

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2010 том 10 № 1 (35)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 1 (35) 2010

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор

М.Т.Дженалиев

Заместители главного редактора:

Д.Б.Базарханов, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев, В.Г.Войнов,
Н.Т.Данаев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадильдаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

*Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(727)2-72-01-66, journal@math.kz, <http://www.math.kz>*

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2010г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 10, № 1 (35), 2010

| | |
|---|-----|
| Изолированные ограниченные на всей оси решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений <i>А. Д. Абылдаева, Д. С. Джумабаев</i> | 5 |
| Разрешимость обратной задачи магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости <i>У. У. Абылкаиров, С. Е. Айтжанов</i> | 13 |
| Приближение функций класса Бесова полиномами по обобщенной системе Хаара <i>Г. Акишев</i> | 23 |
| Дифференциальная алгебра бикватернионов. Преобразования Лоренца биволновых уравнений <i>Л. А. Алексеева</i> | 33 |
| Многoperиодические решения квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных <i>А. У. Бекбауова, К. К. Кенжебаев, Ж. А. Сартабанов</i> | 42 |
| Оптимизация билинейной биологической модели с тремя функциями управления с учетом запаздывания <i>Л. Х. Жунусова</i> | 47 |
| О сходимости одного алгоритма нахождения приближенного решения полупериодической краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений <i>Ж. М. Кадирбаева</i> | 52 |
| Методы математической морфологии в анализе фотосферного фонового магнитного поля солнца <i>Л. М. Каримова</i> | 60 |
| Результаты численного моделирования колебаний сейсмического маятника <i>Н. И. Мартынов, М. А. Рамазанова, Ж. С. Суйменбаева, И. О. Федоров</i> | 70 |
| О сходимости одного алгоритма метода параметризации <i>С. М. Темешева</i> | 83 |
| О разрешимости некоторых задач для уравнения Лапласа <i>Б. Т. Торбек, Б. Х. Турметов</i> | 93 |
| О суммировании коэффициентов Фурье <i>Л. П. Фалалеев</i> | 104 |

| | |
|----------------|-----|
| Рефераты | 110 |
|----------------|-----|

УДК 519.62

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. АБИЛЬДАЕВА, Д.С. ДЖУМАБАЕВ

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 anar@math.kz, azizakz@mail.ru

Введено определение изолированного ограниченного на всей оси решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Установлены необходимые и достаточные условия существования такого решения.

На $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна, $\|x\| = \max_{i=1:n} |x_i|$.

Задача 1. Найти ограниченное на всей оси решение дифференциального уравнения (1).

На основе метода параметризации [1] исследуются вопросы существования ограниченного на всей оси решения дифференциального уравнения (1).

Возьмем $h > 0$ и произведем разбиение $\mathbb{R} : \mathbb{R} = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} [(r-1)h, rh)$.

Используются следующие обозначения:

$\tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$;

m_n – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda = (\dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots)$, $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$, с нормой $\|\lambda\|_2 = \|(\dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots)\|_2 = \sup_r \|\lambda_r\|$, $r \in \mathbb{Z}$;

$\tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$ – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей функций $x[t] = (\dots, x_r(t), x_{r+1}(t), \dots)$ с нормой $\|x[\cdot]\|_3 = \sup_{r \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|x_r(t)\|$, где функция $x_r : [(r-1)h, rh) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна на $[(r-1)h, rh)$ и имеет конечный предел при $t \rightarrow rh - 0$, $r \in \mathbb{Z}$;

Keywords: parametrization method, nonlinear ordinary differential equation, necessary and sufficient conditions of the existence

2000 Mathematics Subject Classification: 34B16, 34B40

© А.Д. Абильдаева, Д.С. Джумабаев, 2010.

$L(m_n)$ – пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda : m_n \rightarrow m_n$ с индуцированной нормой.

Сужение функции $x(t)$ на r -ый интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)$ – вектор-функция размерности n , определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$. Тогда задача 1 эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad x_r \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow rh-0} x_r(t) = x_{r+1}(rh), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$x[t] = (\dots, x_r(t), x_{r+1}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n). \quad (4)$$

Здесь (3) – условия склеивания решения в точках разбиения \mathbb{R} .

Обозначим значение функции $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h$ через λ_r , произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, и от задачи (2)–(4) перейдем к эквивалентной задаче с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

$$\lambda_r + \lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t) - \lambda_{r+1} = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\lambda = (\dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots) \in m_n, \quad u[t] = (\dots, u_r(t), u_{r+1}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n). \quad (8)$$

Решением задачи (5)–(8) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\dots, \lambda_r^*, \lambda_{r+1}^*, \dots) \in m_n$, $u^*[t] = (\dots, u_r^*(t), u_{r+1}^*(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $[(r-1)h, rh)$ функция $u_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5) при всех $t \in [(r-1)h, rh)$ (при $t = (r-1)h$ уравнению (5) удовлетворяет правосторонняя производная функции $u_r^*(t)$), выполняется условие $u_r^*((r-1)h) = 0$, $r \in \mathbb{Z}$, и для $\lambda_r^* + \lim_{t \rightarrow rh-0} u_r^*(t)$, λ_{r+1}^* , $r \in \mathbb{Z}$, имеют место равенства (7).

Если $x^*(t)$ – ограниченное решение дифференциального уравнения (1), то пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\dots, \lambda_r^*, \lambda_{r+1}^*, \dots) \in m_n$, $u^*[t] = (\dots, u_r^*(t), u_{r+1}^*(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$, где $\lambda_r^* = x_r^*((r-1)h)$, $u_r^*(t) = x_r^*(t) - x_r^*((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, $x_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t)$ на интервал $[(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, является решением задачи (5)–(8). И, наоборот, если система пар $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, $r \in \mathbb{Z}$, является решением задачи (5)–(8), то функция, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, будет решением задачи 1.

Для всех $r \in \mathbb{Z}$ задача Коши (5), (6), при фиксированном значении параметра λ_r , эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh). \quad (9)$$

Из (9) определив $\lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t)$ и подставив их в (7), получим бесконечную систему нелинейных уравнений относительно введенных параметров:

$$\lambda_r + \int_{(r-1)h}^{rh} f(t, \lambda_r + u_r(t)) dt - \lambda_{r+1} = 0, \quad r \in \mathbb{Z},$$

которую запишем в виде операторного уравнения

$$Q_{1,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in m_n. \quad (10)$$

Условие А. Существует $h > 0$ такое, что система нелинейных уравнений $Q_{1,h}(\lambda, 0) = 0$, имеет решение $\lambda^{(0)} = (\dots, \lambda_r^{(0)}, \lambda_{r+1}^{(0)}, \dots) \in m_n$, задача Коши

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^{(0)} + u_r), \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

имеет решение $u_r^{(0)}(t)$ при всех $r \in \mathbb{Z}$ и двусторонне-бесконечная последовательность функций $u^{(0)}[t] = (\dots, u_r^{(0)}(t), u_{r+1}^{(0)}(t), \dots)$ принадлежит пространству $\tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$.

По заданной паре $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$, где $\lambda^{(0)} = (\dots, \lambda_r^{(0)}, \lambda_{r+1}^{(0)}, \dots) \in m_n$, $u^{(0)}[t] = (\dots, u_r^{(0)}(t), u_{r+1}^{(0)}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$, равенствами $x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, определим на \mathbb{R} ограниченную кусочно-непрерывную функцию $x^{(0)}(t)$.

Возьмем числа $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$ и составим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \{ \lambda = (\dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots) \in m_n : \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_2 = \sup_{r \in \mathbb{Z}} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda \},$$

$$S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \{ u[t] \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_3 < \rho_u \},$$

$$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \{ x(t) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - x^{(0)}(t)\| < \rho_x \},$$

$$\Omega_r(\lambda_r^{(0)}, u_r^{(0)}(t), h, \rho_x) = \{ (t, x) : t \in [(r-1)h, rh), \|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| < \rho_x \}, \quad r \in \mathbb{Z},$$

$$G_1^0(\rho_x) = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} \Omega_r(\lambda_r^{(0)}, u_r^{(0)}(t), h, \rho_x).$$

Условие В. Функция f в $G_1^0(\rho_x)$ непрерывна, имеет равномерно непрерывную частную производную f'_x и выполняется неравенство $\|f'_x(t, x)\| \leq L(t)$, где $L(t) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Предположим, что выполнено условие А. Тогда за начальное приближение решения задачи (5)-(8) возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t]) \in m_n \times \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$ и последующие приближения найдем по алгоритму:

Шаг 1. а) Из уравнения $Q_{1,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$, $\lambda \in m_n$, найдем $\lambda^{(1)} = (\dots, \lambda_r^{(1)}, \lambda_{r+1}^{(1)}, \dots)$;

б) решая задачу Коши (5), (6) на $[(r-1)h, rh)$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r \in \mathbb{Z}$, определим компоненты $u^{(1)}[t] = (\dots, u_r^{(1)}(t), u_{r+1}^{(1)}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$.

Шаг 2. а) Из уравнения $Q_{1,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$, $\lambda \in m_n$, найдем $\lambda^{(2)} = (\dots, \lambda_r^{(2)}, \lambda_{r+1}^{(2)}, \dots)$;

б) решая задачу Коши (5), (6) на $[(r-1)h, rh)$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $r \in \mathbb{Z}$, определим компоненты $u^{(2)}[t] = (\dots, u_r^{(2)}(t), u_{r+1}^{(2)}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$.

Продолжая процесс, на k -ом шаге найдем пару $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]) \in m_n \times \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма, одновременно обеспечивающие существование изолированного решения задачи с параметрами (5)–(8), устанавливает следующая

Теорема 1. Пусть существуют $h > 0$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия А, В, двусторонне-бесконечная матрица Якоби $Q'_{1,h}(\lambda, u)$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и имеют место неравенства:

$$1) \|(Q'_{1,h}(\lambda, u))^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \gamma_1(h),$$

$$2) q_1(h) = \gamma_1(h) \sup_{r \in \mathbb{Z}} \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^{rh} L(\tau) d\tau \right) - 1 - \int_{(r-1)h}^{rh} L(\tau) d\tau \right) < 1,$$

$$3) \frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|_2 < \rho_\lambda,$$

$$4) \frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|_2 \sup_{r \in \mathbb{Z}} \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^{rh} L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) < \rho_u,$$

$$5) \rho_\lambda + \rho_u \leq \rho_x.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) в $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ имеет изолированное решение.

Доказательство. Произведя разбиение \mathbb{R} с заданным шагом $h > 0$, от задачи 1 перейдем к задаче с параметрами (5)–(8). Для любой пары $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ имеют место соотношения:

$$\|\lambda_r + u_r(t) - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| \leq \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| + \|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\| < \rho_\lambda + \rho_u, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z},$$

поэтому, в силу неравенства 5) теоремы, для всех $t \in [(r-1)h, rh)$ и $r \in \mathbb{Z}$ пары $(t, \lambda_r + u_r(t))$ принадлежат множеству $G_1^0(\rho_x)$.

Решение задачи (5)–(8) найдем по алгоритму. За начальное приближение возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t]) \in m_n \times C(\mathbb{R}, h, m_n)$ из условия A и первое приближение по параметру определим решая операторное уравнение

$$Q_{1,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0, \quad \lambda \in m_n. \quad (11)$$

Из условия B , неравенства 5), следует, что двусторонне-бесконечная матрица Якоби $Q'_{1,h}(\lambda, u)$ является производной Фреше по λ оператора $Q_{1,h}(\lambda, u)$ и равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times$

$\times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Так как условия теоремы обеспечивают выполнение всех предположений теоремы 1 [2, с. 41], то существует $\lambda^{(1)} = (\dots, \lambda_r^{(1)}, \lambda_{r+1}^{(1)}, \dots) \in m_n$ – решение операторного уравнения (11), и справедлива оценка:

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \gamma_1(h) \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|_2. \quad (12)$$

Функцию $u_r^{(1)}(t)$ найдем, решая задачу Коши:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^{(1)} + u_r), \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Из условия B , неравенств 4), 5) следует существование $u_r^{(1)}(t)$ и оценка:

$$\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \leq \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^t L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) \|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|, \quad (13)$$

для всех $t \in [(r-1)h, rh)$ и $r \in \mathbb{Z}$. Подставляя найденные функции $u_r^{(1)}(t)$, $r \in \mathbb{Z}$, в (10), получаем систему уравнений для нахождения второго приближения по параметру. Вновь используя теорему 1 [2, с. 41], найдем $\lambda^{(2)} \in m_n$ и оценку:

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\|_2 \leq \gamma_1(h) \|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|_2. \quad (14)$$

Отсюда, используя неравенства (13), получим:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\|_2 &\leq \gamma_1(h) \|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) - Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)})\|_2 \leq \\ &\leq \gamma_1(h) \sup_{r \in \mathbb{Z}} \int_{(r-1)h}^{rh} \|f(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(\tau)) - f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(\tau))\| d\tau \leq q_1(h) \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Продолжая этот процесс, мы найдем $\lambda^{(k)} = (\dots, \lambda_r^{(k)}, \lambda_{r+1}^{(k)}, \dots) \in m_n$, $u^{(k)}[t] = (\dots, u_r^{(k)}(t), u_{r+1}^{(k)}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$ и установим оценки:

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|_2 \leq q_1(h) \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \leq \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^t L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) \|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\|,$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Так как $q_1(h) < 1$, то из (16), (17) в силу неравенств 3), 4) теоремы следует, что $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и при $k \rightarrow \infty$ сходится к решению задачи с параметрами – паре $(\lambda^*, u^*[t])$, принадлежащей $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Тогда, ввиду неравенства 5) теоремы функция, определенная равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$ $r \in \mathbb{Z}$, принадлежит $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ и является решением дифференциального уравнения (1) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Покажем изолированность решения. Пусть пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ – решение задачи (5)–(8), принадлежащее $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Тогда существуют числа $\tilde{\delta}_1 > 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$ такие, что $\|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\|_2 + \tilde{\delta}_1 < \rho_\lambda$, $\|\tilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_3 + \tilde{\delta}_2 < \rho_u$. Если $\lambda \in S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1)$, $u[t] \in S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2)$, то в силу неравенств

$$\|\lambda - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \|\lambda - \tilde{\lambda}\|_2 + \|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \tilde{\delta}_1 + \|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\|_2 < \rho_\lambda,$$

$$\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_3 \leq \|u[\cdot] - \tilde{u}[\cdot]\|_3 + \|\tilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_3 \leq \tilde{\delta}_2 + \|\tilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_3 < \rho_u,$$

$\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $u[t] \in S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, т.е. $S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2) \subset S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_1(h) < 1, \quad q_1(h) < 1 - \varepsilon\gamma_1(h). \quad (18)$$

Из равномерной непрерывности $f'_x(t, x)$ в $G_1^0(\rho_x)$ и структуры двусторонне-бесконечной матрицы Якоби $Q'_{1,h}(\lambda, u)$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1) \times S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2)$, т.е. существует $\delta \in (0, \min\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\})$, при котором $\|Q'_{1,h}(\lambda, u) - Q'_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})\|_{L(m_n)} < \varepsilon$ для всех $(\lambda, u) \in S(\tilde{\lambda}, \delta) \times S(\tilde{u}[t], \delta)$. Заметим, что если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ – решение задачи (5)–(8), то $Q_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$.

Пусть $(\hat{\lambda}, \hat{u}[t]) \in S(\tilde{\lambda}, \delta) \times S(\tilde{u}[t], \delta)$ – другое решение задачи (5)–(8). Так как $Q_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$ и $Q_{1,h}(\hat{\lambda}, \hat{u}) = 0$, то из равенств

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} - (Q'_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}))^{-1} Q_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}), \quad \hat{\lambda} = \hat{\lambda} - (Q'_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}))^{-1} Q_{1,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})$$

следует, что

$$\tilde{\lambda} - \hat{\lambda} = -(Q'_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}))^{-1} \int_0^1 (Q'_{1,h}(\hat{\lambda} + \theta(\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}), \tilde{u}) - Q'_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})) d\theta (\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}) -$$

$$-(Q'_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}))^{-1} (Q_{1,h}(\hat{\lambda}, \tilde{u}) - Q_{1,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})),$$

откуда

$$\|\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}\|_2 \leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \|Q_{1,h}(\hat{\lambda}, \tilde{u}) - Q_{1,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \sup_{r \in \mathbb{Z}} \left\{ \int_{(r-1)h}^{rh} L(t) \|\tilde{u}_r(t) - \hat{u}_r(t)\| dt \right\}. \quad (19)$$

Так как $\|\tilde{u}_r(t) - \hat{u}_r(t)\| \leq \int_{(r-1)h}^t L(\tau) (\|\tilde{\lambda}_r - \hat{\lambda}_r\| + \|\tilde{u}_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau)\|) d\tau$, то в силу леммы Гронуолла-Беллмана:

$$\|\tilde{u}_r(t) - \hat{u}_r(t)\| \leq \left(\exp \left(\int_{(r-1)h}^t L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) \|\tilde{\lambda}_r - \hat{\lambda}_r\|. \quad (20)$$

Подставив (20) в правую часть (19), имеем:

$$\|\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}\|_2 \leq \frac{q_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \|\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}\|_2. \quad (21)$$

Таким образом, в силу неравенств (18), (20), (21) имеют место равенства $\tilde{\lambda}_r = \hat{\lambda}_r$, $\tilde{u}_r(t) = \hat{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$. Теорема 1 доказана.

Далее рассматриваются изолированные в смысле следующего определения решения

Определение. Функция $x^*(t) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ называется "изолированным" решением задачи 1, если существует число $\rho_0 > 0$, при котором функция $f(t, x)$ в $G_{\rho_0}^* = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$, имеет равномерно непрерывную производную по x и линеаризованная задача

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y + \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

$$y(t) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \quad (23)$$

для любой функции $\varphi(t) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования изолированного в смысле определения решения задачи 1.

Теорема 2. Задача 1 имеет изолированное решение тогда и только тогда, когда существуют $h > 0$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия А, В, двусторонне-бесконечная матрица Якоби $Q'_{1,h}(\lambda, u)$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и справедливы неравенства 1)–5) теоремы 1.

Доказательство необходимости. Пусть $x^*(t)$ – "изолированное" решение задачи 1. Согласно определению, существует число $\rho_0 > 0$ и функция f в $G_1^*(\rho_0)$ имеет равномерно непрерывную частную производную по x . Поэтому найдется число L_0 такое, что $\|f'_x(t, x)\| \leq L_0$ для всех $(t, x) \in G_1^*(\rho_0)$.

Числовую ось разобьем на части с шагом $h > 0$ и рассмотрим эквивалентную задаче 1 задачу с параметрами (5)–(8). Пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\dots, \lambda_r^*, \lambda_{r+1}^*, \dots) \in m_n$, $u^*[t] = (\dots, u_r^*(t), u_{r+1}^*(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$, где $\lambda_r^* = x_r^*((r-1)h)$, $u_r^*(t) = x_r^*(t) - x_r^*((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, $x_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t)$ на интервал $[(r-1)h, rh)$, $r \in \mathbb{Z}$, будет решением задачи (5)–(8). При этом найдется число $M > 0$ такое, что $\|\dot{x}^*\|_1 \leq M$, и для каждого $r \in \mathbb{Z}$ справедлива оценка:

$$\|u_r^*(t)\| = \|x^*(t) - x^*((r-1)h)\| \leq \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|\dot{x}^*(t)\| \cdot h \leq M \cdot h, \quad t \in [(r-1)h, rh). \quad (24)$$

По определению существует единственное решение линеаризованной задачи (22), (23). Тогда, по теореме 4 [1, с. 61] существует $h_0 > 0$, при котором для всех $h \in (0, h_0]$ двусторонне-бесконечная матрица $Q_1^*(h) = Q'_{1,h}(\lambda^*, u^*)$ обратима и $\|(Q_1^*(h))^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \gamma_1/h$, где $\gamma_1 = \text{const}$, не зависящая от h . Возьмем число $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющим неравенству $\varepsilon_0 \gamma_1 \leq 1/4$ и используя равномерную непрерывность $f'_x(t, x)$ найдем $\rho_\lambda^* > 0$, $\rho_u^* > 0$ такие, что $\rho_\lambda^* + \rho_u^* = \rho^* \in (0, \rho_0]$ и $\|Q'_{1,h}(\lambda, u) - Q'_{1,h}(\lambda^*, u^*)\|_{L(m_n)} \leq \varepsilon_0$ для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S(u^*[t], \rho_u^*)$.

Применяя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [3, с. 142], получим, что двусторонне-бесконечная матрица Якоби $Q'_{1,h}(\lambda, u)$ ограниченно обратима и $\|(Q'_{1,h}(\lambda, u))^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \frac{4\gamma_1}{3h}$ для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S(u^*[t], \rho_u^*)$.

Выберем $h_1 \in (0, h_0]$ удовлетворяющим неравенствам:

$$Mh_1 \leq \rho_u^*/2, \quad (25)$$

$$\frac{4\gamma_1 L_0}{3} M h_1 < \frac{\rho_\lambda^*}{2}, \quad (26)$$

$$\frac{4\gamma_1 L_0}{3} M h_1 (e^{h_1 L_0} - 1) < \frac{\rho_u^*}{2}, \quad (27)$$

$$\frac{4\gamma_1}{3h_1} (e^{h_1 L_0} - 1 - h_1 L_0) \leq \frac{1}{3}, \quad (28)$$

$$2\gamma_1 L_0 M h_1 \left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3} (e^{h_1 L_0} - 1) + 1 \right) < \frac{\rho_\lambda^*}{2}, \quad (29)$$

$$2\gamma_1 L_0 M h_1 \left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3} (e^{h_1 L_0} - 1) + 1 \right) (e^{h_1 L_0} - 1) < \frac{\rho_u^*}{2}. \quad (30)$$

Если $u[t] \in S(0, \rho_u^*/2)$, то в силу (24), (25):

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_3 \leq \|u[\cdot]\|_3 + \|u^*[\cdot]\|_3 \leq \frac{\rho_u^*}{2} + \frac{\rho_u^*}{2} = \rho_u^*$$

и, следовательно, $S(0, \rho_u^*/2) \subset S(u^*[t], \rho_u^*)$.

При $h \in (0, h_1]$ рассмотрим систему нелинейных уравнений:

$$Q_{1,h}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in m_n. \quad (31)$$

Так как двусторонне-бесконечная матрица Якоби $Q'_{1,h}(\lambda, 0)$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$, оценка $\|(Q'_{1,h}(\lambda, 0))^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \frac{4\gamma_1}{3h}$ справедлива для всех $\lambda \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ и ввиду (24), (26)

$$\begin{aligned} \frac{4\gamma_1}{3h} \|Q_{1,h}(\lambda^*, 0)\|_2 &= \frac{4\gamma_1}{3h} \|Q_{1,h}(\lambda^*, 0) - Q_{1,h}(\lambda^*, u^*)\|_2 \leq \\ &\leq \frac{4\gamma_1}{3h} \sup_{r \in \mathbb{Z}} \int_{(r-1)h}^{rh} \|f(\tau, \lambda_r^*) - f(\tau, \lambda_r^* + u_r^*(\tau))\| d\tau \leq \frac{4\gamma_1 L_0}{3} M h < \rho_\lambda^*, \end{aligned}$$

то согласно теореме 1 из [2, с. 41] система уравнений (31) имеет решение $\lambda^{(0)} \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ и

$$\|\lambda^{(0)} - \lambda^*\|_2 \leq \frac{4\gamma_1 L_0}{3} M h. \quad (32)$$

Функцию $u_r^{(0)}(t)$ – решение задачи Коши (5), (6) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r \in \mathbb{Z}$, найдем методом последовательных приближений: $u_r^{(0,0)}(t) = u_r^*(t)$,

$$u_r^{(0,m+1)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0,m)}(\tau)) d\tau, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Из неравенств

$$\begin{aligned} \|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^{(0,0)}(t)\| &= \|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^*(t)\| = \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^*(\tau)) d\tau - \right. \\ &\left. - \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^* + u_r^*(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{(r-1)h}^t L_0 d\tau \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\| = L_0(t - (r-1)h) \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \quad \dots, \\ \|u_r^{(0,m+1)}(t) - u_r^{(0,m)}(t)\| &\leq \int_{(r-1)h}^t L_0 \|u_r^{(0,m)}(\tau) - u_r^{(0,m-1)}(\tau)\| d\tau \leq \dots \end{aligned}$$

$$\dots \leq \int_{(r-1)h}^t L_0 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_m} L_0 d\tau_m \dots d\tau_1 \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\| = \frac{(L_0(t - (r-1)h))^{m+1}}{(m+1)!} \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|,$$

$$\|u_r^{(0,m+1)}(t) - u_r^*(t)\| \leq \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!} \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r \in \mathbb{Z},$$

следует, что функциональная последовательность $\{u_r^{(0,m)}(t)\}$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно на $[(r-1)h, rh)$ сходится к $u_r^{(0)}(t)$ – решению задачи (5), (6) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ для всех $r \in \mathbb{Z}$.
 Причем $u^{(0)}[t] = (\dots, u_r^{(0)}(t), u_{r+1}^{(0)}(t), \dots) \in \tilde{C}(\mathbb{R}, h, m_n)$ и

$$\|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_3 \leq \frac{4\gamma_1 L_0}{3} Mh(e^{hL_0} - 1). \quad (33)$$

Таким образом, имеет место условие A и оценки (32), (33).

Теперь возьмем $\rho_\lambda = \rho_\lambda^*/2$, $\rho_u = \rho_u^*/2$, $\rho_x = \rho_\lambda + \rho_u$.

Если $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $u[t] \in S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, то на основании (26), (27), (32), (33) получим:

$$\|\lambda - \lambda^*\|_2 \leq \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_2 + \|\lambda^{(0)} - \lambda^*\|_2 < \rho_\lambda + \frac{4\gamma_1 L_0}{3} Mh < \rho_\lambda^*,$$

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_3 \leq \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_3 + \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_3 < \rho_u + \frac{4\gamma_1 L_0}{3} Mh(e^{hL_0} - 1) < \rho_u^*,$$

т.е. $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \subset S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$, $S(u^{(0)}[t], \rho_u) \subset S(u^*[t], \rho_u^*)$ при всех $h \in (0, h_2]$. Поэтому в $G_1^0(\rho_x)$ выполняется условие B .

Неравенство 1) теоремы 1 выполняется с постоянной $\gamma_1(h) = \frac{4\gamma_1}{3h}$. Тогда $q_1(h) = \frac{4\gamma_1}{3h} \times (e^{hL_0} - 1 - hL_0)$, и, в силу (28), $q_1(h) \leq \frac{1}{3}$ для всех $h \in (0, h_1]$.

Принимая во внимание оценки:

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_3 \leq \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_3 + \|u^*[\cdot]\|_3 \leq Mh \left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3} (e^{hL_0} - 1) + 1 \right),$$

$$\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|_2 = \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) - Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, 0)\|_2 \leq hL_0 \|u^{(0)}[\cdot]\|_3$$

и неравенства (29), (30), получим следующее:

$$\frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|_2 \leq 2\gamma_1 L_0 Mh \left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3} (e^{hL_0} - 1) + 1 \right) < \rho_\lambda,$$

$$\frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|_2 (e^{hL_0} - 1) \leq 2\gamma_1 L_0 Mh \left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3} (e^{hL_0} - 1) + 1 \right) (e^{hL_0} - 1) < \rho_u.$$

Таким образом, при выборе $\rho_\lambda = \rho_\lambda^*/2$, $\rho_u = \rho_u^*/2$, $\rho_x = \rho_\lambda + \rho_u$, все условия теоремы 1 выполняются для любого $h \in (0, h_1]$. Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. Джумабаев Д.С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.
2. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 1. С. 39–63.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 27.02.2010г.

УДК 517.956

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

У. У. АБЫЛКАИРОВ, С. Е. АЙТЖАНОВ

КазНУ имени аль-Фараби
050012 Алматы Масанчи, 39/47 U.Abylkairov@inbox.ru
КазНПУ имени Абая
050010 Алматы Достык, 13

В работе рассматривается обратная нестационарная задача магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, в которой требуется определить скорость движения $\vec{v}(x, t)$, магнитную напряженность $\vec{H}(x, t)$, градиент давления $\nabla p(x, t)$, внешнюю силу $\vec{f}(x)$ и токи $\text{rot}\vec{j}(x)$. При этом к условиям, составляющим прямую задачу, добавляются условия переопределения.

В работах [1–4] исследованы обратные задачи для системы уравнений Навье-Стокса с финальным переопределением.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega \subset R^2$, обратную задачу магнитной гидродинамики. Определить $\vec{v}(x, t)$, $\nabla p(x, t)$, $\vec{H}(x, t)$, $\vec{f}(x)$ и $\text{rot}\vec{j}(x)$, которые удовлетворяют (1)–(6):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 v_k \vec{v}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho} \sum_{k=1}^2 H_k \vec{H}_{x_k} - \nu \Delta \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \left(p + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right) + g(x, t) \vec{f}(x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma \mu} \text{rot rot} \vec{H} - \text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] = \frac{\xi(x, t)}{\sigma \mu} \text{rot} \vec{j}(x), \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad \text{div}(\mu \vec{H}) = 0, \quad (3)$$

начальным условиям

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}_0(x), \quad \vec{H}(x, 0) = \vec{H}_0(x), \quad (4)$$

граничным условиям

$$\vec{v}|_S = 0, \quad H_n|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right|_S = 0, \quad (5)$$

и условиям переопределения

$$\vec{v}(x, T) = \vec{U}(x), \quad \vec{H}(x, T) = \vec{\Psi}(x), \quad \nabla p(x, T) = \nabla \pi(x). \quad (6)$$

Здесь \vec{v} – скорость жидкости, \vec{H} – магнитная напряженность, p – давление, $g(x, t)\vec{f}(x)$ – внешние гидродинамические силы, $\xi(x, t)\text{rot}\vec{j}(x)$ – токи, μ – магнитная проницаемость, σ – проводимость, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость жидкости, \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности S , $H_n = \vec{H} \cdot \vec{n}$.

$J_1^0(\Omega)$ подпространство $W_2^1(\Omega)$, состоящее из соленоидальных векторов. Через $\hat{J}(\Omega)$ обозначим подпространство $W_2^2(\Omega)$, состоящее из соленоидальных векторов, удовлетворяющих на Γ условиям: $u_n|_\Gamma = 0$, $\text{rot}\vec{u}|_\Gamma = 0$.

Определение 1. *Обобщенным решением обратной задачи (1)–(6) называется набор функций $\{\vec{v}, \vec{H}, \nabla p, \vec{f}, \text{rot}\vec{j}\}$, удовлетворяющих соотношениям (1)–(6) при условии, что $\vec{v} \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap J_1^0(Q_T)$, $\vec{H} \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap \hat{J}(Q_T)$, $\vec{f} \in L_2(\Omega)$, $\text{rot}\vec{j} \in L_2(\Omega)$, а функция $\nabla p(x, t) \in G(\Omega)$ при любом t из $[0, T]$ и непрерывно зависит от t в норме этого пространства на $[0, T]$.*

Введенные операторы T_g и S_ξ определены корректно, так как нужные дифференциальные свойства для \vec{v} , \vec{H} и p гарантированы теорией, разработанной в работах О.А. Ладыженской и В.А. Солонникова [5–6].

Зафиксируем функции $g(x, t)$ и $\xi(x, t)$, определим нелинейные операторы $T_g : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, $S_\xi : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ следующими соотношениями:

$$(T_g \vec{f})(x) = \vec{v}_t(x, T), \quad (S_\xi \vec{r})(x) = \vec{H}_t(x, T), \quad (7)$$

где $r = \text{rot}\vec{j}(x)$, $\vec{f} = \vec{f}(x)$, а $\vec{v}(x, t)$ и $\vec{H}(x, t)$ решение прямой задачи (1)–(5) с $\vec{f} = g(x, t)\vec{f}(x)$, $\text{rot}\vec{j}_0 = \xi(x, t)\text{rot}\vec{j}(x)$.

Предположим, что $g(x, T) \neq 0$ и $\xi(x, T) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, другие нелинейные операторы $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ и $B : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ введем с помощью следующих соотношений:

$$(A\vec{f})(x) = \frac{1}{g(x, T)} (T_g \vec{f})(x), \quad (B\vec{r})(x) = \frac{\sigma\mu}{\xi(x, T)} (S_\xi \vec{r})(x). \quad (8)$$

Тем самым, если $g(x, t)\vec{f}(x) \in L_2(Q_T)$, $g_t(x, t)\vec{f}(x) \in L_{2,1}(Q_T)$ и $\xi(x, t)\text{rot}\vec{j}(x) \in L_2(Q_T)$, $\xi_t(x, t)\text{rot}\vec{j}(x) \in L_{2,1}(Q_T)$, дополнительно $g(x, t), g_t(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $\xi(x, t), \xi_t(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, то из уравнений (1) и (2) и в терминах введенных операторов (7), (8) искомая обратная задача примет следующий вид:

$$A\vec{f} + \vec{n} = \vec{f}, \quad B\vec{r} + \vec{\lambda} = \vec{r}, \quad (9)$$

где $\vec{n} = \frac{1}{g(x, T)} \left[-\nu \Delta \vec{U} + U_k \vec{U}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho} \Psi_k \vec{\Psi}_{x_k} + \frac{1}{\rho} \nabla \left(\pi + \frac{\mu \vec{h}^2}{2} \right) \right]$,

$$\vec{\lambda} = \frac{\sigma\mu}{\xi(x, T)} \left[\frac{1}{\sigma\mu} \text{rot}\text{rot}\vec{h} - \text{rot}(\vec{U} \times \vec{\Psi}) \right].$$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset R^2$, $g, g_t \in C(\bar{Q}_T)$, $\xi, \xi_t \in C(\bar{Q}_T)$, $|g(x, t)| \geq g_T > 0$, $|\xi(x, t)| \geq \xi_T > 0$ при $x \in \Omega$, $\vec{U}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap J_1^0(\Omega)$, $\vec{\Psi}(x) \in \hat{J}(\Omega)$, $\vec{v}_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap J_1^0(\Omega)$, $\vec{H}_0(x) \in \hat{J}(\Omega)$, $\nabla \pi(x) \in G(\Omega)$. Тогда операторы A и B вполне непрерывны из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Покажем, что операторы T_g и S_ξ вполне непрерывны. Пусть $\vec{f}(x)$ и $\vec{r}(x)$ произвольные элементы $L_2(\Omega)$. Возьмем любые последовательности $\{\vec{f}^N\}$ и $\{\vec{r}^N\}$ из $L_2(\Omega)$, такие что

$$\|\vec{f}^N - \vec{f}\| \rightarrow 0, \quad \|\vec{r}^N - \vec{r}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Покажем, что из (10) следует:

$$\left\| T_g f^N - T_g \vec{f} \right\| \rightarrow 0, \quad \left\| S_\xi \vec{r}^N - S_\xi \vec{r} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Для разности $\vec{W} = \vec{v}^N - \vec{v}$ и $\vec{h} = \vec{H}^N - \vec{H}$ рассмотрим в Q_T следующую задачу:

$$\vec{W}_t - \nu \Delta \vec{W} + v_k^N \vec{W}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho} H_k^N \vec{h}_{x_k} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\mu (\vec{H}^N - \vec{H})^2}{2} \right) + \vec{F}, \quad (12)$$

$$\vec{h}_t + \frac{1}{\sigma \mu} \text{rotrot} \vec{h} - H_k^N \vec{W}_{x_k} + v_k^N \vec{h}_{x_k} = \vec{G}, \quad (13)$$

$$\text{div} \vec{W} = 0, \quad \text{div} \vec{h} = 0, \quad (14)$$

$$H_n|_S = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \Big|_S = 0, \quad \vec{W} \Big|_S = 0, \quad (15)$$

$$\vec{W} \Big|_{t=0} = 0, \quad \vec{h} \Big|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

Здесь мы обозначили $\vec{F} = (\vec{f}^N - \vec{f})g - W_k \vec{v}_{x_k} + \frac{\mu}{\rho} h_k \vec{H}_{x_k}$, $\vec{G} = \frac{\xi(x,t)}{\sigma \mu} (\vec{r}^N - \vec{r}) + h_k \vec{v}_{x_k} - W_k \vec{H}_{x_k}$, где функции \vec{v}^N , \vec{H}^N и ∇p^N – обобщенное решение прямой задачи (1)–(5), соответствующее внешним силам $\vec{f}^N(x)g(x,t)$ и токам $\xi(x,t)\vec{r}^N(x)$.

\vec{v} , \vec{H} и ∇p – решение этой же задачи, отвечающее внешним силам $\vec{f}(x)g(x,t)$ и токам $\xi(x,t)\vec{r}(x)$. Задачу (12)–(16) относительно функции \vec{W} и \vec{h} можно рассматривать как линейную, так как (\vec{v}, \vec{H}) и (\vec{v}^N, \vec{H}^N) обладают следующими дифференциальными свойствами (см. [5], [6]): $(\vec{v}_{tx}, \text{rot} \vec{H}) \in L_2(Q_T) \times L_2(Q_T)$ и $(\vec{v}_{tx}^N, \text{rot} \vec{H}^N) \in L_2(Q_T) \times L_2(Q_T)$, тогда (\vec{v}, \vec{H}) и (\vec{v}^N, \vec{H}^N) являются элементами $L_q(\Omega) \times L_q(\Omega)$ при каждом $t \in [0, T]$ с любым конечным q и непрерывно зависят от t в норме $L_q(\Omega) \times L_q(\Omega)$. Для этой задачи справедлива оценка (см. [8], [9]):

$$\begin{aligned} & \left\| \vec{W}_t \right\|_{2, Q_T}^2 + \left\| \vec{h}_t \right\|_{2, Q_T}^2 + \nu \left\| \vec{W}_x \right\|_{2, \Omega}^2 + \frac{1}{\sigma \mu} \left\| \text{rot} \vec{h} \right\|_{2, \Omega}^2 + \\ & \nu \left\| P \Delta \vec{W} \right\|_{2, Q_T}^2 + \frac{1}{\sigma \mu} \left\| \text{rotrot} \vec{h} \right\|_{2, Q_T}^2 \leq c \left(\left\| \vec{F} \right\|_{2, Q_T}^2 + \left\| \vec{G} \right\|_{2, Q_T}^2 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим $\left\| \vec{F} \right\|_{2, Q_T}^2$ и $\left\| \vec{G} \right\|_{2, Q_T}^2$:

$$\left\| \vec{F} \right\|_{2, Q_T}^2 \leq 3 \left[\left\| (\vec{f}^N - \vec{f})g \right\|_{2, Q_T}^2 + \left\| W_k \vec{v}_{x_k} \right\|_{2, Q_T}^2 + \frac{\mu}{\rho} \left\| h_k \vec{H}_{x_k} \right\|_{2, Q_T}^2 \right],$$

$$\left\| W_k \vec{v}_{x_k} \right\|_{2, Q_T}^2 = \left\| (\vec{v}^N - \vec{v})_k \cdot \vec{v}_{x_k} \right\|_{2, Q_T}^2 \leq c(\Omega) \sup_{[0, T]} \left(\left\| \vec{v} \right\|_{2, \Omega}^{(2)} \right)^2 \cdot \left\| (\vec{v}^N - \vec{v})_x \right\|_{2, Q_T}^2,$$

$$\left\| h_k \vec{H}_{x_k} \right\|_{2, Q_T}^2 = \left\| (\vec{H}^N - \vec{H})_k \cdot \vec{H}_{x_k} \right\|_{2, Q_T}^2 \leq c(\Omega) \sup_{[0, T]} \left(\left\| \vec{H} \right\|_{2, \Omega}^{(2)} \right)^2 \cdot \left\| (\vec{H}^N - \vec{H})_x \right\|_{2, Q_T}^2.$$

Здесь мы использовали неравенство $\|u\|_{4, \Omega} \leq \sqrt{2} \|u\|_{2, \Omega}^{1/2} \cdot \|u_x\|_{2, \Omega}^{1/2} \leq c(\Omega) \|u_x\|_{2, \Omega}$.

Для разности двух обобщенных решений справедлива оценка [5]:

$$\begin{aligned} \chi(t) &\leq \exp \left\{ c_0 \int_0^t \Phi''^2(\tau) d\tau \right\} \chi(0) + \\ &+ \int_0^t \left(\sqrt{\rho} \|\vec{f}'\| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|\text{rot} \vec{J}_0\| \right) \exp \left\{ c_0 \int_\tau^t \Phi''^2(s) ds \right\} d\tau \leq \\ &\leq \exp \left\{ c_0 \int_0^T \Phi''^2(t) dt \right\} \left(\sqrt{\rho} \|\vec{f}^N - \vec{f}'\| \int_0^T \sup_{\Omega} |g(x, \tau)| d\tau + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|\vec{r}^N - \vec{r}'\| \int_0^T \sup_{\Omega} |\xi(x, \tau)| d\tau \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_0^t \Phi^2(\tau) d\tau \leq 2c_0 \int_0^t \chi^2(\tau) \Phi''^2(\tau) d\tau + \int_0^t \chi(\tau) \left(\sqrt{\rho} \|\vec{f}'\| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|\text{rot} \vec{j}\| \right) d\tau, \quad (19)$$

где $\chi^2(t) = \rho \|\vec{W}\|^2 + \mu \|\vec{h}\|^2$, $\Phi^2(t) = \rho \nu \|\vec{W}_x\|^2 + \frac{1}{\sigma} \|\text{rot} \vec{h}\|^2$, $\Phi''^2(t) = \rho \nu \|\vec{v}_x\|^2 + \frac{1}{\sigma} \|\text{rot} \vec{H}\|^2$, $\vec{f}' = (\vec{f}^N(x) - \vec{f}(x)) g(x, t)$, $\text{rot} \vec{j} = (\vec{r}^N(x) - \vec{r}(x)) \xi(x, t)$, $\chi(0) = 0$.

Если возвести в квадрат и проинтегрировать неравенство (18) по t от 0 до T , получим:

$$\begin{aligned} \int_0^T \chi^2(t) dt &= \rho \|\vec{W}\|_{2, Q_T}^2 + \mu \|\vec{h}\|_{2, Q_T}^2 \leq 2T \exp \left\{ 2c_0 \int_0^T \Phi''^2(t) dt \right\} \times \\ &\times \left(\rho \|\vec{f}^N - \vec{f}'\|^2 \left(\int_0^T \sup_{\Omega} |g(x, t)| dt \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \|\vec{r}^N - \vec{r}'\|^2 \left(\int_0^T \sup_{\Omega} |\xi(x, t)| dt \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T \Phi^2(t) dt &= \rho \nu \|(\vec{v}^N - \vec{v})_x\|_{2, Q_T}^2 + \frac{1}{\sigma} \|\text{rot} \vec{H}^N - \text{rot} \vec{H}\|_{2, Q_T}^2 \leq \\ &\leq 4T c_0 \exp \left\{ 2c_0 \int_0^T \Phi''^2(t) dt \right\} \int_0^T \left(\rho \|\vec{f}^N - \vec{f}'\|^2 \left(\int_0^t \sup_{\Omega} |g(x, \tau)| d\tau \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sigma} \|\vec{r}^N - \vec{r}'\|^2 \left(\int_0^t \sup_{\Omega} |\xi(x, \tau)| d\tau \right)^2 \right) \Phi''^2(t) dt + \\ &+ 2\sqrt{2T} \exp \left\{ c_0 \int_0^T \Phi''^2(t) dt \right\} \times \\ &\times \left(\rho \|\vec{f}^N - \vec{f}'\|^2 \left(\int_0^T \sup_{\Omega} |g(x, t)| dt \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \|\vec{r}^N - \vec{r}'\|^2 \left(\int_0^T \sup_{\Omega} |\xi(x, t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\int_0^T \left(\rho \|\vec{f}^N - \vec{f}'\|^2 \left(\sup_{\Omega} |g(x, t)| \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \|\vec{r}^N - \vec{r}'\|^2 \left(\sup_{\Omega} |\xi(x, t)| \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (10), (20), (21) и (17) заключаем, что

$$\|(\vec{v}^N - \vec{v})_t\|_{2, Q_T}^2 + \|(\vec{H}^N - \vec{H})_t\|_{2, Q_T}^2 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Рассмотрим в Q_T следующую задачу:

$$\vec{W}_t - \nu \Delta \vec{W} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F}_1, \quad \text{div} \vec{W} = 0, \quad (23)$$

$$\vec{W}\Big|_{t=0} = \vec{v}_2(x), \quad \vec{W}\Big|_S = 0, \quad (24)$$

$$\vec{h}_t + \frac{1}{\sigma\mu} \text{rotrot}\vec{h} = \vec{G}_1, \quad \text{div}\vec{h} = 0, \quad (25)$$

$$h_n|_S = 0, \quad \text{roth}\Big|_S = 0, \quad \vec{h}\Big|_{t=0} = \vec{h}_2(x), \quad (26)$$

где $\vec{W} = (\vec{v}^N - \vec{v})_t$, $\vec{h} = (\vec{H}^N - \vec{H})_t$, $\vec{F}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[(\vec{f}^N - \vec{f})g - v_k^N \vec{v}_{x_k} + v_k \vec{v}_{x_k} + \frac{\mu}{\rho} (H_k^N \vec{H}_{x_k} - H_k \vec{H}_{x_k}) \right]$,
 $\vec{G}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\xi(x,t)}{\sigma\mu} (\vec{r}^N - \vec{r}) + \left(\text{rot} [\vec{v}^N \times \vec{H}^N] - \text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \right]$, $\vec{v}_2(x) = P(\vec{f}^N - \vec{f})g(x, 0)$,
 $\vec{h}_2(x) = P[\vec{r}^N - \vec{r}] \frac{\xi(x,0)}{\sigma\mu}$.

Задача (23)–(24), а также задача (25)–(26) с условиями переопределения в пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$ однозначно разрешимы [6]. Умножим первое уравнение (23) скалярно в $L_2(Q_T)$ на функцию $\vec{W}(x, t)$, а также (25) на $\vec{h}(x, t)$, тогда получим следующее:

$$\frac{1}{2} \left\| \vec{W}(x, T) \right\|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_0^T \left\| \vec{W}_x(x, t) \right\|_{2,\Omega}^2 dt = \int_{Q_T} \vec{F}_1 \vec{W} dx dt + \frac{1}{2} \left\| \vec{W}(x, 0) \right\|_{2,\Omega}^2, \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} \left\| \vec{h}(x, T) \right\|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_0^T \left\| \text{rot}\vec{h}(x, t) \right\|_{2,\Omega}^2 dt = \int_{Q_T} \vec{G}_1 \vec{h} dx dt + \frac{1}{2} \left\| \vec{h}(x, 0) \right\|_{2,\Omega}^2. \quad (28)$$

Используя технику из [1–4], доказываем, что $(\vec{v}^N - \vec{v})_t$ и $(\vec{H}^N - \vec{H})_t$ является решением задачи (23)–(24) и (25)–(26) из пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$. Оценивая правые части (27), (28), и учитывая (10) и (22), получим:

$$\left\| (\vec{v}^N - \vec{v})_t(x, T) \right\|_{2,Q_T}^2 + \left\| (\vec{H}^N - \vec{H})_t(x, T) \right\|_{2,Q_T}^2 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Тем самым мы доказали, что операторы T_g и S_ξ непрерывны.

Теперь покажем вполне непрерывность операторов T_g и S_ξ . Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\vec{W}_t - \nu \Delta \vec{W} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F}_1, \quad \text{div}\vec{W} = 0, \quad (30)$$

$$\vec{h}_t + \frac{1}{\sigma\mu} \text{rotrot}\vec{h} = \vec{G}_1, \quad \text{div}\vec{h} = 0, \quad (31)$$

$$h_n|_S = 0, \quad \text{roth}\Big|_S = 0, \quad \vec{W}\Big|_S = 0, \quad \vec{W}\Big|_{t=0} = \vec{v}_2(x), \quad \vec{h}\Big|_{t=0} = \vec{h}_2(x), \quad (32)$$

где $\vec{W} = \vec{v}_t$, $\vec{h} = \vec{H}_t$, $\vec{F}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{f}(x)g(x, t) - v_k \vec{v}_{x_k} + \frac{\mu}{\rho} H_k \vec{H}_{x_k} \right]$,
 $\vec{G}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\xi(x,t)}{\sigma\mu} \vec{r}(x) + \text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] \right]$, $\vec{v}_2(x) = P \left(\nu \Delta \vec{v}_0 + \vec{f}(x)g(x, 0) - v_{0k} \vec{v}_{0x_k} + \frac{\mu}{\rho} H_{0k} \vec{H}_{0x_k} \right)$,
 $\vec{h}_2(x) = P \left[\frac{1}{\sigma\mu} \text{rotrot}\vec{H}_0 + \frac{\xi(x,0)}{\sigma\mu} \text{rot}\vec{j}(x) + \text{rot} [\vec{v}_0 \times \vec{H}_0] \right]$.

Зафиксируем произвольное число ε из интервала $(0, T)$. Так как функции $\left\| \vec{W}_x(x, t) \right\|_{2,\Omega}$ и $\left\| \text{rot}\vec{h}(x, t) \right\|_{2,\Omega}$ непрерывны на $[\varepsilon, T]$, то можно выбрать $t_* \in [\varepsilon, T]$ таким образом, чтобы

имели место равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^T \left\| \vec{W}_x(x, t) \right\|_{2, \Omega}^2 dt &= (T - \varepsilon) \left\| \vec{W}_x(x, t_*) \right\|_{2, \Omega}^2, \\ \int_{\varepsilon}^T \left\| \text{rot} \vec{h}(x, t) \right\|_{2, \Omega}^2 dt &= (T - \varepsilon) \left\| \text{rot} \vec{h}(x, t_*) \right\|_{2, \Omega}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Из уравнений (30) и (31) следуют равенства:

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left| \vec{W}_t - \nu P \Delta \vec{W} \right|^2 dx dt &= \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left| P \vec{F}_1 \right|^2 dx dt, \\ \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left| \vec{h}_t + \frac{1}{\sigma \mu} \text{Pr} \text{ot} \text{rot} \vec{h} \right|^2 dx dt &= \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left| P \vec{G}_1 \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Интегрированием по частям (34) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \nu \left\| \vec{W}_x(x, T) \right\|_{2, \Omega}^2 + \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left(\left| \vec{W}_t \right|^2 + \left| \nu P \Delta \vec{W} \right|^2 \right) dx dt &= \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left| P \vec{F}_1 \right|^2 dx dt + \nu \left\| \vec{W}_x(x, t_*) \right\|_{2, \Omega}^2, \\ \frac{1}{\sigma \mu} \left\| \text{rot} \vec{h}(x, T) \right\|_{2, \Omega}^2 + \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left(\left| \vec{h}_t \right|^2 + \left| \frac{1}{\sigma \mu} \text{Pr} \text{ot} \text{rot} \vec{h} \right|^2 \right) dx dt &= \\ = \int_{t_*}^T \int_{\Omega} \left| P \vec{G}_1 \right|^2 dx dt + \frac{1}{\sigma \mu} \left\| \text{rot} \vec{h}(x, t_*) \right\|_{2, \Omega}^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Тем самым получим оценку:

$$\begin{aligned} \nu \left\| \vec{W}_x(x, T) \right\|_{2, \Omega}^2 &\leq \left(1 + \frac{3}{2} T^2 \right) \left\| \vec{F}_1 \right\|_{2, Q_T}^2 + \frac{1}{T - \varepsilon} \left(2 \left\| \nu \Delta \vec{v}_0 - v_{0k} \vec{v}_{0x_k} + \frac{\mu}{\rho} H_{0k} \vec{H}_{0x_k} \right\|_{2, \Omega}^2 + \right. \\ &+ 6 \left\| \vec{f}(x) g(x, 0) \right\|_{2, \Omega}^2 + 6 \left(c(\Omega) \sup_{[0, T]} \left\| \vec{v} \right\|_{2, \Omega}^{(2)} \right)^2 \left\| \vec{v}_{0x} \right\|_{2, \Omega}^2 + 6 \left(c(\Omega) \sup_{[0, T]} \left\| \vec{H} \right\|_{2, \Omega}^{(2)} \right)^2 \left\| \text{rot} \vec{H}_0 \right\|_{2, \Omega}^2 \Bigg], \\ \frac{1}{\sigma \mu} \left\| \text{rot} \vec{h}(x, T) \right\|_{2, \Omega}^2 &\leq \left(1 + \frac{3}{2} T^2 \right) \left\| \vec{G}_1 \right\|_{2, Q_T}^2 + \frac{1}{T - \varepsilon} \left(2 \left\| \frac{1}{\sigma \mu} \text{rot} \text{rot} \vec{H}_0 + \text{rot} \left[\vec{v}_0 \times \vec{H}_0 \right] \right\|_{2, \Omega}^2 + \right. \\ &+ 6 \left\| \frac{\xi(x, 0)}{\sigma \mu} \text{rot} \vec{j} \right\|_{2, \Omega}^2 + 6 \left(c(\Omega) \sup_{[0, T]} \left\| \vec{H} \right\|_{2, \Omega}^{(2)} \right)^2 \left\| \vec{v}_{0x} \right\|_{2, \Omega}^2 + 6 \left(c(\Omega) \sup_{[0, T]} \left\| \vec{v} \right\|_{2, \Omega}^{(2)} \right)^2 \left\| \text{rot} \vec{H}_0 \right\|_{2, \Omega}^2 \Bigg]. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\left\| \vec{F}_1 \right\|_{2, Q_T}^2$ и $\left\| \vec{G}_1 \right\|_{2, Q_T}^2$ ограничены, поскольку можно оценить $\vec{v}_t(x, t)$, $\vec{v}_{tx}(x, t)$, $\vec{H}_t(x, t)$ и $\text{rot} \vec{H}_t$ в $L_2(Q_T)$ через данные задачи и $\left\| \vec{f} \right\|_{2, \Omega}$, $\left\| \text{rot} \vec{j} \right\|_{2, \Omega}$. Отсюда следует:

$$\left\| \vec{v}_{tx}(x, T) \right\|_{2, \Omega}^2 + \left\| \text{rot} \vec{H}_t(x, T) \right\|_{2, \Omega}^2 \leq M_0. \quad (37)$$

Тем самым, любое ограниченное множество D из $L_2(\Omega)$ – области определения операторов T_g и S_{ξ} , переводится в некоторое ограниченное множество \tilde{D} из $W_2^1(\Omega)$. По теореме Реллиха множество \tilde{D} будет компактным в $L_2(\Omega)$. Таким образом доказано, что операторы T_g и S_{ξ} непрерывны и любое ограниченное множество переводят в компактное. Следовательно, операторы T_g и S_{ξ} вполне непрерывны. Операторы A и B также вполне непрерывны как суперпозиция линейного ограниченного и вполне непрерывного операторов.

Теорема 2. Если $\Omega \subset R^2$, $g, g_t \in C(\bar{Q}_T)$, $\xi, \xi_t \in C(\bar{Q}_T)$, $|g(x, t)| \geq g_T > 0, |\xi(x, t)| \geq \xi_T > 0$ при $x \in \Omega$, $\vec{U}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap J_1^0(\Omega)$, $\vec{\Psi}(x) \in \hat{J}(\Omega)$, $\vec{v}_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap J_1^0(\Omega)$, $\vec{H}_0(x) \in \hat{J}(\Omega)$, $\nabla\pi(x) \in G(\Omega)$. Пусть выполняются неравенства:

$$\frac{1}{\sigma} > \mu c_1 \left(\|\vec{U}\|_{4,\Omega} + \|\vec{\Psi}\|_{4,\Omega} \right), \quad \nu > c_1 \left(\|\vec{U}\|_{4,\Omega} + \frac{\mu}{\rho} \|\vec{\Psi}\|_{4,\Omega} \right). \quad (38)$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(6) необходима и достаточна разрешимость уравнений (9) в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что операторные уравнения (9) разрешимы. Обозначим эти решения через $\vec{f}_1(x)$ и $\vec{r}_1 = \text{rot}\vec{j}_1(x)$. Тогда из [5–6] находим в нужных классах функции $\vec{v}_1, \nabla p_1$ и \vec{H}_1 , которые удовлетворяют (1)–(5) с векторами $\vec{f}_1(x)g(x, t)$ и $\xi(x, t)\text{rot}\vec{j}_1(x)$. Покажем, что эти функции удовлетворяют также условию переопределения (6). Пусть $\vec{v}(x, T) = \vec{U}_1(x)$, $\vec{H}(x, T) = \vec{\Psi}_1(x)$, $\nabla p(x, T) = \nabla\pi(x)$, тогда для функций $\vec{w} = \vec{U} - \vec{U}_1$, $\vec{z} = \vec{\Psi} - \vec{\Psi}_1$ получаем задачу:

$$-\nu\Delta\vec{w} + w_k\vec{U}_{x_k} + U_{1k}\vec{w}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho}z_k\vec{\Psi}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho}\Psi_{1k}\vec{z}_{x_k} = -\nabla q, \quad (39)$$

$$\frac{1}{\sigma\mu}\text{rotrot}\vec{z} + w_k\vec{\Psi}_{x_k} + U_{1k}\vec{z}_{x_k} - z_k\vec{U}_{x_k} - \Psi_{1k}\vec{w}_{x_k} = 0, \quad (40)$$

$$\text{div}\vec{w} = 0, \quad \text{div}\mu\vec{z} = 0, \quad (41)$$

$$\vec{w}|_S = 0, \quad z_n|_S = 0 \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1}{\partial x_2}\Big|_S = 0. \quad (42)$$

Умножим скалярно (39), (40) в $L_2(\Omega)$ на функции \vec{w} и \vec{z} соответственно:

$$\nu\rho\|\vec{w}_x\|^2 + \rho\int_{\Omega} w_k\vec{U}_{x_k}\vec{w}dx + \rho\int_{\Omega} w_{x_k}U_{1k}\vec{w}dx - \mu\int_{\Omega} z_k\vec{\Psi}_{x_k}\vec{w}dx - \mu\int_{\Omega} \Psi_{1k}\vec{z}_{x_k}\vec{w}dx = 0,$$

$$\frac{1}{\sigma}\|\text{rot}\vec{z}\|^2 - \mu\int_{\Omega} w_k\vec{\Psi}_{x_k}\vec{z}dx + \mu\int_{\Omega} U_{1k}\vec{z}_{x_k}\vec{z}dx - \mu\int_{\Omega} z_k\vec{U}_{x_k}\vec{z}dx - \mu\int_{\Omega} \vec{w}_{x_k}\Psi_{1k}\vec{z}dx = 0.$$

Преобразовав, получим:

$$\nu\rho\|\vec{w}_x\|^2 - \rho\int_{\Omega} w_k\vec{U}_{x_k}\vec{w}_{x_k}dx + \mu\int_{\Omega} z_k\vec{\Psi}_{x_k}\vec{w}_{x_k}dx - \mu\int_{\Omega} \Psi_{1k}\vec{z}_{x_k}\vec{w}dx = 0, \quad (43)$$

$$\frac{1}{\sigma}\|\text{rot}\vec{z}\|^2 - \mu\int_{\Omega} w_k\vec{\Psi}_{x_k}\vec{z}_{x_k}dx + \mu\int_{\Omega} \vec{U}_{x_k}\vec{z}_{x_k}dx + \mu\int_{\Omega} \vec{w}\Psi_{1k}\vec{z}_{x_k}dx = 0. \quad (44)$$

Сложим (43) и (44):

$$\left(\nu\rho - c_1 \left(\rho\|\vec{U}\|_{4,\Omega} + \mu\|\vec{\Psi}\|_{4,\Omega} \right) \right) \|\vec{w}_x\|^2 + \left(\frac{1}{\sigma} - \mu c_1 \left(\|\vec{U}\|_{4,\Omega} + \|\vec{\Psi}\|_{4,\Omega} \right) \right) \|\text{rot}\vec{z}\|^2 \leq 0. \quad (45)$$

В силу условия (38) из (45) получим $\vec{U} = \vec{U}_1$, $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_1$, тогда $\nabla\pi(x) = \nabla\pi_1(x)$. Таким образом, $\vec{v}_1, \nabla p_1, \vec{H}_1, \vec{f}_1(x)$ и $\vec{r}_1 = \text{rot}\vec{j}_1(x)$ удовлетворяют всем условиям (1)–(6). Следовательно, задача (1)–(6) разрешима.

Необходимость. Пусть задача (1)–(6) разрешима. Обозначим это решение через $\{\vec{v}, \nabla p, \vec{H}, \vec{f}, \text{rot}\vec{j}\}$. Тем самым, выводим операторное уравнение (9) и получаем, что $\vec{f}(x)$ и $\vec{r} = \text{rot}\vec{j}(x)$ – решение этого уравнения.

Теорема 3. Пусть выполняется условие теоремы 2, а также выполнено

$$M_1 + \|\vec{\kappa}\|_{2,\Omega} + \|\vec{\lambda}\|_{2,\Omega} < 1, \quad (46)$$

$$\text{где } \|\Phi\|_{2,Q_T}^2 = \nu \|\vec{v}_x\|_{2,Q_T}^2 + \frac{1}{\sigma} \left\| \text{rot} \vec{H} \right\|_{2,Q_T}^2, \quad \beta = \frac{2-\varepsilon}{2d^2}, \quad \varepsilon \in (0, 2],$$

$$\begin{aligned} M_1 = \exp \left\{ \frac{c^2}{2\varepsilon} \|\Phi\|_{2,Q_T}^2 \right\} & \left(\frac{1}{\inf_{\Omega} |g(x, T)|} + \frac{1}{\inf_{\Omega} |\xi(x, T)|} \right) \left[\left(\left\| \nu \Delta \vec{v}_0 - v_{0k} \vec{v}_{0x_k} + \frac{\mu}{\rho} H_{0k} \vec{H}_{0x_k} \right\|_{2,\Omega} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sup_{\Omega} \left(|g(x, 0)| + \frac{1}{\sigma\mu} |\xi(x, 0)| \right) + \left\| \frac{1}{\sigma\mu} \text{rot} \text{rot} \vec{H}_0 + \text{rot} [\vec{v}_0 \times \vec{H}_0] \right\| \right) \exp \{-\beta T\} + \\ & \left. + \int_0^T \exp \{-\beta(T-t)\} \sup_{\Omega} \left(|g_t(x, t)| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} |\xi_t(x, t)| \right) dt \right], \end{aligned}$$

тогда существует решение обратной задачи (1)–(6).

Доказательство. Известно, что для прямой задачи (1)–(5) можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \chi^2(t) + \int_0^t \Phi^2(\tau) d\tau \leq & \rho \|\vec{v}_0\|_{2,\Omega}^2 + \mu \|\vec{H}_0\|_{2,\Omega}^2 + \\ & \left. + \frac{3}{2} \left\{ \rho \left(\int_0^T \sup_{\Omega} |g(x, t)| dt \right)^2 + \frac{1}{\sigma^2 \mu} \left(\int_0^T \sup_{\Omega} |\xi(x, t)| dt \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Вновь рассмотрим задачу (30)–(32). Распишем уравнения (30), (31), для этого продифференцировав уравнения (1) и (2) по t . Получим следующие соотношения:

$$\vec{v}_{tt} + (v_{kt} \vec{v}_{x_k} + v_k \vec{v}_{x_k t}) - \frac{\mu}{\rho} \left(H_{kt} \vec{H}_{x_k} + H_k \vec{H}_{x_k t} \right) - \nu \Delta \vec{v}_t = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \left(p + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right)_t + \vec{f} g_t, \quad (48)$$

$$\vec{H}_{tt} + \frac{1}{\sigma\mu} \text{rot} \text{rot} \vec{H}_t - \left(\text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)_t = \frac{1}{\sigma\mu} \xi_t \text{rot} \vec{j}, \quad (49)$$

где $\left(\text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)_t = H_{kt} \vec{v}_{x_k} + H_k \vec{v}_{x_k t} - v_{kt} \vec{H}_{x_k} - v_k \vec{H}_{x_k t}$.

Умножим уравнения (48) и (49) скалярно в $L_2(\Omega)$ соответственно на $\rho \vec{v}_t$ и $\mu \vec{H}_t$, тогда получим:

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}_t\|^2 + \nu \|\vec{v}_{tx}\|^2 + \rho \int_{\Omega} v_{kt} \vec{v}_{x_k} \vec{v}_t dx - \mu \int_{\Omega} \left(H_{kt} \vec{H}_{x_k} + H_k \vec{H}_{x_k t} \right) \vec{v}_t dx = \rho \int_{\Omega} \vec{f} g_t \cdot \vec{v}_t dx, \quad (50)$$

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{H}_t\|^2 + \frac{1}{\sigma} \left\| \text{rot} \vec{H}_t \right\|^2 - \mu \int_{\Omega} \vec{H}_t \cdot \left(\text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] \right)_t dx = \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \vec{H}_t \cdot \xi_t \text{rot} \vec{j} dx. \quad (51)$$

Сложив (50) и (51), получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \omega^2(t) + F^2(t) = I(t) + \rho \int_{\Omega} \vec{f} g_t \cdot \vec{v}_t dx + \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \vec{H}_t \cdot \xi_t \text{rot} \vec{j} dx, \quad (52)$$

где обозначили $\omega^2(t) = \rho \|\vec{v}_t\|^2 + \mu \|\vec{H}_t\|^2$, $F^2(t) = \rho \nu \|\vec{v}_{tx}\|^2 + \frac{1}{\sigma} \left\| \text{rot} \vec{H}_t \right\|^2$,

$z(t) = \left(\sqrt{\rho} \|\vec{f} g_t\| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|\xi_t \text{rot} \vec{j}\| \right)$, $I(t) = \int_{\Omega} \left[\vec{v}_{x_k} \left(\mu H_{kt} \vec{H}_t - \rho v_{kt} \vec{v}_t \right) + \mu \vec{H}_{x_k} \left(H_{kt} \vec{v}_t - v_{kt} \vec{H}_t \right) \right] dx$.

Для оценки правой части (52) применим неравенство $\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq 2\|u\|_{2,\Omega}^2 \|u_x\|_{2,\Omega}^2$ для любого $u \in W_2^1(\Omega)$, а также неравенства Фридрихса и Юнга, тогда получим:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{2-\varepsilon}{2d^2}\omega(t) \leq \frac{c^2}{2\varepsilon}\Phi^2(t)\omega(t) + z(t),$$

Умножив полученное неравенство на $\exp\{-\beta(T-t)\}$, $\beta = \frac{2-\varepsilon}{2d^2}$, получим:

$$e^{-\beta(T-t)}\frac{d\omega(t)}{dt} + \beta\omega(t)e^{-\beta(T-t)} \leq \frac{c^2}{2\varepsilon}\Phi^2(t)\omega(t)e^{-\beta(T-t)} + z(t)e^{-\beta(T-t)}.$$

Обозначим через $y(t) = \omega(t)e^{-\beta(T-t)}$, $\alpha_1(t) = \frac{c^2}{2\varepsilon}\Phi^2(t)$, $\alpha_2(t) = z(t)e^{-\beta(T-t)}$:

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq \alpha_1(t)y(t) + \alpha_2(t). \quad (53)$$

Применим лемму Гронуолла, а затем, возвращаясь к прежним обозначениям, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \rho\|\vec{v}_t(x, T)\|^2 + \mu\|\vec{H}_t(x, T)\|^2 &\leq \exp\left\{\frac{c^2}{2\varepsilon}\int_0^T \Phi^2(t)dt\right\} \left[\left(\rho\|\vec{v}_t(x, 0)\|^2 + \mu\|\vec{H}_t(x, 0)\|^2\right) e^{-\frac{2-\varepsilon}{2d^2}T} + \right. \\ &\left. + \int_0^T \left(\sqrt{\rho}\|g_t(x, t)\vec{f}(x)\| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\|\xi_t(x, t)\text{rot}\vec{j}(x)\|\right) e^{-\frac{2-\varepsilon}{2d^2}(T-t)} dt \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим ограниченное выпуклое замкнутое множество:

$$D = \left\{ \vec{f} \in L_2(\Omega), \text{rot}\vec{j} \in L_2(\Omega), \|\vec{f}\| \leq 1, \|\text{rot}\vec{j}\| \leq 1 \right\}.$$

Так как $(A\vec{f})(x) = \frac{1}{g(x, T)}(T_g\vec{f})(x)$, $(B\vec{r})(x) = \frac{\sigma\mu}{\xi(x, T)}(S_\xi\vec{r})(x)$, то для операторов A и B на множестве D справедлива оценка:

$$\|A\vec{f}\|^2 + \|B\vec{r}\|^2 \leq M_1^2.$$

Определим на D еще нелинейные операторы A_1 и B_1 следующим образом:

$$A_1\vec{f} = A\vec{f} + \vec{\aleph}, \quad B_1\vec{r} = B\vec{r} + \vec{\lambda}.$$

В силу условия (46) операторы A_1 и B_1 отображают D в себя. На основании этого и по теореме 1, утверждающей что операторы A и B вполне непрерывны, из комбинированного принципа Шаудера следует разрешимость операторного уравнения:

$$A_1\vec{f} = \vec{f}, \quad B_1\vec{r} = \vec{r}$$

в D . Следовательно, по теореме 2 разрешима и обратная задача (1)–(6). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. //Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. 2000. V. 231.

2. **Абылкаиров У.У.** //Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции. Красноярск, 1989. С. 6.
3. **Абылкаиров У.У.** //7th Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Application (EQADIFF7). Praha, 1989. С. 1–2.
4. **Васин И.А.** //Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции. Красноярск, 1989. С. 30.
5. **Ладыженская О.А., Солонников В.А.** //Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 115–173.
6. **Сахаев Ш., Солонников В.А.** //Труды МИАН СССР. 1975. Т. 127. С. 76–92.
7. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва, 1970.
8. **Ладыженская О.А.** //Записки научных семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.
9. **Солонников В.А.** //Записки научных семинаров ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 153–231.

Поступила в редакцию 08.02.2010г.

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА БЕСОВА ПОЛИНОМАМИ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Г. АКИШЕВ

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
100000 Караганда Университетская, 28 akishev@ksu.kz

В статье рассматриваются симметричное пространство функций многих переменных и классы Никольского, Бесова в этом пространстве. Получены оценки сверху приближения функций класса Бесова частными суммами ряда Фурье по кратной обобщенной системе Хаара. Установлен точный порядок приближения функций класса Никольского по норме пространства Марцинкевича.

Пусть \mathbb{R}^d – d -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d)$ с вещественными координатами; $I^d = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d; 0 \leq x_j \leq 1; j = 1, \dots, d\}$ – d -мерный единичный куб.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на I^d функций называется симметричным (см. [1], стр. 123), если

1. из того, что $|f(\bar{x})| \leq |g(\bar{x})|$ почти всюду на I^d и $g \in X$, следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \|g\|_X$;
 2. из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(\bar{x})|$ и $|g(\bar{x})|$ следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$.
- Здесь и в дальнейшем $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X$.

Пусть $\chi_e(t)$ – характеристическая функция множества $e \subset I^d$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X , где μe – мера Лебега измеримого множества e . Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на отрезке $[0,1]$. Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см. [1], стр.137). Такие функции называются Φ – функциями. Далее $X = X(\varphi)$ означает симметричное пространство с фундаментальной функцией φ .

Пространство X^1 , ассоциированное пространству $X(\varphi)$, состоит из всех измеримых функций $g(\bar{x})$, для которых

$$\|g\|_{X^1} = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \leq 1}} \int_{I^d} f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x} < +\infty.$$

Известно (см. [1], стр. 138), что сепарабельность пространства $X(\varphi)$ является необходимым и достаточным условием совпадения ассоциированного к нему пространства X^1 со всем сопряженным пространством $X'(\bar{\varphi})$ и при этом $\bar{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0,1]$, и $\bar{\varphi}(0) = 0$.

Здесь будем рассматривать сепарабельные пространства $X(\varphi)$.

Примеры сепарабельных симметричных пространств:

1. $L_q(I^d)$ – пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_q = \left(\int_{I^d} |f(\bar{x})|^q d\bar{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < +\infty.$$

2. Пространство Марцинкевича $L_{q,\infty}(I^d)$ с нормой

$$\|f\|_{q,\infty} = \sup_{t \in (0,1]} t^{\frac{1}{q}-1} \int_0^t f^*(\tau) d\tau,$$

где $f^*(\tau)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ (см. [1], стр. 83).

3. Пространство Лоренца $L_{q\theta}(I^d)$ с нормой

$$\|f\|_{q\theta} = \left\{ \frac{\theta}{q} \int_0^1 \left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau \right)^\theta t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty, \quad 1 \leq q < +\infty, \quad 1 < \theta < +\infty.$$

Для данной функции $\Psi(t)$, $t \in [0, 1]$ положим:

$$\alpha_\Psi = \underline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)}, \quad \beta_\Psi = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)}.$$

Известно, что для любого пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1 \leq \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi \leq 2$.

Через $C(q, p, r, \dots)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных параметров. Запись $A \asymp B$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 A \leq B \leq c_2 A$.

Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел $p_n \geq 2$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\} = \{\chi_n(t)\}$ на $[0, 1]$ определяется следующим образом (см. [2]).

Заданное натуральное число $n \geq 2$ представим в виде $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s$, где $m_0 = 1$, $m_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, $k = 1, 2, \dots$; $r = 0, 1, \dots, m_k - 1$; $s = 1, 2, \dots, p_{k+1} - 1$. Через A обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на $[0, 1]$, $l = 0, 1, \dots$. Если $t \in B \equiv [0, 1] \setminus A$, то разложение $t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{m_k}$, $\alpha_k(t) \in \mathbb{N} \cap [0, p_k - 1]$, единственно. Далее, определим функцию $\chi_n(t) \equiv \chi_{k,r}^s(t)$ следующим образом:

$$\chi_n(t) = \chi_{k,r}^s(t) = \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp\left\{ \frac{2\pi i s \alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}} \right\}, & t \in \left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k} \right) \cap B, \\ 0, & t \notin \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k} \right], \end{cases}$$

$\chi_1(t) \equiv 1$ на $[0, 1]$.

Так как множество B всюду плотно на $[0, 1]$, функцию $\chi_n(t)$ продолжим на интервал $\left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k} \right)$ по непрерывности. В оставшихся точках $(0, 1)$ функцию χ_n положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах отрезка $[0, 1]$ ее предельным значениям изнутри отрезка. Так определенная система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 ([2]). Обобщенная система Хаара в случае $p_n = p$, $n \in \mathbb{N}$, определена Ватари [3].

Пусть даны последовательности $\{p_{n_j}^{(j)}\}$ натуральных чисел $p_{n_j}^{(j)} \geq 2$; $n_j \in \mathbb{N}$; $j = 1, 2, \dots, d$; $m_{n_j}^{(j)} = p_1^{(j)} \cdot \dots \cdot p_{n_j}^{(j)}$. Пусть $\{\chi_{\bar{n}}(\bar{x})\} = \left\{ \prod_{j=1}^d \chi_{n_j}(x_j) \right\}$ кратная обобщенная система Хаара; $a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^d)$ по этой системе.

Неравенство $\bar{k} \leq \bar{n}$ означает, что $k_j \leq n_j$ для всех $j = 1, \dots, d$.

Положим

$$\delta_{\bar{\nu}+\bar{1}}(f, \bar{x}) = \sum_{n_1=m_{\nu_1}^{(1)}+1}^{m_{\nu_1+1}^{(1)}} \dots \sum_{n_d=m_{\nu_d}^{(d)}+1}^{m_{\nu_d+1}^{(d)}} a_{n_1, \dots, n_d}(f) \prod_{j=1}^d \chi_{n_j}(x_j),$$

$$S_{\bar{n}}^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \bar{n}} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}),$$

где $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = \sum_{j=1}^d s_j \gamma_j$ и $\bar{1} = (1, \dots, 1)$. В случае $\bar{\gamma} = (1, \dots, 1)$ будем писать $S_n(f, \bar{x})$ и $\|\bar{s}\|$ соответственно вместо $S_{\bar{n}}^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x})$ и $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle$.

Числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} \in l_p$, $1 \leq p < +\infty$, если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d}\|_{l_p} = \left\{ \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $0 < r_j \leq 1$, $j = 1, \dots, d$. Рассмотрим аналоги классов Никольского и Бесова:

$$H_X^{\bar{r}} = \{f \in X(\varphi) : \|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|_X \leq \prod_{j=1}^d (m_{\nu_j}^{(j)})^{-r_j}, \bar{\nu} \in \mathbb{N}^d\},$$

$$B_{X, \theta}^{\bar{r}} = \left\{ f \in X(\varphi) : \|f\|_{B_{X, \theta}^{\bar{r}}} = \|f\|_X + \left\| \left\{ \prod_{j=1}^d (m_{s_j}^{(j)})^{r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \right\|_{l_\theta} \leq 1 \right\}.$$

Порядки приближения классов $H_\theta^{\bar{r}}$ по норме пространства Лебега $L_q(I^d)$ полиномами по кратной системе Хаара с гармониками из гиперболических крестов исследованы в [4], а оценки N -членных приближений – в [5], [6]. Этот вопрос в симметричном пространстве исследован в [7].

В данной статье изучаются порядки приближения функциональных классов $H_X^{\bar{r}}$, $B_{X, \theta}^{\bar{r}}$ частичными суммами $S_{\bar{n}}^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x})$ по норме пространства Марцинкевича.

В дальнейшем будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма А. (см. [8], лемма 4). Пусть даны Φ – функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$, $x \in (0, 1]$ и $\beta_{\phi_1} < \alpha_{\phi_2}$. Тогда для функции

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

существует Φ – функция $\theta_1(x)$ для которой $\alpha_{\theta_1} > 1$ и $\theta_1(x) \asymp \theta(x)$, $x \in [0, 1]$.

Лемма Б. Для любых чисел $p > 1$, $\alpha > 0$ имеет место соотношение:

$$\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} p^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \asymp p^{-\alpha n} \cdot n^{d-1}.$$

Лемма В. Пусть $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ такие, что $1 = \gamma_j$, $j = 1, \dots, l$; $1 < \gamma_j$, $j = l+1, \dots, d$. Тогда для любых чисел $p > 1$, $\alpha > 0$ имеет место неравенство:

$$\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} p^{\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \leq C(\alpha, p) \cdot p^{\alpha n} \cdot n^{l-1}.$$

Леммы Б, В доказываются также как в случае $p = 2$ (см. [9], стр. 11).

В дальнейшем считаем $0 < r_1 = \dots = r_l < r_{l+1} \leq \dots \leq r_d \leq 1$ и положим $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, \dots, d$.

Теорема 1. (см. [7]). Пусть кратная обобщенная система Хаара определена ограниченными последовательностями $\{p_n^{(j)}\}$, $p_n^{(j)} \leq p$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$; $1 \leq q < +\infty$; $X(\varphi)$ – пространство с фундаментальной функцией φ и $\max(\frac{1}{q}, r_1) < \log_2 \alpha_\varphi$, $\log_2 \beta_\varphi < \frac{1}{q} + r_1$. Если

$$\sup_{n>0} \left\{ \frac{p^{-\frac{n}{q}}}{\varphi(p^{-n})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X + p^{-\frac{n}{q}} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X \right\} < +\infty, \quad (1)$$

то функция $f \in L_{q,\infty}(I^d)$ и имеет место оценка:

$$\|f - S_n^{(\bar{\gamma})}(f)\|_{q,\infty} \leq C \cdot \frac{p^{-n(r_1 + \frac{1}{q})}}{\varphi(p^{-n})} \cdot n^{d-1}.$$

Теорема 2. Пусть кратная обобщенная система Хаара определена ограниченными последовательностями $\{p_n^{(j)}\}$, $p_n^{(j)} \leq p$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$; $1 \leq q < +\infty$; $X(\varphi)$ – пространство с фундаментальной функцией φ и $\max(\frac{1}{q}, r_1) < \log_2 \alpha_\varphi \leq \log_2 \beta_\varphi < \frac{1}{q} + r_1$. Если выполнено условие (1), то функция $f \in L_{q,\infty}(I^d)$ и имеет место оценка:

$$\sup_{f \in B_{X,\theta}^{\bar{\gamma}}} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{q,\infty} \leq C \cdot \frac{p^{-n(r_1 + \frac{1}{q})}}{\varphi(p^{-n})} \cdot n^{\frac{d-1}{\theta}}. \quad (2)$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 1 в [7] установлено, что при условии (1) функция $f \in X(\varphi)$ принадлежит пространству $L_{q,\infty}(I^d)$ и верно неравенство:

$$\|f\|_{q,\infty} \leq C(p, d, \varphi) \sup_{n>0} \left\{ \frac{p^{-\frac{n}{q}}}{\varphi(p^{-n})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X + p^{-\frac{n}{q}} \sum_{0 < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X \right\}.$$

Применяя это неравенство к функции $f - S_n^{\bar{\gamma}}(f) \in L_{q,\infty}(I^d)$, получим:

$$\begin{aligned} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{q,\infty} &\leq C(p, d, \varphi) \sup_{\nu > 0} \left\{ \frac{p^{-\frac{\nu}{q}}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|_X + \right. \\ &\quad \left. + p^{-\frac{1}{q}} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|_X \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n$, то $\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))(x) = 0$; если же $\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n$, то $\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))(\bar{x}) = \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$. Учитывая эти равенства, получим для всех $\nu = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|_X &= 0, \\ \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|_X &= \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $\nu > n$, тогда

$$\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|_X = \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X, \quad (5)$$

$$\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}}(f))\|_X = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X. \quad (6)$$

Из соотношений (4)–(6) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(f) &= \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}})\|_X + p^{-\nu/q} \sum_{0 < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f - S_n^{\bar{\gamma}})\|_X \leq \\ &\leq C \begin{cases} \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X, & \text{при } \nu \leq n, \\ \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X + p^{-\nu/q} \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X, & \text{при } \nu > n. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя неравенства Гельдера ($\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$) имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \prod_{j=1}^d p^{s_j r_j \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \left\{ \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \left(\frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \prod_{j=1}^d p^{-s_j r_j} \right)^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}}. \end{aligned} \quad (8)$$

По условию $r_1 < \log_2 \alpha_\varphi$. Поэтому существует Φ -функция $g_1(t)$ такая что, $g_1(t) \asymp \frac{\varphi(t)}{t^{r_1 + \varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ (см. лемму А). Следовательно, учитывая, что $g_1(t) \uparrow$, и пользуясь леммой В, получим:

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \left(\frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \prod_{j=1}^d p^{-s_j r_j} \right)^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leq \left\{ \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \left(\frac{1}{\varphi(p^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle})} p^{-r_1 \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \right)^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \left(\frac{1}{g_1(p^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle})} p^{\varepsilon \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \right)^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leq C \frac{1}{g_1(p^{-\nu})} \left\{ \sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} (p^{\varepsilon \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle})^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leq \\ &\leq C \frac{1}{g_1(p^{-\nu})} p^{\varepsilon \nu} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}} \leq C \frac{p^{-\nu r_1} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-\nu})}. \end{aligned}$$

Поэтому из (8) следует, что

$$\sum_{n < \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X \leq C \frac{p^{-\nu r_1} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-\nu})} \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \prod_{j=1}^d p^{s_j r_j \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \quad (9)$$

для любой функции $f \in B_{X, \theta}^{\bar{r}}$. Далее, применяя неравенство Гельдера и лемму Б, имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X \leq \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \prod_{j=1}^d p^{s_j r_j \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \times \\ &\times \left\{ \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > \nu} \left(\frac{1}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \prod_{j=1}^d p^{-s_j r_j} \right)^{\theta'} \right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leq C p^{-\nu r_1} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}} \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \prod_{j=1}^d p^{s_j r_j \theta} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_X^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned} \quad (10)$$

для любой функции $f \in B_{X,\theta}^{\bar{F}}$. Из неравенств (7), (9), (10) получим:

$$\sigma_{\nu}(f) \leq C \begin{cases} \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} p^{-nr_1} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}}, & \text{при } \nu \leq n, \\ \frac{p^{-\nu(r_1+\frac{1}{q})}}{\varphi(p^{-\nu})} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}}, & \text{при } \nu > n, \end{cases} \quad (11)$$

для любой функции $f \in B_{X,\theta}^{\bar{F}}$.

По условию $\frac{1}{q} < \log_2 \alpha_{\varphi}$. Следовательно, по лемме А существует Φ - функция $g(t)$ такая, что $\frac{\varphi(t)}{t^{\frac{1}{q}}} \asymp g(t) \uparrow$. Поэтому

$$\frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \leq C \frac{p^{-n/q}}{\varphi(p^{-n})}, \quad \nu \leq n. \quad (12)$$

Так как по условию $\beta_{\varphi} < 2^{\frac{1}{q}+r_1}$, то существует число $\varepsilon \in (0, r_1 + \frac{1}{q})$ такое, что $\beta_{\varphi} < 2^{\frac{1}{q}+r_1-\varepsilon} < 2^{\frac{1}{q}+r_1}$. Теперь в лемме А, полагая $\gamma(t) = t^{r_1+\frac{1}{q}-\varepsilon}$, будем иметь, что существует Φ - функция $g_2(t)$ такая, что $\frac{t^{\frac{1}{q}+r_1-\varepsilon}}{\varphi(t)} \asymp g_2(t) \uparrow$. Следовательно, для $\nu > n$

$$\begin{aligned} \frac{p^{-\nu(r_1+\frac{1}{q})} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-\nu})} &= \frac{p^{-\nu(r_1+\frac{1}{q}-\varepsilon)} \nu^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-\nu})} \cdot \frac{\nu^{\frac{d-1}{\theta'}}}{p^{\nu\varepsilon}} \leq \\ &\leq C g_2(p^{-\nu}) \frac{\nu^{\frac{d-1}{\theta'}}}{p^{\nu\varepsilon}} \leq C g_2(p^{-n}) \frac{n^{\frac{d-1}{\theta'}}}{p^{n\varepsilon}} \leq C \frac{p^{-n(r_1+\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-n})}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенств (11)–(13) следует, что

$$\sigma_{\nu}(f) \leq C \frac{p^{-n(r_1+\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-n})}$$

для любой функций $f \in B_{X,\theta}^{\bar{F}}$. Следовательно, из неравенства (3) получим:

$$\|f - S_n^{(\tilde{\gamma})}(f)\|_{q,\infty} \leq C(p, d, \varphi) \frac{p^{-n(r_1+\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{\theta'}}}{\varphi(p^{-n})}$$

для любой функций $f \in B_{X,\theta}^{\bar{F}}$. Этим теорема доказана.

Замечание 1. Приведем здесь важные частные случаи теоремы 2.

1) Пусть $X(\varphi) = L_M(I^d)$ - пространство Орлича, чья N - функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 - условию (см. [10]).

Известно, что фундаментальная функция пространства Орлича есть $\varphi_{L_M}(t) = \frac{1}{M^{-1}(\frac{1}{t})}$, где M^{-1} обратная функция к M (см. [10]); пусть она удовлетворяет условиям теоремы 2.

Тогда справедлива оценка

$$\sup_{f \in B_{L_M,\theta}^{\bar{F}}} \|f - S_n^{\tilde{\gamma}}(f)\|_{q,\infty} \leq C \cdot p^{-n(r_1+\frac{1}{q})} M^{-1}(p^n) \cdot n^{\frac{d-1}{\theta'}}.$$

2) Пусть $X(\varphi) = L_{q_1,q_2}(I^d)$ - пространство Лоренца, $1 < q_1 < q < +\infty$.

Известно, что фундаментальная функция пространства $L_{q_1,q_2}(I^d)$ есть $\varphi_{L_{q_1,q_2}}(t) = t^{\frac{1}{q_1}}$ и $\alpha_{\varphi} = \beta_{\varphi} = 2^{\frac{1}{q_1}}$. Тогда

$$\sup_{f \in B_{L_{q_1,q_2},\theta}^{\bar{F}}} \|f - S_n^{\tilde{\gamma}}(f)\|_{q,\infty} \leq C \cdot p^{-n(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})} n^{\frac{d-1}{\theta'}}.$$

3) **Определение 1.** (см. [11]). Пусть даны числа $q_1, q_2 \in (1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пространством Лоренца – Зигмунда $L_{q_1, q_2}(\log L)^\alpha(I^d)$ называется множество всех измеримых по Лебегу функций f , для которых

$$\|f\|_{q_1, q_2, \alpha} = \left\{ \int_0^1 \left(f^*(t) \right)^{q_2} \left(1 + |\ln t| \right)^{\alpha q_2} t^{\frac{q_2}{q_1} - 1} dt \right\}^{\frac{1}{q_2}} < +\infty.$$

Пусть $X(\varphi) = L_{q_1, q_2}(\log L)^\alpha(I^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < q_2 < +\infty$, $1 < q_1 < q < +\infty$.

Известно (см. [11], стр.143), что фундаментальная функция пространства $L_{q_1, q_2}(\log L)^\alpha(I^d)$ удовлетворяет соотношению $\varphi_{L_{q_1, q_2}(\log L)^\alpha}(t) \asymp (1 + |\ln t|)^{\alpha t^{\frac{1}{q_1}}}$. Поэтому, если $\frac{1}{q} < \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q} + r_1$, то

$$\sup_{f \in B_{L_{q_1, q_2}(\log L)^\alpha, \theta}^{\bar{r}}} \|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{q, \infty} \leq C \cdot p^{-n(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1})} n^{\frac{d-1}{\theta'}} (1+n)^{-\alpha}.$$

4) Одним из примеров симметричного пространства является многопараметрическое пространство Лоренца, определенное Е.Д. Нурсултановым [12]. Напомним его определение для трех параметров.

Пусть даны числа $q_1, q_2, q_3 \in [1, +\infty)$. Для заданной измеримой по Лебегу на $I^d = [0, 1]^d$ функции f положим

$$\beta_k(f) = \left[\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} (f^*(t))^{q_1} dt \right]^{\frac{1}{q_1}}, \quad \psi_k(f) = \left[\sum_{l=2^{k-1}}^{2^k-1} (\beta_l^*(f))^{q_2} \right]^{\frac{1}{q_2}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Трехпараметрическое пространство Лоренца $L_{\bar{q}_3}(\mathbb{I}^d) = L_{q_1, q_2, q_3}(I^d)$ ($\bar{q}_3 = (q_1, q_2, q_3)$) состоит из всех измеримых по Лебегу функций f , для которых

$$\|f\|_{\bar{q}_3} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k^*(f))^{q_3} \right\}^{\frac{1}{q_3}} < +\infty.$$

Покажем, что $L_{\bar{q}_3}(I^d)$ – симметричное пространство.

Действительно, если $g \in L_{q_1, q_2, q_3}(I^d)$ и $f^*(t) \leq g^*(t)$, $t \in [0, 1]$, то по свойству интеграла

$$\beta_k(f) = \left[\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} (f^*(t))^{q_1} dt \right]^{\frac{1}{q_1}} \leq \left[\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} (g^*(t))^{q_1} dt \right]^{\frac{1}{q_1}} = \beta_k(g).$$

Тогда по свойству невозрастающей перестановки числовой последовательности имеем $\beta_k^*(f) \leq \beta_k^*(g)$, $k = 1, 2, \dots$ Поэтому

$$\psi_k(f) = \left[\sum_{l=2^{k-1}}^{2^k-1} (\beta_l^*(f))^{q_2} \right]^{\frac{1}{q_2}} \leq \left[\sum_{l=2^{k-1}}^{2^k-1} (\beta_l^*(g))^{q_2} \right]^{\frac{1}{q_2}} = \psi_k(g)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$ Следовательно,

$$\|f\|_{\bar{q}_3} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k^*(f))^{q_3} \right\}^{\frac{1}{q_3}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k^*(g))^{q_3} \right\}^{\frac{1}{q_3}} = \|g\|_{q_1, q_2, q_3}.$$

Значит, $f \in L_{\bar{q}_3}(I^d)$ и $L_{\bar{q}_3}(I^d)$ – симметрическое пространство (см. [1], стр. 123).

Теперь оценим фундаментальную функцию $\varphi_{\bar{q}_3}(t)$ пространства $L_{\bar{q}_3}(I^d)$.

Лемма 1. Пусть $q_1, q_2, q_3 \in (1, \infty)$.

1. Если $q_2 \geq q_3$, то $\varphi_{\bar{q}_3}(t) \leq C(\bar{q}_3)t^{\frac{1}{q_1}} (\ln \frac{1}{t})^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}}$, для $t \in (0, 1)$,
2. Если $q_2 \leq q_3$, то $\varphi_{\bar{q}_3}(t) \geq C(\bar{q}_3)t^{\frac{1}{q_1}} (\ln \frac{1}{t})^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}}$, для $t \in (0, 1)$.

Доказательство. Сначала отметим, что из свойств невозрастающей перестановки следует, что

$$\|f\|_{\bar{q}_3} \leq 2^{\frac{q_3}{q_2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^*(f))^{q_3} n^{\frac{q_3}{q_2} - 1} \right\}^{\frac{1}{q_3}}. \quad (14)$$

Так как $\frac{q_3}{q_2} - 1 \geq 0$, то сумма в (14) не больше, чем

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n(f))^{q_3} n^{\frac{q_3}{q_2} - 1} \right\}^{\frac{1}{q_3}}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_{\bar{q}_3} \leq 2^{\frac{q_3}{q_2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n(f))^{q_3} n^{\frac{q_3}{q_2} - 1} \right\}^{\frac{1}{q_3}}. \quad (15)$$

Отметим, что для характеристической функции $\chi_A(\bar{x})$, $\bar{x} \in I^d$, равноизмеримой является функция одной переменной $\chi_{[0,t]}(x)$, $x \in I = [0, 1]$, где $t = \mu A$. Поэтому по определению симметричного пространства их нормы равны.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{2^m} < t \leq \frac{1}{2^{m-1}}$. Тогда для $x \in (\frac{1}{2^{m-1}}, 1]$ характеристическая функция $\chi_{[0,t]}(x) = 0$. Поэтому

$$\int_{2^{-l}}^{2^{-l+1}} (\chi_{[0,t]}(x))^{q_1} dx = 0$$

для $l = 1, 2, \dots, m-1$.

Если $l \geq m$, то $\frac{1}{2^{l-1}} < t \leq \frac{1}{2^{m-1}}$. Тогда $\chi_{[0,t]}(x) = 1$ для $x \in (\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^{l-1}}]$, $l \geq m+1$. Следовательно, $\beta_l(\chi_{[0,t]}) = 2^{-\frac{l}{q_1}}$ для $l \geq m+1$. Если $l = m$, то $\beta_l(\chi_{[0,t]}) = (t - 2^{-m})^{\frac{1}{q_1}} \leq 2^{-\frac{m}{q_1}}$. Таким образом, для $t \in (\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}]$ имеем $\beta_l(\chi_{[0,t]}) = 0$, если $l = 1, 2, \dots, m-1$, и $\beta_l(\chi_{[0,t]}) \leq 2^{-\frac{l}{q_1}}$, если $l \geq m$. Теперь учитывая эти соотношения и полагая $f = \chi_{[0,t]}$ в (15), получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{q}_3}(t) &= \|\chi_{[0,t]}\|_{\bar{q}_3} \leq 2^{\frac{q_3}{q_2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n(\chi_{[0,t]}))^{q_3} n^{\frac{q_3}{q_2} - 1} \right\}^{\frac{1}{q_3}} = \\ &= 2^{\frac{q_3}{q_2}} \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} \left(2^{-\frac{n}{q_1}} \right)^{q_3} n^{\frac{q_3}{q_2} - 1} \right\}^{\frac{1}{q_3}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее из (16) по лемме 2 из [13] получим $\varphi_{\bar{q}_3}(t) \leq C(q_1, q_2, q_3) \left\{ 2^{-\frac{m}{q_1} q_3} m^{\frac{q_3}{q_2} - 1} \right\}^{\frac{1}{q_3}}$ для $t \in (\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}]$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение леммы. Для этого воспользуемся известным соотношением ($1 < q_j < +\infty$, $\frac{1}{q_j} + \frac{1}{q_j'} = 1$, $j = 1, 2, 3$):

$$\|f\|_{q_1, q_2, q_3} \asymp \sup_{\|g\|_{q_1', q_2', q_3'} \leq 1} \left| \int_{I^d} f(\bar{x}) g(\bar{x}) d\bar{x} \right|.$$

В этом соотношении положим $f(\bar{x}) = \chi_A(\bar{x})$, $g(\bar{x}) = \chi_A(\bar{x}) \|\chi_A\|_{q_1', q_2', q_3'}^{-1}$, где A – произвольное измеримое подмножество куба I^d и $\mu A = t$. Тогда $\|g\|_{q_j'} = 1$. Следовательно,

$$\|\chi_A(\bar{x})\|_{q_1, q_2, q_3} \geq t \|\chi_A\|_{q_1', q_2', q_3'}^{-1}. \quad (17)$$

Так как $q'_3 \geq q'_2$, то из (17) получим для $t \in (0, 1]$:

$$\varphi_{\bar{q}_3}(t) \geq C(q_1, q_2, q_3) \frac{t}{t^{q_1} (\ln \frac{1}{t})^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}}} = C(q_1, q_2, q_3) t^{\frac{1}{q_1}} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}}.$$

Лемма доказана.

Пусть $X(\varphi) = L_{\bar{q}_3}(I^d)$, $1 < q_2 \leq q_3$, $1 < q_1 < q < +\infty$.

В силу второго пункта леммы 1 фундаментальная функция пространства $L_{\bar{q}_3}(I^d)$ имеет оценку $\varphi_{L_{\bar{q}_3}}(t) \geq C(\bar{q}_3) t^{\frac{1}{q_1}} (\ln \frac{1}{t})^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}}$. Поэтому из теоремы 2 получаем:

$$\sup_{f \in B_{L_{\bar{q}_3}, \theta}^{\bar{r}}}} \|f - S_n^{\bar{r}}(f)\|_{q, \infty} \leq C \cdot p^{-n(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{q_1})} n^{\frac{d-1}{\theta'}} n^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}}.$$

Теорема 3. Пусть обобщенные системы Хаара $\chi\{p_n^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, d$, определены одним натуральным числом $p_n^{(j)} = p \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$; $j = 1, \dots, d$; $1 < q < +\infty$, $0 < r_1 = \dots = r_d < 1$; $X(\varphi)$ — пространство с фундаментальной функцией φ такой, что $\max\{\frac{1}{q}, r_1\} < \log_2 \alpha_\varphi$, $\log_2 \beta_\varphi < \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q} + r_1$. Тогда

$$\sup_{f \in H_X^{\bar{r}}} \|f - S_n^{\bar{r}}(f)\|_{q, \infty} \asymp \frac{p^{-n(r_1 + \frac{1}{q})}}{\varphi(p^{-n})} \cdot n^{d-1}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 1. Докажем оценку снизу. Для этого рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{p^{-\|\bar{s}\|(r_1 + \frac{1}{2})}}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})} \prod_{j=1}^d \chi_{p^{s_j+p}}(x_j).$$

Так как

$$\left\| \prod_{j=1}^d \chi_{p^{s_j+p}} \right\|_X \asymp \varphi(p^{-\|\bar{s}\|}) \prod_{j=1}^d p^{\frac{s_j}{2}},$$

то

$$\|f_0\|_X \leq C \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d} p^{-\|\bar{s}\|r} < +\infty,$$

и

$$\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_X \leq C \prod_{j=1}^d p^{-s_j r}.$$

Следовательно, функция $C_0 f_0 \in H_X^{\bar{r}}$. Так как носители функций $\chi_{p^{k_j+p}}(x_j)$, $k_j \in \mathbb{N}$, не пересекаются $(1, \dots, d)$, то

$$\int_{p^{-s_1-1}}^{p^{-s_1}} \cdots \int_{p^{-s_d-1}}^{p^{-s_d}} |f_0(\bar{x}) - S_n^{\bar{r}}(f_0, \bar{x})| d\bar{x} = \frac{p^{-\|\bar{s}\|(r+1)}}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|})}. \quad (18)$$

Рассмотрим множество $\Omega_n = \cup_{\|\bar{s}\| > n} \prod_{j=1}^d (p^{-s_j-1}, p^{-s_j}]$. Нетрудно убедиться, что мера этого множества удовлетворяет соотношению:

$$\mu\Omega_n = (1 - \frac{1}{p})^d \sum_{\|\bar{s}\| > n} p^{-\|\bar{s}\|} \asymp p^{-n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|_{q,\infty} &\geq (C_1 p^{-n})^{\frac{1}{q}-1} \int_0^{C_1 p^{-n}} (f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0))^*(u) du = \\ &= (C_1 p^{-n})^{\frac{1}{q}-1} \sup_{e \subset I^d, \mu e = \mu \Omega_n} \int_e |f_0(\bar{x}) - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0, \bar{x})| d\bar{x} \geq (C_1 p^{-n})^{\frac{1}{q}-1} \int_{\Omega_n} |f_0(\bar{x}) - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0, \bar{x})| d\bar{x} = \\ &= (C_1 p^{-n})^{\frac{1}{q}-1} \sum_{\|\bar{s}\| > n} \int_{p^{-s_1-1}}^{p^{-s_1}} \cdots \int_{p^{-s_d-1}}^{p^{-s_d}} |f_0(\bar{x}) - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0, \bar{x})| d\bar{x}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь, учитывая равенство (18) из (19), получим:

$$\|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|_{q,\infty} \geq (C_1 p^{-n})^{\frac{1}{q}-1} \sum_{\|\bar{s}\| > n} \frac{p^{-\|\bar{s}\|(r+1)}}{\varphi(p^{-\|\bar{s}\|)}.$$

Так как функция φ неубывает, то $\varphi(p^{-\|\bar{s}\|}) \leq \varphi(p^{-n})$ для $\|\bar{s}\| \geq n$. Поэтому из неравенства (20) по лемме Б будем иметь:

$$\|f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0)\|_{q,\infty} \geq (C_1 p^{-n})^{\frac{1}{q}-1} \frac{1}{\varphi(p^{-n})} \sum_{\|\bar{s}\| > n} p^{-\|\bar{s}\|(r+1)} \geq C(q, d, r) \frac{p^{-(r+\frac{1}{q})n}}{\varphi(p^{-n})} n^{\nu-1}.$$

Этим теорема доказана.

Цитированная литература

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., 1978.
2. Голубов Б.И. // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. С. 297–314.
3. Watari С. // Tohoku Journal Math. 1956. V. 8, №3. P. 286–290.
4. Андрианов А.В. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. С. 323–335.
5. Temlyakov V.N. // East J. Approx. 1998. V. 4. P. 87–106.
6. Освальд П. Об N -членных приближениях по системе Хаара в H^s -нормах. Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа М., 1999.
7. Акишев Г.А. // Изв. вузов, матем. 2005. № 3. С. 3–12.
8. Лапин С.В. Некоторые теоремы вложения для произведений функций // Деп. в ВИНИТИ, № 1036-80. С. 31.
9. Темляков В.Н., // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 112.
10. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича М., 1958.
11. Sharpley R. // Studia Math. 1980. LXVIII. P. 141–158.
12. Нурсултанов Е.Д. // Функ. анализ и его прил. 1997. Т. 31, №2. С. 79–82.
13. Галеев Э. М. // Матем. сборник. 1982. Т. 117, № 1. С. 32–43.

Поступила в редакцию 18.03.2010г.

УДК 517

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА БИВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Рассматривается функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского. При этом используется скалярно-векторная запись бикватернионов, предложенная еще Гамильтоном для кватернионов, которая наглядна и приспособлена для записи физических величин и уравнений. Рассмотрены линейные и квадратные уравнения на пространстве бикватернионов и построены их решения.

Рассмотрены бикватернионные волновые (*биволновые*) уравнения и их обобщенные решения. Исследована инвариантность уравнений для группы преобразований Лоренца.

Удобным аппаратом для описания физических процессов является алгебра кватернионов и ее комплексное расширение – алгебра бикватернионов. Гиперкомплексные числа – кватернионы – были предложены Гамильтоном еще в XIX веке и предшествовали векторной алгебре [1]. Однако успехи последней отодвинули этот аппарат на задний план и до сих пор эти алгебры не нашли достаточного применения в математической физике. Однако в последнее время постепенно алгебра кватернионов и бикватернионов начинает использоваться для решения задач теории поля в работах разных авторов (см., например, [1–5]).

1 Алгебра бикватернионов. Обозначим e_1, e_2, e_3 – орты декартовой системы координат в R^3 , $e_0 = 1$. Пусть F – трехмерный вектор с комплексными компонентами: $F = F_1e_1 + F_2e_2 + F_3e_3$, f – комплексное число.

Вводится пространство гиперкомплексных чисел – *бикватернионов* (комплексных *кватернионов*): $B = \{\mathbf{F} = f + F\}$. Это линейное пространство со сложением (+) и умножением: для $\forall a, b$ – комплексных чисел

$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = (af + bg) + (aF + bG),$$

и операцией кватернионного умножения (\circ):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \quad (1)$$

Keywords: *lgebra, biquaternion, bigradient, biwave equation, Lorenz transformation*

2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

© Л. А. Алексеева, 2010.

Здесь и далее обозначаем $(F, G) = F_j G_j$ – скалярное произведение векторов F и G , $[F, G] = \varepsilon_{jkl} F_j G_k e_l$ – их векторное произведение, ε_{jkl} – псевдотензор Леви-Чивита, δ_{jk} – символ Кронекера (здесь и далее всюду по одноименным индексам в произведении суммирование от 1 до 3, подобно тензорной свертке).

Поскольку $\varepsilon_{jkl} = \varepsilon_{ljk} = \varepsilon_{klj}$, $\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{jlk} = -\varepsilon_{kjl}$; и $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

$$e_0 \circ e_0 = e_0, \quad e_0 \circ e_j = e_j, \quad e_j \circ e_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl} e_l,$$

$$(e_j \circ e_k) \circ e_m = -\varepsilon_{jkm} - \delta_{jk} e_m - \delta_{km} e_j + \delta_{mj} e_k = e_j \circ (e_k \circ e_m), \quad j, k, l, m, n = 1, 2, 3,$$

алгебра бикватернионов некоммутативна, но ассоциативна:

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{H} = (\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \circ \mathbf{H} = \mathbf{F} \circ (\mathbf{G} \circ \mathbf{H}).$$

Введем некоторые определения и обозначения, которыми далее будем пользоваться.

Бикватернион $\mathbf{F}^- = f - F$ называется *взаимным* для $\mathbf{F} = f + F$.

Бикватернион $\bar{\mathbf{F}} = \bar{f} + \bar{F}$, где черта обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа, называется *комплексно-сопряженным* \mathbf{F} .

Если $\mathbf{F} \circ \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F} = 1$, то назовем \mathbf{F} *унитарным*.

Бикватернион $\mathbf{F}^* = \bar{f} - \bar{F}$ назовем *сопряженным* \mathbf{F} .

Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, бикватернион называется *самосопряженным*. Самосопряженные бикватернионы имеют вид:

$$\mathbf{F} = f + iF, \quad (2)$$

где f и F – действительные.

Скалярным произведением бикватернионов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = f_1 f_2 + (F_1, F_2).$$

Нормой бикватерниона \mathbf{F} назовем неотрицательную скалярную величину

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}})} = \sqrt{f \cdot \bar{f} + (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2}.$$

Если \mathbf{F} – *кватернион* (действительный БК), то $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^-$ и

$$\|\mathbf{F}\|^2 = \mathbf{F}^* \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F}^*. \quad (3)$$

Псевдонормой бикватерниона \mathbf{F} назовем величину

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2}, \quad \text{Re} \langle \mathbf{F} \rangle \geq 0, \quad (4)$$

Легко видеть,

$$\langle \mathbf{F} \rangle^2 = (\mathbf{F}^*, \mathbf{F}) = (\mathbf{F}, \mathbf{F}^*). \quad (5)$$

Если \mathbf{F} – самосопряженный, то

$$\langle \mathbf{F} \rangle^2 = \bar{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \bar{\mathbf{F}}.$$

Если

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = 1, \quad (6)$$

то \mathbf{G} – *правый обратный* для \mathbf{F} и обозначается $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$, соответственно \mathbf{F} – *левый обратный* для \mathbf{G} и обозначается ${}^{-1}\mathbf{G}$.

Легко проверяются равенства

$$(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})^* = \mathbf{G}^* \circ \mathbf{F}^*, \quad (\mathbf{F} \circ \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{G}^{-1} \circ \mathbf{F}^{-1}.$$

Лемма 1.1. *Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$, то существуют оба обратных бикватерниона и они равны:*

$$\mathbf{F}^{-1} = {}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{F}^{-}/(\mathbf{F}, \mathbf{F}).$$

Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, обратный бикватернион не существует.

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{F}^{-} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-} = f^2 + (F, F) = (\mathbf{F}, \mathbf{F}),$$

и если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$, то, поделив (6) на (\mathbf{F}, \mathbf{F}) , получим требуемое.

Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, для определения обратного бикватерниона, используя (1) и выписывая скалярную и векторную части этих уравнений, получим две системы четырех линейных уравнений вида: (для правого обратного)

$$fg - (F, G) = 1, \quad fG + gF + [F, G] = 0,$$

или (для левого обратного)

$$fg - (F, G) = 1, \quad fG + gF + [G, F] = 0.$$

Определители этих систем (соответственно знакам) равны

$$\begin{vmatrix} f & -F_1 & -F_2 & -F_3 \\ F_1 & f & \pm F_3 & \mp F_2 \\ F_2 & \mp F_3 & f & \pm F_1 \\ F_3 & \pm F_2 & \mp F_1 & f \end{vmatrix} = (f^2 + (F, F))^2 = (\mathbf{F}, \mathbf{F})^2 = 0.$$

Ранг этого определителя равен 2. Ранг расширенной матрицы равен 3, поэтому решение первой и второй системы не существует.

Теорема 1.1. *При известных \mathbf{F} и \mathbf{V} бикватернионные линейные (билинейные) уравнения вида*

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \mathbf{V} \tag{7}$$

или

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \mathbf{V} \tag{8}$$

имеют единственное решение $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{V}$ или $\mathbf{G} = \mathbf{V} \circ \mathbf{F}^{-1}$ соответственно, если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$.

Доказательство теоремы следует из леммы 1.1.

Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, вопрос существования решения (7) или (8) определяется рангом матрицы расширенной системы, который зависит от вида \mathbf{V} .

Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, для определения решения имеем: для (7)

$$fg - (F, G) = 0, \quad fG + gF + [F, G] = 0, \tag{9}$$

или для (8)

$$fg - (F, G) = 0, \quad fG + gF + [G, F] = 0. \tag{10}$$

Если $d_{23} = F_2^2 + F_3^2 \neq 0$, решением (9) является БК (их компоненты расположены по столбцам):

$$\begin{pmatrix} g \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{fF_2 + F_1F_3}{d_{23}} \\ \frac{fF_3 - F_1F_2}{d_{23}} \end{pmatrix} \circ \mathbf{C}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{fF_3 - F_1F_2}{d_{23}} \\ -\frac{fF_2 + F_1F_3}{d_{23}} \end{pmatrix} \circ \mathbf{C}_2,$$

где \mathbf{C}_j - произвольные бикватернионы .

Если $d_{01} = f^2 + F_1^2 \neq 0$, решение (9) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF_2 + F_1F_3}{d_{01}} \\ \frac{fF_3 - F_1F_2}{d_{01}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \mathbf{C}_1 + \begin{pmatrix} \frac{fF_3 - F_1F_2}{d_{01}} \\ -\frac{fF_2 + F_1F_3}{d_{01}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \mathbf{C}_2,$$

Аналогично можно получить решение системы уравнений (10).

Обозначим $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \circ \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^3 = \mathbf{Z} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{Z}$ и т.д. Используя степени \mathbf{Z} и алгебру бикватернионов, можно строить бикватернионные полиномы (*биполиномы*) типа

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{Z}) = \sum_{j=0}^n \mathbf{A}_j \circ \mathbf{Z}^j,$$

где \mathbf{A}_j постоянные бикватернионные коэффициенты, и разработать теорию таких многочленов, подобно многочленам над полем комплексных чисел. Она будет существенно отличаться. В частности, легко доказывается следующая теорема.

Теорема 1.2. *Квадратное бикватернионное (биквадратное) уравнение*

$$\mathbf{Z}^2 = \mathbf{A}$$

всегда разрешимо и имеет 4 корня: $\mathbf{Z}_j = \mathbf{z}_j + \frac{\mathbf{A}}{2\mathbf{z}_j}$, где

$$z_{1,2} = \pm 0,5\sqrt{2a + \sqrt{4a^2 + (A, A)}}, \quad z_{3,4} = \pm 0,5\sqrt{2a - \sqrt{4a^2 + (A, A)}}. \quad (11)$$

Следовательно, можно ввести понятие корня квадратного из бикватерниона: $\sqrt{\mathbf{A}}$, которых будет 4. Легко проверить, что известная формула корней квадратного многочлена дает решение квадратного бикватернионного уравнения.

Теорема 1.3. *Биквадратное уравнение*

$$\mathbf{Z}^2 + \mathbf{B} \circ \mathbf{Z} + \mathbf{C} = 0$$

имеет 4 решения вида:

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{0},5(-\mathbf{B} + \sqrt{\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{C}}|_{[j]}),$$

где индекс в квадратных скобках означает одно из 4 значений радикала (11).

Интересно, что теорема Виета для коэффициентов квадратного полинома также справедлива, но только для пар соответствующих корней, что легко проверить.

Используя тейлоровские разложения экспоненты, синуса, косинуса и других элементарных и специальных функций, можно вводить обобщения этих функций на пространстве бикватернионов, например:

$$\exp(\mathbf{Z}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}^n / n!$$

и т.п. Можно показать, что этот ряд сходится для любых аргументов.

Таким образом можно обобщить теорию элементарных и специальных функций на это пространство. Здесь мы на этом останавливаться не будем и предлагаем это заинтересованному читателю.

Рассмотрим бикватернионы на пространстве Минковского и группы линейных преобразований на нем.

2 Преобразование Лоренца пространства Минковского. Преобразования Лоренца пространства Минковского удобно строить, используя алгебру бикватернионов.

Обозначим $M = \{(\tau, x) : \tau \in R^1, x \in R^3\}$ – пространство Минковского. Кватернизируем M , вводя комплексно-сопряженные бикватернионы:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \tau + ix, \quad \bar{\mathbf{Z}} = \tau - ix, \quad \tau \in R^1, \quad x \in R^3, \\ \|\mathbf{Z}\|^2 &= \|\bar{\mathbf{Z}}\|^2 = \tau^2 + \|x\|^2, \quad \langle \mathbf{Z} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{Z}} \rangle^2 = \tau^2 - \|x\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что это самосопряженные бикватернионы: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*$, $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^*$, и

$$\mathbf{Z}^{-1} = \bar{\mathbf{Z}} / \langle \mathbf{Z} \rangle^2, \quad \bar{\mathbf{Z}}^{-1} = \mathbf{Z} / \langle \mathbf{Z} \rangle^2.$$

Следовательно, на *световом конусе* ($|\tau| = \|x\|$) обратных БК для \mathbf{Z} , $\bar{\mathbf{Z}}$ не существует.

Введем взаимные бикватернионы:

$$\mathbf{U}(\theta, e) = \mathbf{U}^* = ch\theta + iesz\theta, \quad \mathbf{U}^- = (\mathbf{U}^-)^* = \bar{\mathbf{U}} = ch\theta - iesz\theta, \quad e \in R^3, \quad \|e\| = 1,$$

где θ - действительное число (здесь используются гиперболический синус и косинус). Легко видеть, что они унитарные: $\mathbf{U} \circ \mathbf{U}^- = 1$.

Прямым вычислением доказываются следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Классическое преобразование Лоренца $L : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}'$ имеет вид:*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{U}^- \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{U}^-.$$

Если вести обозначения:

$$ch2\theta = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad sh2\theta = v(1 - v^2)^{-1/2}, \quad |v| < 1,$$

то скалярная и векторная часть \mathbf{Z}' и \mathbf{Z} запишутся в виде известных релятивистских формул:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{\tau + v(e, x)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = (x - e(e, x)) + e \frac{(e, x) + v\tau}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \tau &= \frac{\tau' - v(e, x')}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x = (x' - e(e, x')) + e \frac{(e, x') - v\tau'}{\sqrt{1 - v^2}}, \end{aligned}$$

что соответствует движению системы координат X_1, X_2, X_3 в направлении вектора e с безразмерной скоростью v . Легко видеть, что в силу ассоциативности и унитарности сохраняется псевдонорма:

$$\langle \mathbf{Z}' \rangle^2 = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{U}^- \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{U}^- = \langle \mathbf{Z} \rangle^2. \quad (13)$$

Лемма 2.2. *Сопряженные кватернионы:*

$$\mathbf{W}(\varphi, e) = \cos \varphi + e \sin \varphi, \quad \mathbf{W}^* = \mathbf{W}^- = \cos \varphi - e \sin \varphi, \quad \|e\| = 1,$$

где φ – действительное, определяют группу преобразований на M , ортогональных на векторной части \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{W}^*, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{W}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{W}.$$

Это преобразование есть вращение R^3 вокруг вектора e на угол 2φ .

Доказательство. Вычисляя, получим требуемое:

$$\tau' = \tau, \quad x' = e(e, x) + (x - e(e, x))\cos 2\varphi + [e, x]\sin 2\varphi.$$

Поскольку $\|\mathbf{W}\| = \|\mathbf{W}^*\| = \mathbf{1}$, $\mathbf{W} \circ \mathbf{W}^* = \mathbf{W}^* \circ \mathbf{W} = \mathbf{1}$, аналогично лемме 2.1 доказывается, что $\|\mathbf{Z}\| = \|\mathbf{Z}'\|$.

Замечание. Легко видеть, что $\mathbf{U}(\theta, e) = \mathbf{W}(-i\theta, e)$. Используя суперпозицию этих двух преобразований, получим общий вид преобразования Лоренца.

Определение. Преобразование Лоренца на \mathbf{M} можно определить как линейное преобразование вида:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{L}^- \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{L}^{*-},$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} \circ \mathbf{U} = \cos(\varphi + i\theta) + e\sin(\varphi + i\theta), \quad \mathbf{L}^* = \cos(\varphi - i\theta) - e\sin(\varphi - i\theta),$$

которое сохраняет псевдонорму: $\langle \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathbf{Z}' \rangle$.

Легко видеть, что $\mathbf{L} \circ \mathbf{L}^- = \mathbf{L}^* \circ \mathbf{L}^{*-} = \mathbf{1}$, поэтому псевдонорма сохраняется. На световом конусе псевдонорма равна нулю.

Следствие. При преобразованиях Лоренца световой конус переходит в световой конус.

3 Дифференциальная алгебра бикватернионов на M . Здесь рассмотрим функциональное пространство бикватернионов: $B(M) = \{\mathbf{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\}$, где f – комплекснозначная функция, а F – трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами F_j , $j = 1, 2, 3$. Далее предполагается, что f и F – локально интегрируемые (регулярные) и дифференцируемы на M . Частную производную бикватерниона по переменной τ или x_j будем обозначать:

$$\partial_\tau \mathbf{F} = \partial_\tau f + \partial_\tau F, \quad \partial_j \mathbf{F} = \partial_j f + \partial_j F.$$

Назовем БК $\mathbf{P}_n(\tau, x)$ полиномиальным степени n , если его компоненты являются полиномами от (τ, x_1, x_2, x_3) , старшая степень которых равна n : $\mathbf{P}_n = p(\tau, x) + P(\tau, x)$. Используя их, можно вводить линейные дифференциальные операторы на $B(M)$ вида:

$$\mathbf{P}_n(\partial_\tau, \partial_x) = p(\partial_\tau, \partial_x) + P(\partial_\tau, \partial_x),$$

заменяя в полиноме соответствующую координату одноименной производной по ней соответствующей степени. Используя их, можно рассматривать бикватернионные линейные дифференциальные уравнения:

$$\mathbf{P}_n(\partial_\tau, \partial_x) \circ \mathbf{G} = \mathbf{B}(\tau, x) \tag{14}$$

(здесь \circ – формальное бикватернионное умножение для введения оператора, далее этот значок опускаем).

Это уравнение эквивалентно системам четырех уравнений вида:

$$\begin{aligned} p(\partial_\tau, \partial_x)g - (P(\partial_\tau, \partial_x), G) &= b(\tau, x) \\ p(\partial_\tau, \partial_x)G + P(\partial_\tau, \partial_x)g + [P(\partial_\tau, \partial_x), G] &= \mathbf{B}(\tau, x), \end{aligned}$$

которые эквивалентны системам восьми уравнений, если выделить в них действительную и комплексную части. Как покажем далее, очень широкий класс систем уравнений математической физики можно привести к решению одного уравнения типа (14).

Стандартная процедура построения решения (14) в случае полиномов с постоянными коэффициентами – это преобразование Фурье, которое позволяет в пространстве переменных Фурье (ω, ξ) , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, получить линейное алгебраическое уравнение

$$\mathbf{P}(-i\omega, -i\xi) \circ \tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{B}}(\omega, \xi),$$

где преобразование Фурье бикватерниона помечено тильдой. Решение этого уравнения дает теорема 1.1.

Для восстановления оригинала \mathbf{G} находится обратное преобразование Фурье. В силу полиномиальности, уравнение

$$(\mathbf{P}(-i\omega, -i\xi), \mathbf{P}(-i\omega, -i\xi)) = 0$$

имеет решения – трехмерные поверхности $\omega = \omega_k(\xi)$, число которых зависит от степеней полиномов и не больше чем $4n$:

$$(\mathbf{P}(-i\omega_k(\xi), -i\xi), \mathbf{P}(-i\omega_k(\xi), -i\xi)) \equiv 0 \quad \text{для } \forall \xi \in R^3.$$

В случае действительных $\omega_k(\xi)$ для построения трансформанты Фурье следует использовать теорию обобщенных функций [4], которую нетрудно обобщить и на $\mathbf{B}(M)$.

4 Пространства $B(M)$ и $\hat{B}(M)$. Введем два пространства бикватернионов, *основное* $B(M) = \{\Phi = \varphi(\tau, x) + \Phi(\tau, x)\}$, $\varphi, \Phi_j \in D(R^4)$, $D(R^4)$ – пространство финитных бесконечнодифференцируемых функций на R^4 [4]. $\hat{B}(M) = \{\hat{\mathbf{F}} = \hat{f} + \hat{F}\}$ – сопряженное ему пространство *обобщенных бикватернионов* (ОБК) – это пространство линейных непрерывных функционалов на $B(M)$:

$$(\hat{\mathbf{F}}, \Phi) = (\hat{f}, \varphi_0) + \sum_{j=1}^3 (\hat{F}_j, \varphi_j), \quad \forall \Phi \in B(M).$$

Любому регулярному бикватерниону \mathbf{F} соответствует функционал, который можно представить в интегральном виде:

$$\int_{R^4} \{f(\tau, x)\varphi(\tau, x) + (F(\tau, x), \Phi(\tau, x))\} d\tau dx_1 dx_2 dx_3, \quad \forall \Phi \in B(M).$$

Будем помечать его шапочкой $\hat{\mathbf{F}}$, когда он рассматривается как обобщенный.

Если действие ОБ нельзя представить в таком интегральном виде, будем называть его, как принято [4], *сингулярным*.

Сингулярные функции из $D'(R^4)$ определяют и соответствующие им скалярные ОБК (с нулевой векторной частью). Используя их можно строить и более сложные ОБК. В частности, в задачах математической физики часто используются *простые слои*. Их обобщением на $\hat{B}(M)$ являются ОБК $\mathbf{F}\delta_S$:

$$(\mathbf{F}\delta_S, \Phi) = \int_S (\mathbf{F}(\tau, x), \Phi(\tau, x)) dS, \quad \forall \Phi \in B(M).$$

Здесь интеграл берется по поверхности $S \subset R^4$, размерность которой может быть равной 1,2,3. Бикватернион \mathbf{F} назовем, как принято, *плотностью* простого слоя.

Используя определение производной ОБ:

$$(\partial_j \hat{\mathbf{F}}, \Phi) = -(\hat{\mathbf{F}}, \partial_j \Phi) \quad \text{для } \forall \Phi \in B(M)$$

можно строить частные производные любых порядков, аналогично, как в [4].

Определение. *Обобщенным решением дифференциального уравнения $D\mathbf{F} = \mathbf{G}$, где D – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, будем называть ОБК $\hat{\mathbf{F}}$, удовлетворяющий равенству:*

$$(D\hat{\mathbf{F}}, \Phi) = (\hat{\mathbf{G}}, \Phi) \quad \text{для } \forall \Phi \in B(M).$$

Определение. *Обобщенным преобразованием Фурье $\hat{\mathbf{G}}$ называется ОБК $\tilde{\mathbf{G}}$, удовлетворяющий равенству:*

$$(\tilde{\mathbf{G}}, \Phi) = (\hat{\mathbf{G}}, \tilde{\Phi}) \quad \text{для } \forall \Phi \in B(M).$$

Здесь $\tilde{\Phi}$ – классическое преобразование Фурье Φ :

$$\tilde{\Phi}(\omega, \xi) = \int_{R^4} \Phi(\tau, x) \exp(i\tau\omega + i(\xi, x)) d\tau dx_1 dx_2 dx_3,$$

которое всегда существует в силу свойств $B(M)$.

Аналогично, как в теории обобщенных функций, можно показать, что если бикватернион регулярный и существует классическое преобразование Фурье, то оно является и обобщенным.

Для класса обобщенных функций медленного роста преобразование Фурье всегда существует. Аналогично можно ввести бикватернионы медленного роста, но на этом здесь останавливаться не будем.

5 Взаимные комплексные градиенты. Биволновое уравнение. Рассмотрим частные случаи дифференциальных операторов, характерные для задач математической физики, но будем рассматривать их на $\hat{B}(M)$.

Введем дифференциальные операторы – взаимные комплексные градиенты:

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla,$$

где $\nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Коротко будем называть их *биградиентами*. В смысле выше данных определений их символы комплексно-сопряженные и самосопряженные:

$$(\nabla^-)^* = \nabla^-, \quad (\nabla^+)^* = \nabla^+.$$

Их действие на K определено как в алгебре кватернионов: (соответственно знакам)

$$\nabla^\pm \mathbf{F} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i(\nabla, F)) \pm \partial_\tau F \pm i\nabla f \pm i[\nabla, F]$$

или в традиционной записи:

$$\nabla^\pm \mathbf{F} = (\partial_\tau f \mp i \operatorname{div} F) \pm \partial_\tau F \pm i \operatorname{grad} f \pm i \operatorname{rot} F.$$

Легко проверить, что волновой оператор \square представим в виде суперпозиции:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta = \nabla^- \circ \nabla^+ = \nabla^+ \circ \nabla^-,$$

где Δ – трехмерный оператор Лапласа

Используя это свойство, можно строить частные решения дифференциальных бикватернионных уравнений на $B(M)$ вида:

$$\nabla^\pm \mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{G}(\tau, x),$$

которое будем называть *биволновым уравнением*. А решения этого уравнения будем называть \pm *бипотенциалами* \mathbf{G} .

Прямым вычислением можно показать, что при преобразованиях Лоренца бипотенциалы преобразуются в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 5.1. Если $\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*$, то

$$\mathbf{D}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{L}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{L} \circ \mathbf{D}' \circ \bar{\mathbf{L}}^*,$$

где $\mathbf{D} = \nabla^+$ или $\mathbf{D} = \nabla^-$. При этом биградиенты \mathbf{D}' сохраняют вид.

Используя леммы 2.3, 3.1, ассоциативность произведения и свойства \mathbf{L} , получим:

$$\nabla' \mathbf{K}' = (\bar{\mathbf{L}}^* \circ \nabla \circ \mathbf{L}) (\bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L}) = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \nabla \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{L} = \mathbf{G}'.$$

Следовательно, верна теорема.

Теорема 5.2 При преобразованиях Лоренца сохраняется вид биволнового уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau'} \pm i \nabla' \right) \mathbf{K}' = \mathbf{G}',$$

при этом $\mathbf{K}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L}$, $\mathbf{G}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{L}$.

Заключение. Свойства биволнового уравнения позволяют легко строить его решения, в том числе в классе ударных волн. С использованием теории обобщенных функций в продолжении этой статьи будут представлены обобщенные решения биволнового уравнения, уравнения Гельмгольца и уравнения Лапласа на пространстве бикватернионов. В качестве приложения рассмотрено биволновое уравнение, эквивалентное системе уравнений Максвелла и задачи восстановления потенциалов векторных полей.

Цитированная литература

1. Rastall R. Quaternions in relativity. Review of modern physics. 1964.
2. Ефремов А.П. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. Т. 1, № 1. С. 111–127.
3. Казанова Г. Векторная алгебра. М., 1979.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.
5. Алексеева Л.А. // Математический журнал. 2003. Т. 3, № 4. С. 20–24.
6. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 4. С. 611–622.
7. Алексеева Л.А. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42, № 1. С. 76–88.
8. Алексеева Л.А. // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2004. № 3. С. 45–53.
9. Алексеева Л.А. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009. Т. 6, № 1. С. 122–134.

Поступила в редакцию 26.02.2010г.

УДК 517.917

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. У. БЕКБАУОВА, К. К. КЕНЖЕБАЕВ, Ж. А. САРТАБАНОВ

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова
030000 Актобе Бр. Жубановых, 263 mirra478@mail.ru

В работе получены достаточные условия существования многопериодического решения квазилинейных гиперболических систем.

Общие вопросы систем, рассматриваемых в данной работе видов, приведены в скалярной форме в работе [1]. Здесь исследование проведено в духе методики работы [2]. В частности, введено понятие матрицанта для линейных гиперболических систем более общего вида. На этой основе определена не критичность линейной системы. Дано интегральное представление многопериодического решения линейной гиперболической системы через матрицант.

Полученные результаты распространены на квазилинейную гиперболическую систему.

1. Введем в рассмотрение дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} D_a &= \partial_0 + \langle a(\tau, t), \partial \rangle, \\ D_b &= \partial_0 + \langle b(\tau, t), \partial \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m)$ – вектор, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, $j = \overline{1, m}$, $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ – вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярные произведение.

Определим соотношением

$$D_{a,b} = \{(D_a, \dots, D_a), (D_b, \dots, D_b)\} \quad (2)$$

оператор, который действует на n – вектор-функцию $z = (x, y)$ переменных τ, t с векторными компонентами $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ в виде $D_{a,b}z = (D_a x, D_b y)$, $p + q = n$.

Предположим выполненными условия (θ, ω) – периодичности и $C_{\tau,t}^{(0,1)}$ – гладкости:

$$a(\tau + \theta, t + k\omega) = a(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{0,1}(R \times R^m), k \in Z^m, \quad (3)$$

Keywords: *wave equation, multiperiodical solution*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L05, 43A90

© А. У. Бекбауова, К. К. Кенжебаев, Ж. А. Сартабанов, 2010.

$$b(\tau + \theta, t + k\omega) = b(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{0,1}(R \times R^m), k \in Z^m, \tag{4}$$

где Z^m – множество целочисленных векторов $k = (k_1, \dots, k_m)$, $k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ – основной вектор-период, $\omega_0 = \theta$, $\omega_1, \dots, \omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные постоянные.

Известно, что задачи для характеристических систем

$$\frac{dt}{d\tau} = a(\tau, t), t|_{\tau=s} = \sigma \in R^m, \tag{5}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = b(\tau, t), t|_{\tau=s} = \chi \in R^m, \tag{6}$$

для любого $s \in R$ при условиях (3),(4) имеют глобально определенные решения:

$$t = \varphi(\tau, s, \sigma), \varphi(s, s, \sigma) = \sigma, \tag{7}$$

$$t = \psi(\tau, s, \chi), \psi(s, s, \chi) = \chi, \tag{8}$$

обладающие свойством единственности.

Соотношения (7), (8) в отдельности можно рассматривать как преобразование $(s, \sigma) \in R \times R^m$ в $(\tau, t) \in R \times R^m$ и $(s, \chi) \in R \times R^m$ в $(\tau, t) \in R \times R^m$, причем эти преобразования обладают свойствами:

а) композиции

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \varepsilon, \varphi(\varepsilon, s, \sigma)) &= \varphi(\tau, s, \sigma), \\ \psi(\tau, \varepsilon, \psi(\varepsilon, s, \chi)) &= \psi(\tau, s, \chi); \end{aligned} \tag{9}$$

для любого $\varepsilon \in R$.

б) периодичности

$$\begin{aligned} \varphi(\tau + \theta, s + \theta, \sigma + k\omega) &= \varphi(\tau, s, \sigma) + k\omega, \\ \psi(\tau + \theta, s + \theta, \chi + k\omega) &= \psi(\tau, s, \chi) + k\omega; \end{aligned} \tag{10}$$

в) обратимости

$$\sigma = \varphi(s, \tau, t), \chi = \psi(s, \tau, t). \tag{11}$$

Эти групповые свойства преобразований (7) и (8) следуют из свойства единственности решений задач (5) и (6). Таким образом преобразования (7) и (8) являются диффеоморфизмом.

2. Рассмотрим однородную линейную систему гиперболического типа:

$$D_{a,b}z = P(\tau, t)z. \tag{12}$$

Предположим, что матрица обладает свойством периодичности и гладкости:

$$P(\tau + \theta, t + k\omega) = P(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{0,1}(R \times R^m), k \in Z^m. \tag{13}$$

Известно [1], что при условии (13) для системы (12) однозначно разрешима задача Коши с начальным условием:

$$z(s, \tau, t)|_{\tau=s} = u(t), \quad u(t + k\omega) = u(t) \in C_t^1(R^m), \quad k \in Z^m. \tag{12_0}$$

Следовательно, система (12) имеет $n \times n$ – матричное решение $Z(s, \tau, t)$ с нормированным начальным условием:

$$D_{a,b}Z(s, \tau, t) = P(\tau, t)Z(s, \tau, t), \quad Z(s, s, t) = E, \tag{14}$$

где E – единичная матрица.

Пусть Π_a и Π_b проекторы, которые n – векторы z представляют в виде $z = (\Pi_a z, \Pi_b z)$ с p и q – векторными компонентами $\Pi_a z$ и $\Pi_b z$ соответственно.

Тогда, тождество (14) можно представить в виде двух связанных матричных уравнений:

$$\begin{aligned} D_a \Pi_a Z(s, \tau, t) &= \Pi_a P(\tau, t) Z(s, \tau, t), \\ D_b \Pi_b Z(s, \tau, t) &= \Pi_b P(\tau, t) Z(s, \tau, t). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, рассматривая (15) на соответствующих характеристиках (7) и (8) дифференциальных операторов D_a , D_b , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Pi_a Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) &= \Pi_a P(\tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)), \\ \frac{d}{d\tau} \Pi_b Z(s, \tau, \psi(\tau, s, \sigma)) &= \Pi_b P(\tau, \psi(\tau, s, \sigma)) Z(s, \tau, \psi(\tau, s, \sigma)) \end{aligned} \quad (16)$$

Если систему (15) будем рассматривать вдоль характеристики (7) оператора D_a , то будем иметь систему тождеств вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Pi_a Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) &= \Pi_a P(\tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)), \\ D_b \Pi_b Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) &= \Pi_b P(\tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) = \frac{d}{d\tau} \Pi_b Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)). \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, из соотношений (17) имеем, что вдоль характеристики оператора D_a матрица $Z(s, \tau, t)$ принимает одинаковые значения с матрицантом $X(\tau, t, s, \sigma)$ системы с одинаковой главной частью

$$D_a x = P(\tau, t) x. \quad (18)$$

Таким образом, имеем $\Pi_a Z(s, \tau, \varphi(\tau, s, \sigma)) = \Pi_a X(\tau, \varphi(\tau, s, \sigma), s, \sigma)$. Отсюда в силу (9), получим:

$$\Pi_a Z(s, \tau, t) = \Pi_a X(\tau, t, s, \varphi(s, \tau, t)). \quad (19)$$

Аналогичным образом рассматривая систему (15) вдоль характеристики оператора D_b , имеем:

$$\Pi_b Z(s, \tau, t) = \Pi_b Y(\tau, t, s, \psi(s, \tau, t)). \quad (20)$$

$Y(\tau, t, s, \sigma)$ – матрицант системы с одинаковой главной частью вида:

$$D_b y = P(\tau, t) y. \quad (21)$$

Соотношения (19) и (20) позволяют строить матрицант $Z(s, \tau, t)$ гиперболической системы (12) на основе матрицантов $X(\tau, t, s, \varphi(s, \tau, t))$, $Y(\tau, t, s, \psi(s, \tau, t))$ систем (18) и (21).

Рассматривая начальную задачу (12)–(12₀), ее решение $z(s, \tau, t) = (\Pi_a z(s, \tau, t), \Pi_b z(s, \tau, t))$, имеем представление:

$$z(s, \tau, t) = Z(s, \tau, t) u(\sigma_{a,b}(s, \tau, t)), \quad (22)$$

где $\sigma_{a,b}(s, \tau, t) = \varphi(s, \tau, t)$ для $\Pi_a z(s, \tau, t)$ и $\sigma_{a,b}(s, \tau, t) = \psi(s, \tau, t)$ для $\Pi_b z(s, \tau, t)$.

Справедливость структуры решения (22) проверяется непосредственно на основе (15). Таким образом, имеем следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении условий (3), (4) и (13) единственное решение $z(s, \tau, t)$ начальной задачи (12) – (12₀) определяется соотношениями (22) и (19)–(20).

Далее, предположим выполненным условие не критичности:

$$|Z(s, \tau, t)| \leq \Gamma e^{-\gamma(\tau-s)}, \quad \tau \geq s, \tag{23}$$

с постоянными $\Gamma \geq 1, \gamma > 0$, где $|\cdot|$ - евклидова норма матрицы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (3), (4), (13) и (23). Тогда система (12) имеет только нулевое (θ, ω) - периодическое решение.

Действительно, (θ, ω) - периодические решения системы (12) представимы в виде (22) с ω - периодическими начальными условиями вида (12₀).

Следовательно, при условии некритичности (23) система (12) не имеет (θ, ω) - периодических решений, кроме нулевого.

3. Введем на рассмотрение неоднородную систему гиперболических уравнений вида:

$$D_{a,b}z = P(\tau, t)z + f(\tau, t), \tag{24}$$

где $f(\tau, t)$ - заданная вектор-функция, а остальные обозначения имеют прежний смысл, причем предположим выполненным условие:

$$f(\tau + \theta, t + k\omega) = f(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{0,1}(R \times R^m), \quad k \in Z^m. \tag{25}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (3), (4), (13), (23) и (25). Тогда система (24) имеет единственное (θ, ω) - периодическое решение

$$z^*(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\tau} Z(s, \tau, t) f(s, \sigma_{a,b}(s, \tau, t)) ds. \tag{26}$$

Действительно, равномерная сходимость несобственного интеграла (26) относительно τ и t следует из условий (23) и (25). С учетом (14) непосредственной проверкой убеждаемся, что (26) удовлетворяет уравнению (24).

Периодичность решения (26) следует из того, что

$$Z(s + \theta, \tau + \theta, t + k\omega) = Z(s, \tau, t), \quad k \in Z^m,$$

причем необходимо сделать подстановку $s = \chi + \theta$ в интеграле после сдвига τ на период θ .

Единственность следует из леммы 2.

Матрицу $Z(s, \tau, t)$ назовем матрицантом линейных систем, а соотношения (22) и (26) являются представлениями решений через матрицант.

4. Рассмотрим квазилинейную систему гиперболических уравнений вида:

$$D_{a,b}z = P(\tau, t)z + f(\tau, t, z), \tag{27}$$

где нелинейная часть системы $f(\tau, t, z)$ удовлетворяет условию:

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, z) = f(\tau, t, z) \in C_{\tau,t,z}^{0,1,1}(R \times R^m \times R^n), \quad k \in Z^m, \tag{28}$$

а остальные обозначения сохраняют прежний смысл.

Введем пространство:

$$S^{\theta, \omega} = \{z(\tau, t) | z(\tau + \theta, t + k\omega) = z(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{1,1}(R \times R^m),$$

$$\|z\| = \sup \sqrt{\sum_{k=1}^n z_k^2(\tau, t)}$$

и шар

$$S_{\Delta}^{\theta, \omega} = \{z \in S^{\theta, \omega} \mid \|z\| \leq \Delta\}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3), (4), (13), (23) и (28). Тогда квазилинейная гиперболическая система (27) в шаре $S_{\Delta}^{\theta, \omega}$ пространства (θ, ω) – периодических, непрерывно дифференцируемых функций $S^{\theta, \omega}$ имеет единственное решение.

Доказательство. Введем интегральный оператор Q , определенный в шаре $C_{\Delta}^{\theta, \omega} = \{z \in C(R \times R^m \mid \|z\| \leq \Delta)\}$ пространства $C(R \times R^m)$ непрерывных (θ, ω) – периодических вектор-функций, с нормой $\|z\|$ максимизирующей евклидовую норму $|z|$ соотношением:

$$Qz(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\tau} Z(s, \tau, t) f(s, \sigma_{a,b}(s, \tau, t), z(s, \sigma_{a,b}(s, \tau, t))) ds. \quad (29)$$

При условиях теоремы и соотношений

$$\Gamma(M + L\Delta) < \gamma\Delta \quad (30)$$

с липшицевой константой L и постоянной $M = \|f(\tau, t, 0)\|$, нетрудно убедиться, что оператор Q переводит шар $C_{\Delta}^{\theta, \omega}$ в себя и является сжимающим. Следовательно, оператор Q в шаре $C_{\Delta}^{\theta, \omega}$ имеет единственную неподвижную точку $z^*(\tau, t) = Qz^*(\tau, t) \in C_{\Delta}^{\theta, \omega}$. Чтобы показать дифференцируемость решения $z^*(\tau, t)$, достаточно рассмотреть его вдоль характеристик $t = \varphi(\tau, s, \sigma)$ и $t = \psi(\tau, s, \sigma)$, где оно обращается в ограниченное решение соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое дифференцируемо по параметру σ .

Замены $\sigma = \varphi(s, \tau, t)$ и $\sigma = \psi(s, \tau, t)$, естественно, не нарушают его дифференцируемость и переводят это решение в решение $z^*(\tau, t)$ исследуемой квазилинейной системы (27).

Таким образом, имеем:

$$z^*(\tau, t) \in S_{\Delta}^{\theta, \omega} \subset C_{\Delta}^{\theta, \omega}.$$

Эквивалентность вопроса о (θ, ω) – периодических решениях системы (27) к задаче о существовании дифференцируемых периодических решений уравнения $z(\tau, t) = Qz(\tau, t)$, приводят к справедливости теоремы 2. В заключении отметим, что полученные результаты, можно обобщить на случай с произвольным количеством дифференциальных операторов.

Цитированная литература

1. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1953.
2. Умбетжанов Д. У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата, 1979.

Поступила в редакцию 09.12.2009 г.

УДК 519.711.3

ОПТИМИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ТРЕМЯ ФУНКЦИЯМИ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Л. Х. ЖУНУСОВА

Казахский национальный педагогический университет им.Абая
050010 Алматы Достык, 13 zhlaz@rambler.ru

В данной работе решена задача оптимизации биологической модели с тремя управляющими функциями с учетом запаздывания.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления билинейных биологических систем с запаздыванием при наличии первых интегралов нерегулируемой части системы и с помощью выбора функционала Больца [1].

В работе [2] предложена система уравнений, моделирующая задачу о хищнике, который питается двумя жертвами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= r_1 \left[1 + a_1 \left(1 - \frac{x_3(t)}{\kappa_3} \right) - \frac{x_1(t-h_1)}{\kappa_1} \right] x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= r_2 \left[1 + a_2 \left(1 - \frac{x_3(t)}{\kappa_3} \right) - \frac{x_2(t-h_2)}{\kappa_2} \right] x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= r_3 \left[\alpha_1 \frac{x_1(t)}{\kappa_1} + \alpha_2 \frac{x_2(t)}{\kappa_2} - \frac{x_3(t-h_3)}{\kappa_3} \right] x_3(t). \end{aligned}$$

В данной модели все учитываемые факторы были разделены на две группы. Первичными считали факторы запаздывания, обеспеченность территорией и пищей. Конкуренция и хищничество были отнесены к числу вторичных факторов, выполняющих функции регуляторов, при помощи которых происходит стабилизация экосистемы.

Проблему, что может ли хищник, увеличивая давления на одну из жертв существенно уменьшить ее численность исследованы в работе [2]. Получены числовые данные, конкретно на примере мышевидные–беляк–лиса.

Keywords: *экологическая модель, билинейная система, функционал Больца.*

2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

© Л. Х. Жунусова, 2010.

Мы хотим реализовать данную модель с точки зрения оптимального управления [3]. Поэтому мы здесь формируем функционал Больца специального вида с участием первых интегралов нерегулируемой части системы [4], [5]:

$$\frac{dx}{dt} = g(x, t) + f(x(t-h), t) + B(x, t)u, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где x – n -мерный вектор-состояния; u – m -мерный вектор управления; $g(x, t)$ – n -мерная вектор-функция; $B(x, t)$ – $n \times m$ -матрица. Для нерегулируемой части системы

$$\frac{dx}{dt} = g(x, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2)$$

задано начальное состояние

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ x(t_0 - h) &= \varphi(x_0). \end{aligned} \quad (3)$$

На управление $u(t), t \in [t_0, T]$ наложено следующее ограничение:

$$|u_j(t)| \leq M_j, \quad .j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где $M_j = \text{const} > 0$. Необходимо найти такую управляющую вектор функцию $u(t)$, удовлетворяющую ограничению (4), которая минимизирует функционал Больца:

$$J \rightarrow \min. \quad (5)$$

Функционал Больца определим следующим образом:

$$J = V(x, T) + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} b_{ii} \right| dt + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} p_i(x, t-h) dt. \quad (6)$$

Здесь $V(x, T)$ – первый интеграл системы (2).

В силу того, что $V(x, t)$ является первым интегралом системы (2), имеем:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} g_i(x, t) = 0$$

и полная производная по t от функций $V(x, t)$ в силу системы (2) равна:

$$\frac{dV(x, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} B_{ij}(x, t) u_j. \quad (7)$$

Проинтегрируем соотношение (7) по t в пределах от t_0 до T , и подставим полученное выражение в (6), тогда получим:

$$J = V(x(T), T) + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \left| M_i \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} p_i(x, t-h) \right| 1 + \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} B_{ij} \right) dt \quad (8)$$

при

$$u_j^0(x, t) = -M_j \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} B_{ij}(x, t) \right), \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Пример. Динамика управляемого экологического объекта описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= r_1 \left[1 + a_1 \left(1 - \frac{x_3(t)}{\kappa_3} \right) - \frac{x_1(t-h_1)}{\kappa_1} \right] x_1(t) + b_{11}u_1, \\ \dot{x}_2(t) &= r_2 \left[1 + a_2 \left(1 - \frac{x_3(t)}{\kappa_3} \right) - \frac{x_1(t-h_2)}{\kappa_1} \right] x_2(t) + b_{22}u_2, \\ \dot{x}_3(t) &= r_3 \left[\alpha_1 \frac{x_1(t)}{\kappa_1} + \alpha_2 \frac{x_2(t)}{\kappa_2} - \frac{x_3(t-h_3)}{\kappa_3} \right] x_3(t) + b_{33}u_3, \end{aligned} \tag{10}$$

где r_1 – мальтузианский коэффициент первой жертвы;
 r_2 – мальтузианский коэффициент второй жертвы;
 r_3 – мальтузианский коэффициент хищника;
 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ – средние значения соответственно;
 h_1 – возраст производителей первой жертвы;
 h_2 – возраст производителей второй жертвы;
 h_3 – возраст производителей хищника;
 α_1 – параметр, характеризующий долю первой жертвы в рационе хищника;
 α_2 – параметр, характеризующий долю второй жертвы в рационе хищника. Эта модель описывает хищника, который питается двумя жертвами.

На управляющие воздействия наложены ограничения:

$$|u_i| \leq M_i, M_i = const > 0, i = \overline{1, 3}. \tag{11}$$

Наряду с системой (10) рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= (r_1 + a_1)x_1(t) - \frac{a_1}{\kappa_3}x_3(t)x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (r_2 + a_2)x_2(t) - \frac{a_2}{\kappa_3}x_3(t)x_2(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= \frac{r_3\alpha_1}{\kappa_1}x_1(t)x_3(t) - \frac{r_3\alpha_1}{\kappa_2}x_2(t)x_3(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Определим для данной модели функционал Больца:

$$J = V(x(T), T) + \int_0^T \sum_{i=1}^3 M_i \left| \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} b_{ii} \right| dt + \int_0^T \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} p_i(x, t-h) dt, \tag{13}$$

здесь

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{1}{r_2 + a_2} x_2 \frac{\kappa_3}{a_2} \ln x_2 + \frac{\kappa_1}{r_1 \alpha_1} \ln x_3 + \frac{\kappa_2}{a_1} x_1 + \frac{\kappa_3}{a_2} \ln x_1 + \\ &+ Q_1 \int_0^t x_2(\lambda) x_3(\lambda) d\lambda + Q_2 \int_0^t x_1(\lambda) d\lambda + \frac{\kappa_3}{a_2} (r_2 + a_2) t - \frac{\kappa_3}{a_1} (r_1 + a_1) t, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$Q_1 = \frac{a_2}{(r_2 + a_2)\kappa_3} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2}; \quad Q_2 = \frac{\kappa_3 r_3}{r_1 \kappa_1} - \frac{\kappa_2}{a_1} (r_1 + a_1),$$

является первым интегралом для нерегулируемой части системы (13). Тогда,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_1} &= \frac{\kappa_2}{a_1} + \frac{\kappa_3}{a_1 x_1}, \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_2} &= \frac{\kappa_3}{a_2 x_2}, \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_3} &= \frac{\kappa_1}{r_3 \alpha_1} + \frac{\kappa_3}{r_1 \alpha_1 x_3},\end{aligned}$$

при предположении, что $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, 3}$ оптимальное управление примет вид:

$$u_i^0(x, t) = -M_i \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} b_{ii} \right), \quad i = \overline{1, 3},$$

т.е.

$$\begin{aligned}u_1^0 &= -M_1 \operatorname{sign} \left[\left(\frac{\kappa_2}{a_1} + \frac{\kappa_3}{a_1 x_1} \right) b_{11} \right], \\ u_2^0 &= -M_2 \operatorname{sign} \left[\left(\frac{1}{(r_2 + a_2)} - \frac{\kappa_3}{a_2 x_2} \right) b_{22} \right], \\ u_3^0 &= -M_3 \operatorname{sign} \left[\left(\frac{\kappa_1}{r_3 \alpha_1} + \frac{\kappa_3}{r_1 \alpha_1 x_3} \right) b_{33} \right],\end{aligned} \quad (15)$$

доставляет минимум функционалу Больца (16) и равен

$$J = \min_{|u_i| \leq M_i} J = V(x(t_0), t_0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}J &= V(x(T), T) = \\ &= \int_{t_0}^T \left[\left[\left[\frac{\kappa_2}{a_1} + \frac{\kappa_3}{a_1 x_1} \right] \frac{x_1(\tau - h_1)}{\kappa_1} x_1(\tau) + \left[\frac{1}{r_2 + a_2} - \frac{\kappa_3}{a_2 x_2} \right] \frac{x_2(\tau - h_2)}{\kappa_2} x_2(\tau) + \right. \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\kappa_1}{r_3 \alpha_1} + \frac{\kappa_3}{r_1 \alpha_1 x_3} \right] \frac{x_3(\tau - h_3)}{\kappa_3} x_3(\tau) \left[1 + \operatorname{sign} \left[\frac{\kappa_2}{a_1} + \frac{\kappa_3}{a_1} \times \frac{1}{x_1} \right] \frac{x_1(\tau - h_1)}{\kappa_1} x_1(\tau) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[\frac{1}{r_2 + a_2} - \frac{\kappa_3}{a_2 x_2} \right] \frac{x_2(\tau - h_2)}{\kappa_2} x_2(\tau) + \left[\frac{\kappa_1}{r_3 \alpha_1} + \frac{\kappa_3}{r_1 \alpha_1 x_3} \right] \frac{x_3(\tau - h_3)}{\kappa_3} x_3(\tau) \right] \right] d\tau.\end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, решение сформулированной задачи заключается в определении значения функции управления в аналитическом виде.

Функционал Больца представлен в виде (16). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $V(x, t)$ (14) является первым интегралом системы (12), тогда управление вида (15) доставляет минимум функционалу (13) и равно (16).

Цитированная литература

1. Бияров Т.Н., Сарсимбаева С.М. Динамика управляемых систем с запаздыванием. Алматы, 2005.
2. Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. //Труды МИ им. В.А.Стеклова РАН. М., 1993. С. 6–72.
3. Бияров Т.Н., Жунусова Л.Х. //Доклады НАН РК. 2005. № 2. С. 54–59.

4. Смагулов Ш.С., Бияров Т.Н., Байгелов К.Ж. //Вестник АН КазССР. 1991. № 3. С. 63–69.

5. Байгелов К.Ж., Бияров Т.Н., Жумагулов Б.Т. Динамика управляемых систем с запаздыванием. Алматы: Препринт ИА РК, 1993. № 4. С. 23.

Поступила в редакцию 26.02.2010г.

УДК 519.624, 517.956

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ж. М. КАДИРБАЕВА

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 anar@math.kz, apelman86pm@mail.ru

Предлагается алгоритм нахождения приближенного решения полупериодической краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений. Устанавливаются достаточные условия сходимости алгоритма и корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

Нагруженные дифференциальные уравнения часто возникают в задачах приложения [1–3]. Краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [4–6]. В настоящей работе на $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = & A_0(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B_0(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + C_0(x, t)u + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t) \frac{\partial u(x, \theta_{i-1})}{\partial x} + \\ & + \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=\theta_{i-1}} + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x, t)u(x, \theta_{i-1}) + f(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, T)}{\partial x}, \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где $(n \times n)$ – матрицы $A_j(x, t)$, $B_j(x, t)$, $C_j(x, t)$, $j = \overline{0, m+1}$, и n – вектор-функция $f(x, t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, n – вектор-функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $\varphi(0) = \varphi(T)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$,

$$\|u(x, t)\| = \max_{s=\overline{1, n}} |u_s(x, t)|, \quad \|A(x, t)\| = \max_{s=\overline{1, n}} \sum_{k=1}^n |a_{sk}(x, t)|.$$

Keywords: *loaded hyperbolic equations, parametrization method, semi-periodical boundary value problem, unique solvability, correct solvability*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

© Ж. М. Кадирбаева, 2010.

Через $C(\bar{\Omega}, R^n)$ ($C([0, T], R^n)$) обозначим пространство непрерывных функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow R^n$ ($\varphi : [0, T] \rightarrow R^n$) с нормой $\|u\|_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \|u(x,t)\|$, $\|A_j\|_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \|A_j(x,t)\|$, $j = \bar{0}, m+1$, ($\|\varphi\|_0 = \max_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|$).

Функция $u(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Определение 1. Задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(x, t)$, $\varphi(t)$ она имеет единственное решение $u(x, t)$ и для него справедлива оценка:

$$\max\left(\|u\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0\right) \leq K \max\left(\|f\|_0, \|\varphi\|_0, \|\dot{\varphi}\|_0\right),$$

где K – постоянная, не зависящая от $f(x, t)$, $\varphi(t)$.

Используя методику работы [7], введем новые неизвестные функции $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, и вместо (1)–(3) рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x, t)v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)v(x, \theta_{i-1}) + F(x, t, w, u), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$u(x, t) = \varphi(t) + \int_0^x v(\xi, t) d\xi, \quad w(x, t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

где

$$F(x, t, w, u) = B_0(x, t)w(x, t) + C_0(x, t)u(x, t) + f(x, t) + \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x, t)w(x, \theta_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x, t)u(x, \theta_{i-1}).$$

Здесь условие $u(0, t) = \varphi(t)$ учтено в соотношениях (6). Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$ называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству периодических краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(x, t)$, $w(x, t)$ связаны с $v(x, t)$, $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

Задачи (1)–(3) и (4)–(6) эквивалентны в том смысле, что если $u(x, t)$ – классическое решение задачи (1)–(3), тогда тройка функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$, где $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, является решением задачи (4)–(6). И наоборот, если тройка функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$ – решение задачи (4)–(6), то $u(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3).

При известных $w(x, t)$, $u(x, t)$ в задаче (4), (5) требуется найти решение однопараметрического семейства периодических краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x, t)v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)v(x, \theta_{i-1}) + F(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad v \in R^n, \quad (7)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega]. \quad (8)$$

Непрерывная функция $v : \bar{\Omega} \rightarrow R^n$, имеющая на $\bar{\Omega}$ непрерывную производную по t , называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе нагруженных дифференциальных уравнений (7) и условию (8).

Определение 2. Задача (7), (8) называется корректно разрешимой, если для любого $F(x, t)$ она имеет единственное решение $v(x, t)$ и для него справедлива оценка:

$$\max_{t \in [0, T]} \|v(x, t)\| \leq K(x) \max_{t \in [0, T]} \|F(x, t)\|,$$

где $K(x)$ – непрерывная на $[0, \omega]$ функция, не зависящая от $F(x, t)$.

Задачу (7), (8) исследуем методом параметризации [8]. Пусть $\|A_j(x, t)\| \leq \alpha_j(x, t)$, $j = \overline{0, m+1}$, где $\alpha_j(x, t)$, $j = \overline{0, m+1}$, непрерывны на $\bar{\Omega}$, и $\max_{x \in [0, \omega]} \alpha_0(x, t) = \alpha(t)$. Для каж-

дого $i = \overline{1, m+1}$ разбиение интервала $[\theta_{i-1}, \theta_i)$ проведем с учетом поведения функции $\alpha(t)$ на этом интервале. Возьмем число $a > 0$ и для интервала $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, $i = \overline{1, m+1}$, проверим

неравенство $\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \alpha(\tau) d\tau \leq a$. Если это неравенство выполняется, то интервал $[\theta_{i-1}, \theta_i)$ не раз-

бивается на части. Если не выполняется, то за $\theta_{i-1,0}$ возьмем θ_{i-1} и $\theta_{i-1,1} \in [\theta_{i-1,0}, \theta_i)$ выберем

удовлетворяющим неравенству $\int_{\theta_{i-1,0}}^{\theta_{i-1,1}} \alpha(\tau) d\tau \leq a$. Снова проверяем неравенство $\int_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_i} \alpha(\tau) d\tau \leq a$,

если это неравенство имеет место, то интервал $[\theta_{i-1}, \theta_i)$ разбивается на две части: $[\theta_{i-1,0}, \theta_{i-1,1})$, $[\theta_{i-1,1}, \theta_i)$. Если это неравенство не выполняется, то точку $\theta_{i-1,2} \in [\theta_{i-1,1}, \theta_i)$ выберем так, чтобы

имело место неравенство $\int_{\theta_{i-1,1}}^{\theta_{i-1,2}} \alpha(\tau) d\tau \leq a$. Продолжая этот процесс, через k_{i-1} обозначим число

разбиения промежутка $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, при котором имеет место неравенство $\int_{\theta_{i-1, k_{i-1}-1}}^{\theta_i} \alpha(\tau) d\tau \leq a$.

Введем следующие обозначения: $p_0 = 0$, $p_{l+1} = \sum_{s=0}^l k_s$, $l = \overline{0, m}$. Тогда $[0, \omega] \times [0, T) = [0, \omega] \times \bigcup_{r=1}^{p_{m+1}} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_1 = \theta_{0,1}$, $t_2 = \theta_{0,2}$, ..., $t_{p_1} = \theta_1$, $t_{p_1+1} = \theta_{1,1}$, ..., $t_{p_2} = \theta_2$, ..., $t_{p_{m+1}} = T$.

Сужение функции $v(x, t)$ на r -ый интервал $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, обозначим через $v_r(x, t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$. Введя дополнительные параметры $\lambda_r(x) = v_r(x, t_{r-1})$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, и на каждой области $\Omega_r = [0, \omega] \times [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, произведя замену $\tilde{v}_r(x, t) = v_r(x, t) - \lambda_r(x)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, получим краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{d\tilde{v}_r}{dt} = A_0(x, t)[\tilde{v}_r(x, t) + \lambda_r(x)] + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)\lambda_{p_{i-1}+1}(x) + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad (9)$$

$$\tilde{v}_r(x, t_{r-1}) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r = \overline{1, p_{m+1}}, \quad (10)$$

$$B\lambda_1(x) - \lambda_{p_{m+1}}(x) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_{p_{m+1}}(x, t), \quad x \in [0, \omega], \quad (11)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow t_s-0} \tilde{v}_s(x, t) = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega] \quad s = \overline{1, p_{m+1}-1}. \quad (12)$$

Появление начальных условий, $\tilde{v}_r(x, t_{r-1}) = 0$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, позволяет при фиксированных $\lambda_r(x)$ определить функции $\tilde{v}_r(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, из интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\tilde{v}_r(x, t) = \int_{t_{r-1}}^t \left\{ A_0(x, \tau) \left[\tilde{v}_r(x, \tau) + \lambda_r(x) \right] + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, \tau) \lambda_{p_{i-1}+1}(x) + F(x, \tau) \right\} d\tau, \quad r = \overline{1, p_{m+1}}. \quad (13)$$

В уравнении (13) вместо $\tilde{v}_r(x, \tau)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r(x, t) = & \left[\int_{t_{r-1}}^t A_0(x, \tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(x, \tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 \right] \lambda_r(x) + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(x, \tau_\nu) \tilde{v}_r(x, \tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^t F(x, \tau_1) d\tau_1 + \dots + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} F(x, \tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 + \sum_{i=1}^{m+1} \left\{ \int_{t_{r-1}}^t A_i(x, \tau_1) d\tau_1 + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{t_{r-1}}^t A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_i(x, \tau_\nu) \right\} \lambda_{p_{i-1}+1}(x) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, p_{m+1}}. \quad (14) \end{aligned}$$

Из (14) найдем $\lim_{t \rightarrow t_{r-0}} \tilde{v}_r(x, t)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$, $x \in [0, \omega]$, подставляя их в (11), (12), получим систему уравнений относительно функциональных параметров $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, p_{m+1}}$:

$$Q_\nu(x, a) \lambda(x) = -F_\nu(x, a) - G_\nu(x, \tilde{v}, a), \quad (15)$$

где матрица $Q_\nu(x, a) = (q_{i,j}(x, a))$, $i, j = \overline{1, p_{m+1}}$, имеет блочные элементы $q_{i,j}(x, a) = q_{i,j}^0(x, a) + q_{i,j}^1(x, a)$, $i, j = \overline{1, p_{m+1}}$, определяемые равенствами:

$$\begin{aligned} q_{1,1}^0(x, a) = I, \quad q_{1,p_{m+1}}^0(x, a) = -[I + D_{\nu,p_{m+1}}^0(x, a)], \quad q_{1,j}^0(x, a) = 0, \quad j = \overline{2, p_{m+1} - 1}, \\ q_{1,p_{k-1}+1}^1(x, a) = -D_{\nu,p_{m+1}}^k(x, a), \quad q_{1,j}^1(x, a) = 0, \quad j \neq p_{k-1} + 1, \quad j = \overline{1, p_{m+1}}, \quad k = \overline{1, m+1}, \\ \text{Для } s = \overline{2, p_{m+1}}, \quad q_{s,s-1}^0(x, a) = I + D_{\nu,s-1}^0(x, a), \quad q_{s,s}^0(x, a) = -I, \quad q_{s,j}^0(x, a) = 0, \quad j \neq s, \\ q_{s,p_{k-1}+1}^1(x, a) = D_{\nu,s-1}^k(x, a), \quad q_{s,j}^1(x, a) = 0, \quad j \neq p_{k-1} + 1, \quad j = \overline{1, p_{m+1}}, \quad k = \overline{1, m+1}, \end{aligned}$$

$$D_{\nu,r}^i(x, a) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} A_i(x, \tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_i(x, \tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1,$$

$$i = \overline{0, m+1}, \quad r = \overline{1, p_{m+1}},$$

$$F_\nu(x, a) = \left(-F_{\nu,p_{m+1}}(x, a), F_{\nu,1}(x, a), \dots, F_{\nu,p_{m+1}-1}(x, a) \right)',$$

$$F_{\nu,r}(x, a) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} F(x, \tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} F(x, \tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1,$$

$$r = \overline{1, p_{m+1}},$$

$$G_\nu(x, \tilde{v}, a) = \left(-G_{\nu,p_{m+1}}(x, \tilde{v}, a), G_{\nu,1}(x, \tilde{v}, a), \dots, G_{\nu,p_{m+1}-1}(x, \tilde{v}, a) \right)',$$

$$G_{\nu,r}(x, \tilde{v}, a) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} A_0(x, \tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(x, \tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(x, \tau_\nu) \tilde{v}_r(x, \tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, p_{m+1}}.$$

Теорема 1. Пусть существуют числа $a \in \mathbb{R}_+$, $\nu \in \mathbb{N}$, при которых для всех $x \in [0, \omega]$ матрица $Q_\nu(x, a) : R^{np_{m+1}} \rightarrow R^{np_{m+1}}$ обратима и выполняются неравенства:

$$\| [Q_\nu(x, a)]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(x, a),$$

$$\xi_\nu(x, a) = \gamma_\nu(x, a) \left\{ e^a - \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a^l}{l!} + \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{i=1}^{m+1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha_i(x, \tau) d\tau \left[e^a - \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{a^l}{l!} \right] \right\} \leq \chi < 1, \quad (16)$$

где $\gamma_\nu(x, a)$ – положительная, непрерывная по $x \in [0, \omega]$ функция, χ – const.

Тогда семейство периодических краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений (7), (8) имеет единственное решение $v^*(x, t)$ и для него справедлива оценка:

$$\max_{t \in [0, T]} \|v^*(x, t)\| \leq K_\nu(x, a) \max_{t \in [0, T]} \|F(x, t)\|, \quad (17)$$

с непрерывной на $[0, \omega]$ функцией

$$\begin{aligned} K_\nu(x, a) &= \left\{ e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}) + [e^a - 1 + e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{i=1}^{m+1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha_i(x, \tau) d\tau] \times \right. \\ &\times \gamma_\nu(x, a) \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{a^l}{l!} \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}) \left. \right\} \cdot \left\{ [e^a + e^a \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} \sum_{i=1}^{m+1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha_i(x, \tau) d\tau] \times \right. \\ &\times \frac{1}{1 - \xi_\nu(x, a)} \gamma_\nu(x, a) \frac{a^\nu}{\nu!} + 1 \left. \right\} + \gamma_\nu(x, a) \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{a^l}{l!} \max_{r=\overline{1, p_{m+1}}} (t_r - t_{r-1}). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы проводится с использованием схемы доказательства теоремы из [6].

Решение задачи (4)–(6) определяется как предел последовательности троек $\{v^{(k)}(x, t), u^{(k)}(x, t), w^{(k)}(x, t)\}$, $k = 1, 2, \dots$, определяемой по следующему алгоритму:

Функцию $v^{(0)}(x, t)$ найдем решая семейство периодических краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x, t)v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)v(x, \theta_{i-1}) + F^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (18)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (19)$$

где $F^{(0)}(x, t) = B_0(x, t)\dot{\varphi}(t) + C_0(x, t)\varphi(t) + f(x, t) + \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x, t)\dot{\varphi}(\theta_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x, t)\varphi(\theta_{i-1})$.

Функции $u^{(0)}(x, t)$, $w^{(0)}(x, t)$ находим через $\varphi(t)$, $v^{(0)}(x, t)$ по формулам:

$$u^{(0)}(x, t) = \varphi(t) + \int_0^x v^{(0)}(\xi, t) d\xi, \quad w^{(0)}(x, t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Следующее приближение $v^{(1)}(x, t)$ определяется как решение задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0(x, t)v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)v(x, \theta_{i-1}) + F^{(1)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega],$$

где $F^{(1)}(x, t) = B_0(x, t)w^{(0)}(x, t) + C_0(x, t)u^{(0)}(x, t) + f(x, t) + \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x, t)w^{(0)}(x, \theta_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x, t)u^{(0)}(x, \theta_{i-1})$.

Функции $u^{(1)}(x, t)$, $w^{(1)}(x, t)$ определяются равенствами:

$$u^{(1)}(x, t) = \varphi(t) + \int_0^x v^{(1)}(\xi, t)d\xi, \quad w^{(1)}(x, t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(1)}(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Продолжая процесс на k -ом шаге алгоритма находим $v^{(k)}(x, t)$, $u^{(k)}(x, t)$, $w^{(k)}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$

Теорема 2. Если задача (7), (8) корректно разрешима, то задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u^*(x, t)$ и справедлива оценка:

$$\max\left(\|u^*\|_0, \left\|\frac{\partial u^*}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|_0\right) \leq \tilde{K} \max\left(\|f\|_0, \|\varphi\|_0, \|\dot{\varphi}\|_0\right), \quad (20)$$

где

$$\tilde{K} = \max\left\{K_0 + K_0 \tilde{K}_1 \left[1 + \omega e^{\tilde{K}_0} \max\left\{K_0, \delta K_0 + 1\right\} (\tilde{K}_1 + 1)\right], 1 + \omega e^{\tilde{K}_0} \max\left\{K_0, \delta K_0 + 1\right\} (\tilde{K}_1 + 1)\right\},$$

$$\delta = \sum_{i=0}^{m+1} \|A_i\|_0, \quad \tilde{K}_1 = \sum_{i=0}^{m+1} \|B_i\|_0 + \sum_{i=0}^{m+1} \|C_i\|_0, \quad \tilde{K}_0 = \max\left(K_0, \delta K_0 + 1\right) \tilde{K}_1 \omega, \quad K_0 = \max_{x \in [0, \omega]} K(x),$$

$K(x)$ – функция из определения 2.

Доказательство. Решение задачи (4)–(6) – тройку функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$ найдем по предложенному алгоритму. По предположению задача (18), (19) имеет единственное решение $v^{(0)}(x, t)$ и

$$\max_{t \in [0, T]} \|v^{(0)}(x, t)\| \leq K(x) \max_{t \in [0, T]} \left\| \sum_{i=0}^{m+1} B_i(x, t)\dot{\varphi}(t) + \sum_{i=0}^{m+1} C_i(x, t)\varphi(t) + f(x, t) \right\|,$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|\partial v^{(0)}(x, t)/\partial t\| \leq \left(\sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|A_i(x, t)\| K(x) + 1 \right) \times$$

$$\times \max_{t \in [0, T]} \left\| \sum_{i=0}^{m+1} B_i(x, t)\dot{\varphi}(t) + \sum_{i=0}^{m+1} C_i(x, t)\varphi(t) + f(x, t) \right\|,$$

$$u^{(0)}(x, t) = \varphi(t) + \int_0^x v^{(0)}(\xi, t)d\xi, \quad w^{(0)}(x, t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(0)}(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Если известны $u^{(k-1)}(x, t)$, $w^{(k-1)}(x, t)$, то $v^{(k)}(x, t)$ найдем решая задачу (4), (5), где в правых частях уравнения $w(x, t) = w^{(k-1)}(x, t)$, $u(x, t) = u^{(k-1)}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$. При найденном $v^{(k)}(x, t)$ следующие приближения по $u(x, t)$, $w(x, t)$ определим из соотношений (6):

$$u^{(k)}(x, t) = \varphi(t) + \int_0^x v^{(k)}(\xi, t) d\xi, \quad w^{(k)}(x, t) = \dot{\varphi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(k)}(x, t) = v^{(k)}(x, t) - v^{(k-1)}(x, t)$, $\Delta u^{(k)}(x, t) = u^{(k)}(x, t) - u^{(k-1)}(x, t)$, $\Delta w^{(k)}(x, t) = w^{(k)}(x, t) - w^{(k-1)}(x, t)$ и для них, используя корректную разрешимость задачи (7), (8), установим оценки:

$$\begin{aligned} & \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k+1)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(x, t) / \partial t\|\right) \leq \\ & \leq \max\left(K(x), \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|A_i(x, t)\| K(x) + 1\right) \left(\sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|B_i(x, t)\| + \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|C_i(x, t)\|\right) \times \\ & \quad \times \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta w^{(k)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\Delta u^{(k)}(x, t)\|\right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta w^{(k)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\Delta u^{(k)}(x, t)\|\right) \leq \\ & \leq \int_0^x \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k)}(\xi, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(\xi, t) / \partial t\|\right) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует основное неравенство:

$$\begin{aligned} & \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k+1)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(x, t) / \partial t\|\right) \leq \\ & \leq \max\left(K(x), \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|A_i(x, t)\| K(x) + 1\right) \cdot \tilde{K}_1(x) \times \\ & \quad \times \int_0^x \max\left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k)}(\xi, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(\xi, t) / \partial t\|\right) d\xi, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\tilde{K}_1(x) = \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|B_i(x, t)\| + \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|C_i(x, t)\|$.

Из (23) вытекает сходимость последовательностей $\{v^{(k)}(x, t)\}$, $\{\partial v^{(k)}(x, t) / \partial t\}$ в норме пространства $C(\bar{\Omega}, R^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда равномерная на $\bar{\Omega}$ сходимость последовательностей $\{u^{(k)}(x, t)\}$, $\{w^{(k)}(x, t)\}$ вытекает из (22). При этом предельные функции $v^*(x, t)$, $\partial v^*(x, t) / \partial t$, $u^*(x, t)$, $w^*(x, t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и тройка функций $\{v^*(x, t), u^*(x, t), w^*(x, t)\}$ является решением задачи (4)–(6). Используя оценки (21)–(23), получим:

$$\max\left(\|v^*\|_0, \|u^*\|_0, \|w^*\|_0\right) \leq \tilde{K} \max\left(\|f\|_0, \|\varphi\|_0, \|\dot{\varphi}\|_0\right), \quad (24)$$

где

$$\tilde{K} = \max\left\{K_0 + K_0 \tilde{K}_1 \left[1 + \omega e^{\tilde{K}_0} \max\left\{K_0, \delta K_0 + 1\right\} (\tilde{K}_1 + 1)\right], 1 + \omega e^{\tilde{K}_0} \max\left\{K_0, \delta K_0 + 1\right\} (\tilde{K}_1 + 1)\right\}.$$

Теперь докажем единственность решения задачи (4)–(6). Пусть наряду с $(v^*(x, t), u^*(x, t), w^*(x, t))$ задача (4)–(6) имеет решение $(\tilde{v}(x, t), \tilde{u}(x, t), \tilde{w}(x, t))$. Тогда тройка функций $\{\Delta v(x, t), \Delta u(x, t), \Delta w(x, t)\}$, где $\Delta v(x, t) = v^*(x, t) - \tilde{v}(x, t)$, $\Delta u(x, t) = u^*(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, $\Delta w(x, t) = w^*(x, t) - \tilde{w}(x, t)$, является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} &= A_0(x, t)\Delta v + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(x, t)\Delta v(x, \theta_{i-1}) + B_0(x, t)\Delta w(x, t) + C_0(x, t)\Delta u(x, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{m+1} B_i(x, t)\Delta w(x, \theta_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m+1} C_i(x, t)\Delta u(x, \theta_{i-1}), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \\ \Delta v(x, 0) &= \Delta v(x, T), \quad x \in [0, \omega], \\ \Delta u(x, t) &= \int_0^x \Delta v(\xi, t) d\xi, \quad \Delta w(x, t) = \int_0^x \frac{\partial \Delta v(\xi, t)}{\partial t} d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Из корректной разрешимости задачи (7)–(8) следует, что

$$\begin{aligned} &\max \left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v(x, t) / \partial t\| \right) \leq \\ &\leq \max \left(K(x), \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|A_i(x, t)\| K(x) + 1 \right) \left(\sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|B_i(x, t)\| + \sum_{i=0}^{m+1} \max_{t \in [0, T]} \|C_i(x, t)\| \right) \times \\ &\quad \times \int_0^x \max \left(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v(\xi, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v(\xi, t) / \partial t\| \right) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, на основе неравенство Гронуолла-Беллмана получаем, что $v^*(x, t) = \tilde{v}(x, t)$, $u^*(x, t) = \tilde{u}(x, t)$, $w^*(x, t) = \tilde{w}(x, t)$. Используя эквивалентность задач (4)–(6) и (1)–(3), а также установленную оценку (24), получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
2. Нахушев А. М. Уравнение мат. биологии. М., 1995.
3. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 77–79.
4. Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, №9. С. 1585–1595.
5. Бакирова Э. А. // Математический журнал. 2005. Т. 5, № 3. С. 25–34.
6. Кадирбаева Ж. М. // Математический журнал. 2009. Т. 9, № 2. С. 64–70.
7. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2002. № 3. С. 20–26.
8. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.

Поступила в редакцию 20.12.2009г.

УДК 523.98, 530.182

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОРФОЛОГИИ В АНАЛИЗЕ ФОТОСФЕРНОГО ФОНОВОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛНЦА

Л. М. КАРИМОВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 klyailya@mail.ru

Целью работы является количественное описание геометрии и топологии магнитного поля Солнца в терминах функционалов Минковского: характеристики Эйлера и периметра для множества выбросов поля за заданный уровень. В работе используются методы математической морфологии для анализа фрагментов фона магнитограмм полного диска Солнца. Полученные результаты показали, что характеристика Эйлера и суммарный периметр устойчивы во времени и не соответствуют перемежаемым случайным полям Гауссовского типа.

Магнитное поле Солнца относят к распределенным динамическим системам, которые имеют сложную пространственную структуру и демонстрируют сложное поведение во времени [1, 2]. Динамические сценарии таких систем часто называют пространственно-временным хаосом [3]. Они наблюдаются в эксперименте как цифровые изображения, карты или числовые матрицы. При моделировании таких данных основная проблема заключается в описании пространственной сложности наблюдаемых пространственных форм или паттернов. Идеи такого описания находят в дискретной дифференциальной [4, 5] и интегральной геометрии [6, 7, 8].

Визуальная форма матричных данных представляет собой цветное или заданное в уровнях "серого" изображение. Удобнее перейти к бинарной форме, т.е. черно-белым изображениям, к которым адаптировано большинство методов анализа. Введем для этого некоторый уровень яркости или контраста и рассмотрим множество тех пикселей, значение "серого" в которых равно или превышает заданный порог. Такое множество называют множеством выбросов. Маркируя принадлежащие ему пиксели черным, а остальные пиксели белым цветом, мы получим бинарное изображение. Изменение уровня позволяет преобразовать весь диапазон серого в набор черно-белых изображений (Рис.1 и 2).

Бинарное изображение можно рассматривать как коллаж, состоящий из отдельных пикселей и их конечных объединений - кластеров. Геометрически они являются подмножествами R^2 . Отдельный пиксел является выпуклым множеством, а их конечное объединение может быть

Keywords: *Morphological analysis, Solar magnetogramm, Random field*

2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

© Л. М. Каримова, 2010.

либо выпуклым, либо нет. Например, черный кластер может содержать "дыру", образованную пикселями белого цвета.

Класс элементов, который состоит из выпуклых подмножеств $A \in \mathcal{R}^2$, образованных пикселями выбранного цвета и их конечными объединениями, дополненными пустым множеством \emptyset , называют основными множествами (basic sets) или кольцом выпуклости \mathcal{B} [7, 9]. Над кольцом можно определить некоторые функционалы $W_i(A)$, $A \in \mathcal{B}$, которые обладают следующими морфологическими свойствами:

- Инвариантностью относительно группы G твердотельных движений:

$$W_i(A) = W_i(gA), \quad g \in G;$$

- Аддитивностью:

$$\forall A, B \in \mathcal{B} : W_i(A \cup B) = W_i(A) + W_i(B) - W_i(A \cap B);$$

- С-непрерывностью: для сходящейся, в метрике Хаусдорфа последовательности

$$A_1, A_2, A_3, \dots \rightarrow A$$

множеств из \mathcal{B} , последовательность функционалов от них также сходится:

$$W_i(A_1), W_i(A_2), \dots \rightarrow W_i(A).$$

В \mathcal{R}^2 существует всего три морфологических функционала W_i , $i = 0, 1, 2$, которые называют *функционалами Минковского* [7, 9]. Главным из них является характеристика Эйлера $W_2 \equiv \chi$, которая, грубо говоря, равна числу кластеров за вычетом дыр в них. Два других функционала это суммарный периметр W_1 кластеров и их площадь W_0 . Примерами применения функционалов Минковского в астрономии являются работы по анализу реликтового фона [10, 11, 7], космологии и морфологии скоплений галактик [12], крупномасштабного поля Солнца [13]. Первые попытки положить их в основу анализа астрофизических карт описаны в работах [14, 15]. Функционалы Минковского являются основой морфологического анализа бинарных изображений [9, 16]. В этой работе используется морфологический контекст для количественного описания динамики магнитного поля Солнца на основе MDI-магнитограмм полного диска. Главной целью является описание геометрии и топологии магнитного поля для фона, т.е. участков диска, не содержащих пятен сильных магнитных полей.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приводятся необходимые сведения из геометрии случайных полей. В разделе 2 описываются статистические характеристики MDI данных. Раздел 3 содержит численные оценки характеристики Эйлера для фона. В заключении резюмируют результаты исследования.

Геометрия случайных полей. Оценки морфологических функционалов для физических полей основаны на методах стохастической геометрии, развитой в работах Р.Адлера и К.Ворслея [17, 18, 19]. Началом послужила пионерская работа Стефана Райса [20], который предложил исследовать случайные процессы, рассматривая выбросы графика за некоторый заданный уровень. В этом случае полезными статистиками является среднее время пребывания графика над заданным уровнем, т.е. продолжительность выброса, и число выбросов на единицу времени. Эти статистики вычисляются аналитически для процессов гауссовского типа [18, 21, 22].

Предположим, что мы имеем дело со скалярным $2D$ случайным полем [23], т.е. множеством значений случайной величины $X(t)$, определенной в каждой точке $t = (x, y)$ ограниченной области $\Omega \in R^2$ плоскости (Рис.3). Следуя [20], проведем плоскость параллельную координатной плоскости (x, y) на высоте $X(t) = u$ и рассмотрим множество точек $t \equiv (x, y) \in \Omega$, для которых отсчеты поля равны или превышают уровень u . Оно формально определяется выражением $A_u = \{t \in \Omega \mid X(t) \geq u\}$ и называется *множеством выбросов* поля за уровень u . В случае равенства $X(t) = u$ говорят о множестве уровней L_u . В общем случае, совсем не очевидно, что A_u имеет простую геометрическую структуру (Рис.4).

Пусть $F(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in Z \subset R^2, F \in R$ непрерывное скалярное случайное поле с компактной областью определения $Z \subset R^2$. Предположим, что ее граница ∂Z является C^2 – многообразием. Поле $F(\mathbf{t})$ называется *достаточно регулярным* относительно Z на уровне u , если $F \in C^2$ не содержит критических точек на множестве t , для которого $F(\mathbf{t}) = u$, внутри Z и ∂Z , и имеет невырожденный гессиан относительно первой координаты [17]. Оказывается, если поле $X(t)$ достаточно регулярно, то A_u будет состоять из элементов кольца \mathcal{B} (Рис.2).

Множества A_u и функционалы W_0, W_1, W_2 , определенные на них, являются основой для построения разных *контурных статистик* [11]. Наиболее простой из них, в случае случайного поля, является средняя длина (периметр) изолированного контура $\langle s \rangle \equiv \langle W_1 \rangle$, подсчитанная по всему сечению, на единицу площади. Можно показать, что такая статистика сводится к алгебраической сумме замкнутых контуров [24]. Кроме того, оказывается, что периметр связан с такой важной с физической точки зрения величиной как *полная вариация* поля. Грубо говоря, вариация является суммой модулей высот топографии поля.

Напомним, что полная вариация функции $f(x_1, x_2) \in C^2$ в открытой области $\Omega \in R^2$ определяется как [25]:

$$\|f\|_V = \int \int_{\Omega} |\nabla f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2.$$

Про функцию $f(x_1, x_2)$ говорят, что она ограниченной вариации, если $\|f\|_V < \infty$. Пусть L_u множество выбросов функции на уровне u : $L_u = (x_1, x_2) \in R^2 : f(x_1, x_2) \geq u$. Поскольку f непрерывна, граница ∂L_u множества L_u – это линия уровня которая содержит все (x_1, x_2) такие, что $f(x_1, x_2) = u$. Обозначим $length(\partial L_u)$ – длина ∂L_u . Тогда, согласно формуле о коплощади [25] полную вариацию f можно вычислить, суммируя периметры изолиний

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{\infty} length(\partial L_u) du.$$

Вторая статистика основана на характеристике Эйлера $W_2 = \chi$. Она определяется двумя условиями: $\chi(A) = 1$, если $A \in \mathcal{B}$ и $\chi(\emptyset) = 0$ [7, 9]. Для других множеств из кольца \mathcal{B} она вычисляется с помощью условия аддитивности. Пусть, например, множество $B \in \mathcal{B}$ представляет собой остров с "дырой", образованный тремя касающимися друг друга одинаковыми дисками $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Согласно условию аддитивности:

$$\chi(B) = \chi(B_1) + \chi(B_2) + \chi(B_3) - \chi(B_1 \cap B_2) - \chi(B_2 \cap B_3) - \chi(B_1 \cap B_3) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0. \quad (1)$$

Функционал χ был введен Эйлером, как инвариант при комбинаторном описании комплексов, т.е. совокупности элементов или *клеток* разной размерности в R^2 . Так, квадрат состоит из четырех 0-мерных клеток или вершин (V), четырех 1-мерных клеток или ребер (E) и одной 2-мерной клетки или грани (F). Оказывается, что альтернированная сумма:

$$\chi = \#(V) - \#(E) + \#(F) = 4 - 4 + 1 = 1$$

не меняется при гомотопических деформациях [26]. Для произвольной карты регулярного случайного поля она определяется по формуле [9]:

$$\langle \chi \rangle = \#(\text{islands}) - \#(\text{holes}).$$

Статистикой является величина $\langle \chi \rangle \equiv \langle W_2 \rangle$, подсчитанная на единицу площади. Большим значениям $\langle \chi \rangle > 0$ соответствует текстура сечения, представленная множеством отдельных островов. Отрицательным большим $\langle \chi \rangle$ соответствует картина пористого сыра, т.е. множества дыр [19]. Для некоторых простых полей известны аналитические выражения для статистик $\langle \chi \rangle$ и $\langle W_1 \rangle$, как функций уровня u . Так например, для Гауссовского поля, между ними существует простая связь:

$$\langle \chi \rangle = A \frac{u}{\sqrt{\pi^3/2}} \exp[-u^2/2] = \frac{u}{\sqrt{\pi^3/2}} \langle W_1 \rangle. \quad (2)$$

Для нас представляют интерес максимумы – вершины, седла – перевалы и минимумы – впадины поля. Оказывается их плотность также связана с характеристикой Эйлера [24]. Максимумы, минимумы и седла являются критическими точками, в которых $\nabla X = 0, H(X) \neq 0$. Здесь частные производные в градиенте $\{\partial X/\partial x; \partial X/\partial y\}$ понимаются в смысле дифференцирования случайных процессов [22, 23], а $H(X)$ обозначает матрицу вторых производных или гессиан. Число отрицательных собственных значений гессиана называют индексом критической точки [27]. Так, точка минимума имеет индекс $k = 0$. Индекс $k = 2$ соответствует максимуму и $k = 1$ соответствует седлу. Обозначим через m_k число критических точек поля X с индексом $k = \{0, 1, 2\}$. Тогда, для множества выбросов A_u [17]:

$$\chi(A_u) = m_0 - m_1 + m_2.$$

Это выражение позволяет нам интерпретировать морфологический функционал $\chi(A_u)$ как меру топологической сложности поля на множестве выбросов уровня u .

Для практики удобно масштабировать измеренные значения поля в единицах дисперсии σ . Тогда, можно получить графики $\chi(u)$ зависимости топологической сложности поля от уровня:

$$\chi(u) \equiv \chi(m\sigma), m \in \{-p, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, p\},$$

которые можно сравнить с аналитическими моделями для случайных полей [10, 11]. Одна из них, для Гауссовского поля приведена в формуле (1). Следовательно, задачей является получение графиков для магнитограмм и сравнение их с моделями.

Статистические свойства MDI данных. В этой работе использовались MDI (*Michelson Doppler Imager*) – магнитограммы полного диска Солнца космической обсерватории SOHO с временным дискретом 96^m в специальном fits-формате [28]. Магнитограммы покрывают весь солнечный диск 1024×1024 пикселя с пространственным разрешением $2''$ на пиксел или ≈ 1500 км в линейном масштабе. Примеры фрагментов таких данных показаны на Рисунках 1 и 2. MDI – изображения привлекли свое внимание для проверки свойства статистической масштабной инвариантности – мультифрактальности [29]. Ее ожидали как следствие развитой турбулентности в связи с большим магнитным числом Рейнольдса и она действительно была обнаружена рядом авторов ([30, 31] и ссылки в них.) Во многих работах изменение скейлинга магнитограммы во времени рассматривалось как возможный предвестник больших солнечных вспышек для АО. Существует, однако, одно важное обстоятельство, на которое обычно не обращают внимания при физической интерпретации мультискейлинга магнитограмм. Дело в том, что MDI являются высококонтрастными изображениями, содержащими большое число "ребер", т.е. скачков градиента фотометрической меры.

Как оказалось, все высококонтрастные изображения имеют некоторые общие свойства, не зависящие ни от присутствия хорошо развитой турбулентности, ни от магнитных полей. Так,

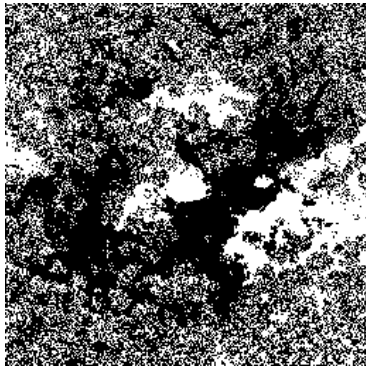


Рис. 1: Фрагмент изображения (256×256 пикселей) диска Солнца: активная область

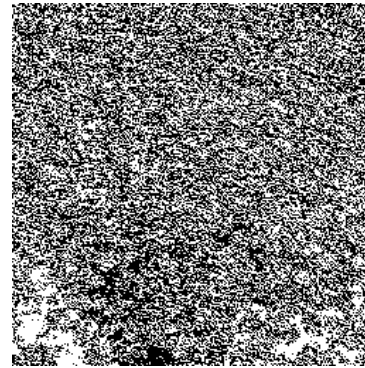


Рис. 2: Фрагмент изображения (256×256 пикселей) диска Солнца: вне активной области

качественные снимки земных ландшафтов также демонстрируют мультифрактальный скейлинг [32, 33]. Известно, что плотность функции распределения отсчетов для таких изображений имеет значительный эксцесс, тяжелые хвосты и острый центральный пик [34, 35].

Упомянутые универсальные свойства высоко контрастных изображений, а именно масштабная инвариантность и негауссовские свойства – высокий четвертый момент (эксцесс), тяжелые хвосты и острый центральный пик в функции правдоподобия [33] всегда следует учитывать при физической интерпретации выводов, полученных на основе таких данных. Возвращаясь к гидродинамической интерпретации самоподобия, заметим, что в динамике хаотических распределенных систем известно явление, обладающее упомянутыми особенностями. Оно связано с появлением в случайном турбулентном поле отдельных пиков, разделенных обширными плато с малой интенсивностью измеряемой величины и определяется как "перемежаемость" [36]. В первом приближении, мы наблюдаем такую картину для магнитного поля Солнца с пиками напряженности в пятнах, разделенных фоном. Сам фон тоже может демонстрировать перемежаемость в форме ячеистой или сетчатой структуры [36]. Перемежаемость формально возникает из мультипликативных случайных величин, подчиняющихся так называемому логнормальному распределению [37], с плотностью:

$$p(x) = \frac{\exp[-(\ln(x) - m)^2 / 2\sigma^2]}{\sigma x \sqrt{2\pi}}. \quad (3)$$

Это распределение отражает статистические особенности перемежаемости – тяжелые хвосты и быстрый рост статистических моментов.

Топология фонового поля из MDI. Было исследовано несколько выборок MDI магнитограмм для фона в следующем интервале времени: октябрь 2006 – апрель 2009. Для каждой выборки было проанализировано около 85 фрагментов магнитограмм размером 200×200 пикселей. Весь диапазон значений поля для каждого фрагмента был разбит на уровни таким образом, чтобы покрыть диапазон $[-8\sigma, +8\sigma]$ с шагом 0.1σ , где σ стандартное отклонение. Напомним, что каждый уровень представляет собой бинарное изображение, на котором можно вычислять функционалы. Было получено множество таких бинарных изображений, для каждого из которых вычислялись характеристика Эйлера $\chi(u)$ и периметр $W_1(u)$.

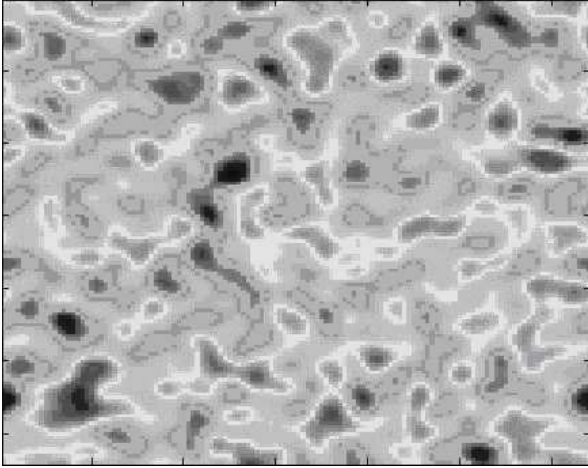


Рис. 3: Скалярное Гауссовское поле

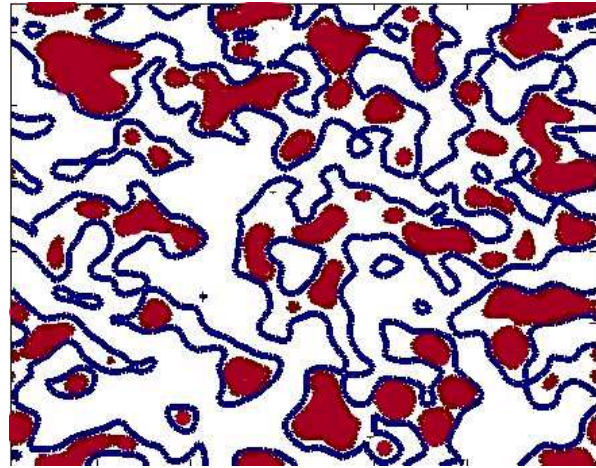


Рис. 4: Множество уровней (линии) и множество выбросов (темные области) для 2-х сечений поля

Как упоминалось выше, периметр связан с полной вариацией поля в ограниченной области, а характеристика Эйлера χ измеряет топологическую сложность поля. Все вычисления проводились в среде MatLab. Экспериментальные характеристики Эйлера и периметры для фонового поля оказались довольно гладкими кривыми (Рис. 5 и Рис. 7). Кроме того, их форма устойчива во времени. На Рис. 5 приведена кривая характеристики Эйлера усредненная для интервала времени более чем 6 суток по хорошо сгруппированным кривым. Таким образом, топология магнитного поля фона, описанная в рамках морфологических функционалов, имеет устойчивую структуру.

Обратимся теперь к вопросу о подходящей модели случайного поля. На Рис. 5 (справа) представлены кривые $\chi(u)$ для фонового поля и модели гауссовского поля. Мы видим явную асимметрию в области небольших отрицательных значений поля, по сравнению с симметричной кривой гауссовской модели. Заметим, что данная асимметрия вовсе не говорит о том, что есть какое-то преобладание поля одного знака над другим: характеристика Эйлера описывает общую топологию поля, независимо от знака полярности.

Для того чтобы исключить эффекты селекции аппаратуры SOHO, которые могли вызвать асимметрию, был проделан аналогичный анализ для наземных данных SOLIS [38]. На обсерватория SOLIS магнитное поле измеряется с помощью векторного магнитографа. Разрешение на один пиксел изображения достигает примерно $1.14''$. Для фрагмента фона, вырезанного из магнитограммы, полученной на SOLIS был получен тот же самый эффект асимметрии. Результаты сравнения с Гауссовской моделью приведены на Рис. 6. Лонге-Хиггинс [23] показал, что для статистически однородного случайного поля средняя плотность суммы максимумов и минимумов поля равна плотности числа седел. Как следствие, кривая $\chi(u)$ для такого поля должна быть симметричной (см.(1)). Поэтому, обнаруженную асимметрию можно интерпретировать как нарушение Гауссовской модели. Аналогичная разница видна и в поведении периметров. На Рисунке 8 приведены графики кривых $W_1(u)$ от уровня для фонового участка магнитограммы и для гауссовского поля. Как видно из графиков и здесь наблюдаются явные отличия периметра для фона и для модельного поля.

Для исследования временных вариаций топологии фона, были получены оценки характеристики Эйлера и периметров для каждого из множеств уровней для временной последовательности фрагмента фона при его движении по диску Солнца. Результаты показаны на Рисунках

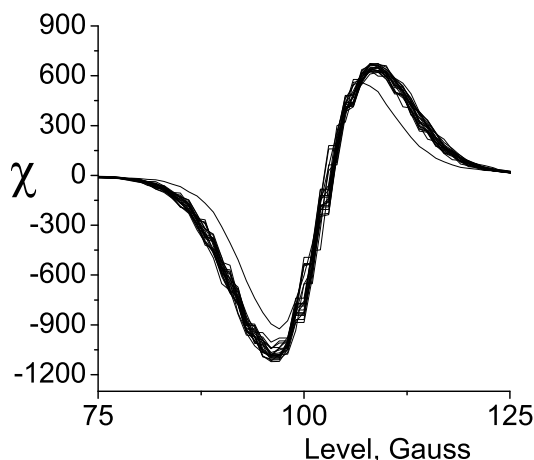


Рис. 5: Множество кривых Эйлера в зависимости от уровня для 85 магнитограмм.

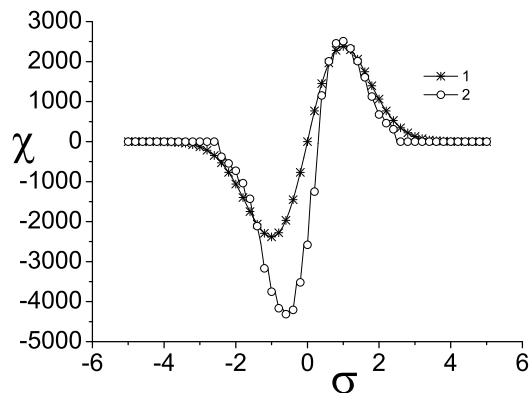


Рис. 6: Усредненная по выборке характеристика Эйлера, полученная с SOHO (2) в сравнении с аналитической Гауссовской моделью (1). По оси абсцисс $1\sigma \approx 30 \text{ Gauss}$.

9 и 10, где на обоих рисунках по оси абсцисс отложен порядковый номер n изображения в fits формате. Одни сутки соответствуют $n = (0 - 14)$.

Использовались данные с интервалом 96 минут по времени, так что последовательности из 15-ти магнитограмм соответствуют приблизительно одни сутки. Рисунки 9 и 10 указывают, на то что характеристика Эйлера и периметр демонстрируют хаотические колебания по множеству уровней, которые сопровождаются спонтанной синхронизацией разных слоев.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью работы является описание динамики топологии магнитного поля Солнца в рамках морфологических функционалов. Последние обладают свойствами инвариантности, непрерывности и аддитивности и, следовательно, являются идеальными характеристиками пространственной сложности магнитограмм. Были использованы два функционала: характеристика Эйлера $\chi \equiv W_2$ и периметр W_1 для фрагментов MDI, не содержащих активных областей. Эти величины оценивались следующим образом. Весь диапазон напряженностей поля для каждого из фрагментов выражался в единицах дисперсии σ . Затем рассматривались множества выбросов A_u , образованные пикселями фрагмента, в которых значения поля $B_z \geq u$, где $u = k\sigma$ заданный уровень. Множество выбросов состоит из набора связных областей с дырами. Для каждого из таких множеств, заданных значением u , подсчитывались топологическая сложность поля – характеристика Эйлера χ и суммарный периметр W_1 границ для элементов множества A_u . Характеристика Эйлера, которая является суммой числа максимумов и минимумов поля за вычетом числа седел, оценивает сложность поля по уровням. Периметр W_1 статистически связан с $\langle \chi \rangle$ в рамках контурной статистики. Далее строились графики зависимости $\chi(u) \equiv \chi(k\sigma)$ и $W_1(k\sigma)$ для сравнения с теоретическими моделями различных случайных полей. Оказалось, что поведение $\chi(u)$ асимметрично в области малых значений и не следует модели Гауссовского поля. Этот вывод справедлив для фрагментов, полученных в разное время и для двух различных источников данных – SOHO и SOLIS. Асимметрия означает преобладание "дыр", т.е. участков противоположной полярности при малых значениях напряженности поля. Поведение периметра $W_1(u)$ также отличается от модели Гауссовского поля и демонстрирует свойства

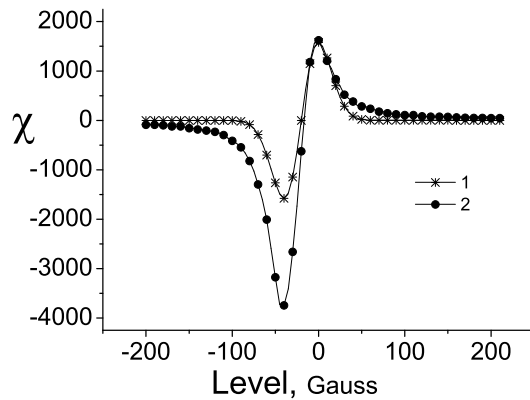


Рис. 7: Сравнение характеристик Эйлера для фрагмента фонового поля магнитограммы SOLIS (2) и гауссового поля (1).

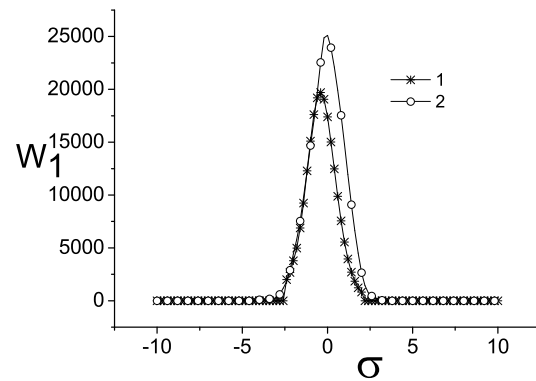


Рис. 8: Зависимость периметра $W_1(u)$ для фонового участка магнитограммы (2) от уровня в сравнении с аналогичной кривой для гауссовского поля (1).

стационарности.

Временная эволюция функционалов исследовалась по мониторингу фрагмента при его прохождении по диску Солнца. Мы нашли, что вариации $\chi(u, t)$ и $W_1(u, t)$ в дискретной сетке временного аргумента представляют собой хаотические колебания со спонтанным нарушением синхронизации по уровню.

Исследования статистики отсчетов фрагментов магнитограмм показали, что эмпирическая плотность распределения значений поля в логарифмическом масштабе демонстрирует тяжелые хвосты, значительный эксцесс. Эти свойства согласуются с логнормальным распределением поля. Они очень важны для физической интерпретации результатов, основанных на изображениях такого типа. Следствием тяжелых хвостов является мультифрактальность, причины которой могут быть и не связаны с высокими значениями чисел Рейнольдса и магнитными полями.

Благодарности.

Автор выражает признательность Н.Г. Макаренко за полезную дискуссию и ценные замечания и И.С. Князевой за помощь в проведении расчетов.

Цитированная литература

1. Schrijver C. J., Zwaan C. Solar and Stellar Magnetic Activity. Cambridge University Press, 2000.
2. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в Астрофизике. М.Ижевск, 2006.
3. Рабинович М.И., Фабрикант А.П., Цимринг Л.Ш. //УФН. 1992. Т. 42. С. 1–42.
4. Koenderink J.J. //Biol.Cybern. 1984. V.50. P. 363–370.
5. Bobenko A.I., Schroder, P., Sullivan J.M., Ziegler G.M. //Peter Schroder in Discrete Differential Geometry. Series: Oberwolfach Seminars. Birkhauser Basel. 2008. V. 38. P. 263–273.
6. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М., 1983.

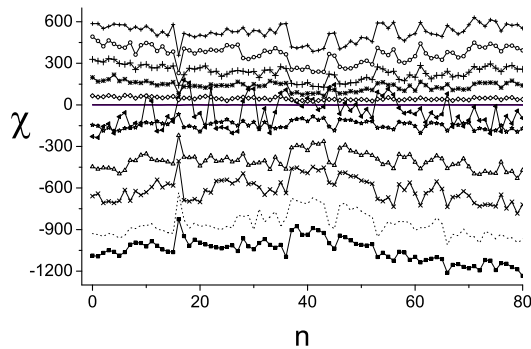


Рис. 9: Изменение характеристики Эйлера для разных уровней напряженности с течением времени.

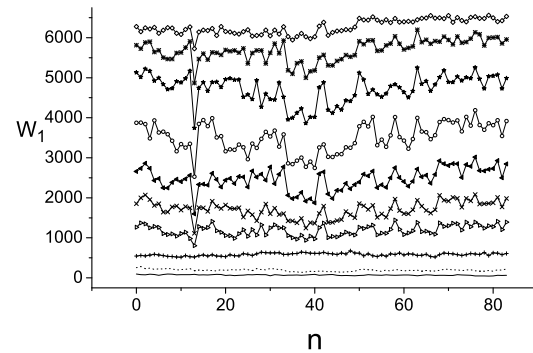


Рис. 10: Изменение периметров для разных уровней напряженности с течением времени.

7. Mecke K.R., Buchert T., Wagner H. //Astron.Astrophys. 1994. V. 288. P. 697–704
8. Макаренко Н.Г. //Прикладная нелинейная динамика. 2004. №. 6. P. 1–16.
9. Serra J. Image analysis and mathematical morphology. Academ. Press. 1988.
10. Coles P. //MNRAS. 1988. V. 234. P. 509–531.
11. Ryden B. //Pub. Astr. Soc. Pacific. 1989. V. 100. P. 1360–1363.
12. Kerscher M., Mecke K., Schmalzing J. //Astron.Astrophys. 2001. V. 373. P. 1–11.
13. Makarenko N.G., Karimova L.M., Novak M.M. //Emergent Nature.World Scientific. 2001. P. 197–207.
14. Adams F.C. //Astrophys. J. 1992. V. 387. P. 572–590.
15. Adams F.C., Wiseman J.J. //Astrophys. J. 1994. V. 435. P. 693–707.
16. Michielsen K., De Raedt H. //Phys. Rep. 2001. V. 347. P. 461–538.
17. Adler R.J. The Geometry of Random Fields. John Wiley. N.Y. 1981.
18. Worsley K.J. //Adv. in Appl. Probab. 1994. V. 26. P. 13–42.
19. Worsley K.J. //Chance. 1996. V.9. P. 27–40.
20. Rice S.O. //Bell Syst. Tech. J. 1944. V.23. P. 282–332.
21. Coles P., Barrow J.D. //MNRAS. 1987. V. 228. P. 407–426.
22. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М., 1968.
23. Abrahamsen P. //A Review of Gaussian Random Fields and Correlation Functions. Sec. Ed. Techn. Rep. 917. April. 1997. Norwegian Computing Center.
24. Longuet-Higgins M.S. //Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1957. V. 249. P. 321–387.
25. Chan T.F., Shen J. Image processing and analysis. Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods. SIAM. Philadelphia, 2005.
26. Guillemin V., Pollack A. Differential topology NY: Prentice-Hall. 1974.
27. Matsumoto Y. //An Introduction to Morse Theory. Translation of Mathematical Monographs. 2002. V. 208. P. 1–232.
28. Scherrer P.H., Kosovichev A.G., Rosenberg W., et al. //Solar Phys. 1995. V. 162. P. 129–188.
29. Lawrence J.K., Ruzmaikin A.A., Cadavid A.C. //Astrophys. J. 1993. V. 417. P. 805–811.
30. Salakhutdinova I.I., Golovko A.A. // Solar Phys. 2004. V. 225. P. 59–74.
31. Круглун О.А., Каримова Л.М., Мухамеджанова С.А. //Солнечно-земная физика. 2007. Вып. 10. P. 31–42.

-
32. **Turiel A., Mato G., Parga N., et al.** //Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 1098–1101.
 33. **Turiel A., Parga N.** //Neural Computation. 2000. V. 12. P. 763–793.
 34. **Srivastava A., Lee A. B., Simoncelli E. P., et al.** //J. of Mathem. Imaging and Vision. 2003. V. 18. P. 17–33.
 35. **Huang J., Mumford D.** . //Proc. IEEE Conf. Comput. Vision and Pattern Recognition. 1999. № 1. P. 541–547.
 36. **Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.** //УФН, 1987. Т. 152. P. 3–32.
 37. **Mitzenmacher M.** //Internet Mathematics. 2004. V. 1. P. 226–251.
 38. <http://solis.nso.edu/vsm/data-summary/imageview3.php>

Поступила в редакцию 26.02.2010 г.

УДК 534.1

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Н. И. МАРТЫНОВ, М. А. РАМАЗАНОВА, Ж. С. СУЙМЕНБАЕВА, И. О. ФЕДОРОВ

АО "НЦ КИТ"

050010 Алматы Шевченко, 35 nikmar50@mail.ru

Проведено численное моделирование колебаний сейсмического маятника, результаты которого позволили объяснить пикообразное и бухтообразное поведение его угла закручивания в период подготовки будущего землетрясения. Смоделированы синтетические бухты, соответствующие реальным записям приборов "Алем".

Под прогнозом землетрясений понимают определение места, времени и силы (магнитуды, энергетического класса) землетрясения. По времени прогноз подразделяется на долгосрочный (на десятилетия вперед), среднесрочный (на годы вперед), краткосрочный (на дни – месяцы вперед) и оперативный (на минуты – часы вперед). Деление это в достаточной степени условное, области типов прогноза частично перекрываются. Каждый этап прогноза базируется на определенном наборе предвестников – явлений, опережающих и предвещающих возникновение землетрясений [1, 2].

В настоящее время известно около 1000 предвестников землетрясений, из которых порядка 200 являются информативными предвестниками. Они делятся на две группы.

Первая группа (наиболее многочисленная) – геофизические предвестники, связанные с закономерным поведением различных геофизических полей на различных этапах подготовки землетрясений. Предвестники первой группы перекрывают весь диапазон прогноза во времени: от долгосрочного до оперативного.

Вторая группа – биологические предвестники, связанные с необычным поведением биологических существ перед землетрясением. Она мало изучена и относится к краткосрочному и оперативному прогнозу. С развитием спутниковых технологий дистанционного наблюдения появились новые геофизические предвестники [1].

Несмотря на огромное количество геофизических предвестников, ни один из них не дает точных оценок. В разных сейсмоактивных районах различные предвестники работают по-разному, давая большой разброс прогнозируемых параметров будущего землетрясения. Это связано как со сложностью самого объекта исследования (очага землетрясения), условий его зарождения и развития, так и с существенным влиянием помехообразующих факторов [3]. Анализ многолетних данных сейсмологических предвестников показал, что вероятность успешного

Keywords: *Seismic pendulum , numerical modeling, a fluctuation*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Н. И. Мартынов, М. А. Рамазанова, Ж. С. Суйменбаева, И. О. Федоров, 2010.

среднесрочного прогноза по каждому из них существенно ниже 0,5 и в редких случаях приближается к 0,5. Комплексный прогноз землетрясений по ряду прогностических признаков позволяет в некоторых случаях повысить вероятность до 0,5. Практика последних лет показала, что, несмотря на недостатки такого подхода, он приемлем для среднесрочного прогноза [2].

Ситуация с краткосрочным и оперативным прогнозом еще хуже: практически отсутствуют оценки надежности прогнозных предвестников. В последние десятилетия для целей краткосрочного и оперативного прогноза землетрясений стали использовать крутильный сейсмический маятник.

Наиболее глубокое исследование в этой области дано в работах Калиникова [4–6]. Его основная мысль состоит в том, что сейсмический сигнал от готовящегося землетрясения, переносимый микросейсмами, поступает на маятник через точку подвеса с доминантной частотой, совпадающей с частотой маятниковых колебаний. Поэтому маятник начнет возбуждаться на резонансных частотах. То есть на данном этапе маятник ведет себя как "приемник". Затем начинается перекачка энергии возбужденного маятника в его крутильные колебания, и, в силу того, что он является нелинейной системой, начинается его "странное поведение". В данном случае маятник выступает как "индикатор" и спектральный анализатор сейсмических волн. На базе этой качественной физической модели с оценкой некоторых параметров колебаний маятника и сейсмических воздействий, с привлечением статистических методов, Калиниковым Н.И. была разработана методика оперативного прогноза землетрясений [5, 6].

Территория юга и юго-востока Казахстана является одной из наиболее сейсмоактивных областей стран СНГ [7]. За последние 120 лет территория юга Казахстана трижды подвергалась ударам сильнейших землетрясений интенсивностью 9–10 баллов (Верненское – 1887, Чиликское – 1889, Кеминское – 1911г.). С тех пор сейсмическая опасность этой территории возросла в несколько раз, хотя бы потому, что эти районы стали густонаселенными с достаточно плотной и развитой инфраструктурой. Поэтому различным вопросам оценки сейсмической опасности регионов Казахстана посвящено большое число работ. Подробно эти исследования отражены в ежегодных отчетах Института сейсмологии РК.

Заметим, что появившиеся в последнее время неклассические методы оценки сейсмической опасности [8, 9] подтверждают накопление сейсмической энергии в областях, где ранее произошли катастрофические землетрясения. На северо-востоке от этой зоны (зоны концентрации напряжений) появилась зона умеренных концентраторов девиатора и горизонтальных напряжений. Вертикальные напряжения достигают в этой области достаточно больших значений, что связано с перераспределением тектонических сил за счет Алтайских землетрясений недавнего времени. На юге от зоны концентрации напряжений представлена достаточно большая область более умеренных девиаторов напряжений и достаточно больших вертикальных напряжений, что связано с сейсмичностью на территории Киргизии и Китая. Город Алматы расположен между зонами повышенной концентрации на востоке и более умеренной – на западе, т.е. между "двумя огнями". Наибольшую опасность для г.Алматы представляет Восточные фланги Заилийского и Кунгей Алатау, что необходимо учитывать при сейсмостойком строительстве. Кроме того, отмечаются небольшие умеренные зоны концентрации на юго-западе, что связано с "наведенной сейсмичностью" за счет добычи углеводородов на Каспии [9].

После Спитакского землетрясения 1988г. по предложению председателя Совета министров СССР Рыжкова Н.И. и первого президента Республики Казахстана Назарбаева Н.А. в течение 1989–1993гг. на территории Казахстана была создана сеть станций из 9 полигонов наблюдения за сейсмической ситуацией на юго-востоке республики. Каждый полигон обеспечен прибором "Алем", состоящим из двух крутильных маятников и других приборов, работающих в режиме реального времени. Регистрация данных ведется на персональном компьютере с дискретностью 5, 10, 15, 30, 50 секунд.

Опыт эксплуатации сети позволил собрать уникальный материал о готовящихся землетрясениях и показал, что прогнозные признаки могут проявляться от нескольких часов до нескольких суток перед землетрясением. Прогнозные признаки выражаются в регулярных, как правило, ежедневных отклонениях показаний приборов от своего установившегося уровня, либо в пикообразном, либо в бухтообразном изменении углов закручивания маятника. Впервые в мировой практике на территории РК на базе экспериментального материала выделен надежный индикатор землетрясений: бухтообразные вариации углов закручивания сейсмического маятника. Было установлено, что в 68 случаях из 100 происходит бухтообразное изменение угла закручивания маятника в период подготовки будущих землетрясений [10].

Несмотря на определенные успехи в понимании связи поведения крутильного маятника с сейсмической обстановкой, установить какие-либо количественные соотношения не удавалось, в первую очередь, из-за отсутствия достаточно строгой теории. Следует отметить, что существенный прогресс в компьютерных технологиях и численных методах не позволяет "перебрать все варианты численного решения", а значит, полно оценить влияние всех параметров колебания маятника и глубоко изучить природу явления. На эти вопросы, в определенной мере, способна ответить количественная теория, базирующаяся на приближенном аналитическом решении.

Такая аналитическая теория разрабатывается с конца 2003г. [11]. Она позволила заложить основы теории колебаний сейсмического маятника. Методом усреднения были получены аналитические выражения для расчета всех угловых характеристик сейсмического маятника. Собственные затухающие нелинейные колебания, а также вынужденные нелинейные колебания маятника описаны в квадратурах. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Сформулированы направления дальнейших исследований.

Ниже обсуждаются результаты численного моделирования колебаний сейсмического маятника, выполненного на основе квадратурных формул приближенного аналитического решения, приведенного в [11].

Собственные свободные и затухающие колебания маятника. В модифицированной эйлеровой системе координат углы прецессии ψ , нутации θ и собственного вращения φ заменяются промежуточными угловыми характеристиками (q_1, q_2, q_3) . Они позволяют расщепить систему уравнений движения маятника под действием внешних сейсмических возмущений $(\vec{w}, \vec{\Omega}, \vec{\varepsilon})$ и колебания маятника записать с помощью квадратур. Формулы перехода от одних угловых координат к другим имеют вид [11]:

$$\begin{cases} \psi = F_1(q_1, q_2, q_3) = \arcsin\left(\frac{q_1 \sqrt{1 - \frac{q_1^2}{4}}}{z_0} \cos q_3\right), \\ \theta = F_2(q_1, q_2, q_3) = \arcsin\left(q_1 \sqrt{1 - \frac{q_0^2}{4}} \sin q_3\right), \\ \varphi = F_3(q_1, q_2, q_3) = q_2 + \arcsin\left(\frac{q_1^2 \sin(2q_3)}{4z_0}\right), \\ z_0 = \sqrt{\cos^2 q_3 + \left(1 - \frac{q_1^2}{2}\right)^2 \sin^2 q_3}. \end{cases} \quad (1)$$

В дальнейшем через μ обозначен малый параметр, причем

$$\mu = \frac{\eta_3}{\eta_1} = \frac{J_z}{aJ_x}, \quad (2)$$

где η_3, η_1 – собственные частоты линейных крутильных и нутационных колебаний, J_z, J_x – главные центральные моменты инерции маятника. Через P_0 – обозначен начальный угловой импульс P_3 , соответствующий угловой координате q_3 . В [11] определены собственные частоты

нелинейных колебаний ω_I , ω_{II} , ω_{III} , которые немного смещены в сторону их уменьшения, а также обертона угловой координаты q_1 . Через f_0 обозначен безразмерный коэффициент трения, через A_2 , e_2 – начальная амплитуда и фаза колебаний угловой координаты q_2 . Для плоско-поляризованных колебаний ($P_0 \approx 0$) начальная амплитуда q_1 обозначена через A , а для общего случая колебаний маятника ($P_0 \neq 0$) через α_{00} .

Расчеты отчетливо выявили тенденцию влияния начальных условий и обертонов на свободные нутационные колебания, а также на периодическое изменение амплитуд q_1 , θ во времени в большом диапазоне их изменения. Это характерно для нелинейных колебаний.

В плоско-поляризованном случае свободных колебаний крутильные колебания φ определяются частотами угловых координат q_2 , q_1 (μ , ω_I , $3\omega_I$). Так как q_{30} , A_2 не равны нулю, то на основные колебания q_2 накладываются нутационные колебания в виде мелких дрожаний. Кроме того, угловая координата q_3 имеет собственную частоту μ , что приводит к модуляции частоты нутационных колебаний θ и подтверждается расчетами. Уменьшение начальной амплитуды A_2 в 10^3 , 10^4 , 10^5 раз (при $q_{30} \neq 0$) практически не сказывается на величине амплитуды нутационных колебаний, но существенно уменьшает амплитуду крутильных колебаний. При этом, влияние величины "дрожаний" нутационных колебаний на крутильные резко возрастает.

Для общего случая свободных колебаний ($P_0 \neq 0$) уменьшение A_2 никак не сказывается на нутационных колебаниях маятника, но с уменьшением A_2 увеличивается влияние нутационных "дрожаний" на крутильные колебания. При малой начальной амплитуде A_2 практически теряется зависимость крутильных колебаний от частоты μ и маятник закручивается с частотой нутационных колебаний. Существенное влияние импульс P_0 оказывает на колебания при неизменно малой амплитуде A_2 . Он влияет как на нутационные колебания, так и на крутильные, оставляя последние "модулированными".

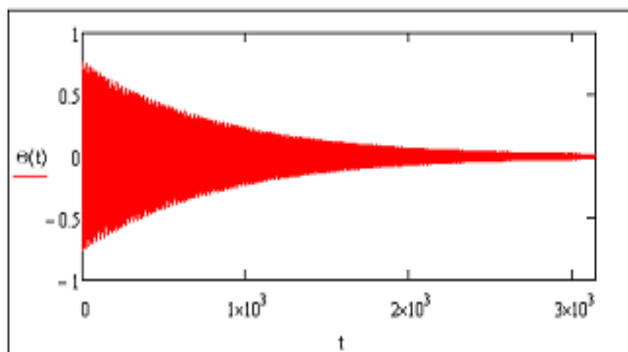
Расчеты показали, что на свободные затухающие колебания существенное влияние оказывает коэффициент трения. Увеличение коэффициента трения уменьшает время затухания колебаний и нутационных "дрожаний", которые накладываются на крутильные колебания. И наоборот. Кроме того, увеличение коэффициента трения незначительно уменьшает частоту колебаний угловой координаты q_1 и значительно - угловой координаты q_2 . Основное влияние трения сказывается на амплитудах соответствующих колебаний.

Уменьшение начальной амплитуды A_2 ($P_0 = 0$) увеличивает влияние нутационных "дрожаний" на крутильные колебания. Увеличение начального импульса P_0 и уменьшение коэффициента трения способствует также увеличению нутационных "дрожаний" и времени их влияния на крутильные колебания.

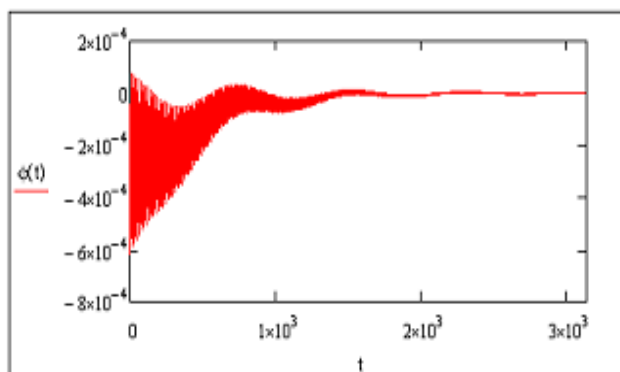
На рисунке 1а,б приведены графики свободных затухающих плоско-поляризованных колебаний с изначально малой амплитудой A_2 . Размах нутационных "дрожаний", который накладывается на крутильные колебания на отрезке времени от $0 \div 10^3$, существенный, но с течением времени уменьшается и совсем затухает.

Изменение коэффициента трения почти в три раза приводит к резкому изменению модулированных нутационных колебаний и профилей угла закручивания маятника (рисунки 2, 3). На рисунке 2а начало колебаний характеризуется небольшим по амплитуде и времени полуциклом и дальнейшим значительным увеличением амплитуды и времени модуляции трех последующих полуциклов. Далее следует два затухающих полуцикла. Шестой полуцикл меняет свою форму (огibaющую), а затем происходит резкое затухание нутационных колебаний.

На рисунке 3а начало процесса характеризуется большим по времени и амплитуде полуциклом. Затем следует меньший полуцикл, а далее следуют 11 примерно одинаковых полуциклов. Завершается процесс меньшим полуциклом, после чего происходит относительно резкое затухание. Это связано с тем, что нутационные колебания θ зависят от угловой координаты q_3 , изменение которой во времени определяется изменением амплитуды A_2 и частоты ω_2 , но A_2 и ω_2 существенно зависят от коэффициента трения f_0 . Поэтому наложение различных пара-



а



б

$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; A = 0.8 ; q_{20} = 5 ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.000008 ; f_0 = 0.15$$

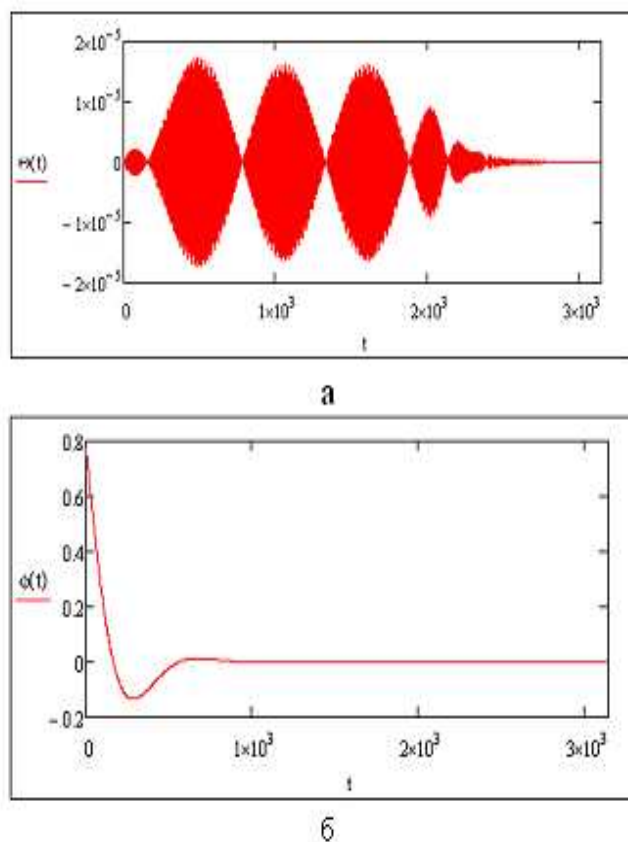
Рис. 1: Графики зависимостей угловых координат θ , φ от времени (а,б).

метров, каждый из которых имеет свою скорость затухания и определяющие нутационные колебания, приводят к тому, что существует определенный интервал времени (на рисунке 2а - $1,8 \cdot 10^3 \div 2,5 \cdot 10^3$; на рисунке 3а - $10^3 \div 4,7 \cdot 10^3$), на котором полуциклы модулированных колебаний примерно одинаковые.

Вынужденные колебания маятника. В работе [11] показано, что вынужденные колебания маятника можно разложить на собственные затухающие колебания и гетеро-периодические, навязанные колебательной системе внешними силами из вне. По истечении некоторого момента времени собственные колебания затухают. Поэтому целесообразно было рассмотреть отдельно "чистый вклад" гармоник внешних возмущений. Внешние возмущения задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_0 \omega_1 &= B_1 \sin(\nu_1 t), \quad \omega_0 \omega_3 = B_3 \sin(\nu_1 t), \\ \Omega_0 \Omega_1 &= C_1 \sin(\nu_{11} t), \quad \Omega_0 \Omega_3 = C_3 \sin(\nu_{11} t), \\ \varepsilon_0 \varepsilon_2(t) &= D_2 \sin(\nu_{22} t). \end{aligned} \quad (3)$$

В случае постоянных внешних частот ν_1 , ν_{11} , ν_{22} и соответствующих амплитуд B_1 , B_3 , C_1 , C_3 , D_2 аналитические исследования выполнены в [11], которые позволили определить резонансные частоты. При численном исследовании частоты внешних возмущений менялись во времени.



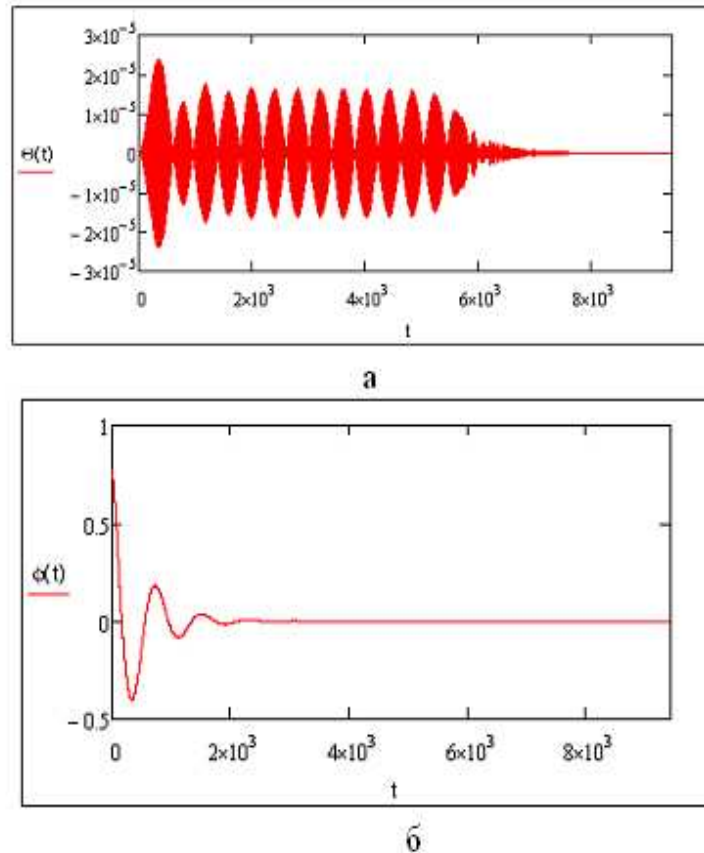
$$\mu = 8 \cdot 10^{-3}; A = 0.8; q_{30} = 0; e_2 = \frac{\pi}{12}; \alpha = 0.8; A_2 = 0.8; f_0 = 0.7$$

Рис. 2: Графики зависимостей угловых координат θ, φ от времени (а,б).

На рисунке 4а,б приведены графики вынужденных плоско-поляризованных нутационных и крутильных колебаний маятника под действием \vec{W} и при отсутствии внешних угловых возмущений ($\vec{\varepsilon}, \vec{\Omega} = 0$). Вынуждающие силы задавались соотношением (3), частота которых ν_1 при входе в резонансную зону и выходе из нее изменялась трапецеидальным образом (рисунок 4).

Как видно из рисунка 4а,б при $\nu_1 \rightarrow \omega_1$ амплитуда угловых координат резко нарастает. При выходе частоты внешней силы ν_1 из резонансной зоны амплитуды угловых координат затухают, и тем быстрее, чем больше коэффициент трения. Следует отметить, что амплитуда угла закручивания изменяется во времени на 5-6 порядков меньше соответствующей амплитуды угла нутации. Она возрастает при увеличении внешней амплитуды B_1 и периодическим образом зависит от угла прецессии q_{30} , задающим плоскость поляризованных колебаний. Интересно отметить, что если частота внешних сил ν_1 проходит резонансную зону трапецеидальным образом, но стартует из области пониженных значений (например, $\nu_1(s) = 0, 1 * \omega_1$), то картина колебаний практически не изменяется.

Была проведена серия расчетов с целью выяснения влияния входных параметров на колебания при трапецеидальном бухтообразном изменении частот внешних угловых возмущений. Частота возмущающих сил нутационных колебаний полагалась равной резонансной частоте

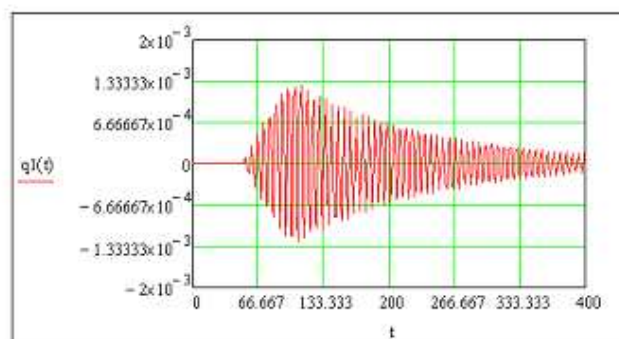


$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; A = 0.8 ; q_{20} = 0 ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; \alpha = 0.8 ; A_2 = 0.8 ; f_0 = 0.25$$

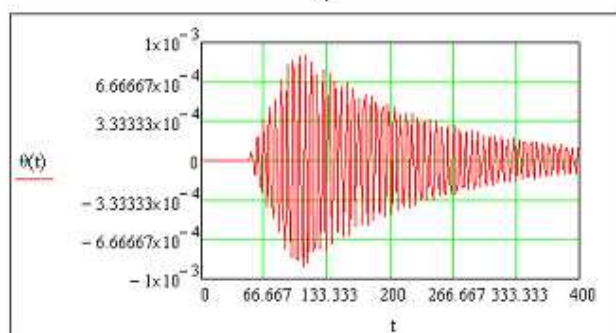
Рис. 3: Графики зависимостей угловых координат θ , φ от времени (а,б).

ω_1 [11]. За характерный безразмерный масштаб времени принята величина $\tau = \frac{\omega_2 t}{2\pi}$. Расчеты показали, что угловые координаты q_2 , φ изменяются трапецидальным образом и на них накладываются малые "дрожания" от нутационных колебаний маятника. Следует отметить, что если $\nu_1 \neq \omega_1$ (например, $\nu_1 = 0,4$ или $\nu_1 = 10$), т.е. нутационные колебания происходят не на резонансной частоте, то картина колебаний практически не изменится (при сохранении неизменными остальных входных параметров задачи). Дальнейшие расчеты показали, что существенное уменьшение коэффициента трения приводит к существенному изменению профиля бухты. Увеличение же амплитуды внешних поступательных возмущений в 20 раз приводит к увеличению амплитуды нутационных колебаний, которые накладываются на бухтообразное изменение угловой координаты q_2 . Это вносит существенные коррективы в поведение угла закручивания в зависимости от коэффициента трения (рисунки 5а,б). Влияние нутационных колебаний на усиливается и профиль крутильных колебаний приобретает пилообразный характер. При дальнейшем увеличении амплитуды B_1 бухта крутильных колебаний практически пропадает, и крутильные колебания носят явно пилообразный характер.

Если угловые частоты стартуют из области пониженных значений, то картина не меняется, имеются лишь небольшие локальные отличия в профилях колебаний угловых координат. Отметим, что увеличение амплитуд C_1 , C_2 в $20 \div 100$ раз существенно не сказывается на об-



а)



б)

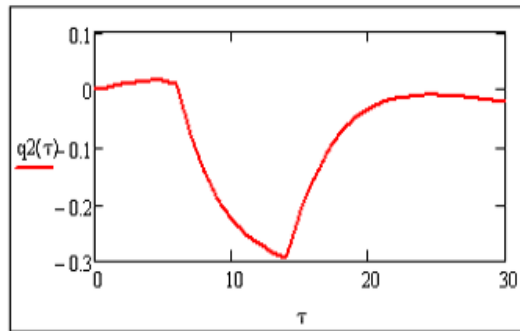
$$v_1(s) := \begin{cases} 10 \cdot \omega_1 & \text{if } 0 \leq s \leq 30 \\ \omega_1 \cdot (23.5 - 0.45 \cdot s) & \text{if } 30 < s \leq 50 \\ \omega_1 & \text{if } 50 < s \leq 100 \\ \omega_1 \cdot (0.45 \cdot s - 44) & \text{if } 100 < s \leq 120 \\ 10 \omega_1 & \text{if } 120 < s \leq 400 \end{cases}$$

Рис. 4: Вынужденные плоско-поляризованные нутационные и крутильные колебания маятника (а,б).

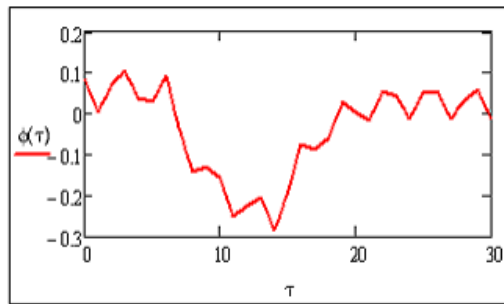
щей картине колебаний. Это и понятно, поскольку согласно [11] их вклад в общие крутильные колебания мал.

Далее, была проведена серия расчетов с целью выяснения влияния согласованности прохождения частотами $\nu_1 \nu_{22}$ внешних возмущений резонансных зон на крутильные колебания маятника. Было установлено: если резонансная зона ν_1 перекрывает всю резонансную зону ν_{22} , то нутационные колебания возмущают всю бухтообразную область изменения угла закручивания. Если только левую или правую части, то, соответственно, нутационные колебания возмущают левую или правую части ветви кривой крутильных колебаний. При малом коэффициенте трения общая картина крутильных колебаний практически не изменяется, независимо от того, стартуют ли частоты внешних возмущений из области повышенных или пониженных значений. При существенном коэффициенте трения глубина бухты остается прежней, но резко изменяется кривая крутильных колебаний перед и после бухты.

Как показали расчеты, общие закономерности, справедливые для плоско-поляризованных колебаний, переносятся и на случай общих колебаний ($P_0 \neq 0$), но имеются и отличия. Ну-



а)



б)

$$C_1 = 1, C_3 = 5, \mu = 8 \cdot 10^{-3}, f_0 = 0,05, D_2 = 4, q_3 = \frac{\pi}{4}, B_1 = 80, v_1(\tau) = \omega_1, v_{11}(s) = v_{22}(s),$$

$$v_{11}(s) := v_{22}(s) := \begin{cases} 0,04 \cdot \pi & \text{if } 0 \leq s \leq 4 \\ (0,49 \cdot s - 1,94) \cdot 2\pi & \text{if } 4 < s \leq 6 \\ 2 \cdot \pi & \text{if } 6 < s \leq 14 \\ (7,86 - 0,49 \cdot s) \cdot 2\pi & \text{if } 14 < s \leq 16 \\ 0,04 \cdot \pi & \text{if } 16 < s \leq 30 \end{cases}$$

Рис. 5: Вынужденные крутильные колебания (а,б).

тационные колебания носят явно модулированный характер, что связано с действием импульса P_0 . При малых значениях P_0 колебания близки к плоско-поляризованным. Общий характер колебаний при входе в резонансную зону и выходе из нее частоты ν_1 такой же, как и в плоско-поляризованном случае, но для угла закручивания проявляются одиночные локальные всплески, зависящие от P_0 , f_0 , q_{30} . На профиль бухты и пилообразный характер крутильных колебаний маятника существенное влияние оказывает начальный импульс P_0 (с увеличением P_0 растут пилообразные вариации нутационных колебаний).

Синтетические бухты. Отметим, что пикообразное нарастание (рисунок 4б) и бухтообразное поведение угла закручивания маятника (рисунок 5б) характерны как для реальных записей приборов "Алем", так и для синтетических. Сопоставление реальных и синтетических записей позволяет установить между ними качественное сходство.

На рисунке 6 приведены четырехсуточные записи углов закручивания двух маятников (ряды 3,4) прибора "Алем" на станции "Узун-Агач", полученные с 30.10.99г. по 02.11.99г. Стрелкой обозначен момент землетрясения и рядом указаны параметры произошедшего землетрясения и его расстояние от центрального сейсмополигона в г.Алматы. Графики построены по

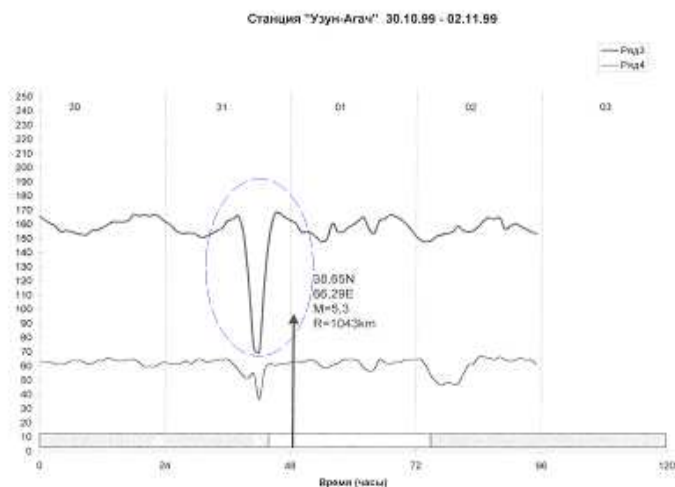


Рис. 6: Реальная запись углов закручивания прибора "Алем" на станции "Узун-Агач".

среднечасовым значениям. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат показания прибора угла закручивания в относительных единицах. Отметим, что реализация системы наблюдения, метод контроля, анализа данных и разработка самого прибора "Алем" принадлежит группе ученых Тульского политехнического института и до второй половины 1993г. весь цикл работ по сети проводился сотрудниками ТулПИИ. Начиная со второй половины 1994г. весь цикл работ по краткосрочному прогнозу по данным наблюдений выполняется НПК "Прогноз" ГУ "Казселезащита". К сожалению, в настоящее время НПК "Прогноз" не располагает информацией о цене делений относительных единиц угла закручивания в градусах, поскольку в свое время сотрудниками ТулПИИ не был передан основной пакет технической документации.

Тем не менее, чтобы как-то сопоставить реальные и синтетические записи, была выделена бухта (обозначена пунктирным эллипсом) и смоделирована синтетическая бухта, изображенная на рисунке 7. Вход частоты ν_2 в резонансную зону и выход из нее задавался параболической зависимостью от времени. Путем регулирования параметров внешних возмущений (рисунок 7) было достигнуто качественное сходство реальной и синтетической бухт. Мы не ставили перед собой задачу получения детального совпадения записей. Хотя при известной настойчивости можно добиться и этого, и количественного совпадения.

На рисунке 8 дана реальная запись угла закручивания прибора "Алем" на станции "Акколь", а на рисунке 9 смоделирована ее синтетическая бухта.

Результаты численного моделирования. Подведем итоги численного моделирования. С приходом сейсмического сигнала из очага будущего землетрясения с частотой, близкой к частоте линейных нутационных колебаний маятника, происходит возбуждение маятниковых колебаний. Часть энергии маятниковых колебаний передается в крутильные колебания в виде значительных или незначительных вариаций угла закручивания. Тем самым частично подтверждается гипотеза И.И. Калиникова о том, что на резонансных частотах происходит возбуждение маятниковых колебаний. На этом этапе маятник ведёт себя как приёмник. Одновременно происходит частичная перекачка энергии в его крутильные аномальные колебания. На этом этапе маятник ведёт себя как "индикатор" и "спектральный анализатор" сейсмических волн.

Параллельно из очага будущего землетрясения приходят угловые возмущения в виде крутильных колебаний грунта. При приближении частоты угловых возмущений к частоте линейных крутильных колебаний маятника и последующем удалении от нее образуется бухта

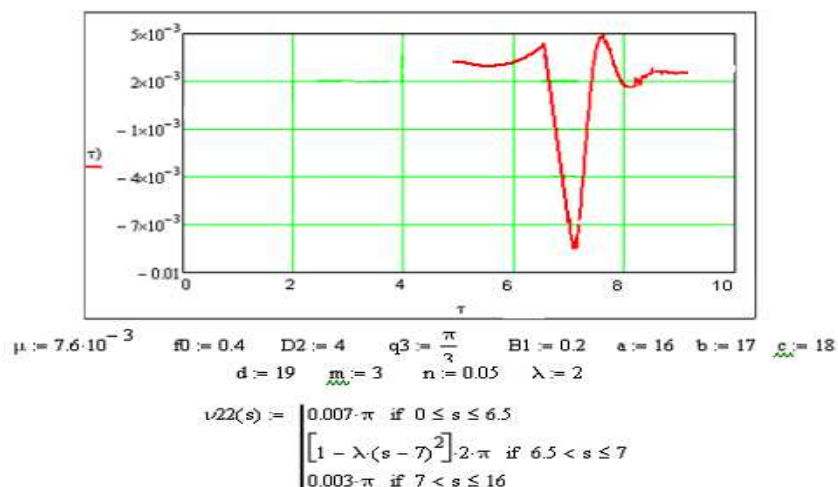


Рис. 7: Синтетическая бухта угла закручивания маятника станции "Узун-Агач".



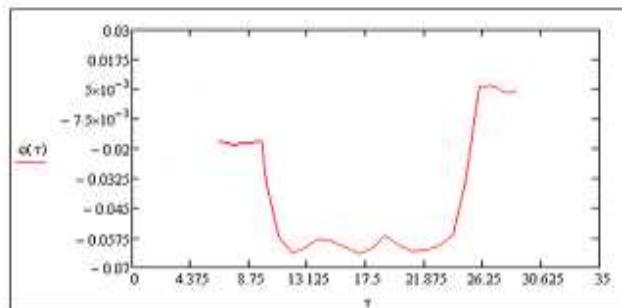
Рис. 8: Реальная запись угла закручивания прибора "Алем" на станции "Акколь".

угла закручивания. На бухту накладываются значительные или незначительные "дрожания" нутационных колебаний. Уровень "дрожаний" определяется характеристиками сейсмического сигнала, параметрами грунта, характеристиками маятника и начальными условиями процесса.

Если угловые возмущения не доходят до маятника или находятся вне зоны его чувствительности и происходит возбуждение нутационных колебаний, то вариации угла закручивания маятника проявляются в виде "высокочастотных пиков", частоты которых порядка 1Гц. Если возбуждение маятника происходит только за счет угловых возмущений, то вариации угла закручивания маятника проявляются в виде "гладких" бухт (частота порядка мГц).

По всей видимости в природе происходит различное по времени включение механизмов излучения сейсмических сигналов из очага будущего землетрясения, часть из которых регистрируется сейсмическими маятниками. В результате образуется комбинированная картина вариаций угла закручивания.

Наличие длиннопериодных бухтообразных вариаций угла закручивания маятника как раз и подтверждает существование крутильных колебаний грунта, вызванных микросейсмами из



$$\begin{aligned} \mu &:= 7.6 \cdot 10^{-3} & f0 &:= 0.25 & D2 &:= 4 & q30 &:= \frac{\pi}{3} & B1 &:= 60 & B3 &:= 1 & \gamma &:= \frac{\pi}{12} & C1 &:= 1 & C3 &:= 5 \\ p0 &:= 3.9 & \alpha00 &:= 4 & a &:= 2 & b &:= 8 & c &:= 26 & d &:= 31 & n &:= 5 & m &:= 2 & y1 &:= 0.002 & y2 &:= 0.005 \\ \lambda2 &:= \frac{1 - y2}{25} & \lambda1 &:= \frac{1 - y1}{36} \\ v22(s) &:= \begin{cases} y1 \cdot 2 \cdot \pi & \text{if } 0 \leq s \leq 2 \\ [1 - \lambda1 \cdot (s - 10)^2] \cdot 2\pi & \text{if } 2 < s \leq 10 \\ 2 \cdot \pi & \text{if } 10 < s \leq 24 \\ [1 - \lambda2 \cdot (s - 25)^2] \cdot 2\pi & \text{if } 24 < s \leq 31 \\ y2 \cdot 2 \cdot \pi & \text{if } 31 < s \leq 33 \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 9: Синтетическая бухта угла закручивания маятника станции "Акколь".

очага готовящегося землетрясения, что для многих геофизиков является неожиданностью.

Цитированная литература

1. **Зубков С.И.** Предвестники землетрясений. М., 2002.
2. **Завьялов А.Д.** Среднесрочный прогноз землетрясений. Основы, методика, реализация. М., 2006.
3. **Любушин А.А.** Анализ данных геофизического и экологического мониторинга. М., 2007.
4. **Калинников И.И.** Консервативные системы для геофизических исследований. М., 1983.
5. **Зенков В.С., Калинников И.И., Ньюнин М.И., Ньюнина Н.А., Сияякова В.Ф.** // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, № 1. С. 74–76.
6. **Зенков В.С., Калинников И.И., Ньюнин М.И.** // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 325–327.
7. Сейсмическое районирование территории СССР. М., 1980.
8. **Рамазанова М.А.** // Известия НАН РК. 2007. № 2. С. 46–49.
9. **Рамазанова М.А.** // Журнал "Поиск". 2009. № 2. С. 179–183.
10. Отчет НИР НПК "Прогноз", ГУ "Казселезащита". 1994–1999.

11. **Мартынов Н.И.** Введение в теорию колебаний сейсмического маятника. А., 2005.

Поступила в редакцию 13.11.2009г.

УДК 519.624

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

С. М. ТЕМЕШЕВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Для решения нелинейной двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается двухпараметрическое семейство алгоритмов метода параметризации. В терминах функций правой части дифференциального уравнения и граничного условия установлены достаточные условия сходимости алгоритмов и существования изолированного решения рассматриваемой задачи.

В работе рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$g(x(0), x(T)) = T, \quad (2)$$

где $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Решением задачи (1), (2) является непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ вектор-функция $x^*(t)$, удовлетворяющая на $[0, T]$ дифференциальному уравнению (1) (при этом в точках $t = 0$, $t = T$ уравнению (1) удовлетворяют односторонние производные $\dot{x}_{\text{прав.}}^*(0)$, $\dot{x}_{\text{лев.}}^*(T)$) и имеющая в точках $t = 0$, $t = T$ значения $x^*(0)$, $x^*(T)$, для которых справедливо равенство (2).

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений различными методами исследованы многими авторами [1–11].

В статье [12] задача (1), (2) исследовалась методом параметризации. Предложены алгоритмы нахождения решения задачи (1), (2) и установлены достаточные условия их сходимости. Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов: а) решение системы нелинейных уравнений относительно введенных параметров, б) решение задачи Коши при найденных значениях параметров.

В настоящей работе предлагается двухпараметрическое семейство алгоритмов решения задачи (1), (2), где в пункте б) нет необходимости в решении задачи Коши.

Keywords: *nonlinear two-point boundary value problem, parametrization method, sufficient conditions for the existence of an isolated solution*

2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

© С. М. Темешева, 2010.

Возьмем натуральное число $N \in \mathbb{N}$ и разобьем промежуток $[0, T]$ с шагом $h = T/N$: $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$. Сужение функции $x(t)$ на интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$ и задачу (1), (2) сведем к многоточечной краевой задаче:

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \quad (3)$$

$$g\left(x_1(0), \lim_{t \rightarrow Nh-0} x_N(t)\right) = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = 1 : (N-1), \quad (5)$$

где (5) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала $[0, T]$. Отметим, что условия склеивания решения (5) и дифференциальные уравнения (3) обеспечивают так же и непрерывность производных в точках разбиения интервала $[0, T]$.

Через $C([0, T], h, \mathbb{R}^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где $x_r : [(r-1)h, rh) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет конечный левосторонний предел $\lim_{t \rightarrow rh-0} x_r(t)$ при всех $r = 1 : N$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|x_r(t)\|$.

Введем обозначение $\lambda_r \hat{=} x_r((r-1)h)$, произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1 : N$, и от задачи (3)-(5) перейдем к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \quad (6)$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r = 1 : N, \quad (7)$$

$$g\left(\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)\right) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = 1 : (N-1). \quad (9)$$

Решением задачи (6)-(9) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)) \in C([0, T], h, \mathbb{R}^{nN})$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $[(r-1)h, rh)$ функция $u_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при всех $t \in [(r-1)h, rh)$ (при $t = (r-1)h$ уравнению (6) удовлетворяет правосторонняя производная функции $u_r^*(t)$), выполняется условие $u_r^*((r-1)h) = 0$, $r = 1 : N$, и для λ_1^* , $\lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow Nh-0} u_N^*(t)$, $\lambda_s^* + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s^*(t)$, λ_{s+1}^* , $s = 1 : (N-1)$, имеют место равенства (8), (9).

Если $(\lambda^*, u^*[t])$ – решение задачи (6)-(9), то

$$x^*(t) = \begin{cases} \lambda_r^* + u_r^*(t), & \text{при } t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \\ \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t), & \text{при } t = T, \end{cases}$$

будет решением задачи (1), (2). Пусть теперь $\tilde{x}(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ с элементами $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in \mathbb{R}^{nN}$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t))$, где $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}((r-1)h)$, $\tilde{u}_r(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1 : N$, будет решением задачи (6)-(9).

При фиксированном значении λ_r задача Коши (6), (7) для всех $r = 1 : N$ эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau)) d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh). \quad (10)$$

Подставив вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть (10) и повторяя этот процесс ν раз, для $u_r(t)$ получим следующее представление:

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_2) d\tau_1, \\ t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N. \quad (11)$$

Определив из (11) $\lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t)$, $r = 1 : N$, подставив их в (8), (9), предварительно умножая (8) на $h = T/N > 0$, получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r \in \mathbb{R}^n$:

$$h \cdot g\left(\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau_1, \lambda_N + \dots + \int_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N + u_N(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_1\right) = 0, \\ \lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1, \lambda_s + \dots + \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = 1 : (N-1),$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (12)$$

Условие А. Существуют $N \in \mathbb{N}$ ($h = T/N$), $\nu \in \mathbb{N}$, такие, что система нелинейных уравнений $Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0$ имеет решение $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in \mathbb{R}^{nN}$ и система функций $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))$ с компонентами

$$u_r^{(0)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(0)} + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r^{(0)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(0)}) d\tau_\nu \dots) d\tau_2) d\tau_1, \\ t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \quad (13)$$

принадлежит пространству $C([0, T], h, \mathbb{R}^{nN})$.

Возьмем числа $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$ и составим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} : \|\lambda - \lambda^{(0)}\| = \max_{r=1:N} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda\}, \\ S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \{u[t] \in C([0, T], h, \mathbb{R}^{nN}) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u\}, \\ \Omega_s(\lambda_s^{(0)}, u_s^{(0)}(t), h, \rho_x) = \{(t, x) : t \in [(s-1)h, sh), \|x - \lambda_s^{(0)} - u_s^{(0)}(t)\| < \rho_x\}, \quad s = 1 : (N-1), \\ \tilde{\Omega}_N(\lambda_N^{(0)}, u_N^{(0)}(t), h, \rho_x) = \{(t, x) : t \in [(N-1)h, Nh], \|x - \lambda_N^{(0)} - u_N^{(0)}(t)\| < \rho_x\}, \\ G_1^0(\rho_x) = \bigcup_{s=1}^{N-1} \Omega_s(\lambda_s^{(0)}, u_s^{(0)}(t), h, \rho_x) \cup \tilde{\Omega}_N(\lambda_N^{(0)}, u_N^{(0)}(t), h, \rho_x), \\ G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{2n} : \|v - \lambda_1^{(0)}\| < \rho_\lambda, \|w - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(0)}(t)\| < \rho_x\}.$$

Условие В. Функции f , g соответственно в $G_1^0(\rho_x)$, $G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$ непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные f'_x , g'_v , g'_w и выполняются неравенства:

$$\|f'_x(t, x)\| \leq L_0, \quad \|g'_v(v, w)\| \leq L_1, \quad \|g'_w(v, w)\| \leq L_2,$$

где L_0 , L_1 , L_2 – постоянные.

Предположим, что выполнено условие А. Тогда за начальное приближение решения задачи (6)–(9) возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$ и последовательность $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 1, 2, \dots$, найдем по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Из уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ найдем $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)})' \in \mathbb{R}^{nN}$;
 б) на $[(r-1)h, rh)$, $r = 1 : N$, определим функции $u_r^{(1)}(t)$ по формулам:

$$u_r^{(1)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(1)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_{\nu}, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(\tau_{\nu})) d\tau_{\nu} \dots) d\tau_1. \quad (14)$$

Шаг 2. а) Из уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$ найдем $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_N^{(2)})' \in \mathbb{R}^{nN}$;
 б) на $[(r-1)h, rh)$, $r = 1 : N$, определим функции $u_r^{(2)}(t)$ по формулам:

$$u_r^{(2)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(2)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_{\nu}, \lambda_r^{(2)} + u_r^{(1)}(\tau_{\nu})) d\tau_{\nu} \dots) d\tau_1. \quad (15)$$

Продолжая процесс, на k -ом шаге найдем пару $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющую равенствам $Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k-1)}) = 0$ и

$$u_r^{(k)}(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(k)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_{\nu}, \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k-1)}(\tau_{\nu})) d\tau_{\nu} \dots) d\tau_1. \quad (16)$$

Отличие предлагаемых алгоритмов от алгоритмов [12] заключается в пункте б), где функции $u_r^{(k)}(t)$ определяются по формуле (16).

Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма, одновременно обеспечивающие существование изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметрами (6)–(9) устанавливает следующая

Теорема 1. Пусть существуют $\nu \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ ($h = T/N$), $\rho_{\lambda} > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия А, В, матрица Якоби $\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_{\lambda}) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и имеют место неравенства:

$$1) \left\| \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \gamma_{\nu}(h),$$

$$2) q_{\nu}(h) = \frac{(hL_0)^{\nu}}{\nu!} \left(1 + \gamma_{\nu}(h) \max(1, hL_2) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(hL_0)^j}{j!} \right) < 1,$$

$$3) \gamma_{\nu}(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \frac{q_{\nu}(h)}{1 - q_{\nu}(h)} \gamma_{\nu}(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^{\nu}}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_{\lambda},$$

$$4) \frac{q_{\nu}(h)}{1 - q_{\nu}(h)} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u,$$

$$5) \rho_{\lambda} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(hL_0)^j}{j!} + \rho_u \max_{j=0:(\nu-1)} \left\{ \frac{(hL_0)^j}{j!} \right\} + b_{\nu} < \rho_x,$$

$$\text{где } b_{\nu} = \begin{cases} 0, & \text{при } \nu = 1, \\ \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \sum_{j=\nu}^{2\nu-2} \frac{(hL_0)^j}{j!}, & \text{при } \nu \geq 2. \end{cases}$$

Тогда, определяемая по алгоритму последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \dots$, принадлежит $S(\lambda^{(0)}, \rho_{\lambda}) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, сходится к $(\lambda^*, u^*[t])$ – решению задачи (6)–(9) в $S(\lambda^{(0)}, \rho_{\lambda}) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и справедливы оценки:

$$\|u^*[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\|_2 \leq \frac{(q_{\nu}(h))^k}{1 - q_{\nu}(h)} q_{\nu}(h) \|u^{(0)}[\cdot]\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq \frac{(q_{\nu}(h))^k}{1 - q_{\nu}(h)} \gamma_{\nu}(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^{\nu}}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

Причем любое решение задачи (6)–(9) в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ изолировано.

Доказательство. Возьмем любую пару $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. В силу условия B имеют место неравенства:

$$\|\lambda_r + u_r(t) - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| \leq \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| + \|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\| < \rho_\lambda + \rho_u, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + u_r(\tau_1)) d\tau_1 - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t) \right\| \leq \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| + \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_1)) d\tau_1 - \right. \\ & \quad \left. - \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(0)}) + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r^{(0)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(0)}) d\tau_\nu \dots) d\tau_2 \right\| \leq \\ & \leq \left(1 + \int_{(r-1)h}^t L_0 d\tau \right) \|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\| + \int_{(r-1)h}^t L_0 \|u_r(\tau) - u_r^{(0)}(\tau)\| d\tau + \int_{(r-1)h}^t L_0 \left\| \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r^{(0)} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \int_{(r-1)h}^{\tau_\nu} f(\tau_{\nu+1}, \lambda_r^{(0)}) d\tau_{\nu+1} \dots) d\tau_2 - \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r^{(0)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(0)}) d\tau_\nu \dots) d\tau_2 \right\| d\tau_1 \leq \\ & \leq \rho_\lambda \sum_{j=0}^1 \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!} + \rho_u L_0(t - (r-1)h) + \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \times \\ & \quad \times \frac{(L_0(t - (r-1)h))^\nu}{\nu!}, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + u_r(\tau_2)) d\tau_2) d\tau_1 - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t) \right\| \leq \\ & \leq \rho_\lambda \sum_{j=0}^2 \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!} + \rho_u \frac{(L_0(t - (r-1)h))^2}{2!} + \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \times \\ & \quad \times \sum_{j=\nu}^{\nu+1} \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!}, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \quad (21) \\ & \quad \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_{\nu-1}, \lambda_r + u_r(\tau_{\nu-1})) d\tau_{\nu-1} \dots) d\tau_1 - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t) \right\| \leq \\ & \leq \rho_\lambda \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!} + \rho_u \frac{(L_0(t - (r-1)h))^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \times \\ & \quad \times \sum_{j=\nu}^{2\nu-2} \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!}, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N. \quad (22) \end{aligned}$$

Ввиду (19)–(22), неравенства 5) теоремы, для всех $t \in [(r-1)h, rh)$ и $r = 1 : N$ пары

$$\begin{aligned} & (t, \lambda_r + u_r(t)), \quad (t, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + u_r(\tau_1)) d\tau_1), \\ & \quad (t, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + u_r(\tau_2)) d\tau_2) d\tau_1), \quad \dots, \\ & \quad (t, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_{\nu-1}, \lambda_r + u_r(\tau_{\nu-1})) d\tau_{\nu-1} \dots) d\tau_1) \end{aligned}$$

принадлежат множеству $G_1^0(\rho_x)$.

Решение задачи (6)–(9) найдем по алгоритму. Согласно условиям теоремы оператор $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)})$ в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 из [12]. Возьмем некоторое число $\varepsilon_0 > 0$, при котором будут иметь место неравенства:

$$\varepsilon_0 \gamma_\nu(h) \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\gamma_\nu(h)}{1 - \varepsilon_0 \gamma_\nu(h)} \left(\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \frac{q_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \right) < \rho_\lambda.$$

Так как матрица Якоби $\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)})/\partial \lambda$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, найдем $\delta_0 \in (0, \rho_\lambda]$ такое, что

$$\left\| \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)})}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, u^{(0)})}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon_0$$

для любых $\lambda, \tilde{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, как только $\|\lambda - \tilde{\lambda}\| < \delta_0$.

$$\text{Выберем } \alpha \geq \alpha_0 = \max \left\{ 1, \frac{\gamma_\nu(h)}{\delta_0} \left(\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \frac{q_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \right) \right\}$$

и построим итерационный процесс: $\lambda^{(1,0)} = \lambda^{(0)}$,

$$\lambda^{(1,m+1)} = \lambda^{(1,m)} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^{(1,m)}, u^{(0)})}{\partial \lambda} \right)^{-1} Q_{\nu,h}(\lambda^{(1,m)}, u^{(0)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

который по теореме 1 из [12] сходится к изолированному решению $\lambda^{(1)} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$ уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ и

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|. \quad (23)$$

Компоненты системы функций $u^{(1)}[t]$ определим по формуле (14). Тогда, в силу (23), (14), для разности $(u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t))$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1 : N$, имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| &\leq \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(1)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r^{(0)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(0)}) d\tau_\nu \dots) d\tau_1 \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(hL_0)^j}{j!} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r^{(0)}(t)\| \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(hL_0)^j}{j!} \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N. \end{aligned} \quad (24)$$

Параметр $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^{nN}$ по условию A удовлетворяет равенству $Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, 0) = 0$, поэтому

$$\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| = \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) - Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, 0)\| \leq \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2. \quad (25)$$

Используя (25) из (24), получим:

$$\|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq q_\nu(h) \|u^{(0)}[\cdot]\|_2. \quad (26)$$

Таким образом, в силу неравенства 4) теоремы $u^{(1)}[t] \in S(u^{(0)}[t], \rho_u)$.

Из структуры оператора $Q_{\nu,h}(\lambda, u)$, равенства $Q_{\nu,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)}) = 0$ и неравенства (26), имеем, что

$$\begin{aligned} \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\| &= \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) - Q_{\nu,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)})\| \leq \\ &\leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Если $\lambda \in S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \varepsilon_1)$, где $\rho_1 = \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2$, и число $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет неравенству:

$$\varepsilon_1 + \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \frac{q_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_\lambda,$$

то в силу условий 2), 3) теоремы и соотношений (23), (26), получим, что

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda^{(0)}\| &\leq \|\lambda - \lambda^{(1)}\| + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| < \rho_1 + \varepsilon_1 + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \\ &\leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \varepsilon_1 + \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \\ &< \frac{q_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \varepsilon_1 + \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho_\lambda, \end{aligned}$$

следовательно, $S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \varepsilon_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$.

Оператор $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(1)})$ в множестве $S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \varepsilon_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 [12], поэтому итерационный процесс

$$\lambda^{(2,0)} = \lambda^{(1)}, \quad \lambda^{(2,m+1)} = \lambda^{(2,m)} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^{(2,m)}, u^{(1)})}{\partial \lambda} \right)^{-1} \cdot Q_{\nu,h}(\lambda^{(2,m)}, u^{(1)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

сходится к изолированному решению $\lambda^{(2)} \in S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \varepsilon_1)$ уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$ и имеет место оценка:

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| \leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|,$$

или, учитывая (27) получим, что

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| \leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2.$$

По $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_N^{(2)})' \in \mathbb{R}^{nN}$, используя формулы (15), определим компоненты системы функций $u^{(2)}[t]$. Тогда

$$\|u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t)\| \leq q_\nu(h) \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\|, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = 1 : N,$$

т.е.

$$\|u^{(2)}[\cdot] - u^{(1)}[\cdot]\|_2 \leq q_\nu(h) \|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2.$$

Предполагая, что пара $(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)}[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ найдена и установлены оценки:

$$\|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\| \leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(k-2)}[\cdot] - u^{(k-3)}[\cdot]\|_2, \quad (28)$$

$$\|u^{(k-1)}[\cdot] - u^{(k-2)}[\cdot]\|_2 \leq q_\nu(h) \|u^{(k-2)}[\cdot] - u^{(k-3)}[\cdot]\|_2, \quad (29)$$

$$\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-2)}, u^{(k-2)})\| \leq \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(k-2)}[\cdot] - u^{(k-3)}[\cdot]\|_2, \quad (30)$$

k -ое приближение $\lambda^{(k)}$ по параметру находим из уравнения:

$$Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(k-1)}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (31)$$

Используя равенство $Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-2)}) = 0$, устанавливаем справедливость неравенства:

$$\gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\| \leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(k-1)}[\cdot] - u^{(k-2)}[\cdot]\|_2. \quad (32)$$

Возьмем $\rho_{k-1} = \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\|$ и покажем, что $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$. Для любого $\lambda \in S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon_1)$ в силу (26), (28), (29), (32) выполняется следующее:

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda^{(0)}\| &\leq \|\lambda - \lambda^{(k-1)}\| + \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\| + \dots + \|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \\ &\leq \rho_{k-1} + \varepsilon_1 + \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \left(\|u^{(k-2)}[\cdot] - u^{(k-3)}[\cdot]\|_2 + \dots + \|u^{(1)}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 \right) + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \\ &\leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \left((q_\nu(h))^{k-1} + (q_\nu(h))^{k-2} + \dots + q_\nu(h) \right) \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \\ &\quad + \varepsilon_1 < \frac{q_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \varepsilon_1 < \rho_\lambda, \end{aligned}$$

т.е. $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$. Так как оператор $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(k-1)})$ в $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [12], то в $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon_1)$ существует решение $\lambda^{(k)}$ уравнения (31) и справедлива оценка:

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\|. \quad (33)$$

По формулам (16) определим компоненты системы функций $u^{(k)}[t]$ и установим оценки:

$$\|u^{(k)}[\cdot] - u^{(k-1)}[\cdot]\|_2 \leq q_\nu(h) \|u^{(k-1)}[\cdot] - u^{(k-2)}[\cdot]\|_2. \quad (34)$$

Если $\rho_k = \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)})\| = 0$, то $Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)}) = 0$, т.е.

$$h \cdot g\left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_N^{(k)} + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau_1, \lambda_N^{(k)} + \dots + \int_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N^{(k)} + u_N^{(k)}(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_1\right) = 0,$$

$$\lambda_s^{(k)} + \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1, \lambda_s^{(k)} + \dots + \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s^{(k)} + u_s^{(k)}(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_1 - \lambda_{s+1}^{(k)} = 0, \quad s = 1 : (N-1),$$

и пара $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ является решением задачи (6)–(9).

Согласно (32), (33) установим, что

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \leq \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(k-1)}[\cdot] - u^{(k-2)}[\cdot]\|_2. \quad (35)$$

Из (34), (35) и условия 2) теоремы следует, что последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к решению $(\lambda^*, u^*[t])$ задачи (6)–(9), причем, в силу неравенств 4), 5) теоремы пары $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ($k = 1, 2, \dots$) и $(\lambda^*, u^*[t])$ принадлежат $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$.

Ввиду (34), (35) легко показать, что при всех $k = 1, 2, \dots$ и $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u^{(k+p)}[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\|_2 &\leq \frac{(q_\nu(h))^k}{1 - q_\nu(h)} q_\nu(h) \|u^{(0)}[\cdot]\|_2, \\ \|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\|_2 &\leq \frac{(q_\nu(h))^k}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|u^{(0)}[\cdot]\|_2. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ ($p \in \mathbb{N}$) в последних неравенствах, получим оценки (17) и (18) теоремы.

Покажем изолированность решения. Пусть пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ – решение задачи (6)–(9), принадлежащее $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Тогда существуют числа $\tilde{\delta}_1 > 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$ такие, что

$\|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\| + \tilde{\delta}_1 < \rho_\lambda$, $\|\tilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \tilde{\delta}_2 < \rho_u$. Если $\lambda \in S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1)$, $u[t] \in S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2)$, то в силу неравенств

$$\|\lambda - \lambda^{(0)}\| \leq \|\lambda - \tilde{\lambda}\| + \|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\| \leq \tilde{\delta}_1 + \|\tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}\| < \rho_\lambda,$$

$$\|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq \|u[\cdot] - \tilde{u}[\cdot]\|_2 + \|\tilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq \tilde{\delta}_2 + \|\tilde{u}[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u,$$

$\lambda \in S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1)$, $u[t] \in S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2)$, т.е. $S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2) \subset S(u^{(0)}[t], \rho_u)$.

Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon \gamma_\nu(h) < 1, \quad \left(\frac{\gamma_\nu(h)}{1 - \varepsilon \gamma_\nu(h)} \max(1, hL_2) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(hL_0)^j}{j!} + 1 \right) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} < 1. \quad (36)$$

Из условия B и структуры матрицы Якоби $\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S(\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}_1) \times S(\tilde{u}[t], \tilde{\delta}_2)$. Поэтому существует $\delta \in (0, \min\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\}]$, при котором

$$\left\| \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon$$

для всех $(\lambda, u) \in S(\tilde{\lambda}, \delta) \times S(\tilde{u}[t], \delta)$. Заметим, что если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ – решение задачи (6)–(9), то $Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $(\hat{\lambda}, \hat{u}[t]) \in S(\tilde{\lambda}, \delta) \times S(\tilde{u}[t], \delta)$ – другое решение задачи (6)–(9).

Так как $Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$ и $Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \hat{u}) = 0$, то из равенств

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} - \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})}{\partial \lambda} \right)^{-1} Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}), \quad \hat{\lambda} = \hat{\lambda} - \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})}{\partial \lambda} \right)^{-1} Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})$$

следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} - \hat{\lambda} = & - \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})}{\partial \lambda} \right)^{-1} \int_0^1 \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\hat{\lambda} + \theta(\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}), \tilde{u})}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})}{\partial \lambda} \right) d\theta (\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}) - \\ & - \left(\frac{\partial Q_{\nu,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})}{\partial \lambda} \right)^{-1} (Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \tilde{u}) - Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})), \end{aligned}$$

откуда

$$\|\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}\| \leq \frac{\gamma_\nu(h)}{1 - \varepsilon \gamma_\nu(h)} \|Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \tilde{u}) - Q_{\nu,h}(\hat{\lambda}, \hat{u})\| \leq \frac{\gamma_\nu(h)}{1 - \varepsilon \gamma_\nu(h)} \max(L_2 h, 1) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|\tilde{u}[\cdot] - \hat{u}[\cdot]\|_2. \quad (37)$$

Так как функции $\tilde{u}_r(t)$, $\hat{u}_r(t)$ являются решениями задачи Коши (6), (7) соответственно при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$ и $\lambda_r = \hat{\lambda}_r$, то на $[(r-1)h, rh]$ для всех $r = 1 : N$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_r(t) - \hat{u}_r(t)\| = & \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \tilde{\lambda}_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_2) d\tau_1 - \right. \\ & \left. - \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \hat{\lambda}_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \hat{\lambda}_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \hat{\lambda}_r + \hat{u}_r(\tau_\nu)) d\tau_\nu \dots) d\tau_2) d\tau_1 \right\| \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(L_0(t - (r-1)h))^j}{j!} \|\tilde{\lambda}_r - \hat{\lambda}_r\| + \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|\tilde{u}_r(t) - \hat{u}_r(t)\| \frac{(L_0(t - (r-1)h))^\nu}{\nu!}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\tilde{u}[\cdot] - \hat{u}[\cdot]\|_2 \leq \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(hL_0)^j}{j!} \|\tilde{\lambda} - \hat{\lambda}\| + \|\tilde{u}[\cdot] - \hat{u}[\cdot]\|_2 \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}. \quad (38)$$

В силу (37) из (38) следует, что

$$\|\tilde{u}[\cdot] - \hat{u}[\cdot]\|_2 \leq \left(\frac{\gamma_\nu(h)}{1 - \varepsilon\gamma_\nu(h)} \max(1, hL_2) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(hL_0)^j}{j!} + 1 \right) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \|\tilde{u}[\cdot] - \hat{u}[\cdot]\|_2. \quad (39)$$

На основании (36) из (39), (37) заключаем, что $\tilde{u}[t] = \hat{u}[t]$, $\tilde{\lambda} = \hat{\lambda}$. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определим равенствами:

$$x^{(k)}(t) = \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1 : N, \quad x^{(k)}(T) = \lambda_N^{(k)} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(k)}(t)$$

и через $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ обозначим множество кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам $\|x(t) - x^{(0)}(t)\| < \rho_x$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1 : N$, $\|x(T) - x^{(0)}(T)\| < \rho_x$.

Ввиду эквивалентности задач (1), (2) и (6)–(9) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть существуют $h > 0 : Nh = T$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия A , B , матрица Якоби $\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и справедливы неравенства 1)–5) теоремы 1. Тогда последовательность функций $(x^{(k)}(t))$, $k = 1, 2, \dots$, содержится в $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$, сходится к $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ – решению задачи (1), (2) и справедливо неравенство

$$\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\| \leq \frac{(q_\nu(h))^k}{1 - q_\nu(h)} \left(q_\nu(h) + \gamma_\nu(h) \max(1, hL_2) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \right) \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \quad t \in [0, T].$$

Причем любое решение задачи (1), (2) в $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ изолировано.

Цитированная литература

1. Шаманский Т.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев, 1963. Ч.1.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., 1968.
3. Keller H.B. Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell, 1968.
4. Roberts S.M., Shipman J.S. Two-point boundary-value problems: Shooting methods. N.Y.: Elsevier, 1972.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., 1973.
6. Keller H.B., White A.B. //SIAM J. Numer. Anal. 1975. Vol.12, No 5. P. 791–802.
7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Холла Дж., Уатта Дж. М., 1979.
8. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М., 1986.
9. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. "Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)". М., 1987.
10. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.
11. Джумабаев Д.С. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №1. С. 50–66.
12. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, №1. С. 39–63.

Поступила в редакцию 12.02.2010г.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Б. Т. ТОРЕБЕК, Б. Х. ТУРМЕТОВ

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави
161200 Туркестан университетский городок turmetovbh@mail.ru

В настоящей работе исследуются свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов в классе гармонических функций. В качестве применения этих операторов рассматриваются операторные краевые задачи в единичном шаре.

1. Введение.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ – n -мерный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{|x| = 1\}$ – сфера. Пусть далее, функция $u(x)$ – гармоническая в шаре Ω , m – натуральное число, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$, $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим операторы:

$$D^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-s)^{-\alpha} u(s\theta) ds,$$

$$D_*^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} u(s\theta) ds,$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера. Оператор D^α называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля, а D_*^α – оператором дифференцирования порядка α в смысле Капуто (см. [1]). Введем обозначения:

$$B[u](x) = B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D^{\alpha_1}[u](x), B_*[u](x) = B_*^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D_*^{\alpha_1}[u](x),$$

$$B^m[u](x) = B^{\alpha_1}[B^{\alpha_2} \dots B^{\alpha_m}[u](x)] = B^{\alpha_m}[B^{\alpha_{m-1}} \dots B^{\alpha_1}[u](x)],$$

$$B_*^m[u](x) = B_*^{\alpha_1}[B_*^{\alpha_2} \dots B_*^{\alpha_m}[u](x)] = B_*^{\alpha_m}[B_*^{\alpha_{m-1}} \dots B_*^{\alpha_1}[u](x)].$$

Отметим, что аналогичные операторы с производными целого порядка в классе гармонических функций рассматривались в работах [2,3].

Keywords: *integro-differential operators, boundary value problems, Laplace equation*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 45J05

© Б. Т. Торбек, Б. Х. Турметов, 2010.

2. Свойства операторов B^m и B_*^m .

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k , $k = 0, 1, \dots$. Тогда справедливы равенства:

$$B[H_k](x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x), B_*[H_k](x) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x), & \text{если } k \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Используя определение оператора $B = B^\alpha[u](x) = r^\alpha D^\alpha[u](x)$ и учитывая однородность полинома $H_k(x)$, запишем:

$$\begin{aligned} B[H_k](x) &= \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^k H_k(\theta) d\tau = \\ &= \frac{H_k(\theta) r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} r^{k+1-\alpha} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^k d\xi = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x). \end{aligned}$$

Далее, очевидно, что $B_*[t^0] = B_*[1] = 0$. Пусть $k \geq 1$. Тогда, по определению оператора $B_*[u](x) \equiv B_*^\alpha[u](x) = r^\alpha D_*^\alpha[u](x)$, аналогично предыдущим равенствам запишем:

$$B_*[H_k](x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} H_k(\tau\theta) d\tau = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x).$$

Лемма доказано.

Следствие 1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$ и $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k , $k = 0, 1, \dots$. Тогда справедливы равенства:

$$B^m[H_k](x) = \gamma_{k,m} H_k(x), \quad (1)$$

$$B_*^m[H_k](x) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \gamma_{k,m} H_k(x), & \text{если } k \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где обозначено

$$\gamma_{k,m} = \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\Gamma(k+1-\alpha_2)\dots\Gamma(k+1-\alpha_m)}.$$

Следствие доказывается последовательным применением леммы 1.

Теорема 1. Если $u(x)$ гармоническая в шаре Ω функция, то функции $B^m[u](x)$ и $B_*^m[u](x)$ также являются гармоническими в шаре Ω .

Доказательство. Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в шаре Ω . Тогда, известно (см. [4]), что функция $u(x)$ представляется в виде:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \quad (3)$$

где $\{H_k^{(i)}(x), i = 1, \dots, h_k\}$ – полная система однородных гармонических полиномов, а $u_k^{(i)}$ – коэффициенты разложения (3). Известно (см. [4]), что $h_k = (1+2k/(n-2))C_{k+n-3}^{n-3} \sim 2k^{n-2}/(n-$

2)!, $k \rightarrow \infty$. Более того, ряд (3) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leq \rho < 1$, и значит, $\forall \rho < 1, \exists C_\rho, \forall x, |x| \leq \rho, |u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)| \leq C_\rho$. Применяя формально оператор B^m к ряду (3), учитывая равенство (1), получаем:

$$B^m[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{4}$$

В силу асимптотической оценки (см.[5, с. 366]) $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_j)} \sim k^{\alpha_j}$ при $k \rightarrow \infty, 0 < \alpha_j < 1, j = 1, \dots, m$ получаем $\gamma_{k,m} \sim k^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}$, когда $k \rightarrow \infty$ и, значит, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\gamma_{k,m}} = 1$. Поэтому, при $|x| \leq r\rho$ и $r < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} |u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)| \leq C_\rho \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m} h_k r^k < \infty$$

и значит ряд (4) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leq r\rho < 1$ и его сумма представляет собой гармоническую функцию. В силу произвольности $\rho < 1$ функция $B^m[u](x)$ определена во всем шаре Ω . Аналогично доказывается гармоничность функции $B_*^m[u](x)$. Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть функция $u(x)$ – гармоническая в шаре Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство:

$$B_*^m[u](x) = B^m[u](x) - \frac{u(0)}{\Gamma(1 - \alpha_1) \dots \Gamma(1 - \alpha_m)}. \tag{5}$$

Доказательство. Представим гармоническую функцию $u(x)$ в виде ряда (3). Тогда, используя равенства (1) и (2) из следствия 1 и теорему 1, запишем:

$$B^m[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \quad B_*^m[u](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x).$$

Сравнивая эти ряды и учитывая, что $h_0 = 1$ и $u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x) = u(0)$, получим:

$$B_*^m[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) - \sum_{i=1}^{h_0} \gamma_{0,m} u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x) = B^m[u](x) - \gamma_{0,m} u(0).$$

Поскольку $\gamma_{0,m} = 1/(\Gamma(1 - \alpha_1) \dots \Gamma(1 - \alpha_m))$, то лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k при $k = 0, 1, \dots, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), 0 < \alpha_j < 1$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1} s^{-\alpha} H_k(sx) ds_m, \tag{6}$$

где $sx = (s_1 \dots s_m x_1, \dots, s_1 \dots s_m x_n), (1-s)^{\alpha_1-1} = (1-s_1)^{\alpha_1-1} \dots (1-s_m)^{\alpha_m-1}, s^{-\alpha}$ определяется аналогично.

Доказательство. Если $s = s_1 \dots s_m$, то в силу однородности полинома $H_k(x)$, имеем $H_k(sx) = s^k H_k(x)$, где $s^k = s_1^k s_2^k \dots s_m^k$ и, значит,

$$\int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1} s^{-\alpha} H_k(sx) ds_m = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1} s^{k-\alpha} ds_m H_k(x) =$$

$$= \int_0^1 (1-s_1)^{\alpha_1-1} s_1^{k-\alpha_1} ds_1 \cdots \int_0^1 (1-s_m)^{\alpha_m-1} s_m^{k-\alpha_m} ds_m H_k(x) = H_k(x) \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(\alpha_j)\Gamma(k+1-\alpha_j)}{\Gamma(k+1)}$$

Равенство (6) доказано.

Теорема 2. Пусть функция $u(x)$ – гармоническая в шаре Ω , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$. Тогда, в обозначениях леммы 3 для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство:

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m[u](sx) ds_m. \quad (7)$$

Доказательство. Представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде ряда:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{\gamma_{k,m}} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \quad (8)$$

Далее, учитывая равенства (1), (6) и равномерную сходимость ряда (8) по x при $|x| \leq \rho < 1$ (поэтому для этих $x \in \Omega$ суммирование по x и интегрирование по s_1, s_2, \dots, s_m можно поменять местами), его можно привести к виду:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} \frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k^{(i)}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m[H_k^{(i)}](sx) ds_m = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)} \right] (sx) ds_m = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m[u](sx) ds_m. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Используя связь между операторами B^m и B_*^m , следующую из равенств (1) и (2), легко доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Если функция $u(x)$ – гармоническая в шаре Ω , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, то для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство:

$$u(x) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B_*^m[u](sx) ds_m. \quad (9)$$

Теорема 2, а точнее равенство (7) позволяет определить следующий оператор:

$$B^{-m}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(sx) ds_m, \quad (10)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$.

Теорема 4. Если функция $u(x)$ – гармоническая в шаре Ω , тогда функция $B^{-m}[u](x)$ также является гармонической в шаре Ω .

Доказательство. Непосредственным подсчетом находим, что в шаре Ω верно равенство:

$$\Delta (B^{-m}[u](x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{2-\alpha} \Delta u(sx) ds_m = 0, \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, функция $B^{-m}[u](x)$ – гармоническая в шаре Ω . Теорема доказана.

Основное свойство оператора $B^{-m}[u](x)$ сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 5. Если функция $u(x)$ – гармоническая в шаре Ω , то справедливы равенства:

$$B^{-m} [B^m[u]](x) = u(x) \quad , \quad B^m [B^{-m}[u]](x) = u(x) \quad .$$

Доказательство. Докажем первое равенство теоремы.

Применим к функции $B^m[u](x)$ оператор B^{-m} . По определению оператора $B^{-m}[u](x)$ (10) и в соответствии с теоремой 2 будем иметь:

$$B^{-m} [B^m[u]](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m [u](sx) ds_m = u(x).$$

Для доказательства второго равенства применим оператор $B = B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D^{\alpha_1}[u](x)$ к функции $B^{-m}[u](x)$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} B [B^{-m}[u]](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} B \left[\int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(sx) ds_m \right] = \\ &= \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1} \left[\int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(s\tau\theta) ds_m \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1} u(s\tau\theta) d\tau ds_m. \end{aligned}$$

Далее, нетрудно убедиться в следующих равенствах:

$$\begin{aligned} \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1} u(s\tau\theta) d\tau &= \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^{rs} (r-t/s)^{-\alpha_1} u(t\theta) \frac{d\tau}{s} = \\ &= \frac{r^{\alpha_1} s^{\alpha_1-1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^{sr} (sr-t)^{-\alpha_1} u(t\theta) dt = \frac{(sr)^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{d(sr)} \int_0^{sr} (sr-t)^{-\alpha_1} u(t\theta) dt = B[u](sx), \end{aligned}$$

где учтено, что $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{sx}{|sx|}$. Поэтому, будем иметь:

$$B [B^{-m}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B [u](sx) ds_m$$

Следовательно, используя определение оператора B^m , можно записать:

$$B^m [B^{-m}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1} s^{-\alpha_1} B^m [u](sx) ds_m = u(x).$$

Второе равенство теоремы доказано.

Таким образом, из утверждения теоремы 5 следует, что операторы B^m и B^{-m} являются взаимно обратными на гармонических в шаре Ω функциях.

3. Постановка и решение краевых задач.

Теперь перейдем к постановке и решению некоторых задач, включающих значения операторов B^m и B_*^m на границе.

Пусть заданы последовательности чисел t_k и a_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям: $0 < t_k < 1$, $t_k \rightarrow 1$, при $k \rightarrow \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ гармоническую в шаре Ω , для которой функция $B^m[u](x) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условию:

$$B^m[u](x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(t_k x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Задача 2. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ гармоническую в шаре Ω , для которой функция $B_*^m[u](x) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условию

$$B_*^m[u](x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(t_k x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (12)$$

Рассматриваемые задачи являются простейшими обобщениями задачи Бицадзе-Самарского [6], а при $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, задач Дирихле и Неймана на граничные операторы нецелого порядка.

Отметим, что аналогичные задачи для эллиптических уравнений второго порядка с граничными операторами целого порядка были рассмотрены в работах [7–9], а для операторов дробного порядка при $m = 1$ и $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, в [10–12].

В дальнейшем всюду будем считать, что $B^0[u](x) \equiv u(x)$, $\gamma_{0,0} \equiv 1$.

Для исследования разрешимости задач 1 и 2 нам необходимо изучить следующую вспомогательную задачу:

Задача А. Найти функцию $v(x)$, гармоническую в шаре Ω , непрерывную в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющую на сфере $\partial\Omega$ равенству:

$$v(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-m}[v](t_k x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (13)$$

Отметим, что задача А в случае $m = 0$ была изучена в работе [7].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $m = 0, 1, \dots, f(x) \in C(\partial\Omega)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{(1-t_k)^{n-1}} < \infty. \quad (14)$$

Тогда

1) если выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \gamma_{0,m}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \neq \gamma_{0,m}, \quad (15)$$

то задача A однозначно разрешима.

2) если выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \gamma_{0,m}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \gamma_{0,m}, \quad (16)$$

то для разрешимости задачи A (с точностью до постоянного слагаемого) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\partial\Omega} f(y) dS_y = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Единственность. Пусть функция $v(x)$ является решением задачи A при $f(x) = 0$.

Обозначим $M = \max_{\partial\Omega} |v(x)| = |v(x_0)|, x_0 \in \partial\Omega$. Если $v(x) \neq const$, то в силу принципа максимума для гармонических функций $|v(x)| < M$ для любого $x \in \Omega$.

Далее, в силу условия (11) и определения оператора B^{-m} при $f(x) = 0$ получаем:

$$M = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-m}[v](t_k x_0) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1-1} s^{-\alpha_1} |v(st_k x_0)| ds_m.$$

Так как $t_k \neq 1$, то для некоторых $i = 1, 2, \dots, t_i x_0 \in \Omega$ и тогда при любом $s_j \in [0, 1], j = 1, \dots, m$, точки $st_i x_0$ также принадлежат шару Ω .

Поэтому для $st_i x_0 \in \Omega$ выполняется $|v(st_i x_0)| < M$ и, следовательно,

$$M \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |B^{-m}[v](t_k x_0)| < M \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \Gamma(1 - \alpha_1) \dots \Gamma(1 - \alpha_m).$$

Теперь, если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \gamma_{0,m}$, то получаем противоречие $M < M$.

Следовательно, если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \gamma_{0,m}$, то необходимо, чтобы $v(x) \equiv C = const$.

Подставляя в этом случае $v(x) \equiv C$ в условие (13), имеем:

$$C - \sum_{k=1}^{\infty} a_k C \cdot \Gamma(1 - \alpha_1) \dots \Gamma(1 - \alpha_m) = 0.$$

Тогда $C=0$ или $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1) \dots \Gamma(1-\alpha_m)} = \gamma_{0,m}$.

Таким образом, при выполнении условий (15), получаем $v(x) \equiv 0$. А если выполняются условия (16), то произвольная постоянная будет решением однородной задачи A .

Теорема единственности доказана.

Существование. Обозначим через $\mu(x) = v(x)|_{\partial\Omega}$ след неизвестной гармонической функции $v(x)$ в $\partial\Omega$.

Решение задачи А будем искать в виде интеграла Пуассона

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y)\mu(y)dS_y, \quad (18)$$

где $P(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ – ядро Пуассона задачи Дирихле.

Подставляя функцию (18) в условие (11), относительно неизвестной функции $\mu(x)$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$\mu(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\partial\Omega} P_m(t_k x, y)\mu(y)dS_y = f(x), x \in \partial\Omega, \quad (19)$$

где

$$P_m(t_k x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} P(st_k x, y) ds_m.$$

Обозначим

$$K(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_m(t_k x, y), \quad x, y \in \partial\Omega.$$

Тогда, уравнение (19) представляется в виде:

$$\mu(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y)\mu(y)dS_y = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (20)$$

Заметим, что для всех $x, y \in \partial\Omega$ выполняются условия $|t_k x - y| = |y - t_k x| \geq 1 - t_k$ и $|t_k x - y|^2 = |t_k y - x|^2$. Тогда легко показать, что ядро $K(x, y)$ является симметричным и в силу сходимости ряда (14) ограниченным.

Следовательно, к интегральному уравнению (20) применима альтернатива Фредгольма и отсюда легко вытекают утверждения теоремы. Теорема доказана.

Следующее утверждение устанавливает некоторые свойства решения задачи А.

Лемма 4. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и $v(x)$ является решением задачи А.

Тогда

- 1) если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (17) и выполняются условия (15), то $v(0) = 0$.
- 2) если $v(0) = 0$, то для функции $f(x)$ выполняется условие (17).

Доказательство. Пусть $v(x)$ – решение задачи А. Так как $v(x)$ гармоническая функция в области Ω , то для любого $t_k \in (0, 1)$ функция $v(t_k x)$ также является гармонической в Ω . Тогда функция $B^{-m}[v](t_k x)$ – гармоническая в Ω .

Обозначим $v_k(x) = B^{-m}[v](t_k x)$. Так как $B^{-m}[v](t_k x) \in C(\bar{\Omega})$, то существует $M > 0$ такое, что $|v_k(x)| = |B^{-m}[v](t_k x)| \leq M$ для всех $x \in \bar{\Omega}$. Тогда $\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ т.е. ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x)$ сходится равномерно в $\bar{\Omega}$ и в силу теоремы Гарнака сумма этого ряда представляет

гармоническую функцию в Ω . Обозначим $w(x) = v(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x)$. Очевидно, что функция $w(x)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Представляя функцию $w(x)$ в виде интеграла Пуассона $w(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y)f(y)ds_y$ в силу условия (17), получаем:

$$w(0) = \int_{\partial\Omega} P(0, y)f(y)ds_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} f(y)ds_y = 0.$$

Следовательно,

$$w(0) = v(0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(0) = v(0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_{0,m}^{-1} v(0) = v(0) \left[1 - \gamma_{0,m}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right] = 0.$$

Теперь если выполняются условия (15), то необходимо, чтобы $v(0) = 0$.

2. Пусть теперь выполняются условия (15) и $v(0) = 0$.

Тогда, если обозначить $w(x) = v(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x)$, то $w(0) = v(0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(0) = 0$.

С другой стороны $\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} f(y) ds_y = \int_{\partial\Omega} P(0, y) f(y) ds_y = w(0) = 0$. Лемма доказана.

Теперь переходим к основным задачам. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и выполняется условие (14).

Тогда

1) если выполняются условия (15), то задача 1 однозначно разрешима.

2) если выполняется условие (16), то для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнения условия (17), причем решение задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Если решение задачи 1 существует, то оно представимо в виде:

$$u(x) = B^{-m}[v](x),$$

где $v(x)$ – решение задачи А.

Теорема 8. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и выполняются условия (14) и (15).

Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия (17).

Если решение задачи 2 существует, то

1) при выполнении условия $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \neq 0$ оно единственно;

2) при выполнении условия $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv 0$ оно единственно с точностью до постоянного слагаемого;

3) решение представимо в виде $u(x) = B^{-m}[v](x)$, где $v(x)$ – решение задачи А с дополнительным условием $v(0) = 0$.

Доказательство теоремы 7. Пусть $u(x)$ является решением задачи 1. Применим к функции $u(x)$ оператор B^m и обозначим $B^m[u](x) = v(x)$. В силу утверждения теоремы 2 для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство (7).

Тогда

$$\begin{aligned} u(t_k x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m[u](st_k x) ds_m = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} v(st_k x) ds_m = B^{-m}[v](t_k x). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $u(x)$ – гармоническая функция в Ω , то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(x)$ тоже гармоническая в шаре Ω и $v(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-m}[v](t_k x) = f(x), x \in \partial\Omega$.

Таким образом, если $u(x)$ – решение задачи 1, то функция $v(x)$ является решением задачи А.

Пусть выполняются условия (14) и (15). Тогда, по теореме 6 для любого $f(x) \in C(\partial\Omega)$ решение задачи А существует, единственно и $v(x) \in C(\bar{\Omega})$.

Если применить оператор B^{-m} из (10) к равенству $B^m[u](x) = v(x)$, в силу первого равенства из теоремы 5 для любого $x \in \Omega$ получим:

$$\begin{aligned} u(x) &= B^{-m}[B^m[u]](x) = B^{-m}[v](x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} v(sx) ds_m. \end{aligned}$$

Гармоничность данной функции следует из утверждения теоремы 4, а выполнение условия (11) проверяется непосредственно:

$$B^m[u](x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(t_k x) = v(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-m}[u](t_k x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь выполняется условие (16). Тогда, из соотношения $B^m[u](0) \equiv C \Rightarrow u(0) = \gamma_{0,m}^{-1} C$ для функции $w(x) = B^m[u](x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(t_k x)$ получаем:

$$w(0) = B^m[u](0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(0) = C - \gamma_{0,m}^{-1} C \sum_{k=1}^{\infty} a_k = C - C = 0.$$

А так как функция $w(x)$ есть решение задачи Дирихле, то при выполнении условия $w(0) = 0$ вытекает необходимое условие (17), т.е. $\int_{\partial\Omega} f(y) ds_y = 0$. Таким образом, необходимость условия (17) для существования решения задачи 1 при выполнении условия (16) доказана.

Покажем, что условие (17) является и достаточным для существования решения задачи 1 при выполнении условия (14) и (16).

По теореме 6 при выполнении условий (14), (16) и (17) решение задачи А существует, единственно с точностью до постоянного слагаемого и $v(x) \in C(\bar{\Omega})$.

Тогда, функция $u(x) = B^{-m}[v](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} v(sx) ds_m$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 8. Пусть решение задачи 2 существует. Обозначим его через $u(x)$. Так как $B_*^m[1] = 0$, то в разложении функции $B_*^m[u](x)$ в ряд в виде (3) отсутствует свободный член и поэтому $B_*^m[u](0) = 0$. Далее, рассматривая функцию $w(x) = B_*^m[u](x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(t_k x)$ гармоническую в Ω , как в доказательстве теоремы 6 имеем $w(0) = B^m[u](0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(0) = 0$. Отсюда вытекает необходимость условия (17).

Покажем, что условие (17) является и достаточным для существования решения задачи 2.

Если выполняются условия (14), (15) и (17), то по утверждению теоремы 6 решение задачи А существует и в силу леммы 4 $v(0) = 0$.

Тогда, функция $u(x) = B^{-m}[v](x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Действительно, гармоничность функции $u(x)$ следует из утверждения теоремы 4. Проверим выполнение условия (12). Если применим оператор B_*^m к равенству $u(x) = B^{-m}[v](x)$, то

$$B_*^m[u](x) = B_*^m[B^{-m}[v]](x) = B^m[B^{-m}[v]](x) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1) \cdots \Gamma(1-\alpha_m)} B^{-m}[v(0)] = v(x)$$

и

$$u(t_k x) = B^{-m}[v](t_k x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} v(st_k x) ds_m.$$

Поэтому, выполняются условия:

$$B_*^m[u](x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k u(t_k x) = v(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-m}[v](t_k x) = f(x), x \in \partial\Omega.$$

Очевидно, что при $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv 0$ функция $u(x) = C$ удовлетворяет однородному условию (12)

и поэтому в случае выполнения условия $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv 0$ решение задачи 2 будет единственным с точностью до постоянного слагаемого. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть в задачах 1 и 2 выполняются условия $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, f(x) \in C(\partial\Omega)$.

Тогда

1) решение задачи 1 существует и представляется в виде $u(x) = B^{-m}[v](x)$, где $v(x)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничным значением $f(x)$.

2) для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнение условия $\int_{\partial\Omega} f(x) ds_x = 0$.

Если решение задачи 2 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Таким образом, если судить по результатам задача 1 обобщает задачу Дирихле, а задача 2 – задачу Неймана для уравнения Лапласа.

Цитированная литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. Баврин И.И. //Дифференциальные уравнения. 1985. Т.21, № 1. С. 9–15.
3. Карачик В.В, Турметов Б.Х. //Изв. АН Уз ССР, сер.Физ.-мат.наук 1990. № 4. С. 17–21.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
6. Бицадзе А.В., Самарский А.А. //Доклады АН СССР. Москва, 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
7. Пулатов А.К. //Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 3. С. 537–540.
8. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. Часть I. Современная математика. Фундаментальные направления. Москва, 2007. Т. 26. С. 3–123.
9. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. Часть II. Современная математика. Фундаментальные направления. Москва, 2007. Т. 33(2009). С. 3–179.
10. Турметов Б.Х. //Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1089–1092.
11. Турметов Б.Х. //Труды Института математики. Новосибирск. 2004. Т. 7, № 1. С. 189–199.
12. Турметов Б.Х., Ильясова М.Т. //Вестник ЕНУ, серия "Естественно-технических наук", 2009. № 4. С. 6–15.

Поступила в редакцию 10.02.2010г.

УДК 517.51

О СУММИРОВАНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

Институт математики МОН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 flp@math.kz

Приведены результаты суммирования коэффициентов Фурье по тригонометрической системе функций из пространства Соболева методами Чезаро и общими методами Пуассона.

В статье приведено доказательство теорем, анонсированных в [1].

Пусть a_n, b_n – коэффициенты Фурье по тригонометрической системе функции $f(x)$. Исследованиям поведения коэффициентов Фурье по различным ортогональным системам посвящено большое количество работ. О порядке убывания коэффициентов можно судить по классическим результатам Парсеваля, Бесселя, Юнга, Харди, Литтлвуда и др. В некоторых классических теоремах теории функций Д.Е.Меньшову удалось заменить обычную сходимость на сходимость чезаровских средних отрицательного порядка. Всевозможные трансформации коэффициентов Фурье рассматривали Г.Харди, М. и С.Идзуми, А.А.Конюшков, Б.И.Голубов и др. В [2–4] продолжена идея получения информации о поведении коэффициентов Фурье, исходя их понятия сходимости последовательности в смысле Чезаро (c, α) , $\alpha > 0$ для $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $p > 1$ и $f(x) \in C_{2\pi}$. Позднее автором [5] получены аналогичные утверждения для сходимости в смысле Рисса и Зигмунда на классах $W_p^{(r)}$ и им тригонометрически сопряженным. Порядки убывания модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе и системам типа систем Хара получены в [6]. Некоторые результаты для пространств С.Л.Соболева, С.М.Никольского, О.В.Бесова приведены в [7, 8].

Применение непрерывных методов суммирования (метод $(A, 1)$) коэффициентов Фурье упрощает выкладки, используемые при подсчете порядков тех же коэффициентов Λ – методами (Чезаро, Рисс, Зигмунд, $\alpha > 0$) и позволяет освободиться от дополнительных условий.

Проследим сказанное на примере пространства Соболева $W_p^{(r)}$, $1 < p \leq 2$, $r > 0$. Будем говорить, что 2π -периодическая функция $f(x) \in W_p^{(r)}$, $1 \leq p < \infty$, $r > 0$, если ее среднее значение на периоде равно 0, имеет производную в смысле Вейля $f^{(r)} \in L_p$. Для функций $f(x) \in W_p^{(r)}$ в частности установлено (см. например [10]), что ее коэффициенты Фурье (в комплексной форме) c_n необходимо удовлетворяют условию: ($1 < p \leq 2$).

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p \cdot |k|^{(r+1)p-2} < \infty. \quad (1)$$

Keywords: *Fourier series, Cesaro numbers, linear methods of summation, trigonometric system, Sobolev space, asymptotic behavior*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Л. П. Фалалеев, 2010.

Причем условие (1) не уточняемо на всем классе W_p^r .

Теорема 1. Для Λ -методов при $\alpha > \frac{1}{p}$ справедлива оценка ($n \rightarrow \infty$):

$$n^\beta |c_n| = \bar{o}(1), \quad \beta \in \left(r - \frac{1}{p}; r + \frac{1}{q} \right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p \leq 2, \quad r \geq 0.$$

Доказательство. Образует суммы Чезаро и воспользуемся асимптотикой чисел A_n^α . Тогда, после применения ряда тождественных преобразований и неравенства Гельдера, получим:

$$\begin{aligned} A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n |c_k| A_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^\beta &= c \cdot n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot k^{r+1-\frac{2}{p}} \cdot k^\beta \cdot k^{\frac{2}{p}} A_{n-k}^{\alpha-1} \cdot k^{-(r+1)} \leq \\ &\leq c \cdot n^{-\alpha} \left[\sum_{k=1}^n |c_k|^p \cdot k^{(r+1)p-2} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n A_{n-k}^{(\alpha-1)q} \cdot k^{(\frac{2}{p}+\beta-r-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= c \cdot n^{-\alpha} \left[n^{\alpha-1+\frac{2}{p}+\beta-r+\frac{1}{q}} \right] = c \cdot n^{\beta-r-\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \text{ при } \beta < r + \frac{1}{q}, \quad n \rightarrow \infty, \quad c > 0, \quad c = \text{const}. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались формулой

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^\alpha A_\nu^\beta, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta > -1,$$

дающей дополнительные ограничения на параметры α, β :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)q > -1 \\ \frac{2}{p} + \beta - r - 1 > -\frac{1}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 - \frac{1}{q} \\ \frac{2}{p} + \beta - r - 1 > -\frac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > \frac{1}{p} \\ \beta > r - \frac{1}{p}, \end{cases}$$

что и требовалось. Доказательство сформулированной теоремы для методов Рисса и Зигмунда аналогично.

Обратимся к методу $(A, 1)$, классическому методу суммирования Абеля-Пуассона, $0 < \rho < 1$.

Теорема 2. При $\rho \rightarrow 1-$ последовательность $\{|c_n| \cdot n^\beta\}_{n=0}^\infty$ суммируется к нулю методом $(A, 1)$ для $\beta \in \left(r - \frac{1}{p}; r + \frac{1}{q} \right)$.

Доказательство. Образует суммы Пуассона для последовательности $\{|c_n| \cdot n^\beta\}_{n=0}^\infty$ и оценим их, пользуясь условием (1) и неравенством Гельдера:

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \sum_{k=1}^\infty |c_k| \cdot k^\beta \cdot \rho^k &\leq c(1 - \rho) \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot k^{r+1-\frac{2}{p}} \cdot k^\beta \cdot k^{\frac{2}{p}} \rho^k \cdot k^{-(r+1)} \leq \\ &\leq c(1 - \rho) \left\{ \sum_{k=1}^\infty |c_k|^p \cdot k^{(r+1)p-2} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=0}^\infty (\rho^q)^k \cdot k^{(\frac{2}{p}+\beta-r-1)q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq c(1 - \rho) \left\{ \frac{1}{(1 - \rho)^{1+\beta p - pr/p-1}} \right\}^{\frac{p-1}{p}} = c(1 - \rho)^{1-\frac{1}{p}+r-\beta} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

когда $\rho \rightarrow 1-$ для $\beta < r + \frac{1}{q}$.

При этом мы воспользовались разложением в степенной ряд в окрестности $\rho = 1$ функции $1 - \rho^q$ и разложением

$$\frac{1}{(1 - \rho)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^{\nu} A_{\nu}^{\alpha}, \quad \alpha > -1, |\rho| < 1,$$

A_{ν}^{α} – числа Чезаро, дающим дополнительные ограничения на параметры p, r, β :

$$\left(\frac{2}{p} + \beta - r - 1\right)q > -1 \Leftrightarrow \beta > r - \frac{1}{p}.$$

Теорема доказана.

Известна теорема Картрайт [10] для общих методов суммирования Пуассона (A, l) , $l > 0$.

Если ряд $\sum_n a_n$ суммируется методом (A, p) , т.е.

$$\sum_n a_n e^{-yn^p} \rightarrow S, \quad y \rightarrow 0 (y > 0),$$

тогда для всякого положительного $q < p$ он суммируется к S методом (A, q) .

Полагая в этой теореме $y = e^{-\ln \frac{1}{\rho} \cdot n^l}$, $l > 0$, $n \geq 1$, определим интервал значений β , для которых последовательность $\{|c_n| \cdot n^{\beta}\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1-$, c_n – коэффициенты Фурье функции $f(x) \in W_p^{(r)}$, $1 < p \leq 2$, для более сильного метода (A, l) , $l > 1$.

Теорема 3. При $\rho \rightarrow 1-$ последовательность $\{|c_n| \cdot n^{\beta}\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow 0$ суммируется к нулю методом (A, l) , $l > 1$ для

$$\beta \in \left(r + \frac{1}{q} + 1 - l; r + \frac{1}{q}\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p \leq 2, \quad r \geq 0.$$

Доказательство. Образует обобщенные суммы Пуассона и воспользуемся неравенством (1), тогда:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \rho^{k^l} |c_k| \cdot k^{\beta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \rho^{k^l} \cdot k^{r+1-\frac{2}{p}} \cdot k^{\beta} \cdot k^{\frac{2}{p}-r-1} \leq \\ &\leq c \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \cdot k^{(r+1-\frac{2}{p})p} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta \rho^{k^l})^q \cdot k^{(\beta+\frac{2}{p}-r-1)q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq c \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \cdot k^{(r+1)p-2} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta \rho^{k^l})^q \cdot k^{(\beta+\frac{2}{p}-r-1)q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq c \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta \rho^{k^l})^q \cdot k^{(\beta+\frac{2}{p}-r-1)q} \right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что для произвольного $l > 0$ (см. [11])

$$\begin{aligned} \Delta \rho^{\nu^l} &= \rho^{\nu^l} - \rho^{(\nu+1)^l} = \rho^{\nu^l} (1 - \rho^{(\nu+1)^l - \nu^l}) = \\ &= (1 - \rho) \rho^{\nu^l} \cdot l \cdot \nu^{l-1} + c(1 - \rho)^2 \rho^{\nu^l} \cdot \nu^{2l-2} + c(1 - \rho) \rho^{\nu^l} \nu^{l-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для подсчета суммы в (2) будем сначала учитывать лишь первое слагаемое в равенстве (3), полагая

$$(\Delta \rho^{k^l})^q = c(1 - \rho)^q \cdot k^{(l-1)q} \rho^{qk^l} + \delta(k, l, q, \beta), \quad (4)$$

где величина $\delta(k, l, q, \beta) = \delta(\cdot)$ имеет различные порядки малости при $\rho \rightarrow 1-$ в зависимости от входящих параметров и "вклада" второго и третьего слагаемых равенства (3) в сумму (2). Затем рассмотрим общий случай. Оценим сумму в неравенстве (2). Пусть $l > 0$. Известно (см. [11], с.36, [10]), что интеграл

$$F(\varepsilon) = \int_a^\infty e^{-\varepsilon x^\beta} \cdot x^\alpha dx, \quad a > 0, \beta > 0$$

при $\alpha > -1$ имеет асимптотику ($\varepsilon \rightarrow +0$)

$$F(\varepsilon) \sim \frac{1}{\beta} \cdot \varepsilon^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) + \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} d_n \varepsilon^{\alpha+\beta(n+1)} \right\}, \quad (5)$$

где d_n – некоторые коэффициенты, численное значение которых не понадобится, $\Gamma(b)$ – гамма-функция. Положим в (5) $\beta = l$, $\alpha = \gamma \cdot q$, $\varepsilon = -\ln \frac{1}{\rho}$ ($\varepsilon \rightarrow +0$ когда $\rho \rightarrow 1-$), тогда получим:

$$\int_0^\infty e^{-\ln \frac{1}{\rho} \cdot x^l \cdot q} \cdot x^{q\gamma} = c \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{-\frac{\gamma q+1}{l}} = c(1-\rho)^{-\frac{\gamma q+1}{l}} + c(1-\rho)^{-\frac{\gamma q}{l}}, \quad (6)$$

$c > 0$, $c = const$, так как

$$\ln \frac{1}{\rho} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(1-\rho)^k}{k} \quad (\rho \rightarrow 1-). \quad (7)$$

Из неравенства $\alpha > -1$ следует

$$\begin{cases} l-1 > -1 \\ l-2 > -1 \Rightarrow l > 1. \\ 2l-2 > -1 \end{cases}$$

Полагая в (6) $\gamma = l-1 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1$, для первого слагаемого в (3) с учетом (6), (7) имеем:

$$\begin{aligned} c(1-\rho) \left\{ \sum_{k=0}^\infty \rho^{k \cdot q} k^{\gamma q} \right\}^{\frac{1}{q}} &\leq c(1-\rho) \left\{ (1-\rho)^{-\frac{\gamma+1}{l}} + O((1-\rho)^{-\frac{\gamma}{l}}) \right\} + \delta(\cdot) = \\ &= c(1-\rho)^{1-\frac{1}{l}(l-1+\beta+\frac{2}{p}-r-1+\frac{1}{q})} + O((1-\rho)^{-\frac{\gamma}{l}+1}) = c(1-\rho)^{r+\frac{1}{q}-\beta} + \delta(\cdot). \end{aligned} \quad (8)$$

Слагаемое $c(1-\rho)^{r+\frac{1}{q}-\beta} \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 1-$ при $\beta < r + \frac{1}{q}$. По определению Г-функции $\Gamma(b)$, $b > 0$, т.е. $\gamma q + 1 > 0 \Leftrightarrow l-1 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1 > -\frac{1}{q} \Leftrightarrow \beta > r - l + \frac{1}{q}$. Заметим, что остаточный член в (8) имеет порядок $O((1-\rho)^{1-\frac{\gamma}{l}}) \rightarrow 0$ для $\beta < r + \frac{2}{q}$. Таким образом, "вклад" первого слагаемого из разложения (3) в сумму (2) дает интервал изменения для β : $\beta \in (r-l + \frac{1}{q}; r + \frac{1}{q})$. Для второго слагаемого из (3), полагая в (6) $\gamma = 2l-2 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1$, из (8) получим:

$$\begin{aligned} (1-\rho)^2 \left\{ \sum_{k=0}^\infty \rho^{q \cdot k^l} \cdot k^{\gamma q} \right\}^{\frac{1}{q}} &\leq c(1-\rho)^2 \left\{ (1-\rho)^{-(2l-2+\beta+\frac{2}{p}-r-1+\frac{1}{q})} + O((1-\rho)^{-\frac{\gamma}{l}}) \right\} + \\ &+ \delta(\cdot) = c(1-\rho)^{(r+1+\frac{1}{q}-\beta) \cdot \frac{1}{l}} + O((1-\rho)^{(r+1+\frac{2}{q}-\beta) \cdot \frac{1}{l}}) + \delta(\cdot). \end{aligned}$$

В этом выражении первое слагаемое стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1-$ для $\beta < r + 1 + \frac{1}{q}$, второе – для $\beta < r - 1 + \frac{2}{q}$.

По определению Γ -функции для $\gamma = 2l - 2 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1$ легко найдем:

$$2l - 2 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1 > -\frac{1}{q} \Rightarrow \beta > r + 1 - 2l + \frac{1}{q}.$$

Таким образом, второе слагаемое из (3) порождает следующий интервал изменения для β :

$$\beta \in \left(r + 1 - 2l + \frac{1}{q}; r + 1 + \frac{1}{q} \right).$$

Для третьего слагаемого из (3), полагая в (6) $\gamma = l - 2 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1$, из (8) получим:

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{q \cdot k^l} \cdot k^{\gamma q} \right\}^{\frac{1}{q}} &\leq c(1 - \rho)^{-(l-2+\beta+\frac{2}{p}-r-1+\frac{1}{q})\frac{1}{l}} + O((1 - \rho)^{-\frac{\gamma}{l}}) + \delta(\cdot) = \\ &= c(1 - \rho)^{(r+1+\frac{1}{q}-\beta)\frac{1}{l}} + O((1 - \rho)^{(2+r+1-\beta-\frac{2}{p})\frac{1}{l}}) + \delta(\cdot). \end{aligned}$$

В последнем выражении первое слагаемое стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1-$ для $\beta < r + 1 + \frac{1}{q}$, второе – для $\beta < r + 1 + \frac{2}{q}$.

По определению Γ -функции для $\gamma = l - 2 + \beta + \frac{2}{p} - r - 1$ найдем другое ограничение на входящие параметры: $\gamma q > -1 \Leftrightarrow \beta > r + 1 + \frac{1}{q} - l$. Таким образом, третье слагаемое из равенства (3) порождает следующий интервал изменения для β :

$$\beta \in \left(r + 1 + \frac{1}{q} - l; r + 1 + \frac{1}{q} \right), \quad l > 1.$$

Сравнивая между собой полученные интервалы, найдем:

$$\beta \in \left(r + \frac{1}{q} + 1 - l; r + \frac{1}{q} \right), \quad l > 1.$$

Величина $\delta(k, l, q, \beta) = \delta(\cdot)$, состоящая из величин погрешностей, доставляемых тремя слагаемыми равенства (3) для β из найденного интервала, стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1-$. Теорема доказана.

Следствие. При $r = 0$ для $f(x) \in L_p^{2\pi}$, $p > 1$ с коэффициентами Фурье c_n получим следующий интервал изменения β , при котором последовательность $\{n^\beta |c_n|\}_{n=0}^{\infty}$ суммируется методом (A, l) , $l > 1$ к нулю при $\rho \rightarrow 1-$:

$$\beta \in \left(1 + \frac{1}{q} - l; \frac{1}{q} \right).$$

Цитированная литература

1. Фалалеев Л.П. // Тезисы докладов межд. конф., посвященной 100-летию С.Л.Соболева. 5–12 октября 2008. Новосибирск. С. 68.

2. **Ready J.** //SIAM. Math. Anal. 1986. Т. 17, № 2. С. 69–476.
3. **Куприков Ю.Е.** //Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 2. С. 154–155.
4. **Куріков Ю.Е.** . //Analysis Math. 1993. Т. 19, № 2. С. 113–134.
5. **Фалалеев Л.П.** //Известия МОН РК. Серия физ.-мат. 2000. № 5. С.53–57.
6. **Фалалеев Л.П.** //Математический журнал. 2001. Т. 1, № 1. С.100–103.
7. **Фалалеев Л.П.** //Междунар. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 75-летию ТулГУ и 85-летию со дня рождения профессора С.Б.Стечкина. 22–26 ноября 2005. Тула. С. 155.
8. **Фалалеев Л.П.** //Тезисы докладов Междунар. конференции, посвященной 100-летию С.М.Никольского 23-29 мая 2005. С.233.
9. **Потапов М.К.** О коэффициентах Фурье. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965.
10. **Харди Г.** Расходящиеся ряды. М, 1951.
11. **Фалалеев Л.П.** //Сибирский мат. журнал. 2001. Т. 42, № 4. С. 926–936.
12. **Федорюк Н.В.** Асимптотика: Интегралы и ряды. М, 1987.

Поступила в редакцию 10.10.2009г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 519.62

2000 MSC: 34B16, 34B40

Abildayeva A.D., Dzhumabaev D.S. **Isolated bounded on whole axe solutions of nonlinear ordinary differential equation's system** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 5 – 12.

The definition of isolated bounded on whole axe solution of nonlinear ordinary differential equations is introduced. The necessary and sufficient conditions of existence for such solutions are established.

References – 3.

УДК: 519.62

2000 MSC: 34B16, 34B40

Әбілдаева Ә.Д., Жұмабаев Д.С. **Бейсызық қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бүкіл өстегі оқшауланған шектеулі шешімі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 5 – 12.

Бейсызық қарапайым дифференциалдық теңдеулердің оқшауланған және бүкіл түзуде шектеулі шешімінің анықтамасы енгізілді. Осындай шешімдердің болуының қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалды.

Әдебиеттер тізімі – 3.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35R30

Abulkairov U.U., Aitzhanov S.E. **Solubility of the inverse problem of magnetic hydrodynamics for viscous incondensable liquid** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 13 – 22.

In the paper it is considered inverse non-stationary problem of magnetic hydrodynamics for viscous incondensable liquid. The aim is to define the velocity of the motion $\vec{v}(x, t)$, magnetic tension $\vec{H}(x, t)$, gradient of the pressure $\nabla p(x, t)$, external power $\vec{f}(x)$ and currents $rot \vec{j}(x)$. In this case redefining conditions are added to conditions from direct problem.

References – 9.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35R30

Абылқайров У.У., Айтжанов С.Е. **Сығылмайтын тұтқыр сұйық үшін магниттік гидродинамиканың кері есебінің шешілуі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 13 – 22.

Бұл жұмыста сығылмайтын тұтқыр сұйық үшін магниттік гидродинамиканың кері стационар емес есебі қарастырылған. Кері есебінен $\vec{v}(x, t)$ – қозғалыстың жылдамдығын, $\vec{H}(x, t)$ –

магниттік кернеулігін, $\nabla p(x, t)$ – қысым градиентін, сонымен қатар сыртқы күштерін $\vec{f}(x)$ және токтарын $\text{rot} \vec{j}(x)$ табу керек. Белгісіздерді анықтау үшін тура есебін құрайтын шарттарымен бірге, артықша анықталған шарт қосылады.

Әдебиеттер тізімі – 9.

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

Akischev G. **Approximation of classes of functions Besov classes by polynomials on the generalized Haar's system** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 23 – 32.

In this article the symmetrical space of functions of many variables and Nikol'skii, Besov classes in this space are considered. Estimates from above for approximation of functions from Besov classes by partial sums of Fourier series with respect to multiple generalized Haar system are obtained. Order sharp estimates for approximation of Nikol'skii classes in the norm of Marcinkiewicz space are established.

References – 13.

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

Ақышев Г. **Бесов класының функцияларын жалпыланған Хаар жүйесі бойынша көпмүшелермен жуықтау** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 23 – 32.

Мақалада көп айнымалы функциялардың симметриялық кеңістігі және осы кеңістікте Никольский және Бесов кластары қарастырылған. Бесов класының функцияларын еселі жалпыланған Хаар жүйесі бойынша Фурье қосындыларымен жуықтауы жоғарыдан бағаланған. Марцинкевич кеңістігінде Никольский класының функцияларын жуықтаудың дәл реті табылған.

Әдебиеттер тізімі – 13.

УДК: 517

2000 MSC: 74H10

Alexeyeva L.A. **The Differential algebra of biquaternions. Lorentz transformations of be-wave equations** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 33 – 41.

The functional space of biquaternions is considered on Minkovskiy space. Here the scalar-vector biquaternions representation is used which was offered else Hamilton for quaternions. It is very demonstrative and is strangely adapted for writing the physical values and equations. The linear and quadratic equations on this space are considered and their solutions are constructed.

Biquaternional wave (*bi-wave*) equations and their solutions are considered. Invariance of the equations with respect to Lorentz transformations group is stated.

References – 9.

УДК: 517

2000 MSC: 74H10

Алексеева Л.А. **Бикватерниондардың дифференциалдық алгебрасы. Битолқын теңдеулерінің Лоренц түрлендірулері** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 33 – 41.

Минковский кеңістігіндегі бикватерниондар функционалдық кеңістігі қаралады. Бұл жерде кватерниондарға Гамильтон ұсынған бикватерниондардың скаляр-вектор жазылуы пайдаланылады, олар физикалық шамалар мен теңдеулерді сипаттауға лайықты. Бикватерниондар кеңістігіндегі сызықтық және квадраттық теңдеулер қарастырылған және олардың шешімдері құрылған.

Бикватерниондық толқын (битолқын) теңдеулері және олардың жалпылама шешімдері қарастырылған. Теңдеулердің Лоренц түрлендірулер тобына қатысты инварианттылығы зерттелген.

Әдебиеттер тізімі – 9.

УДК: 517.917

2000 MSC: 35L05,43A90

Bekbauova A.U., Kenzhebayev K.K., Sartabanov G.A. **Multiperiodical solution of quasilinear hyperbolic system for differential equations in partial derivative** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 42 – 46.

In the paper sufficient conditions of existence of multiperiodical solution for quasilinear hyperbolic systems are obtained.

References – 2.

УДК: 517.917

2000 MSC: 35L05,43A90

Бекбауова А.У., Кенжебаев К.К., Сартабанов Ж.А. **Квазисызықты гиперболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің көп периодты шешімдері** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 42 – 46.

Мақалада квазисызықты гиперболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің көп периодты шешімдерінің бар болуының қажетті шарты табылған.

Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 519.711.3

2000 MSC: 34A45

Zhunussova L.Kh. **Optimization of the bilinear biological model with retarded argument and three control functions** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 47 – 51.

In the paper optimization problem for the biological model with retarded argument and three control functions is solved.

References – 5.

УДК: 519.711.3

2000 MSC: 34A45

Жүнүсова Л.Х. **Кешікпелі аргументті үш басқару функциясы бар бисызықты биологиялық үлгіні оңтайландыру** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 47 – 51.

Бұл жұмыста үш басқару функциясы бар биологиялық жүйенің кешікпелі аргументін ескеретін тиімділік есебі шығарылған.

Әдебиеттер тізімі – 5.

УДК: 519.624, 517.956

2000 MSC: 34B37

Kadirbayeva Zh.M. **On convergence an algorithm of finding approximated solution of semi-periodical boundary value problem for the system of loaded hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 52 – 59.

The algorithm of finding approximated solution of semi-periodical boundary value problem for the system of loaded hyperbolic equations is proposed. The sufficient conditions of algorithm's convergence and correct solvability of considered problem are established.

References – 8.

УДК: 519.624, 517.956

2000 MSC: 34B37

Қадырбаева Ж.М. **Жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің жуық шешімін табудың бір алгоритмінің жинақтылығы туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 52 – 59.

Жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің жуық шешімін табудың алгоритмі ұсынылады. Қарастырылып отырған есептің корректі шешілімділігінің және алгоритмінің жинақтылығының жеткілікті шарттары тағайындалады.

Әдебиеттер тізімі – 8.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Karimova L.M. **Methods of mathematical morphology in investigation of solar photosphere background magnetic field** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 60 – 69.

The aim of the paper is quantitative description of geometry and topology of magnetic field of the Sun by means of Minkowski functionals: Euler characteristics and perimeter of a set of excursions over threshold level. In the paper methods of mathematical morphology are applied to analyze fragments of magnetograms of background parts of total disc of the Sun. Obtained results demonstrate that Euler characteristics and total perimeter are stable with time and do not correspond to alternating random fields of Gauss type.

References – 38.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Карімова Л.М. **Күннің фотосфералық магниттік өрістерін талдаудағы математикалық морфология әдістері** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 60 – 69.

Жұмыстың мақсаты күннің магниттік өрісінің геометриясы мен топологиясын Минковский функционалдары: Эйлер характеристикалары мен берілген деңгейден асатын өріс лақтыруларының жиыны үшін периметрі – терминінде сандық сипаттауы болып табылады. Жұмыста күннің толық дискісінің магнитограммаларының фонының үзінділерін талдау үшін математикалық морфология әдістері қолданылады. Алынған нәтижелер Эйлер характеристикалары мен қосынды периметрдің уақыт бойынша орнықтылығын және Гаусс тектес ауыспалы кездейсоқ өрістерге сәйкес келмейтінін көрсетті.

Әдебиеттер тізімі – 38.

УДК: 534.1

2000 MSC: 42A10

Martynov N.I., Ramazanova M.A., Suimenbaeva Zh.C., Fedorov I.O. **Results of numerical modelling of fluctuations of a seismic pendulum** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 70 – 82.

Numerical modeling of fluctuations of the seismic pendulum is spent its results have allowed to explain pike-shaped and bay-form behavior of its corner of a twisting in preparation of the future earthquake. The synthetic bays corresponding to real records of "Alem" devices are simulated.

References – 11.

УДК: 534.1

2000 MSC: 42A10

Мартынов Н.И., Рамазанова М.А., Сүйменбаева Ж.С., Федоров И.О. **Сейсмикалық маятниктің тербелістерінің сандық үлгілеуінің нәтижелері** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 70 – 82.

Сейсмикалық маятник тербелістерін сандық үлгілеуі жүргізілді. Оның нәтижелері келешек жер сілкіну дайындалу кезеңінде сейсмикалық маятниктің бұралу бұрышының найзаша және шығанақ тәрізді мінез-құлығын түсіндіруге мүмкіндік береді. "Алем" құралдарының нақты жазуларына сәйкес келетін синтетикалық шығанақтар үлгіленген.

Әдебиеттер тізімі – 11.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34A45

Temesheva S.M. **On a convergence of the algorithm of parametrization method** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 83 – 92.

Two parametrical family of algorithms of parametrization method is offered for solving nonlinear two-points boundary value problem of ordinary differential equations' systems. The sufficient conditions of isolated solution of considered problem are established in the terms of right hand side's function of differential equation and boundary conditions.

References – 12.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34A45

Темешева С.М. **Параметрлеу әдісінің бір алгоритмінің жинақтылығы жайында** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 83 – 92.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бейсызық екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін параметрлеу әдісінің алгоритмдерінің екі параметрлі әулеті ұсынылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы функция және шекаралық шарт терминдерінде қарастырылып отырған есептің оқшауланған шешімінің бар болуының және алгоритмдердің жинақтылығының жеткілікті шарттары тағайындалды.

Әдебиеттер тізімі – 12.

УДК: 517.95

2000 MSC: 34K06, 34K10, 45J05

Torebek B.T., Turmetov B.Kh. **On the solvability of some problems for the Laplace equation** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 93 – 103.

In this paper we study the properties of some integro-differential operators in the class of harmonic functions. As an application of these operators operator boundary value problems in the unit ball are considered.

References – 12.

УДК: 517.95

2000 MSC: 34K06, 34K10, 45J05

Төребек Б.Т., Түрметов Б.Х. **Лаплас теңдеуі үшін кейбір есептердің шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 93 – 103.

Бұл жұмыста гармониялық функциялар класында кейбір интегро-дифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелген. Осы операторларды пайдалануымен бірлік шардағы операторлық шеттік есептер қарастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 12.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A10

Falaleev L.P. **On the summation of Fourier coefficients** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 1 (35). P. 104 – 109.

In the paper the results on summation of Fourier coefficients with respect to trigonometric system of functions from Sobolev space by Cesaro and general Poisson methods are given.

References – 12.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A10

Фалалеев Л.П. **Фурье коэффициенттерін қосу туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 1 (35). Б. 104 – 109.

Бұл жұмыста Чезаро әдістері және Пуассон жалпы әдістері арқылы Соболев кеңістігіндегі функциялардың тригонометриялық жүйесі бойынша Фурье коэффициенттерін қосу нәтижелері келтірілді.

Әдебиеттер тізімі – 12.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту. Необходимо указать организацию, от которой направлена статья, адрес и e-mail (при наличии).
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами.
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: **Ф.И.О.** (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 1 (35) 2010

Главный редактор:

М.Т.Дженалиев

Заместители главного редактора:

Д.Б.Базарханов, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев, В.Г.Войнов,
Н.Т.Данаев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304

тел.: 8(727)2-72-01-66, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 05.04.2010г.

Тираж 300 экз. Объем 117 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы

ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81

Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50

e-mail: print_express@bk.ru