ISSN 1682–0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2003 том 3 № 4 (10)

Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 3 № 4 (10) 2003

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 3, № 4 (10), 2003

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 5 — 12*

УДК 681.5

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ОБЩЕГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

У. У. Абылкаиров

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби
480012 г.Алматы, ул.Масанчи, 49/37

Исследуется обратная задача восстановления правой части для общего квазилинейного параболического уравнения. Методом последовательных приближений доказаны глобальная теорема существования теоремы единственности и устойчивости обобщенного решения $(u(x,t),w(t))\in V_2(Q_T)\times L^2(0,T)$. В нелинейной обратной задаче доказана однозначная разрешимость искомой задачи в "малом".

1. Постановка задачи. Вспомогательные утверждения. Пусть Ω - ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega\in C^2$. В цилиндре $Q_T=\Omega\times(0,T),$ где $T>0,$ с боковой поверхностью $\Sigma=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим следующую обратную задачу.

Найти пару функций $(u(x,t),w(t)),$ которые удовлетворяют условиям

$$u_t=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x,t)u_{x_i}+b_j(x,t,u))+G(x,t,u,w),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i}+b_j(x,t,u))\cdot\nu_j(x)=h(x,t,u),\ (x,t)\in\Sigma, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega}v(x,t)u(x,t)dx=E(t),\ t\in[0,T]\,, \tag{4}$$

где $a_{ij}(x,t)\in C(\overline{Q}_T),$ при этом

$$\alpha|\xi|^2\le\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\le\beta|\xi|^2; u_0,h,a_{ij},b_j,v,E(t)-\ \text{заданные}\ \ \text{функции;}$$

$\nu(x)=(\nu_1(x),...,\nu_j(x),...,\nu_n(x))$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x .

Keywords: *inverse problem, parabolic equation, integral observation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R30, 49N45

Обратную задачу (1)—(4) можно трактовать как задачу нахождения точного управления $w(t)$, необходимого для достижения заданной или ожидаемой энергии $E(t)$. Обратные задачи исследовались методом теории управления для систем с распределенными параметрами в работах [1]—[3].

Современное состояние теории обратных и некорректных задач изложено в известных работах [4]—[8].

В работах [9]—[10] обратные задачи, подобные (1)—(4), исследуются методами теории полугрупп, а этот метод, как известно, предполагает линейность операторов и независимость коэффициентов уравнения от времени t.

В настоящей работе рассматривается квазилинейное уравнение (1), где снимаются ограничения на коэффициенты и исследуется вопрос разрешимости задачи (1)—(4) в классе обобщенных решений.

Прежде чем перейти к определениям слабого решения обратных задач, введем необходимое функциональное пространство (см. [11]).

Пространство $V_2(Q_T)$ — банахово пространство на Q_T измеримых относительно меры Лебега функций, состоящих из элементов пространства $W^{1,0}(Q_T)$, норма в котором имеет следующий вид

$$|u|^2_{V_2(Q_T)} = ess \sup_{0\le t\le T}\int_\Omega |u|^2dx+\int_{Q_T}|u_x|^2dx\,dt. \tag{5}$$

Пусть символ u_t означает частную производную $\partial u(x,t)/\partial t$, символ u_{x_i} — частную производную по переменной x_i и т.п., выражения типа $(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}$ и $b_iu_{x_i}$ будут для краткости обозначать суммы по повторяющимся индексам от 1 до n.

Предположим в дальнейшем, что $h(x,t,u)\in C(\sum\times R)$, $b_j(x,t,u)\in$ $C(\overline{Q}\times R)$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$|h(x,t,u)-h(x,t,s)|\le L|u-s|, \quad |b_j(x,t,u)-b_j(x,t,s)|\le L|u-s| \tag{6}$$

$$v(x,t)\in C^{1,1}(\overline{Q}_T),\ E\in W_2^1(0,T), \quad u_0(x)\in L^2(\Omega). \tag{7}$$

Пусть все предположения для заданных функций, сделанные выше, выполнены. Тогда, в основном, рассматриваются две задачи, которые определяются видом правых частей (источников):

$$\text{задача I (линейная)}\quad G(x,t,u)\equiv \chi(x,t)w(t), \tag{8}$$

$$\text{задача II (нелинейная)}\quad G(x,t,u)\equiv u(x,t)w(t). \tag{9}$$

Определение 1. *Пара функций $(u(x,t)\ w(t))$ называется обобщенным решением обратной задачи (1)-(4), если $u(x,t)\in V_2(Q_T), w(t)\in L^2(0,T)$ и удовлетворяют следующим интегральным тождествам:*

$$\int\limits_{Q_T}(-u\varphi_t+(a_{ij}u_{x_i}+b_j)\varphi_{x_i})dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}h\varphi d\Sigma dt+\int\limits_{Q_T}G\varphi\,dxdt+\int\limits_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx \tag{10}$$

для любого $\varphi(x,t)\in W^{1,1}(Q_T)$, $\varphi(x,T)=0$,

$$E'=\int\limits_{\partial\Omega}hd\Sigma\ +\int\limits_{\partial\Omega}(v_tu+Gv)dx)-\int\limits_\Omega(a_{ij}u_{x_i}+b_j)v_{x_i}dx, \tag{11}$$

где

$$v(x,t)\in C^{1,1}(\overline{Q_T}), E\in H^1(0,T), \tag{12}$$

$$\textit{причем} \quad \chi(x,t) \in C(\overline{Q}_T), \int\limits_{\Omega} v(x,t)\chi(x,t)dx \neq 0 \quad \textit{при} \quad r \in [0,T] \quad \textit{для задачи} \quad I; \tag{13}$$

$$E(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T] \quad \textit{для} \quad \textit{нелинейной} \quad \textit{задачи II.} \tag{14}$$

В основу определения (1), положена эквивалентность (4) и (11) при достаточно гладких (u,w).

Лемма 1. *Обратная задача (1)—(4) эквивалентна постановке задачи (1)—(3), (11) при достаточно гладком решении* (u,w) *и при совместных данных задачи.*

Доказательство. В силу условия (12), дифференцируя (4) по t, получим

$$E' = \int\limits_{\Omega} vu_t dx + \int\limits_{\Omega} v_t u dx. \tag{15}$$

Из (1), используя (3) и интегрирование по частям, выведем соотношение

$$\int\limits_{\Omega} u_t v dx = \int\limits_{\partial\Omega} hv d\Sigma + \int\limits_{\Omega} Gv dx - \int\limits_{\Omega} (a_{ij}u_{x_i} + b_j)v_{xj} dx. \tag{16}$$

Отсюда, очевидно, следует соотношение (11).

Замечание 1. *В задаче I (8) при условии (13)* $w(t)$ *можно выразить явно, т.е.*

$$w(t) = \left(E' + \int\limits_{\Omega} (a_{ij}u_{x_i} + b_j)v_{x_i}dx - \int\limits_{\Omega} v_t u dx\right)\left(\int\limits_{\Omega} \chi(x,t)v dx\right)^{-1}. \tag{17}$$

Замечание 2. *В задаче II (9) при условии (14)* $w(t)$ *можно выразить явно, т.е.*

$$w(t) = \left(E' + \int\limits_{\Omega} (a_{ij}u_{x_i} + b_j)v_{x_i}dx - \int\limits_{\partial\Omega} hv d\Sigma - \int\limits_{\Omega} v_t u dx\right)\left(\int\limits_{\Omega} vu dx\right)^{-1}.$$

Найдем априорную оценку на следы функции из $W^{1,0}(Q_T)$ в виде леммы, доказательство которой содержится в [11].

Лемма 2. *Для всех* $u \in W^{1,0}(Q_T)$ *справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} \leq \varepsilon \|u\|^2_{L^2(0,t;W^1(\Omega))} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}, \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0, C(\varepsilon) > 0$ *не зависят от* $u \in W^{1,0}(Q_T)$.

2. Формулировка основных результатов. Пусть все предположения на заданные функции, сделанные выше, выполнены. Тогда можно сформулировать основные результаты относительно двух задач (8), (9), которые определяются видом правых частей (источников).

Теорема 1. *Если выполнены предположения (6), (13) и* $E(t) \in H^1(0,T)$, $v(x,t) \in C^{1,1}(Q_T)$, *то существует единственное обобщенное решение* $(u,w) \in V_2(Q_T) \times L^2(0,T)$ *обратной задачи (1)—(4), (8).*

Теорема 2. *Если выполнены предположения (6), (14) и* $u_0 \in L^2(\Omega)$, $E(t) \in H^1(0,T)$, $E(t) \neq 0, t \in [0,T]$, $v(x,t) \in C^{1,1}(Q_T)$ *, то существует единственное обобщенное решение в "малом"* $(u,w) \in V_2(Q_T) \times L^2(0,T)$ *обратной задачи (1)—(4), (9).*

3. Доказательство однозначной разрешимости задачи (1)-(4), (8). Доказательство проводится методом последовательных приближений следующим образом. Пусть $u^0 = 0$. Определим (u^m, w^m) через соотношения:

$$w^m(t) = \left(\int\limits_\Omega v\chi dx\right)^{-1}\left(E' + \int\limits_\Omega (a_{ij}u^{m-1}_{x_i} + b_j(x,t,u^{m-1}))v_{x_j}dx - \int\limits_\Omega v_t u^{m-1}dx - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\partial\Omega} h(x,t,u^{m-1})vd\Sigma\right), \tag{19}$$

$$\int\limits_{Q_T} (-u^m\varphi_t + (a_{ij}u^m_{x_i} + b_j(x,t,u^m))\varphi_{x_j})dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} h(x,t,u^m)\varphi d\Sigma dt + \int\limits_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_T} \chi\varphi w^m(t)dxdt \tag{20}$$

для всех $m = 1, 2, ...$ и для любых $\varphi \in W^{1,1}(Q_T), \varphi(x,T) = 0$.

Из (19) $w^m(t)$ подставим в (20), откуда в силу теории параболических уравнений [11] следует, что существует единственное слабое решение $u^m \in V_2(Q_T)$ для (1)—(3).

Таким образом, последовательность пар (u^m, w^n) корректна определена. Если мы докажем, что последовательность (u^m, w^n) является последовательностью Коши, то в силу полноты пространства $V_2(Q_T) \times L^2(0,T)$ следует, что пара функций (u,w) является предельной для последовательности $\{(u^m, w^m)\}$, т.е. $(u^m, w^n) \to (u,w)$ при $m \to \infty$. Тем самым (u,w) является искомым слабым решением обратной задачи (1)—(4), (8).

Вводя обозначения

$$z^m = u^{m+1} - u^m \quad \text{и} \quad r^m = w^{m+1} - w^m,$$

из (19), (20) получим

$$r^m = \left(\int\limits_\Omega v\chi dx\right)^{-1}\left(\int\limits_\Omega \left[a_{ij}z^{m-1}_{x_i} + (b_j(x,t,u^m) - b_j(x,t,u^{m-1}))\right]v_{x_j}dx - \right.$$
$$\left. - \int\limits_\Omega v_t z^{m-1}dx - \int\limits_{\partial\Omega}(h(x,t,u^m) - h(x,t,u^{m-1}))vd\Sigma\right), \tag{21}$$

$$\int\limits_{Q_t} (-z^m\psi_t + [a_{ij}z^m_{x_i} + (b_j(x,t,u^{m+1}) - b_j(x,t,u^m))]\psi_{x_j})dxdt = \int\limits_{Q_t} r^m\chi\psi dxdt +$$
$$+ \int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}[h(x,t,u^{m+1}) - h(x,t,u^m)]\psi d\Sigma d\tau,\ m = 1, 2, ...,\ \forall\ \psi \in W^{1,1}(Q_T),\ \psi(x,T) = 0. \tag{22}$$

Из (21) в силу предположений (6)-(7), (13) и леммы 2 следует соотношение

$$\int\limits_0^t |r|^2 d\tau \leq C\left(\int\limits_{Q_t}|z^{m-1}_x|^2 dxd\tau + \int\limits_{Q_t}|z^{m-1}_x|^2 dxd\tau \leq C_0^2|z^{m-1}|^2_{V_2(Q_t)}\right), \tag{23}$$

где c_0 — положительная константа, не зависящая от m, u^m, w^m, t. Справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть выполнены (6)—(7), (13). Тогда для обобщенных решений* (u,w) *задачи I (8) справедливо следующее "энергетическое тождество"*

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 dx + \int\limits_{Q_t}(a_{ij}u_{x_i} + b_j)u_{x_j}dxd\tau = \int\limits_{\sum_t} hud\Sigma d\tau + \int\limits_\Omega |u_0|^2 dx + \int\limits_{Q_t}\chi uw(\tau)dxd\tau \tag{24}$$

для почти всех $t \in [0,T]$.

Доказательство (с. [11]). Из соотношения (22) с учетом (6)—(7), (13), лемм 2—3 получаем, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |z^m(x,t)|^2\,dx + a_0 \int\limits_{Q_t} |z_x^m|^2\,dxd\tau \le \varepsilon \int\limits_{Q_t} |z_x^m|^2\,dxd\tau + \\ +(c/\varepsilon)\int\limits_{Q_t} |z^m|^2\,dxd\tau + \varepsilon\int\limits_0^t |r^m|^2\,d\tau. \tag{25}$$

Тем самым, окончательно, из (25) получим

$$\int\limits_{\Omega} |z^m(x,t)|^2 dx + (a_0 - 2\varepsilon)\int\limits_{Q_t} |z_x^m|^2 dxd\tau = (c/\varepsilon)\int\limits_{Q_t} |z^m(x,t)|^2 dxd\tau + \varepsilon\int\limits_0^t |r^m|^2 d\tau.$$

Из последнего соотношения в силу известной леммы Гроноулла для $\varepsilon \le a_0/4$ приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega} |\, z^m(x,t)\,|^2 dx + \int\limits_{Q_t} |z_x^m|^2 dxd\tau \le \varepsilon c_1^2 \exp(c_2\varepsilon^{-1}t)\int\limits_0^t |r^m|^2 d\tau, \tag{26}$$

где C_1 и C_2 — положительные константы, независящие от $m, u^m, w^n, \varepsilon, t$.

Рассматривая вместе (23), (26), заметим, что справедливы оценки

$$\|r^m\|_{L^2(0,t)} \le \sqrt{\varepsilon} c_0 c_1 \exp\left[c_2(2\varepsilon)^{-1}t\right] \cdot \left\|r^{m-1}\right\|_{L^2(0,t)}, \tag{27}$$

$$|z^m|_{V_2(Q_t)} \le \sqrt{\varepsilon} c_0 c_1 \exp\left[c_2(2\varepsilon)^{-1}t\right]\Big|\cdot\Big|\, z^{m-1}\Big|_{V_2(Q_t)} \tag{28}$$

для $m = 1, 2, ...$ В силу произвольности ε, t выбираем ε_0 и σ такими, что

$$0 < \varepsilon_0 \le a_0/4; \;\; 0 < \sqrt{\varepsilon} c_0 c_1 \le \frac{1}{2}, \tag{29}$$

$$0 < \sigma \le 1; \;\; \exp\left[c_2(2\varepsilon_0)\sigma\right] \le \frac{3}{2}, \tag{30}$$

Это, в свою очередь, приводит (27)-(28) к следующим оценкам

$$\|r^m\|_{L^2(0,\sigma)} \le 3/4\left\|r^{m-1}\right\|_{L^2(0,\sigma)}, \tag{31}$$

$$|z^m|_{V_2(Q_\sigma)} \le 3/4\left\|z^{m-1}\right\|_{V_2(Q_\sigma)} \tag{32}$$

для $m = 1, 2, ...,$ где $Q_\sigma = \Omega \times (0,\sigma]$.

Из (31)-(32) и сходимости бесконечной геометрической прогрессии вытекает, что $\{(u^m, w^m)\}$ является последовательностью Коши в пространстве $V_2(Q_\sigma) \times L^2(0,\sigma)$. В силу вышеприведенных рассуждений существует единственная пара функций $(u,w) \in V_2(Q_\sigma) \times L^2(0,\sigma)$ такая, что

$$u^m \to u \;\; \text{в} \;\; V_2(Q_\sigma) \;\; \text{и} \;\; w^m \to w \;\; \text{в} \;\; L^2(0,\sigma). \tag{33}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в соотношениях (19)-(20) в силу сильной сходимости u^m и w^m , получим обобщенное решение (u,w) для обратной задачи (1)-(4) в $Q_\sigma = \Omega \times (0,\sigma]$ для случая I. Тем самым справедлива

Теорема 3. *Предположим, что выполнены (6)—(7), (13) с достаточно малой* σ *. Тогда существует единственное обобщенное решение — пара* (u,w) *в* Q_σ *для случая I.*

Доказательство. Существование обобщенного решения — пары (u,w) в Q_σ мы показали вышеприведенными рассуждениями. Приведем доказательство единственности решения в этом классе. Пусть существуют два решения $(u_k,w_k), k=1,2$ в Q_σ. Тогда в силу соотношений (31)-(32) получим

$$\|w_1-w_2\|_{L^2(0,\sigma)} \le {}^3/_4 \|w_1-w_2\|_{L^2(0,\sigma)} \tag{34}$$

$$|u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)} \le {}^3/_4 |u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)}. \tag{35}$$

Из (34)—(35) следует, что $w_1\equiv w_2$ и $u_1\equiv u_2$.

Далее продолжим доказательство теоремы 1. Константы $\varepsilon_0, c_0, c_1, c_2$ и σ не зависят от начальной данной функции $u_0(x)$. Потому для $t\ge\sigma$ полагаем, что

$$u_0(x)=u(x,\sigma), \tag{36}$$

где $u(x,\sigma)$ — значение локального решения при $t=\sigma$. В силу локальной разрешимости обратной задачи продолжим всю цепочку вышеприведенных рассуждений, начиная с $t=\sigma$. Получим с учетом (36), что

$$\|r^m\|_{L(\sigma,2\sigma)} \le {}^3/_4 \|r^{m-1}\|_{L^2(\sigma,2\sigma)}, \tag{37}$$

и

$$|z^m|_{V_2(Q_{\sigma,2\sigma})} \le {}^3/_4 |z^{m-1}|_{V_2(Q_{\sigma,2\sigma})}. \tag{38}$$

Заметим, что для всех $m=1,2,...$ неравенства (37)-(38) показывают существование и единственность обобщенного решения в промежутке $\sigma\le t\le 2\sigma$. Следовательно, повторяя ранее проведенные рассуждения конечное число раз, для конечного времени заключаем, что обобщенное решение — пара (u,w) существует и единственна в Q_T.

4. Устойчивость решения задачи (1)—(4), (8). Проблема устойчивости решения обратных задач связана с построением таких методов, которые позволяют определять приближенные решения $(\tilde u,\tilde w)$, близкие к искомому (u,w), на основе имеющейся приближенно заданной исходной информации $\tilde u_0, \tilde E$. Впервые проблема устойчивости решения обратных задач была поставлена А.Н.Тихоновым [12].

В этой связи справедлива

Теорема 4. *Для обобщенных решений (u_k,w_k), $(k=1,2)$ обратной задачи (1)—(4), (8) выполняется соотношение*

$$|u_1-u_2|_{V_2(Q_T)}+\|w_1-w_2\|_{L^2(0,T)} \le C(T)\Big\{\|u_{01}-u_{02}\|_{L^2(\Omega)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}\Big\}, \tag{39}$$

где $C(T)$ — положительная константа.

Доказательство. Из соотношении (21)—(22) в силу полученных оценок (31)—(32) в Q_σ, где σ определена согласно (30), вытекают следующие неравенства

$$\|w_1-w_2\|_{L^2(0,\sigma)} \le {}^3/_4 \|w_1-w_2\|_{L^2(0,\sigma)} + C\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)} \tag{40}$$

и

$$|u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)} \le {}^3/_4 |u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)} + C\|u_{01}-u_{02}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{41}$$

Из (40)—(41) легко можно получить оценку

$$\|w_1-w_2\|_{L^2(0,\sigma)}+|u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)} \le C\Big\{\|u_{01}-u_{02}\|_{L^2(\Omega)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}\Big\}, \tag{42}$$

где C — константа, зависимая от T, но независимая от u_{0k}, E_k $(k=1,2)$.

Повторяя рассуждения, проведенные выше для Q_σ, получим, что для $Q_{\sigma,2\sigma}$ справедлива оценка

$$\|w_1-w_2\|_{L^2(\sigma,2\sigma)}+|u_1-u_2|_{V_2(Q_{\sigma,2\sigma})}\le C\Big\{\|u_1(\cdot,\sigma)-u_2(\cdot,\sigma)\|_{L^2(\Omega)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}\Big\}$$

$$\le C\Big\{|u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}\Big\}\le \tag{43}$$

$$\le C\Big\{|u_1-u_2|_{V_2(Q_\sigma)}+\|w_1-w_2\|_{(L^2 0,\sigma)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}\Big\}.$$

В общем случае, полагая $Q_{k\sigma,(k+1)\sigma}=\Omega\times(k\sigma,(k+1)\sigma)$ $k=0,1,2,...,$ $[T/\sigma]+1$ и $d=\|u_{01}-u_{02}\|_{L^2(\Omega)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}$, получим что верна следующая рекуррентная формула

$$y_k\le C\big\{y_{k-1}+d\big\},\qquad k=0,1,2,...,[T/\sigma]+1, \tag{44}$$

где

$$y_k=|u_1-u_2|_{V_2(Q_{k\sigma,(k+1)\sigma})}+\|w_1-w_2\|_{L^2(k\sigma,(k+1)\sigma)} \tag{45}$$

для тех же $k=0,1,2...,[T/\sigma]+1.$

Из рекуррентной формулы (44), учитывая, что $y_0\le cd$, имеем

$$\begin{aligned}&y_k\le cy_k+cd\le c^2y_{k-2}+c^2d+cd\le ...\\&...\le c^ky_0+cd\left(\sum_{l=0}^{k-l}c^l\right)\le\left\{c^{[T/\sigma]+1}+c\left(\sum_{l=0}^{[T/\sigma]+1}c^l\right)\right\}d.\end{aligned} \tag{46}$$

Следовательно, мы приходим к искомому соотношению

$$\begin{aligned}&\|w_1-w_2\|_{L^2(0,T)}+|u_1-u_2|_{V_2(Q_T)}\le\sum_{k=1}^{[T/\sigma]+1}y_k\le\\&\le([T/\sigma]+1)\left\{c^{[T/\sigma]+1}+c\sum_{k=0}^{[T/\sigma]+1}c^k\right\}d\le c(T)d,\end{aligned} \tag{47}$$

из которого следует оценка устойчивости (39). Заметим, что справедлива даже более общая

Теорема 5. *Если* (u_k,w_k) $(k=1,2)$ *— два обобщенных решения с соответствующими данными* $\overline{u}_{0k}$, E_k,h_k,b_{jn} $(j=1,...,n;k=1,2)$, *то справедлива оценка устойчивости*

$$\begin{aligned}&\|w_1-w_2\|_{L^2(0,T)}+|u_1-u_2|_{V_2(Q_T)}\le C(T\left\{\|u_{01}-u_{02}\|_{L^2(\Omega)}+\|E_1-E_2\|_{H^1(0,T)}+\right.\\&\left.+\|h_1(x,t,u_1)-h_2(x,t,u_1)\|_{L^2(\sum)}+\sum_{j=1}^{n}\|b_{j1}(x,t,u_1)-b_{j2}(x,t,u_1)\|_{L^2(Q_T)}\right\}.\end{aligned} \tag{48}$$

Доказательство. Оценка (48) выводится аналогично выше приведенным результатам теоремы 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Казахстанского фонда фундаментальных исследований (проект 1-1-1.2-13(178)).

Цитированная литература

1. **Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М.** Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М., 1989.

2. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М., 1978.

3. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.М., 1972.

4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач М., 1979.

5. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.

6. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978.

7. **Аниконов Ю.Е.** Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1978.

8. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. М., 1984.

9. **Прилепко А.И., Орловский Д.Г.** // Дифференц. уравнения. 1985, Т.21, С.119–129.

10. **Прилепко А.И., Орловский Д.Г.** // Дифференц. уравнения. 1985. Т.21, С.694–701.

11. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

12. **Тихонов А.Н.** // Докл.АН СССР. 1943. Т.39, №5. С.195–198

Поступила в редакцию 15.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 13 − 19*

УДК 681.5

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е. Т. Аяганов

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100 г.Алматы, ул.Пушкина, 125 Ayaganov@mail.ru

В статье получены достаточные условия диссипативности системы управления стационарным объектом с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова, метода знакоопределенных функций Ляпунова, скалярно - оптимизационной функции и подхода Разумихина.

1 . Введение . В работах [1, 2, 3] решается задача о диссипативности непрерывной, частотно - импульсных систем первого и второго рода в области.

Работа [4] посвящена исследованию класса нелинейных дискретных частотно - импульсных систем управления первого рода, содержащей системы с частотной, широтной, амплитудной, либо комбинированной модуляцией. Здесь дискретным аналогом прямого метода Ляпунова получены условия диссипативности (устойчивости некоторого замкнутого ограниченного множества фазового пространства) в целом и в области.

В [5] рассматривается задача анализа свойства диссипативности в среднеквадратичном многомерных стохастических нелинейных систем управления с амплитудно - импульсной модуляцией.

Исследованию свойства диссипативности непрерывных детерминированных и стохастических систем с запаздыванием прямым методом Ляпунова с использованием функционала Ляпунова - Красовского посвящена работа [6].

Основополагающие и близкие по своей сути задачи были рассмотрены в монографии [7], где изложены теоретические основы построения систем управления для частотно - импульсных и детерминированных объектов без запаздывания в рамках прямого метода Ляпунова, метода знакоопределенных функций Ляпунова.

В отличие от названных работ в настоящей статье получено достаточное условие диссипативности в целом нелинейной системы управления детерминированным стационарным объектом с запаздыванием прямым методом Ляпунова с использованием метода знакоопределенных функций Ляпунова, скалярно-оптимизационной функции и подхода Разумихина.

Keywords: *dissipativity, linear system, object with delay, direct Lyapunov method, Razumikhin approach, scalar - optimized function.*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

2. Постановка задачи. Пусть математическая модель стационарного объекта с запаздыванием в пространстве состояний имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + A_h\,x(t-h) + bu, \ t \geq t_0, \\ x(t_0+\upsilon) = \varphi(\upsilon), \ -h \leq \upsilon \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [t_0, \infty) \equiv J(t_0)$, $x(t) \in R^n$ — вектор состояний объекта, $x(t-h) \in R^n$ — вектор состояний объекта, запаздывающий на время h, $h = const > 0$ — величина запаздывания, $u \in R^1$ — скалярное управление, причем $u = u(x,t)$, $\varphi(\upsilon) \in C([-h,0], R^n)$ — непрерывная, ограниченная, начальная векторная функция, $C([-h,0], R^n)$ — пространство непрерывных функций $\varphi(\upsilon)$ на отрезке $[-h,0]$ с нормой $\|\varphi(\upsilon)\|_h = max\|\varphi(\upsilon)\|$ при $-h \leq \upsilon \leq 0$, $\|\varphi(\upsilon)\|$ — евклидова норма вектора $\varphi(\upsilon)$, $\|\varphi(\upsilon)\| < \nu(t_0)$, $\nu \in [t_0 - h, t_0]$ — некоторое число; A, $A_h \in R^{n\times n}$ — постоянные матрицы объекта управления, $b \in R^n$ — постоянный вектор.

В пространстве состояний R^n для рассматриваемого класса объектов управления с запаздыванием можно выделить следующие области функционирования:

1) допустимая область функционирования $\vartheta(x)$, замкнутая, определяемая технологическими ограничениями на компоненты вектора состояний;

2) аварийная область функционирования $Q = R^n \backslash \vartheta(x)$, характеризуемая нарушениями технологических требований.

Аварийная область функционирования Q является дополнением области $\vartheta(x)$ до R^n, для которой желаемая динамика замкнутой подсистемы вывода (управления) задается в виде

$$\sigma_1(t) = c_1 x(t), \tag{2}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояний объекта управления, $c_1 \in R^n$ — постоянный вектор.

Таким образом, в пространстве состояний R^n выделяются области, определяемые следующими выражениями

$$\begin{gathered} \vartheta(x) = \{(t,x) \in J \times R^n : \ x^T(t) H x(t) \leq \chi^2, \, \chi = const > 0\}, \\ Q \ = R^n \backslash \vartheta(x), \end{gathered} \tag{3}$$

где χ — оценка размера предельного множества $\vartheta(x)$; $H \in R^{n\times n}$ — константная, положительно-определенная симметрическая матрица.

Содержательная постановка задачи управления рассматриваемым классом объектов с запаздыванием сводится к следующей задаче: в области Q необходимо так управлять объектом, чтобы обеспечить попадание траекторий движения (форсированный "вывод" объекта управления) из Q в $\vartheta(x)$.

При функционировании в области аварийных режимов Q алгоритм управления представляется кусочно-непрерывной функцией

$$u = u(x,t) \ = -k \mid x(t) \mid sgn(\sigma_1(t)), \tag{4}$$

где $k \in R^n$ — постоянный вектор настраиваемых параметров нелинейной системы управления, $sgn(\sigma_1(t))$ — знаковая функция, $\mid * \mid$ — знак модуля.

Замкнутая система управления, функционирующая в области Q, математическая модель которой представляется соотношениями (1), (2), (4), описывает систему управления стационарным объектом с запаздыванием.

В рассматриваемой системе управления использован алгоритм кусочно-непрерывный релейного типа, обеспечивающий реализацию форсированного режима "вывода" объекта управления в допустимую область функционирования $\vartheta(x)$, т.е. обеспечения в замкнутой системе управления наличия свойства диссипативности.

Работа посвящена получению достаточных условий диссипативности системы управления стационарным объектом с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова [8] и подхода Разумихина [9].

3. Основной результат. В силу очевидных причин в задачах исследования устойчивости иметь дело с функционалами значительно труднее, чем с функциями конечного числа переменных. Это и определило значение направления развития теории устойчивости систем с запаздыванием, когда в качестве меры возмущений используется определенно-положительная функция Ляпунова $V(t,x)$.

Дадим определение диссипативности, которое понадобится для дальнейших рассуждений.

Определение [6]. *Система управления с запаздыванием называется диссипативной, если существует область $\vartheta(x)$ такая, что при любых t_o и для всех возмущенных движений, удовлетворяющих условию $\|\varphi(\upsilon)\| < \nu(t_o)$, где $\nu(t_o)$ — некоторое число, существует такой момент времени $t_1 = t_1(\varphi(\upsilon), t_o)$, для которого все траектории движения $x(t,\varphi) \in \vartheta(x)$ при любом $t \geq t_1$.*

При этом область $\vartheta(x)$ называется предельным множеством.

Получим достаточное условие диссипативности системы управления стационарным объектом с запаздыванием в смысле данного выше определения о диссипативности прямым методом Ляпунова с использованием скалярно - оптимизационной функции и подхода Разумихина.

Пусть в математической модели (1), (2), (4) управление представляет собой функцию, удовлетворяющую секторному ограничению

$$0 \leq \frac{u(x,t)}{\sigma_1(x(t))} \leq w_0, \ \ \sigma_1(x(t)) \neq 0, \, w_0 = const > 0. \tag{5}$$

Для исследования динамического свойства диссипативности рассматриваемой системы управления сделаем некоторые предположения относительно выбираемой функции Ляпунова.

Предположим, что существует положительно - определенная функция

$$\begin{gathered} V = V(t,x), \, V : J \times R^n \to R^+, \\ V = V(t,0) = 0, \text{ для всех } t \in J, \, V \in C(J \times R^n) \end{gathered} \tag{6}$$

и существуют непрерывные, монотонно возрастающие функции $W_1(\|x\|)$, $W_2(\|x\|)$ такие, что выполнены условия

$$\begin{gathered} a) V(t,x) \leq W_1(\|x\|), \\ b) V(t,x) \geq W_2(\|x\|) \text{ причем } W_2(\|r\|) \to \infty, \text{ при } \|r\| \to \infty. \end{gathered} \tag{7}$$

Для исследования свойства диссипативности рассматриваемой системы управления выберем функцию Ляпунова

$$V(t,x) = x^T(t)Hx(t), \, H = H^T > 0, \tag{8}$$

где $H \in R^{n\times n}$ — положительно - определенная симметрическая матрица.

При выбранной функции Ляпунова (8) допустимое множество $\vartheta(x)$ будет предельным множеством при выполнении условий

$$V(t,x) > 0, \ R(t,x) < 0 \quad \text{для } x(t,\varphi(\upsilon)) \notin \vartheta(x), \tag{9}$$

где $R(t,x) = sup\{\dot{V}(x_{th},t) \mid V(\upsilon,x(\upsilon)) \leq V(t,x), \, t-h \leq \upsilon \leq t, \, x(t) = x\}$.

Скалярно - оптимизационная функция $R(t,x)$ определяется наибольшим значением функционала $\dot{V}(x_{th},t)$ на ограниченном множестве интегральных кривых [9]

$$\mu_V(x,t) = \{x_{th} | V(\upsilon,x(\upsilon)) \leq V(t,x), t-h \leq \upsilon \leq t, x(t) = x\}, \tag{10}$$

вдоль которых функция $V(x)$ убывает.

Условие, обеспечивающее свойство диссипативности рассматриваемой системы управления стационарным объектом с запаздыванием, формулируется в следующей теореме.

Теорема. *При выбранной функции Ляпунова (8) система управления стационарным объектом с запаздыванием (1), (2), (4) диссипативна и область $\vartheta(x)$ (3) является ее предельным множеством, если выполнено следующее неравенство*

$$\chi^2 \geq \inf_{r\in(0,r_0)} \Phi(r), \tag{11}$$

где $\Phi(r) = \sup \frac{1}{r} b^T H Q^{-1} H b\, u^2$ при $r = const > 0$, r_0 — верхняя граница интервала значений параметра r, на котором выполнено неравенство

$$Q = -(A^T H + HA + A_h A_h^T + H^2 + rH) > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Выражение

$$dV(x,t)/dt = x^T(t)(A^T H + HA)x(t) + 2x^T(t)HA_h x(t-h) + 2x^T(t)Hbu \tag{13}$$

определяет первую производную функции Ляпунова вдоль решений системы (1), (2), (4).

С учетом (13) выражение для функции $R(t,x)$ примет следующий вид

$$\begin{aligned} R(t,x) = sup\{x^T(t)(A^T H + HA)x(t) + 2x^T(t)HA_h x(t-h)+ \\ +2x^T(t)Hbu, \mid x_{th} \in \mu_V(x,t)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Оценим слагаемое $2x^T(t)HA_h x(t-h)$ в выражении (14) в соответствии с (10) и неравенством [6]:

$$\begin{aligned} 2x^T(t)HA_h x(t-h) \leq x^T(t)H^2 x(t) + x^T(t-h)A_h A_h^T x(t-h) \leq \\ \leq x^T(t)H^2 x(t) + x(t)^T A_h A_h^T x(t). \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом (15) получим

$$R(t,x) = x^T(t)(A^T H + HA + A_h A_h^T + H^2)x(t) + 2x^T(t)Hb\, u. \tag{16}$$

Таким образом рассматриваемая система управления является диссипативной и область, определяемая (3), будет ее предельным множеством, если выполнено условие

$$R(t,x) < 0 \text{ при } V(t,x) \geq \chi^2. \tag{17}$$

Для получения условия диссипативности воспользуемся S-процедурой [10]. Для этого введем S-функцию

$$S(t,x) = -R(t,x) - r(V(t,x) - \chi^2), \tag{18}$$

где $r = const > 0$.

Тогда условие (9) будет выполнено, если справедливо неравенство

$$S(t,x) \geq 0 \text{ для любых } x(t,\varphi(\upsilon)). \tag{19}$$

Подставив выражения для $R(t,x)$ и $V(t,x)$ в (18), получим, что

$$\begin{aligned} S(t,x) = -x^T(t)(A^T H + HA + A_h A_h^T + H^2)x(t)- \\ -2x^T(t)Hb\, u - r(x^T(t)Hx(t) - \chi^2). \end{aligned} \tag{20}$$

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
Q &= -(A^T H + HA + A_h A_h^T + H^2 + rH), \\
z(t) &= Q^{-1}\, H\, b\, u.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

С учетом (21) в выражении (20) выделим полный квадрат, в результате чего будем иметь

$$
S(t,x) = (x^T(t) - z^T(t))Q(x(t) - z(t)) - b^T H Q^{-1} H b u^2 + r\chi^2. \tag{22}
$$

По условию теоремы матрица Q положительно определена, поэтому выполнено условие

$$
(x^T(t) - z^T(t))Q(x(t) - z(t)) > 0. \tag{23}
$$

Условие (19) будет выполнено, если

$$
r\chi^2 \ge b^T\, H\, Q^{-1}\, H\, b\, u^2. \tag{24}
$$

Получили выражение (9), что и требовалось доказать.

При заданном значении постоянной χ, матрицы H, постоянной r на основе (24) можно определить выражение для настраиваемого параметра алгоритма управления (4).

4. Пример. Рассматривается стационарный объект управления с запаздыванием второго порядка ($n = 2$) вида (1). Матрицы A, $A_h \in R^{2x2}$ и вектор $b \in R^1$ заданы следующими своими значениями

$$
A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\; A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},\; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Величина запаздывания $h = 2$, оценку предельного множества возьмем равной $\chi = 2$.

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$
V = x^T(t) H x(t),\; x(t) \in R^2,\; H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.
$$

При заданных матрицах A, A_h, $H \in R^{2\times 2}$ проверим выполнение условия положительной определенности матрицы Q:

$$
Q = \begin{pmatrix} 18 & -11 \\ -11 & 23 \end{pmatrix},\; 18 > 0,\; 18 \cdot 23 - 11 \cdot 11 > 0,
$$

т.е. матрица Q положительно определена.

Теперь, исходя из условия (12), найдем параметр r из неравенства $r < 18$. Задавшись значением параметра r и используя выражение (24), определим значение настраиваемого параметра алгоритма управления (3) $k \ge 12$. Возьмем $k = 14$.

Для иллюстрации примера по исследованию свойства диссипативности была разработана программа на языке Delphi 5.0, позволяющая моделировать переходные процессы в замкнутых системах управления и строить фазовые портреты траекторий движения системы управления стационарным объектом с запаздыванием.

На рис. 1 приведены переходные процессы рассматриваемой системы управления стационарным объектом управления с запаздыванием при $u(t) = 0$, т.е. рассматривается случай, когда объект предоставлен самому себе (свободное движение объекта с запаздыванием). Начальные функции задавались постоянными значениями $x_1(t_0 + \upsilon) = 1$, $x_2(t_0 + \upsilon) = 2$, $-2 \le \upsilon \le 0$. Из рис. 1 видно, что рассматриваемый объект с запаздыванием является неустойчивым.

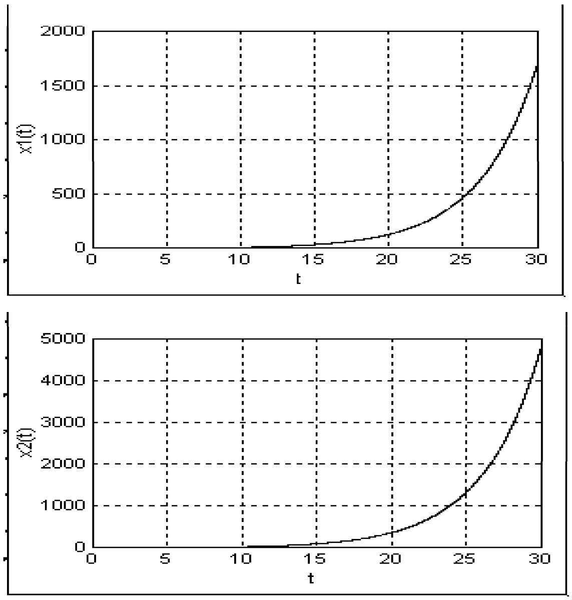

Рис. 1: Моделирование переходных процессов в стационарном объекте с запаздыванием (свободное движение объекта)

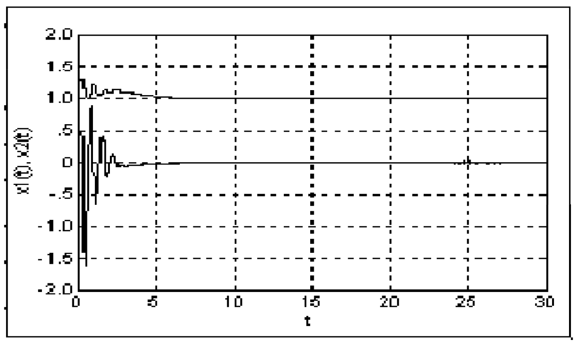

Рис. 2: Моделирование переходных процессов в системе управления стационарным объектом с запаздыванием

Графики переходных процессов системы управления стационарным объектом с запаздыванием, изображенные на рис. 2 позволяют сделать вывод о том, что исследуемая система управления обладает свойством диссипативности.

5. Заключение. В работе доказана теорема о диссипативности исследуемой системы управления стационарным объектом с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова, метода знакоопределенных функций Ляпунова, скалярно - оптимизационной функции и подхода Разумихина. На основе полученного условия диссипативности разработан вычислительный алгоритм параметрического синтеза рассматриваемой системы управления стационарным объектом с запаздыванием. Приведен иллюстративный пример.

Цитированная литература

1. **Чеховой Ю.Н.** Техническая кибернетика. 10. Киев, 1970.

2. **Воронова Л.И., Чеховой Ю.Н.** // Кибернетика и вычислительная техника. 1974. Вып.24. С.30 — 37.

3. **Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н.** Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией // Техника. Киев, 1970.

4. **Волосов В.В.** // Кибернетика и вычислительная техника. 1974. Вып.24. С.43 — 49.

5. **Лычак М.М.** // Кибернетика и вычислительная техника. 1974. Вып.24. С.59 — 70.

6. **Цыкунов А.М.** Адаптивное управление объектами с последействием. М., 1984.

7. **Ашимов А.А., Соколова С.П.** Введение в теорию систем управления с изменяющейся конфигурацией. Алматы, 1993.

8. **Матросов В.М., Анапольский Л.Ю.** Вектор - функции Ляпунова и их построение. Новосибирск, 1980.

9. **Разумихин Б.С.** Устойчивость эредитарных систем. М., 1988.

10. **Гелиг А.Х., Леонов Г.В., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.

Поступила в редакцию 12.09.2002 г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 20 —25*

УДК 517.946

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. Б. Бержанов, Е. К. Курмангалиев

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе, пр. А.Молдагуловой, 34

Получено достаточное условие существования и единственности многопериодического по части переменных решения одной системы в частных производных от счетного множества переменных.

1. Рассмотрим систему уравнений в частных производных первого порядка со счетным множеством независимых переменных вида

$$D_\varepsilon x \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi} + b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \psi}\right) x = P(t,\varphi,\psi)x + \mu F(t,\varphi,\psi,x,\mu), \tag{1}$$

где x, F – n — вектор-столбцы; $\varphi, a(t,\varphi,\psi,\varepsilon) \equiv a^0(t) + \varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $\psi, b(t,\varphi,\psi,\varepsilon) \equiv$
$\equiv b^0(t) + \varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$ — счетномерные векторы; $P(t,\varphi,\psi)$ – $n \times n$ — матрица;
$a \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}, b \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}$ — скалярные произведения счетномерных векторов a, b и символических векторов

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, \frac{\partial}{\partial\varphi_2}, ...\right), \quad \frac{\partial}{\partial\psi} = \left(\frac{\partial}{\partial\psi_1}, \frac{\partial}{\partial\psi_2}, ...\right);$$

$\varepsilon > 0, \mu > 0$ — малые параметры.

Введем обозначения

$$R_\Delta = \{x : ||x|| \le \Delta, \Delta > 0\} \subset R^n, E_{\varepsilon_0} = [0,\varepsilon_0], M_{\mu_0} = [0,\mu_0],$$

где $\Delta, \varepsilon_0, \mu_0$ — некоторые положительные постоянные.

Пусть n-мерная вектор-функция $f(t,\varphi,\psi) = \{f_1(t,\varphi,\psi), \dots, f_n(t,\varphi,\psi)\}$ определена и непрерывна в области $R \times R_\varphi \times R_\psi$, где R=(-∞; +∞); R_φ=$\{\varphi : ||\varphi|| < \infty\}$; R_ψ=$\{\psi : ||\psi|| < \infty\}$; φ, ψ — счетномерные векторы с нормами $||\varphi|| = \sup\limits_k\{|\varphi_k|\}$, $||\psi|| = \sup\limits_k\{|\psi_k|\}$.

Вектор-функцию $f(t,\varphi,\psi)$ назовем многопериодической по части переменных функцией, если существуют положительные числа $\theta, \omega_k \quad (k = \overline{1,\infty})$ такие, что при любых $(t,\varphi,\psi) \in R \times R_\varphi \times R_\psi$ имеет место равенство

Keywords: *multiperiodic solution, equation of patrial derivative*
2000 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35F20

$$f(t+\theta,\varphi+q\overset{\wedge}{\omega},\psi)-f(t,\varphi,\psi)=0,$$

где $\omega=(\omega_1,\omega_2,...)$, $q\overset{\wedge}{\omega}=(q_1\omega_1,q_2\omega_2,...)$, $q=(q_1,q_2,...)$ — целочисленный вектор.

Пусть $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,...)$ — счетномерный вектор. Введем проекторы W_m и V_m, которые вектору Ψ ставят в соответствие векторы

$$W_m\Psi=(\Psi_1,\ldots,\Psi_m,0,0,\ldots),$$

$$V_m\Psi=(0,\ldots,0,\Psi_{m+1},\Psi_{m+2},\ldots).$$

Отсюда следует, что

$$W_m\Psi+V_m\Psi=\Psi,$$

т.е. W_m+V_m есть тождественный проектор.

Пусть вектор-функция $f(t,\varphi,\psi)$ в области $R\times R_\varphi\times R_\psi$ удовлетворяет следующим условиям (π), аналогичным [3]:

a) непрерывна по переменным t, φ, ψ;

b) ограничена по норме, т.е.

$$||f(t,\varphi,\psi)||=\sup_k|f_k(t,\varphi,\psi)|\le\alpha,$$

где $\alpha>0$ — некоторая постоянная;

c) удовлетворяет усиленному условию Липшица по φ, ψ

$$\|f(t,W_m\varphi+V_m\varphi',W_m\psi+V_m\psi')-f(t,W_m\varphi+V_m\varphi'',W_m\psi+V_m\psi'')\|\le l'_m\Delta_m\varphi+l''_m\Delta_m\psi\le$$

$$\le(l'_m+l''_m)(\Delta_m\varphi+\Delta_m\psi)=l_m(\Delta_m\varphi+\Delta_m\psi)\quad(m=0,1,2,\ldots),$$

где $\Delta_m\varphi=\|V_m(\varphi'-\varphi'')\|$; $\Delta_m\psi=\|V_m(\psi'-\psi'')\|$; $l_m=l'_m+l''_m$; $\{l'_m\},\{l''_m\}$ — положительные числовые последовательности, монотонно сходящиеся к нулю, т.е. $l'_m\downarrow 0$, $l''_m\downarrow 0$ при $m\to\infty$;

d) имеет ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно по координатам векторов φ и ψ.

Совокупность условий a)-d) назовем условиями (π) и вектор функции, удовлетворяющие этим условиям, назовем π-функциями, и кратко обозначим так: $f(t,\varphi,\psi)\in\pi(\alpha,l'_m,l''_m)$ или $f(t,\varphi,\psi)\in\pi(\alpha,l_m)$.

Предположим, что

$$a(t,\varphi,\psi,\varepsilon)=a^0(t)+\varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon),$$

$$b(t,\varphi,\psi,\varepsilon)=b^0(t)+\varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon).$$

Будем говорить, что выполнены условия (N_∞), если

1) вектор-функции $a^0(t)$, $b^0(t)$ непрерывны, ограничены и θ-периодичны;

2) матрица $P(t,\varphi,\psi)$ (θ,ω)-периодична по t, φ равномерно относительно $\psi\in R_\psi$ и непрерывна по t, φ, ψ, ограничена в $R\times R_\varphi\times R_\psi$, удовлетворяет усиленному условию Липшица по φ, ψ, т.е.

$$\|P(t,W_m\varphi+V_m\varphi',W_m\psi+V_m\psi')-P(t,W_m\varphi+V_m\varphi'',W_m\psi+V_m\psi'')\|\le$$
$$\le P'_m\Delta_m\varphi+P''_m\Delta_m\psi,\quad(m=0,1,2,\ldots),$$

имеет непрерывные частные производные по координатам векторов φ и ψ, и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial P}{\partial \varphi_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial P}{\partial \psi_k},$$

сходятся абсолютно и равномерно в $R \times R_\varphi \times R_\psi$, причем

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right\| \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi_k}\right\| \leq \overline{P_1'}, \quad \left\|\frac{\partial P}{\partial \psi}\right\| \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{\partial P}{\partial \psi_k}\right\| \leq \overline{P_1''},$$

где $\overline{P_1'}$, $\overline{P_1''}$ — некоторые положительные постоянные. Кроме того, имеют место неравенства

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi'} - \frac{\partial P}{\partial \varphi''}\right\| \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi_k'} - \frac{\partial P}{\partial \varphi_k''}\right\| \leq \overline{P_2'}\Delta\varphi, \quad \left\|\frac{\partial P}{\partial \psi'} - \frac{\partial P}{\partial \psi''}\right\| \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{\partial P}{\partial \psi_k'} - \frac{\partial P}{\partial \psi_k''}\right\| \leq \overline{P_2''}\Delta\psi,$$

с постоянными $\overline{P_2'}, \overline{P_2''} > 0$;

3) вектор-функции $a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$,$b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)$, $F(t,\varphi,\psi,x,\mu)$ по t, φ многопериодичны с вектор периодом (θ,ω) равномерно ψ, x, ε, μ, принадлежат классу π функций, частные производные по φ, ψ, x ограничены, равномерно непрерывны, кроме того, частные производные по φ, ψ удовлетворяют следующим условиям

$$\left\|\frac{\partial a_1}{\partial \varphi'} - \frac{\partial a_1}{\partial \varphi''}\right\| \leq \overline{a^0}\Delta\varphi, \left\|\frac{\partial a_1}{\partial \psi'} - \frac{\partial a_1}{\partial \psi''}\right\| \leq \overline{\overline{a^0}}\Delta\psi, \left\|\frac{\partial b_1}{\partial \varphi'} - \frac{\partial b_1}{\partial \varphi''}\right\| \leq \overline{b^0}\Delta\varphi,$$

$$\left\|\frac{\partial b_1}{\partial \psi'} - \frac{\partial b_1}{\partial \psi''}\right\| \leq \overline{\overline{b^0}}\Delta\psi, \left\|\frac{\partial F}{\partial \varphi'} - \frac{\partial F}{\partial \varphi''}\right\| \leq \overline{F^0}\Delta\varphi, \left\|\frac{\partial F}{\partial \psi'} - \frac{\partial F}{\partial \psi''}\right\| \leq \overline{\overline{F^0}}\Delta\psi,$$

где $\overline{a^0}, \overline{\overline{a^0}}, \overline{b^0}, \overline{\overline{b^0}}, \overline{F^0}, \overline{\overline{F^0}}$ — положительные постоянные.

Очевидно, при выполнении условий (N_∞) имеют место соотношения

$$\begin{gathered} ||a^0(t)|| \leq a_0, ||b^0(t)|| \leq b_0, ||a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)|| \leq a_{10}, ||b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon)|| \leq b_{10}, \\ ||P(t,\varphi,\psi)|| \leq \overline{P}_0, ||F(t,\varphi,\psi,0,\mu)|| \leq F_0, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} P(t,\varphi,\psi) \in \pi(\overline{P}_0, P_m', P_m''), a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon) \in \pi(a_{10}, \alpha_m', \alpha_m''), \\ b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon) \in \pi(b_{10}, \beta_m', \beta_m''), F(t,\varphi,\psi,x,\mu) \in \pi(\overline{F}_0, \sigma_m', \sigma_m''). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\overline{F}_0 = \sigma_0\Delta + F_0, P_m', P_m'', \alpha_m', \alpha_m'', \beta_m', \beta_m'', \sigma_m', \sigma_m'', \sigma_0 = \sigma_0' + \sigma_0''$ — коэффициенты Липшица.

2. Пусть $B_n(\Delta,\delta_m)$ — класс n-мерных $\pi(\Delta,\delta_m)$-функций $f(t,\varphi,\psi)$, многопериодических по части переменных, где $\delta_m \downarrow 0$ при $m \to +\infty$.

Норму в этом классе определим соотношением

$$\|f\|_B = \sup_\Omega \|f\| + \sup_\Omega\left\|\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right\| + \sup_\Omega\left\|\frac{\partial f}{\partial \psi}\right\|,$$

где $\Omega = R \times R_\varphi \times R_\psi$.

Рассмотрим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \tfrac{d\varphi}{dt} = a^0(t) + \varepsilon a_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon), \\ \tfrac{d\psi}{dt} = b^0(t) + \varepsilon b_1(t,\varphi,\psi,\varepsilon). \end{gathered} \tag{4}$$

Систему (4) назовем характеристической системой оператора D_ε.

При выполнении условий (N_∞) система (4) допускает единственное решение, проходящее через точку $(t_0,\varphi_{\ 0},\psi_0) \in \Omega$:

$$\varphi = \lambda(t, t_0, \varphi_0, \psi_0), \quad \psi = \xi(t, t_0, \varphi_0, \psi_0). \tag{5}$$

В силу свойства единственности, решая задачу Коши и приняв за начальную точку (t,φ,ψ) из (5), имеем

$$\varphi_0 = \lambda(t_0, t, \varphi, \psi), \quad \psi_0 = \xi(t_0, t, \varphi, \psi).$$

Заменяя t_0 на произвольный параметр $s \in R$, получим счетномерную вектор-функцию $\Gamma(s, t, \varphi, \psi) = \{\lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi)\}$, которую назовем характеристической функцией оператора D_ε.

Компоненты вектор-функции Γ допускают интегральные представления

$$\begin{aligned} \lambda(s, t, \varphi, \psi) &= \varphi + \int\limits_t^s a[\sigma, \lambda(\sigma, t, \varphi, \psi), \xi(\sigma, t, \varphi, \psi), \varepsilon] d\sigma, \\ \xi(s, t, \varphi, \psi) &= \varphi + \int\limits_t^s b[\sigma, \lambda(\sigma, t, \varphi, \psi), \xi(\sigma, t, \varphi, \psi), \varepsilon] d\sigma. \end{aligned} \tag{6}$$

Л е м м а 1 . *Для вектор-функций $\lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi)$ при выполнении условий (N_∞) справедливы соотношения:*

I(а) $\quad \|\lambda(s, t, \varphi', \psi') - \lambda(s, t, \varphi'', \psi'')|| + \|\xi(s, t, \varphi', \psi') - \xi(s, t, \varphi'', \psi'')\| \leq$

$$\leq (\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\|) \exp\{4\varepsilon l_0 |t - s|\},$$

где $l_0 = \alpha_0' + \alpha_0'' + \beta_0' + \beta_0''$;

(б) $\quad \|\lambda(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi', W_m\psi + V_m\psi') - \lambda(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi'', W_m\psi + V_m\psi'')\| +$

$$+\|\xi(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi', W_m\psi + V_m\psi') - \xi(s, t, W_m\varphi + V_m\varphi'', W_m\psi + V_m\psi'')\| \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{l_m}{l_0}\left[e^{4\varepsilon l_0 |t-s|} - 1\right]\right)(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi),$$

где $\Delta_m\varphi = ||V_m(\varphi' - \varphi'')||$, $\Delta_m\psi = ||V_m(\psi' - \psi'')||$, $l_m = \alpha_m' + \alpha_m'' + \beta_m' + \beta_m''$;

(в) $\quad \lambda(s + \theta, t + \theta, \varphi + q\hat{\omega}, \psi) = \lambda(s, t, \varphi, \psi) + q\hat{\omega}$,

$\quad \xi(s + \theta, t + \theta, \varphi + q\hat{\omega}, \psi) = \xi(s, t, \varphi, \psi)$.

3. Пусть $X(t_0, t, \varphi, \psi)$ есть матрица типа Грина для линейной системы

$$D_\varepsilon x = P(t, \varphi, \psi)x, \tag{7}$$

удовлетворяющая условию некритичности [3, с.169]:

$$\begin{aligned} &\|X(t_0, t, \varphi, \psi)\| \leq B \exp\{-\gamma|t - t_0|\}, \\ &X(t - 0, t, \varphi, \psi) - X(t + 0, t, \varphi, \psi) = E \end{aligned} \tag{8}$$

с постоянными $B \geq 1$, $\gamma > 0$.

Л е м м а 2 . *При выполнении условий (N_∞),(8) и при $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon} = \frac{\gamma}{8 l_0 B}$ для матрицы типа Грина имеют место соотношения:*

II(а) $||X(t_0, t, W_m\varphi + V_m\overline{\varphi}, W_m\psi + V_m\overline{\psi}) - X(t_0, t, W_m\varphi + V_m\varphi, W_m\psi + V_m\psi)|| \leq$

$$\leq L[BP_m + 2B^*\varepsilon l_m]\left(\|V_m(\overline{\varphi} - \varphi)\| + \|V_m(\overline{\psi} - \psi)\|\right) \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}|t - t_0|\right\},$$

где $L = 2B\gamma^{-1}, B^* = LB(P_0' + P_0''),\ P_m = P_m' + P_m'' + \frac{l_m}{l_0}(P_0' + P_0'');$

(б) $\quad X(t_0 + \theta, t + \theta, \varphi + q\overset{\wedge}{\omega}, \psi) - X(t_0, t, \varphi, \psi) = 0.$

Леммы 1, 2 доказываются аналогично [3, с.158].

4. Рассмотрим оператор T, отображающий каждую вектор-функцию $f(t, \varphi, \psi) \in B_n(\Delta, \delta_m)$ в вектор-функцию

$$F_f(t, \varphi, \psi) \equiv T(f) = \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} X(s, t, \varphi, \psi) F[s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s,t, \varphi, \psi),$$

$$f(s, \lambda(s, t, \varphi, \psi), \xi(s, t, \varphi, \psi)), \mu] ds. \tag{9}$$

Применяя дифференциальный оператор D_ε к соотношению (9), получим

$$D_\varepsilon F_f(t, \varphi, \psi) = P(t, \varphi, \psi) F_f(t, \varphi, \psi) + \mu F(t, \varphi, \psi, f(t, \varphi, \psi), \mu).$$

На оснований лемм 1, 2 и в силу неравенств (2), (3), (8) при условиях $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon} = \frac{\gamma}{8 l_0 B}$, $0<\mu<\overline{\mu}$ получим оценки:

III (а) $\quad \|F_f(t, \varphi, \psi)\| \le \Delta;$

(б) $\quad \|F_f(t, W_m\varphi + V_m\overline{\varphi}, W_m\psi + V_m\overline{\psi}) - F_f(t, W_m\varphi + V_m\varphi, W_m\psi + V_m\psi)\| \le \delta_m(\Delta_m\varphi + \Delta_m\psi);$

(в) $F_f(t + \theta, \varphi + q\overset{\wedge}{\omega}, \psi) - F_f(t, \varphi, \psi) = 0;$

(г) $\|F_f(t, \varphi, \psi) - F_g(t, \varphi, \psi)\| \le \frac{1}{2}\|f - g\|_B,$

где $\overline{\mu} = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые положительные постоянные, которые выражаются аналитически через коэффициенты правых частей неравенств (2), (3), (8).

Из III (а)-(г) следует, что при $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon}$, $0<\mu<\overline{\mu}$ вектор-функция $F_f(t, \varphi, \psi)$ принадлежат классу $\pi(\Delta, \delta_m)$ и является многопериодической по части переменных функцией. Кроме того, отображение класса $B_n(\Delta, \delta_m)$ в силу соотношения (9) будет сжатием. На основе принципа сжатых отображений в классе $B_n(\Delta, \delta_m)$ существует неподвижная точка $f^* = f^*(t, \varphi, \psi, \varepsilon, \mu)$ оператора T, т.е.

$$T(f^*) = f^* = F_{f^*}(t, \varphi, \psi).$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а . *Если для системы (7) существует матрица типа Грина, удовлетворяющая условию некритичности (8), и выполнены условия (N_∞), то для всех значений $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon}$, $0<\mu<\overline{\mu}$ система (1) имеет единственное многопериодическое по части переменных решение из класса $B_n(\Delta, \delta_m)$, обращающееся при μ=0 в нулевой вектор.*

Отметим, что решение f^* системы (1) является интегральным многообразием в смысле Боголюбова-Митропольского для соответствующей счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1,2,3], обладающим свойством периодичности по t, φ равномерно по ψ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки МОН РК (N1.-1.-1,2-12(60)).

Цитированная литература

1. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.

2. **Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.** Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., 1973.

3. **Умбетжанов Д.У.** Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата, 1979.

Поступила в редакцию 01.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 26 — 34*

УДК 531.01+539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДОМИНАНТНОЙ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

У. Д. Ершибаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
480012 г. Алматы пр.аль-Фараби, 71

Изучены свободные колебания класса C_1 — крутильные колебания модели Земли, характеризуемые отсутствием радиальной составляющей вектора перемещений и дилатансии. Рассмотрена кусочно-неоднородная модель Земли, представленная литосферной сферической оболочкой с заполнителем, материалы которых описаны моделью линейно упругого изотропного несжимаемого тела с соответствующими модулями сдвига и плотностями. Геометрические параметры литосферы отвечают принятой в геофизике модели Земли. Внешняя поверхность литосферы свободна от напряжений. В качестве условий контакта на границе литосферы и заполнителя приняты условия жесткого сцепления или "спая". Найдены гармонические динамические возмущения в литосфере и в заполнителе. С помощью граничных условий и возмущений получено характеристическое уравнение для определения частот крутильных колебаний рассматриваемой модели Земли. Показано существование доминантной частоты.

Рассмотрим кусочно-неоднородную модель Земли, представленную тонкой сферической замкнутой оболочкой (литосферой), жестко сцепленной с однородным заполнителем. Модуль сдвига несжимаемого упругого материала литосферы — G_1, упругого заполнителя — G_2. Плотность материала литосферы обозначим через ρ_1', заполнителя — через ρ_2'; внешний радиус литосферы — r_0, внутренний — r_1, толщина литосферы — $h = r_0 - r_1$. Построим общие решения уравнений стационарных крутильных колебаний рассматриваемой модели Земли. Затем запишем граничные условия на поверхности литосферы — условия отсутствия внешних нагрузок, а также условия контакта на границе литосферы и заполнителя — условия жесткого сцепления или “спая”. Используя общие решения и граничные условия, получим характеристическое уравнение для определения частот свободных крутильных колебаний этой модели Земли.

В связи с нахождением общих решений уравнений стационарных крутильных колебаний необходимо пояснить применение понятий внутренней и внешней краевых задач в случае кусочно-неоднородной модели Земли. Для этого обратимся к использованию этих понятий при нахождении решений уравнения Лапласа в сферических координатах в монографии А.И. Лурье

Keywords: *elastic model of the Earth, incompressible material, fluctuation*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

[1, стр. 892]. А.И. Лурье записывает два обыкновенных дифференциальных уравнения — уравнение Эйлера относительно функции от радиуса и уравнение, решаемое в присоединенных функциях Лежандра. Два частных решения уравнения Эйлера содержат степенные функции от радиуса с целыми положительными и отрицательными показателями. Первое частное решение используется при решении внутренней краевой задачи для сферы ($0 \leq r \leq r_0$), а второе частное решение используется при решении внешней краевой задачи для сферической оболочки ($r_0 \leq r < \infty$); решение краевых задач для полой сферы ($r_0 \leq r \leq r_1$) требует введения обоих решений.

В нашем случае мы будем иметь в качестве уравнения для функции от радиуса r обыкновенное дифференциальное уравнение с регулярной особой точкой, решаемое в обобщенных степенных рядах. Корнями определяющего уравнения здесь являются также целые положительные и отрицательные показатели степени радиуса. Следуя А.И. Лурье, будем придерживаться его терминологии, связанной с понятиями внешней и внутренней краевых задач для сферы.

Общее решение внутренней краевой задачи для сферы (решение для заполнителя) найдено в статье [3].

Система дифференциальных уравнений упругих крутильных колебаний модели Земли имеет вид [3]

$$r^2\frac{d^2u_2}{dr^2}+2r\frac{du_2}{dr}+\rho_i' f^2\frac{r^2}{G_i}u_2=-2m\chi(r),$$

$$r^2\frac{d^2u_3}{dr^2}+2r\frac{du_3}{dr}+\rho_i' f^2\frac{r^2}{G_i}u_3=-2\chi(r),\quad i=1,2, \tag{1}$$

где f — комплексная частота колебаний, u_2, u_3 — компоненты перемещений сферической системы координат (r, θ, λ), $u_1=0$.

Здесь $\chi\,(r)$ — решение дифференциального уравнения [3]

$$r^2\frac{d^2\chi(r)}{dr^2}+2r\frac{d\chi(r)}{dr}+\rho_i' f^2\chi(r)\frac{r^2}{G}-n(n+1)\chi(r)=0. \tag{2}$$

Будем искать решение (2) в виде обобщенного степенного ряда:

$$\chi(r)=\chi_2(r)=r^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s r^s=r^{\rho_2}\left(\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\alpha_3 r^3+...\right). \tag{3}$$

Подставим выражение (3) в уравнение (2). И (2) имеем

$$\begin{gathered}
r^2\Big[(\rho_2+2)\alpha_3(\rho_2+3)r^{(\rho_2+1)}+(\rho_2+1)\alpha_2(\rho_2+2)r^{\rho_2}+\\
+\rho_2\alpha_1(\rho_2+1)r^{(\rho_2-1)}+\rho_2\alpha_0(\rho_2-1)r^{(\rho_2-2)}+...\Big]+\\
+2r\Big[r^{(\rho_2+2)}\alpha_3(\rho_2+3)+r^{(\rho_2+1)}\alpha_2(\rho_2+2)+r^{\rho_2}\alpha_1(\rho_2+1)+\\
+\rho_2\alpha_0 r^{(\rho_2-1)}+...\Big]+\rho_1' f^2\frac{r^2}{G}r^{\rho_2}(\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\alpha_3 r^3+...)-\\
-n(n+1)r^{\rho_2}(\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\alpha_3 r^3+...)=0
\end{gathered} \tag{4}$$

или, собрав подобные члены и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях r, получим следующий ряд уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } r^{\rho_2} && [\rho_2(\rho_2-1)+2\rho_2-n(n+1)]\,\alpha_0=0\,;\\
&\text{при } r^{(\rho_2+1)} && [(\rho_2+1)\rho_2+2(\rho_2+1)-n(n+1)]\,\alpha_1=0\,;\\
&\text{при } r^{(\rho_2+2)} && [(\rho_2+2)(\rho_2+1)+2(\rho_2+2)-n(n+1)]\,\alpha_2+\rho_1' f^2\tfrac{\alpha_0}{G}=0\,;\\
&\text{при } r^{(\rho_2+3)} && [(\rho_2+3)(\rho_2+2)+2(\rho_2+3)-n(n+1)]\,\alpha_3+\rho_1' f^2\tfrac{\alpha_1}{G}=0\,;\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Первое уравнение из (5) при условии $\alpha_0 \neq 0$ является квадратным уравнением для определения показателя ρ_2

$$\rho_2^2+\rho_2-n(n+1)=0\,. \tag{6}$$

Его корни будут

$$(\rho_2)_1=n\,,\quad (\rho_2)_2=-n-1\,. \tag{7}$$

Первое значение корня достаточно для построения решения уравнения (3) $\chi_1(r)$ [2]. Второе значение корня наряду с первым используем для нахождения решения краевой задачи для оболочки.

Что касается коэффициента α_0, то он является произвольным. Его можно положить равным единице.

После подстановки $(\rho_2)_2=-n-1$ определяющее уравнение обратится в тождество, второе из уравнений (5) даст α_1, третье — α_2, четвертое — α_3 и т.д. Заметим, что коэффициент при α_1 во втором уравнении (5) при $(\rho_2)_2=-n-1$ не равен нулю. Следовательно, $\alpha_1=0$. Из третьего уравнения получим

$$\alpha_2=\frac{\rho_1' f^2}{2G(2n-1)}\,. \tag{8}$$

Коэффициент $\alpha_3=0$ и т.д. Тогда

$$\chi_2(r)=r^{(-n-1)}\left[1+\frac{\rho_1' f^2 r^2}{2G(2n-1)}+...\right]. \tag{9}$$

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующее (1):

$$r^2\frac{d^2u_i^*}{dr^2}+2r\frac{du_i^*}{dr}+\rho_1' f^2\frac{r^2}{G}u_i^*=0\,,\quad (i=2,3)\,. \tag{10}$$

Примем

$$u_i^*=r^{\rho_*}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s^* r^s=r^{\rho_*}(\alpha_0^*+\alpha_1^* r+\alpha_2^* r^2+\alpha_3^* r^3+...)\,. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), собирая подобные члены и приравнивая коэффициенты при различных степенях r, получим следующий ряд уравнений

$$\begin{aligned}
&\text{при } r^{\rho_*} && [\rho_*(\rho_*-1)+2\rho_*]\alpha_0^* = 0\,;\\
&\text{при } r^{(\rho_*+1)} && [(\rho_*+1)\rho_* + 2(\rho_*+1)]\,\alpha_1^* = 0\,;\\
&\text{при } r^{(\rho_*+2)} && [(\rho_*+2)(\rho_*+1)+2(\rho_*+2)]\,\alpha_2^* + \rho_1' f^2 \tfrac{\alpha_0^*}{G} = 0\,;\\
&\text{при } r^{(\rho_*+3)} && [(\rho_*+3)(\rho_*+2)+2(\rho_*+3)]\,\alpha_3^* + \rho_1' f^2 \tfrac{\alpha_1^*}{G} = 0\,;
\end{aligned} \tag{12}$$

....

Определяющее уравнение

$$\rho_*^2 + \rho_* = 0 \tag{13}$$

имеет два корня

$$(\rho_*)_1 = 0\,, \quad (\rho_*)_2 = -1\,. \tag{14}$$

Первый корень служит для нахождения решения внутренней краевой задачи для сферы, построенной в [3], а второй корень — для решения внешней краевой задачи. Для оболочки следует использовать оба корня.

Так как при подстановке корня $(\rho_*)_2 = -1$ во второе уравнение (12) коэффициент при α_1^* равен нулю, то в качестве α_1^* можно взять любое число, например, равное единице, и продолжать процесс нахождения коэффициентов разложения (11).

Из третьего уравнения (12) получим

$$\alpha_2^* = -\frac{\rho_1' f^2 \alpha_0^*}{[(\rho_*+2)(\rho_*+1)+2(\rho_*+2)]G} = -\frac{\rho_1' f^2}{2G}\quad . \tag{15}$$

Из четвертого уравнения (12) находим

$$\alpha_3^* = -\frac{\rho_1' f^2 \alpha_1^*}{G[(\rho_*+3)(\rho_*+2)+2(\rho_*+3)]} = -\frac{\rho_1' f^2}{6G} \tag{16}$$

и т.д. Тогда

$$u_i^* = r^{-1}\left(1 + r - \frac{\rho_1' f^2}{2G} r^2 - \frac{\rho_1' f^2}{6G} r^3 + ...\right)\,. \tag{17}$$

Это частное решение от внешней краевой задачи для сферы.

Методом неопределенных коэффициентов найдем теперь частные решения неоднородных уравнений для χ_2 (для χ_1 они построены в [3]):

$$r^2 \frac{d^2 u_2^*}{dr^2} + 2r\frac{du_2^*}{dr} + \frac{\rho_i' f^2 r^2 u_2^*}{G_i} = -2m\chi_2(r), \tag{18}$$

$$r^2 \frac{d^2 u_3^*}{dr^2} + 2r\frac{du_3^*}{dr} + \frac{\rho_i' f^2 r^2 u_3^*}{G_i} = -2\chi_2(r). \tag{19}$$

Полагаем

$$u_2^*(r) = m r^{(-n-1)} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s r^s, \tag{20}$$

$$u_3^*(r) = r^{(-n-1)} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s r^s. \tag{21}$$

Подставим (20) и (21) в (18), (19) с учетом (9). Получим

$$\beta_0 n(n+1)+\beta_1 r(n-1)n+r^2\left[\beta_2(n^2-3n+2)+\beta_0\frac{\rho_1' f^2}{G_i}\right]+...=$$

$$=-2-\frac{\rho_1' f^2 r^2}{G_i(2n-1)}-... \tag{22}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r в левой и правой частях уравнения (22), получим выражения для искомых коэффициентов $\beta_1,\ \beta_2, ...$

$$\beta_0=-\frac{2}{(n+1)n}\ ,\quad \beta_1=0\,,$$

$$\beta_2=-\frac{\rho_1' f^2}{G}\,\frac{1}{n(n+1)(2n-1)}\qquad \text{и т.д.} \tag{23}$$

Аналогично из (19) получим

$$u_3^*(r)=r^{(-n-1)}\left\{-\frac{2}{n(n+1)}-\frac{\rho_i' f^2 r^2}{n(n+1)(2n-1)G_i}-\ ...\right\}. \tag{24}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений крутильных колебаний в перемещениях для литосферы будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}(u_2)_1(r,\theta,\lambda,t)=\exp(ift)\Bigg\{C_1\left(1-\frac{1}{6}\rho_1' f^2\frac{1}{G_1}r^2+...\right)+\\ +mC_2r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)}+\frac{\rho_1' f^2}{G_1}\frac{r^2}{n(n+1)(2n+3)}-...\right]+\\ +r^{-1}C_3\left(1+r-\frac{\rho_1' f^2}{2G_1}r^2-\frac{\rho_1' f^2}{6G_1}r^3+...\right)-\\ -mC_4r^{(-n-1)}\Bigg[\frac{2}{n(n+1)}+\frac{\rho_1' f^2 r^2}{(2n-1)n(n+1)G_1}+\\ +...\Bigg]\Bigg\}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\lambda\,,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}(u_3)_1(r,\theta,\lambda,t)=\exp(ift)\Bigg\{C_1\left(1-\frac{1}{6}\rho_1' f^2\frac{r^2}{G_1}+...\right)+\\ +C_2r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)}+\frac{\rho_1' f^2}{G_1}\frac{r^2}{n(n+1)(2n+3)}-...\right]+\\ +r^{-1}C_3\left(1+r-\frac{\rho_1' f^2}{2G_1}r^2-\frac{\rho_1' f^2}{6G_1}r^3+...\right)-\\ -C_4r^{(-n-1)}\Bigg[\frac{2}{n(n+1)}+\frac{\rho_1' f^2 r^2}{(2n-1)n(n+1)G_1}+\\ +...\Bigg]\Bigg\}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\cos m\lambda\,.\end{gathered} \tag{26}$$

Для заполнителя перемещения имеют вид [3]:

$$(u_2)_2(r,\theta,\lambda,t)=\exp(ift)\Bigg\{C_5\left(1-\frac{1}{6}\rho_2' f^2\frac{1}{G_2}r^2+...\right)+$$

$$+mC_6 r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)}+\frac{\rho_2' f^2}{G_2}\frac{r^2}{n(n+1)(2n+3)}-...\right]\Bigg\}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\lambda, \tag{27}$$

$$(u_3)_2(r,\theta,\lambda,t)=\exp(ift)\Bigg\{C_5\left(1-\frac{1}{6}\rho_2' f^2\frac{1}{G_2}r^2+...\right)+$$

$$+mC_6 r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)}+\frac{\rho_2' f^2}{G_2}\frac{r^2}{n(n+1)(2n+3)}-...\right]\Bigg\}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\cos m\lambda, \tag{28}$$

где P_n^m — присоединенные функции Лежандра.

По формулам Коши с учетом (25)—(28) находим компоненты деформаций и по обобщенному закону Гука — компоненты напряжений в литосферной оболочке и в заполнителе.

Граничные условия свободных крутильных колебаний литосферной оболочки на дневной поверхности имеют вид:

$$(\sigma_{12})_1=0\,,\quad (\sigma_{13})_1=0\,\text{при}\quad r=r_0; \tag{29}$$

условия “спая” на контактной поверхности оболочки и заполнителя [4] следующие:

$$(\sigma_{12})_1=\ (\sigma_{12})_2\,,\qquad (\sigma_{13})_1=\ (\sigma_{13})_2\,,$$

$$(u_2)_1=(u_2)_2\,,\quad (u_3)_1=(u_3)_2\ \ \text{при}\quad r=r_1\,. \tag{30}$$

Закон Гука в случае крутильных колебаний записывается в виде:

$$\sigma_{12}=G\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r}\right)\,,\quad \sigma_{13}=G\left(\frac{\partial u_3}{\partial r}-\frac{u_3}{r}\right)\,. \tag{31}$$

Подставляя (25)—(28) в (29), (30), получаем линейную однородную систему шести алгебраических уравнений относительно шести произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, $\ldots$, C_6. Нетривиальное (ненулевое) решение этой системы будет иметь место при равенстве нулю ее определителя, называемого в теории устойчивости деформируемых систем характеристическим, позволяющим определить частоты свободных крутильных колебаний упругой кусочно-неоднородной модели Земли.

Для элементов первой строки характеристического определителя получаем следующие выражения:

$$a_{11}=\frac{1}{6}\rho_1' f^2\frac{r_0}{G_1}-\frac{1}{r_0}\,;$$

$$a_{12}=m\left[\frac{2(1-n)r_0^{(n-1)}}{n(n+1)}+\frac{\rho_1' f^2 r_0^{(n+1)}}{G_1 n(2n+3)}\right]\,;$$

$$a_{13}=-\frac{2}{r_0^2}-\frac{1}{r_0}-\frac{1}{6}\frac{\rho_1' f^2 r_0}{G_1}\,; \tag{32}$$

$$a_{14}=-m\left[-\frac{2(n+2)r_0^{-(n+2)}}{n(n+1)}-\frac{n\rho_1' f^2 r_0^{(-n)}}{(2n-1)n(n+1)G_1}\right];\ a_{15}=a_{16}=0\,.$$

Элементы второй строки будут,соответственно,

$$a_{21}=-\frac{1}{6}\rho_1' f^2\frac{r_0}{G_1}-\frac{1}{r_0}\,;$$

$$a_{22}=\frac{2(1-n)r_0^{(n-1)}}{n(n+1)}+\frac{\rho_1' f^2 r_0^{(n+1)}}{G_1 n(2n+3)}\,;$$

$$a_{23} = -\frac{2}{r_0^2} - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{6}\frac{\rho_1' f^2 r_0}{G_1};$$

$$a_{24} = \frac{2(n+2)r_0^{-(n+2)}}{n(n+1)} + \frac{n\rho_1' f^2 r_0^{(-n)}}{(2n-1)n(n+1)G_1},\ a_{25} = a_{26} = 0\,. \tag{33}$$

Запишем элементы третьей и четвертой строк характеристического определителя

$$a_{31} = -\frac{1}{6}\rho_1' f^2 \frac{r_1}{G_1} - \frac{1}{r_1};$$

$$a_{32} = m\left[\frac{2(1-n)r_1^{(n-1)}}{n(n+1)} + \frac{\rho_1' f^2}{G_1}\frac{r_1^{(n+1)}}{n(2n+3)}\right];$$

$$a_{33} = -\frac{2}{r_1^2} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{6}\frac{\rho_1' f^2 r_1}{G_1};$$

$$a_{34} = m\left[\frac{2(n+2)r_1^{-(n+2)}}{n(n+1)} + \frac{\rho_1' f^2 r_1^{(-n)}}{(2n-1)(n+1)G_1}\right];$$

$$a_{35} = \frac{G_2}{G_1}\left[\frac{1}{6}\rho_2' f^2 \frac{r_1}{G_2} + \frac{1}{r_1}\right]; \tag{34}$$

$$a_{36} = -\frac{G_2}{G_1}m\left[\frac{2(1-n)r_1^{(n-1)}}{n(n+1)} + \frac{\rho_2' f^2}{G_1}\frac{r_1^{(n+1)}}{n(2n+3)}\right];$$

$$a_{41} = -\frac{1}{6}\rho_1' f^2 \frac{r_1}{G_1} - \frac{1}{r_1};$$

$$a_{42} = \frac{2(1-n)r_1^{(n-1)}}{n(n+1)} + \frac{\rho_1' f^2}{G_1}\frac{r_1^{(n+1)}}{n(2n+3)};$$

$$a_{43} = -\frac{2}{r_1^2} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{6}\frac{\rho_1' f^2 r_1}{G_1};$$

$$a_{44} = \frac{2(n+2)r_1^{-(n+2)}}{n(n+1)} + \frac{n\rho_1' f^2 r_1^{(-n)}}{(2n-1)n(n+1)G_1};$$

$$a_{45} = \frac{G_2}{G_1}\left[\frac{1}{6}\rho_2' f^2 \frac{r_1}{G_2} + \frac{1}{r_1}\right];$$

$$a_{46} = \frac{G_2}{G_1}m\left[\frac{2r_1^{(n-1)}}{n+1} - \frac{\rho_2' f^2}{G_2}\frac{(n+2)r_1^{(n+1)}}{n(n+1)(2n+3)}\right]. \tag{35}$$

Наконец, запишем элементы пятой и шестой строк характеристического определителя

$$a_{51} = 1 - \frac{1}{6}\rho_1' f^2 \frac{r_1^2}{G_1};$$

$$a_{52} = m r_1^n\left[-\frac{2}{n(n+1)} + \frac{\rho_1' f^2}{G_1}\frac{r_1^2}{n(n+1)(2n+3)}\right];$$

$$a_{53} = \frac{1}{r_1} + 1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_1' f^2}{G_1}r_1 - \frac{1}{6}\frac{\rho_1' f^2}{G_1}r_1^2;$$

$$a_{54} = -m\left[\frac{2r_1^{(-n-1)}}{n(n+1)} + \frac{\rho_1' f^2 r_1^{(-n+1)}}{(2n-1)n(n+1)G_1}\right];$$

$$a_{55} = -1 + \frac{1}{6}\rho_2' f^2 \frac{r_1^2}{G_2};$$

$$a_{56} = -m\left[-\frac{2r_1^n}{n(n+1)} + \frac{\rho_2' f^2}{G_2}\frac{r_1^{(n+2)}}{n(n+1)(2n+3)}\right]; \tag{36}$$

$$a_{61} = 1 - \frac{1}{6}\rho_1' f^2 \frac{r_1^2}{G_1};$$

$$a_{62} = -\frac{2r_1^n}{n(n+1)} + \frac{\rho_1' f^2}{G_1}\frac{r_1^{(n+2)}}{n(n+1)(2n+3)};$$

$$a_{63} = \frac{1}{r_1} + 1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_1' f^2}{G_1} r_1 - \frac{1}{6}\frac{\rho_1' f^2}{G_1} r_1^2;$$

$$a_{64} = -\frac{2r_1^{(-n-1)}}{n(n+1)} - \frac{\rho_1' f^2 r_1^{(-n+1)}}{(2n-1)n(n+1)G_1};$$

$$a_{65} = -1 + \frac{1}{6}\rho_2' f^2 \frac{1}{G_2} r_1^2;$$

$$a_{66} = \frac{2r_1^n}{n(n+1)} - \frac{\rho_2' f^2}{G_2}\frac{r_1^{(n+2)}}{n(n+1)(2n+3)}. \tag{37}$$

Таким образом, искомая частота свободных крутильных колебаний неоднородной модели Земли определяется из решения характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = 0, \tag{38}$$

которое определялось численно.

Для значений $n \leq 5$ произведены численные расчеты частот при следующих входных данных: радиус Земли $r_0 = 6.37 \cdot 10^8$ см, радиус контактной поверхности $r_1 = 6.17 \cdot 10^8$см, плотности и модули сдвига литосферы и заполнителя: $\rho_1 = 2.7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, $\rho_2' = 5.3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, $G_1 = 0.4 * 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$, $G_2 = 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$.

Таблица 1

Мода, n	1	2	3	4	5
Частота, $f(\text{Гц}^{-1})$	$1.6{\times}10^{-3}$	$2.4{\times}10^{-3}$	$2.2{\times}10^{-3}$	$2.5{\times}10^{-3}$	$2.8{\times}10^{-3}$

Расчеты показывают, что f слабо зависит от m, поэтому в таблице 1 приведены значения частот f для первых пяти мод, $m = 2$. Как следует из таблицы, максимум частоты (доминантной частоты [4,5]) имеет место при $n = 2$ и минимум — при $n = 3$.

Цитированная литература

1. **Лурье А. И.** Теория упругости. М., 1970.

2. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М., Л., 1952. Т.2.

3. **Егоров А.К., Ершибаев У.Д.** // Материалы межвуз. научно-практ. конф. “Прикладные вопросы физики и математики.” Научный центр КазГАСА. Алматы, 2002. С.132–135.

4. **Ержанов Ж.С., Егоров А.К.** Устойчивость неоднородного деформирования нелинейных тел. Алма-Ата, 1987. С.280.

5. **Biot M. A.** Mechanics of incremental deformation. N., Y., 1965.

6. **Буллен К. Е.** Введение в теоретическую сейсмологию. М., 1966.

Поступила в редакцию 04.09.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 35 — 44*

УДК 517.95

ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ СОУДАРЯЮЩИХСЯ СТРУЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Игликов, Б. С. Кошкарова

КарГУ им.У.А.Букетова МО и Н РК
г.Караганда ул.Университетская, 28 rootphm@kargu.krg.kz

Задача о соударении двух встречных струй несжимаемой идеальной жидкости (НИЖ) имеет большой теоретический и практический интерес, связанный с теорией кумулятивного заряда [1]. Подробное изложение вопроса можно найти в монографии Гуревича М.И. [2], где рассматриваются различные случаи соударения двух плоских струй, а также дается обзор трудов по данному направлению.

Как известно, решение осесимметрических задач со свободными границами осложняется дополнительными трудностями, связанными с вырождением соотвествующих систем уравнений, описывающих движение жидкости в пространстве. Антонцев С.Н. в работе [3], исследуя разрешимость задачи о соударении двух осесимметрических газовых струй, предложил следующий метод: вначале из области определения функции исключается ось симметрии, где система вырождается, вместе с малой окрестностью δ и при определенных условиях на плотность среды и гладкость решения получают оценки. Далее лишь в предположении, что эти оценки не зависят от δ, осуществляется переход к пределу при $\delta \to 0$ и доказывается разрешимость.

В данной работе в отличие от предыдущих работ система уравнений, описывающая пространственное движение НИЖ, составлена не для потенциала скоростей и функции тока, а непосредственно для компонент вектора скорости, что приводит к другой задаче, для исследования которой мы будем использовать методы теории обобщенных аналитических функций.

Постановка задачи: требуется найти область G течения в меридиональной полуплоскости $y \geq 0$ (рис.1) и решение в ней системы дифференциальных уравнений первого порядка для компонент скорости V_x и V_y

$$\frac{\partial(yV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(yV_y)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0,$$

в отсутствии источников и вихрей в G по следующим условиям:

а) давление $p(x, y) = \mathrm{const}$ на $L_1 \bigcup L_2$;

Keywords: *incompressible inviscid fluid, free-boundary flow, weighted Hölder space*
2000 Mathematics Subject Classification: 76B03, 76B07

б) $L_1 \bigcup L_2$ – свободные границы — суть линии тока жидкости;
в) $V(0) = 0, \quad V = (V_x, V_y)$;
г) $y \to r_0$ при $x \to -\infty, \quad y \to r_1$ при $x \to +\infty$ $(r_1 \le r_0)$.

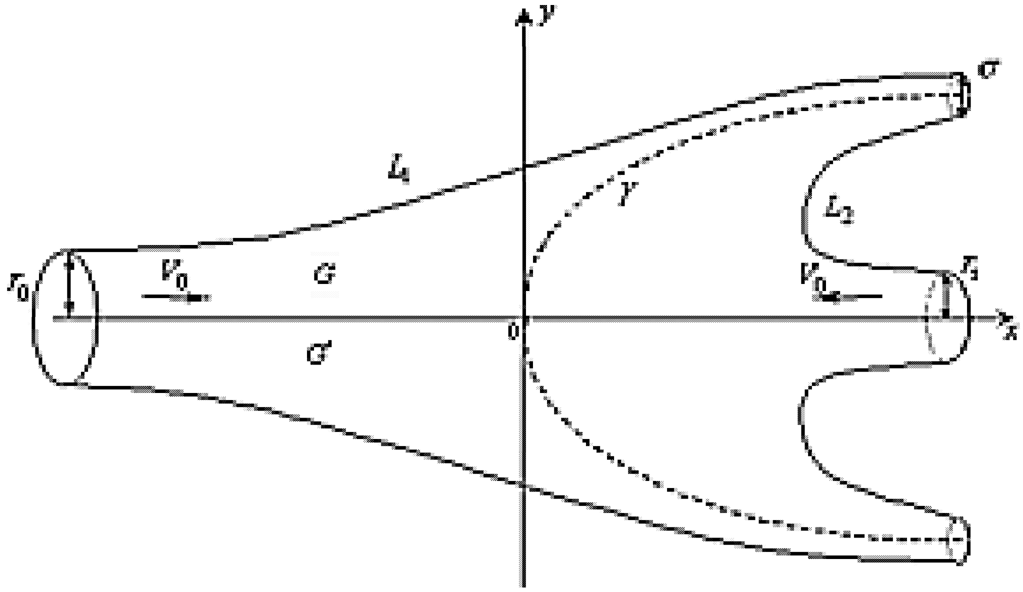

рис.1

В дальнейшем исследование задачи проводится в комплексной области, поэтому приведем комплексную форму постановки задачи. Для этого введем комплексные переменные $z = x + iy$, $w = V_x - iV_y$. Тогда система дифференциальных уравнений записывается в виде одного комплексного уравнения
$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{w}{4iy} + \frac{\bar{w}}{4iy} = 0. \tag{1}$$
Условия а)-г) переписываются следующим образом
$$|w| = 1 \quad \text{на} \quad L_1 \cup L_2; \tag{2}$$
$$Re[i\,dz\,w] = V_y dx - V_x dy = 0 \quad \text{на} \quad L_1 \cup L_2; \tag{3}$$
$$w(0) = 0; \tag{4}$$
$$y \to r_0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty; \qquad y \to r_1 \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{5}$$
Модуль скорости на поверхности струй мы взяли равным единице, поскольку это не влияет на общность полученных результатов.

Исследование задачи (1)-(5) в области G вызывает ряд трудностей. Если же решение $w(z)$ уравнения (1) продолжить для значений $y \le 0$ по формуле
$$w(z) = \overline{w(\bar{z})}, \tag{6}$$
то функция $w(z)$ будет удовлетворять уравнению (1) и в области G', симметричной G относительно x [4]. Следовательно, мы можем считать, что задача (1)-(5) задана в области $\Omega = G \bigcup G' \bigcup (-\infty, +\infty)$, ибо все ее условия остаются без изменения и в силу (6) на оси x функция $w(z)$ принимает действительные значения, т.е. при $y = 0$ выполняется равенство
$$v(x, 0) = V_y(x, 0) = 0. \tag{7}$$

Далее от поставленной задачи в области Ω целесообразно перейти к задаче в фиксированной области. Благодаря условиям (2), (4) такой областью будет область изменения искомой переменной $w = u + iv$ в плоскости годографа – единичный круг K с центром в начале координат $K = K\{w : |w| < 1\}$ с границей Γ: $|w| = 1$ (рис.2).

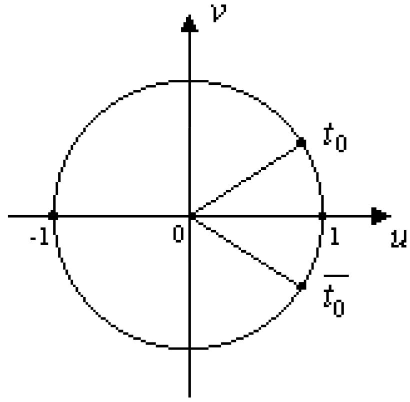

рис.2

Используя связи между частными комлексными производными через якобиан преобразования, отличного от нуля, вместо (1) получим уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} = \frac{\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2}{\left|\frac{y}{v}\right| + \sqrt{\left|\frac{y}{v}\right|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2}}. \tag{8}$$

Решение $z = z(w)$ этого уравнения должно быть найдено в круге K при следующих условиях:

$$Re[iw\,dz] = 0 \quad \text{при} \quad w \in \Gamma, \tag{9}$$

$$z(0) = 0, \tag{10}$$

$$y \to r_0 \quad \text{при} \quad w \to -1; \qquad y \to r_1 \quad \text{при} \quad w \to 1. \tag{11}$$

Условие (2) выполняется автоматически. Кроме этого, при преобразовании годографа отходящие после встречи в бесконечность струи переходят в две точки единичной окружности t_0 и $\bar{t}_0$, которые симметричны относительно действительной оси u (рис.2).

Для исследования задачи (8)-(11) используем метод И.Н.Векуа [5]. Функцию $z = z(w)$ будем искать в виде

$$z(w) = z_0(w) + \overline{\Phi(w)} + \overline{\Phi_0(w)} = z_1(w) + \overline{\Phi_0(w)}, \tag{12}$$

где $\overline{\Phi(w)}$, $\overline{\Phi_0(w)}$ – сопряженные к аналитической в K функции. Пусть $\overline{\Phi_0(w)}$ удовлетворяет условиям (9), (10),

$$z_0(w) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \left(\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - w} - \frac{\overline{w}\overline{\rho(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}w}\right) d\xi d\eta. \tag{13}$$

Непосредственной подстановкой можно проверить выполнение равенства

$$Re[iwz_0(w)] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma: \; |w| = 1. \tag{14}$$

На основании тождества

$$\frac{d}{d\theta}(iwz_0) = iw\frac{dz_0}{d\theta} - wz_0 \quad \text{при} \quad w = e^{i\theta},$$

а также в силу (13) и (9) получим краевую задачу для определения функции $\overline{\Phi(w)}$:

$$Re[\Phi'(w)] = -wz_0, \quad w \in \Gamma,$$

Решая эту задачу, найдем

$$\overline{\Phi(w)} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{\zeta}\ln(1-\zeta\overline{w})\,d\xi d\eta - \frac{2\overline{w}}{\pi}\mathrm{Im}\iint\limits_K \rho(\zeta)d\xi d\eta + iC_0\overline{w} + C. \tag{15}$$

Здесь C_0 – произвольная действительная постоянная, C – произвольная комплексная постоянная, а у логарифмической функции выбирается ветвь, для которой $\ln 1 = 0$. Подставляя (12) с учетом (13) и (15) в (10), получим

$$C = \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{\zeta}d\xi d\eta.$$

Кроме этого, из (6), (7) и рисунков 1 и 2 заключаем, что для функции $z = z(w)$, обратной к $w = w(z)$, должно выполняться соотношение

$$z(w) = \overline{z(\bar{w})}, \tag{16}$$

которое, в свою очередь, накладывает определенное ограничение на плотность $\rho(w)$. Подставляя функцию $z_1(w)$ из (12) с учетом (13) и (15) в (16), нетрудно убедиться, что для выполнения равенства (16) необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$\rho(w) = \overline{\rho(\bar{w})}, \quad C_0 = 0. \tag{17}$$

Отметим еще, что при соблюдении условия (17) всегда справедливо равенство

$$\mathrm{Im}\iint\limits_K \rho(\zeta)d\xi d\eta = 0. \tag{18}$$

В качестве функции $\overline{\Phi_0(w)}$ выберем функцию, являющуюся решением соответствующей задачи в плоско-параллельном случае [2]

$$\overline{\Phi_0(w)} = a_1\ln(1-\overline{w}) - a_3\ln(1+\overline{w}) - a_2t_0\ln(1-\overline{w}\overline{t_0}) - a_2\overline{t_0}\ln(1-\overline{w}t_0), \tag{19}$$

где $a_1,\ a_2,\ a_3$ — действительные положительные постоянные, причем $a_1 \gg a_3$ и $2a_2 = a_1 + a_3$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что краевые условия (9), (10) выполняются. Если $a_1 = \pi r_0^2$, $a_3 = = \pi r_1^2$ и $2\sigma r = r_0^2 + r_1^2$, то функция $\overline{\Phi_0(w)}$ будет удовлетворять и условию (11). Кроме того, для функции $\overline{\Phi_0(w)}$ выполняется условие (16).

Таким образом, на основании равенств (16), (17)-(19) из (12) имеем

$$\begin{aligned} z(w) \quad &= \quad -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \left(\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - w} - \frac{\rho(\zeta)}{\zeta} - \frac{\overline{w}\overline{\rho(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}w}\right)d\xi d\eta + \\ &+ \quad \frac{2}{\pi}\iint\limits_K \left(\frac{\rho(\zeta)}{\zeta}\ln(1-\zeta\overline{w})\,d\xi d\eta + a_1\ln(1-\overline{w}) - a_3\ln(1+\overline{w}) - \right. \\ &- \quad \left. a_2t_0\ln(1-\overline{w}\overline{t_0}) - a_2\overline{t_0}\ln(1-\overline{w}t_0)\right)d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{20}$$

Данная функция удовлетворяет всем требуемым условиям задачи (9)-(11).

Теперь выведем уравнение для плотности $\rho(w)$ в (20), чтобы $z(w)$ была решением уравнения (8).

Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{w}} = \rho(w) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}w}d\xi d\eta - \frac{2}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{1-\zeta\overline{w}}d\xi d\eta + \overline{\Phi_0'(w)}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-w)^2}d\xi d\eta - \frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_K \frac{\bar{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}w)^2}d\xi d\eta = \Pi\rho - \Pi_1\rho \equiv U\rho, \tag{22}$$

которые верны для произвольной функции $\rho(w)$ из ниже выбираемого класса, то из (8) для функции $\rho(w)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$\begin{aligned}\rho(w) \;\; &= \;\; \frac{U\rho}{\frac{y}{v}+\sqrt{\left|\frac{y}{v}\right|^2+|U\rho|^2}}\overline{U\rho} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}w}d\xi d\eta + \\ &+ \;\; \frac{2}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{1-\zeta\overline{w}}d\xi d\eta - \overline{\Phi_0'(w)} \equiv S\rho. \end{aligned} \tag{23}$$

Лемма. *Решение нелинейного СИУ* (23) *эквивалентно задаче нахождения решения уравнения* (8), *удовлетворяющего условиям* (9)-(11).

В самом деле, если СИУ имеет решение, удовлетворяющее условию (17), то, подставляя его в (20), сразу получим решение задачи (8)- (11), обладающее свойством симметрии (16). Обратно, если функция $z(w)$, определенная формулой (20) с произвольной функцией $\rho(w)$, удовлетворяет соотношению (17), то она обладает свойством симметрии (16).

Исследуем разрешимость СИУ в весовом классе Гельдера $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0<\mu<1$, где норма определяется формулой [6]

$$\|\rho\| = \sup_{\substack{w,w_1\in K\\ w\neq w_1}} r^{\mu+1}_{w\cup w_1}\frac{|\rho(w_1)-\rho(w)|}{|w_1-w|^\mu} + \sup_{w\in K}|\rho(w)|r_w, \tag{24}$$

$$r_{w\cup w_1} = \min\{|w-t_*|,|w_1-t_*|\},\; r_w = \min|w-t_*|,\; t_* = \{-1,1,t_0,\bar{t}_0\}. \tag{25}$$

В работе [7] была доказана следующая теорема

Теорема. *Если* $\rho\in C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0<\mu<1$, *то операторы*

$$\Pi\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-w)^2}d\xi d\eta, \qquad \Pi_1\rho = -\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_K \frac{\bar{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\bar{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta$$

являются линейными ограниченными операторами в $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, *отображающими его в себя, причем*

$$|\Pi\rho| \le \frac{M_1}{r_w}\|\rho\|,\;\; \|\Pi\rho\| \le (M_1+M_2)\|\rho\|, \tag{26}$$

$$|\Pi_1\rho| \le \frac{M_3}{r_w}\|\rho\|,\;\; \|\Pi_1\rho\| \le (M_3+M_4)\|\rho\|. \tag{27}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — норма элемента в пространстве $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, а M_i — константы, не зависящие от функции ρ.

Имеет место следующая теорема

Т е о р е м а 1 . *Оператор $S\rho$ преобразует элементы пространства $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, $0<\mu<1$ в элементы этого же пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для доказательства теоремы изучим свойства операторов, входящих в состав $S\rho$.

Для оператора $U\rho$ из (22) получим

$$|U\rho| \le |\Pi\rho| + |\Pi_1\rho| \le \frac{M_1+M_3}{r_w}\|\rho\|, \tag{28}$$

$$\|U\rho\| \le \|\Pi\rho\| + \|\Pi_1\rho\| \le \sum_{i=1}^{4} M_i\|\rho\|. \tag{29}$$

Обозначив через $T_1\rho$ оператор

$$T_1\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}w}d\xi d\eta \tag{30}$$

и представив его в следующем виде

$$T_1\rho = \frac{1}{\overline{w}}\int\limits_0^w \left(-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)^2}d\xi d\eta\right)dw = \frac{1}{\overline{w}}\int\limits_0^w \Pi_1\rho\, dw,$$

на основании (27) найдем

$$|T_1\rho| \le \frac{1}{|\overline{w}|}\max\left|\int\limits_0^w |\Pi_1\rho| dw\right| \le \frac{M_3}{r_w}\|\rho\|, \tag{31}$$

$$\|T_1\rho\| \le \|\Pi_1\rho\| \le (M_3+M_4)\|\rho\|. \tag{32}$$

Перейдем теперь к оценке оператора $D\rho = \frac{y}{v}$, записав его следующим образом

$$D\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}d\xi d\eta - \frac{\rho(w)}{\pi}\iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{(\rho(\zeta)-\rho(w))(1-\overline{\zeta}w-\overline{\zeta}\overline{w})}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w})}d\xi d\eta -$$

$$-\frac{\rho(w)}{\pi}\iint\limits_K \frac{1-\overline{\zeta}w-\overline{\zeta}\overline{w}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w})}d\xi d\eta + \frac{2\rho(w)}{w-\overline{w}}\int\limits_w^{\overline{w}} \frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{1-\overline{t}\zeta}d\overline{t} +$$

$$+\frac{2}{\pi(w-\overline{w})}\int\limits_w^{\overline{w}}\left(\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{1-\overline{t}\zeta}d\xi d\eta\right)d\overline{t} + \frac{\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)}{w-\overline{w}}. \tag{33}$$

Поскольку в случае, когда Γ есть окружность $|\zeta|=1$ и точка w лежит внутри нее,

$$\Phi_\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\overline{\zeta}}{\zeta-w}d\zeta = 0,$$

то, воспользовавшись формулой Грина, получим [(5, с. 43, 44)]

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}=1.$$

Кроме этого, учитывая, что [8]

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{d\xi d\eta}{1-\bar\zeta w}=1, \quad w\in K,$$

имеем

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \frac{1-\zeta w-\zeta\overline{w}}{(1-\zeta w)(1-\zeta\overline{w})}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{w-\overline{w}}\left(\frac{w}{\pi}\iint\limits_K\frac{d\xi d\eta}{1-\zeta\overline{w}}-\frac{\bar w}{\pi}\iint\limits_K\frac{d\xi d\eta}{1-\zeta w}\right)=1.$$

Тогда, разбивая в (33) первый и третий интегралы по области K на сумму интегралов по K^+ и K^-, где K^+ и K^- — верхний и нижний половинки круга K, соответственно, и учитывая, что $\forall\zeta\in K^+$ выполняется неравенство $|\zeta-\overline{w}|\ge|\zeta-w|$, а $\forall\zeta\in K^-$ имеем $|\zeta-\overline{w}|\le|\zeta-w|$, находим

$$|D\rho|\le\frac{2\|\rho\|}{\pi}\iint\limits_K\frac{r_{\zeta\cup w}^{-(\mu+1)}}{|\zeta-w|^{2-\mu}}d\xi d\eta+\frac{6\|\rho\|}{\pi}\iint\limits_K\frac{|\zeta-w|^{\mu}r_{\zeta\cup w}^{-(\mu+1)}}{|1-\zeta w|^2}d\xi d\eta+$$

$$+2\max|T_1\rho|+\frac{\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)}{w-\overline{w}}.$$

Отсюда, используя оценки интегралов, полученных в работе [7], а также неравенство (31), имеем

$$|D\rho|\le\frac{(2M_1+8M_3)\|\rho\|}{r_w}+\frac{|\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)|}{|w-\overline{w}|}. \tag{34}$$

Отдельно сделаем оценку последнего слагаемого. Из (19), очевидно, что

$$\frac{|\overline{\Phi_0(w)}-\Phi_0(w)|}{|w-\overline{w}|}=\frac{\left|\int\limits_{\overline{w}}^{w}\left(\frac{a_1}{1-w}+\frac{a_3}{1+\overline{w}}+\frac{a_2\bar t_0}{w-\bar t_0}+\frac{a_2 t_0}{w-t_0}\right)dw\right|}{|w-\overline{w}|}\le$$

$$\le\frac{1}{|w-\overline{w}|}\max\left|\int\limits_{\overline{w}}^{w}\left|\frac{a_1}{|1-w|}+\frac{a_3}{|1+\overline{w}|}+\frac{a_2|\bar t_0|}{|w-\bar t_0|}+\frac{a_2|t_0|}{|w-t_0|}\right|dw\right|\le$$

$$\le\frac{a_1+a_3+2a_2}{r_w}=\frac{4a_2}{r_w}, \tag{35}$$

т.к. из (25) следует, что $|1-w|\ge r_w$, $|1+w|\ge r_w$, $|w-t_0|\ge r_w$ и $|w-\bar t_0|\ge r_w$.

Следовательно, из (34) получим

$$|D\rho|\le\frac{(2M_1+8M_3)\|\rho\|+4a_2}{r_w}. \tag{36}$$

Далее, если $w,\ w_1\in K$, $w\ne w_1$, то

$$D\rho(w)-D\rho(w_1)=\frac{\overline{w}_1-\overline{w}}{\pi}\iint\limits_K\frac{\rho(\zeta)-\rho(w_1)}{(\zeta-\overline{w})(\zeta-\overline{w}_1)(\zeta-w_1)}d\xi d\eta+$$

$$+\frac{w_1-w}{\pi}\iint\limits_K \frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})(\zeta-w_1)}d\xi d\eta+\left(\frac{\overline{w}_1-w}{\overline{w}-w_1}-1\right)(\rho(w)-\rho(w_1))-$$

$$-\frac{w(\overline{w}_1-\overline{w})}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2(\rho(\zeta)-\rho(w))}{(1-\overline{\zeta}\overline{w})(1-\overline{\zeta}\overline{w}_1)(1-\overline{\zeta}w)}d\xi d\eta-$$

$$-\frac{\overline{w}_1(w_1-w)}{\pi}\iint\limits_K \frac{\overline{\zeta}^2(\rho(\zeta)-\rho(w_1))}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}\overline{w}_1)(1-\overline{\zeta}w_1)}d\xi d\eta+$$

$$+\frac{2}{\pi(w-\overline{w})}\int\limits_w^{\overline{w}}\iint\limits_K \frac{\zeta(\overline{w}-\overline{w}_1)(\rho(\zeta)-\rho(w))}{(1-\zeta\overline{w})(1-\zeta\overline{w}_1)}d\xi d\eta d\overline{w}-$$

$$-\frac{2}{\pi(w_1-\overline{w}_1)}\int\limits_{w_1}^{\overline{w}_1}\iint\limits_K \frac{\zeta(\overline{w}_1-\overline{w})(\rho(\zeta)-\rho(w))}{(1-\zeta\overline{w})(1-\zeta\overline{w}_1)}d\xi d\eta d\overline{w}_1+$$

$$+\frac{2(\overline{w}_1-\overline{w})}{\pi}\iint\limits_K \frac{\zeta(\rho(\zeta)-\rho(w))}{(1-\zeta\overline{w})(1-\zeta\overline{w}_1)}d\xi d\eta+\frac{1}{w-\overline{w}}\int\limits_{\overline{w}}^{w}(w-w_1)K(w,w_1)dw-$$

$$-\frac{1}{w_1-\overline{w}_1}\int\limits_{\overline{w}_1}^{w_1}(w_1-w)K(w,w_1)dw_1+(w_1-w)K(w,w_1).$$

Здесь

$$K(w,w_1)=\frac{a_1}{(1-w)(1-w_1)}-\frac{a_3}{(1+w)(1+w_1)}-\frac{a_2t_0}{(w-t_0)(w_1-t_0)}-$$

$$-\frac{a_2\overline{t}_0}{(w-\overline{t}_0)(w_1-\overline{t}_0)}.$$

Поступим аналогично, как при выводе оценки (33), а именно, двойные интегралы сведем к интегралам, оценки которых получены в работе [7]. Имеем

$$\|D\rho\|\le(2M_1+2M_2+8M_3+6M_4)\|\rho\|+4a_2+3|w-w_1|^{1-\mu}r_{w\cup w_1}^{\mu+1}|K(w,w_1)|. \tag{37}$$

При оценке последнего слагаемого возможны 2 случая:

1) если $|w-w_1|\le r_{w\cup w_1}$, то

$$3|w-w_1|^{1-\mu}r_{w\cup w_1}^{\mu+1}|K(w,w_1)|\le 3r_{w\cup w_1}^2\left(\frac{a_1}{|1-w||1-w_1|}+\frac{a_3}{|1+w||1+w_1|}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_2|t_0|}{|w-t_0||w_1-t_0|}+\frac{a_2|\overline{t}_0|}{|w-\overline{t}_0||w_1-\overline{t}_0|}\right)\le 3(a_1+a_3+2a_2)=12a_2,$$

т.к. $|w-t_*|\ge r_{w\cup w_1}$ $\forall w\in K$;

2) если $|w-w_1|\ge r_{w\cup w_1}$, то

$$3|w-w_1|^{1-\mu}r_{w\cup w_1}^{\mu+1}|K(w,w_1)|\le 3|w-w_1|r_{w\cup w_1}|K(w,w_1)|\le$$

$$\le 3r_{w\cup w_1}\left(\frac{a_1}{|1-w|}+\frac{a_1}{|1-w_1|}+\frac{a_3}{|1+w|}+\frac{a_3}{|1+w_1|}+\frac{a_2|t_0|}{|w-t_0|}+\frac{a_2|t_0|}{|w_1-t_0|}+\right.$$

$$+\frac{a_2|\bar t_0|}{|w-\bar t_0|}+\frac{a_2|\bar t_0|}{|w_1-\bar t_0|}\biggr)\le 6(a_1+a_3+2a_2)=24a_2.$$

Сравнивая результаты в обоих случаях, окончательно убеждаемся в том, что

$$3|w-w_1|^{1-\mu}r^{\mu+1}_{w\cup w_1}|K(w,w_1)|\le 24a_2.$$

Значит,

$$\|D\rho\|\le(2M_1+2M_2+8M_3+6M_4)\|\rho\|+28a_2. \tag{38}$$

Осталось оценить $\Phi_0'(w)$. Из (19), очевидно, что

$$|\Phi_0'(w)|\le\frac{a_1}{|1-w|}+\frac{a_3}{|1+\overline{w}|}+\frac{a_2|\bar t_0|}{|w-\bar t_0|}+\frac{a_2|t_0|}{|w-t_0|},$$

откуда с учетом (35) находим

$$|\Phi_0'(w)|\le\frac{4a_2}{r_w}. \tag{39}$$

Таким образом, из (23) получаем

$$|S\rho|\le\frac{\frac{|U\rho|}{|D\rho|}}{1+\sqrt{1+\left|\frac{U\rho}{D\rho}\right|^2}}|U\rho|+3|T_1\rho|+|\Phi_0'(w)|=|A\rho||U\rho|+3|T_1\rho|+|\Phi_0'(w)|.$$

Отсюда на основании неравенств (28), (31), (34) и (39) с учетом того, что оператор $A\rho$ является возрастающей функцией относительно $\frac{U\rho}{D\rho}$ и

$$|A\rho|\le q(M_1,M_3)\le q_0<1,$$

где $q(M_1,M_3)=\mathrm{const}$, имеем

$$|S\rho|\le\frac{q_0(M_1+M_3)+3M_3)}{r_w}\|\rho\|+\frac{4a_2}{r_w}. \tag{40}$$

Для фиксированных $M_1,\ M_3>0$ всегда найдется такое $\varepsilon=\varepsilon(M_1,M_3)>0$, что

$$(q_0(M_1+M_3)+M_3)\,\|\rho\|\le\alpha<1,\quad \text{если } \|\rho\|<\varepsilon(M_1,M_3).$$

Тогда, подчинив a_2 неравенству

$$a_2\le\frac{1-2\alpha}{4}, \tag{41}$$

получим

$$\|S\rho\|\le 1-\alpha. \tag{42}$$

Таким образом, оператор $S\rho$ переводит пространство $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$ в пространство $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, если a_2 удовлетворяет условию (41). Теорема доказана полностью.

Далее пусть θ — нулевой элемент пространства $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$. Так как

$$S\theta=-\overline{\Phi_0'(w)}, \tag{43}$$

то, используя оценку (39) и условие (41), для $S\theta$ будет выполнено неравенство

$$\|S\theta\|\le 1-2\alpha.$$

Для различных ρ_1 и $\rho_2 \in C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$ имеем

$$S\rho_1 - S\rho_2 = (\overline{U}\rho_1 - \overline{U}\rho_2)A\rho_2 + (U\rho_1 - U\rho_2)\overline{A}\rho_1 + T_1\rho_1 - T_1\rho_2 +$$
$$+\frac{\overline{A}\rho_1 A\rho_2\left(|D\rho_1|^2 - |D\rho_2|^2 + |U\rho_1|^2 - |U\rho_2|^2\right)}{\sqrt{(D\rho_1)^2 + |U\rho_1|^2} + \sqrt{(D\rho_2)^2 + |U\rho_2|^2}} - (2\overline{T_1\rho_1} - \overline{T_1\rho_2}).$$

Поскольку

$$||D\rho_1| - |D\rho_2|| \le |D\rho_1 - D\rho_2|\,,$$
$$||U\rho_1| - |U\rho_2|| \le |U\rho_1 - U\rho_2|$$

и, очевидно, что

$$\frac{|D\rho_1| + |D\rho_2|}{\sqrt{(D\rho_1)^2 + |U\rho_1|^2} + \sqrt{(D\rho_2)^2 + |U\rho_2|^2}} \le 1,$$
$$\frac{|U\rho_1| + |U\rho_2|}{\sqrt{(D\rho_1)^2 + |U\rho_1|^2} + \sqrt{(D\rho_2)^2 + |U\rho_2|^2}} \le 1,$$

то в силу однородности операторов $U\rho$, $D\rho$ и $T_1\rho$ относительно ρ, а также оценок (28), (31), (36) находим

$$|S\rho_1 - S\rho_2| \le \frac{q_1}{r_w}\|\rho_1 - \rho_2\|, \tag{44}$$

где

$$q_1 = (2q_0 + q_0^2)(M_1 + M_3) + q_0^2(2M_1 + 8M_3) + 3M_3.$$

Тогда, если $\|\rho_1 - \rho_2\| < \varepsilon(M_1, M_3)$, получим

$$\|S\rho_1 - S\rho_2\| < \alpha < 1.$$

При этих условиях согласно обобщенному принципу сжатых отображений [9] уравнение $\rho - S\rho = 0$ имеет единственное решение ρ из $C^{0,\mu}_{-1,0}(K)$, принадлежащее единичному шару.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При достаточно малом a_2, удовлетворяющем неравенству (41), СИУ имеет единственное решение, которое может быть найдено как предел последовательности*

$$\rho_{n+1} = S\rho_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем в качестве $\rho_0(w)$ можно выбрать любой элемент из шара $\|\rho\| < 1$.

Цитированная литература

1. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функции комплексного переменного. М., 1973. С.339–348.

2. **Гуревич М.И.** Теория струй идеальной жидкости. М., 1961. С.306–317.

3. **Антонцев С.Н.** // ДАН СССР. 1974. Т.216, №3. С.473–476.

4. **Данилюк И.И.** // СМЖ. 1963. №4. С.1271–1310.

5. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции. М., 1988.

6. **Волков Е.А.** // Труды МИАН СССР. 1972. Т.117. С.75–99.

7. **Кошкарова Б.С.** //Вестник КарГУ. 2002. №1(25), вып.1. С.60–69.

8. **Игликов А.** Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. Алматы, 1995.

9. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М., 1965.

Поступила в редакцию 16.01.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 45 – 53*

УДК 510.67

$\aleph_0$-КАТЕГОРИЧНОСТЬ И БИНАРНОСТЬ В СЛАБО O-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Б. Ш. Кулпешов

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 kbsh@ipic.kz

В настоящей работе мы доказываем некоторые свойства $\aleph_0$-категоричных бинарных слабо *о*-минимальных теорий. В частности, мы представляем описание $\aleph_0$-категоричных бинарных слабо *о*-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Повсюду в этой статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется в этих структурах как линейный порядок. Для произвольных подмножеств A, B структуры M мы пишем $A < B$, если $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Если $A \subset M$ и $x \in M$, то мы пишем $A < x$, если $A < \{x\}$. Для любого подмножества A структуры M $A^+ := \{b \in M \mid A < b\}$ и $A^- := \{b \in M \mid b < A\}$. Для произвольного полного 1-типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M.

Открытый интервал I в структуре M есть параметрически определимое подмножество структуры M вида $I = \{c \in M : M \models a < c < b\}$ для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$, где $a < b$. Аналогично мы можем определить *замкнутые, полуоткрытые-полузамкнутые* и т.п. интервалы в M, так что, например, произвольная точка структуры M является сама (тривиальным) замкнутым интервалом. Подмножество A структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$.

Данная статья касается понятия *слабой о-минимальности*, впервые введенного М. Дикманном в [1]. *Слабо о-минимальная структура* есть линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [2]. В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов. Очевидно, что о-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1. Здесь мы продолжаем исследования $\aleph_0$–категоричных слабо о-минимальных теорий,

Keywords: *Weakly o-minimal theory, $\aleph_0$-categoricity, binarity*
2000 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C35, 03C64

начатые в [3]–[4]. В [4] дано описание $\aleph_0$–категоричных почти о-минимальных теорий ранга выпуклости 1, из которого следует их бинарность. Заметим, что $\aleph_0$–категоричные бинарные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 1 не являются почти о-минимальными в общем случае (пример 1, [4]). В данной работе мы представляем описание $\aleph_0$–категоричных бинарных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 (Теорема 1).

А. Пиллэй и Ч. Стейнхорн доказали выполнимость Принципа Замены для алгебраического замыкания в произвольной о-минимальной структуре [5]. Данное свойство не выполняется в общем случае даже для $\aleph_0$–категоричной слабо о-минимальной теории (Пример 2). Здесь мы представляем критерий выполнимости Принципа Замены для алгебраического замыкания в $\aleph_0$–категоричных бинарных слабо о-минимальных теориях.

Определение 1. (Байжанов Б.С., [6]–[7]) *Пусть M — слабо о-минимальная структура, A, $B \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические.*

- *Будем говорить что тип p не является слабо ортогональным типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.*

- *Будем говорить что тип p не является почти ортогональным типу q ($p \not\perp^a q$), если существуют A-определимая формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $H(M,\alpha) \neq \emptyset$ и $\beta_1 < H(M,\alpha) < \beta_2$.*

Лемма 1. ([6], Следствие 34 (iii)) *$\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Определение 2. [2] *Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, $\phi(x,\bar{a})$, $\bar{a} \in M$ — произвольная формула с одной свободной переменной.*

Ранг выпуклости формулы $\phi(x,\bar{a})$ ($RC(\phi(x,\bar{a}))$) определяется следующим образом:
1) $RC(\phi(x,\bar{a})) = -1$, если $M \models \neg\exists x\phi(x,\bar{a})$;
2) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq 0$, если $M \models \exists x\phi(x,\bar{a})$;
3) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq 1$, если $\phi(M,\bar{a})$; бесконечно
4) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \alpha + 1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, такое, что существуют $b_i, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- *для любых $i, j \in \omega$ всякий раз, когда $i \neq j$, $M \models \neg E(b_i, b_j)$,*

- *для любого $i \in \omega$ $RC(E(x,b_i)) \geq \alpha$,*

- *для любого $i \in \omega$ $E(M,b_i)$ является выпуклым подмножеством множества $\phi(M,\bar{a})$;*

5) $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \delta$, если $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный ординал).

Если $RC(\phi(x,\bar{a})) = \alpha$ для некоторого α, мы говорим что $RC(\phi(x,\bar{a}))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x,\bar{a})) \geq \alpha$ для всех α) мы полагаем $RC(\phi(x,\bar{a})) = \infty$.

Пример 1. [8] Пусть Q^n — множество n-кортежей $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ рациональных чисел, упорядоченных лексикографически отношением $<$ так, что $x < y$, если существует $0 \leq i \leq n-1$, что $x_i < x_j$ и для всех $j < i$ $x_j = y_j$, и пусть E_i — отношение эквивалентности, определяемое следующим образом: $E_i(x,y) \Leftrightarrow x_j = y_j$ для всех $j < n - i$. Тогда для каждого i классы эквивалентности по E_i являются выпуклыми подмножествами множества Q^n. Более того, E_0 является отношением равенства, E_n — универсальным отношением и E_{i-1} разбивает каждый E_i-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых классов для каждого $i > 0$.

Очевидно, что $M = (Q^n; =, <, (E_i)_{0 \leq i \leq n})$ — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная структура и $RC(x = x) = n$. В [8] доказано что $\aleph_0$–категоричные 1-неразличимые слабо о-минимальные структуры описываются с точностью до бинарности Примером 1.

Лемма 2. ([4], Лемма 5) *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$–насыщена, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Предположим что существует $b \in p_1(M)$, что $dcl(A, b) \cap p_2(M) = \emptyset$. Тогда не существует A–определимой формулы $\Theta(x, y)$ такой, что $\Theta(M, b)$ выпукло и для некоторых $c_1, c_2 \in p_2(M)$ $c_1 < \Theta(M, b) < c_2$.*

Лемма 3. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, A — конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) $p_1 \not\perp^w p_2$;
(2) существует единственная A–определимая формула $R(x, y)$ такая, что для любого $a \in p_1(M)$ $R(a, M)$ — открытое выпуклое множество, $R(a, M) \subset p_2(M)$, $R(a, M)^- = p_2(M)^-$ и $g(x) := sup\, R(x, M)$ является строго монотонной на $p_1(M)$.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. В силу $\aleph_0$–категоричности T типы p_1, p_2 являются изолированными и, следовательно, существуют A–определимые выпуклые формулы U_1, U_2 такие, что $p_1(M) = U_1(M)$, $p_2(M) = U_2(M)$.
Случай 1. $p_1 \not\perp^a p_2$. В силу Следствия 1 ([4]) существует единственная A-определимая монотонная биекция $f : p_1(M) \to p_2(M)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$R(x, y) := y < f(x) \wedge U_2(y) \wedge U_1(x).$$

Очевидно что $R(x, y)$ удовлетворяет (2).
Случай 2. $p_1 \perp^a p_2$. Так как $p_1 \not\perp^w p_2$, то существуют A-определимая формула $H(x, y)$ и $\alpha \in p_1(M)$ такие, что $H(\alpha, M) \cap p_2(M) \neq \emptyset$ и $\neg H(\alpha, M) \cap p_2(M) \neq \emptyset$. Согласно Лемме 2 $[H(\alpha, M) \cap p_2(M)]^- = p_2(M)^-$ или $[H(\alpha, M) \cap p_2(M)]^+ = p_2(M)^+$. Предположим первое. Тогда рассмотрим следующую формулу

$$R(x, y) := H(x, y) \wedge U_2(y) \wedge U_1(x).$$

Согласно Факту 3 ([4]) $g(x) := \sup R(x, M)$ является строго монотонной на $p_1(M)$, т.е. $R(x, y)$ удовлетворяет (2). $(2) \Rightarrow (1)$ — очевидно.

Определение 3. *Пусть $A, B_1, \ldots, B_s \subseteq M$, где M — линейно упорядоченная структура.*

1. *Будем говорить, что $\{B_1, \ldots, B_s\}$ является слабо ортогональным над A, если каждый s–кортеж $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle \in B_1 \times \ldots \times B_s$ удовлетворяет одному и тому же типу над A.*

2. *Будем говорить, что $\{B_1, \ldots, B_s\}$ является ортогональным над A, если для любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$ каждый правильно упорядоченный $(n_1 + \ldots + n_s)$–кортеж*
$$\langle a_1^1, a_2^1, \ldots, a_1^{n_1}; \ldots; a_s^1, a_s^2, \ldots, a_s^{n_s} \rangle \in (B_1)^{n_1} \times \ldots \times (B_s)^{n_s}$$
удовлетворяет одному и тому же типу над A.

Факт 1. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1(M), p_2(M), \ldots, p_s(M)\}$ является ортогональным над A.*

Следующая теорема полностью характеризует $\aleph_0$–категоричные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 1, которые являются бинарными.

Теорема 1. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда существуют*
(i) конечное множество $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\emptyset$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty, +\infty$) такое, что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \leq n$ и для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$, либо $M \models \neg(\exists x) c_{j-1} < x < c_j$ либо $I_j = \{\ x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\ \}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j, \ldots, p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$ так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;
(ii) отношения эквивалентности $E_1,\ E_2 \subseteq (\{s : 1 \leq s \leq k\})^2$, где $\{p_s \mid s \leq k < \omega\}$ есть произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\emptyset$, такие, что

- *для каждого $(i,j) \in E_1$ существует единственная $\emptyset$–определимая монотонная биекция $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ так, что $f_{i,i} = id_{p_i(M)}$ и $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ для всех $(i,j),\ (j,k) \in E_1$;*
- *для каждого $(i,j) \in E_2$ существует единственная $\emptyset$–определимая формула $R_{i,j}(x,y)$ такая, что для любого $a \in p_i(M)$ $R_{i,j}(a,M) \subset p_j(M)$, $R_{i,j}(a,M)^- = p_j(M)^-$, $R_{i,j}(a,M)$ выпукло и открыто и $g_{i,j}(x) := sup\ R_{i,j}(x,M)$ является строго монотонной на $p_i(M)$;*
- *для каждого $(i,j) \in E_1$ мы имеем $(i,j) \in E_2$ и $R_{i,j}(x,y) \equiv y < f_{i,j}(x)$ так что T допускает элиминацию кванторов до языка $\{=,<\} \bigcup \{\underline{c}_i : i \leq n\} \bigcup \{\underline{U}_s : s \leq k\} \bigcup \{\underline{f}_{i,j} : (i,j) \in E_1\} \bigcup \{\underline{R}_{i,j} : (i,j) \in E_2 \setminus E_1\}$, где $\underline{c}_i$ интерпретируются в M посредством c_i, $\underline{U}_s$ — посредством $p_s(M)$, $\underline{f}_{i,j}$ — посредством $f_{i,j}$ для $(i,j) \in E_1$, $\underline{R}_{i,j}$ — посредством $R_{i,j}$ для $(i,j) \in E_2 \setminus E_1$.*

Более того, любому упорядочению с выделенными элементами, как в (i), и любым подходящим отношениям эквивалентности E_1, E_2, как в (ii), соответствует $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, как выше.

Доказательство. (i) Пусть $C = \{c \in M : c$ является $\emptyset$–определимым в $M\}$. В силу $\aleph_0$–категоричности T C должно быть конечным. Пусть C ($\cup\{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов) перечислено в следующем виде: $\{\ c_0, \ldots, c_n\ \}$.
Далее предположим, что $I_j = \{x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\} \neq \emptyset$. Тогда I_j должно быть плотным без концевых точек. Если I_j является полным над $\emptyset$, то существует $p^j \in S_1(\emptyset)$ такой, что $I_j = p^j(M)$, т.е. $k_j = 1$. Если I_j не является полным над $\emptyset$, то в силу $\aleph_0$–категоричности существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j, \ldots, p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$ так, что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$.
(ii) Пусть $\{p_s \mid s \leq k < \omega\}$ — произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\emptyset$. В силу $\aleph_0$–категоричности теории T p_s является изолированным и пусть $U_s(x)$ определяет тип p_s для каждого $s \leq k$. Пусть $E_1 = \{(i,j) : p_i \not\perp^a p_j, 1 \leq i,j \leq k\}$. Очевидно, что E_1 является отношением эквивалентности и лемма 4 ([4]) гарантирует единственность и композиционные утверждения о биекциях. Пусть $E_2 = \{(i,j) : p_i \not\perp^w p_j, 1 \leq i,j \leq k\}$. В силу леммы 1 E_2 является отношением эквивалентности. Остается только проверить, что теория T допускает утверждаемую элиминацию кванторов. Мы докажем, что полный тип любого m-кортежа $(a_1, \ldots, a_m)$ элементов модели M определяется формулой Ψ, состоящей из конъюнкции всех предложений и отрицательных предложений формул вида $x = y, x < y$, $\underline{c}_i < x$, $x < \underline{c}_i$, $\underline{U}_s(x)$, $y = \underline{f}_{i,j}(x)$, $y < \underline{f}_{i,j}(x)$, $\underline{f}_{i,j}(x) < y$ и $\underline{R}_{i,j}(x,y)$, которые имеют место на координатах кортежа $(a_1, \ldots, a_m)$.

Случай 1 ($m = 1$). Очевидно.
Случай 2 ($m = 2$). Возможными являются только следующие ситуации:
(a) $a_1, a_2 \in C$;
(b) $a_1 \in C, a_2 \in p_s(M)$ для некоторого $s \leq k$;
(c) $a_1, a_2 \in p_s(M)$ для некоторого $s \leq k$;
(d) $a_1 \in p_{s_1}(M), a_2 \in p_{s_2}(M), p_{s_1} \perp^w p_{s_2}$ для некоторых $s_1, s_2 \leq k$;
(e) $a_1 \in p_{s_1}(M), a_2 \in p_{s_2}(M), p_{s_1} \not\perp^a p_{s_2}$ для некоторых $s_1, s_2 \leq k$;
(f) $a_1 \in p_{s_1}(M), a_2 \in p_{s_2}(M), p_{s_1} \perp^a p_{s_2}, p_{s_1} \not\perp^w p_{s_2}$ для некоторых $s_1, s_2 \leq k$.
(a), (b) — очевидно.
(c) в силу неразличимости множества $p_s(M)$.
(d) в силу следствия 2 ([4]).
(e) в силу следствия 1 ([4]) существует единственная $\emptyset$–определимая монотонная биекция $f : p_{s_1}(M) \to p_{s_2}(M)$. Не умаляя общности, предположим, что f является возрастающей и $a_2 < f(a_1)$. Пусть $a_0 := f(a_2)$. Тогда $a_0 < a_1$. Рассмотрим следующую формулу

$$\psi(x_1, x_2) := U_{s_1}(x_1) \wedge U_{s_2}(x_2) \wedge x_2 < f(x_1).$$

Мы утверждаем, что ψ определяет полный тип кортежа (a_1, a_2). Действительно, пусть (b_1, b_2) — произвольный кортеж элементов модели M так, что $\psi(b_1, b_2)$ имеет место и пусть $b_0 := f^{-1}(b_2)$. Рассмотрим произвольную формулу $\phi(x_1, x_2)$ такую, что выполняется $\phi(a_1, a_2)$. Мы имеем

$$M \models \exists! x[x = f(a_0) \wedge U_{s_2}(x) \wedge x < f(a_1) \wedge \phi(a_1, x)].$$

В силу неразличимости множества $p_{s_1}(M)$ данная формула выполняется на кортеже (b_0, b_1) и, следовательно имеет место $\phi(b_1, b_2)$.
(f) В силу леммы 3 существует единственная $\emptyset$–определимая формула $R(x, y)$ такая, что для любого $a \in p_{s_1}(M)$ $R(a, M)$ выпукло и открыто, $R(a, M) \subset p_{s_2}(M)$, $R(a, M)^- = p_{s_2}(M)^-$. Не умаляя общности, предположим, что $R(a_1, a_2)$ имеет место. Рассмотрим следующую формулу

$$\psi(x_1, x_2) := U_{s_1}(x_1) \wedge U_{s_2}(x_2) \wedge R(x_1, x_2).$$

Мы утверждаем, что ψ определяет полный тип кортежа (a_1, a_2). Действительно, пусть (b_1, b_2) — произвольный кортеж элементов модели M такой, что выполняется $\psi(b_1, b_2)$. Рассмотрим произвольную формулу $\phi(x_1, x_2)$ так, что имеет место $\phi(a_1, a_2)$. Пусть $\phi'(a_1, x) := \phi(a_1, x) \wedge U_{s_2}(x)$. Так как $p_{s_1} \perp^a p_{s_2}$, то по лемме 2 $\phi'(a_1, M) = R(a_1, M)$. Если бы это не было истинно, то существовала бы формула $\Theta(x, y)$ (либо $R(x, y) \wedge \phi'(x, y)$, либо $R(x, y) \wedge \phi'(x, y)$) такая, что $c_1 < \Theta(a_1, M) < c_2$ для некоторых $c_1, c_2 \in p_{s_2}(M)$, противоречащая лемме 2. Поэтому имеет место $\phi'(b_1, b_2)$ и, следовательно, $\phi(b_1, b_2)$.
Общий случай. Согласно случаю 2 для любой пары (a_i, a_j) элементов кортежа $(a_1, \ldots, a_m)$ существует формула $\psi_{i,j}(x, y)$, которая определяет полный тип кортежа (a_i, a_j). В силу бинарности теории T формула $\psi(x_1, \ldots, x_m) := \wedge_{1 \leq i,j \leq m} \psi_{i,j}(x_i, x_j)$ определяет полный тип кортежа $(a_1, \ldots, a_m)$.

Лемма 4. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$–насыщена, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Предположим, что $E(x, y)$ — A–определимое нетривиальное отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на выпуклые классы. Тогда индуцированный порядок на E–классах является плотным порядком без концевых точек.*

Доказательство. Вначале покажем, что не существует крайнего левого E–класса, содержащегося в $p(M)$. По предположению существуют элементы $\alpha, \beta \in p(M)$ такие, что $\alpha < \beta$

и $\neg E(\alpha,\beta)$. Так как все элементы множества $p(M)$ имеют такой же тип как элемент β над A, мы имеем: для любого элемента $\beta' \in p(M)$ существует $\alpha' \in p(M)$ такой, что $\alpha' < \beta'$ и $\neg E(\alpha',\beta')$. Поэтому не существует наименьшего E–класса в $p(M)$. Мы также можем показать, что не существует крайнего правого E–класса. Таким образом, E разбивает $p(M)$ на бесконечное число классов. Теперь рассмотрим следующую формулу

$$\Phi(x) := \exists z[\neg E(z,x) \wedge x < z \wedge \forall t(x < t < z \rightarrow E(x,t) \vee E(z,t))].$$

Если $\Phi(x) \in p$, тогда E–классы плотно упорядочены. В противном случае E–классы являются дискретно упорядоченными, что противоречит $\aleph_0$–категоричности T. $\square$

Ф а к т 2. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщена, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Предположим, что $E_1(x,y), E_2(x,y)$ — A–определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p(M)$ на выпуклые классы, причем существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $E_1(M,\alpha) \subset E_2(M,\alpha)$. Тогда E_1 делит каждый E_2-класс на бесконечное число E_1-классов, причем E_1-подклассы каждого E_2-класса плотно упорядочены без концевых точек.*

Л е м м а 5. *Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщена, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Предположим, что $E_1(x,y), E_2(x,y)$ — A-определимые нетривиальные отношения эквивалентности, разбивающие $p(M)$ на выпуклые классы. Тогда либо $E_1 \equiv E_2$, либо для любого $\alpha \in p(M)$ $E_1(M,\alpha) \subset E_2(M,\alpha)$, либо для любого $\alpha \in p(M)$ $E_2(M,\alpha) \subset E_1(M,\alpha)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим, что $E_1 \not\equiv E_2$. Допустим противное: существуют $\alpha \in p(M)$, β_1, $\beta_2 \in q(M)$ такие, что

$$\beta_1 < \alpha < \beta_2, \beta_1 \in E_1(M,\alpha) \setminus E_2(M,\alpha), \beta_2 \in E_2(M,\alpha) \setminus E_1(M,\alpha).$$

Рассмотрим $f \in Aut_A(M)$ такой, что $f(\beta_1) = \alpha$. Так как $\beta_1 < \alpha$, то $f(\beta_1) < f(\alpha)$, т.е. $\alpha < f(\alpha)$. Так как $M \models E_1(\beta_1,\alpha)$, то $M \models E_1(\alpha, f(\alpha))$ и, следовательно в силу транзитивности отношения E_1 мы имеем что $M \models E_1(\beta_1, f(\alpha))$.
Так как $M \models \neg E_2(\beta_1,\alpha)$, то $M \models \neg E_2(\alpha, f(\alpha))$ и, следовательно $f(\alpha) > E_2(M,\alpha)$, т.е. $f(\alpha) > \beta_2$. Таким образом, мы имеем

$$\beta_1 < \beta_2 < f(\alpha) \text{ и } M \models \neg E_1(\beta_1,\beta_2) \wedge E_1(\beta_1, f(\alpha)).$$

Последнее противоречит выпуклости E_1-класса.

Л е м м а 6. ([4], лемма 2) *Пусть M — линейно упорядоченная структура, $Th(M)$ — $\aleph_0$–категорична, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщена, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда существует не более одной A–определимой биекции $p(M)$ на $q(M)$.*

Л е м м а 7. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T, p, q \in S_1(\emptyset)$. Тогда существует не более одного $\emptyset$-определимого отображения $p(M)$ на $q(M)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Заметим, что если f — произвольное $\emptyset$-определимое отображение $p(M)$ на $q(M)$, то f либо биекция, либо локально константа.
Предположим, что существуют две различные $\emptyset$-определимые функции f и g, отображающие $p(M)$ на $q(M)$. По лемме 6 f и g не могут одновременно являться биективными отображениями. Поэтому достаточно рассмотреть следующие случаи:
(a) f — биекция, g — локально константа;
(b) f и g — локально константы.

(a) Рассматривая gf^{-1}, получим, что для некоторого $\beta \in q(M)$ $dcl(\beta)$ является бесконечным, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T.
(b) Пусть $U_p(x), U_q(x)$ — $\emptyset$–определимые формулы такие, что $U_p(M) = p(M), U_q(M) = q(M)$. Рассмотрим следующие формулы

$$E_f(x,y) := \exists z[U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge U_q(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z]$$

$$E_g(x,y) := \exists z[U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge U_q(z) \wedge g(x) = z \wedge g(y) = z]$$

Очевидно, что E_f и E_g — нетривиальные отношения эквивалентности, разбивающие $p(M)$ на выпуклые классы. Согласно лемме 5 либо $E_f \subseteq E_g$, либо $E_g \subseteq E_f$. Предположим первое. Так как $f \neq g$, то для некоторого $\alpha \in p(M)$ $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Предположим, что $f(\alpha) < g(\alpha)$. Пусть $\beta_1 := f(\alpha), \beta_2 := g(\alpha)$. Рассмотрим следующую формулу

$$\Phi(x, \beta_1) := \exists y[\ f(y) = \beta_1 \wedge g(y) = x\ ].$$

Ясно, что $M \models \exists! x[x > \beta_1 \wedge \Phi(x, \beta_1)] \wedge \Phi(\beta_2, \beta_1)$, т.е. $\beta_2 \in dcl(\beta_1)$. Нетрудно понять, что $dcl(\beta_1)$ является бесконечным, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T.

Лемма 8. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория. Тогда T имеет конечный ранг выпуклости.*

Доказательство. Допустим противное: существуют модель M теории N и M–определимая формула $\phi(x)$ такие, что $RC(\phi(x)) \geq \omega$. Согласно определению формулы существует конечное множество $A \subseteq M$ такое, что $\phi(x)$ определима над A. В силу $\aleph_0$–категоричности T существует лишь конечное число неалгебраических 1-типов над A и все они являются изолированными. Тогда существуют неалгебраический $p \in S_1(A)$ и A–определимая формула $U(x)$ так, что $p(M) = U(M)$ и $RC(U) \geq \omega$. Следовательно, существует бесконечное семейство $\{E_i(x,y) | i < \omega\}$ M–определимых отношений эквивалентности, разбивающих $U(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов так, что для любых $i_1 < i_2 < \omega$ $E_{i_1}(a, M) \subset E_{i_2}(a, M)$ для любого $a \in p(M)$. В силу бинарности T можно считать, что каждое отношение эквивалентности E_i является $\emptyset$-определимым. Тогда получим бесконечное число попарно неэквивалентных $\emptyset$-определимых 2-формул, что противоречит $\aleph_0$–категоричности T.

Определение 4. *Пусть M — линейно упорядоченная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$. Рангом выпуклости типа p будем называть инфимум множества $\{RC(\phi(x)) | \phi(x) \in p\}$ и обозначать через $RC(p)$, т.е.*

$$RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) | \phi(x) \in p\}.$$

Лемма 9. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$. Предположим, что существует $\emptyset$-определимое отображение $f : p(M) \to q(M)$. Тогда f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, если и только если $RC(p) = RC(q)$.*

Доказательство. Пусть $U_p(x), U_q(x)$ — $\emptyset$–определимые формулы такие, что

$$U_p(M) = p(M),\ U_q(M) = q(M).$$

($\Rightarrow$) Предположим, что f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$. Пусть $RC(p) = n$. Тогда существует $n-1$ нетривиальные $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x,y), \ldots, E_{n-1}(x,y)$ такие, что для любого $a \in p(M)$

$$E_1(a, M) \subset E_2(a, M) \subset \ldots \subset E_{n-1}(a, M)$$

и для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ E_{i+1} является непосредственным последователем E_i среди всех $\emptyset$-определимых отношений эквивалентности.
Для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ рассмотрим следующую формулу

$$\varepsilon_i(x, y) := \exists t \exists z [U_p(t) \wedge U_p(z) \wedge U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge f(t) = y \wedge E_i(t, z) \wedge f(z) = x].$$

Нетрудно понять, что для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ε_i является нетривиальным отношением эквивалентности и $\varepsilon_1 \subset \ldots \subset \varepsilon_{n-1}$. Следовательно, $RC(q) \geq n$. Допустим противное: $RC(q) > n$. Тогда существует нетривиальное $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $\varepsilon'(x, y)$, отличное от $\varepsilon_i(x, y)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Возможными являются следующие ситуации:
(a) $\varepsilon' \subset \varepsilon_1$;
(b) для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ $\varepsilon_k \subset \varepsilon' \subset \varepsilon_{k+1}$;
(c) $\varepsilon_{n-1} \subset \varepsilon'$.
Рассмотрим следующую формулу

$$E(x, y) := \exists t \exists z [U_q(t) \wedge U_q(z) \wedge U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge f(y) = t \wedge \varepsilon'(t, z) \wedge f(x) = z].$$

Ясно, что E является нетривиальным отношением эквивалентности. Тогда в случае (a) мы имеем, что $E \subset E_1$, в случае (b) — $E_k \subset E \subset E_{k+1}$, в случае (c) — $E_{n-1} \subset E$, т.е. во всех случаях приходим к противоречию.
($\Leftarrow$) Допустим противное: f не является биекцией между $p(M)$ и $q(M)$. Тогда f — локально константа на $p(M)$. Пусть $RC(p) = n$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда существует $n-1$ нетривиальных $\emptyset$-определимых отношений эквивалентности $E_1(x, y), \ldots, E_{n-1}(x, y)$ таких, что $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1}$ и для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ E_{j+1} является непосредственным последователем E_j, причем $E_f = E_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, где

$$E_f(x, y) := \exists z [U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge U_q(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z].$$

Для каждого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ рассмотрим следующую формулу:

$$\varepsilon_j(x, y) := \exists t \exists z [U_p(t) \wedge U_p(z) \wedge U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge f(t) = y \wedge E_j(t, z) \wedge f(z) = x].$$

Нетрудно понять, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i$ и являются тривиальными отношениями эквивалентности.
Утверждаем, что $RC(q) = n - i$, т.е. $RC(q) < RC(p)$. Действительно, если существует какое-либо нетривиальное $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности ε', то возможны следующие случаи:
(a) $\varepsilon' \subset \varepsilon_{i+1}$;
(b) для некоторого $k \in \{i+1, i+2, \ldots, n-2\}$ $\varepsilon_k \subset \varepsilon' \subset \varepsilon_{k+1}$;
(c) $\varepsilon_{n-1} \subset \varepsilon'$.
Пусть

$$E'(x, y) := \exists t \exists z [U_q(t) \wedge U_q(z) \wedge U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge f(y) = t \wedge \varepsilon'(t, z) \wedge f(x) = z].$$

Тогда в случае (a) мы имеем, что $E_i \subset E' \subset E_{i+1}$, в случае (b) — $E_k \subset E' \subset E_{k+1}$, в случае (c) — $E_{n-1} \subset E'$, т.е. во всех случаях мы приходим к противоречию. Таким образом, $RC(q) < RC(p)$, что противоречит условию леммы.

Пример 2. [9] Пусть $M = \langle M, <, P^1, f^1 \rangle$. Здесь P есть унарный предикат и f — унарная функция с $Dom(f) = \neg P$, $Ran(f) = P$. Универсум структуры M есть непересекающееся объединение P и $\neg P$, где $x < y$ всякий раз, когда $x \in P$ и $y \in \neg P$. Для того, чтобы определить f, отождествим P с Q (где Q есть порядок рациональных чисел) и $\neg P$ с $Q \times Q$ (которое упорядочено лексикографически) и для любых $m, n \in Q$ пусть $f(m, n) = n$.

Очевидно, что $Th(M)$ — $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория и Принцип Замены для алгебраического замыкания не имеет места в M.

Теорема 2. *Пусть T — $\aleph_0$–категоричная бинарная слабо о-минимальная теория, $M \models T$. Тогда следующие условия эквивалентны*
(1) Принцип Замены для алгебраического замыкания имеет место в M.
(2) Для любых $p, q \in S_1(\emptyset)$ всякий раз, когда существует $\emptyset$–определимое отображение $p(M)$ на $q(M)$, мы имеем, что $RC(p) = RC(q)$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$ (2). Если $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические (для алгебраических типов доказательство очевидно) и g — $\emptyset$-определимая функция, отображающая $p(M)$ на $q(M)$, то для любого $\alpha \in p(M)$ существует $\beta \in q(M)$ такой, что $\beta \in dcl(\alpha)$. Так как имеет место Принцип Замены для алгебраического замыкания, то $\alpha \in dcl(\beta)$. Тогда в силу леммы 7 g является биекцией и, следовательно, в силу леммы 9 $RC(p) = RC(q)$.
(2)$\Rightarrow$ (1). Допустим противное: Принцип Замены для алгебраического замыкания не имеет места в M. Тогда существуют $a, b, \bar{c} \in M$ такие, что $b \in dcl(a, \bar{c}) \setminus dcl(\bar{c})$ и $a \notin dcl(b, \bar{c})$. В силу бинарности T $b \in dcl(a) \setminus dcl(\emptyset)$. Пусть $p(x) := tp(a/\emptyset), q(y) := tp(b/\emptyset)$. Ясно, что типы p и q — неалгебраические. Также ясно, что $p \neq q$, так как иначе $dcl(a)$ является бесконечным, что противоречит $\aleph_0$-категоричности T. Таким образом, существует $\emptyset$-определимая функция, отображающая $p(M)$ на $q(M)$ и не являющаяся биекцией. Тогда по лемме 9 $RC(p) > RC(q)$, что противоречит условию теоремы.

Цитированная литература

1. **Dickmann M.A.** Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // Proceedings of the 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris. Berlin, 1985.

2. **Kulpeshov B.Sh.** // The Journal of Symbolic Logic. 1998. № 63 P. 1511–1528.

3. **Kulpeshov B.Sh.** // Поиск. Серия естественно-технических наук. 2002. № 3. С. 151–158.

4. **Кулпешов Б.Ш.** // Математический журнал. 2002. Т. 2, № 4. С. 54–61.

5. **Pillay A., Steinhorn Ch.** // Transactions of The American Mathematical Society. 1986. № 295 P. 565–592.

6. **Baizhanov B.S.** // The Journal of Symbolic Logic. 2001. № 66 P.1382–1414.

7. **Baizhanov B.S.** // Algebra and Model Theory. II. Novosibirsk State Technical University. 1999. P. 3–28.

8. **Herwig B., Macpherson H.D., Martin G., Nurtazin A., Truss J.K.** // Annals of Pure and Applied Logic. 2000. № 101 P.65–93.

9. **Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch.** // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. № 352 P.5435–5483.

Поступила в редакцию 18.07.2003 г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 54 — 58*

УДК 517.946

РЕШЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С ТРИНАДЦАТОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский гос.университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе ул. А.Молдагуловой, 34 tasmam@rambler.ru, Jubanov@nursat.kz

Изучаются частные случаи одной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, связанные с тринадцатой нормальной формой допустимых систем. Решения найдены в виде ортогональных многочленов Эрмита и Лагерра двух переменных.

Изучаются частные случаи системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} &\left(a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \cdot x\right) \cdot Z_{xx} + \left(a_{00}^{(1)} + a_{10}^{(1)} \cdot x\right) \cdot Z_x + b_{01}^{(3)} \cdot y \cdot Z_y + a_{00}^{(2)} \cdot Z = 0, \\ &\left(b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)} \cdot y\right) \cdot Z_{yy} + a_{10}^{(3)} \cdot x \cdot Z_x + \left(b_{00}^{(3)} + b_{01}^{(2)} \cdot y\right) \cdot Z_y + b_{00}^{(2)} \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{j0}^{(i)}, b_{0j}^{(i)} (i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1)$ – некоторые постоянные, связанные с тринадцатой нормальной формой [1], решениями которой являются ортогональные многочлены двух переменных. Тринадцатой нормальной формой называется уравнение в частных производных второго порядка вида

$$Z_{xx} + \ Z_{xy} + (B \cdot x + d_{00}) \cdot Z_x + (B \cdot y + g_{00}) \cdot Z_y = n \cdot B \cdot Z, \tag{2}$$

B, d_{00}, g_{00} иn — некоторые постоянные.

Основные определения и простейшие свойства ортогональных многочленов двух переменных были рассмотрены в работах Ш.Эрмита, П.Аппеля, Г.Орлова, Д.Джексона и др. Г.Кролл, И.Шеффер, Г.Энгелис, Т.Корвиндер, П.К.Суетин большое внимание уделяли связам ортогональных многочленов двух переменных с дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка вида (2), где ортогональные многочлены определяются как собственные функции этих уравнений. Несмотря на данные исследования, до сих пор малоизученными остаются многие свойства ортогональных многочленов по двум переменным, особенно их связь с системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида (1).

Keywords: *solution, permissible system, normal form, orthogonal polynomials*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20, 35A25, 35C05

Однако во многих случаях лучше изучать такие уравнения в виде системы (1). Это позволяет разносторонне изучить решения систем и установить отдельные их свойства.

Особые кривые системы (1) определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy} $\left(-\frac{a_{00}^{(0)}}{a_{10}^{(0)}};-\frac{b_{00}^{(0)}}{b_{01}^{(0)}}\right)$, $\left(-\frac{a_{00}^{(0)}}{a_{10}^{(0)}};\infty\right)$, $\left(\infty;-\frac{b_{00}^{(0)}}{b_{01}^{(0)}}\right)$ и $(\infty;\infty)$. Здесь можно выделить три важных частных случая системы (1), которые получаются при следующих значениях коэффициентов:

1) $a_{00}^{(0)}=0, b_{00}^{(0)}=0$ — система типа Лагерра;

2) $a_{00}^{(0)}=0, a_{10}^{(0)}\neq 0;\ b_{00}^{(0)}\neq 0, b_{01}^{(0)}=0$ или $a_{00}^{(0)}\neq 0, a_{10}^{(0)}=0;\ b_{00}^{(0)}=0, b_{01}^{(0)}\neq 0$ — системы типа Лагерра-Эрмита;

3) $a_{00}^{(0)}\neq 0, a_{10}^{(0)}=0;\ b_{00}^{(0)}\neq 0, b_{01}^{(0)}=0$ — система типа Эрмита.

Тринадцатая нормальная форма связана с системой типа Эрмита:

$$\left.\begin{array}{l} a_{00}^{(0)}\cdot Z_{xx}+\left(a_{00}^{(1)}+a_{10}^{(1)}\cdot x\right)\cdot Z_x+b_{01}^{(3)}\cdot y\cdot Z_y+a_{00}^{(2)}\cdot Z=0,\\ b_{00}^{(0)}\cdot Z_{yy}+a_{10}^{(3)}\cdot x\cdot Z_x+\left(b_{00}^{(1)}+b_{01}^{(1)}\cdot y\right)\cdot Z_y+b_{00}^{(2)}\cdot Z=0. \end{array}\right\}$$

В данной работе методом Фробениуса-Латышевой изучаются несколько частных случаев системы (1), где устанавливаются возможности построения решения в виде специальных функций или ортогональных многочленов двух переменных.

I. Наиболее общим и важным частным случаем системы (1) является система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{array}{l} Z_{xx}+a\cdot x\cdot Z_x+(B-b)\cdot y\cdot Z_y+n\cdot Z=0,\\ Z_{yy}+(B-a)\cdot x\cdot Z_x+b\cdot y\cdot Z_y+m\cdot Z=0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где $a,\ b,\ B,\ n$ и m — некоторые постоянные; $Z=Z(x,y)$ — общая неизвестная. Требуется найти $z(x,y)$ в виде специальных функций или ортогональных многочленов двух переменных.

Коэффициенты при старших производных Z_{xx} и Z_{yy} равны единице, поэтому неизвестную $Z(x,y)$ можно искать в виде простого степенного ряда двух переменных

$$Z(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\,(C_{0,0}\neq 0)\,. \tag{4}$$

Учитывая то, что общее решение системы вида (1) зависит от четырех произвольных постоянных, неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,\ 1,\ 2,...)$ определим из следующих рекуррентных систем:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{l} 2\cdot C_{20}+n\cdot C_{00}=0,\\ 2\cdot C_{02}+m\cdot C_{00}=0, \end{array}\right\}\\[2ex] \left.\begin{array}{l} 6\cdot C_{30}+(a+n)\cdot C_{10}=0,\\ 2\cdot C_{12}+(B-a+m)\cdot C_{10}=0, \end{array}\right\}\\[2ex] \left.\begin{array}{l} 2\cdot C_{12}+(B-b+n)\cdot C_{01}=0,\\ 6\cdot C_{03}+(b+m)\cdot C_{01}=0, \end{array}\right\}\\[2ex] \left.\begin{array}{l} 6\cdot C_{31}+(a+B-b+n)\cdot C_{11}=0,\\ 6\cdot C_{13}+(B-a+b+m)\cdot C_{11}=0, \end{array}\right\}\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \end{array} \tag{5}$$

где $C_{0,0}$, $C_{1,0}$, $C_{0,1}$ и C_{11} принимаются в качестве произвольных постоянных. Тогда общее решение имеет вид

$$Z(x,y) = C_{0,0} + C_{1,0}\cdot x + C_{0,1}\cdot y + C_{1,1}\cdot xy - \Big(\frac{n}{2!}\cdot x^2\cdot C_{0,0} + \frac{m}{2!}\cdot y^2\cdot C_{0,0} +$$

$$+\frac{B-a+m}{2!}\cdot xy^2\cdot C_{10} + \frac{B-b+n}{2!}\cdot x^2y\cdot C_{01} + \frac{a+n}{3!}\cdot x^3\cdot C_{10} + \frac{b+m}{3!}\times$$

$$\times y^3\cdot C_{01} + ...\Big) = C_{0,0}\cdot\left(1-\frac{n}{2!}\cdot x^2 - \frac{m}{2!}\cdot y^2 - ...\right) + C_{1,0}\cdot\left(x - \frac{B-a+m}{2!}\cdot xy^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{a+n}{3!}\cdot x^3 - ...\right) + C_{0,1}\cdot\left(y - \frac{B-b+n}{2!}\cdot x^2y - \frac{b+m}{3!}\cdot y^3 - ...\right) +$$

$$+C_{1,1}\cdot\left(xy - \frac{a+B-b+n}{3!}\cdot x^3y - \frac{B-a+b+m}{3!}\cdot xy^3 - ...\right) = C_{0,0}\cdot\left(1-\frac{n}{2!}\cdot x^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{m}{2!}\cdot y^2 - ...\right) + C_{1,0}\cdot x\cdot\left(1 - \frac{B-a+m}{2!}\cdot y^2 - \frac{a+n}{3!}\cdot x^2 - ...\right) + C_{0,1}\cdot y\times$$

$$\times\left(1-\frac{B-b+n}{2!}\cdot x^2 - \frac{b+m}{3!}\cdot y^2 - ...\right) + C_{1,1}\cdot xy\cdot\left(1 - \frac{a+B-b+n}{3!}\cdot x^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{B-a+b+m}{3!}\cdot y^2 - ...\right).$$

Отсюда видно, что заданная система (3) имеет четыре линейно-независимых решения

$$\begin{aligned} Z_1(x,y) &= 1 - \frac{n}{2!}\cdot x^2 - \frac{m}{2!}\cdot y^2 + \frac{n(2a+n)}{4!}\cdot x^4 + ..., \\ Z_2(x,y) &= x\cdot\left(1-\frac{B-a+m}{2!}\cdot y^2 - \frac{a+n}{3!}\cdot x^2 - ...\right), \\ Z_3(x,y) &= y\cdot\left(1-\frac{B-b+n}{2!}\cdot x^2 - \frac{b+m}{3!}\cdot y^2 - ...\right), \\ Z_4(x,y) &= xy\cdot\left(1-\frac{a+B-b+n}{3!}\cdot x^2 - \frac{B-a+b+m}{3!}\cdot y^2 - ...\right) \end{aligned} \tag{6}$$

и общее решение принимает вид

$$Z(x,y) = C_{0,0}\cdot Z_1(x,y) + C_{1,0}\cdot Z_2(x,y) + C_{0,1}\cdot Z_3(x,y) + C_{1,1}\cdot Z_4(x,y). \tag{7}$$

Система (3) относится к типу промежуточной системы Вильчинского. Поэтому для нее всегда выполняется условие интегрируемости и легко проверить, что выполняется условие совместности. Согласно общей теории [2], такая система имеет четыре линейно-независимых решения вида (6).

Складывая два уравнения системы (3) получим одно уравнение

$$Z_{xx} + Z_{xy} + B\cdot x\cdot Z_x + B\cdot y\cdot Z_y + (n+m)\cdot Z = 0, \tag{8}$$

относящееся также к тринадцатой нормальной форме вида (2).

II. Пусть в системе (3) постоянные B, a, b, n и m удовлетворяют условиям: $B = a, B = b, B = a = b = -2,\ h = 2k, m = 2l$ и $n_1 \geq 0, m_1 \geq 0$ – целые числа. Тогда из (3) получим систему:

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} - 2x\cdot Z_x + 2k\cdot Z = 0, \\ Z_{yy} - 2y\cdot Z_y + 2l\cdot Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Складывая два уравнения системы (9) получим так называемое нормальное уравнение Эрмита вида

$$Z_{xx} + Z_{xy} - 2x \cdot Z_x - 2y \cdot Z_y + 2(k+l) \cdot Z = 0. \tag{10}$$

Доказано [1], что решениями этого уравнения являются произведения многочленов Эрмита относительно x и y, то есть

$$F_{n+m,m}(x,y) = H_n(x) \cdot H_m(y). \tag{11}$$

Действительно, рассматривая каждое из уравнений системы (9) как обыкновенное дифференциальное уравнение и опираясь на известные результаты аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, заключаем [3], что при целых значениях $k \geq 0$ и $l \geq 0$ каждому уравнению системы (9) удовлетворяют два полинома — полином Лагерра (при нечетном m умноженный на x) и полином Эрмита, которые могут отличаться друг от друга только постоянным множителем:

$$H_{2k}(x) = C_{n1} \cdot L^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2);\ H_{2k+1}(x) = C'_{n1} \cdot L^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2);$$

$$H_{2l}(y) = C_{n2} \cdot L^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(y^2);\ H_{2l+1}(x) = C'_{n2} \cdot L^{\left(\frac{1}{2}\right)}(y^2).$$

Эти полиномы являются решениями каждого из уравнений системы (9), а их произведения дают решения вида (11).

Линейно-независимые частные решения системы (9) можно найти и из (6), непосредственно подставляя значения постоянных a, b, B, n и m. Так, первое частное решение $Z_1(x,y)$ представимо в виде

$$Z_1(x,y) = 1 - \frac{2k}{2!} \cdot x^2 - \frac{2l}{2!} \cdot y^2 + \frac{2k(2k-2\cdot 2)}{4!} \cdot x^4 + \frac{2k}{2!} \cdot \frac{2l}{2!} \cdot x^2 \cdot y^2 +$$

$$+ ... = \left(1 - \frac{2k}{2!} \cdot x^2 + \frac{2^2 \cdot k \cdot (k-2)}{4!} \cdot x^4 + ...\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2l}{2!} \cdot y^2 + \frac{2^2 \cdot l \cdot (l-2)}{4!} \cdot y^4 + ...\right) = H_{2k}(x) \cdot H_{2l}(y),$$

то есть решениями каждого из уравнений (9) являются многочлены Эрмита. Снова, опираясь на известные результаты обыкновенных дифференциальных уравнений, для определения неизвестных коэффициентов получим рекуррентные системы уравнений

$$C_{2n_1} = \frac{2^{n_1} \cdot n \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n - 2n_1 + 2)}{(2n_1)!} \cdot C_{00}^{(1)},$$

$$C_{2m_1} = \frac{2^{m_1} \cdot m \cdot (m-2) \cdot ... \cdot (m - 2m_1 + 2)}{(2m_1)!} \cdot C_{00}^{(2)}.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда n и m — четные числа, $m = 2l$. Тогда все коэффициенты с номерами $2n_1 > 2k$, $2m_1 > 2l$ обратятся в нуль, и решения каждого из уравнений системы будут многочленами

$$Z_{10}(x) = C_{00}^{(1)} \sum_{n_1=0}^{k} \frac{2^{n_1} \cdot k \cdot (k-2) \cdot ... \cdot (k - n_1 + 1)}{(2n_1)!} \cdot x^{2n_1},$$

$$Z_{01}(y) = C_{00}^{(2)} \sum_{m_1=0}^{l} \frac{2^{m_1} \cdot l \cdot (l-2) \cdot ... \cdot (l - m_1 + 1)}{(2m_1)!} \cdot x^{2m_1}.$$

Известно, что полиномы Эрмита выражаются через вырожденные гипергеометрические функции. Эта связь в нашем случае выражается следующим образом:

$$H_{2k}(x) = (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{k!} \cdot F(-k, \frac{1}{2}; x^2);$$

$$H_{2k+1}(x) = (-1)^k \cdot \frac{(2k+1)!}{k!} \cdot x \cdot F(-k, \frac{3}{2}; x^2);$$

$$H_{2l}(y) = (-1)^l \cdot \frac{(2l)!}{l!} \cdot F(-l, \frac{1}{2}; y^2);$$

$$H_{2l+1}(y) = (-1)^l \cdot \frac{(2l+1)!}{l!} \cdot y \cdot F(-l, \frac{3}{2}; y^2)$$

и их можно использовать в качестве частных решений в (11).

Аналогично определяются остальные решения $Z_i(x, y)$ $(i = 2,\ 3,\ 4)$ и общее решение (7).

III. Определенный интерес представляет система вида

$$\left.\begin{array}{l} Z_{xx} - x \cdot Z_x + n \cdot Z = 0, \\ Z_{yy} - y \cdot Z_y + m \cdot Z = 0, \end{array}\right\} \tag{12}$$

полученная из (3) при следующих значениях постоянных: $B = a,\ B = b,\ B = a = b = -1.$

В этом случае первое частное решение $Z_1(x, y)$ запишется в виде

$$Z_1(x, y) = H_n(x) \cdot H_m(y) = (-1)^n \cdot l^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(l^{-\frac{x^2}{2}}) \cdot (-1)^m \cdot l^{\frac{y^2}{2}} \times$$
$$\times \frac{d^m}{dx^m}(l^{-\frac{y^2}{2}}) = (-1)^{n+m} \cdot l^{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(l^{-\frac{x^2}{2}}) \cdot \frac{d^m}{dx^m}(l^{-\frac{y^2}{2}}). \tag{13}$$

Последняя форма представления решения подсказывает, что у всех систем (3), (9) и (12) ранг $p = 2$ и справедливо преобразование

$$Z_1(x, y) = \exp\left(\alpha_{20} \cdot \frac{x^2}{2} + \alpha_{11} \cdot xy + +\alpha_{02} \cdot \frac{y^2}{2} \cdot +\alpha_{10} \cdot x + \alpha_{01} \cdot y\right) \cdot U(x, y).$$

Это позволяет определить еще восемь нормально-регулярных решений. Определение нормальных и нормально-регулярных решений требует дополнительных исследований. Например, удается определить нормально-регулярные решения вида

$$Z_1 = \exp(x^2 + y^2) \cdot \left(1 + x + y - \tfrac{2(k+1)}{2!} \cdot x^2 - \tfrac{2(l+1)}{2!} \cdot y^2 - ...\right);$$
$$Z_4 = \exp(x^2 + y^2) \cdot xy \cdot \left(1 + x + y - \tfrac{2(k+4)}{3!} \cdot x^2 - \tfrac{2(l+4)}{3!} \cdot y^2 - ...\right).$$

Цитированная литература

1. **Суетин П.К.** Ортогональные многочлены по двум переменным. М., 1988.
2. **Wilczynski E.J.** Projective differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig, 1906.
3. **Кузнецов Д.С.** Специальные функции. М., 1965.

Поступила в редакцию 29.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 59 – 67*

УДК 517.518.476

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЯВЛЕНИЙ ЗАЖИГАНИЯ ДУГИ ПРИ РАЗМЫКАНИИ КОНТАКТОВ

С.Н.Харин, Ю.Р.Шпади, А.Т.Кулахметова, Ш.А.Кулахметова, В.В. Лобанова

Институт математики МОН РК
4800100 г. Алматы, ул.Пушкина, 125

Исследована динамика температуры и электромагнитных полей при размыкании электрических контактов для четырех последовательных стадий, включая нагревание твердых контактов (от начальной температуры до температуры размягчения), плавление контактов в областях сжатия контактов (от размягчения до плавления), квазистационарное расширение и нагрев расплавленного мостика (от температуры плавления до температуры кипения). Для оценки влияния эффектов Колера и Томсона на смещение температурного максимума на поверхности контакта используется осесимметричная модель.

1. Введение. Явления на начальной стадии электрической дуги зависят от предшествующих условий размыкания и нагрева электрических контактов. Изменение напряжения до и после появления расплавленного жидкого мостика описаны в [1]. Согласно этой наблюдаемой картине изменения напряжения можно выделить 4 этапа в процессе размыкания контактов: нагрев материала твердого тела (I), быстрое адиабатическое плавление (II), квазистационарное расширение зоны плавления (III), квази-адиабатическое сжатие и нагрев (IV). Экспериментальные временные характеристики напряжения дали возможность авторам установить продолжительность каждой стадии, изменения в отклонении и величине напряжения и получить некоторую информацию относительно мостиковых явлений.

Однако более детальные оценки [2] показывают, что за основу необходимо взять гипотезу об адиабатическом плавлении и квази - адиабатическом нагреве. Такое предположение имеет место только для ограниченного диапазона способов размыкания. Известно, что процесс теплопередачи влияет на температуру, повышая ее как в контактах и мостике, так и в дуге. Это заключение подтверждается затвердеванием мостика, следующим сразу за его плавлением.

Эксперименты T. Takagi с соавторами [3]-[4] показывают на значительное уменьшение времени существования мостика и горения дуги (в металлической стадии) в том случае, когда электроды были предварительно нагреты.

Математическая модель, изложенная ниже, является попыткой принять во внимание те виды теплопередачи в твердых контактах, мостиках и электрической дуге, которые являются более простыми по сравнению с предыдущими моделями [5]-[8].

Keywords: *Mathematical Model, temperature, electromagnetic field, electrical contact*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

2. Модели процессов, происходящих при размыкании контактов. Процесс размыкания контактов начинается с момента их разделения и продолжается до зажигания электрической дуги. Этот процесс включает явления в твердых и расплавленных электродах, а также явления образования, развития и разрыва жидкого контактного мостика.

Существуют две модели, описывающие изменение напряжения и температуры в процессе размыкания контактов. Одна из них основана на классической модели Хольма с сопротивлением сжатия $R_c = \rho/2r_0$, где ρ — удельное электрическое сопротивление, r_0 — радиус контактного пятна. Известные соотношения Хольма [9] между напряжением и температурой, а также между током и радиусом контактного пятна при температуре плавления достаточно удовлетворительно описывают квазистационарные явления в контактах при малых скоростях их размыкания. Эта модель была распространена на нестационарные явления и неидеальный электрический контакт [5], [7], когда размыкание контактов оказывается настолько быстрым, что соотношения Хольма уже не могут быть использованы.

В другом подходе во внимание принимаются филаменты (микровыступы, микрошероховатости). Филамента, соединяющая электроды, имеет сопротивление $R_f = 2\rho\ell/\pi r_0$, где 2ℓ — длина филаменты, которая должна быть учтена в выражении для сопротивления стягивания R_c. Дальнейший нагрев этой филаменты ведет к ее плавлению, созданию расплавленного мостика и зажиганию дуги в момент закипания мостика. Однако предположения об адиабатическом нагреве и плавлении филаменты [1] или о постоянстве температуры ее концов [10] не дают возможности учесть реальное количество потери мощности, вызванной передачей тепла с филаменты в электроды, что, как было отмечено выше, является очень важным. Ясно, что модель [1] завышает температуру в филаменте, в то время как модель [10] занижает ее.

Чтобы скорректировать эти две модели, рассмотрим контакт тонкой полу-филаменты ($-\ell \leq z \leq 0$) с электродом ($0 \leq r, z < \infty$) на круге $z = 0$, $0 \leq r \leq r_0$. Она представляет симметричную половину целой филаменты $-2\ell \leq z \leq 0$.

3. Нагрев твердых контактов. В начальный период $0 \leq t \leq t_m$ нестационарного нагрева температурные поля твердой филаменты $\theta_1(z,t)$ и твердого электрода $\theta_2(r,z,t)$ могут быть найдены из решения задачи теплопроводности в контактах [11] в виде

$$\theta_1(z,t) = \frac{1}{\alpha}(e^{kt} - 1) - \frac{\ell\mu(t)}{6\lambda}[3(\frac{z}{\ell} + 1)^2 - 1] - \frac{\alpha^2}{\lambda\ell}\int\limits_0^t e^{k(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau, \tag{1}$$

$$\theta_2(r,z,t) = \theta_{21}(r,z,t) + \theta_{22}(r,z,t), \tag{2}$$

где $\mu(t) = \mu_0(1 - e^{-\nu t})$ является тепловым потоком, входящим в электрод из филаменты, первое слагаемое в правой части (2) соответствует нагреву электрода тепловым потоком $\mu(t)$ из филаменты, а второе – джоулевому тепловыделению внутри электрода. Константы в (1) и выражения для $\theta_{21}(r,z,t)$ и $\theta_{22}(r,z,t)$ определены в [11].

Модель, рассматриваемая в [1], может быть получена из выражения (1), если пренебречь теплопередачей с филаменты на электроды ($\mu(t) = 0$). Если при этом t мало, получим адиабатический нагрев

$$\theta_1(z,t) = \frac{kt}{\alpha} = \frac{\rho_0 j_1^2}{c\gamma}t. \tag{3}$$

Сравнение результатов вычислений, соответствующих трем моделям: адиабатической модели [1], представленной формулой (3), упрощенной модели, рассмотренной в [10] и общей модели, описанной выражением (1), дает возможность заключить, что только общая модель дает правильный результат для температуры и теплового потока, в то время как две другие очень приблизительны [11].

Необходимо отметить, что температурный максимум в квази-металлическом контакте, покрытом тонкой пленкой, перемещается с контактной поверхности внутрь электрода, который является, как правило, анодом. Это обусловлено туннельным эффектом и может быть очень существенным, если критерий Колера (отношение между туннельным сопротивлением пленки и сопротивлением сжатия контакта) больше, чем 0.02 [7]. Эффект Томсона вносит такой же вклад при аналогичном перемещении [8].

Рис. 1 описывает результаты вычисления температуры вдоль оси z контакта для туннельного удельного сопротивления пленки $\sigma_f = 1.3 \cdot 10^{-12} \Omega \cdot m$ и времени $t_m = 0.1\ ms$ после начала разделения с анодным смещением максимума температуры $2 \mu m$. Это смещение увеличивает прирост анодных потерь в анодной стадии дуги.

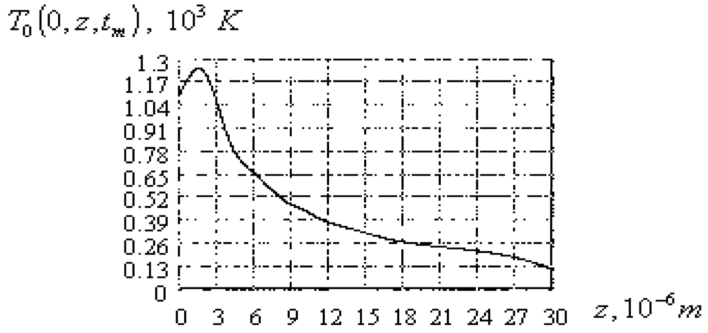

Рис. 1: Анодное смещение температурного максимума в контактах $AgCdO$. Ток $40A$, напряжение $14V$, скорость размыкания $0.2 m/s$.

4. Плавление области сжатия контакта. Этот период ($t_m \leq t \leq t_1$) очень короткий ($10^{-6}s - 10^{-5}s$). Он идентифицирован в [1] со временем, требуемым для плавления цилиндрической филаменты или проводящей шероховатости, которая преобразуется в расплавленный мостик. Из измеренных величин амплитуды напряжения ΔU и продолжительности t_0 (Рис. 2) можно вычислить соотношение радиуса мостика и плотности тока.

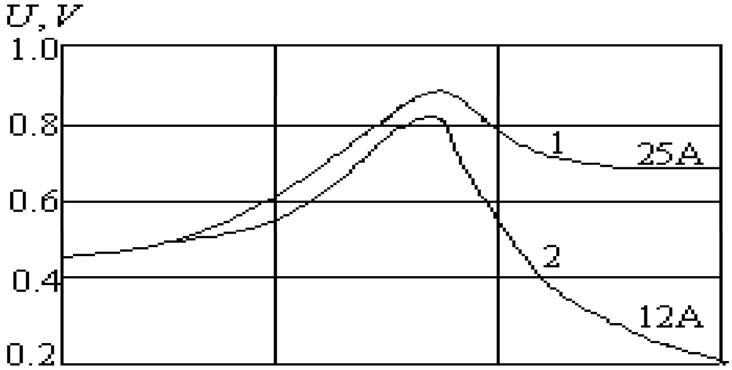

Рис. 2: Быстрое плавление мостика, Cu электроды. Напряжение плавления $0.41V$. Расплавленный (1) и затвердевший (2) мостики [1].

Пусть $\ell_b(t)$ — граница между жидкой частью филаменты $-\ell \leq z \leq \ell_b(t)$ и ее твердой частью

$\ell_b(t) \leq z \leq 0$, то есть $\ell_b(t_m) = -\ell$, $\ell_b(t_1) = 0$. Она может быть найдена из уравнения

$$\theta_1(\ell_b(t), t) = \theta_m, \tag{4}$$

где $\theta_1(z,t)$ определяется из формулы (1), а θ_m является точкой плавления. Энергетический баланс между жидкой и твердой частями филаменты в момент t дается выражением

$$W = W_d + W_L + W_c, \tag{5}$$

где

$$W_d = \pi r_0^2 \int\limits_{t_m}^{t} \mu(\tau) d\tau \tag{6}$$

является энергией, рассеянной на электроде через плоскость $z = 0$,

$$W_L = \gamma L \cdot \pi r_0^2 [\ell_b(t) + \ell] \tag{7}$$

(L — скрытая теплота плавления) — энергия, требуемая для плавления жидкой области $-\ell \leq z \leq \ell_b(t)$, и

$$W_c = \pi r_0^2 c\gamma \int\limits_{\ell_b(t)}^{0} \theta_1(x,t) dx \tag{8}$$

— энергия, идущая на нагрев твердой области $\ell_b(t) \leq z \leq 0$.

Принимая во внимание соотношения

$$W = 0.5 \Delta U \cdot J \cdot t, \qquad \Delta U = J\rho_0(1 + \alpha\theta_1)\frac{\ell}{\pi r_0^2}, \tag{9}$$

из (3)-(8) можно вычислить ℓ, r_0, W_L, W_d, W_c. Вычисления показывают, что при $t = t_1 = 4.7 \cdot 10^{-6} s$ имеем $W_L(t_1) = 0.21 \cdot 10^{-5} J$, $W_d(t_1) = 0.23 \cdot 10^{-5} J$, $W_c(t_1) = 0.06 \cdot 10^{-5} J$, так что радиус и длина мостика в данном случае много меньше по сравнению с адиабатической моделью:

$$r_0 = 4.6 \cdot 10^{-6} m, \qquad \ell = 8.2 \cdot 10^{-6} m.$$

Температура и потенциал θ_b, φ_b для мостика $-\ell \leq z \leq 0$ описываются линейными уравнениями

$$c\gamma_b \frac{\partial \theta_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_b \frac{\partial \theta_b}{\partial z}) - \frac{2\alpha_T}{r_b}\theta_b + \frac{J^2 \rho_b}{\pi^2 r_0^4}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dz}(\frac{1}{\rho_b}\frac{d\varphi_b}{dz}) = 0, \tag{11}$$

где α_T является полной тепловой эмиссией вследствие излучения и конвекции [12]. Граничные условия учитывают непрерывность температурных и тепловых потоков с фазовыми преобразованиями на поверхностях.

Таблица 1. **Сравнение моделей ($I = 25A$).**

	W $10^{-5}J$	W_c $10^{-5}J$	V $10^{-5}m^3$	r $10^{-6}m$	l $10^{-6}m$	j $10^{11}A \cdot m$
1	0.5	0	2.74	7.8	14.4	1.3
2	0.5	0.28	0.84	6.1	7.2	2.6
3	–	–	0.39 – 1.54	5 – 7	5 – 10	2 – 3.5

Результаты вычислений, использующих модель (10)-(11), даны в Таблице 1, где

1 – вычисления, использующие модель [1],

2 – вычисления, использующие модель (10)-(11),

3 – экспериментальные данные [1].

Можно сделать вывод, что вычисления по модели (10)-(11) намного ближе к экспериментальным данным по сравнению с адиабатической моделью.

5. Квазистационарное растяжение и нагрев расплавленного мостика. Экспериментальные данные [1] относительно первого периода (растяжение расплавленного мостика) даются в Таблице 2.

Таблица 2. **Характеристики расширения мостика.**

	$v = 0.1m/s$	$v = 0.01m/s$
Продолжительность, $10^{-6}s$	10	100
Контактная щель, $10^{-6}m$ начальная	1	4
заключительная	2	5
Напряжение, U начальное	$0.5-0.8$	0.5
заключительное	1.0	1.0
Скорость изменения напряжения $\frac{\partial U}{\partial t}$, $10^4V/s$	$5-8$	$0.4-0.5$
Градиент напряжения $\frac{\partial U}{\partial z}$, $10^5V/m$	5	5

Если скорость растяжения расплавленного мостика мала, можно использовать квазистационарную модель, но при этом нужно внести поправки, принимая во внимание изменение формы мостика в процессе размыкания контактов. Под действием сил поверхностного натяжения, гравитации и сжатия мостик принимает форму поверхности вращения вокруг оси z.

Математическая модель, описывающая температуру и электромагнитные поля, базируется на одномерном уравнении теплопроводности для мостика с переменным сечением [7]

$$\frac{d^2\theta_b}{dz^2} + \frac{2}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial \theta_b}{\partial z} + \frac{J^2\rho_b}{\pi^2\lambda_b y^4} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\rho_b}\cdot\frac{d\varphi_b}{dz} = \frac{J}{\pi y^2}. \tag{13}$$

Уравнения для θ_1, θ_2, φ_1, φ_2 такие же, как в предшествующей стадии. Решения уравнений (12), (13) найдены в форме:

$$\theta_b = -\frac{1}{\alpha} + A\cos(\omega\zeta) + B\sin(\omega\zeta),\ \varphi_b = \frac{J}{\pi}\int\limits_0^z \frac{\rho_b dz}{y^2(z,t)},\quad \zeta = 2y(\ell+vt,t)\int\limits_0^z \frac{dz}{y^2(z,t)},\quad \omega = \frac{\varepsilon r_0}{2}, \tag{14}$$

константы A и B находятся из граничных условий [7], [11].

Свободная граница (форма мостика) $r = y(z,t)$ определена вариационным методом, основывающимся на том, что свободная энергия мостика должна быть минимальна для действительно наблюдаемой формы мостика, то есть необходимо найти минимум функционала

$$F(y) = F_k(y) + F_H(y) + F_g(y),$$

где $F_k(y), F_H(y), F_g(y)$ – компоненты поверхностного натяжения, электромагнитной и гравитационной энергии соответственно. Эти величины детально описаны в [7], [11].

Когда температура в узкой части мостика повышается до точки, соответствующей резкому уменьшению коэффициента поверхностного натяжения, квазистационарный этап этой стадии заканчивается и начинается период дальнейшего нагрева мостика.

Экспериментальные данные в этот период получены при $J = 50A$ и $v = 0.1m \cdot s^{-1}$ и даны в Таблице 3.

Результаты вычислений согласно вышеупомянутой математической модели даются на рис. 3.

Таблица 3. **Напряжение в разрывающемся мостике.**

Продолжительность, $10^{-6}s$	$0.05 - 0.10$
Начальная щель, $10^{-6}m$	2
Напряжение, начальное U заключительное	1 $10 - 20$
Скорость изменения напряжения $\frac{\partial U}{\partial t}$, $10^8 V/s$	$1 - 10$

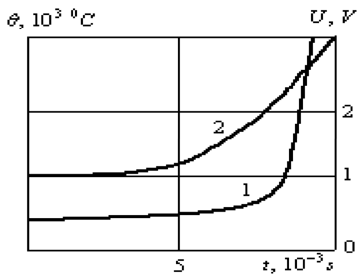

Рис. 3: Напряжение U (1) и температура $\theta_b(0,t)$ (2) в Cu – контактах; $I = 50A$, $v = 10^{-2}m/s$.

Сравнение вычислений с экспериментальными кривыми [1] показывает их хорошее совпадение.

6. Влияние мостика на развитие дуги. Переход от мостика к дуге сопровождается падением напряжения. Типичные осциллограммы напряжения и изменения контактной щели, соответствующие последовательным периодам размыкания электродов, изображены на рис. 4.

Можно наблюдать следующие типичные стадии:

1) стадия жидкого расплавленного мостика с длиной l_b и временем существования t_b;

2) стадия перехода анодной доминирующей стадии дуги ($t_b \leq t \leq t_{cr}$) с линейно уменьшающимся напряжением $u_{\min} \leq u \leq u_{ig}$ в области $l_b \leq r \leq l_{\min}$ и увеличивающимся напряжением $u_{\min} \leq u \leq u_{arc}$ в области $l_{\min} \leq r \leq l_{cr}$; напряжение $u_{\min}$, появляющееся на контактах только после разрыва мостика, имеет прямое отношение к катодному падению напряжения материала.;

3) стадия распространяющейся катодной доминирующей дуги ($t > t_{cr}$) с постоянным напряжением u_{arc}.

В начале второй стадии сразу после разрыва мостика и зажигания дуги расстояние между катодом с одиночными катодными пятнами на поверхности и анодом очень мало и, следовательно, энергетическая мощность от дуги до анода значительна. В результате на аноде происходит мощный локальный перегрев и он становится источником паров, влияющих на следующую стадию дуги. Вследствие истечения плазмы из области катода, имеющего форму усеченного конуса с большим основанием на аноде, возникает некоторый критический промежуток l_{cr}, который

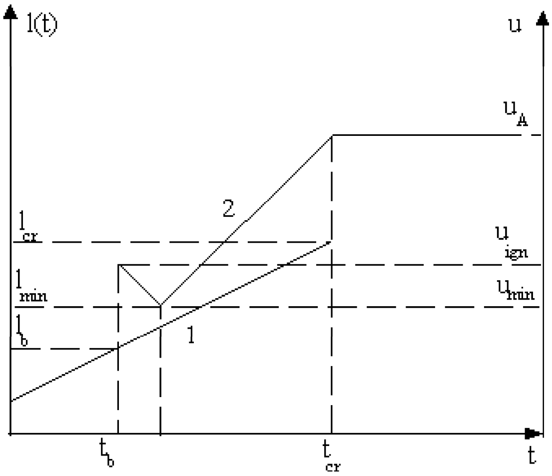

Рис. 4: Напряжение и ширина контактной щели в размыкающихся контактах. 1–ширина контактной щели, 2–напряжение, l_b–длина мостика, t_{cr}–критическое время, l_{cr}–критическое расхождение, u_{ign}–напряжение зажигания, u_{min}–минимальное напряжение, u_{arc}–напряжение катодной дуги.

становится достаточно большим, чтобы поддерживать энергетическую мощность, требуемую для дальнейшего плавления и испарения анода. Другая причина для появления критического промежутка – эффект охлаждения, проявляющийся благодаря увеличению поверхности испарения на аноде.

Время начала третьей стадии зависит от продолжительности двух предыдущих стадий, особенно от времени существования мостика и его длины. Если длина мостика l_b превышает критическое расстояние промежутка l_{cr}, то второй стадии перехода может и не быть. Напротив, если длина мостика незначительна, или если мостик вообще не появляется, то продолжительность анодной доминирующей стадии дуги $t_a = t_{cr} - t_b$ является максимальной.

Зависимость t_a от продолжительности существования мостика t_b для Co и Mo электродов [13] дается на рис. 5. Экспериментальные вычисления времени существования анодной

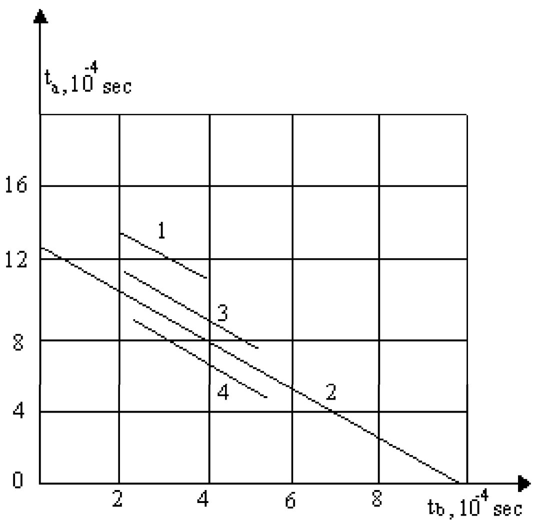

Рис. 5: Зависимость времени существования анодной дуги t_a от времени существования мостика t_b; 1– Cu, $I = 650A$; 2– Cu, $I = 270A$; 3– Mo, $I = 650A$; 4– Mo, $I = 450A$.

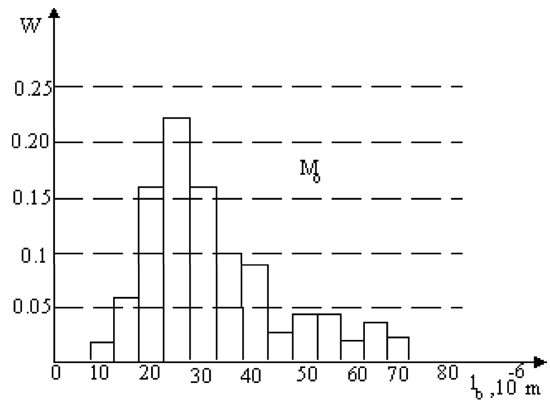

Рис. 6: Гистограмма статистического распределения частоты появления мостика W в зависимости от длины мостика l_b

дуги имеют значительные колебания (рис. 6). Это — результат колебаний значений времени существования мостика. Для случаев, когда мостик не появляется вообще (заштрихованный столбец на рис. 6), продолжительность существования анодной дуги максимальна. Если скорость размыкания контактов $V_0 \geq 0.05m \cdot \sec^{-1}$, то переход к анодной доминирующей стадии дуги не наблюдается, как это наблюдается в случае Cu электродов для длины мостика $l_b \geq 40 \cdot$ $\cdot\, 10^{-6}m$. Для скоростного диапазона $V_0 \geq 0.2m \cdot \sec^{-1}$ переход имеет место при длине мостика $l_b \geq 85 \cdot 10^{-6}m$. Это явление можно объяснить основываясь на предположении, что образование мостика для таких материалов как Cu и Ni происходит вследствие того, что скорость вытягивания жидкого металла из электрода больше, чем скорость плавления поверхностной филаменты.

Мостики на Mo электродах устойчивы и подчиняются нормальному закону распределения длины с максимальной величиной магнитуды $l_{b,\max} = 25 \cdot 10^{-6}m$.

Таким образом, анализ экспериментальных данных [13] дает возможность заключить, что для Cu — электродов $t_b > t_a$ мостик в этом случае – главный фактор, определяющий переход в следующую стадию дуги или ее отсутствие. Напротив, для Mo-электродов $t_b < t_a$ и можно наблюдать относительную самостоятельность перехода дуговых явлений в другую стадию.

Цитированная литература

1. **R.Haug, T.Konakou, J.L.Doremieux** Proc. 36th Holm Conf. on Electrical Contacts. Montreal, 1990. P.543–549.

2. **S.N.Kharin** // Proc. 17th Int. Conf. on Electrical Contacts. Nagoya, Japan, 1994. P.817–824.

3. **K.Sato, T.Sato, H.Sone, T.Takagi** // Japanese Journal of Applied Physics. 1987. V.226, 4. P.L261–L263.

4. **T.Takagi.** // Proc. 36th Holm Conf. on Electrical Contacts. Montreal. 1990. P.1–7.

5. **S.N.Kharin.** // Proc. 8th Int. Conf. on Electrical Contacts Phenomena. Tokyo, Japan, 1976. P.553–558.

6. **S.N.Kharin.** // Proc. 36th Holm Conf. on Electrical Contacts. Montreal, 1990. P.37–43.

7. **S.N.Kharin.** // Proc. 37th Holm Conf. on Electrical Contacts. Chicago, 1991. P.53–65.

8. **С.Н.Харин, А.Т.Кулахметова** // Труды Межд. Симпозиума по электрическим контактам. Теория и приложения. (ISECTA'93). Алматы, 1993. С.212–215.

9. **R.Holm** Electrical Contacts. 4th Edition. Springer Verlag, Berlin, 1987.

10. **P.G.Slade and M.D.Nahemov** // J. of Appl. Phys. 1971. V.42, № 9. P.3290–3297.

11. **S.N.Kharin** // IEEE Transactions. CPMT. Part A. 1996. V.19, № 3. P.313–319.

12. **О.В.Bron, Л.К.Сашков.** Течения плазмы в электрической дуге переключателей. Ленинград, 1975.

13. **В.Р.Елагин.** Экспериментальное исследование начальной фазы вакуумной дуги. Ukr NINTI. Харьков, 1986. С.1–16.

Поступила в редакцию 02.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 68 — 72*

Доклады международной конференции "Дифференциальные уравнения" (Алматы, 24 — 26 сентября 2003г.)

УДК 519.624.1

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Абрамов, В. И. Ульянова, Л. Ф. Юхно

Вычислительный Центр им. А.А.Дородницына РАН
119991 г.Москва ул.Вавилова, 40 alalabr@ccas.ru
Институт математического моделирования РАН
125047 г.Москва Миусская пл., 4а yukhno@imamod.ru

В работе для некоторых линейных систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), определенных на полубесконечном интервале, рассматривается задача выделения семейства решений, ограниченных на бесконечности. Для решения поставленной задачи существенно используются соответствующие результаты, полученные для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). А именно, условие ограниченности решения на бесконечности заменяется некоторым граничным условием в достаточно далекой конечной точке, т.е. переносится из бесконечности в некоторую конечную точку. Формулировка и исследование такой граничной задачи для рассматриваемого класса ДАУ составляет основной результат данной работы.

1. Формулировка задачи. Будем рассматривать для $t_0 \leqslant t < +\infty$ уравнение

$$A(t)y' = B(t)y + f(t), \tag{1}$$

где $A: \ [t_0, +\infty) \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $B: \ [t_0, +\infty) \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f: \ [t_0, +\infty) \to \mathbb{C}^n$ – заданные функции, $y: \ [t_0, +\infty) \to \mathbb{C}^n$ – искомая. Далее функции $A, \ B, \ f$ считаем непрерывно дифференцируемыми и имеющими при $t \to +\infty$ предельные значения соответственно $A_0, \ B_0, \ f_0$, предельные значения их производных предполагаются равными нулю. Будем предполагать, что предельное характеристическое уравнение

$$det(\lambda A_0 - B_0) = 0$$

Keywords: *liner system, differential-algebraic equation, ordinary differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A09, 65L80

не имеет корней на мнимой оси. Это предположение (предположение дихотомии спектра) делается для того, чтобы избежать возникающей в противном случае тонкой ситуации, когда для однородного предельного уравнения

$$A_0 y' = B_0 y$$

существуют решения вида $y = e^{\lambda t} y_0$, не стремящиеся к нулю и не растущие неограниченно при $t \to +\infty$. Из сделанного предположения следует, в частности, что $\det B(t) \neq 0$ для достаточно больших t и для этих t уравнение (1) приводится к виду

$$M(t) y' = y + g(t), \tag{2}$$

где $g(t) = B^{-1}(t) f(t)$.

Предполагаем также, что матрица $M(t)$ в уравнении (2) для достаточно больших t может быть представлена в виде

$$M(t) = Q(t) \widetilde{M}(t) Q^{-1}(t), \tag{3}$$

где $\widetilde{M}(t)$ — блочно диагональная,

$$\widetilde{M}(t) = \begin{Vmatrix} A_+(t) & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & A_-(t) \end{Vmatrix},$$

Q, Q^{-1}, A_+, A_- — непрерывно дифференцируемые и имеющие предельные значения при $t \to +\infty$, предельные значения их производных нулевые, N — фиксированная матрица. Здесь A_+ – $p \times p$ — матрица, A_- – $q \times q$ — матрица, N – $(n-p-q) \times (n-p-q)$ — матрица, все собственные значения (СЗ) блока $\lim\limits_{t \to +\infty} A_+(t)$ лежат в правой полуплоскости, блока $\lim\limits_{t \to +\infty} A_-(t)$ — в левой полуплоскости, а все СЗ блока N равны нулю (ненулевые СЗ матрицы $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t)$ — это обратные величины к корням уравнения $\det(\lambda A_0 - B_0) = 0$; в силу сделанного выше предположения они не лежат на мнимой оси). Предположим также, что жорданова форма матрицы N не имеет клеток размера больше двух.

Рассматривается задача: выделить множество (линейное многоообразие) тех решений ДАУ (1), которые ограничены при $t \to +\infty$. Далее будем использовать общий подход и методы, развитые при решении соответствующей задачи для ОДУ, которое получилось бы из (1) при отсутствии блока N (см. [1]-[9], общую теорию ДАУ см., например, в [10], [11]). А именно, заменим требование ограниченности решения при $t \to +\infty$ граничным условием в некоторой точке t_∞ (t_∞ считается достаточно большим); таким образом условие ограниченности решения переносится из бесконечности в конечную точку.

Определение этой граничной задачи и ее исследование – основной результат работы.

2. Преобразование задачи. Из (2) и (3) имеем

$$Q(t) \widetilde{M}(t) Q^{-1}(t) y' = y + g(t). \tag{4}$$

Замена $y = Q(t) \widetilde{y}$ в (4) приводит к уравнению

$$\widetilde{M}(t) \widetilde{y}' = (I - \widetilde{M}(t) Q^{-1}(t) Q'(t)) \widetilde{y} + \widetilde{g}(t),$$

где $\widetilde{g}(t) = Q^{-1}(t) g(t)$, т.е. к системе вида

$$\left.\begin{aligned} A_+(t) u' &= u + r_{11}(t) u + r_{12}(t) v + r_{13}(t) w + \widetilde{g}_1(t), \\ N v' &= v + N r_{21}(t) u + N r_{22}(t) v + N r_{23}(t) w + \widetilde{g}_2(t), \\ A_-(t) w' &= w + r_{31}(t) u + r_{32}(t) v + r_{33}(t) w + \widetilde{g}_3(t). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь $\widetilde{y} = \left\| \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\|$, блоки имеют соответствующие размеры. Важно, что все $r_{kj}(t)$ при $t \to +\infty$ стремятся к нулю, $\widetilde{g}_k(t)$ стремятся при $t \to +\infty$ к своим предельным значениям, их производные стремятся к нулю.

Заметим, что для приведения системы (1) к виду (5) замена вида $y(t) = \widetilde{Q}(t)\widetilde{y}(t)$ может быть полезной и до предварительного приведения этой системы к виду (2), так как возможно, что матрица $M(t)$ не приводится к нужному блочно-диагональному виду, а матрица $(I - M(t)\widetilde{Q}'(t)\widetilde{Q}^{-1}(t))^{-1}M(t)$ приводится.

Пользуясь вторым из уравнений (5), исключим из этих уравнений функцию v. Пусть N — жорданова матрица. Тогда второе из уравнений (5) распадается на группы уравнений, имеющих вид

$$0 = v_k + s(t)u + c(t)v + l(t)w + h(t) \tag{6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} v_k' = {} & v_{k-1} + s(t)u + c(t)v + l(t)w + h_1(t), \\ 0 = {} & v_k + h_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь v_k (пара v_{k-1}, v_k) — некоторые компоненты v; s, c, l, h, h_1, h_2 — матрицы соответствующих размеров; s, c, l малы при больших t. Поэтому каждая компонента v_k вектор-функции v и в том случае, когда она входит в группу уравнений вида (6), и в том случае, когда она входит в группу уравнений вида (7), дает соотношение вида

$$v_k = \varphi_k(t)u + \chi_k(t)v + \psi_k(t)w + \omega_k(t), \tag{8}$$

где $\varphi_k(t)$, $\chi_k(t)$, $\psi_k(t)$ непрерывны и малы при больших t, а $\omega_k(t)$ непрерывны и стремятся к конечным пределам при $t \to +\infty$. Поэтому совокупность соотношений (8), взятая для всех компонент вектора v, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно этих компонент. Эта система разрешима для достаточно больших t, т.к. матрица этой системы для таких t близка к единичной.

Таким образом, второе из уравнений (5) при сделанных предположениях дает представление

$$v = \Phi(t)u + \Psi(t)w + \sigma(t), \tag{9}$$

где Φ, Ψ, σ – непрерывные функции, $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \Psi(t) = 0$, $\sigma(t)$ имеет конечный предел при $t \to +\infty$.

3. Выделение семейства ограниченных решений. Подставив v (см. (9)) в первое и третье уравнения (5), мы получим для $t_\infty \leqslant t < +\infty$, где t_∞ достаточно велико, систему вида

$$\left.\begin{aligned} u' = {} & P_+u + R_{11}(t)u + R_{12}(t)w + q_1(t), \\ w' = {} & P_-w + R_{21}(t)u + R_{22}(t)w + q_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где P_+ и P_- — постоянные матрицы такие, что все СЗ матрицы P_+ лежат в правой полуплоскости, все СЗ матрицы P_- — в левой полуплоскости, $R_{kj}(t)$ непрерывны и при $t \to +\infty$ стремятся к нулю, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ непрерывны и при $t \to +\infty$ стремятся к конечным пределам q_1^0 и q_2^0. Нужно выделить множество тех решений системы (10), которые ограничены при $t \to +\infty$.

Получившаяся таким образом задача полностью входит в класс задач, рассмотренных в [2] (см. также [6], [9]). Используя результаты этих работ, для системы (10) получаем следующее.

Составим вспомогательную систему ОДУ

$$\left.\begin{aligned} \alpha' + \alpha(P_- + R_{22}) - (P_+ + R_{11})\alpha + \alpha R_{21}\alpha - R_{12} &= 0, \\ \beta' - (P_+ + R_{11})\beta + \alpha R_{21}\beta + \alpha q_2 - q_1 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

здесь $\alpha: \ [t_\infty, +\infty) \to \mathbb{C}^{p\times q}$, $\beta: \ [t_\infty, +\infty) \to \mathbb{C}^p$.

Эту систему нужно решить на интервале $[t_\infty, +\infty)$ для достаточно большого t_∞ при условиях

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = -P_+^{-1} q_1^0. \tag{12}$$

Решение сингулярной задачи Коши (11), (12) для достаточно больших t_∞ существует и единственно.

Для системы (10) условие ограниченности решения при $t \to +\infty$, записанное в точке t_∞, имеет вид

$$u(t_\infty) = \alpha(t_\infty) w(t_\infty) + \beta(t_\infty). \tag{13}$$

Таким образом, размерность линейного многообразия ограниченных при $t \to +\infty$ решений системы (10) равна $n - p$.

Решение задачи (11), (12) устойчиво справа налево.

Если известны асимптотические разложения R_{kj}, q_1, q_2 по степеням $1/t$, то можно получить соответствующие асимптотические разложения α и β, подставив все эти разложения в (11) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях $1/t$.

Для больших t_∞ можно пользоваться и грубыми предельными формулами

$$\alpha(t_\infty) = 0, \quad \beta(t_\infty) = -P_+^{-1} q_1^0.$$

В этом случае точное соотношение (13) заменяется приближенным

$$u(t_\infty) + P_+^{-1} q_1^0 = 0. \tag{14}$$

Учитывая те преобразования, с помощью которых система (10) была выведена из исходного уравнения (1), получим нужное нам граничное условие для функции y в точке t_∞, которое при сделанных предположениях эквивалентно ограниченности решения уравнения (1).

В частности, если достаточно использовать формулу (14), то это приведет к следующему (опуская выкладки, приводим лишь окончательный результат). Для матрицы $B_0^{-1}A_0$ выделим подпространство, порожденное левыми корневыми векторами (строками), соответствующими СЗ этой матрицы, лежащим в правой полуплоскости. Пусть Λ – $p\times n$ - матрица, строки которой образуют какой-либо базис в этом подпространстве (эффективные методы решения этой задачи см., например, в [12]). Тогда соотношение (14) в исходных переменных предельно эквивалентно соотношению

$$\Lambda y(t_\infty) + \Lambda B_0^{-1} f_0 = 0.$$

Мы рассмотрели случай, когда особая точка находится в бесконечности, а коэффициенты уравнения при $t \to +\infty$ стремятся к постоянным. Ясно, что многие задачи сводятся к этому случаю заменой переменных.

Авторы благодарны Н.Б.Конюховой за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00050 и 03-01-00439)

Цитированная литература

1. **Абрамов А.А.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1961. Т.1, № 4. С.733–737.

2. **Биргер Е.С., Ляликова (Конюхова) Н.Б.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т.5, № 5. С.979–990.

3. **Биргер Е.С., Ляликова (Конюхова) Н.Б.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т.6, № 3. С.446–453.

4. **Абрамов А.А.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971. Т.11, № 1. С.275–278.

5. **Абрамов А.А.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1980. Т.20, № 4. С.901–908.

6. **Конюхова Н.Б.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1983. Т.23, № 4. С.806–824.

7. **Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б.** //Computational Mathematics. Banach center publications, PWN, Warsaw, 1984. V.13. P.319–351.

8. **Abramov A.A., Konyukhova N.B.** //Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1986. V.1, № 4. P.245–246.

9. **Конюхова Н.Б., Пак Т.В.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1987. Т.27, № 4. С.847–866.

10. **Griepentrog E., März R.** Differential-algebraic equations and their numerical treatment. Teubner-Texte zur Mathematik: 88, Leipzig, 1986.

11. **Бояринцев Ю.Е.** Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. Новосибирск, 1996.

12. **Абрамов А.А.** //Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1984. Т.24, № 3. С.339–347.

Поступила в редакцию 24.09.2003 г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 73 – 79*

УДК 517.937

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

С.А. Айсагалиев, Е.Б. Злобина

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
г. Алматы ул. Масанчи, 39/47 helion@mail.kz.

Рассмотрим класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \Big\{ \varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \Big| \\ \mu_{1i}\sigma_i^2 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2 \ \forall \sigma_i \in R^1, \ i = \overline{1,m}; \varphi(0) = 0 \Big\}, \tag{2}$$

где A, B, S, $\mu_0 = \mathrm{diag}(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m})$, $\mu_{0i} > 0$, $\mu_1 = \mathrm{diag}(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1m})$, $\mu_{1i} \ge 0$, $i = \overline{1,m}$ – постоянные матрицы, соответственно, порядков $n{\times}n$, $n{\times}m$, $m{\times}n$, $m{\times}m$, $m{\times}m$. Различные системы автоматического регулирования, описываемые уравнениями вида (1)-(2), рассмотрены в [1, 2]. В случае, когда матрица A гурвицева, $\mu_{1i} = 0$, $i = \overline{1,m}$ уравнения (1), (2) описывают процессы в регулируемых системах в основном случае. Полагаем, что для системы (1), (2) выполнены условия локальной теоремы существования и ее решения продолжаемы.

Положение равновесия системы (1) определяется из условия $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Так как матрица A гурвицева, то $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $\sigma_* = Sx_*$. Поскольку $\varphi(0) = 0$, то пара $(x_* = 0, \sigma_* = 0)$ является положением равновесия системы (1).

Определение 1. *Говорят, что тривиальное решение системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если для любого* $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu_{1i} \le \mu_i \le \mu_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, *где* $\sigma \in\ \in S_\delta = \left\{ \sigma \in R^m \big| |\sigma| < \delta \right\}$, $\delta > 0$ *– достаточно малое число решение* $x_* = 0$ *линейной системы* $\dot{x} = Ax + B\mu Sx$, $t \in I$ *асимптотически устойчиво и для всех* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *решение системы (1), (2) обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0 \ \forall x_0$, $|x_0| < \infty$.

Keywords: *automatic control system, absolute stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C75

О п р е д е л е н и е 2. *Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A, B, S, μ_0, μ_1), при выполнении которых тривиальное решение системы (1), (2) абсолютно устойчиво.*

Ставится следующая задача: найти алгебраические критерии абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2) для каждого фиксированного $\mu_{1i} \leq 0$, $i = \overline{1,m}$ при максимальном значении суммы $\sum_{i=1}^{m}(\mu_{0i} - \mu_{1i})$.

Л е м м а 1. *Если пара (A, B) управляема, rang $B = m$, матрица θ порядка $m \times n$ такая, что матрица $\tau = \theta B$ порядка $m \times m$ – неособая, то вдоль решения системы (1), (2) верны тождества*

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(t)) &= \bar{x}(t) - \tau^{-1}\theta A x(t), \quad t \in I, & (3)\\ \dot{\sigma}(t) &= SB\bar{x}(t) + S(I_n - B\tau^{-1}\theta)Ax(t), \quad t \in I, & (4)\\ \dot{x}(t) &= B\bar{x}(t) + (I_n - B\tau^{-1}\theta)Ax(t), \quad t \in I, & (5) \end{aligned}$$

где $\bar{x}(t) = \tau^{-1}\theta\dot{x}(t)$, I_n — единичная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство леммы можно найти в [4].

Л е м м а 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, матрица $H = H^*$ порядка $n \times n$, где $(*)$ — знак транспонирования. Тогда вдоль решения системы (1), (2) несобственный интеграл равен нулю, т.е.*

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[-2\bar{x}^*(t)B^*Hx(t) - 2x^*(t)A^*(I_n - B\tau^{-1}\theta)^*Hx(t)\right]dt =$$

$$= -\lim_{T\to\infty} x^*(T)Hx(T) + x^*(0)Hx(0). \qquad (6)$$

Доказательство леммы можно найти в [4].

Л е м м а 3. *Если матрица $H_0 = H_0^*$ порядка $n \times n$ такая, что $H_0 B = 0$, то вдоль решения системы (1), (2) несобственный интеграл равен*

$$I_2 = -2\lim_{T\to\infty}\int_0^T x^*(t)A^*H_0x(t)dt = -\lim_{T\to\infty} x^*(T)H_0x(T) + x^*(0)H_0x(0). \qquad (7)$$

Доказательство леммы можно найти в [4].

Пусть $\tau_1 = \mathrm{diag}(\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1m}) \geq 0$, $\tau_3 = \mathrm{diag}(\tau_{31}, \ldots, \tau_{3m})$ — диагональные матрицы порядка $m \times m$. Введем следующие обозначения:

$$\tau_3^+ = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_3 \leq 0,\\ \mu_0\tau_3, & \text{если } \tau_3 > 0, \end{cases} \qquad \bar{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & \text{если } \tau_3 \leq 0,\\ \varphi(\sigma) - \mu_0\sigma, & \text{если } \tau_3 > 0, \end{cases}$$

$$c_1 = \begin{cases} \bar{c}_1 = -\int\limits_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)\tau_3 d\sigma, & \text{если } \tau_3 \leq 0,\\ \bar{\bar{c}}_1 = -\int\limits_0^{\sigma(0)} [\varphi(\sigma) - \mu_0\sigma]^*\tau_3 d\sigma, & \text{если } \tau_3 > 0. \end{cases}$$

Л е м м а 4. *Пусть выполнены условия леммы 1, функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$. *Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T[\bar{x}^*(t)N_1\bar{x}(t)+\bar{x}^*(t)N_2x(t)+x^*(t)N_3x(t)]\,dt \le$$

$$\le c_1+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)}\bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3d\sigma+\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\tau_3+\sigma(T)-\frac{1}{2}\sigma^*(0)\tau_3+\sigma(0), \quad (8)$$

где
$$N_1 = \tau_1\mu_0^{-1}\mu_1^{-1}+\tau_3SB, \quad (9)$$
$$N_2 = (-N_1-N_1^*)\tau^{-1}\theta A-\tau_1(\mu_0^{-1}+\mu_1^{-1})S+\tau_3SA, \quad (10)$$
$$N_3 = A^*\theta^*\tau^{*-1}N_1\tau^{-1}\theta A+S^*\tau_1S+A^*\theta^*\tau^{*-1}\left[\tau_1(\mu_0^{-1}+\mu_1^{-1})S-\tau_3SA\right]. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку выполнены условия леммы 1, то верны тождества (3)-(5). Из включения $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ следует, что для любых диагональных матриц $\tau_1 = \mathrm{diag}(\tau_{11},\dots\tau_{1m})\ge 0$, $\tau_3=\mathrm{diag}(\tau_{31},\dots,\tau_{3m})\le 0$, верны следующие соотношения

$$(\mu_0^{-1}\varphi-\sigma)^*\tau_1(\mu_1^{-1}\varphi-\sigma)\le 0, \quad \sigma=\sigma(t), \quad \varphi(\sigma)=\varphi(\sigma(t))\ \ \forall t,\ \ t\in I, \quad (12)$$

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\varphi^*\tau_3\dot{\sigma}dt=\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)}\varphi^*\tau_3d\sigma=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)}\varphi^*\tau_3d\sigma-\int\limits_0^{\sigma(0)}\varphi^*\tau_3d\sigma=\bar{c}_1+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)}\varphi^*(\sigma)\tau_3d\sigma, \quad (13)$$

где $0\le\bar{c}_1<\infty$. В случае, когда $\tau_3>0$, из включения $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ имеем

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\varphi^*\tau_3\dot{\sigma}dt=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T[\varphi(\sigma(t))-\mu_0\sigma(t)]^*\tau_3\dot{\sigma}(t)dt+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\sigma^*(t)\mu_0\tau_3\dot{\sigma}(t)dt=$$

$$=\bar{\bar{c}}_1+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)}\bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3d\sigma+\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\mu_0\tau_3\sigma(T)-\frac{1}{2}\sigma^*(0)\mu_0\tau_3\sigma(0). \quad (14)$$

Рассмотрим сумму

$$\pi(t)=[\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))-\sigma(t)]^*\tau_1[\mu_1^{-1}\varphi(\sigma(t))-\sigma(t)]+\varphi^*(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t), \quad t\in I,$$

где τ_3 — любая диагональная матрица. Из соотношений (12)-(14) следует, что

$$I_3=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\pi(t)dt\le c_1+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)}\bar{\varphi}(\sigma)\tau_3d\sigma+\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\tau_3+\sigma(T)-\frac{1}{2}\sigma^*(0)\tau_3+\sigma(0). \quad (15)$$

Подставляя значения $\varphi(\sigma(t))$, $\dot{\sigma}(t)$, $\sigma(t)$ из соотношений (3)-(5), получим

$$\pi(t)=\bar{x}^*(t)N_1\bar{x}(t)+\bar{x}^*(t)N_2x(t)+x^*(t)N_3x(t), \quad x\in I, \quad (16)$$

где матрицы N_1, N_2, N_3 определяются выражениями (9)-(11). Из формул (15), (16) получим оценку (8). Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть выполнены условия лемм 1-4. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\bar{x}^*(t)P_1\bar{x}(t) + \bar{x}^*(t)P_2x(t) + x^*(t)P_3x(t)]\,dt \le c_1 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3 d\sigma -$$

$$-\lim_{T\to\infty} x^*(T)\left(H + H_0 - \frac{1}{2}S^*\tau_3 + S\right)x(T) + x^*(0)\left(H + H_0 - \frac{1}{2}S^*\tau_3 + S\right)x(0), \qquad (17)$$

где

$$P_1 = \tau_1\mu_0^{-1}\mu_1^{-1} + \tau_3 SB, \qquad (18)$$

$$P_2 = (-P_1 - P_1^*)\tau^{-1}\theta A - \tau_1(\mu_0^{-1} + \mu_1^{-1})S + \tau_3 SA - 2B^*H, \qquad (19)$$

$$P_3 = -2A^*H_0 - 2A^*H + S^*\tau_1 S - A^*\theta^*\tau^{*-1}P_1^*\tau^{-1}\theta A - A^*\theta^*\tau^{*-1}P_2. \qquad (20)$$

Доказательство леммы следует из лемм 1-4.

Л е м м а 6. *Пусть выполнены условия леммы 5, $\bar{P}_1 > 0$, $P_2 = 2P_4 + 2K\tau^{-1}\theta$, где $P_4 = -\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A$, $K = K^*$ — матрица порядка $m\times m$. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_6 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[x^*(t)P_5x(t) + \varphi^*(\sigma(t))\bar{P}_1\varphi(\sigma(t))\right]dt \le c_1 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3 d\sigma -$$

$$-\lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_1 x(T) + x^*(0)\Pi_1 x(0), \qquad (21)$$

где

$$\Pi_1 = H + H_0 + \theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta - \frac{1}{2}S^*\tau_3 + S$$

$$2K\tau^{-1}\theta = -2B^*H - \tau_1(\mu_0^{-1} + \mu_1^{-1})S + \tau_3 SA, \qquad (22)$$

$$P_5 = -2A^*H - 2A^*H_0 - 2A^*\theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta + S^*\tau_1 S. \qquad (23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как $\bar{P}_1 > 0$, $P_2 = -2\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A + 2K\tau^{-1}\theta$, то подынтегральное выражение из (17) запишется в виде $\bar{x}^*P_1\bar{x} + \bar{x}^*P_2x + x^*P_3x = \bar{x}^*P_1\bar{x} + 2\bar{x}^*P_4x + x^*P_3x + 2\bar{x}^*K\tau^{-1}x$. Заметим, что $\bar{x}^*P_1\bar{x} = \bar{x}^*\bar{P}_1\bar{x}$, $x^*P_3x = x^*\bar{P}_3x$, где $\bar{P}_3 = (1/2)(P_3 + P_3^*)$. Тогда

$$\bar{x}^*\bar{P}_1\bar{x} + 2\bar{x}^*P_4x + x^*\bar{P}_3x = x^*(\bar{P}_3 - P_4^*\bar{P}_1^{-1}P_4)x + (\bar{x} + \bar{P}_1^{-1}P_4x)^*\bar{P}_1(\bar{x} + \bar{P}_1^{-1}P_4)x.$$

Отсюда, в частности, при $P_4 = -\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A$ имеем

$$\bar{x}^*\bar{P}_1\bar{x} + 2\bar{x}^*P_4x + x^*\bar{P}_3x = x^*(\bar{P}_3 - A^*\theta^*\tau^{*-1}\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A)x + (\bar{x} - \tau^{-1}\theta Ax)^*\bar{P}_1(\bar{x} - \tau^{-1}\theta Ax) =$$

$$= x^*(\bar{P}_3 - A^*\theta^*\tau^{*-1}\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A)x + \varphi(\sigma(t))\bar{P}_1\varphi(\sigma(t)),$$

где $\varphi(\sigma(t)) = \bar{x}(t) - \tau^{-1}\theta Ax(t)$, $t \in I$ согласно тождеству (3). Обозначим

$$\bar{P}_5 = \bar{P}_3 - A^*\theta^*\tau^{*-1}\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A.$$

Так как

$$\bar{P}_3 = -A^*H - HA - A^*H_0 - H_0A + S^*\tau_1 S - A^*\theta^*\tau^{*-1}P_1^*\tau^{-1}\theta A - A^*\theta^*\tau^{*-1}(-2\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A + 2K\tau^{-1}\theta) =$$

$$= -A^*H - HA - A^*H_0 - H_0A + S^*\tau_1 S + A^*\theta^*\tau^{*-1}\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A - 2A^*\theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta,$$

то

$$\bar{P}_5 = \bar{P}_3 - A^*\theta^*\tau^{*-1}\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A =$$

$$= -A^*H - HA - A^*H_0 - H_0A + S^*\tau_1 S - A^*\theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta - \theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta A.$$

Следовательно, $x^*(\bar{P}_3 - A^*\theta^*\tau^{*-1}\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A)x = x^*\bar{P}_5 x = x^*P_5 x$. Поскольку

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \bar{x}^*(t)(2K\tau^{-1}\theta)x(t)dt = 2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \dot{x}^*(t)\theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta x(t)dt = \tag{24}$$

$$= \lim_{T\to\infty} x^*(T)\theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta x(T) - x^*(0)\theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta x(0),$$

то для несобственного интеграла справедлива оценка

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[x^*(t)P_5x(t) + \varphi^*(\sigma(t))\bar{P}_1\varphi(\sigma(t))\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \bar{x}^*(t)(2K\tau^{-1}\theta)x(t)dt \le$$

$$\le c_1 + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\left(H + H_0 - \frac{1}{2}S^*\tau_3 + S\right)x(T) +$$

$$+ x^*(0)\left(H + H_0 - \frac{1}{2}S^*\tau_3 + S\right)x(0).$$

Отсюда с учетом (24) получим оценку (21). Отметим, что

$$P_2 = (-P_1 - P_1^*)\tau^{-1}\theta A - \tau_1(\mu_0^{-1} + \mu_1^{-1})S + \tau_3 SA - 2B^*H = -2\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A + 2K\tau^{-1}\theta,$$

где $(-P_1 - P_1^*)\tau^{-1}\theta A = -2\bar{P}_1\tau^{-1}\theta A$. Следовательно, $2K\tau^{-1}\theta = -2B^*H - \tau_1(\mu_0^{-1} + \mu_1^{-1}) + \tau_3 SA$. Таким образом, матрицы $2K\tau^{-1}\theta$, P_5 определяются формулами (22), (23). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы 6 и функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Если матрицы*

$$\bar{P}_1 > 0, \quad \bar{P}_5 \ge 0, \quad \Pi_1 > 0, \tag{25}$$

то существует несобственный интеграл

$$0 \le I_6 = \int_0^\infty \left[x^*\bar{P}_5 x(t) + \varphi^*(\sigma(t))\bar{P}_1\varphi(\sigma(t))\right]dt < \infty. \tag{26}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что верна оценка (21). Так как матрицы $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_5 \ge 0$, то значение $I_6 \ge 0$. Пусть матрица $\Pi_1 > 0$. Покажем, что решение системы (1), (2) ограничено. Предположим противное, т.е. решение системы (1), (2) не ограничено. Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\left\{c_1 + \int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3 d\sigma - x^*(t)\Pi_1 x(t) + x^*(0)\Pi_1 x(0)\right\} = -\infty$$

в силу того, что $\Pi_1 > 0$ и имеют место неравенства

$$\int\limits_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3 d\sigma \leq 0, \quad 0 \leq c_1 < \infty, \quad |x^*(0)\Pi_1 x(0)| < \infty.$$

Следовательно, $0 \leq I_6 < -\infty$. Этого не может быть. Значит, при выполнении условий леммы, решение системы (1), (2) ограничено, т.е. существует постоянная $m_1 > 0$ такая, что $|x(t)| \leq m_1$ $\forall t,\ t \in I$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \left\{ c_1 + \int\limits_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_3 d\sigma - x^*(t)\Pi_1 x(t) + x^*(0)\Pi_1 x(0) \right\} < \infty.$$

Из условий $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_5 \geq 0$ следует оценка (26). Лемма доказана.

На основе лемм 1-7 может быть получен следующий алгебраический критерий абсолютной устойчивости регулируемых систем.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *пара (A, B) управляема, матрицы A, $A + B\mu S$, $\mu_{1i} \leq \mu_i \leq \mu_{0i}$, $i = \overline{1, m}$ — гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ равномерно непрерывна;*

2. *$rang\, B = m$, существует матрица θ порядка $m \times n$ такая, что матрица $\tau = \theta B$ - неособая;*

3. *матрица $H_0 = H_0^*$ порядка $n \times n$ такая, что $H_0 B = 0$;*

4. *матрицы P_1, P_2, P_3, P_5 определяются формулами (18)-(20), (23), соответственно, где $P_2 = -2\bar{P}_1 \tau^{-1} \theta A + 2K \tau^{-1} \theta$, $2K\tau^{-1}\theta = -2B^* H - \tau_1(\mu_0^{-1} + \mu_1^{-1})S + \tau_3 SA$, $H = H^*$ — матрица порядка $n \times n$, $\bar{P}_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_1^*)$, ;*

5. *матрицы $\bar{P}_1 > 0$, $\bar{P}_5 = \frac{1}{2}(P_5 + P_5^*) \geq 0$, $\Pi_0 = H + H_0 + \theta^*\tau^{*-1}K\tau^{-1}\theta - \frac{1}{2}S^*\tau_3^+ S > 0$.*

Тогда тривиальное решение системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Как следует из условия теоремы, выполнены все условия леммы 7. Следовательно, решение системы (1), (2) ограничено и верна оценка (26). Из оценки (26) при $\bar{P}_5 \geq 0$ следует, что

$$0 \leq \int\limits_0^{\infty} \varphi^*(\sigma(t))\bar{P}_1\varphi(\sigma(t))dt < \infty,$$

где $\bar{P}_1 > 0$, $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ – равномерно непрерывна. Отсюда следует, что $\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. Так как матрица A гурвицева, то из $\varphi(\sigma(t)) \to 0$ при $t \to \infty$ следует, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, $x(t; 0, x_0, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$ $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$ и $\forall \varphi$, $\varphi \in \Phi_0$. Из гурвицевости матрицы $A + B\mu S$, $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_0$ следует асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (1), (2) при $\sigma \in S_\delta$. Тогда, согласно определению тривиальное решение системы (1), (2) абсолютно устойчиво. Теорема доказана.

Для проверки условий теоремы можно предложить следующий метод.

1. Для управляемости пары (A, B) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang}(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n.$$

Гурвицевость матриц A, $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ можно проверить известными методами линейной теории (критерий Гурвица, Раусса, Льенара-Шипара, Михайлова и др).

2. Если rang $B = m$, то всегда существует прямоугольная матрица θ порядка $m \times n$ такая, что матрица $\tau = \theta B$ – неособая.

3. Общий метод построения матрицы H_0 изложен в [3].

4. Элементы матриц θ, τ_1, τ_3, K, H_0, H определяются из решения оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^{m} (\mu_{0i} - \mu_{1i}) \to \sup \tag{27}$$

при условиях

$$\tau_1 \mu_0^{-1} \mu_1^{-1} + \tau_3 SB > 0, \quad 2K\tau^{-1}\theta = -2B^* H - \tau_1(\mu_0^{-1} + \mu_1^{-1})S + \tau_3 SA,$$
$$\bar{P}_5 \geq 0, \;\; \Pi_1 = H + H_0 + \theta^* \tau^{*-1} K \tau^{-1} \theta - \frac{1}{2} S^* \tau_3^+ S > 0, \tau_1 \geq 0. \tag{28}$$

Для решения оптимизационной задачи (27), (28) могут быть применены пакеты прикладных программ решения задач нелинейного программирования.

Цитированная литература

1. **Воронов А.А.** Основы теории автоматического управления. Часть II. М., 1966.
2. **Попов Е.П.** Прикладная теория нелинейных процессов. М., 1978.
3. **Айсагалиев С.А.** // Доклады НАН РК. 1992. №2. С. 3–8.
4. **Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.** // Вестник НАН РК. 1999. №3. С. 3–8.

Поступила в редакцию 13.11.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 80 — 86*

УДК 517.95

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХФАЗНЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ш. А. Балгимбаева

Институт математики МО и Н РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 sholpan@math.kz

Изучена линейная задача, которая лежит в основе некоторых нелинейных двухфазных задач, учитывающих эффект переохлаждения вещества. Доказаны существование и единственность решения задачи в весовом пространстве Гельдера локально по времени, получены коэрцитивные оценки решения.

Пусть $\Omega = (0,b)$ — интервал из $\mathbb{R}$, $0 < b < \infty$. Пусть $Q_T^{(1)} = \{(x,t) \mid 0 < x < \alpha(t), t \in (0,T)\}$, $Q_T^{(2)} = \{(x,t) \mid \alpha(t) < x < b, t \in (0,T)\}$ — неизвестные области, $x = \alpha(t)$, $0 < t \leq T$ — свободная граница, которая делит область Ω на две подобласти $\Omega_1 = (0,\alpha_0)$, $\Omega_2 = (\alpha_0, b)$, причем $\alpha(0) = \alpha_0$, $0 < \alpha_0 < b$, $b - \alpha_0 > d$, где $d = \text{const} > 0$.
Пусть $\Omega_1 = \Omega_1(0), \Omega_2 = \Omega_2(0)$, $\Gamma_T = \{(x,t)|x = \alpha(t),\ t \in [0,T].\}$

Положим $Q_T = \Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_T^{(m)} = \Omega_m \times (0,T)$, $m = 1,2,$ — фиксированные области, $S_T^{(1)} = \{0\} \times [0,T]$, $S_T^{(2)} = \{b\} \times [0,T]$, $\Gamma = \{\alpha_0\} \times [0,T]$ — постоянная граница между областями $\Omega_T^{(1)}, \Omega_T^{(2)}$, $\sigma_T = (0,T)$, $D_T = \mathbb{R}$. Положим $\pi = \{x \mid |x-\alpha_0| < d_0,\ x \in \Omega\}$, $\Pi^{(m)} = \Omega_m \cup \pi$, $\pi_T = \pi \times (0,T)$, $\Pi_T^{(m)} = \Pi^{(m)} \times (0,T)$.

Пусть $\mathcal{L}_m$ — параболический оператор второго порядка

$$\mathcal{L}_m(x,t,\partial_x,\partial_t) = \partial_t - A_m(x,t,\partial_x),\ m = 1,2,$$

где

$$A_m(x,t,\partial_x) = a_m(x,t)\partial_{xx}^2 + b_m(x,t)\partial_x + c_m(x,t),\ m = 1,2,$$

причем коэффициенты удовлетворяют условиям: $a_m(x,t) \geq a_0 = const > 0\ \forall (x,t) \in \Pi_T^{(m)}$, $m = 1,2$ $a_1(x,t) \neq a_2(x,t)\ \ \forall (x,t) \in \overline{\pi}_T$.

Рассмотрим две задачи нахождения неизвестных функций $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\alpha(t)$, удовлетворяющих параболическим уравнениям

$$\mathcal{L}_m u_m(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T^{(m)},\ m = 1,2, \tag{1}$$

Keywords: *free boundary, value problem, parabolic operator*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R35

начальному и граничному условиям

$$u_m\mid_{t=0}=u_{0m}(x),\quad x\in\Omega_m,\ m=1,2, \tag{2}$$

$$\alpha\mid_{t=0}=\alpha_0, \tag{3}$$

$$u_m\mid_{S_T^{(m)}}=p_m(t),\quad m=1,2, \tag{4}$$

а также условиям на свободной границе Γ_T
в задаче I

$$u_1(x,t)=u_2(x,t)=\varkappa\frac{d\alpha}{dt},\quad t>0, \tag{5}$$

$$\lambda_1\partial_x u_1-\lambda_2\partial_x u_2=-\varkappa_1\frac{d\alpha}{dt},\quad t>0, \tag{6$'$}$$

в задаче II

$$u_1(x,t)=u_2(x,t)=\varkappa\frac{d\alpha}{dt},\quad t>0, \tag{5}$$

$$\lambda_1\partial_x u_1-\lambda_2\partial_x u_2=0,\quad t>0. \tag{6$''$}$$

Условия $(6')$ и $(6'')$ можно объединить в одно

$$\lambda_1\partial_x u_1-\lambda_2\partial_x u_2=-(1-k)\varkappa_1\frac{d\alpha}{dt},\quad x\in\Gamma_T,\ t>0,\ k=0,1. \tag{6}$$

В работе Гетца И.Г., Мейрманова А.М. [1] была изучена одномерная двухфазная задача (1)—(5) с условием Стефана

$$\lambda_1\partial_x u_1-\lambda_2\partial_x u_2=-\varkappa\frac{d\alpha}{dt}. \tag{7}$$

Ими было доказаны существование и единственность решения в пространствах Соболева. Задачи (1)—(6) описывают, например, процесс плавления (кристаллизации) с учетом эффекта "переохлаждения" вещества.

Заметим, что в этих задачах неизвестные функции u_1,u_2 определены в неизвестных областях $Q_T^{(1)},Q_T^{(2)}$.

При исследовании задачи (1)—(6)возникает необходимость изучить линеаризованные задачи I, II. Сформулируем их.

Задача I. Требуется найти неизвестные функции $v_1,v_2,\rho,$ удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\mathcal{L}_m v_m(x,t)-q_m(x,t)\chi(x-\alpha_0)\frac{d\rho}{dt}=F_m(x,t)\ \text{ в }\ \Omega_T^{(m)},\quad m=1,2, \tag{8}$$

нулевым начальным и граничным условиям

$$v_m\mid_{S_T^{(m)}}=\psi_m(t),\quad m=1,2 \tag{9}$$

и условиям на фиксированной границе Γ

$$v_m-\varkappa\frac{d\rho}{dt}=\varphi_m,\quad m=1,2, \tag{10}$$

$$\lambda_1\partial_x v_1-\lambda_2\partial_x v_2+\varkappa_1\frac{d\rho}{dt}=\varphi_3(x,t). \tag{11}$$

З а д а ч а II. Требуется найти неизвестные функции v_1, v_2, ρ, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\mathcal{L}_m v_m(x,t) - q_m(x,t)\chi(x-\alpha_0)\frac{d\rho}{dt} = F_m(x,t) \text{ в } \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2, \tag{12}$$

нулевым начальным и граничным условиям

$$v_m \mid_{S_T^{(m)}} = \psi_m(t), \quad m=1,2 \tag{13}$$

и условиям на фиксированной границе Γ

$$v_m - \varkappa \frac{d\rho}{dt} = \varphi_m, \quad m=1,2, \tag{14}$$

$$\lambda_1 \partial_x v_1 - \lambda_2 \partial_x v_2 = \varphi_3(x,t). \tag{15}$$

Неизвестные функции v_1, v_2 здесь определены в фиксированных областях $\Omega_T^{(1)}$, $\Omega_T^{(2)}$.

Задачи (8)—(11), (12)—(15) представляют собой задачи нового типа. Они будут изучены в весовом пространстве Гельдера $C_s^l(Q_T)$ [2]. Определим это пространство.

Пусть l — нецелое положительное число, $s \le l$. Определим $C_s^l(Q_T)$ как банахово пространство функций $u(x,t)$, для которых конечна норма

$$|u|_{s,Q_T}^{(l)} = \sup_{t<T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]_{Q_t'}^{(l)} + \sum_{s<2j_0+j<l} \sup_{t<T} t^{\frac{2j_0+j-s}{2}} |\partial_t^{j_0}\partial_x^j u|_\Omega +$$

$$+ \begin{cases} |u|_{Q_T}^{(s)}, & s \ge 0 \\ 0, & s<0 \end{cases},$$

$$[u]_{Q_T}^{(l)} = \sum_{2j_0+j=[l]} [\partial_t^{j_0}\partial_x^j u]_{x,Q_T}^{(l-[l])} + \sum_{0<l-2j_0-j<2} [\partial_t^{j_0}\partial_x^j u]_{t,Q_T}^{(\frac{l-2j_0-j}{2})},$$

$$[v]_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(z,t)\in \bar{Q}_T} |v(x,t)-v(z,t)||x-z|^{-\alpha},$$

$$[v]_{t,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in \bar{Q}_T} |v(x,t)-v(x,\tau)||t-\tau|^{-\alpha},$$

$Q_t' = \Omega \times (\frac{t}{2}, t)$, $|u|_{Q_T}^{(s)}$ – норма пространства Гельдера $C_{x,t}^{s,\frac{s}{2}}(\bar{Q}_T)$ [3].

Под $C_s^{l/2}$ будем понимать банахово пространство функций $\alpha(t)$, имеющих конечную норму

$$|\alpha|_{s,\sigma_T}^{(l/2)} = \sup_{t<T} t^{\frac{l-s}{2}} \sum_{0<l-2j_0<2} [\partial_t^{j_0}\alpha]_{\sigma_t'}^{(\frac{l-2j_0}{2})} + \sum_{s<2j_0<l} \sup_{t<T} t^{\frac{2j_0-s}{2}} |\partial_t^{j_0}\alpha|_\Omega +$$

$$+ \begin{cases} |\alpha|_{\sigma_T}^{(s/2)}, & s \ge 0 \\ 0, & s<0 \end{cases},$$

где $\sigma_t' = (t/2, t)$, $|\alpha|_{\sigma_T}^{(s/2)}$ — норма пространства Гельдера $C^{s/2}(\overline{\sigma}_T)$.

При $s=l$ имеем пространство Гельдера $C_{x,t}^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$ и $C^{l/2}(\bar{\sigma}_T)$.

При $s \ge 0$ определим пространства $\overset{\circ}{C}{}_s^l(Q_T)$, $\overset{\circ}{C}{}_s^{l/2}(\sigma_T)$ как подпространства функций из $C_s^l(Q_T)$, $C_s^{l/2}(\sigma_T)$ соответственно, удовлетворяющих условиям $\partial_t^k u \mid_{t=o} = 0$, $2k \le [s]$. При $s<0$ положим $\overset{\circ}{C}{}_s^l(Q_T) = C_s^l(Q_T)$, $\overset{\circ}{C}{}_s^{l/2}(\sigma_T) = C_s^{l/2}(\sigma_T)$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть l — нецелое положительное число, $1 < s \le 2 + l$. Пусть коэффициенты оператора $\mathcal{L}_m$ и q_m принадлежат пространству $C^{l}_{s-2}(\Omega_T^{(m)})$, $\lambda_m \in C^{1+l}_{s-1}(S_T)$ и выполнены условия на S_T*

$$q_m \le -d_1 \ , \ m = 1, 2, \ d_1 > 0. \tag{16}$$

Тогда при любых функциях $F_m \in \overset{\circ}{C}{}^{l}_{s-2} (\Omega_T^{(m)})$, $\varphi_m \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s} (\Omega_T^{(m)})$, $\varphi_3 \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l}_{s-1} (\Omega_T)$, $\psi_m \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}_{s}$ (σ_T), $m = 1, 2$ каждая задача (8)—(11) и (12)—(15) имеет единственное решение $v_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}$ $(\Omega_T^{(1)})$, $v_2 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s} (\Omega_T^{(2)})$, $\rho \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{4+l}{2}}_{s+2} (\sigma_T)$, для которого справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{2} |v_m|^{(2+l)}_{s,\Omega_T^{(m)}} + |\rho|^{(\frac{4+l}{2})}_{s+2,\sigma_T} \le c_{1,k}(\sum_{m=1}^{2}(|F_m|^{(l)}_{s-2,\Omega_T^{(m)}} + |\varphi_m|^{(2+l)}_{s,\Omega_T^{(m)}} + |\psi_m|^{(\frac{2+l}{2})}_{s,\sigma_T}) + |\varphi_3|^{(1+l)}_{s-1,\Omega_T}), \quad k = I, II. \tag{17}$$

Теорема 1 будет доказана при помощи метода Шаудера и построения регуляризатора [3]. При их применении требуется решение модельных задач — задачи Коши, первой краевой задачи и задачи сопряжения, которая является задачей нового типа и ранее не рассматривалась. Однозначная разрешимость в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}$ двух первых модельных задач установлена в работах [2], [4]—[6].

Изучим модельную задачу сопряжения.

Пусть $D_1 = \{x \mid x < 0\}$, $D_2 = \{x \mid x > 0\}$, $D = \mathbb{R}$, $D_T^{(m)} = D_m \times (0, T)$, $D_T = D \times (0, T)$, $R_T = \{0\} \times [0, T]$, $\sigma_T = (0, T)$.

Требуется определить функции $u_1(x, t), u_2(x, t), \rho(t)$, удовлетворяющие уравнениям теплопроводности

$$\partial_t u_m - a_m^2 \partial^2_{xx} u_m - q_m \frac{d\rho}{dt} = f_m(x, t) \ \text{ в } \ D_T^{(m)}, \quad m = 1, 2, \tag{18}$$

нулевым начальным условиям и условиям на границе R_T

$$u_m - g_m = \varkappa \frac{d\rho}{dt}, \ m = 1, 2, \tag{19}$$

$$\lambda_1 \partial_x v_1 - \lambda_2 \partial_x v_2 = g_3, \tag{20}$$

где $a_m > 0$, $\lambda_m > 0$, $m = 1, 2$ — постоянные величины.

Теорема 2. *Пусть l — нецелое положительное число, $1 < s \le 2 + l$. Пусть $q_m < 0$, $m = 1, 2$, $\varkappa > 0$. Тогда при любых функциях $f_m \in \overset{\circ}{C}{}^{l}_{s-2} (D_T^{(m)})$, $g_m \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s} (D_T^{(m)})$, $m = 1, 2$, $g_3 \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l}_{s-1} (D_T)$ задача сопряжения (18)-(20) имеет единственное решение $u_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s} (D_T^{(1)})$, $u_2 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s} (D_T^{(2)})$, $\rho \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{4+l}{2}}_{s+2} (\sigma_T)$ и для него выполнена оценка*

$$\sum_{m=1}^{2} |u_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} + |\rho|^{(\frac{4+l}{2})}_{s+2,\sigma_T} \le c_2(\sum_{m=1}^{2}(|f_m|^{(l)}_{s-2,D_T^{(m)}} + |g_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}}) + |g_3|^{(1+l)}_{s-1,D_T}). \tag{21}$$

Преобразуем задачу (18)—(20) к задаче для однородного уравнения теплопроводности. Для этого построим вспомогательные функции $\omega_m \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s} (D_T)$, как решения следующей задачи

$$\partial_t \omega_m - a_m^2 \partial^2_{xx} \omega_m = f_m(x, t) \ \text{ в } \ D_T^{(m)}, \quad m = 1, 2, \tag{22}$$

$$\omega_m = g_m,\ x = 0,\ m = 1, 2. \tag{23}$$

На основании работ [2], [4]—[6] задача (22)—(23) имеет единственное решение $\omega_m \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T)$ и ее решение подчиняется оценке

$$\sum_{m=1}^{2} |\omega_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} \leq C_3 \sum_{m=1}^{2} (|f_m|^{(l)}_{s-2,D_T^{(m)}}. + |g_m|^{(2+l)}_{s,R_T}). \tag{24}$$

В задаче (18)—(20) произведем замену

$$u_m = v_m + \omega_m + q_m \rho,\ m = 1, 2, \tag{25}$$

где $v_1,\ v_2$ — новые неизвестные функции. В результате получим задачу нахождения функций $v_1,\ v_2,\ \rho,$ удовлетворяющих однородному уравнению теплопроводности

$$\partial_t v_m - a_m^2 \partial_{xx}^2 v_m = 0 \ \text{ в } \ D_T^{(m)},\ \ m = 1, 2, \tag{26}$$

нулевым начальным условиям и условиям на границе R_T

$$v_m + q_m \rho = \varkappa \frac{d\rho}{dt},\ m = 1, 2, \tag{27}$$

$$\lambda_1 \partial_x v_1 - \lambda_2 \partial_x v_2 = \Phi, \tag{28}$$

где $\Phi = g_3 - \lambda_1 \partial_x \omega_1 + \lambda_2 \partial_x \omega_2 \,|_{R_T},$ причем справедлива оценка

$$|\Phi|^{(\frac{1+l}{2})}_{s-1,\sigma_T} \leq C_4(|\omega_1|^{(2+l)}_{s,D_T^{(1)}} + |\omega_2|^{(2+l)}_{s,D_T^{(2)}} + |g_3|^{(1+l)}_{s-1,R_T}). \tag{29}$$

Нужно установить следующее неравенство для функций $v_m,\ m = 1, 2,\ \rho:$

$$\sum_{m=1}^{2} |v_m|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} + |\rho|^{(\frac{4+l}{2})}_{s+2,\sigma_T} \leq C_5 |\Phi|^{(\frac{1+l}{2})}_{s-1,\sigma_T}. \tag{30}$$

Найдем функции $v_m(x,t), m = 1, 2,\ \rho(t)$ в явном виде.

Лемма 1. *Пусть* $q_m < 0$. *Тогда решение линейной задачи имеет вид*

$$v_m(x,t) = \int_0^t \Phi(\tau) G_m(x, t-\tau) d\tau,\ m = 1, 2, \tag{31}$$

$$\rho(t) = \int_0^t \Phi(\tau) G^1(0, t-\tau) d\tau, \tag{32}$$

где

$$G_m(x,t) = \frac{\varkappa}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a_m^2 t}} - (\frac{p_0 \varkappa - |q_m|}{\kappa}) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-u)}} e^{-\frac{x^2}{4a_m^2(t-u)}} e^{-p_0 u} du,\ m = 1, 2, \tag{33}$$

$$G^1(0,t) = \int_0^t \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{\pi(t-u)}} e^{-p_0 u} du,$$

$\kappa = \lambda_1 \varkappa / a_1 + \lambda_2 \varkappa / a_2,\ p_0 = \frac{1}{\kappa}(\lambda_1 |q_1| / a_1 + \lambda_2 |q_2| / a_2).$

Доказательство. К задаче (26)-(28) применим преобразование Лапласа, которое имеет следующий вид

$$\widetilde{v}(p) \equiv L[v] = \int\limits_0^\infty v(t)e^{-pt}dt.$$

После преобразования уравнения (26), получим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d^2\tilde{v}_m(x,p)}{dx^2} - r_m^2\tilde{v}_m(x,p) = 0, \quad m = 1,2,$$

где $r_m = \sqrt{p}/a_m,\ m = 1,2.$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{array}{c} \tilde{v}_1(x,p) = A_1 e^{r_1 x},\ x < 0, \\ \tilde{v}_2(x,p) = A_2 e^{-r_2 x},\ x > 0. \end{array} \tag{34}$$

После применения преобразования Лапласа к условиям (27), (28) получим следующие равенства

$$A_m + q_m\tilde{\rho} - p\varkappa\tilde{\rho} = 0,\ m = 1,2,$$

$$\lambda_1 r_1 A_1 + \lambda_2 r_2 A_2 = \tilde{g},$$

из которых найдем коэффициенты A_1, A_2 и функцию $\tilde{\rho} := L[\rho]$

$$A_m = (p\varkappa - q_m)\tilde{\rho},\ m = 1,2,$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\varkappa_1\sqrt{p}(p+p_0)}\tilde{g},$$

где $p_0 > 0, \quad p_0 = \frac{1}{\kappa}(\lambda_1|q_1|/a_1 + \lambda_2|q_2|/a_2).$

Подставляя A_m в формулу (34), в области изображений получим функцию $\widetilde{v}_m$

$$\widetilde{v}_m = \left[\frac{\varkappa}{\kappa\sqrt{p}} - \frac{p_0\varkappa - |q_m|}{\kappa\sqrt{p}(p+p_0)}\right]\widetilde{g}e^{-\sqrt{p}|x|/a_m},\ m = 1,2. \tag{35}$$

Проводя обратное преобразование Лапласа, получим оригиналы функций $L^{-1}[\widetilde{v_m}] = v_m$, $L^{-1}[\widetilde{\rho}] = \rho$ в виде (31), (32).

Построенные функции удовлетворяют всем условиям задачи (26)—(28). В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Таким образом, лемма 1 доказана.

Функцию Грина (33) запишем в виде

$$G_m(x,t) = \frac{\varkappa}{\kappa}\Gamma_m(x,t) - 2a_m\frac{p_0\varkappa - |q_m|}{\kappa}\int\limits_0^t \Gamma_m(x,t-u)e^{-p_0 u}du,\ m = 1,2,$$

где $\Gamma_m(x,t),\ m = 1,2$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Для функции Грина $G_m(x,t),\ m = 1,2$ легко показать справедливость следующего утверждения

Лемма 2. *Функция Грина $G_m(x,t)$ линейной задачи (26)—(28), определяемая формулой (33), подчиняется оценкам*

$$|G_m(x,t)| \le C_6(1/\sqrt{t} + \sqrt{t})exp(-x^2/8a_m^2 t),\ m = 1,2,$$

$$|\partial_t^k\partial_x^m G_m(x,t)| \le C_7 t^{-(2k+m-1)/2}exp(-x^2/8a_m^2 t),\ m = 1,2.$$

Для функций v_m, ρ, найденных в виде (31), (32), установим оценки (30).

Функция Грина (33) линейной задачи (26)—(28) выражается через фундаментальное решение уравнения теплопроводности, поэтому на основании работ [2], [3], [4]—[7] оценка (30) справедлива для v_m. Из первого условия сопряжения (27) будет следовать оценка и для функции ρ.

Из оценки (30) с учетом формул (25), (29), (24) следует оценка (21). Тем самым мы доказали теорему 2. С учетом разрешимости в $\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}$ модельных задач Коши и граничной, следует справедливость теоремы 1.

Цитированная литература

1. **Гётц И. Г., Мейрманов А. М.** // Сиб. журнал индустр. мат. 2000. Т. 3, № 1(5). С. 66–86.

2. **Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.** Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 1975.

3. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

4. **Белоносов В. С.**// Мат. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 163–188.

5. **Солонников В. А., Хачатрян А. Г.**// Труды МИАН СССР. 1980. Т. 147. С. 147–155

6. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5, № 1. С. 99–134.

7. **Бижанова Г. И.** // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 1992. № 5. С. 7–13.

8. **Бижанова Г. И.** // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1993. № 1. С. 11– 17.

Поступила в редакцию 06.12.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 87 – 93*

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ж. А. Балдыбек, М. О. Отелбаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
480012 г.Алматы ул.Масанчи, 39/47.

В работе предложен новый приближенный метод решения краевых задач, основанный на вариационном принципе. Доказана теорема о слабой сходимости приближенного решения в L_2.

Пусть граница ограниченной области $\Omega \subset R^n$ определяется уравнением $F(x) = 0$, т.е. $\partial\Omega = \{x|F(x) = 0\}$, где $F(x) \in C^\infty(R^n)$. Допустим, что $F(x) > 0$ при $x \in \Omega$ и $F(x) < 0$ при $x \bar{\in} \Omega$,

$$|F(x)|^2 + |grad\, F(x)|^2 > \delta_0 > 0,$$

и $\psi(x)$ — r раз непрерывно дифференцируемая функция в R^n, $r \geq n+1$, $\left|D^k\psi\right| = 0$ при $|x| \geq c < \infty$ для каждого k из неравенства $0 \leq |k| \leq r$.

Л е м м а 1 . *Пусть* $0 \leq 2l \leq r$, $\upsilon(x) \in W_p^{2l}(R^n)$, $1 < p < \infty$, $l \geq 0$ *и*

$$\upsilon_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int\limits_{R^n} \upsilon(y)\, \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy.$$

Тогда

$$\upsilon_\varepsilon(x) \to \upsilon(x) \text{ в } \quad W_p^l(R^n) \text{ при } \quad \varepsilon \to 0.$$

Л е м м а 2 . *Пусть* $0 \leq 2l \leq n-2$ *и* G *— ограниченное множество. Если* $\upsilon(x) \in \dot{C}^{2l}(G)$ *и* $\upsilon_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int\limits_{R^n} \psi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \upsilon(y)\, dy$, *то*

$$\upsilon_\varepsilon(x) \to \upsilon(x) \text{ в } \quad \dot{C}^l(G) \text{ при } \quad \varepsilon \to 0.$$

Эти леммы известны в теориях вложений и приближений, как леммы с “шапкой” [1, 2].

При $a > 0$ определим $\Omega_a = \left\{x | \inf\limits_{y\in\Omega} |x-y| \leq a\right\}$.

Keywords: *boundary problem, approximate method*
2000 Mathematics Subject Classification: 49J40

Л е м м а 3 . *Пусть* $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ — *последовательность положительных чисел,* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ — *последовательность точек из* Ω_1 *такие, что*

$$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \textit{плотно в} \quad \Omega_1, \quad \varepsilon_m \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Если $\upsilon(x) \in \dot{W}_p^{2l}\left(\Omega_{1/2}\right)$, $r - l > n$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся* N *и элементы* $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{N}$ *и* $\{\tilde{\varepsilon}_k\}_{k=1}^{N}$, *где* $\tilde{x}_k \in \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\tilde{\varepsilon}_k \in \{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\left\| \upsilon(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \psi\left(\frac{x - \tilde{x}_k}{\tilde{\varepsilon}_k}\right) \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_k^n} \right\|_{W_p^l(R^n)} \leq \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\upsilon(x) \in \dot{W}_p^{2l}(\Omega_{1/2})$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется $\upsilon_\delta(x) \in \dot{C}^{\infty}(\Omega_1)$, что

$$|\upsilon(x) - \upsilon_\delta(x)|_{\dot{W}_p^l(\Omega_1)} \leq \delta. \tag{1}$$

Из леммы 2 найдется δ_1, что

$$\left\| \upsilon_\delta(x) - \delta_1^{-n} \int_{\Omega_1} \upsilon_\delta(t)\, \psi\left(\frac{x-t}{\delta_1}\right) dt \right\|_{C^l(R_n)} \leq \delta.$$

Отсюда и из (1) имеем

$$\left| \upsilon(x) - \delta_1^{-n} \int_{\Omega_1} \upsilon_\delta(t)\, \psi\left(\frac{x-t}{\delta_1}\right) dt \right|_{W_p^l(R^n)} \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Далее

$$(-\Delta + q)^l \, \delta_1^{-n} \int_{\Omega_1} \upsilon_\delta(t)\, \psi\left(\frac{x-t}{\delta_1}\right) dt = \delta_1^{-n} \int_{\Omega_1} \upsilon_\delta(x)\, (-\Delta + q)^l \, \psi\left(\frac{x-t}{\delta_1}\right) dt. \tag{3}$$

Возьмем малое число $\gamma > 0$, $\gamma \in \{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ и покроем R^n кубами Q_m $(m = 1, 2, ...)$, внутренности которых не пересекаются. Ребра кубов Q_m берем равными γ.

В каждом кубе Q_m возьмем по одной внутренней точке $t_m \in \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. В силу плотности $\{x_m\}$ в R^n такие точки существует. Так как $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$, а функция

$$(-\Delta + q)^l \, \psi\left(\frac{x-t}{\delta}\right)$$

— непрерывная и финитная, то γ можно взять столь малым, что выполняется неравенство

$$\sup_{x \in R^n} \sup_{t \in Q_m} \frac{1}{\delta_1^n} \left| (-\Delta + q)^l \, \psi\left(\frac{x-t}{\delta_1}\right) - (-\Delta + q)^l \, \psi\left(\frac{x-t_m}{\delta_1^m}\right) \right| \leq \gamma_1,$$

где γ_1 — заранее выбранное число.

Отсюда и из (3) имеем

$$\sup_{x \in R^n} \left| (-\Delta + q)^l \, \delta_1^{-n} \int_{\Omega_1} \upsilon_\delta(t)\, \psi\left(\tfrac{x-t}{\delta_1}\right) dt - \sum_m \left(\int_{Q_m} \upsilon_\delta(t)\, dt \right) (-\Delta + q)^l \, \psi\left(\tfrac{x-t_m}{\delta 1}\right) \right| =$$

$$= \sup_{x \in R^n} \left| \delta_1^{-1} \sum_{\{m\}} \int_{Q_m} \upsilon_\delta(t) \left[(-\Delta + q)^l \, \psi\left(\tfrac{x-t}{\delta_1}\right) - (-\Delta + q)^l \, \psi\left(\tfrac{x-t_m}{\delta_1}\right) \right] \delta_1^{-m} dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\{m\}} \gamma_1 \int_{Q_m} |\upsilon_\delta(t)| dt \leq C\gamma_1.$$

Так как Ω_1 ограничено, а $\psi(\cdot)$ финитна, то из последнего неравенства следует, что γ можно выбрать так, чтобы

$$\left\| \delta_1^{-n} \int\limits_{\Omega_1} \upsilon_\delta(t)\, \psi\left(\frac{x-t}{\delta_1}\right) dt - \sum_{\{m\}} c_m \psi\left(\frac{x-t_m}{\delta_1}\right) \right\|_{W_p^{2l}} \leq \gamma_2, \tag{4}$$

где γ_2 — заранее заданное число, $c_m = \int\limits_{Q_m} \upsilon_\delta(t)\, dt$.

Так как υ_δ финитна, то сумма по m в (4) распространяется только на конечное множество. Поэтому лемма следует из (4) и (2).

Лемма 4. *Пусть $\upsilon(x)/_{\partial\Omega} = 0$ и $\upsilon(x) \in W_p^l(\Omega)$. Тогда $\upsilon(x)$ можно продолжить на $\Omega_{1/2}$ так, чтобы $\upsilon(x) \in \dot{W}_p^l\left(\Omega_{1/2}\right)$, $\upsilon(x)/_{\partial\Omega} = 0$.*

Это — известная лемма в теории вложения.

Лемма 5. *Пусть $2l > n+1$, $\upsilon(x) \in \dot{W}_p^{2l}\left(\Omega_{1/2}\right)$, $\upsilon(x)|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда $\upsilon(x) = F(x)\, u(x)$, где $u(x) \in \dot{W}_p^{2l-1}(\Omega_1)$.*

Доказательство. В окрестности любой точки границы $\partial\Omega$ для функции $\upsilon \in W_p^{2l}(\Omega_1)$ можно написать отрезок ряда Тейлора. Тогда член при нулевой степени будет нулем в силу $\upsilon(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$. Отсюда легко выводится утверждение леммы.

Рассмотрим следующую задачу

$$-\Delta\upsilon + q(x)\, \upsilon = f, \quad x \in \Omega, \quad \upsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad q(x) \geq 0. \tag{5}$$

В силу гладкости $\partial\Omega$ (т.е. $F(x)$), если $q(x)$, $f(x) \in W_p^{2k}(\Omega)$, то решение (5) существует и принадлежит $W_p^{2(k+1)}(\Omega)$ и k>n.

Продолжим $q(x)$ на Ω_1 так, чтобы $q(x) \in W_p^{2k}(\Omega_1)$.

Решение продолжим по лемме 4, чтобы продолжение, которое обозначим также через $\upsilon(x)$, удовлетворяло условиям

$$\upsilon(x) \in \dot{W}_p^{2(k+1)}(\Omega_1), \quad \upsilon(x)/_{\partial\Omega} = 0.$$

Подставляя $\upsilon(x)$ в левую часть (5), получим $f(x)$, продолженное на Ω_1 и такое, что $f(x) \in W_p^{2k}(\Omega_1)$.

По лемме 5 имеем

$$\upsilon(x) = F(x)\, u(x),$$
$$u(x) \in \dot{W}_p^{2k+1}(\Omega_1). \tag{6}$$

По лемме 3 для любого $\delta > 0$

$$u(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m \delta_m^{-n} \psi\left(\frac{x-x_m}{\varepsilon_m}\right) + r(x), \tag{7}$$

где x_m — точки Ω_1, ε_m — положительные числа ($m = 1, 2, ..., N, N < \infty$) и $\|r(x)\|_{W_p^{2k}(\Omega_1)} \leq \delta$.

Тогда

$$u(x) = \sum_{\{m\}} c_m \varepsilon_m^{-n} \psi\left(\frac{x-x_m}{\varepsilon_m}\right). \tag{8}$$

Сказанное здесь верно для любой задачи, которая имеет гладкое решение для любой гладкой правой части.

Опишем метод решения.

Пусть $u_1, u_2, ..., u_m,$ — последовательность приближений к решению задачи (5). Возьмем $u_0 = 0$. Пусть все u_j при $j \le m$ построены. u_{m+1} будем искать в виде

$$u_{m+1} = u_m + c_m\varepsilon_m^{-n}\psi\left(\frac{x - x_m}{\varepsilon_m}\right)F(x) \equiv u_m + c_m\varphi\left(\varepsilon_m, x_m, x\right) =$$

$$= u_m + c_m\varphi_m = u_m + c_m\varphi, \tag{9}$$

где $\varepsilon_m > 0$, $x_m \in \Omega_1$.

Положим

$$J\left(u\right) = \int\limits_{R^n} \theta\left(x\right)|-\Delta u + qu - f|^2 dx, \tag{10}$$

где $\theta\left(x\right) = 1$ при $x \in \Omega$ и $\theta\left(x\right) = 0$ вне $\Omega_{1/2}$,

$$\theta\left(x\right) \in \dot{C}^r\left(R^n\right)\left(r \ge 6\right).$$

Подставляя (9) в (10), получим

$$J\left(u_{m+1}\right) = \int\limits_{R^n} \theta\left(x\right)|-\Delta u_m + qu_m - f - c_m\Delta\varphi + c_m q\varphi|^2 dx =$$

$$= J\left(u_m\right) + 2\int\limits_{R^n} \theta\left(-\Delta u_m + qu_m - f\right)\left(-\Delta\varphi + q\varphi\right)c_m dx +$$

$$+\int\limits_{R^n} \theta c_m^2|-\Delta\varphi + q\varphi|^2 dx.$$

Нам необходимо, чтобы u_m сходился к решению задачи (5), поэтому выберем c_m следующим образом

$$c_m = -\frac{\int\limits_{R^n} \theta\left(-\Delta u_m + qu_m\right)\left(-\Delta\varphi + q\,\varphi\right)dx}{\int\limits_{R^n} \theta|-\Delta\varphi + q\,\varphi|^2 dx}. \tag{11}$$

Получим

$$J\left(u_{m+1}\right) = J\left(u_m\right) - \frac{\left[\int\limits_{R^n} \theta\left(-\Delta u_m + qu_m - f\right)\left(-\Delta\varphi + q\,\varphi\right)dx\right]^2}{\int\limits_{R^n} \theta|-\Delta\varphi + q\,\varphi|^2 dx}, \tag{12}$$

где $\varphi = \varphi_m = \varepsilon_m^{-n}\psi\left(\frac{x - x_m}{\varepsilon_m}\right)F\left(x\right)$.

Выберем x_m и ε_m из условия:

$$\frac{\left[\int\limits_{R^n} \theta\left(-\Delta u_m + qu_m - f\right)\left(-\Delta\varphi_m + q\,\varphi_m\right)dx\right]^2}{\int\limits_{R^n} \theta|-\Delta\varphi_m + q\,\varphi_m|^2 dx} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\sup_{\substack{0 < \varepsilon_m < 1\\ x_m \in \Omega_1}} \frac{\left[\int\limits_{R^n} \theta\left(-\Delta u_m + qu_m - f\right)\left(-\Delta\varphi_m + q\,\varphi_m\right)dx\right]^2}{\int\limits_{R^n} \theta|-\Delta\varphi_m + q\,\varphi_m|^2 dx}. \tag{13}$$

При таком выборе, если

$$(-\Delta + q)\,\theta\,(-\Delta\,u_m + q\,u_m - f) \neq 0,$$

то

$$0 \leq J\,(u_{m+1}) < J\,(u_m) \leq ... \leq J\,(u_0) = J\,(0)\,. \tag{14}$$

Из (14) имеем

$$\theta\,(-\Delta\,u_m + q\,u_m - f) \to W \text{ в } \quad L_2\,(R^n)\,. \tag{15}$$

Это следует из слабой сходимости в $L_2\,(R^n)$. Слабая сходимость может реализоваться для некоторой подпоследовательности. Эту подпоследовательность также обозначим через $\{u_m\}$. Из (15) следует (т.к. $u_m/_{\partial\Omega} = 0$ и $\theta = 1$ на Ω), что

$$\begin{gathered} u_m \to \tilde{u} \text{ сильно в } W_2^{2-\varepsilon}\,(\Omega), \\ -\Delta\,\tilde{u} + q\,\tilde{u} - f \equiv W, \\ \tilde{u}/_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее в силу (12)

$$\int\limits_{R_n} \theta\,(-\Delta\,u + q\,u_m - f) - (\Delta\;\;F\,(x)\,\psi\left(\frac{x-\tilde{x}}{\delta}\right) + q\,(x)\,F\,(x)\,\psi\left(\frac{x-\tilde{x}}{\delta}\right) dx \to 0$$

при любом $\tilde{x} \in \Omega_1$ и $\delta > 0$.

Следовательно,

$$0 = \int\limits_{R^n} W\,(-\Delta\;\;F\,(x)\,\psi\left(\frac{x-\tilde{x}}{\delta}\right) + q\,(x)\,F\,(x)\,\psi\left(\frac{x-\tilde{x}}{\delta}\right) dx,\;\; \sup p\psi\left(\frac{x-\tilde{x}_m}{\delta_m}\right) \in \Omega. \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$0 = \int\limits_{\Omega} F\,(-\Delta\,+\,q)\,W \sum_{\{m\}} c_m \psi\left(\frac{x-x_m}{\delta_m}\right)\delta_m^{-n} dx. \tag{18}$$

Это равенство понимается в смысле обобщенных функций.

Отсюда вытекает, что

$$F\,(-\Delta + q)\,W = 0 \tag{19}$$

в смысле обобщенных функций. Действительно, так как линейное многообразие, натянутое на функции вида

$$\varphi\left(\frac{x-\tilde{x}}{\delta}\right),$$

где $\tilde{x}$ пробегает плотное множество, а δ пробегает последовательность, стремящуюся к нулю (см. леммы 1 и 4), то в (18) сумму можно сделать сколько угодно близкой заданной функции с носителем, строго входящим в Ω. Поэтому из (19) имеем, что

$$(-\Delta + q)\,W = 0 \tag{20}$$

в смысле обобщенных функций в Ω.

Аналогично получаем, что

$$(-\Delta + q)\,W = 0 \tag{21}$$

в смысле обобщенных функций в $\Omega_{1/2} - \Omega$.

Пусть g — заданная функция из $W_2^2\left(\Omega_{1/2}\right)$. В силу леммы 3 можно выбрать $\{\varepsilon_m\}$ и $\{x_m\}$ так, что

$$\left\| g - \sum_{\{m\}} c_m \psi\left(\frac{x - x_m}{\varepsilon_m}\right) \varepsilon_m^{-n} \right\|_{W_2^2\left(\Omega_{1/2}\right)} < \varepsilon \,,$$

где ε — наперед заданное число, $x_m \in \Omega_{1/2}$, $\sup p\psi\left(\frac{x-x_m}{\varepsilon_m}\right)$ строго лежит в $\Omega_{1/2}$.

Имеем

$$0 = \int\limits_{\Omega_1} \left(W\left(-\Delta\ + q\right) F \sum_{\{m\}} c_m \psi\left(\frac{x - x_m}{\varepsilon_m}\right) \varepsilon_m^{-n}\right) dx. \tag{22}$$

Пользуясь равенствами (20), (21) и формулой Грина, получим, что правая часть (22) выражается через поверхностный интеграл, т.е.

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} W \cdot \sum_{\{m\}} c_m \psi\left(\frac{x - x_m}{\varepsilon_m}\right) \varepsilon_m^{-n} \left(RF\right)(x)\, dx,$$

где RF записывается через производные на $\partial\Omega$.

Явно записав RF и используя (22), нетрудно получить, что $W/_{\partial\Omega} = 0$ в смысле обобщенных функций. Таким образом, W есть обобщенное решение задачи

$$-\Delta\, W + qW = 0,$$

$$W/_{\partial\Omega} = 0.$$

Но тогда $W = 0$ в Ω.

Теперь из (16) получим, что $u_m \to \tilde{u}$ сильно в $W_2^{2-\varepsilon}\left(\Omega\right)$, где $\tilde{u}$ — решение задачи

$$-\Delta\, \tilde{u} + q\, \tilde{u} = f,$$

$$\tilde{u}/_{\partial\Omega} = 0.$$

Из проведенных выкладок следует

Теорема. *Пусть $\{u_m\}$ $(u_0 = 0)$ построены по рекуррентным формулам (9), в которых c_m, ε_m, x_m выбраны согласно (12), (13), соответственно. Тогда u_m сходится к решению задачи*

$$\begin{cases} -\Delta\, u + q\, u = f, \\ u/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

в метрике $W_2^{2-\varepsilon}\left(\Omega\right)$ сильно, а $-\Delta\, u_m + qu_m \to f$ слабо в $L_2\left(\Omega\right)$.

Замечание 1. *Обратите внимание на то, что $J(u_m)$ не обязательно стремится к нулю.*

Замечание 2. *Выбор по формуле (11) чисел c_m не вызывает затруднений, но выбор ε_m и x_m согласно (13) в многомерном случае требует емких вычислений. Поэтому при счете лучше ε_mи x_m задавать случайными. При этом, если $0 < \varepsilon_m < 1$ и $x_m \in \Omega$ и распределение — равномерное, то теорема остается справедливой.*

Замечание 3. *При выборе алгоритма согласно теореме возникает вопрос скорости сходимости. Опираясь на анализ доказательства теоремы, авторы считают, что скорость сходимости — степенная. Но это не доказано и пока это есть всего лишь гипотеза.*

З а м е ч а н и е 4 . *При наличии результата о повышении гладкости данная теорема может быть распространена и на нелинейные задачи. Но в нелинейном случае вместо формулы (11) нужно оптимизировать выбор* c_m *на каждом шаге. Поэтому в нелинейном случае необходимо* $\{c_m\}$ *выбирать из условия оптимальности, а* ε_m *и* x_m *можно выбирать случайными. При таком подходе теорема сохраняется, например, для двумерного уравнения Навье-Стокса.*

З а м е ч а н и е 5 . *Если нелинейная задача имеет слабое решение, и отсутствует результат о повышении гладкости, то решая задачу, согласно замечанию 4 получаем, что* u_m *сходится. Но будет ли предел решением задачи — неизвестно. Однако этот предел доставляет экстремум для* $J(u)$*. Такая ситуация возникает для трехмерного уравнения Навье-Стокса.*

Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** Приближение функции многих переменных и теоремы вложения. М., 1969.

2. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.

Поступила в редакцию 24.09.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 94 – 98*

УДК 517.911

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ НЕЯВНОГО ВИДА

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина, О. Б. Перец, О. Р. Чайчук

Южноукраинский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского
65091 Украина г.Одесса ул. Старопортофранковская, 26 chaichuko@land.ru, itim@inbox.ru

Вопросы существования, количества и асимптотического поведения решений сингулярной задачи Коши $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ изучены достаточно подробно [1, 2, 3]. Для задачи Коши $F(t, x, x') = 0$, $x(t_0) = x_0$, как правило, регулярной рассматривались вопросы разрешимости и сходимости к решению последовательностей приближений [4, 5]; однако асимптотическое поведение решений даже регулярной задачи Коши изучено сравнительно мало. Хотя значительное внимание [6] было уделено задаче Коши для функционально-дифференциальных уравнений, но при этом для сингулярной задачи Коши практически не изучены даже вопросы разрешимости, в том числе, и в самых простых случаях. В предлагаемой работе исследуется асимптотическое поведение решений задачи Коши как для неявного дифференциального уравнения, так и для сингулярного функционально-дифференциального уравнения. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [1, 7, 8]. Предлагаемая схема рассуждений дает возможность с единой точки зрения изучать как регулярную, так и сингулярную задачи Коши.

В первой части работы рассматривается задача Коши

$$\sum_{0\le i,j,k\le m} a_{ijk}t^i x^j (x')^k = 0, \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где $t \in (0, \tau)$ – действительная переменная, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ – действительная неизвестная функция переменной t, a_{ijk} – постоянные (все i, j, k – целые неотрицательные), $a_{000} = 0$.

Определение. *Для каждого $\rho \in (0, \tau)$ непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ называется ρ-решением задачи (1), если x тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in (0, \rho]$ и если при этом $\lim_{t\to+0} x(t) = 0$.*

Обозначим $\omega = \{(i, j, k) : a_{ij0} \ne 0\}$, $\Omega = \{(i, j, k) : a_{ijk} \ne 0, k \ge 1\}$. Будем считать, что ω и Ω – непустые множества. Пусть $\nu_- = \min\limits_{(i,j,0)\in\omega} \{i + j\}$, $\nu_+ = \min\limits_{(i,j,k)\in\Omega} \{i + j\}$ и пусть $\nu_- = \nu_+ = \nu_0$;

Keywords: *regular and singular Caushy problems, functional-differential equation, asymptotical behaviour*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A09

очевидно, ν_0 – это целое неотрицательное число. Обозначим $\Omega_0 = \{(i,j,k) : i+j = \nu_0\}$. Если $(i,j,k) \in \Omega_0$, то $a_{ijk} \neq 0$ и при этом $i+j=\nu_0$; если же $(i,j,k) \notin \Omega_0$, то либо $a_{ijk}=0$, либо $a_{ijk} \neq 0$ и при этом $i+j \geq \nu_0+1$. Рассмотрим уравнение

$$P(c) = 0, \tag{2}$$

где

$$P(c) = \sum_{(i,j,k)\in\Omega_0} a_{ijk}c^{j+k}.$$

Пусть c – любой действительный корень уравнения (2). Обозначим

$$\xi(c) = \sum_{(i,j,k)\in\Omega_0, k\geq 1} k a_{ijk}c^{j+k-1}, \quad \eta(c) = \sum_{(i,j,k)\in\Omega_0, j\geq 1} j a_{ijk}c^{j+k-1}$$

и будем предполагать, что $\xi(c) \neq 0$.

Обозначим через $U(\rho, M, q, \lambda)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct| \leq Mt^{1+\lambda}, \quad |u'(t) - c| \leq qMt^{\lambda}, \quad t \in (0,\rho]; \tag{3}$$

здесь ρ, M, q, λ – положительные постоянные, $\rho < \tau$, $\lambda \leq 1$.

Т е о р е м а 1 . *Существуют такие ρ, M, q, λ, что:*
а) если $P'(c)(\xi(c))^{-1} + \lambda < 0$, то у задачи (1) имеется бесконечное множество ρ-решений, каждое из которых принадлежит множеству $U(\rho, M, q, \lambda)$. При этом при любом выборе постоянной x_0, удовлетворяющей условию $|x_0 - c\rho| < M\rho^{1+\lambda}$, задача (1) имеет хотя бы одно ρ-решение $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, принадлежащее множеству $U(\rho, M, q, \lambda)$, такое, что $x(\rho) = x_0$;

б) если $P'(c)(\xi(c))^{-1} + \lambda > 0$, то у задачи (1) имеется непустое множество ρ-решений, каждое из которых принадлежит множеству $U(\rho, M, q, \lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть

$$q > \left(|P'(c) + \lambda\xi(c)| + |\eta(c)|\right)|\xi(c)|^{-1},$$
$$M > |P'(c) + \lambda\xi(c)|^{-1} \cdot \sum_{(i,j,k)\notin\Omega_o} |a_{ijk}||c|^{j+k}$$

($\lambda \in (0,1]$ взято так, чтобы $P'(c) + \lambda\xi(c) \neq 0$). Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема статьи; считаем, что $\rho \in (0,\tau)$, ρ достаточно мало. Обозначим через U множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (3), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c$ и, кроме того,

$$\forall \mu \in (0,\rho] \forall t_i \in [\mu,\rho], i \in \{1,2\} : |u'(t_1) - u'(t_2)| \leq K(\mu)|t_1 - t_2|,$$

где $K(\mu) = 2|\xi(c)|^{-1}(\mu^{-2} + \mu^{-\nu_0})$. U – это замкнутое, ограниченное, выпуклое и (на основании теоремы Арцела) компактное множество. Преобразуем дифференциальное уравнение (1) к виду

$$\begin{aligned} x' \; &= \; c - t^{-\nu_0}(\xi(c))^{-1}\left(\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0, k\geq 2} a_{ijk}t^i(ct)^j \sum_{r=2}^{k} C_k^r c^{k-r}(x'-c)^r + \right. \\ &\left. + \sum_{(i,j,k)\in\Omega_0} a_{ijk}t^i(x^j - (ct)^j)(x')^k + \sum_{(i,j,k)\notin\Omega_0} a_{ijk}t^i x^j (x')^k \right) \end{aligned}$$

и будем далее рассматривать задачу Коши

$$\begin{aligned} x' &= c - t^{-\nu_0}(\xi(c))^{-1}\Bigg(\sum_{(i,j,k)\in\Omega_0, k\geq 2} a_{ijk}t^i(ct)^j\sum_{r=2}^{k} C_k^r c^{k-r}(u'(t)-c)^r + \\ &+ \sum_{(i,j,k)\in\Omega_0} a_{ijk}t^i(x^j-(ct)^j)(u'(t))^k + \sum_{(i,j,k)\notin\Omega_0} a_{ijk}t^i(u(t))^j(u'(t))^k\Bigg), \\ x(0) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Доказывается, что если $P'(c)(\xi(c))^{-1}+\lambda > 0$, то среди интегральных кривых уравнения (4), пересекающих множество $H = \{(t,x) : t = \rho, |x-c\rho| < M\rho^{1+\lambda}\}$, найдется одна и только одна интегральная кривая (обозначим ее через $J_u : (t, x_u(t))$) со свойством

$$|x_u(t) - ct| \leq Mt^{1+\lambda}, \quad t \in (0,\rho]; \tag{5}$$

если же $P'(c)(\xi(c))^{-1} + \lambda < 0$, то каждая интегральная кривая уравнения (4), пересекающая множество H, лежит во множестве $\left\{(t,x) :\ t \in (0,\rho],\ |x-ct| \leq Mt^{1+\lambda}\right\}$ при всех $t \in (0,\rho]$. В этом случае мы фиксируем любую точку $(\rho, x_0) \in H$ и обозначаем через $J_u : (t, x_u(t))$ ту интегральную кривую (4), которая проходит через эту точку; тогда выполняется условие (5) и $x_u(\rho) = x_0$. Для этого проводим качественные рассуждения (см. [8, с.303-305]); сохраняя обозначения [8], здесь нужно взять $\Phi_1 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], |x-ct| = Mt^{1+\lambda}\right\}$, $\Phi_3(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho],$ $|x - x_u(t)| = \nu t^{1+\lambda-\varepsilon}\}$, где ν – параметр, $\nu \in (0,1]$, постоянная $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Если по определению положить $x_u(0) = 0$, $x_u'(0) = c$, то нетрудно показать, что $x_u \in U$. Определим оператор $T : U \to U$ равенством $Tu = x_u$. Докажем, что оператор $T : U \to U$ непрерывен. Для этого также проводятся качественные рассуждения (см. [8, с.307-310]); сохраняя обозначения [8], здесь нужно взять $\Phi_2 = \left\{(t,x) : t \in (0,\rho], |x-x_2(t)| = h^\nu t^{1+\lambda-\varepsilon}\right\}$, где ν, ε –достаточно малые положительные постоянные, $\nu < 1$. На основании теоремы Шаудера оператор $T : U \to U$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $x_0 \in U$. Функция $x_0 : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ является ρ-решением задачи (1) с необходимыми свойствами. Теорема 1 доказана.

Во второй части работы рассматривается задача Коши

$$t^r x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0, \tag{6}$$

где $t \in (0,\tau)$ – действительная переменная, $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ – действительная неизвестная функция переменной t, r – постоянная, $r > 1$, $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция,

$$\begin{aligned} D &= \{(t,x,y,v,w) : t \in (0,\tau), |x| < \mu(t), |y| < \mu(g(t)), \\ &\quad |v| < \mu(t)/t, |\omega| < \mu(h(t))/h(t)\}; \end{aligned}$$

здесь $\mu : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0}\mu(t) = 0$, $\quad g : (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ – непрерывные неубывающие функции, $0 < g(t) \leq t$, $0 < h(t) \leq t$, $t \in (0,\tau)$. Предположим, что выполнены условия: 1) $|f(t,0,0,0,0)| \leq Kt^\alpha$, $t \in (0,\tau)$, где $\alpha > r-1$; 2) функции g, h непрерывно дифференцируемы, $g'(t) \geq 0$, $h'(t) \geq 0$, $t \in (0,\tau)$ и $\lim\limits_{t\to+0} tg'(t)(g(t))^{-1} = g_0$, $\lim\limits_{t\to+0} th'(t)(h(t))^{-1} = h_0$, $0 \leq g_0 < +\infty$, $0 \leq h_0 < +\infty$; $|h(t_1)-h(t_2)| \leq |t_1-t_2|$, $t_i \in (0,\tau)$, $i \in \{1,2\}$; 3) $\lim\limits_{t\to+0} t^{\alpha+1-r}(\mu(t))^{-1} = 0$; 4) $|f(t_1,x,y,v,w) - f(t_2,x,y,v,w)| \leq l_1(t_*)|t_1-t_2|$,

$$(t_i,x,y,v,w) \in D,\ 0 < t_* < t_i < \tau,$$

$$\begin{aligned} &|f(t,x_1,y,v,w) - f(t,x_2,y,v,w)| \leq l_2 t^{r-1}|x_1-x_2|, \\ &|f(t,x,y_1,v,w) - f(t,x,y_1,v,w)| \leq l_3 t^\alpha (g(t))^{r-1-\alpha}|y_1-y_2|, \\ &|f(t,x,y,v_1,w) - f(t,x,y,v_2,w)| \leq l_4 t^r|v_1-v_2|, \\ &|f(t,x,y,v,w_1) - f(t,x,y,v,w_2)| \leq l_5 (h(t))^r|w_1-w_2|, \end{aligned}$$

$i \in \{1, 2\}$,

где $l_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – непрерывная невозрастающая функция, $l_j, j \in \{2, 3, 4, 5\}$ – постоянные, причем

$$l_2 + l_3 + (l_4 + l_5)(\alpha + 1 + r) < \alpha + 1 - r.$$

Очевидно, $l_4 + l_5 < 1$.

Определение. *Для каждого $\rho \in (0, \tau)$ ρ-решением задачи (6) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ со свойствами:*

1) $(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))) \in D$, $t \in (0, \rho]$;

2) x тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при всех $t \in (0, \rho]$.

Обозначим через $U(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что $|u(t)| \le Mt^{\alpha+1-r}$, $t \in (0, \rho]$; здесь ρ, M – положительные постоянные, $\rho < \tau$.

Теорема 2. *Существуют такие ρ, M, что у задачи (6) имеется непустое множество ρ-решений, каждое из которых принадлежит множеству $U(\rho, M)$.*

Доказательство. Положим $x = yt^{-r}$, где $y : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ – новая неизвестная функция. Получим задачу Коши

$$\begin{aligned} ty'(t) &= ry(t) + tf\big(t, y(t)t^{-r}, y(g(t))(g(t))^{-r}, y'(t)t^{-r} - ry(t)t^{-r-1}, \\ &\qquad y'(h(t))(h(t))^{-r} - ry(h(t))(h(t))^{-r-1}\big), \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\alpha + 1 < q < (\alpha + 1 - r - l_2 - l_3)(l_4 + l_5)^{-1} - r,$$

$$M > K(\alpha + 1 - r - l_2 - l_3 - (q + r)(l_4 + l_5))^{-1}.$$

Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало. Обозначим через U множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

1) $|u(t)| \le Mt^{\alpha+1}$, $|u'(t)| \le qMt^{\alpha}$, $t \in (0, \rho]$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$;

2) $\forall u \in U \forall \varepsilon > 0 \forall t_i \in [0, \rho], i \in \{1, 2\} : |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon$,

где $\delta(\varepsilon) = (1 - l_4 - l_5)\varepsilon(2B(t_\varepsilon))^{-1}$. Здесь $B(t_\varepsilon) = l_1(t_\varepsilon) + (g(t_\varepsilon))^{-\alpha-1} + (h_1(t_\varepsilon))^{-1}$, причем постоянная $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ выбрана так, чтобы $qMt^{\alpha} < (1 - l_4 - l_5)\varepsilon/8$ при $t \in (0, t_\varepsilon]$. U – это замкнутое, ограниченное, выпуклое и (на основании теоремы Арцела) компактное множество. Будем исследовать задачу Коши

$$\begin{aligned} y' &= ryt^{-1} + f\big(t, u(t)t^{-r}, u(g(t))(g(t))^{-r}, \\ &\qquad u'(t)t^{-r} - ru(t)t^{-r-1}, u'(h(t))(h(t))^{-r} - ru(h(t))(h(t))^{-r-1}\big), \\ y(0) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $u \in U$ – произвольная фиксированная функция. С помощью качественных рассуждений доказывается, что среди интегральных кривых уравнения (7), пересекающих множество $H = \big\{(t, y) : t = \rho, |y| < M\rho^{\alpha+1}\big\}$, существует одна и только одна интегральная кривая (обозначим ее через $J_u : (t, y_u(t)))$ со свойством $|y_u(t)| \le Mt^{\alpha+1}$, $t \in (0, \rho]$. Если по определению положить $y_u(0) = 0$, $y'_u(0) = 0$, то нетрудно доказать, что $y_u \in U$. Определим оператор $T : U \to U$ равенством $Tu = y_u$. С помощью качественных рассуждений докажем, что оператор $T : U \to U$ непрерывен. Как и ранее, мы проводим качественные рассуждения, аналогичные [8, с.306-310]. Сохраняя обозначения [8], здесь нужно взять $\Phi_1 = \big\{(t, y) : t \in (0, \rho], |y| = Mt^{\alpha+1}\big\}$,
$\Phi_3(\nu) = \big\{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \nu t^{\alpha+1}(-\ln t)\big\}$,

где ν – параметр, $\nu \in (0,1]$, $\Phi_2 = \Big\{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - y_2(t)| = \eta d^{\nu}\left(t(g(t))^{-\nu}\right)^{\alpha+1}\Big\}$.
Здесь ν, η – положительные постоянные, η достаточно велико, ν достаточно мало, $\nu < 1$, $d = \max\limits_{t\in[0,\rho]}\big(|u_1(t) - u_2(t)| + |u_1'(t) - u_2'(t)|\big)$, $d > 0$. На основании теоремы Шаудера оператор $T : U \to U$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $y_0 \in U$. Определим функцию $x_0 : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ равенством $x_0(t) = y_0(t)t^{-r}$. Функция $x_0 : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ является ρ-решением задачи (6) с необходимыми свойствами. Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1972.

2. **Кигурадзе И.Т.** //Дифференц. уравнения. 1965. Т.1, № 10. С.1271–1291.

3. **Чечик В.А.** //Труды Московск. матем. об-ва. 1959. № 8. С.155–198.

4. **Витюк А.Н.** //Дифференц. уравнения. 1971. Т.7, № 9. С.1585–1580.

5. **Рудаков В.П.** //Известия вузов. Математика. 1971. № 9. С.79–84.

6. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.

7. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

8. **Зернов А.Е.** //Украинский матем. журнал. 2001. Т.53, № 3. С.302–310.

Поступила в редакцию 24.09.2003 г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 4 (10) . С. 99 — 101*

УДК 517.977

ОБ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ПРЕДПИСАННОГО ДВИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В. И. Максимов

Институт математики и механики УрО РАН
620219 Россия, г.Екатеринбург, ул.С.Ковалевской, 16 maksimov@imm.uran.ru

1. Введение. Постановка задачи. В статье рассматривается нелинейная динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(v(t) - u(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x \in R^n$ — фазовый вектор системы, $f : Z = R \times R^n \to R^n$ — нелинейная вектор-функция, B — матрица размерности $n \times r$. Входное воздействие $v(\cdot)$ является внешним (неизвестным) возмущением. Предполагается, что функция $v(\cdot)$ ограничена по существу:

$$v(\cdot) \in P(\cdot) = L_\infty(T, R^r). \tag{2}$$

В дискретные, достаточно частые, моменты времени измеряются фазовые состояния $x(t)$ системы (1). Для простоты изложения предполагается, что измерения производятся "равномерно" — в моменты $\tau_k = t_0 + k\delta$, $\delta = (\vartheta - t_0)/m$. Эти измерения неточны: результатами измерений в моменты τ_k являются вектора ξ_k^h, которые удовлетворяют неравенствам

$$\left\| x(\tau_k) - \xi_k^h \right\| \le h. \tag{3}$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерения, символ $\| \cdot \|$ означает норму в евклидовом пространстве R^n. Требуется организовать процесс управления системой (1) по принципу обратной связи таким образом, чтобы реализующееся движение было "близко" к предписанному движению, описываемому уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in T, \quad x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Такова содержательная постановка задачи.

Сформулированная выше задача исследовалась многими авторами (см. монографии [1, 2, 3] и библиографии в них). Один из методов ее решения (в случае, когда *a priori* задано ограниченное, выпуклое и замкнутое множество P такое, что $v(t) \in P$ при почти всех $t \in T$) был предложен в работе [4] и модифицирован для линейной системы, описываемой обыкновенным

Keywords: *nonlinear dynamical system, differential equation with delay incomplete information*
2000 Mathematics Subject Classification: 49J35

векторным дифференциальным уравнением, в работе [4]. При этом в статье [4] предполагалось выполненным включение (2). В случае, когда $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ стеснены интегральными ограничениями, аналогичная задача решалась в [5]. В данной статье развивается методика работ [3–5]. Указывается алгоритм формирования управления $u(t)$, основанный на принципе вспомогательных моделей [1, 7, 8, 9]. При этом по ходу реализации алгоритма сначала строится “оценка” $v^h(\cdot)$ входа $v(\cdot)$, а затем с ее помощью формируется управление $u(\cdot) = u^h(\cdot)$ в системе (1), позволяющее компенсировать воздействие $v(\cdot)$. Обратим внимание на тот факт, что оценка $v^h(\cdot)$ строится “в реальном времени”, т.е. в каждый момент времени t величина $v^h(t)$ вычисляется лишь на основе измерений, полученных до этого момента. Заметим также, что процесс построения оценки $v^h(\cdot)$ возмущения $v(\cdot)$, а также стабилизирующего управления $u^h(\cdot)$ является устойчивым по отношению к погрешности измерений h и временному шагу δ. Работа опирается на исследования [1, 4, 7, 9] и продолжает [5, 10].

2. Алгоритм решения. Ниже предполагается липшицевость функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ по аргументам (t, x), т.е. предполагается существование числа $L > 0$ такого, что для любых $(t'', x'') \in Z$ и $(t', x') \in Z$

$$\|f(t'', x'') - f(t', x')\| \le L\left\{\|x'' - x'\| + |t'' - t'|\right\}. \tag{5}$$

Для решения рассматриваемой задачи выбираются функции $\delta(h)$ и $\alpha(h) : R^+ \to (0, 1)$, $R^+ = \{r \in R : \ r > 0\}$ со свойствами:

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h)\alpha^{-2}(h) \le 1, \quad (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{6}$$

Функция $\alpha = \alpha(h)$ играет роль известного в теории некорректных задач регуляризатора [11]. До начала роботы алгоритма фиксируется величина h и равномерное разбиение Δ_h временного промежутка T с шагом $\delta(h)$

$$\Delta_h = \left\{\tau_{h,k}\right\}_{k=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,k+1} = \tau_{h,k} + \delta(h).$$

В соответствии с подходом [7–10] для решения задачи вводится вспомогательная система, называемая моделью. В теории идентификаций неизвестный параметр оценивается путем сравнения доступной информации о системе с соответствующими величинами, полученными для модельной системы. В данной статье модель описывается уравнением вида

$$\dot z^h(t) = f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) + B(v^h(t) - \tilde v^h(t)), \quad t \in \delta_{h,k} = [\tau_{h,k}, \tau_{h,k+1}), \quad k \in [0 : m_h - 1]. \tag{7}$$

Здесь $v^h(t)$ и $\tilde v^h(t)$ — вспомогательные управления. Начальное состояние модели задаем следующим образом: $z^h(t_0) = x_0$. Заметим, что модель является линейной системой, в то время как реальная система нелинейна по фазовым переменным.

Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. На k-м шаге ($k = 0, \dots, m_h - 1$), осуществляемом на временном отрезке $\delta_{h,k}$, выполняются следующие действия. Сначала задается функция

$$w_k^h(t) = -\frac{1}{\alpha(h)}\, B^\top \left(z^h(t) - \xi_k^h\right), \quad t \in \delta_{h,k}. \tag{8}$$

Затем в течение промежутка $\delta_{h,k}$ на вход модели подаются управления

$$v^h(t) = w_k^h(t), \qquad \tilde v^h(t) = w_{k-1}^h(t - \delta),$$

а на вход реальной системы (системы (1)) — управление

$$u(t) = u^h(t) = w_{k-1}^h(t - \delta).$$

Здесь и ниже символ $\top$ означает транспонирование. При $k = 0$ полагаем $w^h_{-1}(t) = 0$. Работа алгоритма заканчивается в момент времени ϑ.

Имеет место

Теорема. *Пусть выполнено условие согласования параметров (6). Тогда при $h \to 0$ имеют место сходимости*

$$x^h(\cdot) \to x(\cdot) \quad \text{в} \quad C(T; R^n),$$

$$\dot{x}^h(\cdot) \to \dot{x}(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; R^n).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00059), Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ 1846.2003.1) и Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН № 19 “Управление механическими системами”.

Цитированная литература

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.

2. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математческая теория конструирования систем управления. М., 1989.

3. **Колмановский В. Б., Носов В.,Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.

4. **Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.** Обратные задачи динамики и управляемые модели. М., 1987. Т. 1. С. 196–211.

5. **Fagmani F., Maksimov V., Pandolfi L.** A Recursive Deconvolution Approach to Disturbance Reduction // Rapporto interno №15. Torino, Italia, Aprile 2001.

6. **Максимов В. И.** //Автоматика и телемеханика. 1988. №4. С. 22–30.

7. **Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.** // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. №4. С. 29–41.

8. **Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.** Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solution. Gordon and Breach. 1995.

9. **Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.** // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, №5. С. 1–19.

10. **Близорукова М. С., Максимов В. И., Пандольфи Л.** // Автоматика и телемеханика. 2002. №2. С. 3–13.

11. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М., 1978.

12. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.

Поступила в редакцию 24.09.2003 г.

РЕФЕРАТЫ – ABSTRACTS

УДК: 681.5 2000 MSC: 35R30, 49N45

Abulkairov U.U. **Inverse problem of integral observation for general parabolic equation.** // Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.5–12.

In this paper we study the inverse problem of finding of the right side for the general quasi-linear parabolic equation. The global theorem of uniqueness and stability of generalized solution $(u(x,t), w(t)) \in V_2(Q_t) \times L^2(0,T)$ is proved by the method of consequent approximations. One-valued solvability in "small"of non-linear inverse problem is obtained.

References – 12.

УДК: 681.5 2000 MSC: 35R30, 49N45

Абылкаиров У.У. **Жалпы параболалық теңдеуге қойылған интегралдық бақылау-кері есебі.**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.5–12.

Жалпы квазисызықтық параболалық теңдеуге қойылған кері есеп – теңдеудің оң жағын қалпына келтіру зерттелді. Тізбектеп жуықтау әдісімен жалпылама шешімнің $(u(x,t), w(t)) \in V_2(Q_t) \times L^2(0,T)$ глобалдық шешімнің бар болуы, жалғыздық және орнықтылық теоремалары дәлелденді. Сызықтық емес кері есеп үшін жалғыз шешімнің бар болуы "аз уақыттык"деп дәлелденді.

Библ. – 12.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

Ayaganov E.T. **On sufficient conditions of dissipativity of a linear stationary differential system with delay**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.13–19.

In this article the sufficient conditions of dissipativity of a linear system of control of stationary object with delay have been obtained on the basis of direct Lyapunov method. Method of Lyapunov fixed sign functions, scalar - optimization functions and Razumikhin approach.

References – 10.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

Аяганов Е.Т. **Кешігуі бар сызықты стационар дифференциалдық жүйенің диссипативтілігінің жеткілікті шарттары туралы**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.13–19.

Бұл мақалда Ляпуновтын төте әдісі, Ляпуновтын белгісі анықталған функциясы әдісі, скаляр-оптимизациялық функция және Разумихин әдістері негізінде кешігулі стационарлық объектісімен сызықты басқару жүйесін диссипативтілігінін жеткіліктік шарттары алынған.

Библ. — 10

УДК: 517.946 2000 MSC: 35B10, 35F20

B e r z h a n o v A . B , K u r m a n g a l i e v E . K . **Multiperiodical on part of variables solution of one system in partial derivatives** // Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.20 — 25.

The sufficient conditions of existence and uniqueness of the multi periodical variable solutions of one system of differential equations in partial derivatives are obtained from counted ensemble variables.

References — 3.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35B10, 35F20

Б е р ж а н о в А . Б . , Құ р м а н ғ а л и е в Е . К . **Кейбір дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шешімі**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.20 — 25.

Айнымалылары саналымды жиын болатын кейбір дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарты зерттелген.

Библ. — 3.

УДК: 531.01+539.3 2000 MSC: 42A16

Y e r s h i b a y e v U . D . **On finding of domination frequency of free torsional fluctuations of elastic gomogeneous model of the Earth.**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.26–34.

Piecewise heterogeneous model of the Earth is under consideration. The characteristic equation for finding of frequencies of torsional fluctuations of this Earth model is obtained using special boundary conditions and disturbances. The existence of dominant frequence is shown.

References — 6.

УДК: 531.01+539.3 2000 MSC: 42A16

Е р ш і б а е в Ө . Д . **Серпімді біртекті емес Жер моделінің еркін айналма тербелісінің жиіліктерін анықтау жайында** // Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.26 34.

Литосфера қабықшасы мен толтырғыштан құралған серпімді біртекті емес Жер моделі элементтерінің еркін айналма тербелісінің динамикалық ауытқуларының жалпы шешуін тапқанда, қабықша үшін сыртқы шекаралық есептердің екі дербес шешуі табылған, ал қабықшаның ішкі шекарылықесебінің екі дербес шешуі мен толықтырғыштың екі дербес шешуі бұрын табылған. Қарастырылып отырған Жердің біртекті емес моделі үшін жылжулар арқылы өрнектелген, сәйкес жалпы шешулері жазылған.

Библ. — 6.

УДК: 517.95 2000 MSC: 76B03, 76B07

Iglikov A., Koshkarova B.C. **A problem of symmetric impact flows of incompressible inviscid fluid.**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.35–44.

In this paper the next system of equations that describe space flow of incompressible inviscid fluid is obtained for the components of velocity vector. The methods of generalized analytical function theory are used to solve the system.

References — 9.

УДК: 517.95 2000 MSC: 76B03, 76B07

Ігіліков А., Қошқарова Б.С. **Өстік симметриялық өзара соқтығысатын ағыны туралы есеп**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.35–44.

Еркін шекаралы бұл есеп функцияның интегралдық көрінісі негізінде сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіріліп, онын шешімі Гелдердің зілденген кеңістігінде болатындығы дәлелденген.

Библ. — 9.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C10, 03C35, 03C64

Kulpeshov B.Sh. **$\aleph_0$-categoricity and binarity in weakly O-minimal theories**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.45–53.

In this paper some properties of $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theories are proved. In particular, we present a description of $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theories of convexity rank 1.

References — 9.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C10, 03C35, 03C64

Кулпешов Б.Ш. **Әлсіз *O*-минимальды теорияларында $\aleph_0$-кесімділік пен бинарлық**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.45–53.

Бұл мақалада біз $\aleph_0$-кесімді бинарды әлсіз *o*-минимальды теориялардың кейбір қасиеттерді дәлелдейміз. Соның ішінде біз дөңестік рангісі 1 $\aleph_0$-кесімді бинарды әлсіз *o*-минимальды теориялардың суреттеуін ұсынамыз.

Библ. — 9.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Tasmambetov Zh.N. **Solving of permissible systems, connected with thirteen normal form** // Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.54–58.

The particular case of one special system of second order partial differential equations connected with thirteen normal form of permissible systems is investigated. The solutions are found in the form of Hermit's and Laguerr's orthogonal polynomial of two variables.

References — 3.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Тасмамбетов Ж.Н. **Он үшінші қалыпты формамен байланысты мүмкін жүйелерді шешу** // Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.54–58.

Мүмкін жүйелердің он үшінші қалыпты формасымен байланысты екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің бір арнайы жүйесінің дербес жағдайлары зерттелген. Шешімдер екі айнымалылы Эрмит пен Лагерра ортогонал көпмүшеліктері түрінде табылған.
Библ. — 3.

УДК: 517.518.476 2000 MSC: 42A16

Kharin S.N., Shpady U.R., Kulakhmetova A.T., Kulakhmetova Sh.A., Lobanova V.V. **Mathematical Models of Pre-Arcing Phenomena at the Contact Opening.**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 4 (10). P.59–67.

Dynamics of temperature and electromagnetic fields in opening electrical contacts is investigated at each consequtive stage, including heating of solid contacts , melting of contact constriction region, quasi-stationary extension and heating of molten bridge. Estimation of influence of Kohler and Thomson effects on the displacement of temperature maximum from the contact surface is given using axial-symmetric model.
References — 13.

УДК: 517.518.476 2000 MSC: 42A16

Харин С.Н., Құлахметова А.Т., Құлахметова Ш.А., Лобанова В.В. **Көпірлік уақиғаларды зерттеу үшін екі математикалық модель қарастырылған.**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 4 (10). Б.59–67.

Температураның динамикасы және қатаң түйісудің қызып кетуін қоса есепке алғанда бірінен кейін бірі келетін төрт тіркестер үшін электірлік түйісу тарқатылған кезде электромагнит өрісі. түйісудің сығылу аймағында контактылардың еруі, квазистационарлық кеңейу және еріген көпірдің қызып кетуі зерттелген.
Библ. — 13.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал"**, должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал")**.

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения – 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.