мы получаем противоречие с бинарностью p_2. Поэтому далее мы обозначаем $E''_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$ просто через E''.

Не умаляя общности, допустим, что $f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n_2-1}}$ и $g_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n_2-1}}$ обе являются строго возрастающими на $s_1(M)/E'$ и $s_2(M)/E''$ соответственно. Возьмем произвольный $b'_1 \in s_2(M)$ такой, что $b'_1 < b_1$ и $\neg E''(b'_1, b_1)$. Тогда мы имеем $g_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n+s-1}}(b'_1) < g_{\bar{a}, \bar{b}^2_{n+s-1}}(b_1)$, т.е. $f_{\bar{a}^2, b'_1, \bar{b}^2_{n+s-1}}(a_1) < f_{\bar{a}^2, \bar{b}_{n+s-1}}(a_1)$. Пусть $U_1(x)$ — $\{\bar{a}^2\}$-определимая формула, изолирующая s_1. Рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(x) := U_1(x) \wedge \exists x_0[E'(x, x_0) \wedge \forall z(R(a_1, \bar{a}^2, b_1, \bar{b}^2_{n+s-1}, z) \to R(x_0, \bar{a}^2, b'_1, \bar{b}^2_{n+s-1}, z))]$$

$$\Phi_n(x) := U_1(x) \wedge \exists x_0[E'(x, x_0) \wedge \forall x_1 \forall z(\neg \Phi_{n-1}(x_1) \wedge U_1(x_1) \wedge R(x_1, \bar{a}^2, b_1, \bar{b}^2_{n+s-1}, z) \to$$

$$\to R(x_0, \bar{a}^2, b'_1, \bar{b}^2_{n+s-1}, z))], \quad n \geq 2$$

Тогда мы получаем $\Phi_1(M) \supset \Phi_2(M) \supset \ldots \supset \Phi_n(M) \supset \ldots$, противореча $\aleph_0$-категоричности теории T.

Определение 4. *[7] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ – произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной.*
Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:
1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.
2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют $b_i, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

- *Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;*
- *Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M)$;*

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).
Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Теорема 3. *Пусть T – $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) T имеет конечный ранг выпуклости;

(2) Каждый неалгебраический тип $p \in S_1(\emptyset)$ является бинарным.

Доказательство Теоремы 3. (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из Теоремы 5.1 [1]. (2) $\Rightarrow$ (1) В силу $\aleph_0$–категоричности T существует лишь конечное число 1-типов над $\emptyset$, и пусть $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ – полный список неалгебраических 1-типов над $\emptyset$. Докажем индукцией по $(s; n_1, n_2, \ldots, n_s)$, где $s \geq 2$, что для всех $n_1, \ldots, n_s < \omega$ и любых возрастающих $\bar{a}_1 = \langle a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1\rangle$, $\bar{a}'_1 = \langle (a_1^1)', \ldots, (a_{n_1}^1)'\rangle \in [p_1(M)]^{n_1}$, $\ldots$, $\bar{a}_s = \langle a_1^s, \ldots, a_{n_s}^s\rangle$, $\bar{a}'_s = \langle (a_1^s)', \ldots, (a_{n_s}^s)'\rangle \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset)$, ..., $tp(\bar{a}_s/\emptyset) = tp(\bar{a}'_s/\emptyset)$ и $tp(\langle a^{i_1}_j, a^{i_2}_k\rangle/\emptyset) = tp(\langle (a^{i_1}_j)', (a^{i_2}_k)'\rangle/\emptyset)$ для всех $i_1, i_2, j, k : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq s$, $1 \leq j \leq n_{i_1}$,$1 \leq k \leq n_{i_2}$, мы имеем:

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_s\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/\emptyset) \qquad (*)$$

Рассмотрим случай $(2; n_1, n_2)$. Если $p_1 \perp^w p_2$, то по Теореме 2 $\{p_1, p_2\}$ ортогонально над $\emptyset$, т.е. $(*)$ выполняется. Если $p_1 \not\perp^w p_2$, то $(*)$ имеет место в силу Леммы 6.

Предположим, что теорема установлена для всех $(s; k_1, k_2, \ldots, k_s) <_{lex} (s; n_1, n_2, \ldots, n_s)$ и докажем ее для $(s; n_1, n_2, \ldots, n_s)$. Допустим противное: предположим, что $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_s\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/\emptyset)$. В силу индукционного предположения $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_{s-1}, \bar{a}'_{n_s-1}\rangle/\emptyset)$. Тогда по Лемме 3 существует $(a^s_{n_s})'' \in p_s(M)$ такой, что

$$tp(\langle \bar{a}_{n_s-1}, a^s_{n_s}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}_{n_s-1}, (a^s_{n_s})''\rangle/\emptyset), tp(\langle a^i_j, a^s_{n_s}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a^i_j, (a^s_{n_s})''\rangle/\emptyset)$$

для всех $1 \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq n_i$ и

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, a^s_{n_s}\rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, (a^s_{n_s})''\rangle/\emptyset).$$

Следовательно, существует $\emptyset$-определимая формула $R(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s)$ такая, что

$$M \models R(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, a^s_{n_s}) \wedge \neg R(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_s-1}, (a^s_{n_s})'').$$

Тогда рассматривая функции $f_{a^s_1}(x) := \sup R(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{s-2}, x, \bar{a}^2_{n_{s-1}}, a^s_1, \bar{a}^2_{n_s-1}, M)$ и $g_{a^{s-1}_1}(y) := \sup R(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{s-2}, a^{s-1}_1, \bar{a}^2_{n_{s-1}}, y, \bar{a}^2_{n_s-1}, M)$ по аналогии с доказательством Леммы 6, мы получим противоречие с $\aleph_0$–категоричностью теории T.

Цитированная литература

1. **Kulpeshov B.Sh.** //Annals of Pure and Applied Logic. 2007. V. 145. P. 354–367.

2. **Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C.** //Transactions of The American Mathematical Society. 2000. V. 352. P. 5435–5483.

3. **Baizhanov B.S.** //Algebra and Model Theory II (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). Novosibirsk State Technical University. 1999. P. 3–28.

4. **Herwig B., Macpherson H.D., Martin G., Nurtazin A., Truss J.K.** //Annals of Pure and Applied Logic. 2000. V. 101. P. 65–93.

5. **Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh.** //Mathematical Logic in Asia. Proceedings of the 9^{th} Asian Logic Conference, World Scientific, 2006. P. 31–40.

6. **Baizhanov B.S.** //The Journal of Symbolic Logic. 2001. V. 66. P. 1382–1414.

7. **Kulpeshov B.Sh.** //The Journal of Symbolic Logic. 1998. V. 63. P. 1511–1528.

Поступила в редакцию 22.01.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 86—89*

УДК 517.938

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

М. К. Куспекова, А. Б. Тунгатаров, Б. Уаисов

Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева
010008 Астана Мунайтпасова, 5 tun_mat@list.ru

В статье приведен явный вид решения одной системы дифференциальных уравнений первого порядка, которого нет в известном справочнике Э.Камке. Этот метод решения прежде не рассмотрен в литературе.

1. В известной книге немецкого математика Э.Камке [1] рассмотрена система:

$$u' = f(t)u - g(t)v, \;\; v' = g(t)u + f(t)v. \tag{1}$$

Эта система решается следующим образом. Умножая второе уравнение системы (1) на i и прибавляя к первому уравнению, имеем:

$$\frac{dW}{dt} - b(t)W = 0, \tag{2}$$

где

$$b(t) = f(t) + ig(t), W(t) = u(t) + iv(t), \;\; i = \sqrt{-1}.$$

Легко можно найти решение уравнения (2):

$$W(t) = c(\cos G(t) + i \sin G(t)) expF(t), \tag{3}$$

где $G(t) = \int g(t)dt, \;\; F(t) = \int f(t)dt, \;\; c$ – произвольное комплексное число.
Если выделим действительные и мнимые части равенства (3), то получим решение системы (1):

$$u = (c_1 \cos G(t) - c_2 \sin G(t)) expF(t), \tag{4}$$
$$v = (c_1 \sin G(t) + c_2 \cos G(t)) expF(t),$$

где c_1 и c_2 – произвольные действительные числа. Формула (4) приведена в [1].

Keywords: *System of the differential equations of the first order, decision*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10

Решая систему
$$u' = f(t)u + g(t)v,\ v' = -g(t)u + f(t)v$$
таким же образом, находим ее решения:
$$u = (c_1 \cos G(t) + c_2 \sin G(t)) expF(t),$$
$$v = (-c_1 \sin G(t) + c_2 \cos G(t)) expF(t).$$
Теперь рассмотрим систему:
$$u' = f(t)u + g(t)v + h(t),\ \ v' = g(t)u - f(t)v + q(t). \tag{5}$$
Система (5) даже при $h(t) = q(t) = 0$ не рассмотрена в книге [1], так как приведенным здесь способом данную систему решить нельзя. В данной работе получены решение системы (5) в явном виде и достаточное условие существования ее периодических решений и при этом условии построены такие решения.

Пусть коэффициенты $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ и $q(t)$ являются непрерывными функциями в рассматриваемой области. Умножив второе уравнение системы (5) на i и прибавив к первому уравнению, получим:
$$W' - b(t)\overline{W} = k(t), \tag{6}$$
где $b(t) = f(t) + ig(t)$, $W(t) = u(t) + iv(t)$, $k(t) = h(t) + iq(t)$. Интегрируя уравнение (6), имеем:
$$W(t) = (BW)(t) + K_0(t) + c, \tag{7}$$
где $(BW)(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{W(\tau)}d\tau$, $K_0(t) = \int_0^t k(\tau)d\tau$, c – произвольное комплексное число. Если подействуем оператором (BW)(t) на обе части равенства (7), то получим:
$$(BW)(t) = (B^2W)(t) + K_1(t) + \overline{c}I_1(t), \tag{8}$$
где $(B^2W)(t) = (B(BW)(t))(t)$, $I_1(t) = \int_0^t b(\tau)d\tau$, $K_1(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{K_0(\tau)}d\tau$, $\overline{c}$ – сопряженное числа . Из (7) и (8) следует:
$$W(t) = (B^2W)(t) + K_0(t) + K_1(t) + \overline{c}I_1(t) + c. \tag{9}$$
Еще раз подействовав оператором $(BW)(t)$ обе части равенства (9) и подставив полученное выражение оператора $(BW)(t)$ в (7), имеем:
$$W(t) = (B^3W)(t) + K_0(t) + K_1(t) + K_2(t) + \overline{c}I_1(t) + c(1 + I_2(t)),$$
где
$$(B^3W)(t) = (B(B^2W)(t))(t),\ I_2(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{I_1(\tau)}d\tau,\ K_2(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{K_1\tau}(t)d\tau.$$
Повторяя этот процесс n раз, получим:
$$W(t) = (B^nW)(t) + \sum_{j=0}^{n} K_j(t) + \overline{c}\sum_{j=1}^{n} I_{2j-1}(t) + c(1 + \sum_{j=1}^{n} I_{2j}(t)), \tag{10}$$
где
$$(B^nW)(t) = (B(B^{n-1}W)(t))(t),\ \ I_j(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{I_{j-1}(\tau)}d\tau,$$
$$K_j(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{K_{j-1}(\tau)}d\tau,\ (j = \overline{1,\infty}),\ (B^1W)(t) = (BW)(t).$$

Имеют место следующие легко проверяемые оценки:

$$|(B^n W)(t)| \le \frac{(|b|_0 t)^n}{n!}|W|_0,\ \ |I_n(t)| \le \frac{(|b|_0 t)^n}{n!}, \tag{11}$$

$$|K_n(t)| \le \frac{(|b|_0 t)^n}{n!}|k|_0,\ \ (n = \overline{1,\infty}),$$

где $|f|_0 = \max|f(t)|$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в представлении (10) и учитывая при этом оценки (11), имеем:

$$W(t) = \overline{c}P_1(t) + cP_2(t) + P_3(t), \tag{12}$$

где

$$P_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{2j-1}(t),\ \ P_2(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} I_{2j}(t),\ \ P_3(t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(t).$$

Используя неравенства (11), также получим

$$|P_1(t)| \le \operatorname{sh}(|b|_0 t),\ \ |P_2(t)| \le \operatorname{ch}(|b|_0 t),\ \ |P_3(t)| \le \exp(|k|_0 t). \tag{13}$$

Из видов функции $P_1(t)$ и $P_2(t)$ следует:

$${P_1}'(t) = b(t)\overline{P_2(t)},\ \ {P_2}'(t) = b(t)\overline{P_1(t)}.$$

Из последних уравнений, используя равенства $P_1(0) = 0$, $P_2(0) = 1$, получим интегральные уравнения:

$$P_1(t) = \int_0^t b(\tau)\overline{P_2(\tau)}d\tau,\ \ P_2(t) = 1 + \int_0^t b(\tau)\overline{P_1(\tau)}d\tau. \tag{14}$$

Интегрируя по частям n раз интеграл в правой части второго уравнения (14), имеем:

$$P_2(t) - 1 = P_1(t)\sum_{k=1}^{n} I_{2k-1}(t) - P_2(t)\sum_{k=1}^{n}\overline{I_{2k}(t)} + \int_0^t b(\tau)\overline{I_{2n}(\tau)}\,\overline{P_1(\tau)}d\tau.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая при этом оценки (11), (13), получим тождество:

$$|P_2(t)|^2 - |P_1(t)|^2 = 1. \tag{15}$$

Таким образом, решения уравнения (6) находятся по формуле (12). Выделяя действительные и мнимые части этой формулы, получим решения системы уравнений (5):

$$u = c_1(ReP_1(t) + ReP_2(t)) + ReP_3(t) + c_2(ImP_1(t) - ImP_2(t)), \tag{16}$$

$$v = c_1(ImP_1(t) + ImP_2(t)) + ImP_3(t) - c_2(ReP_1(t) - ReP_2(t)),$$

где c_1 и c_2 – произвольные действительные числа.

2. Рассмотрим периодические решения системы (5). Пусть $f(t+2\pi) = f(t)$, $g(t+2\pi) = g(t)$, $h(t+2\pi) = h(t)$, $q(t+2\pi) = q(t)$ и функции $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ непрерывны на отрезке $[0, 2\pi]$. Так как не всегда выполняются равенства $P_j(0) = P_j(2\pi)$ $(j = \overline{1,3})$, то в общем случае заданная по формуле (12) функция $W(t)$ не является непрерывной функцией с периодом 2π. Для получения периодического решения функцию $W(t)$, заданную по формуле (12), подчиним условию:

$$W(0) = W(2\pi). \tag{17}$$

Для этого значения функции $W(t)$ в точках 0 и 2π подставим в равенство (17) и получим:

$$\Delta_1\overline{c} + \Delta_2 c = \Delta_3, \tag{18}$$

где $\Delta_1 = P_1(2\pi), \Delta_2 = 1 - P_2(2\pi), \Delta_3 = P_3(2\pi)$.
Уравнение (18) имеет не нулевое решение тогда и только тогда, когда

$$ReP_2(2\pi) \neq 1. \tag{19}$$

Решая систему (18) при условии (19), имеем:

$$c = c_1 + ic_2,$$

где

$$c_1 = \frac{-ReP_3(2\pi)(ReP_1(2\pi) - ReP_2(2\pi)) - ImP_3(2\pi)(ImP_1(2\pi) - ImP_2(2\pi))}{ReP_2(2\pi) - 1}, \tag{20}$$

$$c_2 = \frac{ImP_3(2\pi)(ReP_1(2\pi) - ReP_2(2\pi)) - ReP_3(2\pi)(ImP_1(2\pi) - ImP_2(2\pi))}{ReP_2(2\pi) - 1}.$$

Таким образом, справедлива теорема
Теорема 1. *При выполнении условия (19) система (5) имеет периодическое решение, которое находится по формулам (12), (20).*

Цитированная литература

1. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1966.

Поступила в редакцию 18.05.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 90—95*

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО АНАЛОГА СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

С. З. Сапакова, Ж. А. Токибетов

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби
050012 Алматы Масанчи, 39/47 SapakovaS@mail.ru

В работе рассматривается краевая задача в полосе для многомерного аналога системы Коши-Римана. Доказаны существование и единственность решения данной задачи в пространстве $W_2^1(D)$.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка в пятимерном евклидовом пространстве R^5 переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$PU \equiv LU + A(x)U = F(x), \tag{1}$$

где $U = (u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4,\, u_5,\, u_6,\, u_7,\, u_8)$, u_i, $i = \overline{1,8}$, действительные функции, $A(x)$ – заданная квадратная матрица восьмого порядка, а $F(x)$ – заданная восьмимерная $F = (f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5,\, f_6,\, f_7,\, f_8)$ вектор-функция, а

$$LU = \sum_{i=1}^{5} E_i U_{x_i},$$

здесь E_i, $i = \overline{1,5}$, блочные матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} I & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} O & O & I & O \\ O & O & O & I \\ -I & O & O & O \\ O & -I & O & O \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} O & O & K & O \\ O & O & O & K \\ K & O & O & O \\ O & K & O & O \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} O & O & O & N \\ O & O & -N & O \\ O & N & O & O \\ -N & O & O & O \end{pmatrix},\quad E_5 = \begin{pmatrix} O & O & O & J \\ O & O & -J & O \\ O & J & O & O \\ -J & O & O & O \end{pmatrix},$$

записанные через квадратные матрицы второго порядка

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Keywords: *Cauchy-Riemann's system, Riemann-Hilbert's problem, analytical functions, boundary problem.*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

обладающие свойствами

$$NJ = K = -JN,\ NK = J = -KN,\ KJ = N = -JK,\quad J^2 = N^2 = I,\ \ K^2 = -I.$$

Кроме того, имеют место равенства:

$$E_l E_m = -E_m E_l,\ \ E_l^2 = -E,\quad l, m = \overline{2,\,5}. \tag{2}$$

Система (1)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_5}{\partial x_2}+\frac{\partial u_6}{\partial x_3}+\frac{\partial u_7}{\partial x_4}+\frac{\partial u_8}{\partial x_5}+a_{11}u_1+a_{12}u_2+\dots+a_{18}u_8=f_1,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_6}{\partial x_2}-\frac{\partial u_5}{\partial x_3}-\frac{\partial u_8}{\partial x_4}+\frac{\partial u_7}{\partial x_5}+a_{21}u_1+a_{22}u_2+\dots+a_{28}u_8=f_2,\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_7}{\partial x_2}+\frac{\partial u_8}{\partial x_3}-\frac{\partial u_5}{\partial x_4}-\frac{\partial u_6}{\partial x_5}+a_{31}u_1+a_{32}u_2+\dots+a_{38}u_8=f_3,\\
&\frac{\partial u_4}{\partial x_1}+\frac{\partial u_8}{\partial x_2}-\frac{\partial u_7}{\partial x_3}+\frac{\partial u_6}{\partial x_4}-\frac{\partial u_5}{\partial x_5}+a_{41}u_1+a_{42}u_2+\dots+a_{48}u_8=f_4,\\
&\frac{\partial u_5}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_4}+\frac{\partial u_4}{\partial x_5}+a_{51}u_1+a_{52}u_2+\dots+a_{58}u_8=f_5,\\
&\frac{\partial u_6}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_4}{\partial x_4}+\frac{\partial u_3}{\partial x_5}+a_{61}u_1+a_{62}u_2+\dots+a_{68}u_8=f_6,\\
&\frac{\partial u_7}{\partial x_1}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_4}{\partial x_3}-\frac{\partial u_1}{\partial x_4}-\frac{\partial u_2}{\partial x_5}+a_{71}u_1+a_{72}u_2+\dots+a_{78}u_8=f_7,\\
&\frac{\partial u_8}{\partial x_1}-\frac{\partial u_4}{\partial x_2}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_4}-\frac{\partial u_1}{\partial x_5}+a_{81}u_1+a_{82}u_2+\dots+a_{88}u_8=f_8
\end{aligned} \tag{3}$$

эллиптична, так как форма

$$D(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3,\,\dots,\,\xi_8\,)=\begin{vmatrix}
\xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5\\
0 & \xi_1 & 0 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 & \xi_5 & -\xi_4\\
0 & 0 & \xi_1 & 0 & -\xi_4 & -\xi_5 & \xi_2 & \xi_3\\
0 & 0 & 0 & \xi_1 & -\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 & \xi_2\\
-\xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_1 & 0 & 0 & 0\\
-\xi_3 & -\xi_2 & \xi_5 & -\xi_4 & 0 & \xi_1 & 0 & 0\\
-\xi_4 & -\xi_5 & -\xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_1 & 0\\
-\xi_5 & \xi_4 & -\xi_3 & -\xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_1
\end{vmatrix}=$$

$$=\quad(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\dots+\xi_8^2)^4$$

строго положительна.

Мы еще используем кватернионную запись для системы (3). Пусть $u = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$, $\mathrm{v} = u_5 + iu_6 + ju_7 + ku_8$ - кватернионы с законами умножения для единиц $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$. Тогда систему (3) можно записать в форме [1]:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{\xi}} & -\dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F,$$

где $\xi = x_2 + ix_3 + jx_4 + kx_5$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial\bar{\xi}} = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + i\dfrac{\partial}{\partial x_3} + j\dfrac{\partial}{\partial x_4} + k\dfrac{\partial}{\partial x_5}$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial\xi} = \dfrac{\partial}{\partial x_2} - i\dfrac{\partial}{\partial x_3} - j\dfrac{\partial}{\partial x_4} - k\dfrac{\partial}{\partial x_5}$.

Поскольку операция умножения для кватернионов некоммутативная, мы получаем два различных дифференциальных оператора (системы) при умножении u на ∂_ξ справа и слева, причем умножения слева ∂_ξ понимаем как:

$$\partial_\xi u = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\frac{\partial}{\partial x_3} + j\frac{\partial}{\partial x_4} + k\frac{\partial}{\partial x5}\right)(u_1 + i\,u_2 + j\,u_3 + k\,u_4),$$

а для умножения u на ∂_ξ справа нужно формально перемножить их как кватернионы, а затем считать $u_i\dfrac{\partial}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ [2]. В дальнейшем для удобства мы не будем делать различия в обозначениях вектор-функции и кватернион-функции.

В области $D = \{x = (x_1, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5) \in R^5 : 0 < x_1 < h,\ (x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5) \in R^4\}$, границу которой обозначим через G, рассмотрим аналогичную задачу, предложенную в работе [3].

Постановка задачи. Требуется найти решение системы (1) $U(x) \in C^\infty(\overline{D}) \cap W_2^2(D)$, компоненты которого удовлетворяют на границе Г условиям:

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0} = u_3|_{x_1=0} = u_4|_{x_1=0} = u_5|_{x_1=h} = u_6|_{x_1=h} = u_7|_{x_1=h} = u_8|_{x_1=h} = 0. \qquad (4)$$

Класс вектор-функций $U(x) \in C^\infty(\overline{D}) \cap W_2^2(D)$, удовлетворяющих условиям (4), обозначим через C_p, замыкание C_p в норме пространства $W_2^1(D)$ – через S_p.

Утверждение 1. *Для любой вектор функции $U(x) \in S_p$ справедливы неравенства*

$$\|LU\|_0 \geq \|U_{x_1}\|_0,\ \|LU\|_0 \geq C\|U\|_0, \qquad (5)$$

где $C = C(h)$ – const.

Доказательство. Возьмем произвольную вектор-функцию $U(x) \in C_p$ и рассмотрим интеграл:

$$(LU,\, U_{x_1})_0 = \sum_{i=1}^{5} (E_i U_{x_i},\, U_{x_1})_0. \qquad (6)$$

Каждое слагаемое рассмотрим отдельно:

$$(E_1 U_{x_i},\, U_{x_1})_0 = (U_{x_i},\, U_{x_1})_0 = \|U_{x_1}\|_0^2. \qquad (7)$$

Возьмем второе слагаемое в (6) и проинтегрируем его по частям:

$$\begin{gathered}(E_1 U_{x_2},\, U_{x_1})_0 = -\int\limits_\Gamma (u_1\frac{\partial u_5}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_6}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_7}{\partial x_2} + u_4\frac{\partial u_8}{\partial x_2})n_2 d\Gamma + \\ + \int\limits_\Gamma (u_1\frac{\partial u_5}{\partial x_2} + u_2\frac{\partial u_6}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_7}{\partial x_2} + u_4\frac{\partial u_8}{\partial x_2})n_1 d\Gamma,\end{gathered} \qquad (8)$$

где $\overline{n} = (n_1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)$ – единичный вектор внешней нормали к Г. Точно таким же образом получаем

$$(E_3 U_{x_3},\, U_{x_1})_0 = \int\limits_\Gamma (u_1\frac{\partial u_6}{\partial x_3} - u_2\frac{\partial u_5}{\partial x_3} + u_3\frac{\partial u_8}{\partial x_3} - u_4\frac{\partial u_7}{\partial x_3})n_1 d\Gamma, \qquad (9)$$

$$(E_4 U_{x_4},\, U_{x_1})_0 = \int\limits_\Gamma (u_1\frac{\partial u_7}{\partial x_4} - u_2\frac{\partial u_8}{\partial x_4} - u_3\frac{\partial u_5}{\partial x_4} + u_4\frac{\partial u_6}{\partial x_4})n_1 d\Gamma, \qquad (10)$$

$$(E_5 U_{x_5},\, U_{x_1})_0 = \int\limits_\Gamma (u_1\frac{\partial u_8}{\partial x_5} + u_2\frac{\partial u_7}{\partial x_5} - u_3\frac{\partial u_6}{\partial x_5} - u_4\frac{\partial u_5}{\partial x_5})n_1 d\Gamma, \qquad (11)$$

Согласно условиям (4) правые части равенств (8)–(11) равны нулю. Следовательно, на основании (7)–(11) из (6) имеем:

$$(LU,\,U_{x_1})_0=\|U_{x_1}\|_0^2. \tag{12}$$

Отсюда при помощи неравенства Гельдера получаем первое неравенство в (5):

$$\|LU\|_0\geq\|U_{x_1}\|_0. \tag{13}$$

Так как вектор-функция $U(x)\in S_p(D)$, то имеем:

$$u_n(x_1,x')=\int\limits_0^{x_1}u_{n_t}(t,x')dt,\qquad n=1,2,3,4,$$

$$\int\limits_D u_n^2(x_1,x')dD=\int\limits_D(\int\limits_0^{x_1}u_{n_t}(t,x')dt)^2dD\leq$$

$$\leq\int\limits_0^h x_1dx_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\int\limits_0^h u_{n_t}^2(t,x')dt=\frac{h^2}{2}\int\limits_D u_{n_{x_1}}^2(x)dx_1dx'$$

и аналогично

$$u_k(x_1,\,x')=\int\limits_{x_1}^{h}u_{k_t}(t,\,x')dt,\quad n=5,\,6,\,7,\,8,$$

$$\int\limits_D u_k^2(x_1,\,x')dx_1dx'\leq\frac{h^2}{2}\int\limits_D u_{k_{x_1}}^2(x)dx_1dx'.$$

Тогда получается неравенство:

$$\|U\|_0^2\leq\frac{h^2}{2}\|U_{x_1}\|^2, \tag{14}$$

а с помощью (14) и (13) получим вторую оценку в (5):

$$\|LU\|_0\geq C\|U\|_0.$$

Утверждение 2. *Для любой вектор-функции $U(x)\in C_p$ справедливо неравенство:*

$$C_1\|U\|_1\leq\ \|LU\|_0\leq C_2\|U\|_1,\quad C_1,\,C_2\ =const>0. \tag{15}$$

Доказательство. Для любой вектор-функции $U(x)\in C_p$ рассмотрим интеграл:

$$(LU,\,LU)_0=\sum_{i=1}^{5}(E_iU_{x_i},\,E_iU_{x_i})_0+\sum_{i,\,j=1}^{5}(E_iU_{x_i},\,E_jU_{x_j})_0. \tag{16}$$

По свойству (2) матриц E_i, $i=\overline{1,5}$, легко получим, что

$$(E_1U_{x_1},\,E_1U_{x_1})_0=(U_{x_1},\,U_{x_1})_0=\|U_{x_1}\|_0^2, \tag{17}$$

$$(E_iU_{x_i},\,E_iU_{x_i})_0=(U_{x_i},\,U_{x_i})_0=\|U_{x_i}\|_0^2,\ i=\overline{2,\ 5}, \tag{18}$$

Интегрированием по частям можно показать, что

$$(E_i U_{x_i},\, E_i U_{x_i})_0 = 0, \quad i = \overline{2,\ 5}. \tag{19}$$

Так, например, по формуле (8):

$$(E_1 U_{x_1},\, E_2 U_{x_2}) = \int\limits_{\Gamma} (u_1 \frac{\partial u_5}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial u_6}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_7}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial u_8}{\partial x_2}) n_1 d\Gamma, \tag{20}$$

а в силу того, что по условиям (4) имеет место:

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0} = u_3|_{x_1=0} = u_4|_{x_1=0} = 0,$$

а также по тем же условиям (4), касательные производные от u_5, u_6, u_7, u_8 на $x_1 = h$ также равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial u_5}{\partial x_2}|_{x_1=h} = \frac{\partial u_6}{\partial x_2}|_{x_1=h} = \frac{\partial u_7}{\partial x_2}|_{x_1=h} = \frac{\partial u_8}{\partial x_2}|_{x_1=h} = 0.$$

Следовательно, интеграл по границе в правой части (20) равен нулю. Аналогично на основании условий (4) и формул (9)–(11) остальные слагаемые в (19) также равны нулю.

Теперь покажем, что суммы интегралов $\sum\limits_{i,\,j=1}^{5} (E_i U_{x_i},\, E_j U_{x_j})_0$, $i \neq j$, также равны нулю. Действительно, каждый интеграл $(E_i U_{x_i},\, E_j U_{x_j})_0 = 0$, при $i \neq j$.

Например,

$$\begin{aligned}(E_3 U_{x_3},\, E_4 U_{x_4})_0 = \int\limits_{\Gamma} [u_6 \frac{\partial u_7}{\partial x_4} + u_5 \frac{\partial u_8}{\partial x_4} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + u_1 \frac{\partial u_4}{\partial x_4}] \cos(n_{x_1}, n_{x_3}) d\Gamma - \\ - \int\limits_{\Gamma} [u_5 \frac{\partial u_8}{\partial x_3} + u_6 \frac{\partial u_7}{\partial x_3} + u_1 \frac{\partial u_4}{\partial x_3} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}] \cos(n_{x_1}, n_{x_4}) d\Gamma = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, мы получили, что на основании равенств (17)–(21) интеграл (16) равен

$$\|LU\|_0^2 = \sum_{i=1}^{5} \|U_{x_i}\|_0^2.$$

Теперь, используя (14), получаем:

$$\|LU\|_0^2 = \frac{1}{h^2}(\frac{h^2}{2}\|U_{x_1}\|_0^2 + \frac{h^2}{2}\|U_{x_1}\|_0^2) + \sum_{i=2}^{5} \|U_{x_i}\|_0^2 \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \|U_{x_i}\|_0^2 + \frac{1}{h^2}\|U\|_0^2.$$

Следовательно, найдутся положительные постоянные C_1, $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \|U\|_1 \leq \|LU\|_0 \leq C_2 \|U\|_1, \quad C_1,\, C_2 = const > 0.$$

Здесь также как в работе [2] можно положить $C_1 = \min(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{k})$, $C_2 = 1$. Приближая вектор-функции $U(x) \in S_p$ вектор-функциями $U_n(x) \in C_p$ в норме $\|\cdot\|_1$, предельным переходом в последнем неравенстве получаем оценку (15) для любой функции$U(x) \in S_p$.

Утверждение 3. *Если матрица* $A(x) \in C(\overline{D})$ *и существует положительное число* $\delta < \frac{\sqrt{2}}{h}$ *такое, что* $\|AU\|_0 \leq \delta \|U\|_0$, *то для любой вектор-функции* $U(x) \in S_p$ *выполняется неравенство:*

$$C_3 \|U\|_1 \leq \|PU\|_0 \leq C_4 \|U\|_1, \ C_1,\, C_4 = const > 0. \tag{22}$$

Доказательство. Для любой вектор-функции $U(x) \in S_p$ интеграл $(PU,\, LU)_0$ преобразуем следующим образом:

$$|(PU,\, LU)_0| = |(LU + AU,\, LU)_0| = \left| \|LU\|_0^2 + (AU,\, LU)_0' \right| \le \|LU\|_0^2 + \|AU\|_0 \|LU\|_0 \le$$
$$\le \|LU\|_0^2 + \delta \|LU\|_0 \|U\|_0 \le C\|LU\|_0^2,\ C > 0,$$

и, с другой стороны,

$$|(PU,\, LU)_0| \ge \|LU\|_0^2 - \delta\|LU\|_0\|U\|_0 \ge \|LU\|_0^2(1 - \delta\frac{h}{\sqrt{2}}) = K\|LU\|_0^2,\ K > 0.$$

Из этих последних двух оценок и из (15) получаем неравенство (22).

На основании этих трех утверждений получим теорему, доказанную в [3].

Теорема. *Если матрица $A(x)$ удовлетворяет условию утверждения 3, то для любой вектор-функции $F(x) \in L_2(D)$ задача (1), (4) имеет единственное решение $U(x) \in W_2^1(D)$.*

Доказательство приведем такое же, как в работе [3]. Пусть $P * V \equiv L * V + A(x)V$ – формально сопряженный оператор, где $L * V = -E_1 V x_1 + \sum\limits_{i=2}^{5} E_i V_{x_i}$,$C_{p*},\ S_{p*}$ – классы вектор-функций, удовлетворяющие сопряженным граничным условиям. Введем негативное пространство S_{-1} с нормой $\|G\|_{S_{-1}} = \sup \dfrac{(G,\, U)_0}{\|U\|_1}$. Тогда с помощью утверждений 1–3, рассматривая вспомогательную задачу $LU = V,\ \ U \in C_p,\ \forall\ V \in C_{p*}$, получаем оценку:

$$\|P * V\|_{S_{-1}} \ge \delta \|V\|_0,\ \delta = const > 0.$$

Для этого используется представление решения системы уравнений $LU = V$ в явном виде.

Далее,

$$(P * V,\, U)_0 = (PU,\, V)_0 = (PU, L\,U)_0 \ge \delta_1 \|U\|_1,$$

откуда следует нужная оценка.

Затем, по обычной схеме

$$|(F,\, V)_0| \le \|F\|_0 \|V\|_0 \le c\|F\|_0 \|P * V\|_{S_{-1}},$$

откуда $\exists U \in S_p : (F,\, V)_0 = (U,\, P * V)_0,\ \forall V(x,\, y) \in C_{p*}$.

Таким образом, доказана разрешимость задачи в пространстве $W_2^1(D)$. Интегрируя по частям в тождестве $(F,\, V)_0 = (U,\, P * V)_0,\ \forall\, V(x,\, y) \in C_{p*}$ получаем, что это решение является решением почти всюду в D, т.к. тождество выполнено на плотном в $W_2^1(D)$ множестве. В силу оценки (22) это решение единственное.

Цитированная литература

1. **Токибетов Ж.А., Сапакова С.З.** //Материалы VI Казахстанско-Российской межд. конф. "Матем. моделирование науч.-технич. и экологич. проблем в нефтегазодобывающей промышленности". Астана, 2007. С. 295–298.

2. **Виноградов В.С.** //ДАН СССР. 1971. Т. 199, № 5. С. 1008–1010.

3. **Ошоров Б.Б.** Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2007.

Поступила в редакцию 11.05.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 96—98*

УДК 517.927.25

ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ВОЗМУЩЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ЕЕ БАЗИСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. А. Тенгаева

Международный гуманитарно-технический университет
160000 Шымкент Байтурсынова, 80 Aijan0973@mail.ru

В работе изучены обобщенные спектральные задачи, главная часть краевых условий которых представляет собой периодическую и антипериодическую задачу. Доказана базисность Рисса соответствующих собственных функций.

Основной целью спектральной теории линейных операторов является вопрос о сходимости спектральных разложений произвольной функции из того или иного класса. Этот вопрос полностью решается, если рассматриваемая система функций, связанная с данным оператором, является базисом в том классе.

В.А. Ильиным [1] была построена теория, позволяющая эффективно решать вопрос базисности корневых функций несамосопряженных обыкновенных линейных дифференциальных операторов. К сожалению, до сих пор нет методов, которые можно было бы применить к решению вопросов базисности обобщенных спектральных задач, на важность которых особое внимание обращает Т. Като [2]. Желая перенести теорию базисности В.А. Ильина на обобщенные спектральные задачи, естественно решать этот вопрос в случае обобщенных спектральных задач для модельных дифференциальных операторов.

В работах М.А. Садыбекова и А.М. Сарсенби [3, 4, 5] были рассмотрены обобщенные спектральные задачи для оператора двукратного дифференцирования в следующей постановке:

$$-u''(x) = \lambda u(-x),\ -1 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1) = 0, \\ \alpha_2 u'(-1) + \beta_2 u'(1) + \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ими было введено понятие регулярности краевых условий (2). Так, краевые условия (2) будут регулярными в следующих случаях:

1) $\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 \neq 0$;

2) $\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $\alpha_1 \neq \beta_1$, $\alpha_{21} \neq \beta_{21}$ и $\alpha_1 \neq -\beta_1$, $\alpha_{21} \neq -\beta_{21}$;

Keywords: *Investigate generalized spectral problems, riesz basis*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B16, 34B40

3) $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0,\ \alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0.$

Регулярные краевые условия обладают тем свойством, что собственные функции соответствующей обобщенной спектральной задачи (1), (2) образуют базис Рисса.

В случае нерегулярных краевых условий, т.е. когда нарушено хотя бы одно из условий $\alpha_1^2 \neq \beta_1^2$, $\alpha_{21}^2 \neq \beta_{21}^2$ вопрос оставался открытым.

Мы рассмотрим случай, когда нарушаются оба условия. Тогда краевые условия (2) запишутся в виде:

$$\begin{cases} u'(-1) - u'(1) + \alpha_{11}u)(-1) = 0, \\ u(-1) - u(1) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u'(-1) - u'(1) + \beta_{11}u)(-1) = 0, \\ u(-1) - u(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В другом случае краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} u'(-1) + u'(1) + \alpha_{11}u)(-1) = 0, \\ u(-1) + u(1) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u'(-1) + u'(1) + \beta_{11}u)(-1) = 0, \\ u(-1) + u(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Задача (3) есть возмущение периодического краевого условия, а задача (4) – возмущение антипериодического краевого условия.

Легко проверить, что обобщенная спектральная задача (1) с периодическими и антипериодическими краевыми условиями является самосопряженной. Поэтому соответствующая система собственных функций образует полную ортонормированную систему. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1. *Система собственных функций обобщенной спектральной задачи (1), (3) образует базис Рисса пространства* $L_2(-1,1)$.

Теорема 2. *Система собственных функций обобщенной спектральной задачи (1), (4) образует базис Рисса пространства* $L_2(-1,1)$.

Доказательство теоремы 1. Пользуясь общим решением уравнения (1)

$$u(x) = a(e^{\rho x} - e^{-\rho x}) + b(e^{i\rho x} - e^{-i\rho x})$$

и краевыми условиями (3), вычислим собственные значения и собственные функции обобщенной спектральной задачи (1), (3). Для определенности выберем первое из краевых условий (3). Тогда легко находим собственные значения:

$$\lambda_k^1 = -(k\pi)^2,\ \ a \neq 0;\ \ \lambda_k^2 = (k\pi + O(\frac{1}{k}))^2,\ \ b \neq 0.$$

Соответствующие собственные функции имеют вид:

$$u_{k1} = sin\, k\pi x, \ \ u_{k1} = cos\,(k\pi + O(\frac{1}{k}))x.$$

Теперь доказательство теоремы легко следует из того факта, что система $\{sin\, k\pi x,\ cos\, k\pi x\}$ образует полную ортогональную почти нормированную систему, а полученная система, состоящая из собственных функций задачи (1), (3) , квадратично близка к ней. Поэтому в силу хорошо известных теорем Н.К.Бари [6], собственные функции обобщенной спектральной задачи (1), (3) образуют базис Рисса в $L_2(-1,1)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 доказывается аналогичным образом. При этом учитывается, что собственные функции обобщенной спектральной задачи (1), (4) имеют вид:

$$u_{k1} = sin\,(k + \frac{1}{2})\pi x, \ \ u_{k1} = cos\,((k + \frac{1}{2})\pi + O(\frac{1}{k}))x.$$

Автор выражают искреннюю признательность проф. М.А.Садыбекову и А.М.Сарсенби за обсуждение результатов.

Цитированная литература

1. **Ильин В.А.** //Дифф. уравнения. 1994. Т. 30, № 9. С. 1516–1529.

2. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов М., 1972.

3. **Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.** //Математический журнал. 2007. Т. 7, № 1 (23). С. 82–88.

4. **Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.** //Вестник КазНУ. 2006. № 2(49). С. 48–54.

5. **Сарсенби А.М.** //Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 4. С. 506–511.

6. **Сарсенби А.М.** Теория базисности корневых векторов линейных несамосопряженных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Шымкент, 2009.

Поступила в редакцию 16.06.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 99—103*

УДК 531.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОГО ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА

К. С. Жилисбаева

Институт космических исследований
050010 Алматы Шевченко, 15 zhilisbaeva@mail.ru

Рассматривается обратная задача динамики намагниченного динамически симметричного спутника в геомагнитном поле, моделируемом прямым диполем. По заданным первым интегралам построены дифференциальные уравнения движения спутника и определено влияние гравитационных моментов.

Для выполнения задач различного назначения искусственных спутников земли (ИСЗ) часто требуется восстановление уравнений движения спутника по известным свойствам движения. Задачи такого вида с различными их видоизменениями названы обратными задачами динамики.

В механике под обратными задачами понимают определение сил по заданным свойствам движения [1], классическими примерами таких задач являются известные задачи Ньютона-Бертрана [2], Суслова-Жуковского [1, 3]. К обратным задачам динамики относятся задачи об определении параметров системы так, чтобы движение с заданными свойствами оказались одним из возможных движений рассматриваемой механической системы, как, например, задача Мещерского [4] и задача Чаплыгина-Горячева [5, 6]. К обратным задачам примыкают задачи аналитического построения устойчивых механических систем, когда уравнения движения системы достраиваются таким образом, чтобы движение системы с заданными свойствами являлось устойчивым [7, 8]. Продолжением класса обратных задач динамики являются задачи аналитического построения механических систем программного движения, где обратные задачи динамики ставятся в сочетании с задачей устойчивости самих заданных свойств движения (программы движения) [7–9].

Решение обратных задач динамики [7–9] сводится к построению систем дифференциальных уравнений.

Наличие динамической аналогии между движениями систем различной природы позволяет распространить результаты решений обратных задач динамики с механическим содержанием

Keywords: *Inverse problem, magnetized dynamically symmetric satellite, magnetic field of the Earth, first integrals, central axes of inertia, differential equations of movement, gravitational field*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K29, 70F17

на процессы иной физической природы. Эти задачи имеют широкие прикладные возможности [8–9] .

В данной работе рассматривается обратная задача динамики экваториального динамически симметричного спутника, на борту которого установлены сильные магниты. Тогда движение спутника определяется в основном взаимодействием его магнитного момента с магнитным полем Земли, и действием других сил в первом приближении можно пренебречь. Однако в ряде задач о движении спутника в геомагнитном поле возникает необходимость учитывать влияние гравитационных сил. Например, при магнитной стабилизации спутников гравитационный момент вызывает нежелательные нутационные колебания оси собственного вращения спутника. Поэтому в такой постановке решение обратной задачи динамики спутника является актуальной.

1. Постановка задачи. Динамически симметричный спутник, на борту которого установлены сильные магниты, движется по экваториальной круговой орбите в геомагнитном поле, моделируемом прямым диполем. Тогда вектор напряженности геомагнитного поля $\overrightarrow{H}$ неизменен по направлению и величине во всех точках орбиты и ортогонален к ее плоскости. Магнитный момент спутника возникает из-за наличия на нем функционирующих электрических систем и постоянных сильных магнитов. Диссипативные эффекты, возникающие в основном за счет токов Фуко в данной постановке задачи, не учитываются, и магнитный момент спутника $\overrightarrow{I}$ считается постоянным.

Пусть ось симметрии оболочки спутника совпадает с главной центральной осью симметрии, тогда в первом приближении можно считать, что магнитный момент спутника направлен вдоль оси симметрии спутника.

На спутник будет действовать момент, определяемый формулой:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{I} + \overrightarrow{H}. \tag{1}$$

Необходимо построить уравнения движения рассматриваемого спутника с учетом влияния гравитационного момента.

Уравнения движения спутника запишем в проекциях на оси связанной системы координат, которые совпадают с главными центральными осями инерции спутника. Ориентация спутника относительно орбитальной системы координат с началом в центре масс спутника определяются углами Эйлера θ, φ, ψ, а элементы матрицы перехода от связанной системы координат к орбитальной определяются по формулам:

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \cos\psi\,\cos\varphi - \sin\psi\,\sin\varphi\,\cos\theta,\ \alpha_2 = \sin\psi\,\cos\varphi + \cos\psi\,\sin\varphi\,\cos\theta,\ \alpha_3 = \sin\varphi\,\cos\theta,\\ \beta_1 = -\cos\psi\,\sin\varphi - \sin\psi\,\cos\varphi\,\cos\theta,\ \beta_2 = -\sin\psi\,\cos\varphi + \cos\psi\,\cos\varphi\,\cos\theta,\ \beta_3 = \cos\varphi\,\sin\theta,\\ \gamma_1 = \sin\psi\,\sin\theta,\ \gamma_2 = -\cos\psi\,\sin\theta,\ \gamma_3 = \cos\theta.\end{gathered} \tag{2}$$

Проекции M_x, M_y, M_z гравитационного момента на оси связанной системы координат имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{3\gamma\,M}{R^3}(C-B)\gamma_2\gamma_3,\\ M_y &= \frac{3\gamma\,M}{R^3}(A-C)\gamma_1\gamma_3,\\ M_z &= \frac{3\gamma\,M}{R^3}(B-A)\gamma_1\gamma_2,\end{aligned} \tag{3}$$

где γ – универсальная гравитационная постоянная, M – масса Земли, R имеет вид:

$$R = \frac{p'}{1+e\cos\nu}.$$

Здесь $p^{'}$, e – параметр и эксцентриситет орбиты, ν – истинная аномалия. Величина ν удовлетворяет уравнению [10]:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{k}}{p^{'3/2}}(1 + e\cos\nu)^2.$$

Так как масса тела m много меньше массы притягивающего центра, то можно считать, что $k = \gamma M$.

Выразим проекции абсолютной угловой скорости спутника на главные центральные оси через углы Эйлера, их производные и угловую скорость движения центра масс по орбите. Проекции угловой скорости определим из кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,\\ q &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\\ r &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда динамические уравнения Эйлера в общем виде имеют вид:

$$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = M_x,\\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = M_y,\\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = M_z. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника (в рассматриваемом случае моменты инерции являются переменными величинами), M_x, M_y, M_z – моменты внешних действующих сил. Система семи уравнений (6), (4) и (5) с учетом равенств (2), (3) и (1) является замкнутой системой дифференциальных уравнений, описывающей движение ИСЗ относительно центра масс. Чтобы определить движение спутника необходимо разрешить системы (6) и (5) совместно. Вместо системы (5) можно взять систему уравнений Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} \equiv \dot\beta_1 &= r\beta_2 - q\beta_3,\\ \dot\beta_2 &= p\beta_3 - r\beta_1,\\ \dot\beta_3 &= q\beta_1 - p\beta_2. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \dot\gamma_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3,\\ \dot\gamma_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1,\\ \dot\gamma_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = M_x,\\ A\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = M_y,\\ C\frac{dr}{dt} = M_z,\\ \dot\beta_i = B_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3),\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Решается следующая задача: построить уравнения движения рассматриваемого спутника (динамические уравнения Эйлера) по известным первым интегралам. Так как при этом соответствующие кинематические уравнения (кинематические уравнения Эйлера или уравнения Пуассона) являются известными, то задача построения уравнений движения в этом случае представляет собой задачу замыкания системы кинематических уравнений динамическими уравнениями Эйлера по заданному интегральному многообразию.

Таким образом, надо определить условия, накладываемые на M_x, M_y, M_z, при которых система (8) имеет первые интегралы:

$$
\begin{gathered}
f_1 = A(p^2+q^2) + Cr^2 - \frac{6\gamma M}{R^3}(A-C)\gamma_3^2 - 2I_0 H\beta_3, \\
f_2 = A(p\beta_1 + q\beta_2) + Cr\beta_3, \\
f_3 = C(r - r_0),\ r_0 = const, \\
f_4 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \\
f_5 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Известно, что в теории управления заранее указанные заданные свойства процесса называют *программой движения,* каждое из свойств – *элементом программы,* а соответствующий процесс – *программным движением.* Таким образом, рассматривается задача аналитического построения систем программного движения, при этом программное движение должно быть и устойчивым, прежде всего, относительно самих свойств движения при наличии начальных отклонений от заданных значений. Тогда задача аналитического построения систем программного движения сводится к соответствующей обратной задаче динамики, поставленной с дополнительными требованиями устойчивости заданных свойств (программы движения) в смысле Ляпунова (при наличии лишь начальных отклонений).

Решение обратной задачи динамики спутника в нашем случае сводится к построению дифференциальных уравнений движения по заданным первым интегралам и к определению в дальнейшем из них искомых сил и моментов, а также других параметров, необходимых для осуществления движения спутника с предварительно заданными свойствами.

Для решения этой задачи составляются необходимые и достаточные условия того, что заданные выражения являются первыми интегралами. Эти условия составляют систему уравнений относительно правых частей строящихся уравнений, решив которые получаем искомую систему динамических уравнений Эйлера. Следует заметить, что эти необходимые и достаточные условия могут быть использованы для решения других задач, например, для определения некоторых параметров движения спутника или частных интегралов при заданных первых интегралах и заданных ограничениях на распределение масс.

Чтобы составить систему уравнений для определения неизвестного силового поля, продифференцируем выражение (9)

$$
\begin{gathered}
\dot f_1 = k_{11}f_1 + k_{12}f_2 + k_{13}f_3, \\
\dot f_2 = k_{21}f_1 + k_{22}f_2 + k_{23}f_3, \\
\dot f_3 = k_{31}f_1 + k_{32}f_2 + k_{33}f_3, \\
\dot f_4 = k_{44}f_4,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

и, решая совместно уравнения системы (8) и уравнения программных связей (9) и (10), получим систему уравнений для определения неизвестных величин следующего вида:

$$
\begin{cases}
pM_x + qM_y + rM_z = h_1, \\
\beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z = h_2, \\
M_z = h_3, \\
\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = k_{44} f_4,
\end{cases}
\tag{11}
$$

где

$$
h_1 = \sum_{i=1}^{3} k_{1i} f_i + \frac{6\gamma M}{R^3}(A-C)\gamma_3\dot\gamma_3 + I_0 H\dot\beta_3,
$$

$$h_2 = \sum_{i=1}^{3} k_{2i} f_i, \tag{12}$$

$$h_3 = \sum_{i=1}^{3} k_{3i} f_i.$$

Используя свойства движения, из (12) получим:

$$k_{ij} \equiv 0, \ i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда решение системы (11) имеет следующий вид:

$$M_x = \frac{1}{q\beta_1 - p\beta_2}(qh_2 - \beta_2 h_1 - (q\beta_3 - r\beta_2)h_3),$$

$$M_y = \frac{1}{q\beta_1 - p\beta_2}(\beta_1 h_1 - ph_2 - (r\beta_1 - p\beta_3)h_3), \tag{13}$$

$$M_z = h_3.$$

И, далее с учетом (6), (7) и (9) получаем:

$$M_x = -\frac{6\gamma M}{R^3}(A - C)\gamma_3\beta_2\frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\beta}_3} - I_0 H\beta_2,$$

$$M_y = \frac{6\gamma M}{R^3}(A - C)\gamma_3\beta_1\frac{\dot{\gamma}_3}{\dot{\beta}_3} + I_0 H\beta_1, \tag{14}$$

$$M_z = 0.$$

Таким образом, по заданным интегралам определяются динамические свойства спутника и силовое поле, в котором движение спутника обладает указанными свойствами. По четырем известным первым интегралам определены выражения приложенных к спутнику сил.

Цитированная литература

1. **Суслов Г. К.** О силовой функции, допускающей данные интегралы. Киев, 1890.
2. **Ньютон И.** Математические начала натуральной философии. Собр. соч. акад. А.Н.Крылова. М, 1936.
3. **Жуковский Н.Е.** Определение силовой функции по данному семейству траекторий. Собр. соч., т. 1. М., 1948.
4. **Мещерский И.В.** Работы по механике тел переменной массы. М, 1949.
5. **Чаплыгин С.А.** Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела подпертого в одной точке. Собр. соч., т. 1. М., 1948.
6. **Горячев Д.Н.** Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1948.
7. **Галиуллин А.С.** Обратные задачи динамики. М., 1981.
8. **Галиуллин А.С.** Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.
9. **Мухарлямов Р.Г.** Уравнения движения механических систем. М., 2001.
10. **Белецкий В. В.** Движение спутника вокруг центра масс в гравитационном поле Земли. М., 1977.

Поступила в редакцию 25.06.2010г.

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 104 — 105*

ХРОНИКА

Заседание семинара по уравнениям математической физики и функциональному анализу

В период с сентября 2009г. по июнь 2010г. в Институте математики МОН РК проводился научный семинар лабораторий уравнений математической физики и функционального анализа и его приложений.

Заседание 24 сентября 2009г.

Б.Д. Кошанов "Построение и свойства функции Грина регулярных краевых задач для полигармонических уравнений"(докторская диссертация, г. Алматы).

Заседание 1 октября 2009г.

Б.Ш.Кулпешов "Бинарность и счетная категоричность для вариантов o - минимальности: слабой o - минимальности и слабой циклической минимальности"(докторская диссертация, г. Алматы).

Заседание 10 марта 2010г.

Е.С.Алимжанов "О квазивариационном неравенстве для одной задачи из теории полупроводников"(г. Алматы).

Заседание 8 апреля 2010г.

С.Е.Айтжанов "Разрешимость обратных задач магнитной гидродинамики и тепловой конвекции"(кандидатская диссертация, г. Алматы).

Заседание 15 апреля 2010г.

Х.Хомпыш "Кельвин-Фойгт сұйығы үшін магниттік, жылу конвекциялық жүйелерінің бірмәнді шешімділігі және кейбір ε жуықтаулары"(кандидатская диссертация, г. Алматы).

Заседание 19 апреля 2010г.

Г.Акишев "Ортогональные ряды в симметричных пространствах и приближение функциональных классов"(докторская диссертация, г. Караганда).

Заседание 6 мая 2010г.

Т.М.Алдибеков "Обобщенные показатели Ляпунова"(докторская диссертация, г. Алматы).

Заседание 13 мая 2010г.

Ж.А.Серикбаев "О гладкости и аппроксимативных свойствах решений дифференциальных уравнений с переменными операторными коэффициентами"(кандидатская диссертация, г. Тараз).

Заседание 20 мая 2010г.

С.С.Кабдрахова "Модификация метода ломаных Эйлера решения полупериодической краевой задачи для гиперболического уравнения"(кандидатская диссертация, г. Алматы).

Заседание 27 мая 2010г.

А.У.Бекбауова "Многопериодические по части переменных решения в широком смысле систем дифференциальных уравнений в частных производных"(кандидатская диссертация, г. Актобе).

Заседание 3 июня 2010г.

М.К.Кураисов "Айнымалы коэффициентті параболалық теңдеулер үшін локалды емес шекаралық есептер"(кандидатская диссертация, г. Алматы).

Заседание 17 июня 2010г.

Д.М.Ахманова "Граничные задачи для спектрально-нагруженного параболического оператора с приближением линии нагрузки к временной оси в нуле или на бесконечности"(кандидатская диссертация, г. Караганда).

Заседание 24 июня 2010г.

А.Д.Абильдаева "Ограниченные решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их аппроксимация"(кандидатская диссертация, г. Алматы).

Ученый секретарь семинара Ж.К.Джобулаева

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 519.62 2000 MSC: 34B16, 34B40

Abildayeva A.D., Temesheva S.M. **On correct solvability of problem of finding solution of system of ordinary differential equations bounded on whole axis** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 5 – 11.

The necessary and sufficient conditions of correct solvability of problem of finding solution bounded on hole axis are estabilished in terms of bounded revesibility of two sides unlimit matricies.
References – 4.

УДК: 519.62 2000 MSC: 34B16, 34B40

Әбілдаева Ә.Д., Темешева С.М. **Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бүкіл өсте шектелген шешімін табу есебінің корректі шешілімдігі туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 5 – 11.

Бүкіл өсте шектелген шешімді табу есебінің корректі шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары екі жақты шексіз матрицалардың шектеулі қайырмалық терминінде тағайындалды.
Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 517.962.24 2000 MSC: 35A45

Aldai M. **Ossilation of the second order half-linear difference equation with sign-variable coefficient** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 12 – 18.

For the second order half-linear difference equation sufficient conditions of its oscillations are established when the coefficient of the unknown changes the sign.
References – 5.

УДК: 517.962.24 2000 MSC: 35A45

Алдай М. **Ауыспалы таңбалы коэффициентті екінші ретті жартылай сызықты айырымдық теңдеудің тербелімділігі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 12 – 18.

Белгісіздің алдындағы коэффициенттің ауыспалы таңбалы болғанда екінші ретті жартылай сызықты айырымдық теңдеу үшін тербелімділіктің жеткілікті шарты алынады.
Әдебиеттер тізімі – 5.

УДК: 517.956, 517.977.1/.5 2000 MSC: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Imanberdiyev K.B. **About one incorrect problem for the Poisson equation with an additional condition** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 19 – 25.

In the bounded two-dimensional rectangular region we study Cauchy-Dirichlet problem for the Poisson equation with an additional condition. The studied ill-posed problem is reduced to an optimal control problem. The optimality conditions are stated with help of the solution of the adjoint boundary value problem. It is found a criterium of the strongly solvability of the incorrect boundary value problem.
References – 11.

УДК: 517.956, 517.977.1/.5 2000 MSC: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

Амангалиева М.М., Жиенәлиев М.Т., Иманбердиев Қ.Б. **Қосымша шарты бар Пуассон теңдеуі үшін корректі емес бір есеп туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 19 – 25.

Шектелген екі-өлшемді тікбұрышты облыста Пуассон теңдеуі үшін қосымша шартты Коши-Дирихле есебі қарастырылады. Зерттелуші корректті емес есеп тиімді басқару есебіне сәйкестеледі. Түйіндес шекаралық есептің шешімі арқылы тиімділік шарттары табылған. Корректті емес шекаралық есеп үшін әлді шешілетіндігінің критериі табылған.
Әдебиеттер тізімі – 11.

УДК: 518.9 2000 MSC: 49M40, 91A23

Amirgaliyeva S.N. **Strategy of players in differential game with terminal set** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 26 – 29.

In the article differential game players' strategies whose dynamics is described by ordinary differential equations are considered. Specific peculiarity of differential games is in the fact that players do not know opponent's actions in the future. Players' strategies using one or another type of information on current position and opponent's actions in the game with terminal set is investigated.
References – 2.

УДК: 518.9 2000 MSC: 49M40, 91A23

Әміргалиева С.Н. **Терминалды жиынды дифференциальдық ойындағы ойыншылардың стратегиясы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 26 – 29.

Мақалада динамикасы қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын дифеpенциалдық ойындағы ойыншылардың стратегиялары қарастырылады. Дифференциалдық ойындардың сипаттамалы ерекшелігі – ойыншылар қарсыласының болашақтағы іс-әрекетінен хабарсыздығы. Терминалды жиынды ойындағы ойыншылардың ағымдағы позиция және қарсыласының іс-әрекеті туралы немесе басқа ақпаратты пайдаланатын стратегиялары зерттеледі.
Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 621.391 2000 MSC: 65G40

Ashigaliyev J.U., Kemelbekova J.S. **Mathematical transformations of Erlangs formula** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 30 – 34.

In the work classical formula by Erlang for system of mass service with refusals is investigated. With the help of mathematical transformations its various representations more convenient for calculation of probability of losses of loading are obtained. The recurrent parity of calculation of probabilities of losses and representation of formula by Erlang in an integral form are established.

References – 4.

УДК: 621.391 2000 MSC: 65G40

Әшiғалиев Ж.У., Кемелбекова Ж.С. **Эрланг формуласының математикалық түрлендiрiлуi** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 30 – 34.

Жұмыста қайтарымды көптiк қызмет көрсету жүйелерiне арналған классикалық Эрланг формуласы зерттеледi. Математикалық түрлендiрулер арқылы жүктеме шығынының ықтималдылығын оңтайлы есептеудiң әртүрлi сұлбалары алынған. Шығын ықтималдылығын есептеудiң рекуренттiк қатынастары және Эрланг формуласының интегральдық түрде берiлуi алынған.

Әдебиеттер тiзiмi – 4.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03B10, 03C52, 03C64

Verbovskiy V. **Dp-minimal and o-stable ordered structures** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 35 – 38.

In the paper it is proved that a dp-minimal theories are o-stable.

References – 7.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03B10, 03C52, 03C64

Вербовский В. **Дп-минималды және реттеулi стабильдi реттелген структуралар** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 35 – 38.

Мақалада дп-минималды теориялар о-стабильдi екендiгi дәлелденген.

Әдебиеттер тiзiмi – 7.

УДК: 519.968.72 2000 MSC: 34K06, 34K10, 45J05

Dzhumabaev D.S., Usmanov K.I. **On the correct solvability of a linear boundary value problem for systems of the integro-differential equations with close kernels** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 39 – 47.

Interrelation between the correct solvabilities of linear two-point boundary value problems for systems of the integro-differential equations with close kernels is established.

References – 11.

УДК: 519.968.72 2000 MSC: 34K06, 34K10, 45J05

Жұмабаев Д.С., Усманов Қ.Ы. **Жақын өзектiлi интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесi үшiн сызықты шеттiк есептiң корректiлi шешiмдiлiгi туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 39 – 47.

Жақын өзектiлi интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелерi үшiн сызықты екi нүктелi шеттiк есептердiң корректiлi шешiмдiлiктерiнiң байланысы көрсетiлген.

Әдебиеттер тiзiмi – 11.

УДК: 523.98, 530.182 2000 MSC: 37N30

Karimova L.M. **Application of mathematical morphology methods to analyze topology of active regions of the photospheric Solar magnetic field** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 48 – 55.

Evolution of solar active regions are described by methods of random field geometry. Euler characteristics and perimeter are estimated on a set of excursions over field level of Michelson Doppler Imager (MDI) magnitograms with active regions (AR). Obtained results demonstrate that topology of AR and background near AR are qualitatively similar. Nevertheless dynamics of morphological functionals of AR differs from background one. As a rule, series of flares are preceded by heavy changes of morphological characteristics.

References – 19.

УДК: 523.98, 530.182 2000 MSC: 37N30

Карімова Л.М. **Күннің фотосфералық белсенді магнитті аймақтарының топологиясын талдаудағы математикалық морфология әдістерін қолдану** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 48 – 55.

Күннің фотосфералық белсенді аймақтарының (БА) эволюциясы кездейсоқ өрістер геометриясының әдістерімен сипатталады. БА жарқырауларын қамтитын Michelson Doppler Imager (MDI) үзінділері үшін Эйлер сыпаттамалары және берілген деңгейден асатын өріс лақтыруларының жиыны бойынша периметрі бағаланады. Алынған нәтижелер БА өрісінің топологиясымен БА жанындағы фонның топологиясының сапа жағынан айырмасы жоқ екенін көрсетеді. Алайда БА морфологиялық функцияларының динамикасы фондық аймақтар динамикасынан ерекшеленді. Негізінде жарқыраулар топтамасы морфологиялық сипаттамалардағы күшті өзгерістерден шығады.

Әдебиеттер тізімі – 19.

УДК: 517.925.46 2000 MSC: 34C10, 35C15

Kudabaeva S.Y., Oinarov R. **Criteries of disconjugacy of half - linear equation of seconde orders** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 56 – 66.

Criteria for disconjugacy of half-linear differential equation $(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0$, $1 < p < \infty$, with nonnegative coefficients which can be singular at the endpoints of the interval are obtained by the variational method.

References – 8.

УДК: 517.925.46 2000 MSC: 34C10, 35C15

Құдабаева С.Е., Ойнаров Р. **Екінші ретті жартылай сызықты теңдеудің түйіндессіздік критериі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 56 – 66.

Интервалдың шеткі нүктелерінде сингулярлы болуы мүмкін және теріс емес коэффициентері бар мына жартылай сызықты теңдеудің $(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0$, $1 < p < \infty$, түйіндес еместігінің критерийлері вариациялық тәсілмен алынған.

Әдебиеттер тізімі – 8.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34A45

Kulakhmetova A.T., Kharin S.N., Shpady Yu. R. **Mathematical model of arc temperature and conductivity at metallic and gaseous arc phases** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 67 – 76.

The new criterion of arc stability and instability is introduced, which enables one to find arc duration dependently on given circuit parameters and properties of contact material.

References – 7.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34A45

Құлахметова А.Т., Харин С.Н., Шпади Ю.Р. **Металдық және газдық фазалардағы доғаның температурасы мен электр өткізгіштігінің математикалық сұлбесі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 67 – 76.

Доғаның металдық фазасының ұзақтығының берілген параметрлер тізбегінен және түйісуші материалдың қасиеттерінен тәуелділігін табуға мүмкіндік беретін доғаның тұрақталуының жаңа нышаны алынған.
Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C10, 03C35, 03C64

Kulpeshov B.Sh. **On non-algebraic 1-types in $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 77 – 85.

Necessary and sufficient conditions for binarity of every non-algebraic 1-type in an arbitrary $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theory are found.
References – 7.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C10, 03C35, 03C64

Күлпешов Б.Ш. **$\aleph_0$-категориялық босаң о-минималды теорияларындағы алгебрасыз 1-типтер туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 77 – 85.

$\aleph_0$-категориялық босаң о-минималды теорияларындағы алгебрасыз 1-типтің бинарлы болуының қажетті және жеткілікті шарттары табылды.
Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34K06, 34K10

Kuspekova M.K., Tungatarov A.B., Uaicov B. **About of the one class system of the first order differential equations** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 86 – 89.
In the paper the explicit form of the solution of a system of first order differential equations which is not present in well-known hand-book of E.Kamke is established. This resolution method before is not considered in the literature.
References – 1.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34K06, 34K10

Күспекова М.К., Түнғатаров Ә.Б., Уаисов Б. **Бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бір класы туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 86 – 89.
Мақалада Э.Камкенің белгілі анықтамалығында жоқ бір бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі айқын алынған. Шешімді айқын түрде алатын бұл әдіс бұрын әдебиетте қарастырылмаған.
Әдебиеттер тізімі – 1.

УДК: 517.9 2000 MSC: 34B40

Sapakova S.Z., Tokibetov Zh.A. **On a boundary problem for multidimensional analogue of the Cauchy-Riemann's system** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 90 – 95.

In the work it is considered a boundary value problem in a strip for multidimensional analogue of the Cauchy-Riemann system. Unique solvability of the problem in the space $W_2^1(D)$ is proved.

References – 3.

УДК: 517.9 2000 MSC: 34B40

Сапакова С.З., Тоқибетов Ж.А. **Коши-Риман жүйесінің көпөлшемді жалпыламасы туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 90 – 95.

Бұл жұмыста Коши-Риман жүйесінің көпөлшемді жалпыламасы үшін жолақта бір шекаралық есеп қарастырылған. Осы есептің $W_2^1(D)$ кеңістігінде шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 3.

УДК: 517.927.25 2000 MSC: 34B16, 34B40

Tengaeva A.A. **Generalized spectral problem with stirring periodic boundary-value conditions and its basis characteristics** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 96 – 98.

In the work generalized spectral problems the main part of boundary-value conditions of which are periodic problem and antiperiodic one are investigated. Riesz basisness for corresponding eigenfunctions is proved.

References – 6.

УДК: 517.927.25 2000 MSC: 34B16, 34B40

Тенгаева А.А. **Шеттік шарттарының бас бөлігі периодты болатын жалпылама спектралдық есептің базистік қасиеттері**// Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 96 – 98.

Жұмыста шеттік шарттарының бас бөлігі периодты және антипериодты есеп болатын жалпылама спектралдық есеп қарастырылған. Олардың меншікті функцияларының Рисс базисі болатындығы көрсетілген.

Әдебиеттер тізімі – 6.

УДК: 531.3 2000 MSC: 34K29, 70F17

Zhilisbaeva K.C. **The reconstruction of the equations of movement of the magnetized dynamically symmetric satellite in the geomagnetic field taking into account influence of the gravitational moment** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 2 (36). P. 99 – 103.

The inverse problem of dynamics of the magnetized dynamically symmetric satellite in the geomagnetic field, which modelled by a direct dipole is considered. The differential equations of movement of the satellite are constructed by the given of first integrals and influence of the gravitational moments is defined.

References – 10.

УДК: 531.3 2000 MSC: 34K29, 70F17

Жилисбаева Қ.С. **Геомагниттік өрістегі магниттелген динамикалық симметриялы серікке гравитациялық момент әсер еткендегі қозғалыс теңдеуін қалпына келтіру**// Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 2 (36). Б. 99 – 103.

Жұмыста геомагниттік өрістегі тура дипольмен модельденген магниттелген динамикалық симметриялы серіктің кері есебі қарастырылған. Берілген бірінші интегралдар арқылы серіктің қозғалыс теңдеуі құрылып және гравитациялық моменттің әсері анықталған.

Әдебиеттер тізімі – 10.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту. Необходимо указать организацию, от которой направлена статья, адрес и e-mail (при наличии).

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.** Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М., 1988. (для монографий)

   (b) **Женсыкбаев А. А.** // Успехи матем.наук. 1981. Т. 36, вып. (или №) 4. С. 107 – 159.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами.

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 2 (36) 2010

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304
тел.: 8(727)2-72-01-66, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 01.07.2010г.
Тираж 300 экз. Объем 114 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы
ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81
Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50
e-mail: print_express@bk.ru