ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2004 том 4 № 1 (11)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 4 № 1 (11) 2004

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 4, № 1 (11), 2004

Доклады международной конференции "Дифференциальные уравнения" (Алматы, 24 — 26 сентября 2003г.)

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 5 — 11*

УДК 517.956.3

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. Асанова

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Рассматривается нелокальная краевая задача для системы квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка. Установлены коэффициентные условия существования единственного классического решения исследуемой задачи и предложен алгоритм его нахождения.

Нелокальные краевые задачи для линейных и нелинейных гиперболических уравнений служат объектом изучения многих авторов, начиная с 60-х годов прошлого столетия [1-10]. В связи с многочисленными применениями наибольшее внимание привлекли полупериодические и периодические краевые задачи [1-3, 6-10]. Для них различными методами были получены условия существования и единственности решения. Вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений в общей постановке до настоящего времени остаются актуальными. В [11] для исследования краевой задачи с данными на характеристиках для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными был предложен метод введения функциональных параметров. Он является модификацией метода параметризации [12], разработанного для решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнений с частными производными. На основе этого метода были установлены коэффициентные необходимые и достаточные условия корректной однозначной разрешимости задачи линейной нелокальной краевой задачи [13,14]. В настоящей работе результаты, полученные для линейных систем гиперболических уравнений, применяются для исследования существования и единственности классического решения нелокальной краевой задачи для квазилинейной системы гиперболических уравнений.

В $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается краевая задача для системы квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} +$$

Keywords: *system of quasi-linear hyperbolic equations, nonlocal boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70

$$+S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t}+S_0(x)u(T,x)=\varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0)=\psi(t), \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

где $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n-вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $[0,\omega]$, соответственно, и n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $||u(t,x)||=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(t,x)|$, $||A(t,x)||=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(t,x)|$. Условия на вектор-функцию f будут приведены ниже.
Обозначим $C(\bar{\Omega},R^n)$ — пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $u:\bar{\Omega}\to R^n$ с нормой $||u||_0=\max\limits_{(t,x)\in\bar{\Omega}}||u(t,x)||$. Функция $u(t,x)\in C(\bar{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\bar{\Omega},R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\bar{\Omega},R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R^n)$ называется *классическим решением задачи (1)–(3)*, если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x)\in\bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Рассмотрим предварительно следующую краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,x)v+F(t,x), \qquad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$P_2(x)v(0,x)+S_2(x)v(T,x)=\Phi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

где $F(t,x)\in C(\bar{\Omega},R^n)$, $\Phi(x)\in C([0,\omega],R^n)$.

При фиксированных $x\in[0,\omega]$ задача (4), (5) является линейной двухточечной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений. При изменении переменной x на $[0,\omega]$ получим семейство двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Непрерывная функция $v:\bar{\Omega}\to R^n$, имеющая на $\bar{\Omega}$ производную по t называется *решением краевой задачи (4), (5)*, если она удовлетворяет системе (4) и условию (5) при всех $(t,x)\in\bar{\Omega}$.

Определение 1. *Задача (4), (5) называется корректно разрешимой, если для любых $F(t,x)$, $\Phi(x)$ она имеет единственное решение $v(t,x)\in C(\bar{\Omega},R^n)$ и для него справедлива оценка*

$$||v(\cdot,x)||_1=\max_{t\in[0,T]}||v(t,x)||\le K(x)\max\Big(||F(\cdot,x)||_1,||\Phi(x)||\Big), \tag{6}$$

где $K(x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $F(t,x)$, $\Phi(x)$.

В работе [15] семейство двухточечных краевых задач (4), (5) исследовалось методом параметризации и был установлен критерий корректной разрешимости исследуемых задач в терминах исходных данных. Чтобы сформулировать это утверждение, введем следующие обозначения

$$D_{\nu r}(h,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1,x)d\tau_1+...+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1,x)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$Q_\nu(h,x)=\left|\begin{array}{cccccc} P_2(x)h & 0 & 0 & \dots & 0 & S_2(x)[I+D_{\nu N}(h,x)]h\\ I+D_{\nu 1}(h,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & I+D_{\nu 2}(h,x) & -I & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu N-1}(h,x) & -I \end{array}\right|,$$

где $h=T/N$, $N\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{N}$, $r=\overline{1,N}$.

Теорема 1. *Краевая задача (4), (5) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых* $h > 0 : Nh = T$, $\nu \in \mathbb{N}$ *для каждого* $x \in [0, \omega]$ *матрица* $Q_\nu(h, x) : R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима и выполняются неравенства*

a) $||[Q_\nu(h,x)]^{-1}|| \leq \gamma_\nu(h,x)$,

b) $q(h,x,\nu) = \gamma_\nu(h,x) \cdot \max(1, h||S_2(x)||)\left[e^{\alpha(x)h} - \sum\limits_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right] \leq \beta < 1$,

где $\alpha(x) = ||A(\cdot, x)||_1, \quad \beta - const.$

Из теоремы 1 следует, что для единственного решения $v^*(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ краевой задачи (4), (5) справедлива оценка

$$||v^*(\cdot,x)||_1 \leq [K_1(x,h,\nu) + K_2(x,h,\nu)] \max\Big(||F(\cdot,x)||_1, ||\Phi(x)||\Big), \tag{7}$$

где

$$K_1(x,h,\nu) = \left\{[e^{\alpha(x)h} - 1]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1 - q_\nu(h,x)} \max(1, h||S_2(x)||)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} + 1\right\} K_0(x,h,\nu),$$

$$K_2(x,h,\nu) = \frac{\gamma_\nu(g,x)}{1 - q_\nu(h,x)} \max(1, h||S_2(x)||)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} \cdot K_0(x,h,\nu) +$$

$$+ h\gamma_\nu(h,x) \max\left\{1 + h||S_2(x)|| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$K_0(x,h,\nu) = [e^{\alpha(x)h} - 1]\gamma_\nu(h,x) \max\left\{1 + h\sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\} h + he^{\alpha(x)h}.$$

Функция $K(x,h,\nu) = K_1(x,h,\nu) + K_2(x,h,\nu)$ в неравенстве (7) ограничена на $[0,\omega]$ при фиксированных $h > 0$, $\nu = 1, 2, ...$ и не зависит от функций $F(t,x)$, $\Phi(x)$. Поэтому в условиях теоремы 1 при выбранных h, ν задача (4), (5) будет корректно разрешимой с функцией $K(x) = K(x,h,\nu)$.

Введем множество $G(\psi, \dot{\psi}, \rho) = \Big\{(t,x,u,w) : \ (t,x) \in \bar{\Omega}, \quad ||u - \psi(t)|| < \rho, ||w - \dot{\psi}(t)|| < \rho\Big\}$.

Условие Lip. Функция $f(t,x,u,w)$ непрерывна относительно $(t,x) \in \bar{\Omega}$ при фиксированных u, w и на множестве $G(\psi, \dot{\psi}, \rho)$ и удовлетворяет условию Липшица относительно u, w

$$||f(t,x,u,w) - f(t,x,\bar{u},\bar{w})|| \leq L_1(t,x) \cdot ||u - \bar{u}|| + L_2(t,x) \cdot ||w - \bar{w}||,$$

где $L_i(t,x) \geq 0$ — непрерывные на $\bar{\Omega}$ функции, $i = 1, 2$.

Пусть $F^0(t,x) = f(t,x,\psi(t),\dot{\psi}(t))$,

$\Phi^0(x) = \varphi(x) - P_1(x)\dot{\psi}(0) - P_0(x)\psi(0) - S_1(x)\dot{\psi}(T) - S_0(x)\psi(T)$,

$L_0(x) = \max\Big(\max\limits_{t\in[0,T]} L_1(t,x) + \max\limits_{t\in[0,T]} L_2(t,x), ||P_1(x)|| + ||P_0(x)|| + ||S_1(x)|| + ||S_0(x)||\Big)$,

$\rho_2(x) = \max\Big(K(x), \alpha(x)K(x) + 1\Big) \max\Big\{||F^0(t,x)||_1, ||\Phi^0(x)||\Big\} \exp\Big\{x \max\limits_{x\in[0,\omega]} \rho_1(x)\Big\}$,

$\rho_1(x) = \max\Big(K(x), \alpha(x)K(x) + 1\Big) L_0(x), \qquad \rho_0(x) = \int\limits_0^x \rho_2(\xi) d\xi$,

$S_1(\psi,\rho) = \Big\{u \in R^n, \quad ||u - \psi(t)|| < \rho\Big\}, \quad S_2(\dot{\psi},\rho) = \Big\{w \in R^n, \quad ||||w - \dot{\psi}(t)|| < \rho\Big\}$.

Введем новые неизвестные функции $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ и задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + f(t,x,u(t,x),w(t,x)), \tag{8}$$

$$P_2(x)v(0,x) + S_2(x)v(T,x) = \varphi(x) -$$

$$-P_1(x)w(0,x) - P_0(x)u(0,x) - S_1(x)w(T,x) - S_0(x)u(T,x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{9}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad w(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi. \tag{10}$$

Условие (3) учтено в соотношениях (10).

Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ называется *решением задачи (8)–(10)*, если функция $v(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ имеет на Ω непрерывную производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству двухточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8), (9), где функции $u(t,x)$, $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (10).

Теорема 2. *Пусть 1) функция $f(t,x,u,w)$ удовлетворяет условию Lip; 2) при фиксированных $u \in S_1(\psi,\rho)$, $w \in S_2(\dot{\psi},\rho)$ краевая задача (8), (9) корректно разрешима с функцией $K(x)$; 3) $\max\limits_{x\in[0,\omega]} \rho_0(x) \le \rho$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)$, принадлежащее $S_1(\psi,\rho)$.*

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную задаче (1)–(3) задачу (8)–(10). Ее решение которой находим методом последовательных приближений. Нулевое приближение по $u(t,x)$, $w(t,x)$ берем в виде $u^0(t,x) = \psi(t)$, $w^0(t,x) = \dot{\psi}(t)$. Тогда $v^{(0)}(t,x)$ находим, как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F^0(t,x), \tag{11}$$

$$P_2(x)v(0,x) + S_2(x)v(T,x) = \Phi^0(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{12}$$

Задача (11), (12) по условию 2) корректно разрешима. Поэтому она имеет единственное решение $v^{(0)}(t,x)$ и справедливы оценки

$$||v^{(0)}(\cdot,x)||_1 \le K(x)\max(||F^0(\cdot,x)||_1, ||\Phi^0(x)||),$$

$$\left|\left|\frac{\partial v^{(0)}(\cdot,x)}{\partial t}\right|\right|_1 \le [\alpha(x)K(x)+1]\max(||F^0(\cdot,x)||_1, |||\Phi^0(x)||).$$

Используя затем соотношения (10), находим $u^{(0)}(t,x)$, $w^{(0)}(t,x)$:

$$u^{(0)}(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^x v^{(0)}(t,\xi)d\xi, \qquad w^{(0)}(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$

для которых справедливы оценки

$$||u^{(0)}(\cdot,x) - \psi(\cdot)||_1 \le \int\limits_0^x ||v^{(0)}(\cdot,\xi)||_1 d\xi, \qquad ||w^{(0)}(\cdot,x) - \dot{\psi}(\cdot)||_1 \le \int\limits_0^x \left|\left|\frac{\partial v^{(0)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right|\right|_1 d\xi.$$

Тогда

$$\max(||u^{(0)}(\cdot,x) - \psi(\cdot)||_1, ||w^{(0)}(\cdot,x) - \dot{\psi}(\cdot)||_1) \le \int\limits_0^x \max\left(||v^{(0)}(\cdot,\xi)||_1, \left|\left|\frac{\partial v^{(0)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right|\right|_1\right)d\xi \le$$

$$\leq \int_0^x \max(K(\xi), \alpha(\xi)K(\xi)+1)\max(||F^0(\cdot,\xi)||_1, ||\Phi^0(\xi)||)d\xi = \rho_3(x) < \rho_0(x).$$

Для k-го приближения получим

$$\frac{\partial v^{(k)}}{\partial t} = A(t,x)v^{(k)} + f(t,x,u^{(k-1)}(t,x), w^{(k-1)}(t,x)), \tag{13}$$

$$P_2(x)v^{(k)}(0,x) + S_2(x)v^{(k)}(T,x) = \varphi(x) - P_1(x)w^{(k-1)}(0,x) -$$
$$-P_0(x)u^{(k-1)}(0,x) - S_1(x)w^{(k-1)}(T,x) - S_0(x)w^{(k-1)}(T,x), \quad x\in[0,\omega]. \tag{14}$$

При выполнении условий а), б) Теоремы 1 задача (13), (14) имеет единственное решение $v^{(k)}(t,x)$ и для него справедливы оценки

$$||v^{(k)}(\cdot,x)||_1 \leq K(x)\max(||F^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||\Phi^{(k-1)}(x)||),$$

$$\left|\left|\frac{\partial v^{(k)}(\cdot,x)}{\partial t}\right|\right|_1 \leq [\alpha(x)K(x)+1]\max(||F^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||\Phi^{(k-1)}(x)||),$$

где $F^{(k-1)}(t,x) = f(t,x,u^{(k-1)}(t,x), w^{(k-1)}(t,x))$,
$\Phi^{(k-1)}(x) = \varphi(x) - P_1(x)w^{(k-1)}(0,x) - P_0(x)u^{(k-1)}(0,x) - S_1(x)w^{(k-1)}(0,x) - S_0(x)u^{(k-1)}(T,x)$.
Используя снова соотношения (10), находим $u^{(k)}(t,x)$, $w^{(k)}(t,x)$

$$u^{(k)}(t,x) = \psi(t) + \int_0^x v^{(k)}(t,\xi)d\xi, \qquad w^{(k)}(t,x) = \dot\psi(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \tag{15}$$

для которых справедливы оценки

$$||u^{(k)}(\cdot,x) - \psi(\cdot)||_1 \leq \int_0^x ||v^{(k)}(\cdot,\xi)||_1 d\xi, \qquad ||w^{(k)}(\cdot,x) - \dot\psi(\cdot)||_1 \leq \int_0^x \left|\left|\frac{\partial v^{(k)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right|\right|_1 d\xi.$$

Отсюда получаем

$$\max\Big(||u^{(k)}(\cdot,x)-\psi(\cdot)||_1, ||w^{(k)}(\cdot,x)-\dot\psi(\cdot)||_1\Big) \leq \int_0^x \max\left(||v^{(k)}(\cdot,\xi)||_1, \left|\left|\frac{\partial v^{(k)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right|\right|_1 d\xi\right) \leq$$

$$\leq \int_0^x \max\Big[K(\xi), \alpha(\xi)K(\xi)+1\Big]\max\Big(||F^{(k-1)}(\cdot,\xi)||_1, ||\Phi^{(k-1)}(\xi)||\Big)d\xi < \rho,$$

т.е. $u^{(k)} \in S_1(\psi(t),\rho)$, $w^{(k)} \in S_2(\dot\psi(t),\rho)$.

Обозначим $\Delta v^{(k)}(t,x) = v^{(k+1)}(t,x) - v^{(k)}(t,x)$, $\quad \Delta u^{(k)}(t,x) = u^{(k+1)}(t,x) - u^{(k)}(t,x)$, $\Delta w^{(k)}(t,x) = w^{(k+1)}(t,x) - w^{(k)}(t,x)$ На основе приведенных выше оценок для $\Delta v^{(k)}(t,x)$, $\Delta u^{(k)}(t,x)$, $\Delta w^{(k)}(t,x)$ получим

$$||\Delta v^{(k)}(\cdot,x)||_1 \leq K(x)\cdot\max\Big\{||F^{(k)}(\cdot,x) - F^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||\Phi^{(k)}(x) - \Phi^{(k-1)}(x)||\Big\},$$

$$||F^{(k)}(\cdot,x) - F^{(k-1)}(\cdot,x)||_1 \leq$$
$$\leq \max_{t\in[0,T]} L_1(t,x)\cdot||u^{(k)}(\cdot,x) - u^{(k-1)}(\cdot,x)||_1 + \max_{t\in[0,T]} L_2(t,x)\cdot||w^{(k)}(\cdot,x) - w^{(k-1)}(\cdot,x)||_1 \leq$$

$$\leq \Big(\max_{t\in[0,T]} L_1(t,x) + \max_{t\in[0,T]} L_2(t,x)\Big) \max\Big(||u^{(k)}(\cdot,x) - u^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||w^{(k)}(\cdot,x) - w^{(k-1)}(\cdot,x)||_1\Big),$$

$$||\Phi^{(k)}(x) - \Phi^{(k-1)}(x)|| \leq \Big(||P_1(x)|| + ||P_0(x)|| + ||S_1(x)|| + ||S_0(x)||\Big)\times$$

$$\times \max\Big(||u^{(k)}(\cdot,x) - u^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||w^{(k)}(\cdot,x) - w^{(k-1)}(\cdot,x)||_1\Big).$$

Тогда

$$||\Delta v^{(k)}(\cdot,x)||_1 \leq K(x)L_0(x)\max\Big(||\Delta u^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||\Delta w^{(k-1)}(\cdot,x)||_1\Big), \tag{16}$$

$$\left|\left|\frac{\partial \Delta v^{(k)}(\cdot,x)}{\partial t}\right|\right|_1 \leq \Big(\alpha(x)K(x)+1\Big)L_0(x)\max\Big(||\Delta u^{(k-1)}(\cdot,x)||_1, ||\Delta w^{(k-1)}(\cdot,x)||_1\Big), \tag{17}$$

$$||\Delta u^{(k)}(\cdot,x)||_1 \leq \int\limits_0^x ||\Delta v^{(k)}(\cdot,\xi)||_1 d\xi, \qquad ||\Delta w^{(k)}(\cdot,x)||_1 \leq \int\limits_0^x \left|\left|\frac{\partial \Delta v^{(k)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right|\right|_1 d\xi.$$

Отсюда имеем

$$\max\Big(||\Delta u^{(k)}(\cdot,x)||_1, ||\Delta w^{(k)}(\cdot,x)||_1\Big) \leq \int\limits_0^x \rho_1(\xi)\max\Big(||\Delta u^{(k-1)}(\cdot,\xi)||_1, ||\Delta w^{(k-1)}(\cdot,\xi)||_1\Big)d\xi. \tag{18}$$

Так как неравенство (18) справедливо для $k = 1, 2, ...$, то, последовательно подставляя соответствующие разности в правую часть, получим

$$\max\Big(||\Delta u^{(k)}(\cdot,x)||_1, ||\Delta w^{(k)}(\cdot,x)||_1\Big) \leq \frac{1}{k!}\cdot[x \max_{x\in[0,\omega]} \rho_1(x)]^k \cdot \max_{x\in[0,\omega]} \rho_3(x).$$

Отсюда следует, что при $k \to \infty$ последовательности $u^{(k)}(t,x)$, $w^{(k)}(t,x)$ на $\bar{\Omega}$ равномерно сходятся к $u^*(t,x)$, $w^*(t,x)$. Тогда из соотношений (16), (17) вытекает, что последовательности $v^{(k)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ также равномерно сходятся на $\bar{\Omega}$ к $v^*(t,x)$, $\dfrac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}$. Это означает, что тройка функций $\{v^*(t,x), u^*(t,x), w^*(t,x)\}$ является решением задачи (8)-(10) и справедливы неравенства

$$\max\left(||v^*(\cdot,x)||_1, \left|\left|\frac{\partial v^*(\cdot,x)}{\partial t}\right|\right|_1\right) \leq \rho_2(x),$$

$$\max(||u^*(\cdot,x) - \psi(\cdot)||_1, ||w^*(\cdot,x) - \dot{\psi}(\cdot)||_1) \leq \rho_0(x) \leq \rho,$$

т.е. $u^* \in S_1(\psi,\rho)$, $w^* \in S_2(\dot{\psi},\rho)$.

Так как задачи (8)–(10) и (1)–(3) эквивалентны, то функция $u^*(t,x)$, принадлежащая $S_1(\psi,\rho)$, будет классическим решением задачи (1)–(3). Единственность решения доказывается методом от противного. Теорема 2 доказана.

В качестве иллюстрации исследуемой задачи рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу для системы гиперболических уравнений из [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \tilde{P}(t,x)u + \tilde{f}\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad u \in R^n, \tag{19}$$

$$u(t,0) = u_0(t) + \tilde{v}(0), \qquad u(0,x) = u_0(0) + \tilde{v}(x), \tag{20}$$

$$\tilde{A}u(0,x) + \tilde{C}u(T,x) = \tilde{w}(x), \tag{21}$$

где $(t,x) \in \bar{\Omega}_0 = [0,T] \times [-a,a]$, матрица $\tilde{P}(t,x)$ непрерывна на $\bar{\Omega}_0$, $\tilde{A}$, $\tilde{C}$ — постоянные $(n \times n)$-матрицы, n-вектор-функция $u_0(t)$ непрерывно дифференцируема, вектор-функция $\tilde{v}(x)$ неизвестна и подлежит определению.

Для применения полученных в статье результатов введем новую функцию $\widetilde{u}(t,x)$ и в задаче (19)–(21) сделаем замену $\widetilde{u}(t,x) = u(t,x) - \tilde{v}(x)$. Получим

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = \tilde{P}(t,x)\widetilde{u} + \tilde{P}(t,x)v(x) + \tilde{f}\left(t, x, \widetilde{u} + v, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\right), \tag{22}$$

$$\widetilde{u}(t,0) = u_0(t), \qquad \widetilde{u}(0,x) = u_0(0), \tag{23}$$

$$(\tilde{A} + \tilde{C})v(x) = \tilde{w}(x) - Au_0(0) - \tilde{C}u(T,x). \tag{24}$$

Краевая задача (22), (23) при фиксированном $\tilde{v}(x)$ является задачей Гурса для системы квазилинейных гиперболических уравнений. Неизвестная функция $\tilde{v}(x)$ единственным образом определяется из соотношения (24) при обратимости матрицы $\tilde{A} + \tilde{C}$. Если предположить, что функция $\tilde{f}$ удовлетворяет условию Lip по последним двум аргументам, матрица $\tilde{A} + \tilde{C}$ — обратима, то задача (22)–(24) имеет единственное классическое решение. При выполнении указанных условий краевая задача (19)–(21) будет однозначно разрешима по теореме 2. Данный результат дополняет выводы работ [5], [8] и позволяет в терминах коэффициентов сформулировать легко проверяемые условия существования единственного классического решения задачи (19)–(21).

Цитированная литература

1. **Cesari L.** // Труды межд. симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев, 1961. С. 440–457.

2. **Aziz A. K.** // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17, №3. P. 557–566.

3. **Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al.** Partial differential equations: time - periodic solutions. Boston, London, 1982.

4. **Пташник Б. И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.

5. **Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б.** // Укр. матем. журнал. 1990. Т. 42, №12. С.1657–1663.

6. **Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.** Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев, 1991.

7. **Самойленко А. М., Ткач Б. П.** Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев, 1992.

8. **Кигурадзе Т. И.** // Доклады РАН. 1993. Т. 328, №2. С. 187–190.

9. **Кигурадзе Т. И.** // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №2. С. 238–245.

10. **Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.** Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М., 1998. Т. 222. С. 1–191.

11. **Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.** // Известия МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С. 23 – 29.

12. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

13. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2002. №3. С. 20–26.

14. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Доклады РАН. 2003. Т. 391, №3. С. 295–297.

15. **Асанова А. Т.** // Матем журнал. 2002. Т. 2, №2. С. 25–31.

Поступила в редакцию 01.03.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 12 — 16*

УДК 519.624

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А. У. Ахметова

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе пр. А.Молдагуловой, 34 ahmetova1974@list.ru

Для нелинейной периодической системы, построенной по принципу обратной связи, найдено непрерывное стабилизирующее управление. Получены легко и эффективно проверяемые условия стабильности.

Управляемые колебательные системы периодического типа распространены в различных областях механики, техники, радиотехники (см., например, [1–3]). Решение задачи стабилизации колебаний является важным этапом исследования таких систем. Актуальным является изучение вопросов стабилизируемости колебаний и построения стабилизирующих управлений для систем со многими степенями свободы.

В настоящей работе указанные вопросы изучены в случае управляемых колебаний, описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y, v\right), \tag{1}$$

где $(t, y, v) \in R \times R^n \times R^n, f\left(t, y, v\right) \in C_{tyv}^{(0,1,1)}\left(R \times R^n \times R^r\right)$ и $f\left(t, y, v\right) - \omega$-периодическая по t функция.

Пусть ω-периодическая вектор-функция $y = y_P\left(t\right) \in C^1$ является программным (невозмущённым) движением системы (1), соответствующим некоторому программному управлению $v = v_P\left(t\right),$ где $v_P\left(t\right) - \omega$-периодическая вектор-функция класса C.

Решим задачу непрерывной стабилизации программного движения системы (1) с помощью управлений, которые построены по принципу линейной обратной связи (см.[4]).

Используя величины $x = y - y_P\left(t\right), u = v - v_P\left(t\right),$ запишем для (1) систему в отклонениях

$$\frac{dx}{dt} = g\left(t, x, u\right), \tag{2}$$

где $g\left(t, x, u\right) = f\left(t, x + y_P\left(t\right), u + v_P\left(t\right)\right) - f\left(t, y_P\left(t\right), v_p\left(t\right)\right).$

Keywords: *periodic control system, differential equation, asymptotic stability, stabilizer*
2000 Mathematics Subject Classification: 49J20, 49K20

Задача состоит в отыскании такого закона автоматического управления объектом, при котором программное движение оказывается асимптотически устойчивым. Иными словами, в системе (2) следует сделать асимптотически устойчивым решение $x = 0$ выбором управления

$$u = C\,(t)\,x, \tag{3}$$

где $C\,(t)$ — непрерывная ω-периодическая $(r \times n)$-матрица.

Выделяя в (2) члены, линейные относительно x, u, получим

$$\frac{dx}{dt} = A\,(t)\,x + Q\,(t)\,u + G\,(t, x, u)\,,$$

где $A\,(t)\,, Q\,(t) - \omega$-периодические матрицы соответствующих размеров.

Нелинейная часть $G\,(t, x, u)$ такова, что функция

$$\frac{\|G\,(t, x, u)\|}{\|x\| + \|u\|} \to 0$$

равномерно относительно $t \in R$ при $\|x\| + \|u\| \to 0$.

Решение задачи стабилизации системы (2) согласно [5, с.83] сводится к решению задачи стабилизации системы линейного приближения

$$\frac{dx}{dt} = A\,(t)\,x + Q\,(t)\,u. \tag{4}$$

Пусть система (4) приведена к виду

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon B)\,x + Q\,(t)\,u, \tag{5}$$

где $A_0, B - \omega$-периодические матрицы, ε — скалярный параметр.

Запишем систему (5), замкнутую управлением (3),

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon B + QC)\,x. \tag{6}$$

Пусть нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица $\Phi\,(t)$ однородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_0\,(t)\,\varphi$$

ω-периодическая, т.е. $\Phi\,(t + \omega) = \Phi\,(t)\,.$ По формуле

$$x = \Phi\,(t)\,z \tag{7}$$

сделаем замену в системе (6). Тогда для векторной величины z получим систему

$$\frac{dz}{dt} = (\varepsilon P + RC\Phi)\,z, \tag{8}$$

где $P = \Phi^{-1}B\Phi, R = \Phi^{-1}Q$.

Примем следующие обозначения

$$M = RR^T,\ a = \max_t \left\| P\,(t) - M\,(t)\,\overline{M}^{-1}\overline{P} \right\|,\ \mu\ = \max_t \left\| M\,(t)\,\overline{M}^{-1} \right\|,$$

где $t \in [0, \omega], (\cdot)^T$ — операция транспонирования матриц, черта сверху обозначает усреднение по $t \in [0, \omega], \|\cdot\|$ — кубическая, либо октаэдрическая норма векторов матриц [6, с.21]; очевидно, что $a \geq 0, \mu \geq 1$.

Л е м м а 1. *Пусть матрица обратной связи в (8) выбрана так, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &\sigma \equiv \left\| E + \omega \overline{N} \right\| < 1, \\ &\max_{0 \le t \le \omega} \left\| N\left(t\right) \right\| < \frac{2}{\omega\left(1+\sqrt{1+2m}\right)}, \end{aligned} \tag{9}$$

гдеE *— единичная матрица,* $N = \varepsilon P + RC\Phi, m = \frac{1}{1-\sigma}$.

Тогда система (5) стабилизируема управлением (3).

Для доказательства леммы достаточно сослаться на лемму [7, с.101] , согласно которой выполнение неравенств (9) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (8).

Так как (7) является преобразованием Ляпунова [6, с.154], то система (8) асимптотически устойчива.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия*

$$\det \overline{M} \neq 0, \quad \left(|\varepsilon| a + \mu\ \lambda\right) \omega < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda\omega}}}, \tag{10}$$

гдеλ *— вещественный параметр,* $0 < \lambda < \lambda_0$. *Тогда выбором матрицы* C *систему (6) можно сделать асимптотически устойчивой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрицу обратной связи C в искомом управлении будем искать в виде

$$C\left(t\right) = \left[R^T\left(t\right)\alpha + \beta\left(t\right)\right]\Phi^{-1}\left(t\right), \tag{11}$$

где α — постоянная матрица, подлежащая определению, $\beta(t)$ — ω-периодическая матрица-функция, подчинённая условию

$$\int_0^{\omega} R\left(\tau\right)\beta\ \left(\tau\right)d\tau = 0. \tag{12}$$

С учётом (1) система (8) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = N\left(t\right)z, \tag{13}$$

где $N = \varepsilon P\left(t\right) + M\left(t\right)\alpha + R\left(t\right)\beta\left(t\right).$

Постоянную α выберем так, чтобы матрица (11) удовлетворяла уравнению

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \left[\varepsilon P\left(\tau\right) + R\left(\tau\ \right)C\left(\tau\right)\Phi\left(\tau\right)\right]d\tau = -\lambda E. \tag{14}$$

Тогда получим $\sigma = 1 - \omega\lambda$. Очевидно, $\sigma < 1$, если $\lambda\omega < 1$.

Подставляя (11) в (14), получим с учётом (12)

$$\overline{M}\alpha = -\left(\lambda E + \varepsilon\overline{P}\right). \tag{15}$$

Поскольку $\det \overline{M} \neq 0$, то из (15) имеем

$$\alpha = -\overline{M}^{-1}\left(\lambda E + \varepsilon\overline{P}\right). \tag{16}$$

Далее на основании (16) находим

$$C(t) = \left[-R^T(t)\overline{M}^{-1}(\lambda E + \varepsilon \overline{P}) + \beta(t)\right]\Phi^{-1}(t), \tag{17}$$

$$N(t) = \varepsilon P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\left(\lambda E + \varepsilon\ \overline{P}(t)\right) + R(t)\beta\ (t)$$

или

$$N(t) = \varepsilon\left[P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\overline{P}\right] - \lambda M(t)\overline{M}^{-1} + R(t)\beta(t). \tag{18}$$

Выполнив оценку по норме в (18), получим

$$\|N(t)\| \le |\varepsilon| a + \lambda\mu + \|R(t)\|\|\beta(t)\|.$$

Пусть λ достаточно мало, т. е. $0 < \lambda < \lambda_0$. Тогда выполнение неравенства (10) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (13) при $\beta = 0$.

Пусть $\beta(t)$ $(\beta(t) \not\equiv 0)$ — матрица, удовлетворяющая условию (12). Тогда система (13) также будет асимптотически устойчивой, если $\beta(t)$ по норме достаточно мала $\|\beta(t)\| < \rho$.

Согласно неравенству (10) величину ρ можно выразить через исходные данные системы (6) следующим образом. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dz}{dt} = K(t)z, \tag{19}$$

где $K(t) = \varepsilon\left[P(t) - M(t)\overline{M}^{-1}\overline{P}\right] - \lambda M(t)\overline{M}^{-1} + R(t)\beta(t)$.

Вследствие подчиненности матрицы $\beta(t)$ условию (12) имеем $\overline{K} = -\lambda E$. Поскольку $\|K(t)\| \le |\varepsilon| a + \lambda\mu + r\overline{\beta}$, где $r = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|R(t)\|, \tilde{\beta} = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\beta(t)\|$, то согласно лемме выполнение неравенства

$$\omega\left(|\varepsilon| a + \lambda\mu + r\tilde{\beta}\right) < \frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} \tag{20}$$

является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (19) при достаточно малых $\lambda, |\varepsilon|$.

Из (20) получаем

$$\tilde{\beta} < \frac{1}{r}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \lambda\mu\ - |\varepsilon| a\right).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Из неравенства (10) нетрудно найти оценку области* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *в которой система (6) стабилизируема при* $\beta(t) \equiv 0$.

Действительно, поскольку неравенство $\mu\lambda\omega < \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}}$ *выполняется при* $0 < \lambda < \dfrac{2}{\omega\mu(\mu+2)}$, *то при этих значениях* λ *имеет смысл неравенство* $a\omega|\varepsilon| < \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \mu\ \lambda\omega$.

Отсюда находим

$$|\varepsilon| < \frac{1}{a\omega}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{\lambda\omega}}} - \mu\lambda\omega\right) = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{2}{\lambda\omega + \sqrt{\lambda^2\omega^2 + 2\lambda\omega}} - \mu\right) \equiv \varepsilon_0(\lambda).$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда решение $y = y_p(t)$ системы (1) выбором управления (3) всегда можно сделать асимптотически устойчивым.*

Для доказательства следствия достаточно сослаться на лемму и теорему Ляпунова [6, с.294].

Очевидно, программное движение $y = y_p(t)$ стабилизируется управлением

$$v - v_P(t) = \left[-R^T(t)\,\overline{M}^{-1}\left(\lambda E + \varepsilon\overline{P}\right) + \beta(t)\right]\Phi^{-1}(t)\left(y - y_P(t)\right).$$

В ходе доказательства теоремы дан конструктивный метод построения управления $v - v_P(t)$, при этом коэффициенты усиления C_{ij} $(i = 1, ..., r;\ j = 1, ..., n)$ определяются в замкнутой форме через элементы матриц A_0, B и Q.

С помощью разработанного метода можно строить семейства стабилизирующих управлений для произвольных программных движений. Данный метод ориентирован на ситуацию, которая встречается почти всегда, когда конструктивные параметры объекта управления известны неточно.

Замечание 2. *Свобода выбора параметра λ и матрицы $\beta(t)$ может быть использована при решении задач практической реализации полученных законов управления, например, при получении оценок нормы управления и нормы фазового вектора замкнутой системы, при вычислении величины длительности переходного процесса, скорости затухания и др.*

Цитированная литература

1. **Зубов В. И.** Аналитическая динамика гироскопических систем. М., 1970.

2. **Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М.** Теория колебаний в радиотехнике. М., Наука, 1984, 320 с.

3. **Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.** Управление колебаниями. М., 1980.

4. **Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.** Комплексное исследование периодических систем дифференциальных уравнений. (Препр./ НАН Украины. Ин-т математики; 95.1).Киев, 1995.

5. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М., 1975.

6. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

7. **Ахметова А.У.** // Известия НАН РК. 2003. №5. С.101–105.

Поступила в редакцию 27.02.2004 г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 17 — 20*

УДК 517.5

О НАИЛУЧШИХ N-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ВСПЛЕСКАМИ В СМЕШАННОЙ НОРМЕ

Д. Б. Базарханов

Институт математики МО и Н РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

Здесь предложена кратная система всплесков, установлены ее безусловная базисность в лебеговых пространствах со смешанной нормой и существование элемента наилучшего N-членного приближения по ней в этих пространствах.

1. Введение. В этой заметке мы предлагаем безусловный базис – кратную систему всплесков $\Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}}$ (определение см в разд. 2) – для пространства $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ при $\mathbf{p} \in (1,\infty)^d$ и устанавливаем существование элемента наилучшего N-членного приближения (определение см. в разд. 4) по ней.

2. Определение системы всплесков. Сначала введем необходимые определения и обозначения. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел, соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d-$ d-мерное вещественное евклидово пространство.

Пусть $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty]-$ пространство всех измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, суммируемых в p-й степени (при $p=\infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{R}$, со стандартной нормой $\| f \mid L_p\|$.

Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ положим $f_{k,j}\ (x) := 2^{k/2} f(2^k x - j)$ $(k, j \in \mathbb{Z})$.

Далее, пусть $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in [1,\infty]^d-$ пространство всех измеримых функций $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ с конечной смешанной (векторной) нормой $\| f \mid L_{\mathbf{p}}\| = \| (\cdots \| f \mid L_{p_1}\| \cdots) \mid L_{p_d}\|$ (здесь норма $\| \cdot \mid L_{p_j}\|$ применяется по j-й переменной). Если $p_1 = \cdots = p_d =: p$, то положим $L_p(\mathbb{R}^d) := L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Напомним определение *кратномасштабного анализа* (КМА).

Последовательность $\mathcal{V} = \{ V_k \}_{k\in\mathbb{Z}}$ подпространств пространства $L_2(\mathbb{R})$ называется КМА, если

i) $V_k \subset V_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$;

ii) $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k} = L_2(\mathbb{R})$;

Keywords: *best N-term approximation, wavelet, mixed norm*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

iii) $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} V_k = \{\ 0\ \}$;

iv) $f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(2x) \in V_{k+1},\ k \in \mathbb{Z}$;

v) существует функция $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что система $\{\ \phi(x-j)\ \}_{j\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Функция ϕ называется *масштабной функцией* КМА $\mathcal{V}$.

Согласно теории всплесков (см., например, [1, гл.7]) существует функция φ, называемая *всплеском, порожденным* КМА $\mathcal{V}$, такая, что система $\{\ \varphi_{k,j}\ \}_{j\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $W_k = V_{k+1} \ominus V_k$, ортогональном дополнении пространства V_k в V_{k+1}, для любого $k \in \mathbb{Z}$. Как следствие, система $\{\ \phi_{0,l}(l \in \mathbb{Z}),\ \varphi_{k,j}(k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{Z})\}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$.

Через E^d обозначим совокупность всех вершин единичного куба $[0,1]^d$ пространства $\mathbb{R}^d$, т.е. $\mathrm{E}^d = \{\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)\ :\ \epsilon_k \in \{0,1\}, k = 1, \ldots, d\}$, $\mathrm{E}^d_* = \mathrm{E}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ (здесь $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$).

Для $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathrm{E}$ определим функцию $\psi^{(\boldsymbol{\epsilon})} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ следующим образом

$$\psi^{(\boldsymbol{\epsilon})}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} \psi^{(\epsilon_i)}(x_i)$$

(здесь $\psi^{(0)} = \phi$, $\psi^{(1)} = \varphi$).

Через $\mathcal{D}_d$ обозначим совокупность всех диадических кубов Q_d пространства $\mathbb{R}^d$, чей объем $|Q_d|$ не превосходит 1; для произвольного куба $Q_d \in \mathcal{D}_d$,

$$Q_d = Q_{d,k,\mathbf{m}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\ :\ m_j \le 2^k x_j < m_j + 1, j = 1, \ldots, d\}$$

и для любого $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathrm{E}_d$ положим $\psi^{(\boldsymbol{\epsilon})}_{Q_d}(\mathbf{x}) := \psi^{(\boldsymbol{\epsilon})}_k(\mathbf{x} - \mathbf{m}) := \prod_{i=1}^{d} \psi^{(\epsilon_i)}_{k,m_i}(x_i)$.

Совокупность

$$\Psi_{d,\mathbf{x}}(\phi,\varphi) = \{\psi^{(\mathbf{0})}_{Q_d}(\mathbf{x})\ :\ Q_d \in \mathcal{D}_d, |Q_d| = 1\} \cup \{\psi^{(\boldsymbol{\epsilon})}_{Q_d}(\mathbf{x})\ :\ Q_d \in \mathcal{D}_d, |Q_d| \le 1, \boldsymbol{\epsilon} \in \mathrm{E}^*_d\}$$

назовем системой (d-мерных) всплесков, порожденной (одномерным) КМА $\mathcal{V}$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \le d$. Положим $e_d = \{1, \ldots, d\}$. Для произвольного подмножества $e \subset e_d$ обозначим через $|e|$ количество его элементов и для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{x}(e) = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{|e|}}) \in \mathbb{R}^{|e|}$ (здесь $\varnothing \ne e = \{1 \le j_1 < \ldots < j_{|e|} \le d\}$). Далее фиксируем разбиение $\mathbf{e} = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ множества e_d (т.е. $e_d = \cup_{j=1}^{n} e^{(j)}$, $e^{(j)} \cap e^{(k)} = \varnothing$ при $j \ne k$, $e^{(j)} \ne \varnothing$, $j \in e_n$) и положим $d_j = |e^{(j)}|$, $j \in e_n$ и $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. Ради удобства пишем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(e^{(j)}) \in \mathbb{R}^{d_j}$, $j \in e_n$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathbf{d}}$ совокупность всех диадических параллелепипедов $\mathcal{Q}$ из $\mathbb{R}^d$ вида $\mathcal{Q} = Q_{d_1} \times \cdots \times Q_{d_n}$, где $Q_{d_i} \in \mathcal{D}_{d_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Выберем n КМА $\mathcal{V}_i$ и соответствующие им масштабные функции ϕ_i и всплески φ_i ($i = 1, \ldots, n$).

Тензорное произведение $\Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}} := \Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}}(\phi_1, \varphi_1; \ldots; \phi_n, \varphi_n)$ систем $\Psi_{d_i,\mathbf{x}_i}(\phi_i, \varphi_i)$ ($i = 1, \ldots, n$) назовем кратной ($\mathbf{d}$-мерной) системой всплесков. Таким образом, кратная система может быть представлена в следующем виде

$$\Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}} := \Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}}(\phi_1, \varphi_1; \ldots; \phi_n, \varphi_n) :=$$

$$\bigcup_{e\subset e_n} \left\{ \prod_{i\in e} \psi^{(\mathbf{0})}_{i;Q_{d_i}}(\mathbf{x}_i) \prod_{i\in \overline{e}} \psi^{(\boldsymbol{\epsilon}_i)}_{i;Q_{d_i}}(\mathbf{x}_i)\ : \mathcal{Q} \in \mathcal{D}_{\mathbf{d}}, |Q_{d_i}| = 1, i \in e; \boldsymbol{\epsilon}_i \in \mathrm{E}^{d_i}_*, i \in \overline{e} \right\}$$

(здесь $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{d_i}$ $(i \in e)$, $\boldsymbol{\epsilon}_i \in \mathrm{E}^{d_i}$ $(i \in \overline{e})$; $\overline{e} = e_n \setminus e)$.

Всюду далее будем предполагать, что для $i = 1, \ldots, n$ выполнены неравенства $|\varphi_i(x)| \leq \omega_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где четные, неотрицательные, невозрастающие на $[0, \infty)$ функции $\omega_i \in L_\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty \omega_i(x) \ln(1 + x) dx < \infty.$$

3. Безусловные базисы всплесков в $\mathbf{L_p}(\mathbb{R}^\mathbf{d})$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in (1, \infty)^d$. Тогда кратная система всплесков $\Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}}$ является безусловным базисом для пространства $L_\mathbf{p}(\mathbb{R}^d)$.*

Замечание 1. *По базисам всплесков в различных функциональных пространствах имеется обширная библиография, подробнее см., например, [2], [3], [1]. Непосредственно по теореме 1 отметим, что она при $d = n = 1$ доказана в [1] (см. там теорему 10 гл.7), а при $d = n > 1$ ее нетрудно вывести из этого результата. В случае $d > n = 1$, $p_1 = \ldots = p_d$ при более жестких условиях на* КМА *она установлена в [2]. Частный случай теоремы 1 с $\phi_1 = \ldots = \phi_n = \phi_M, \varphi_1 = \ldots = \varphi_n = \varphi_M$, где ϕ_M и φ_M- масштабная функция и всплеск Мейера, и $\mathrm{e}^{(j)} = \{i(j)+1, \ldots, i(j)+d_j\}$, где $i(1) = 0$, $i(j) = d_1+\ldots+d_{j-1}$, $j = 2, \ldots, n$, приведен в [4] (там же см. дополнительные ссылки).*

4. О наилучших N-членных приближениях. Пусть $X-$ (комплексное) линейное нормированное пространство с нормой $\| \cdot \|_X$, $\Phi = \{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}-$ произвольная система элементов X. Для элемента $f \in X$ введем величину

$$\sigma_N(f, \Phi, X) = \inf\{\|f - \sum_{j=1}^N a_j \varphi_{k_j}\|_X \ : \ a_j \in \mathbb{C}, \ k_j \in \mathbb{N} \ (j = 1, \ldots, N)\},$$

которая называется *наилучшим N-членным приближением* элемента f по системе Φ (в пространстве X). Полином

$$g_N(f) = \sum_{j=1}^N a_j(f) \varphi_{k_j(f)},$$

для которого выполняется равенство

$$\|f - g_N(f)\|_X = \sigma_N(f, \Phi, X),$$

(если таковой существует) называется *элементом наилучшего N-членного приближения* для f (по системе Φ).

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in [1, \infty]^d$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любой функции пространства $L_\mathbf{p}(\mathbb{R}^d)$ существует элемент наилучшего N-членного приближения по системе $\Psi_{\mathbf{d},\mathbf{x}}$.*

Замечание 2. *Как отмечается в [5], существование элемента наилучшего N-членного приближения по кратной системе Хаара (с $n = d$) в пространстве $L_p([0, 1]^d)$ $(p \in [1, \infty])$ доказано в [6].*

Цитированная литература

1. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М., 1999.

2. **Meyer Y.** Wavelets and operators, Cambridge Univ. Press, 1992.
3. **Daubechies I.** Ten lectures on wavelets. SIAM. 1991.
4. **Базарханов Д.Б.** // Изв. НАН РК, сер. физ.-мат. 2004. №1. С.14–21.
5. **Temlyakov V.N.** // East J. Approx. 1998. № 4. С.87–106.
6. **Dubinin N.N.** Greedy Algorithms and Applications. Diss. USC, 1997.

Поступила в редакцию 15.01.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 21 — 32*

УДК 517.95

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ. I.

Г. И. Бижанова

Институт математики МО и Н РК
480100 г.Алмат ул.Пушкина, 125 galya@math.kz

В работе рассматриваются следующие модельные задачи для эллиптических уравнений в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \,|\, x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},\, x_n > 0\}$:
задача Дирихле (Задача I)

$$\Delta u - cu = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1}$$

$$u|_{x_n=0} = \varphi(x'), \tag{2}$$

где $\Delta := \partial^2_{x_n} + \ldots + \partial^2_{x_n}$ — оператор Лапласа, $c \geq 0$;
задача с наклонной производной (Задача II)

$$\Delta u - cu = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{3}$$

$$b\nabla\, u - b_0\, u|_{x_n=0} := \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_{x_i} u - b_0 u|_{x_n=0} = \varphi(x'), \tag{4}$$

где $b = (b_1, \dots, b_n) = (b', b_n),\ \nabla := (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) = (\nabla', \partial_{x_n}),\ \ c \geq 0,\ b_n > 0,\ b_0 \geq 0.$

Известны точные решения задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона в полупространстве $x_n > 0$ в виде потенциалов [1–5]. Например, потенциалы двойного слоя с ограниченной плотностью φ и простого слоя с финитной φ являются решениями задач Дирихле и Неймана, соответственно, для уравнения Лапласа в полупространстве [1,3]; объемный потенциал $\int_\Omega f(y)\Gamma(x-y)e^{-\sqrt{c}|x-y|}dy$, где $c \geq 0$, Γ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, удовлетворяет уравнению (1) в области Ω [2,4,5]. Точное решение Задачи II для уравнения Лапласа с граничной функцией $\varphi(x')$, равной нулю, построено в [4].

В монографии С.Д.Эйдельмана [6] фундаментальная матрица решения эллиптической системы была получена как предел интеграла $\int_0^t G(x,\beta)\,d\beta$ при $t \to \infty$ от фундаментальной

Keywords: *boundary value problem, elliptic equation, asymptotic solution, unfounded domain*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J25, 35C05, 35B40

матрицы $G(x,t)$ решения соответствующей параболической системы. Этот метод позволяет построить точные решения Задач I, II в полупространстве в виде тепловых потенциалов, изучить их в классах функций, растущих на бесконечности экспоненциально и по степенному закону. Построенные решения в явном виде позволяют понять роль коэффициентов $c,\ b,\ b_0$ в обеспечении существования решений (сходимости несобственных интегралов), изучить асимптотическое поведение решений на бесконечности в зависимости от заданных граничной функции φ и правой части уравнения f. Исследованию асимптотики решений эллиптических задач при $|x|\to\infty$ посвящено большое число работ. Как правило, задачи рассматриваются либо в цилиндрической области (неограниченной по одной пространственной переменной), либо в слое (области, ограниченной по одной переменной). Укажем статью Ю.В.Егорова, В.А.Кондратьева "Об асимптотике решений параболических и эллиптических задач в неограниченных областях"с исчерпывающей библиографией по этому вопросу [7].

В настоящей статье будут построены точные решения Задач I, II при помощи преобразований Фурье и Лапласа, установлены асимптотические представления решения Задачи I с правой частью уравнений $f(x)$, равной $e^{\beta|x|},\ \beta>0$ или $|x|^\gamma,\ \gamma>0$, и с граничной функцией $\varphi=e^{\beta|x'|},\ \beta>0$ или $\varphi=|x|^\gamma,\ \gamma>0$ (Теорема 3). Во второй части статьи будет построено в явном виде решение задачи сопряжения для эллиптических уравнений (Задачи III), получены формулы, устанавливающие асимптотическое поведение решений Задач II, III при $|x|\to\infty$.

Рассмотрим параболические задачи, соответствующие задачам (1), (2) и (3), (4) для уравнения

$$\partial_t v-\Delta v+cv=g(x,t),\ x\in\mathbb{R}^n_+,\ t>0 \tag{5}$$

с нулевым начальным условием

$$v|_{t=0}=0 \tag{6}$$

и с условием Дирихле

$$v|_{x_n=0}=\psi(x',t) \tag{7}$$

или с наклонной производной

$$\sum_{i=1}^n b_i\partial_{x_i}v-b_0v|_{x_n=0}=\psi(x',t). \tag{8}$$

Применим к этим задачам интегральные преобразования Лапласа по t и Фурье по x'

$$\tilde v(s',p)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_{\mathbb{R}^{n-1}}v(x',t)e^{-ix's'}dx'.$$

Из уравнения (5) при условии (6) мы найдем решение в виде

$$\tilde v(s',x_n,p)=\frac{1}{2r}\int_0^\infty\tilde g(s',y_n,p)e^{-r|x_n-y_n|}dy_n+\chi(s',p)e^{-rx_n}, \tag{9}$$

где $r^2=p+s'^2+c,\ \chi$ — неизвестная функция. Определив ее из граничных условий (7) или (8) и подставив в формулу (9), будем иметь решения в области изображений Лапласа и Фурье задачи (5)–(7)

$$\tilde v=\tilde\psi\, e^{-rx_n}+\frac{1}{2r}\int_0^\infty\tilde g(s',y_n,p)[e^{-r|x_n-y_n|}-e^{-r(x_n+y_n)}]dy_n \tag{10}$$

и задачи (5), (6), (8)

$$\tilde v=-\tilde\psi(s',p)\int_0^\infty e^{-r(x_n+b_n\sigma)-(b_0-ib's')\sigma}d\sigma+\frac{1}{2r}\int_0^\infty\tilde g(s',y_n,p)[e^{-r|x_n-y_n|}+e^{-r(x_n+y_n)}]dy_n+$$

$$+(ib's'-b_0)\,\frac{1}{r}\int_0^\infty d\sigma\int_0^\infty \tilde{g}(s',y_n,p)e^{-r(x_n+y_n+b_n\sigma)-(b_0-ib's')\sigma}dy_n. \tag{11}$$

Здесь $b's'=b_1s_1+\ldots+b_{n-1}s_{n-1}$.

При выводе формулы (11) было также использовано представление дроби в виде

$$\frac{1}{b_nr+b_0-ib's'}=\int_0^\infty e^{-b_nr\sigma-(b_0-ib's')\sigma}d\sigma$$

на основании условия $\mathrm{Re}(b_nr+b_0-ib's')>0$.

Применяя табличные формулы обратных преобразований Лапласа и Фурье [8] к функциям (10), (11), мы получим решения параболических задач (5)–(7)

$$\begin{aligned} v(x,t)=-2\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\psi(y',t-\tau)\Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau)e^{-c\tau}\,dy'+\\ +\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n_+}g(y,t-\tau)[\Gamma(x-y,\tau)-\Gamma(x'-y',x_n+y_n,\tau)]e^{-c\tau}dy \end{aligned} \tag{12}$$

и (5), (6), (8)

$$\begin{aligned} v(x,t)=2\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\psi(y',t-\tau)\,dy'\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+b_n\sigma,\tau)e^{-c\tau}\,d\sigma+\\ +\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n_+}g(y,t-\tau)[\Gamma(x-y,\tau)-\Gamma(x'-y',x_n+y_n,\tau)]e^{-c\tau}dy-\\ -2\,b_n\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n_+}g(y,t-\tau)\,dy'\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,\Gamma(x'-y'+b'\sigma,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)e^{-c\tau}\,d\sigma, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\Gamma(x,t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t v(x,t)-\Delta v(x,t)=0$,

$$\Gamma(x,t)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-x^2/4t}.$$

В формулах (12), (13) положим $\psi(y',t-\tau)=\varphi(y'),\ g(y,t-\tau)=-f(y)$ и устремим t к ∞. В результате получим функции

$$\begin{aligned} u(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')\,d\,y'\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau)\big)e^{-c\tau}\,d\,\tau-\\ -\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)dy\int_0^\infty[\Gamma(x-y,\tau)-\Gamma(x'-y',x_n+y_n,\tau)]e^{-c\tau}d\tau:=v_1-v_2 \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} u(x)=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')dy'\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}\,d\sigma\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}\,d\tau-\\ -\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)dy\int_0^\infty[\Gamma(x-y,\tau)-\Gamma(x'-y',x_n+y_n,\tau)]e^{-c\tau}d\tau-\\ -b_n\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)dy\int_0^\infty e^{-b_0\sigma}d\sigma\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)\big)e^{-c\tau}d\tau:=\\ :=-v_3-v_2-b_nv_4. \end{aligned} \tag{15}$$

Покажем, что функции (14) и (15) являются решениями эллиптических задач (1),(2) и (3),(4), соответственно.

Т е о р е м а 1. *Пусть $c > 0$. Функция $u(x)$, определяемая формулой (14), является решением задачи (1), (2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию (14) $u = v_1 - v_2$. Учитывая, что $\Gamma(x,\tau)$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности $\partial_\tau v(x,\tau) - \Delta v(x,\tau) = 0$, получим

$$(\Delta - c)v_1 = -2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')\,dy' \int_0^\infty \frac{d}{d\tau}\big(\Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau)\,e^{-c\tau}\big)\,d\tau = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}-(\Delta - c)v_2 = -\int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\,dy \int_0^\infty \frac{d}{d\tau}\big(\Gamma(x-y,\tau) - \Gamma(x'-y',x_n+y_n,\tau)\,e^{-c\tau}\big)\,d\tau = \\ = \lim_{\tau\to 0}\int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\Gamma(x-y,\tau)\,e^{-c\tau}\,dy = f(x),\end{aligned} \tag{17}$$

то есть функция (14) является решением уравнения (1). Чтобы показать, что она удовлетворяет граничному условию (2), представим плотность $\varphi(y')$ в потенциале v_1 в виде $\varphi(y')-\varphi(x')+\varphi(x')$. Тогда интеграл с плотностью $\varphi(y') - \varphi(x')$ будет стремиться к нулю при $x_n \to 0$, кроме того $v_2(x) \to 0$ при $x_n \to 0$ и мы получим

$$\lim_{x_n\to 0} u(x) = \lim_{x_n\to 0} v_1 = -2\varphi(x')\lim_{x_n\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty \Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau)\,e^{-c\tau}\,d\tau.$$

Интегрируя по y', а затем к интегралу по τ применяя табличный интеграл [9]

$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2-b^2/z^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab},\ a>0,\ b>0, \tag{18}$$

будем иметь

$$-2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty \Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau)\,e^{-c\tau}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{x_n}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\,e^{-x_n^2/(4\tau)-c\tau}\,d\tau = e^{-\sqrt{c}x_n}, \tag{19}$$

тогда

$$\lim_{x_n\to 0} u(x) = \lim_{x_n\to 0} v_1 = \varphi(x'). \tag{20}$$

Таким образом, функция (14) удовлетворяет также граничному условию (2), то есть она является решением Задачи I.

Т е о р е м а 2. *Пусть $c>0,\ b_n>0,\ b_0\geq 0$. Функция $u(x)$, определяемая формулой (15), является решением задачи(3), (4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $u = -v_3 - v_2 - b_n v_4$ (15). Функции $v_3,\ v_4$ удовлетворяют однородным уравнениям $\Delta v_m - c v_m = 0,\ m = 3,4$ также как и функция v_1 удовлетворяет равенству (16), а функция $-v_2$ является решением уравнения (3) в силу соотношения (17).

Подставим потенциал $-v_3$ в граничное условие (4) и учтем соотношение (20), тогда будем иметь

$$\begin{aligned}-(b\nabla - b_0)v_3 = 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')\,dy' \int_0^\infty e^{-c\tau}d\tau \int_0^\infty \frac{d}{d\sigma}\big(\Gamma_{x_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+b_n\sigma,\tau)e^{-b_0\sigma}\big)d\sigma = \\ = -2\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y')\,dy' \int_0^\infty \Gamma_{x_n}(x'-y',\,x_n,\tau)\,e^{-c\tau}\,d\tau = v_1(x) \to \varphi(x'),\ x_n \to 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим сумму интегралов $-v_2-b_nv_4$ с плотностью $f(x)$. Принимая во внимание очевидные равенства $b'\nabla'v_2|_{x_n=0}=0,\ v_2|_{x_n=0}=0$, мы получим

$$-(b\nabla-b_0)(v_2+b_nv_4)|_{x_n=0}=\big(-b_n\partial_{x_n}v_2-(b\nabla-b_0)v_4\big)|_{x_n=0}=$$
$$=2\,b_n\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)dy\int_0^\infty\Gamma_{y_n}(x'-y',y_n,\tau)e^{-c\tau}d\tau+$$
$$+2\,b_n\int_{\mathbb{R}^n_+}f(y)\,dy\int_0^\infty e^{-c\tau}d\tau\int_0^\infty\frac{d}{d\sigma}\big(\Gamma_{y_n}(x'-y'+b'\sigma,x_n+y_n+b_n\sigma,\tau)\,e^{-b_0\sigma}\big)\,d\sigma|_{x_n=0}=0.$$

Мы показали, что функция (15) действительно является решением задачи (3) (4). □

Представим решение Задачи I в виде, позволяющем определить асимптотическое поведение решения на бесконечности в зависимости от заданных функций $\varphi(x')$ и $f(x)$. При выводе этих представлений решения нам потребуются оценки интегралов, которые установим в леммах.

Лемма 1. *Пусть $a>0,\ \omega>0,\ \lambda>0,\ p>-1$. Справедливы следующие оценки интегралов:*

$$j_p^{(1)}:=\int_a^\infty\sigma^pe^{-\omega\sigma}\,d\sigma\le\max{}^p(1,\omega)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^pe^{-\omega a},\ p-\textit{целое},\tag{21}$$

$$j_p^{(1)}\le\max{}^{1+p}(1,\omega)\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+[p])!(1+1/a)(1+a)^pe^{-\omega a},\ p-\textit{нецелое},\tag{22}$$

$$j_p^{(2)}:=\int_0^\infty(a+\lambda\sigma)^pe^{-\omega\sigma}\,d\sigma\le\max{}^p(\omega,\lambda)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^p,\ p-\textit{целое},\tag{23}$$

$$j_p^{(2)}\le\max{}^{1+p}(\omega,\lambda)\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+[p])!(1+1/a)(1+a)^p,\ p-\textit{нецелое}.\tag{24}$$

Доказательство. Пусть p — целое неотрицательное число. В интеграле $j_p^{(1)}$ произведем замену переменной $\omega\sigma=z$, проинтегрируем по частям n раз и воспользуемся неравенством $k!\le p!,\ k\le p$, тогда будем иметь

$$j_p^{(1)}\le\frac{1}{\omega^{1+p}}\int_{\omega a}^\infty z^pe^{-z}\,dz=\frac{1}{\omega^{1+p}}\sum_{k=0}^p\frac{p!}{(p-k)!}(\omega a)^{p-k}e^{-\omega a}\le\frac{p!}{\omega^{1+p}}\sum_{k=0}^p\frac{p!}{(p-k)!k!}(\omega a)^{p-k}e^{-\omega a}.$$

Привлекая формулу бинома Ньютона

$$(\alpha+\beta)^p=\sum_{k=0}^p\frac{p!}{(p-k)!k!}\alpha^k\beta^{p-k},\tag{25}$$

получим оценку (21)

$$j_p^{(1)}\le\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+\omega a)^pe^{-\omega a}\le\max{}^p(1,\omega)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^pe^{-\omega a}.$$

Пусть p — нецелое число, больше -1. Представим его в виде $p=[p]+\delta,\ \delta\in(0,1),\ [p]\ge-1$. Используя неравенства (21) и следующее $(\omega a)^\delta\le(1+\omega a)^\delta$, будем иметь оценку (22)

$$j_p^{(1)}\le\frac{1}{\omega^{1+p}}\int_{\omega a}^\infty z^{[p]+1-(1-\delta)}e^{-z}\,dz\le\frac{1}{\omega^{1+p}(\omega a)^{1-\delta}}\int_{\omega a}^\infty z^{[p]+1}e^{-z}\,dz\le$$
$$\le\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+[p])!1/a(1+\omega a)^{1+p}e^{-\omega a}\le\max{}^{1+p}(1,\omega)\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+[p])!(1+1/a)(1+a)^pe^{-\omega a}.$$

В интеграле $j_p^{(2)}$ произведем подстановку $a+\lambda\sigma=z$

$$j_p^{(2)}=\frac{1}{\lambda}\int_a^\infty z^p e^{-\omega z/\lambda+\omega a/\lambda}\,dz.$$

Отсюда при помощи оценок (21), (22) получим формулы (23), (24). □

Л е м м а 2. *Пусть $a>0$, $\omega>0$. Справедливы следующие оценки интегралов:*

$$\begin{gathered}i_p^{(1)}:=\int_0^\infty \rho^p\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\,e^{-\omega\sqrt{\rho^2+a^2}}\,d\rho\le\\ \le\max{}^{p-1}(1,\omega)\frac{1}{\omega^p}(p-1)!(1+a)^{p-1}\,e^{-\omega a},\ p\ge1,\ p-\textit{целое},\end{gathered}\tag{26}$$

$$i_p^{(1)}\le\max{}^p(1,\omega)[p]!\frac{1}{\omega^{1+p}}(1+1/a)(1+a)^{p-1}e^{-\omega a},\ p>1,\ p-\textit{нецелое},\tag{27}$$

$$i_p^{(2)}:=\int_0^\infty\rho^p e^{-\omega\sqrt{\rho^2+a^2}}d\rho\le\max{}^{1+p}(1,\omega)\frac{1}{\omega^{1+p}}p!(1+a)^{p+1}e^{-\omega a},\ p\ge0,\ p-\textit{целое},\tag{28}$$

$$i_p^{(2)}\le\max{}^{2+p}(1,\omega)\frac{1}{1+p}(2+[p])!\frac{1}{\omega^{2+p}}(1+1/a)(1+a)^{1+p}e^{-\omega a},\ p>-1,\ p-\textit{нецелое}.\tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интеграле $i_p^{(1)}$ воспользуемся неравенством $\rho=\sqrt{\rho^2}\le\le\sqrt{\rho^2+a^2}$, произведем замену переменной интегрирования $\sigma=\sqrt{\rho^2+a^2}$, тогда будем иметь

$$i_p^{(1)}\le\int_a^\infty\sigma^{p-1}e^{-\omega\sigma}\,d\sigma.$$

Применение неравенств (21), (22) сразу приводит к требуемым формулам (26), (27).

Рассмотрим интеграл $i_p^{(2)}$. Взяв его по частям, мы получим интеграл $i_{2+p}^{(1)}$

$$i_p^{(2)}=\frac{\omega}{1+p}\int_0^\infty\rho^{2+p}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}e^{-\omega\sqrt{\rho^2+a^2}}\,d\rho\equiv\frac{\omega}{1+p}i_{2+p}^{(1)}.$$

Отсюда в силу оценок (26), (27) будем иметь неравенства (28), (29). □

Л е м м а 3. *Пусть n — целое число, $n\ge1$, $A>0$. Для интеграла*

$$J_n:=\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z^2-A^2/z^2}\,dz\tag{30}$$

справедливы следующие оценки:

$$J_1=\sqrt{\pi}/2\,e^{-2A},\ n=1,\tag{31}$$

$$J_n\le\sqrt{\pi}2^{\frac{n-3}{2}}(n-2)!!A^{\frac{n-1}{2}}(1+\frac{1}{4A})^{\frac{n-1}{2}}e^{-2A},\ n=2m+1,\tag{32}$$

$$J_n\le\sqrt{\pi}2^{\frac{n+4}{2}}(n-1)!!A^{n/2}(1+\frac{1}{4A})^{1+n/2}e^{-2A},\ n=2m,\tag{33}$$

где $m=1,2,\ldots$, $(2m-1)!!=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2m-3)\cdot(2m-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$, используя табличный интеграл (18), сразу получим выражение (31).

Пусть $n>1$. Применим формулу [9; 3.478, 4.]

$$\int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-\beta t^p-\gamma/t^p}\,dt=\frac{2}{p}\Big(\frac{\gamma}{\beta}\Big)^{\frac{\nu}{2p}}K_{\nu/p}(2\sqrt{\beta\gamma}),\ \mathrm{Re}\,\beta>0,\ \mathrm{Re}\,\gamma>0,$$

где $K_\mu(z)$ — функция Макдональда (функция Бесселя мнимого аргумента), положив в ней $p=2,\ \nu=n,\ \beta=1,\ \gamma=A^2$, тогда будем иметь

$$J_n = A^{n/2}\, K_{n/2}(2A). \tag{34}$$

Функция Макдональда $K_{n/2}(z)$ выражается в конечном виде только при индексах $n/2=m+1/2$ с целым положительным m [9; 8.468]

$$K_{m+1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+k)!}{k!(m-k)!(2z)^k}.$$

Оценим функцию $K_{m+1/2}(z)$. Для этого применим неравенство $(m+k)!\le(2m)!= = 2^m m!(2m-1)!!$ и формулу бинома Ньютона (25)

$$\begin{aligned} K_{m+1/2}(z) &\le \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}2^m(2m-1)!!\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!(2z)^k} = \\ &= \sqrt{\pi/z}2^{m-1/2}\frac{(2m+1)!!}{2m+1}(1+\frac{1}{2z})^m e^{-z}. \end{aligned} \tag{35}$$

Тогда из равенства (34) получим оценку (32) для $n=2m+1$.

Пусть $n=2m,\ m\ge1$. Сведем интеграл J_n к интегралу с нечетным индексом. Для этого оценим его, затем применим формулу (34)

$$\begin{aligned} J_n &\le (\int_0^A+\int_A^\infty)z^{n-1}e^{-z^2-A^2/z^2}\,dz \le \int_0^\infty(Az^{n-2}+\frac{1}{A}z^n)e^{-z^2-A^2/z^2}\,dz = \\ &= AJ_{n-1}+1/AJ_{n+1} = A^{\frac{n+1}{2}}K_{m-1+1/2}(2A)+A^{\frac{n-1}{2}}K_{m+1/2}(2A) \end{aligned}$$

Используя оценку (35) функции Макдональда, получим требуемое неравенство (33)

$$\begin{aligned} J_n &\le \sqrt{\pi}2^{\frac{n+2}{2}}(n-1)!!A^{n/2}(1+\frac{1}{4A})^{1+n/2}\big(1/2^3(1+\frac{1}{4A})^{-2}+\frac{1}{4A}(1+\frac{1}{4A})^{-1}\big) \le \\ &\le \sqrt{\pi}2^{\frac{n+4}{2}}(n-1)!!A^{n/2}(1+\frac{1}{4A})^{1+n/2}. \end{aligned}$$

С л е д с т в и е 1. *Для интеграла*

$$I_n=\int_0^\infty(-2\,\Gamma_{x_n}(\rho,x_n+a,\tau))\,e^{-c\tau}d\tau \equiv \int_0^\infty\frac{x_n+a}{(2\pi\sqrt{\tau})^n\tau}e^{-\frac{\rho^2+(x_n+a)^2}{4\tau}-c\tau}d\tau,\ c>0,\ a\ge0$$

справедливы следующие оценки при $x_n>0$:

$$I_n\le C_1\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x_n+a}{\rho^2+(x_n+a)^2}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m+1; \tag{36}$$

$$I_n\le C_1\frac{1}{x_n^{(n-3)/2}}(1+1/x_n)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m+1; \tag{37}$$

$$I_n\le C_2\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}(1+1/x_n)^{1+n/2}\frac{x_n+a}{\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m; \tag{38}$$

$$I_n\le C_2\frac{1}{x_n^{(n-2)/2}}(1+1/x_n)^{1+n/2}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m. \tag{39}$$

(Здесь и далее через $C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные.)

Доказательство. Рассмотрим интеграл I_n. Произведем замену переменной $(\rho^2+(x_n+a)^2)/\tau = 4z^2$

$$I_n = 2\frac{x_n+a}{(\rho^2+(x_n+a)^2)^{n/2}\pi^{n/2}}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z^2-A^2/z^2}\,dz,\ A^2 = c\frac{\rho^2+(x_n+a)^2}{4}.$$

Мы получили интеграл J_n (30). Применяя к нему формулы (32), (33), будем иметь

$$I_n \le (n-2)!!\frac{c^{(n-1)/4}}{\pi^{(n-1)/2}}\frac{x_n+a}{(\rho^2+(x_n+a)^2)^{(n+1)/4}}\Big(1+\frac{1}{2\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}}\Big)^{\frac{n-1}{2}}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}} \le$$

$$\le \frac{(n-2)!!}{\pi^{(n-1)/2}}\frac{\max^{(n-1)/2}(\sqrt{c},1/2)}{x_n^{(n-3)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x_n+a}{\rho^2+(x_n+a)^2}e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m+1;$$

$$I_n \le \frac{2^3(n-1)!!}{\sqrt{c}\pi^{(n-1)/2}}\frac{\max^{1+n/2}(\sqrt{c},1/2)}{x_n^{(n-2)/2}}\big(1+1/x_n\big)^{1+n/2}\frac{x_n+a}{\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}}\,e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}},\ n=2m.$$

Оценки (36), (38) установлены. Отсюда после применения неравенства $(x_n+a)/\sqrt{\rho^2+(x_n+a)^2}\le 1$ будут следовать оценки (37), (39).

Обратимся к задаче (1), (2). Мы построили ее решение в форме (14) $u(x)=v_1(x)-v_2(x)$. Заметим, что при положительных функциях $\varphi(y')$ и $f(y)$ потенциалы $v_1(x), v_2(x)$ также положительны.

Теорема 3. *Пусть $c>0$ в задаче (1), (2). Для ее решения $u(x)=v_1-v_2$, определяемого выражением (14), справедливы следующие формулы при $x_n>0$:*
1. если $\varphi(x^{'})=e^{\beta|x^{'}|},\ \beta>0,\ \sqrt{c}>\beta$, тогда

$$0<v_1(x)=\mu_{1,n}\Phi_{1,n}(x_n)\,e^{\beta|x'|-(\sqrt{c}-\beta)x_n}, \tag{40}$$

$$\Phi_{1,n}(x_n)=\begin{cases}(1+1/x_n)^{n-2}(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}}, & n=2m+1,\\ (1+1/x_n)^{n}(1+x_n)^{n/2}, & n=2m;\end{cases} \tag{41}$$

если $\varphi(x')=|x'|^\gamma,\ \gamma>0$, тогда

$$0<v_1(x)=[\mu_{2,n}|x'|^\gamma+\mu_{3,n}(1+x_n)^\gamma\Phi_{2,n}(x_n;\gamma)]\,e^{-\sqrt{c}x_n}, \tag{42}$$

$$\Phi_{2,n}=\begin{cases}\Phi_{1,n}, & \gamma - \text{целое},\\ \Phi_{3,n}, & \gamma - \text{нецелое},\end{cases}\quad \Phi_{3,n}=\begin{cases}(1+1/x_n)^{n-1}(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}}, & n=2m+1,\\ (1+1/x_n)^{n+1}(1+x_n)^{n/2}, & n=2m;\end{cases} \tag{43}$$

2. если $f(x)=e^{\beta|x|},\ \beta>0,\sqrt{c}>\beta$, тогда

$$0<v_2(x)=\mu_{4,n}\,e^{\beta|x|}\ \forall\, n\ge 2; \tag{44}$$

если $f(x)=|x|^\gamma,\ \gamma>0$, тогда

$$0<v_2(x)=\mu_{5,n}\,|x|^\gamma+\mu_{6,n}\ \forall\, n\ge 2, \tag{45}$$

где величины $\mu_{1,n}-\mu_{6,n}$ положительны и ограничены $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+$.

Доказательство. 1. Пусть $\varphi(x')=e^{\beta|x'|},\ \beta>0$. Представим потенциал $v_1(x)$ (см. формулу (14)) в виде (40)

$$0<v_1(x)\equiv\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{\beta|y'|}\,dy'\int_0^\infty\big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau)\big)e^{-c\tau}d\tau=\mu_{1,n}\,\Phi_{1,n}(x_n)\,e^{\beta|x'|-(\sqrt{c}-\beta)x_n},$$

отсюда найдем коэффициент $\mu_{1,n}$

$$\mu_{1,n} = \Phi_{1,n}^{-1}(x_n)\, e^{-\beta|x'|+(\sqrt{c}-\beta)x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\beta|y'|}\, dy' \int_0^\infty \big(-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y', x_n, \tau)\big) e^{-c\tau} d\tau. \qquad (46)$$

Используя неравенство Минковского

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^2\Big)^{1/2} \le \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k^2\Big)^{1/2},$$

получим следующие оценки:

$$|y'| \equiv |x'-y'+x'| \le |x'-y'| + |x'|,$$

$$e^{\beta|y'|} \le e^{\beta|x'-y'|+\beta|x'|},\ \beta>0. \qquad (47)$$

Применим неравенство (47) в потенциале (46), перейдем к сферическим координатам с радиусом $\rho = |x'-y'|$, воспользуемся оценками интеграла по τ (37), (39) и неравенством $\rho \le \sqrt{\rho^2+x_n^2}$ в показателе экспоненты $e^{\beta\rho}$, затем, привлекая формулы (26), (28) к интегралам по ρ, получим

$$\mu_{1,n} \le C_3\Phi_{1,n}^{-1} e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n} \frac{1}{x_n^{(n-3)/2}} (1+1/x_n)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty \rho^{n-2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+x_n^2}} e^{-(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+x_n^2}}\, d\rho \le$$

$$\le C_4\Phi_{1,n}^{-1} e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n} \frac{1}{x_n^{(n-3)/2}} (1+1/x_n)^{\frac{n-1}{2}} (1+x_n)^{n-3} e^{-(\sqrt{c}-\beta)x_n} =$$

$$= C_4\Phi_{1,n}^{-1}(1+1/x_n)^{n-2}(1+x_n)^{\frac{n-3}{2}} = C_4,\ n=2m+1;$$

$$\mu_{1,n} \le C_5\Phi_{1,n}^{-1} e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n} \frac{1}{x_n^{(n-2)/2}} (1+1/x_n)^{1+n/2} \int_0^\infty \rho^{n-2} e^{-(\sqrt{c}-\beta)\sqrt{\rho^2+x_n^2}}\, d\rho \le$$

$$\le C_6\Phi_{1,n}^{-1} e^{(\sqrt{c}-\beta)x_n} \frac{1}{x_n^{(n-2)/2}} (1+1/x_n)^{1+n/2} (1+x_n)^{n-1} e^{-(\sqrt{c}-\beta)x_n} =$$

$$= C_6\Phi_{1,n}^{-1}(1+1/x_n)^{n}(1+x_n)^{n/2} = C_6,\ n=2m.$$

Мы показали, что коэффициент $\mu_{1,n}$ ограничен, и установили формулу (40) $\forall\, n\ge 2$.

Пусть $|x|\to\infty$, $x\in\mathbb{R}^n_+$. Из формул (40), (41) видно, что если точка x находится на круговом конусе $\beta|x'| = (\sqrt{c}-\beta)x_n$, то функция $v_1(x)$ при $n=3$ ограничена, а при $n\ne 3$ стремится к ∞; если точка x лежит внутри конуса ($\beta|x'| < (\sqrt{c}-\beta)x_n$), то $v_1(x)\to 0$ экспоненциально для всех n; если точка x находится вне конуса, то $v_1(x)\to\infty$ экспоненциально для всех n. Если $|x'|\le R, R>0$, то $v_1(x)\to 0$, то есть в цилиндре $S=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : |x'|\le R,\ x_n>0\}$ функция $v_1(x)$ исчезает на бесконечности; в слое $\{x\in\mathbb{R}^n_+ : x'\in\mathbb{R}^{n-1},\, 0<x_n\le R\}$ $v_1\to\infty$.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(x') = |x'|^\gamma$, $\gamma>0$ в потенциале $v_1(x)$ (см. формулу (14)). Как и выше, представим его в виде (42) и к плотности $|y'|^\gamma$ применим неравенство

$$|y'|^\gamma \le C_\gamma(|x'-y'|^\gamma + |x'|^\gamma), \qquad (48)$$

которое вытекает из оценки

$$(\alpha+\beta)^\gamma \le C_\gamma(\alpha^\gamma+\beta^\gamma),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,$$

тогда будем иметь

$$0 < v_1(x) = [\mu_{2,n}|x'|^\gamma + \mu_{3,n}(1+x_n)^\gamma\Phi_{2,n}(x_n;\gamma)]\, e^{-\sqrt{c}x_n} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |y'|^\gamma \, dy' \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n}(x'-y',x_n,\tau))e^{-c\tau} d\tau$$
$$\le C_\gamma |x'|^\gamma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n}) e^{-c\tau} d\tau + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |x'-y'|^\gamma \, dy' \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n})\, e^{-c\tau} d\tau.$$

Отсюда найдем оценки для коэффициента $\mu_{2,n}$ при помощи формулы (19) и для $\mu_{3,n}$

$$\mu_{2,n} \le C_\gamma e^{\sqrt{c}x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n}) e^{-c\tau} d\tau = C_\gamma e^{\sqrt{c}x_n - \sqrt{c}x_n} = C_\gamma;$$

$$\mu_{3,n} \le C_\gamma \Phi_{2,n}^{-1} (1+x_n)^{-\gamma} e^{\sqrt{c}x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |x'-y'|^\gamma \, dy' \int_0^\infty (-2\,\Gamma_{x_n}) e^{-c\tau} d\tau. \tag{49}$$

В интеграле (49) перейдем к сферическим координатам, положив $\rho = |x'-y'|$, и воспользуемся оценками (37), (39)

$$\mu_{3,n} \le C_7 \Phi_{2,n}^{-1} e^{\sqrt{c}x_n} \frac{(1+x_n)^{-\gamma}}{x_n^{(n-3)/2}} (1+1/x_n)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty \rho^{n-2+\gamma} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+x_n^2}}\, e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+x_n^2}} \, d\rho, \; n=2m+1;$$
$$\mu_{3,n} \le C_8 \Phi_{2,n}^{-1} (1+x_n)^{-\gamma} e^{\sqrt{c}x_n} \frac{1}{x_n^{(n-2)/2}} (1+1/x_n)^{1+n/2} \int_0^\infty \rho^{n-1+\gamma} e^{-\sqrt{c}\sqrt{\rho^2+x_n^2}} \, d\rho, \; n=2m.$$

Затем при целом показателе γ применим неравенства (26), (28), а при нецелом — (27), (29), и принимая во внимание формулу (43), определяющую функцию $\Phi_{2,n}$, получим

$$\mu_{3,n} \le C_9 (1+x_n)^{-\gamma} e^{\sqrt{c}x_n} \frac{1}{x_n^{(n-3)/2}} (1+1/x_n)^{\frac{n-1}{2}} (1+x_n)^{n-3+\gamma} \quad e^{-\sqrt{c}x_n} \times$$
$$\times \left\{ \begin{array}{cc} \Phi_{1,n}^{-1}, & \gamma - \text{целое}, \\ (1+1/x_n)\Phi_{3,n}^{-1}, & \gamma - \text{нецелое}, \end{array} \right. = C_9, \; n=2m+1;$$
$$\mu_{3,n} \le C_{10} (1+x_n)^{-\gamma} e^{\sqrt{c}x_n} \frac{1}{x_n^{(n-2)/2}} (1+1/x_n)^{1+n/2} (1+x_n)^{n-1+\gamma} \qquad e^{-\sqrt{c}x_n}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{cc} \Phi_{1,n}^{-1}, & \gamma - \text{целое}, \\ (1+1/x_n)\Phi_{3,n}^{-1}, & \gamma - \text{нецелое}, \end{array} \right. = C_{10}, \; n=2m.$$

Формула (42) и ограниченность коэффициентов $\mu_{2,n},\ \mu_{3,n}$ установлены.

Из формулы (42) видно, что если $|x| \to \infty$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, то $v_1 \to 0$ в цилиндре $|x'| \le R$ и $v_1 \to \infty$ в слое $0 < x_n \le R$.

2. Рассмотрим потенциал $v_2(x)$, определяемый формулой (14).

Пусть $f(x) = e^{\beta|x|}$, $\beta > 0$, $\sqrt{c} > \beta$. Очевидно, что $v_2(x) > 0$ при $x_n > 0$, $y_n > 0$, так как $\Gamma(\cdot, x_n - y_n, \tau) \ge \Gamma(\cdot, x_n + y_n, \tau)$, $\tau \ne 0$. Представим потенциал $v_2(x)$ в виде (44) $v_2(x) = \mu_{4,n}\, e^{\beta|x|}$, найдем коэффициент $\mu_{4,n}(x)$

$$\mu_{4,n}(x) = e^{-\beta|x|} \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{\beta|y|} dy \int_0^\infty [\Gamma(x-y,\tau) - \Gamma(x'-y', x_n+y_n, \tau)] e^{-c\tau} d\tau$$

и оценим интеграл. Для этого вместо разности фундаментальных решений запишем их сумму и в интеграле с $\Gamma(\cdot, x_n+y_n, \tau)$ произведем подстановку $y_n = -z_n$. Далее применим неравенство (47) к плотности $e^{\beta|y|}$ с y и x вместо y' и x' и перейдем к сферическим координатам с $\rho = |x-y|$, тогда будем иметь

$$\mu_{4,n} \le e^{-\beta|x|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\beta|y|} dy \int_0^\infty \Gamma(x-y,\tau) e^{-c\tau} d\tau = \text{æ}_n \int_0^\infty \rho^{n-1}\, e^{\beta\rho}\, d\rho \int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^n}\, e^{-\frac{\rho^2}{4\tau} - c\tau}\, d\tau, \tag{50}$$

где æ_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $n = 2$. В интеграле по ρ сделаем замену переменной интегрирования $(\rho/(2\sqrt{\tau}) - \beta\sqrt{\tau})^2 = \zeta$ и оценим его

$$\mu_{4,n} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-(c-\beta^2)\tau} d\tau \int_{\beta^2\tau}^\infty (1+\frac{\beta\sqrt{\tau}}{\sqrt{\zeta}})e^{-\zeta} d\zeta \le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-(c-\beta^2)\tau} d\tau \int_{\beta^2\tau}^\infty e^{-\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi c},\ n=2. \tag{51}$$

При $n \ge 3$ в интеграле (50) произведем подстановку $\rho^2/\tau = 4z^2$

$$\mu_{4,n} \le C_{11} \int_0^\infty \rho\, e^{\beta\rho}\, d\rho \int_0^\infty z^{n-3} e^{-z^2 - B^2/z^2}\, dz,\ B^2 = c\rho^2/4.$$

Здесь последний интеграл есть J_{n-2}, определяемый формулой (30), для которого мы установили оценки (32), (33). Воспользуемся ими

$$\begin{gathered}\mu_{4,n} \le C_{12} \int_0^\infty \rho^{\frac{n-1}{2}} (1 + 1/\rho)^{\frac{n-3}{2}} e^{-(\sqrt{c}-\beta)\rho}\, d\rho = \\ = C_{13} \int_0^\infty \rho\,(1+\rho)^{\frac{n-3}{2}} e^{-(\sqrt{c}-\beta)\rho}\, d\rho = C_{14},\ n = 2m+1,\ m = 1, 2, \dots;\end{gathered} \tag{52}$$

$$\mu_{4,n} \le C_{15} \int_0^\infty (1+\rho)^{n/2} e^{-(\sqrt{c}-\beta)\rho}\, d\rho = C_{16},\ n = 2m,\ \ m = 2, 3, \dots \tag{53}$$

Таким образом, мы получили оценки (51)–(53) для $\mu_{4,n}$ и доказали формулу (44).

Пусть теперь $f(x) = |x|^\gamma,\ \gamma > 0$. Представим функцию $v_2(x)$ в виде (45) и применим неравенство (48) $|y|^\gamma \le C_\gamma(|x-y|^\gamma + |x|^\gamma)$, тогда

$$\begin{gathered}\mu_{5,n}|x|^\gamma + \mu_{6,n} = v_2(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n_+} |y|^\gamma\, dy \int_0^\infty [\Gamma(x-y,\tau) - \Gamma(x'-y', x_n+y_n, \tau)] e^{-c\tau} d\tau \le \\ \le \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\gamma\, dy \int_0^\infty \Gamma(x-y,\tau)\, e^{-c\tau} d\tau \le \\ \le C_\gamma |x|^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_0^\infty \Gamma(x-y,\tau)\, e^{-c\tau} d\tau + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^\gamma\, dy \int_0^\infty \Gamma(x-y,\tau)\, e^{-c\tau} d\tau.\end{gathered}$$

Отсюда следуют оценки для коэффициентов $\mu_{5,n}, \mu_{6,n}$

$$\begin{gathered}\mu_{5,n} \le C_\gamma \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_0^\infty \Gamma(x-y,\tau)\, e^{-c\tau}\, d\tau = C_\gamma \int_0^\infty e^{-c\tau}\, d\tau = C_\gamma / c\ \ \forall\, n \ge 2; \\ \mu_{6,n} \le C_\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^\gamma\, dy \int_0^\infty \Gamma(x-y,\tau) e^{-c\tau}\, d\tau \le C_{17} \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{n/2}}\, e^{-c\tau}\, d\tau \int_0^\infty \rho^{n-1+\gamma}\, e^{-\rho^2/(4\tau)}\, d\rho,\end{gathered}$$

где $\rho = |x-y|$ — сферическая координата. Выполняя замену переменной $\rho/(2\sqrt{\tau}) = z$, получим

$$\mu_{6,n} \le C_{18} \int_0^\infty \tau^{\gamma/2} e^{-c\tau}\, d\tau \int_0^\infty z^{n-1+\gamma} e^{-z^2}\, dz = C_{19}\ \ \forall\, n \ge 2.$$

Формула (45) и ограниченность коэффициентов $\mu_{5,n},\ \mu_{6,n}$ установлены.

Цитированная литература

1. **Соболев С.Л.** Уравнения математической физики. М., 1966.
2. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М., 1972.

3. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.

4. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.

5. **. Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М., 1989.

6. **Эйдельман С.Д.** Параболические системы. М., 1964.

7. **Egorov Yu.V., Kondratiev V.A.** // Preprint of the Laboratory of Modelling, Nonlinear Analysis and Optimization of Perpignan University, France. 1995. P.1–60.

8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. М., 1969.

9. **Градштейн И.С., Рыжик Ш.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступила в редакцию 12.03.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 33 – 40*

УДК 517.9

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. II

К.Б. Бопаев

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы, ул. Пушкина, 125

4.1. Резонансная нормальная форма почти периодических (п. п.) систем. Рассмотрим систему (1.1) [1] с коэффициентами из C_0 и введем спектр системы S. Для этого, объединяя спектры коэффициентов всех компонент вектор- полиномов G_j, получим множество S_j, тогда $S = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} S_j$. Через $S_{0,k} = \bigcup\limits_{j=0}^{K} S_j$ обозначим спектр в k-ом приближении.

Пусть L — некоторое конечное или счетное множество действительных чисел. Через $M(L)$ обозначим минимальный модуль множества L. Элементы $\gamma \in M(L)$ имеют конечное представление [2]

$$\gamma = \sum_r q_r \lambda_r,$$

где q_r — целые числа, $\lambda_r \in L$. Через $M_k(L) \subset M_{(L)}$ обозначим множество таких γ, у которых в указанном представлении

$$\sum_r |q_r| \leq k.$$

Теорема 1 [1] гарантирует существование у системы (1.1) непрерывной нормальной формы. Уточним ее структуру в рассматриваемом почти периодическом случае. Прежде всего отметим, что система (3.18) будет п.п., а ее спектр будет содержаться в $M(S)$. Действительно, при определении $G_{p,j}^{(s)}(n,\mu)$ и $\varphi_{p,j}^{(s)}(n,\mu)$ из (4.7) используется лемма 7. Поэтому спектр функций для $g(n,\mu)$ и функций $\omega_{p,j}^{(s)}(n,\mu)$ (4.7) содержится в $M(S)$.

Нетрудно сделать индуктивный вывод о том, что спектр функций $\omega_{p,j}^{(s)}(n,\mu)$ для всех p, j содержится в $M(S)$. Более точно, $S_{\omega_{p,j}^{(s)}} \subseteq M_{n_j}(S_{0,j})$.

Базой для индукции служит доказательство того, что спектр вектор-функций
$G_0 = (g^{(1)}(n,\mu), \ldots, g^{(q)}(n,\mu))$, $\phi_0(\varphi^{(1)}(n,\mu), ..., \varphi^{(q)}(n,\mu))$ содержится в S_0.

Keywords: *normal form, nonlinear system, difference-dynamical system*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Действительно, уравнения (4.7) для определения $g^{(s)}$, $\varphi^{(s)}$ соответствуют в этом случае значениям $p=0$, $g=0$ и имеют вид (3.1), где $\omega^{(s)}=f^{(s)}(n,\mu)$.

Введем теперь следующее

Определение 6. *Вектор $p\in P_+^q$ и соответствующие ему члены и коэффициенты s-го уравнения п.п. системы (1.1) назовем резонансными, если*

$$(\exists\mu_0\in D)(\rho^{p-\delta_s}(\mu_0)-1\in M_{|p|}(\overline{S})). \tag{4.10}$$

Соотношение (4.10) означает, что вектор p — резонансный, если $R_{\omega_{p,j}^{(s)}}\neq\varnothing$ и, следовательно, соответствующее уравнение (4.7) — резонансное.

Применение леммы 7 позволяет при нахождении коэффициентов нормальной формы придерживаться следующей альтернативы:

1. если уравнение (4.7) — резонансное (в частности, регулярное), то полагаем $g(n,\mu)=0$;
2. если уравнение (4.7) — резонансное, то полагаем

$$g(n,\mu)=\omega_\alpha(n,\mu), \tag{4.11}$$

где $\omega_\alpha(n,\mu)$ — "резонансная α-срезка" функции $\omega(n,\mu)$.

Вышеизложенное позволяет модифицировать теорему 1 для п.п. систем следующим образом.

Теорема 2. *Пусть система (1.1) имеет п.п коэффициенты из C_0^l и матрицу $A(\mu)$, где собственные числа $\rho(\mu)$ удовлетворяют условию Липшица. Тогда существует C_0^l — преобразование (1.3), приводящее (1.1) к резонансной непрерывной нормальной форме*

$$x_{sn+1}=\rho_s(\mu)x_{sn}+\sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{p=1}^{k_j}{}'F_{p,j}^{(s)}(n,\mu)x^p \quad (s=\overline{1,l}), \tag{4.12}$$

где штрих означает, что суммирование ведется только по резонансным векторам p, и

$$G_{pj}^{(s)}(n,\mu)=0 \quad \text{при} \quad \overline{R}_{\omega^{(s)}}=\varnothing. \tag{4.13}$$

Спектр системы (4.12) содержится в $M(S)$. Сравнение теорем 1 и 2 показывает, что структура системы (4.12) проще, чем (3.18), т.к. если в общем неавтономном случае нормальная форма содержит нерегулярные члены, то в п.п. случае в ней содержатся только резонансные члены.

4.2. Резонансная нормализация F-систем. Выделим из рассмотренного выше класса п.п. систем более простой класс.

Определение 7. *Почти периодическую системы (1.1) с коэффициентами из C_0^l назовем F-системой, если для всех резонансных векторов соответствующее уравнение (4.7) обладает свойством F.*
(Более кратко: *(1.1) — F-система, если для всех резонансных p* $R_{\omega_{p,j}^{(s)}}=\overline{R}_{\omega_{p,j}^{(s)}}$).

Очевидно, достаточным условием того, что (1.1) — F-система, является то, что множество $M_n(S)(\forall n)$ не имеет предельных точек. Отсюда непосредственно вытекает, что F-системами являются периодические системы и системы, коэффициенты которых представимы конечными рядами Фурье с произвольным спектром. Уже этот факт делает целесообразным введение класса F-систем.

Для F-систем ряд введенных выше определений и конструкций упрощается. В частности, при изучении уравнения (3.1) нет необходимости вводить множество $M_k(S)$. Вместо определений 5,6 будем иметь

Определение 5 F. *Уравнение (4.10) называется резонансным в D, если множество $R_\omega \neq \varnothing$.*

Определение 6 F. *Вектор $p \in P^l$, $|p| = k$ и соответствующие ему члены s-го уравнения F-системы (1.1) называются резонансными, если*

$$(\exists \mu_0 \in D)(\rho^{p-\delta_s}(\mu_0) - 1 \in M_j(S)). \tag{4.14}$$

При решении уравнения (4.7) (см. лемму 7) нет необходимости вводить "α – срезку" и в резонансном случае достаточно полагать

$$G(n,\mu) = \omega(n,\mu) + \sum_{\lambda \in R_\omega} \omega_\lambda(\mu) e^{i\lambda n}.$$

В связи с изложенным резонансная непрерывная нормальная форма F-систем имеет тот же вид (4.12), но структура коэффициентов значительно проще, так как они определяются формулами (4.11). Кроме того, в (4.12) присутствуют только те члены x^p, для которых $R_{\omega^{(s)}_{p,j}} \neq \varnothing$, в то время как в общем случае в (4.12) присутствуют члены, для которых $\overline{R}_{\omega^{(s)}_{p,j}} \neq \varnothing$.

В связи с упрощением структуры спектра коэффициентов F-систем появляется возможность приведения нормальной формы F-систем к автономному виду.

4.3. Резонансная непрерывная нормальная форма F-систем в критическом случае. Здесь мы изучаем вещественные F-системы (1.1) в предположении, что при изменении параметра μ спектр матрицы $A(\mu)$ пересекает единичную окружность, не проходя через координатные единицы. Цель настоящего пункта — уточнить структуру резонансной нормальной формы в этом случае, подготовив ее к использованию для решения задач устойчивости.

Предположим, что

1) матрица $A(\mu)$ имеет при $\mu \in D$ m пар собственных значений $\rho_s, \overline{\rho}_s = d_s(\mu)e^{\pm i\varphi_s(\mu)}$, $s = \overline{1,m}$ таких, что $d_s(\mu_0) = 1$; $\varphi_s(\mu_0) \neq 0$;

2) остальные собственные значения $\rho_{2m+1}(\mu, ..., \rho_l(\mu)$ в D по модулю строго отделены от единицы.

Таким образом, при $\mu = \mu_0$ в системе (1.1) матрица $A(\mu)$ имеет жорданову форму

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} A_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \overline{A}_1(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & A_2(\mu) \end{bmatrix},$$

где $A_2(\mu) = (\delta_{sj}\rho_{2m+j})_1^k$, $A_1(\mu) = diag(\rho_1(\mu), \ldots, \rho_m(\mu))$.

Из условия вещественности исходной системы следует, что в (1.1) вектор y_n — комплексный. Представим его в виде тройки векторов $y_n = (\xi_n, \overline{\xi}_n, \omega_n)$, где $\xi_n = (\xi_{1n}, ..., \xi_{mn})$, $\overline{\xi_n} = (\overline{\xi_{1n}}, ..., \overline{\xi}_{mn})$ $\xi_s = y_s$, $\overline{\xi}_s = y_{m+s}$, $\omega_n = (\omega_{1n}, ..., \omega_{kn}) \equiv (y_{2m+1,n}, ..., y_{ln})$, $k = l - 2m$, $s = \overline{1,m}$.

Аналогичным образом представимы и переменные в нормальной форме (4.12)

$x_n = (u_n, \overline{u}_n, \nu_n)$, $u_n = (u_{1n}, ..., u_{mn})$, $\overline{u}_n = (\overline{u}_{1n}, ..., \overline{u}_{mn})$,

$u_{sn} = x_{sn}$, $\overline{u}_{sn} = x_{m+s,n}$, $\nu_n = (\nu_{1n}, ..., \nu_{kn}) \equiv (x_{2m+1,n}, ..., x_{ln})$.

Уравнения для x_{sn+1}, x_{m+sn+1}, y_{sn+1}, y_{m+sn+1} будут комплексно сопряженными. Уточним запись членов и коэффициентов при них. Вектор $p \in P^l_+$ запишем в виде тройки векторов $p = (h, q, r)$, где $h = (h_1, ..., h_m)$, $q = (q_1, ..., q_m)$, $r = (r_1, ..., r_k)$, $h_s = p_s$, $q_s = p_{s+m}$, $r_j = p_{2m+j}$, $s = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$.

Запись мономов x_n^p, y_n^p примет вид $y_n^p = \xi_n^h \overline{\xi}_n^q \omega_n^r$, $x_n^p = u_n^h \overline{u}_n^q \nu_n^r$.

Коэффициенты при них в s-ых уравнениях (1.1) и (4.12) запишутся в форме $G^{(s)}_{p,j} = G^{(s)}_{h,q,r,j}$, $F^{(s)}_{p,j} = F^{(s)}_{h,q,r,j}$, $s = \overline{1,l}$, $j = 1, 2, ...$

В связи с предположениями 1), 2) в спектре матрицы $A(\mu)$ переменные ξ_n, u_n — критические, V_n, ω_n — некритические при $\mu = \mu_0$.

Изучим структуру резонансных членов и нормальной формы в рассматриваемом критическом случае [3].

Определение 8. *Система (1.1) обладает внутренним резонансом N-го порядка, если существует такой целочисленный вектор $\tau \in P^l_+$ с взаимно простыми компонентами и нормой $N = |\tau| = \sum\limits_{j=1}^{l} |\tau_j|$, что*

$$(\tau, \varphi) = \chi, \ \ \chi \in M(S), \tag{4.15}$$

где $M(S)$ — минимальный модуль логарифма спектра системы S, $\rho_s(\mu_0)$, $s = \overline{1,m}$.

Замечание 1. *Если рассматриваемая система — L-периодическая с периодом L, то $M(S) = \{2\nu\pi L^{-1}\}$, в автономном случае $M(S) = \{2\nu\pi\}$.*

Замечание 2. *В (4.15) все компоненты вектора τ не отрицательны.*

Действительно, если при некотором s $\tau_s < 0$, то переобозначим $\overline{\xi}_s$ через ξ_s. Тогда вместо φ_s в (4.15) будет участвовать $-\varphi_s$, что приведет к замене τ_s на $-\tau_s$.

В дальнейшем считаем, что в (4.15) все $\tau_s \geq 0$. Резонансные вектора j-го порядка в s-ом уравнении определяются для F-систем формулами (4.10), которые в этом случае примут вид

$$(\exists \mu_0 \in D)(\alpha^{h+q}(\mu_0) \exp i[(h - q, \varphi(\mu_0)) - i(r, \ln |\eta|)] - \rho_s(\mu_0)) \in M_j(S), \tag{4.16}$$

где $\eta = (\rho_{m+1}(\mu_0), ..., \rho_l(\mu_0))$, $|h| + |q| + |r| = j$.

Анализ структуры резонансных членов уравнений проведем только для первых m критических уравнений ($s = \overline{1,m}$), не рассматривая уравнения для $\overline{u}_{sn}$, $\overline{\xi}_{sn}$.

А. Тождественный резонанс. Любая система (1.1) независимо от наличия внутреннего резонанса обладает тождественным резонансом. Он порожден тождественным по $\varphi(\mu_0)$ соотношением

$$e^{i\varphi_s(\mu_0) - i\varphi_s(\mu_0)} = \rho_s(\mu_0) \cdot \rho_{m(\mu_0)+s} = 1 \qquad (s = \overline{1,m}). \tag{4.17}$$

Учитывая, что $\alpha(\mu_0) = 1$ и $\chi \in M_j(S) \quad \forall j | j \in N \ \{1\}$, для определения векторов $p = (h, q, r)$, соответствующих тождественному резонансу, получим из (4.17) при $\mu = \mu_0$

$(h - q - \delta_s, \quad \varphi_s(\mu_0)) = 2k\pi$, $k = 0, 1, ..., r = 0$, $s = \overline{1,m}$;

$((h - q, \quad \varphi_s(\mu_0)) = 2k\pi$, $\eta^{r - \delta_s}(\mu_0) = 1$, $s = 2m + 1, ..., l$.

Из этих соотношений, которые должны выполняться тождественно по $\varphi(\mu_0)$, получим искомые вектора

$$\begin{gathered} h = q + \delta_s, \quad r = 0 \quad \text{при} \quad s = \overline{1,m}, \\ h = q, \quad r = l_b \quad \text{при} \quad s = 2m + 1, ..., l, \end{gathered} \tag{4.18}$$

где $l_b = (0, ..., \varepsilon_{2m+b}, ..., 0) - k$-мерный вектор — нулевой, если $\varepsilon_{2m+b} = 0$ и b-й единичный орт, если $\varepsilon_{2m+b} = 1$.

Таким образом, члены тождественного резонанса в s-ом уравнении нормальной формы согласно (4.18) имеют вид

$$\begin{gathered} u_{sn}(u\overline{u})^q \quad \text{при} \quad s = \overline{1,m}, \\ \nu^b_n(u_n\overline{u}_n)^q \quad \text{при} \quad s = 2m + 1, ..., l, \end{gathered} \tag{4.19}$$

где $(u_n \cdot \overline{u}_n)^q = u_{1n}^{q_1}\overline{u}_{1n}^{q_1}, ..., u_{mn}^{q_m}\overline{u}_{mn}^{q_m}$.

Все члены тождественного резонанса имеют нечетный порядок.

Обозначим множество всех векторов (4.18) порядка $2j+1$ в s-ом уравнении через $R^0_{s,2j+1}$, множество всех векторов тождественного резонанса в s-ом уравнении — через

$$R^0_s = \bigcup_{j=1}^{\infty} R^0_{s,2j+1}.$$

.

B. Внутренний резонанс. Пусть система (1.1) имеет внутренний резонанс (4.14). Множество резонансных векторов s-го уравнения обозначим $R^{(1)}_s$, а через $R^{(1)}_{s,j}$ — множество этих векторов с нормой $|p| = j$,

$$R^{(1)}_s = \bigcup_j R^{(1)}_{s,j}.$$

Для определения векторов воспользуемся вновь соотношением (4.15) при $\mu = \mu_0$. Замечая, что из включения $\chi \in M(S)$ при любом целом $\tau \neq 0$ следует $\tau\chi \in M(S)$, из (4.14) и (4.15) имеем $\forall p \in R^{(1)}_s$

$$(h - q, \varphi(\mu_0)) - ir \ln \rho(\mu_0) + i \ln \rho_s(\mu_0) = \tau\chi. \tag{4.20}$$

В (4.20) при $s \leq m$ имеем $\rho_s(\mu_0) = e^{i\varphi_s(\mu_0)}$. Учитывая соотношение $|\eta(\mu_0)| \neq 1$, видим, что (4.20) равносильно соотношениям

$$(h - q - \delta_s, \varphi(\mu_0)) = \tau\chi, \quad r = 0. \tag{4.21}$$

Из (4.14) заметим, что любой резонансный вектор $p = (h, q, q) \in R^{(1)}_s$ удовлетворяет равенствам $(h - q - \delta_s, \varphi(\mu_0)) = \tau\chi, \quad r = 0, \quad \chi \neq 0$.

Выделим векторы $p \in R^{(1)}_{s,j}$, т.е. векторы $p = (h, q, 0)$, удовлетворяющие (4.21) при $|h+q| = j$. Для этого в (4.21) нужно указать ограничения на χ, при которых $|h + q| = j$. Элементарный анализ показывает [4], что целые χ удовлетворяют неравенствам

$$-\left[\frac{j+1}{L}\right] \leq \chi \leq \left[\frac{j+1}{L}\right], \tag{4.22}$$

где L — порядок внутреннего резонанса, j — порядок резонансного члена.

Из (4.22) видно, что (4.21) впервые допускает решения $(h, q, 0)$ только при $j = L - 1$ и тогда $\chi = -1$. Первое непустое множество среди $R^{(1)}_{s,L}$ — это $R^{(1)}_{s,L-1}$. Оно содержит единственный вектор $p = (h, q, r)$, где

$$h = 0, \quad q = k - \delta_s, \quad r = 0. \tag{4.23}$$

Поскольку необходимо, чтобы $q \in P^l_+$, то (4.23) определяет резонансный член только при $k_s > 0$. Если $k_s = 0$, то $R^{(1)}_{s,L-1} = \varnothing$ и первым непустым множеством будет $R^{(1)}_{s,L-1}$, содержащее вектор $p = (h, q, r)$, где

$$h = \delta_s, \quad q = k, \quad r = 0. \tag{4.24}$$

Векторы (4.23), (4.24) определяют младшие члены внутреннего резонанса s-го критического уравнения нормальной системы:

$\overline{u}^{k-\delta_s}$ при $k_s > 0$,

$u\overline{u}^k$ при $k_s = 0$.

Все множество R_s имеет вид $R^{(1)}_G = \bigcup\limits_{j=L-1}^{\infty} R^{(1)}_{G,j}$ при $k_s > 0$, $R^{(1)}_G = \bigcup\limits_{j=L+1}^{\infty} R^{(1)}_{G,j}$ при $k_s = 0$.

С. Резонансные векторы некритических уравнений $\left(\mathbf{R^{(1)}_{s_1}}\right)$, $\mathbf{s = \overline{2m+1, l}}$. В этом случае при $s \geq 2m+1$ в (4.20) $\rho_s(\mu_0) = \eta_s(\mu_0)$ и все искомые векторы s-го некритического уравнения определяются из равенства

$$(h - q, \quad \varphi) - i(r - \delta_s, \ln \eta(\mu_0)) = \tau\chi. \tag{4.25}$$

Учитывая, что $|\eta_s(\mu_0)| \neq 1$, из (4.25) для $p = (h, q, r) \in R^{(1)}_s$ получим

$$h - q = \tau\chi, \quad r = l_b \tag{4.26}$$

(вектор l_b введен в (4.18)).

В множество $R^{(1)}_{sj}$ входят все векторы $p = (h, q, r)$ с нормой j, удовлетворяющие (4.26) при $|\tau| \leq \left[\frac{j-1}{L}\right]$. Младшие члены внутреннего резонанса имеют порядок $j = L + 1$ и вид

$$\nu^{l_b}_n u^k, \quad \nu^{l_b}_n \overline{u}^k, \quad b = \overline{1, k}. \tag{4.26}$$

Замечание 3. *Проведенный анализ структуры членов внутреннего резонанса показывает, что впервые эти члены в нормальной форме появляются лишь в $(L-1)$-м порядке, где L — порядок резонанса. Поэтому внутренний резонанс L-го порядка существенно влияет на решение задач устойчивости и колебаний только в случае, когда необходимо учитывать влияние членов порядка не ниже, чем $(L-1)$.*

4.4. Структура резонансной нормальной формы. При нахождении коэффициентов $F^{(s)}_{p,j}(n, \mu)$ нормальной формы решаются соответствующие системы разностных уравнений

$$\varphi^{(s)}_{*,j}(n+1, \mu) - \frac{\rho_s(\mu)}{\alpha^{h+q}_{(\mu)} e^{i(h-q, \ \varphi(\mu))} + (r, \ln \eta(\mu))} \cdot \varphi^{(s)}_{*,j}(n, \mu) = G^{(s)}_{*,j}(n, \mu),$$

где $^* = (h, q, r)$.

а) Тождественный резонанс. Если $(h, q, r) \in R^0_s$, то в (4.28) при $\mu = \mu_0$ коэффициент при $\varphi^{(s)}_{*,j}$ обращается в нуль. Следовательно, резонансная часть спектра функции $G^{(s)}_{*,j}$ тождественно равна нулю и тогда

$$F^{(s)}_{*,j} = M_n\left(G^{(s)}_{*,j}(n, \mu)\right).$$

Таким образом, все коэффициенты при членах тождественного резонанса не зависят от n.

Для коэффициентов при членах тождественного резонанса, определяемых в силу (4.18) векторами $p = (q, q + \delta_s, 0)$ при $s = \overline{1, m}$ и $p = (q, q, p_0)$ при $s = 2m+1, ..., l$, будем использовать обозначения: $F^{(s)}_{*,j}(\mu) = F^{(s)}_{*,j,b}(\mu)$.

Вектор $q \in P^m_+$ однозначно определяет члены тождественного резонанса (4.19).

б) Внутренний резонанс. Любой вектор $(h, q, r) \in R^{(1)}_s$ удовлетворяет соотношению (4.20) при некотором фиксированном значении τ, которое обозначим через $\tau^{(s)}_*(^* \Longrightarrow h, q, r)$.

При $\mu = \mu_0$ коэффициент при $\varphi^{(s)}_{*,j}(\mu)$ в (4.28) имеет вид $e^{i\tau^{(s)}}\chi$.

Резонансная часть спектра функции $\varphi_{*,j}^{(s)}$ имеет вид

$$R_{G_{*,j}^{(s)}} = \Big\{-\tau_*^{(s)}\chi\Big\}.$$

Поэтому для коэффициентов внутреннего резонанса получим

$$g_{*,j}^{(s)}(n,\mu) = g_{*,j}^{(s)}(\mu)\exp\Big(-\tau_*^{(s)}\chi n\Big),$$

где $g_{*,j}^{(s)}$ — соответствующие коэффициенты Фурье функции $g_{*,j}^{(s)}(n,\mu)$.

Изложенное можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *1) Пусть вещественная F-система (1.1) с матрицей $A(\mu)$, удовлетворяющей условиям 1), 2) (п.4.2), обладает при $\mu = \mu_0$ единственным внутренним резонансом L-го порядка (4.15).*

2) Пусть в области D других внутренних резонансов нет.

Тогда резонансная непрерывная нормальная форма имеет вид

$$u_{sn+1} = \alpha_s(\mu)e^{l\varphi_{(s)}(\mu)}u_{sn} + u_{sn}\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\left[\sum_{|q|=1}^{l_j}F_{q,j}^{(s)}(\mu)(u_n\cdot\overline{u}_n)^q + \right.$$

$$\left. + \sum_{L-1}^{h_{j1}}{}' F_{*,j}^{(s)}(\mu)\exp(-l\tau_*^{(s)}\chi n)u_n^{\tau_*^{(s)}}(u_n\overline{u}_n)^q\right], \tag{4.27}$$

$$\nu_{bn+1} = \eta_b(\mu)\nu_{bn} + \varepsilon_{b+2m}\nu_{b+1} + \sum_{c=1}\nu_n^{l_b}\left[\sum_{j=N\geq 1}^{\infty}\left(\sum_{|q|=j}g_{q,c}^{(b+2m)}(\mu)(u_n\overline{u}_n)^q + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum_{L+1}^{n_j}{}' F_{*,j}^{(b+2m)}(\mu)\exp(-l\tau_*^{(b+2m)}\chi n)u^{\tau_*^{(b+2m)}}(u_n\overline{u}_n)^q\right)\right)\right],$$

где $s = \overline{1,m}$, $b = \overline{1,k}$.

Штрих при сумме означает, что суммирование ведется лишь по $p = (h,q,r)\in R_s^{(1)}$ с нормой, меняющейся в указанных границах $l_j = \left\lfloor \frac{1}{2}n_j \right\rfloor$.

Сделаем несколько замечаний к теореме. В системе (4.27) уравнения для $\overline{u}_{sn+1}$ не выписаны. Каждый полином при ε^j состоит из двух групп членов: тождественного и внутреннего резонанса.

Если при некотором j $l_j < L-1$, то члены внутреннего резонанса отсутствуют.

4.5. Приведение нормальной формы к автономному виду. Из (1.1) видно, что при наличии в (1.1) внутреннего резонанса нормальная форма при $D \neq 0$ не является автономной системой. Но нетрудно добиться, чтобы система (4.27) стала автономной. Для этого выполним замены $u_{sn} \Longrightarrow z_{sn}$, $\overline{u}_{sn} \Longrightarrow \overline{z}_{sn}$ по формулам $u_{sn} = z_{sn}e^{i\varphi_s(\mu_0)n}$. При этом система (4.27) примет вид

$$z_{sn+1} = \alpha_s(\mu)l^{i\varphi_s(\mu)-i\varphi_s(\mu_0)}z_{sn} + \left[z_{sn}\sum_{j=1}^{\infty_j}\varepsilon^j\left(\sum_{|q|=1}^{l_j}F_{q,j}^{(s)}(\mu)(z_n\overline{z}_n)^q + \sum_{L-1}^{n_j}F_{*,j}^{(s)}(\mu)z^{\tau_*^{(s)}\chi}(z_n\overline{z}_n)^q\right)\right],$$

$$\upsilon_{bn+1} = \eta_b(\mu)\upsilon_{bn} + \varepsilon_{b+2m}\upsilon_{b+1n} + \sum_{i=1}^{k} \upsilon_n^{l_b} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{|q=1|}^{l_j} F_{q,p,0}^{(b+2m)}(\mu)(z_n\overline{z}_n)^q + \right.$$

$$\left. + \sum_{L+1}^{n_j} F_{*,j}^{(b+2m)}(\mu) z^{\tau_*^{(b+2m)k}} (z_n\overline{z}_n)^q \right]. \tag{4.28}$$

Полученные системы будут использованы для исследования устойчивости и колебаний в F-системах. Отметим, что, если исходные системы автономны, то после замены $u_{sn} \Longrightarrow z_{sn}$, нормальная форма автономных систем примет такой же вид, как (4.28). Таким образом, полученные системы позволяют одновременно изучать автономные и почти периодические системы. Отметим, что в автономном случае члены внутреннего резонанса могут присутствовать только при $m \geq 2$.

Цитированная литература

1. **Бопаев К.Б.** //Математический журнал. Алматы. 2003. Т.3, №1(7). С.42–54.
2. **Левитан Б.М.** Почти периодические функции. М., 1953.
3. **Бопаев К.Б.** //Препринт №1. КазГУ и НГУ. Алматы-Новосибирск, 1995.
4. **Бопаев К.Б.** // Препринт № 2. КазГУ и НГУ. Алматы-Новосибирск. 1995.

Поступила в редакцию 03.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 41 – 51*

УДК 519.624

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Д. С.Джумабаев, Б. Б.Минглибаева

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

В терминах матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h)$, составляемой по правой части дифференциального уравнения, и граничному условию установлены признаки корректной разрешимости краевой задачи с параметром. Получены рекуррентные формулы нахождения элементов матрицы $[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}$.

Дифференциальные уравнения, встречающиеся в приложениях, обычно содержат различные параметры, характеризующие влияние тех или иных факторов на описываемые ими процессы.

Наличие параметров приводит к различным задачам для дифференциального уравнения (см.[1]).

Двухточечные краевые задачи с параметрами изучаются, начиная с работ Хикозака-Нобору [2], Завиша[3] и Такахаши [4]. В дальнейшем краевые задачи с параметрами различными методами исследовались многими авторами [5–21]. В соответствии с применяемым методами, подходами условия разрешимости задачи и сходимости предлагаемых алгоритмов нахождения ее решения были получены в различных терминах.

В настоящей статье методом параметризации (м.п.) [22] исследуется линейная двухточечная краевая задача с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad t \in [0,T],\ x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \tag{1}$$

$$C_0\mu + C_1x(0) + C_2x(T) = d, \quad d \in R^{n+m}, \quad ||x|| = \max_{i=1,..,n} |x_i|, \tag{2}$$

где матрицы $A(t), B(t)$, вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$. Через α, β обозначим числа, ограничивающие сверху нормы матриц $A(t), B(t)$ при $t \in [0,T]$:

$$||A(t)|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \le \alpha, \quad ||B(t)|| = \max_i \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}(t)| \le \beta.$$

Keywords: *parametrization's method, two-point boundary-value problem with parameter, ordinary differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B08

Задача заключается в определении пары $(\mu^*, x^*(t))$, где функция $x^*(t)$ при $\mu = \mu^*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и краевым условиям (2). Отметим, что здесь неизвестный параметр μ содержится как в дифференциальном уравнении, так и в краевом условии. При дополнительных предположениях относительно матриц C_s, $s = 0, 1, 2$ получим рассмотренные ранее частные виды двухточечных краевых задач с параметром. Частным случаем (2) при $m = n$ являются наиболее изученные граничные условия

$$x(0) = x^1, \quad x(T) = x^2, \quad x^s \in R^n, \quad s = 1, 2. \tag{2'}$$

Задача (1), (2′) часто возникает в теории управления: из области изменения μ следует выбрать такое управление μ^*, чтобы процесс, описываемый дифференциальным уравнением (1) и имеющий начальное состояние x^1, через время T находился бы в заданном состоянии x^2. Задачу (1), (2) можно также рассматривать как обратную: известна структура дифференциального уравнения $(A(t), B(t), f(t))$ и по дополнительной информации (2) надо восстановить правую часть дифференциального уравнения (1).

Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) в терминах обратимости матрицы специальной структуры $\widetilde{Q}_\nu(h)$, составляемой по исходным данным, получены в [23,24].

Целью работы является определение коэффициентных условий корректной разрешимости задачи (1), (2) и нахождение рекуррентных формул, позволяющих поблочно определить элементы матрицы $[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}$.

Возьмем шаг $h > 0 : Nh = T$ и произведем разбиение

$$[0, T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh).$$

Через $x_r(t)$ обозначим сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[(r-1), rh)$ и задачу (1), (2) сведем к многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + B(t)\mu + f(t), \qquad t \in [(r-1), rh), \quad r = 1, ..., N, \tag{3}$$

$$C_0\mu + C_1 x_1(0) + C_2 \lim_{t \to T-0} x_N(t) = d, \tag{4}$$

$$\lim_{t \to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \qquad s = 1, ..., N-1, \tag{5}$$

где (5) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала $[0, T)$. Задачи (1), (2) и (3)–(5) эквивалентны в следующем смысле. Если пара $(\mu, x(t))$ — решение задачи (1), (2), то пара $(\mu, x[t])$, где $x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))'$ — система сужений функции $x(t)$, является решением задачи (3)–(5). Наоборот, если $(\widetilde{\mu}, \widetilde{x}[t])$, где $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_N(t))'$ — решение задачи (3)–(5), то пара $(\tilde{\mu}, \tilde{x}(t))$ с функцией $\tilde{x}(t)$, определяемой равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$, $\quad t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1, ..., N$, $\quad \tilde{x}(T) = \lim_{t \to T-0} \tilde{x}_N(t)$, будет решением задачи (1), (2). В первом утверждении дифференциальные уравнения (3) и условие (4) выполняются в силу (1), (2), а система равенств (5) следует из непрерывности на $[0, T]$ функции $x(t)$. Во втором утверждении ввиду (3)–(5) функция $\tilde{x}(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и удовлетворяет краевому условию (2). При этом она имеет непрерывную производную и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) во всех точках $[0, T]$ кроме точек разбиения $t = (s-1)h$, $s = 2, ..., N$. Тогда из (3), (5) и непрерывности $A(t), B(t), f(t)$ на $[0, T]$ следует, что функция $\tilde{x}(t)$ имеет непрерывные производные и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и при $t = (s-1)h$, $s = 2, ..., N$.

Введем обозначения: $\lambda_0 = \mu$, $\lambda_r = x_r[(r-1)h]$, $r = 1, ..., N$ и на каждом интервале $[(r-1)h, rh)$, произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получим многоточечную краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r + B(t)\lambda_0 + f(t), \quad u_r[(r-1)h] = 0, \tag{6}$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1, ..., N,$$

$$C_0\lambda_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_N + C_2 \lim_{t \to T-0} u_N(t) = d, \tag{7}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = 1, ..., N-1. \tag{8}$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_N)' \in R^{nN+m}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), ..., u_N(t))'$ — решение задачи (6)–(8), то пара $(\mu, x[t])$ с параметром $\mu = \lambda_0$ и системой функций $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), ..., \lambda_N + u_N(t))'$ будет решением задачи (3)–(5). И, наоборот, если пара $(\tilde{\mu}, \tilde{x}[t])$ — решение задачи (3)–(5), то пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\mu}, \tilde{x}_1(0), ..., \tilde{x}_N((N-1)h))'$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_2(h), ..., \tilde{x}_N(t) - \tilde{x}_N[(N-1)h])'$, будет решением задачи (6)–(8).Появление начального условия в точке $t = (r-1)h$ позволяет при фиксированных значениях параметров λ_0, λ_r функцию $u_r(t)$ определить из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} B(\tau)\lambda_0 d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau, \tag{9}$$

$t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1, ..., N$. Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (9) и повторив этот процесс $\nu \, (\nu = 1, 2, \ldots)$ раз, получим представление функции $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + H_{\nu,r}(t)\lambda_0 + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u, t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{10}$$

где

$$D_{\nu,r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) ... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} ... d\tau_1,$$

$$H_{\nu,r}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} B(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} B(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j ... d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) ... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u, t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad \tau_0 = t, r = \overline{1, N}.$$

Переходя к пределу при $t \to rh - 0$, в правой части (10) имеем

$$\lim_{t \to rh-0} u_r(t) = H_{\nu r}(rh)\lambda_0 + D_{\nu r}(rh)\lambda_r + F_{\nu r}(rh) + G_{\nu r}(u, rh). \tag{11}$$

Подставляя в (7), (8) вместо $\lim\limits_{t \to rh-0} u_r(t), \quad r = 1, ..., N$ соответствующие им правые части (11) и умножая обе части (7) на $h > 0$, получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных параметров λ

$$\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda = -F_\nu(h) - G_\nu(u, h), \quad \lambda \in R^{nN+m}, \tag{12}$$

где $\widetilde{Q}_\nu(h) =$

$$= \begin{bmatrix} [C_0+C_2H_{\nu N}(Nh)]h & C_1h & 0 & \dots & 0 & C_2[I+D_{\nu,N}(Nh)]h \\ H_{\nu 1}(h) & I+D_{\nu 1}(h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{\nu,N-1}((N-1)h) & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu,N-1}[(N-1)h] & -I \end{bmatrix},$$

$$F_\nu(h) = (-hd + hC_2F_{\nu,N}(Nh), F_{\nu 1}(h), \dots, F_{\nu,N-1}((N-1)h))' \in R^{nN+m},$$

$$G_\nu(u,h) = (hC_2G_{\nu,N}(u,Nh), G_{\nu 1}(u,h), \dots, G_{\nu,N-1}(u,(N-1)h))' \in R^{nN+m}.$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda, u[t])-$ решения задачи (6)–(8) имеем замкнутую систему уравнений (9), (12). Если известен параметр $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_N)'$, то из (9) найдем систему решений задач Коши $u[t]$. Если известны $u[t]$, то из (12) определим значения параметра $\lambda \in R^{nN+m}$. Так как неизвестными являются как λ, так и $u[t]$, то для нахождения решения задачи (6)–(8) применяется метод последовательных приближений. При этом учитывается, что функция $u_r(t)$ является решением задачи Коши на $[(r-1)h, rh)$ с нулевым начальным условием в точке $t = (r-1)h, r = 1, ..., N$ и пара $(\lambda, u[t])$ — решение задачи (6)–(8) находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]),\ k = 0, 1, 2, ...$, определяемой по следующему алгоритму:

0 шаг. а)Предполагая, что при выбранных $h > 0 : Nh = T,\ \nu \in \mathbb{N}$ матрица $\widetilde{Q}_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in R^{nN+m}$ определяем из уравнения $\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda = -F_\nu(h)$, т.е $\lambda^{(0)} = -[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}F_\nu(h)$.

б)Используя векторные координаты $\lambda^{(0)} = (\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, ..., \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN+m}$ и решая задачи Коши (6) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(0)}, \lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ на интервалах $[(r-1)h, rh)$, находим функции $u_r^{(0)}(t), r = 1, ..., N$.

1 шаг. а)В правой части (12) вместо u подставляя $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), ..., u_N^{(0)}(t))'$, первое приближение по параметру $\lambda^{(1)}$ определяем из уравнения $\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda = -F_\nu(h) - G_\nu(u^{(0)}, h)$. Ввиду обратимости матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h)$ получим $\lambda^{(1)} = -[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}[F_\nu(h) + G_\nu(u^{(0)}, h)]$.

б)Используя $\lambda^{(1)} = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, ..., \lambda_N^{(1)})' \in R^{nN+m}$ и решая задачу Коши (6) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(1)},\ \lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ на интервалах $[(r-1)h, rh)$, находим функции $u_r^{(1)}(t), r = 1, ..., N$. И т.д.

Алгоритм м.п. зависит от двух числовых параметров: $h > 0 : Nh = T$ и $\nu \in \mathbb{N}$. В теореме 1 из [24, с.59] доказано, что если существуют числа h, ν, при которых матрица $\widetilde{Q}_\nu(h)$ обратима и выполняются некоторые неравенства, то алгоритм сходится. В теореме также показано, что эти условия обеспечивают однозначную разрешимость задачи (1), (2), и дана оценка разности между решением и его приближением, получаемым на k-ом шаге алгоритма.

Через $C([0,T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$. Из теоремы 1 [24] и установленных в ней оценок следует

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T$ и $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $\widetilde{Q}_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима и выполняются неравенства*

$$а)\ ||[Q_\nu(h)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(h),$$

$$б)\ q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \cdot max(1, h\|C_2\|)\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \dots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \beta h(e^{\alpha h} - 1 - ... - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!})\right\} < 1.$$

Тогда краевая задача с параметром (1), (2) имеет единственное решение $(\mu^*, x^*(t))$ и для него справедлива оценка

$$max(||\mu^*||, ||x^*||_1) \le M_\nu(h)\max(||d||, ||f||_1), \tag{13}$$

где

$$M_\nu(h) = \Big\{\gamma_\nu(h)[e^{\alpha h} - 1 + \beta h e^{\alpha h}]\max\{1 + h||C_2||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\} + e^{\alpha h}\Big\}h\times$$

$$\times\Big\{\gamma_\nu(h)(1+\beta h)e^{\alpha h}\frac{\max(1, h||C_2||)}{1-q_\nu(h)}\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + 1\Big\} + \gamma_\nu(h)\max\{1 + h||C_2||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\}h.$$

О п р е д е л е н и е. *Задача (1),(2) называется корректно разрешимой, если для любых* $f(t), d$ *она имеет единственное решение* $(\mu^*, x^*(t))$ *и для него справедливо неравенство*

$$\max(||\mu^*||, ||x^*||_1) \le K max(||f||_1, ||d||),$$

где $K - const$, *не зависящая от* $f(t), d$.

Число K называется константой корректной разрешимости задачи (1), (2).

Из оценки (13) следует, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K = M_\nu(h)$. В теореме 2 из [24, с.61] доказано, что если задача (1), (2) однозначно разрешима, то для любого $h > 0 : Nh = T$ существует $\nu = \nu(h)$ такое, что при этих h, ν выполняются условия теоремы 1. Отсюда и из теоремы 1 следует, что однозначная разрешимость задачи (1), (2) эквивалентна ее корректной разрешимости.

Пусть пара $(\mu^*, x^*(t))$ — решение задачи (1), (2). Тогда а)пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с параметрами $\lambda_0^* = \mu^*, \lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, $r = 1, ..., N$ и функциями $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(r-1)h]$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1, ..., N$ будет решением задачи (6)–(8); б) существуют такие числа β_1, β_2, что $||\lambda^*|| \le \beta_1$, $||u_r^*(t)|| \le \beta_2$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$; в)для любого $\nu \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$u_r^*(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r^* + H_{\nu,r}(t)\lambda_0^* + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u^*, t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \tag{14}$$

$$\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda^* = -F_\nu(h) - G_\nu(u^*, h). \tag{15}$$

Так как $||G_{\nu,r}(u^*, t)|| \le max(1, h||C_2||)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\beta_2$ и $D_{\nu,r}(t)$, $H_{\nu,r}(t)$, $F_{\nu,r}(t)$ при $\nu \to \infty$ на $[(r-$ $-1)h, rh)$ равномерно сходятся к

$$D_{*,r}(t) = \sum_{j=0}^\infty \int\limits_{(r-1)h}^t A(\tau_1)... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}...d\tau_1,$$

$$H_{*,r}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^t B(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{(r-1)h}^t A(\tau_1)\ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} B(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j...d\tau_1,$$

$$F_{*,r}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^t f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{(r-1)h}^t A(\tau_1)... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} f(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j\ldots d\tau_1, \ r = \overline{1, N},$$

то, переходя к пределу при $\nu \to \infty$ в (14), (15)и разделив обе части (15) на $h > 0$, получим

$$u_r^*(t) = D_{*,r}(t)\lambda_r^* + H_{*,r}(t)\lambda_0^* + F_{*,r}(t), \ t \in [(r-1)h, rh), \ r = \overline{1, N}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{h}\widetilde{Q}_*(h)\lambda^* = -F_*(A, C_2, f, d), \tag{17}$$

где $F_*(A, C_2, f, d) = (-d + C_2F_{*,N}(Nh),\ \frac{1}{h}F_{*,1}(h), ..., \frac{1}{h}F_{*,N-1}[(N-1)h])' \in R^{nN+m}$. Таким образом, если $(\lambda^*, u^*[t])$ — решение задачи (6)–(8), то параметр $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_N^*)' \in R^{nN+m}$

удовлетворяет уравнению (17), а соответствующие им решения задач Коши (6) — функции $u_r^*(t)$ имеют вид (16). Теперь пусть $\tilde\lambda = (\tilde\lambda_0, \tilde\lambda_1, ..., \tilde\lambda_N)' \in R^{nN+m}$ — решение систем уравнений

$$[C_0 + C_2H_{*,N}(Nh)]\lambda_0 + C_1\lambda_1 + C_2[I + D_{*,N}(Nh)]\lambda_N = d - C_2F_{*,N}(Nh), \tag{18}$$

$$\frac{1}{h}H_{*,s}(sh)\lambda_0 + \frac{1}{h}[I + D_{*,s}(sh)]\lambda_s - \frac{1}{h}\lambda_{s+1} = -\frac{1}{h}F_{*,s}(sh),\ s = \overline{1, N-1}, \tag{19}$$

т.е. $\frac{1}{h}\widetilde{Q}_*(h)\tilde\lambda = -F_*(A, C_2, f, d)$ и $\tilde u[t] = (\tilde u_1(t), \tilde u_2(t), ..., \tilde u_N(t))'$– система решений задач Коши (6) на $[(r-1)h, rh)$ при $\tilde\lambda_0 = \tilde\lambda_0,\ \tilde\lambda_r = \tilde\lambda_r,\ r = \overline{1, N}$. Покажем, что пара $(\tilde\lambda, \tilde u[t])$ — решение задачи (6)–(8). Так как $\tilde u_r(t)$ — решение задачи Коши (6) при $\lambda_0 = \tilde\lambda_0,\ \lambda_r = \tilde\lambda_r$, то из (16) и единственности решения задачи Коши (6) при фиксированных значениях параметров λ_0, λ_r следует, что

$$\tilde u_r(t) = D_{*,r}(t)\tilde\lambda_r + H_{*,r}(t)\tilde\lambda_0 + F_{*,r}(t), t \in [(r-1)h, rh),\ r = \overline{1, N}, \tag{20}$$

Ввиду (18), (19) имеют место равенства

$$C_0\tilde\lambda_0 + C_1\tilde\lambda_1 + C_2\tilde\lambda_N + C_2[D_{*,N}(Nh)\tilde\lambda_N + H_{*,N}(Nh)\tilde\lambda_0 + F_{*,N}(Nh)] = d, \tag{21}$$

$$\tilde\lambda_s + [D_{*,s}(sh)\tilde\lambda_s + H_{*,s}(sh)\tilde\lambda_0 + F_{*,s}(sh)] = \tilde\lambda_{s+1},\ s = \overline{1, N-1}. \tag{22}$$

Тогда в силу (20) выражения, стоящие в квадратных скобках в (21), (22), равны $\lim\limits_{t\to rh-0} \tilde u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ и пара $(\tilde\lambda, \tilde u[t])$ удовлетворяет также (7) и (8).

Следующее утверждение устанавливает необходимость условий теоремы 1 при фиксированных $\nu \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Краевая задача с параметром (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h = h(\nu) > 0 : Nh = T$, при котором матрица $\widetilde{Q}_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы для корректной разрешимости задачи (1), (2) следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть задача (1),(2) корректно разрешима с константой K. Тогда, как установлено в теореме 2 из [24, с.61], матрица $\widetilde{Q}_*(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима при любом $h > 0 : Nh = T$. Покажем существование $h_0 > 0$, при котором для любого $h \in (0, h_0] : Nh = T$ справедлива оценка

$$||[\widetilde{Q}_*(h)]^{-1}|| \le \frac{\gamma}{h}, \tag{23}$$

где $\gamma - const$, не зависящая от h. Для этой цели рассмотрим уравнение

$$Q_h\lambda \equiv \frac{1}{h}\widetilde{Q}_*(h)\lambda = c, \quad \lambda, c \in R^{nN+m}. \tag{24}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $h_0 = h_0(\epsilon)$ выберем, удовлетворяющим неравенству $\frac{1}{\alpha h_0}(e^{\alpha h_0} - 1 - \alpha h_0) \le \frac{2\varepsilon}{(4+\varepsilon)(2+\varepsilon)}$. Тогда для любых $h \in (0, h_0]$, $c = (c_0, c_1, ..., c_N)' \in R^{nN+m}$ можно построить функцию $f_c(t) \in C([0, T], R^n)$, обладающую свойствами $\frac{1}{h}F_{*,s}(sh) = -c_{s+1},\ s = \overline{1, N-1},\ \frac{1}{h}F_{*,N}(Nh) = 0$, $||f_c||_1 \le (1 + \frac{\varepsilon}{2})||c||$.

Для этого по $c_{s+1}, s = \overline{1, N-1}$, используя лемму из [22, с.57], следует построить непрерывные на $[(s-1)h, sh]$ функции $f_{s+1}(t)$, удовлетворяющие условиям $f_{s+1}[(s-1)h] = f_{s+1}(sh) = 0$, $\max\limits_{t\in[(s-1)h, sh]} ||f_{s+1}(t)|| \le (1 + \frac{\varepsilon}{2})||c_{s+1}||$, $\quad F(A, f_{s+1}) \equiv \frac{1}{h}\int\limits_{(s-1)h}^{sh} f_{s+1}(\tau_1)d\tau_1 +$

$+\frac{1}{h}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)...\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{j-1}}A(\tau_j)\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_j}f_{s+1}(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j...d\tau_1 = c_{s+1}$ и функцию $f_c(t)$ определить равенствами $f_c(t) = f_{s+1}(t)$, $t \in [(s-1)h, sh]$, $s = \overline{1,N}$, $f_c(t) = 0$, $t \in [T-h, T]$. Теперь, если взять $d_c = (c_0, c_1)' \in R^{n+m}$, то $\lambda_c = (\lambda_0^c, \lambda_1^c, ..., \lambda_N^c)' \in R^{nN+m}$ с координатами $\lambda_0^c = \mu_c, \lambda_r^c = x_c[(r-1)h]$, $r = \overline{1,N}$, где $(\mu_c, x_c(t))$ — решение задачи (1), (2) при $f(t) = f_c(t)$, $d = d_c$ будет единственным решением уравнения (24) и

$$||Q_h^{-1}c|| = ||\lambda_c|| = max(||\mu_c||, \max_{r=\overline{1,N}}||x_c[(r-1)h]||) \leq$$

$$\leq max(||\mu_c||, ||x_c||_1) \leq Kmax(||d_c||, ||f_c||_1). \tag{25}$$

В последнем неравенстве (25) мы использовали корректную разрешимость задачи (1), (2). Учитывая, что по построению $f_c(t)$ и по выбору d_c имеет место неравенство $max(||d_c||, ||f_c||_1) \leq (1+\varepsilon/2)||c||$, из (25) получим оценку $||Q_h^{-1}c|| \leq (1+\varepsilon/2)K||c||$, откуда ввиду произвольности $c \in R^{nN+m}$ следует, что $||Q_h^{-1}|| \leq (1+\varepsilon/2)K$. Поэтому для любого $h \in (0, h_0] : Nh = T$ $||[\widetilde{Q}_*(h)]^{-1}|| = \frac{1}{h}||Q_h^{-1}|| \leq (1+\varepsilon/2)\frac{1}{h}$, где K — константа корректной разрешимости задачи (1), (2), и норма не зависит от h, т.е. (23) справедлива с $\gamma = (1+\varepsilon/2)K$.

Так как

$$||\widetilde{Q}_*(h) - \widetilde{Q}_\nu(h)|| \leq max(1, h||C_2||)\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - ... - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \beta h[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - ... - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}]\right\},$$

то, выбирая $h_1 = h_1(\varepsilon, \nu) \in (0, h_0] : Nh_1 = T$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{(1+\frac{\varepsilon}{2})K}{h}max(1, h||C_2||)\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - ... - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \right.$$

$$\left. + \beta h[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - ... - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}]\right\} < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}, \tag{26}$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [25, с.142] получим, что матрица $\widetilde{Q}_\nu(h)$ обратима при всех $h \in (0, h_1] : Nh = T$ и для ее обратной справедлива оценка

$$||[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}|| \leq (1+\varepsilon)\frac{K}{h}. \tag{27}$$

Отсюда при $h = h_1$ получим обратимость матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h_1)$ и выполнимость неравенства а) теоремы с числом $\gamma_\nu(h_1) = (1+\varepsilon)\frac{K}{h_1}$.

Из (26) следует неравенство б) $q_\nu(h_1) = \frac{1}{h_1}(1+\varepsilon)K \times max(1, h||C_2||)(e^{\alpha h} - 1 - ... - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \beta h[e^{\alpha h} - 1 - ... - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}]) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2} < 1$. Теорема 2 доказана.

Следующее утверждение устанавливает взаимосвязь между константой корректной разрешимости K и числом, ограничивающим сверху норму матрицы, обратной к $\widetilde{Q}_\nu(h)$.

Теорема 3. *Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h_0 = h_0(\nu)$ такое, что при всех $h \in (0, h_0] : Nh = T$ матрица $\widetilde{Q}_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима и*

$$||[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}|| \leq \frac{\gamma}{h}, \tag{28}$$

где $\gamma - const$, не зависящая от h. Причем, если известна K — константа корректной разрешимости задачи (1), (2), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\overline{h} = \overline{h}(\varepsilon, \nu) > 0$ и оценка (28) выполняется с константой $\gamma = (1+\varepsilon)K$ при $h \in (0, \overline{h}] : Nh = T$. И, обратно, если имеет место (28), то $K = \gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима и K — ее константа.

Тогда, как было установлено при доказательстве теоремы 2, для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_1 = h_1(\varepsilon, \nu) > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_1] : Nh = T$ матрица $\widetilde{Q}_\nu(h)$ обратима и согласно (27) оценка (28) выполняется с константой $\gamma = (1+\varepsilon)K$.

Достаточность. Пусть матрица $\widetilde{Q}_\nu(h)$ обратима при всех $h \in (0, h_0] : Nh = T$ и ее обратная удовлетворяет (28). Учитывая, что в силу (28) $q_\nu(h) = O(h^\nu)$ и выбирая $\tilde{h} \in (0, h_0] : N\tilde{h} = T$, удовлетворяющим неравенству $q_\nu(\tilde{h}) < 1$, из теоремы 1 получим корректную разрешимость задачи (1), (2) с константой $M_\nu(\tilde{h})$. Так как при наших предположениях $M_\nu(h)$ имеет вид

$$M_\nu(h) = \left\{\frac{\gamma}{h}[e^{\alpha h} - 1 + \beta h e^{\alpha h}] \max\{1 + h||C_2|| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}\} + e^{\alpha h}\right\} h \times$$

$$\times \left\{\frac{\gamma}{h}(1+\beta h) e^{\alpha h} \frac{\max(1, h||C_2||)}{1 - q_\nu(h)} \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + 1\right\} + \frac{\gamma}{h} \max\{1 + h||C_2|| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}\} h,$$

то, переходя к пределу при $h \to 0$, получим, что $K = \lim\limits_{h \to 0} M_\nu(h) = \gamma$. Теорема 3 доказана.

Одним из основных условий корректной разрешимости задачи (1), (2) является обратимость матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h)$ при некоторых ν, h. Блочно-ленточная структура матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h)$ позволяет установить аналогичные (5.5) из [22, с.62] рекуррентные формулы, поблочно определяющие элементы матрицы $[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}$. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda = p, \quad \lambda, p \in R^{nN+m}, \tag{29}$$

которое поблочно записывается в виде

$$h[C_0 + C_2 H_{\nu,N}(Nh)]\lambda_0 + hC_1\lambda_1 + hC_2[I + D_{\nu,N}(Nh)]\lambda_N = p_1, \tag{30}$$

$$H_{\nu,j}(jh)\lambda_0 + [I + D_{\nu,j}(jh)]\lambda_j - \lambda_{j+1} = p_{j+1}, \ j = 1, 2, ..., N-1. \tag{31}$$

На основе (31) выразим $\lambda_{r+1}, \ r = \overline{1, N-1}$ через λ_0, λ_1 и $p_j, j = \overline{2, r}$:

$$\lambda_{r+1} = \left\{H_{\nu,r}(rh) + \sum_{k=r}^{2} \prod_{i=r}^{k} [I + D_{\nu,i}(ih)] H_{\nu,k-1}[(k-1)h]\right\}\lambda_0 +$$

$$+ \prod_{i=r}^{1} [I + D_{\nu,i}(ih)]\lambda_1 - p_{r+1} - \sum_{k=r}^{2} \prod_{i=r}^{k} [I + D_{\nu,i}(ih)] p_k. \tag{32}$$

Откуда при $r = N-1$ имеем

$$\lambda_N = \left\{H_{\nu,N-1}[(N-1)h] + \sum_{k=N-1}^{2} \prod_{i=N-1}^{k} [I + D_{\nu,i}(ih)] H_{\nu,k-1}[(k-1)h]\right\}\lambda_0 +$$

$$+ \prod_{i=N-1}^{1} [I + D_{\nu,i}(ih)]\lambda_1 - p_N - \sum_{k=N-1}^{2} \prod_{i=N-1}^{k} [I + D_{\nu,i}(ih)] p_k. \tag{33}$$

В (30) вместо λ_N подставив правую часть (33), получим уравнение

$$hM(\lambda_0, \lambda_1)' = p_1 + hC_2 \sum_{j=2}^{N} \prod_{s=N}^{j} [I + D_{\nu,s}(sh)] p_j \tag{34}$$

с матрицей

$$M = [C_0 + C_2 H_{\nu,N}(Nh) + C_2 \sum_{j=2}^{N} \prod_{s=N}^{j} [I + D_{\nu,s}(sh)] H_{\nu,j-1}[(j-1)h]; C_1 + C_2 \prod_{s=N}^{j} [I + D_{\nu,s}(sh)]].$$

Лемма 1. *Матрица $\widetilde{Q}_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $M : R^{n+m} \to R^{n+m}$.*

Доказательство. Пусть матрица $\widetilde{Q}_\nu(h)$ обратима. Тогда однородное уравнение

$$hM(\lambda_0, \lambda_1)' = 0$$

имеет только нулевое решение $\lambda_0 = 0 \in R^m$, $\lambda_1 = 0 \in R^n$. Действительно, если λ_0 или λ_1 — ненулевой вектор, то с помощью (32), где $p_i = 0$, $i = \overline{1,N}$, определив остальные λ_{r+1}, $r = \overline{1, N-1}$, получим ненулевое решение $\lambda \in R^{nN+m}$ однородного уравнения $\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda = 0$, что противоречит обратимости матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h)$.

Теперь пусть обратима матрица M. Тогда определив $(\lambda_0, \lambda_1)'$ из (34) и подставляя их в (32) найдем решение $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_N)' \in R^{nN+m}$ уравнения (29) при любом $p \in R^{nN+m}$.

Покажем единственность решения уравнения (29). Действительно, если $\lambda, \tilde{\lambda}$ — решения уравнения (29) при заданном $p \in R^{nN+m}$, то $\mu = \lambda - \tilde{\lambda}$ будет решением однородного уравнения $\widetilde{Q}_\nu(h)\lambda = 0$. Так как для блочных элементов вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_N)' \in R^{nN+m}$ справедливы равенства

$$\mu_{r+1} = H_{\nu,r}(rh) + \sum_{k=r}^{2} \prod_{i=r}^{k} [I + D_{\nu,i}(ih)] H_{\nu,k-1}[(k-1)h]\mu_0 + \prod_{i=r}^{1} [I + D_{\nu,i}(ih)]\mu_1, \ r = \overline{1, N-1}, \quad (35)$$

то отсюда, определив μ_N через μ_0, μ_1 и подставив его в соответствующее однородное уравнение (30), получим, что $M(\mu_0, \mu_1)' = 0$. Из обратимости матрицы M следует $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$ и тогда из (35) $\mu_{r+1} = 0$ для всех $r = \overline{1, N-1}$. Поэтому матрица $\widetilde{Q}_\nu(h)$ обратима. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если матрица $M : R^{n+m} \to R^{n+m}$ обратима, то блочные элементы матрицы*

$$[\tilde{Q}_\nu(h)]^{-1} = (v_{i,j}), i, j = \overline{1, N}$$

можно определить рекуррентными формулами:

$$v_{1,1} = \frac{1}{h} M^{-1}, \ v_{1,N} = M^{-1} C_2 [I + D_{\nu,N}(Nh)], \quad (36)$$

$$v_{1,r} = v_{1,r+1}[I + D_{\nu,r}(rh)], \ r = \overline{2, N-1}, \quad (37)$$

$$v_{2,j} = [H_{\nu,1}(h), I + D_{\nu,1}(h)] v_{1,j}, \ j \neq 2, \ j = \overline{1, N} \quad (38)$$

$$v_{2,2} = [H_{\nu,1}(h), I + D_{\nu,1}(h)] v_{1,2} - I, \quad (39)$$

$$v_{i,j} = H_{\nu,i-1}[(i-1)h] P_0 v_{1,j} + [I + D_{\nu,i-1}[(i-1)h]] v_{i-1,j}, \ i = 3, ..., N; \ i \neq j, \quad (40)$$

$$v_{i,i} = H_{\nu,i-1}[(i-1)h] P_0 v_{1,i} + [I + D_{\nu,i-1}[(i-1)h]] v_{i-1,i} - I, \ i = 3, ..., N \quad (41)$$

где $P_0 = [I_m, 0]$ — $m \times (m+n)$-матрица, I_m — единичная матрица размерности m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из обратимости матрицы M по лемме 1 следует обратимость матрицы $\widetilde{Q}_\nu(h)$.

Ввиду обратимости M из (34) имеем

$$(\lambda_0, \lambda_1)' = \frac{1}{h} M^{-1} p_1 + M^{-1} C_2 \sum_{r=2}^{N} \prod_{s=N}^{j} [I + D_{\nu,s}(sh)] p_r,$$

откуда следуют (36), (37).

Из равенств

$$\lambda_2 = [H_{\nu,1}(h), I + D_{\nu,1}(h)](\lambda_0, \lambda_1)' - p_2, \ (\lambda_0, \lambda_1)' = \sum_{j=1}^{N} v_{1,j} p_j$$

получим (38), (39).

Последующие блочные строки найдем, используя равенства

$$\lambda_{r+1} = H_{\nu,r}(rh)\lambda_0 + [I + D_{\nu,r}(rh)]\lambda_r - p_{r+1}, \ r = \overline{2, N-1}.$$

Учитывая, что $\lambda_0 = \sum\limits_{j=1}^{N} P_0 v_{1,j} p_j$, имеем

$$\lambda_{r+1} = [I + D_{\nu,r}(rh)] \sum_{j=1}^{N} v_{r,j} p_j + H_{\nu,r}(rh) \sum_{j=1}^{N} P_0 v_{1,j} p_j - p_{r+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left\{ [I + D_{\nu,r}(rh)] v_{r,j} + H_{\nu,r}(rh) P_0 v_{1,j} \right\} p_j - p_{r+1}, r = \overline{2, N-1}. \tag{42}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты равенств (42) и

$$\lambda_{r+1} = \sum_{j=1}^{N} v_{r+1,j} p_j, \quad r = \overline{1, N-1},$$

получим (40), (41). Лемма 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М., 1954
2. **Hikosaka-Noboru** // Proc. Phys. Math. Soc. 1929. V.3. P.73–83.
3. **Zawischa K.** // Mon. fur Math. und Phys. 1930. V.37. P.104–124.
4. **Takahaschi S.** //Tohoku Math. Journal. 1931. V.34. P.249–256.
5. **Zwirner G.** //Rend. Sem. Mat. die Roma. 1939. V.4,I. P.235–252.
6. **Кибенко А.В, Перов А. И.** // Ученые записки АзГУ им.С.М.Кирова. Сер. физ.- мат. и хим. наук. 1961. №3. С.21–30.
7. **Кибенко А.В.** // Ученые записки АГУ им.С.М.Кирова. Сер. физ.-мат. и хим. наук. 1961. №6. С.13–21.
8. **Кибенко А.В.** //Докл.АН УССР. Сер.А. 1963. №3. С.309–314.
9. **Поволоцкий А.И., Мосягин В.В.** // Ученые записки ЛГТИ им.Герцена. 1967. Вып.302. С.247–251.

10. **Сеидов З.Б.** // Сиб. матем.журнал, №1,т.IX,1968,с.223 - 230

11. **Ахмедов К.Т., Сваричевская Н.А., Якубов М.А.** //Докл. АН АзССР. 1973. Т.29, №8. С.3–7.

12. **Хосабеков О.** //Докл. АН Тажд. ССР. 1973. №8. С.14–17.

13. **Гома И.А.** // Укр. матем.журнал. 1977. Т.29, №6. С.800–807.

14. **Эйдельман Ю.** //Дифференц. уравнения. 1978. Т.14, №7. С.1335–1337.

15. **Джумабаев Д.С.** // Изв.АН КазССР. Сер.физ.-мат. 1978. No 3. С.9–15.

16. **Джумабаев Д.С.** // Изв.АН КазССР.Сер.физ.-мат. 1979. No 3. С.5–12.

17. **Курпель Н.С., Марусяк А.Г.** //Укр. матем. журнал. 1980. Т.32, №2. С.223–226.

18. **Ронто Н.И., Ронто В.А.** // Краевые задачи математической физики. Киев, 1980. С.3–10.

19. **Самойленко А.М., Ронто Н.И., Ронто В.А.** // Докл.АН УССР. Сер.А. 1985. №7. С.23–26.

20. **Лучка А.Ю.** // Докл.АН УССР. Сер.А. 1989. №9. С.12–15.

21. **Лучка А.Ю.** // Докл. АН УССР.Сер.А. 1989. №10. С.22–27.

22. **Джумабаев Д.С.** // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1989. №1. С.50–66.

23. **Джумабаев Д.С.** // Изв. МН и ВО РК. Сер. физ.-мат. 1999. №1. С.31–37.

24. **Минглибаева Б.Б.** // Матем.журнал. 2003. Т.3, №2(8). С.55–62.

25. **Треногин В.В.** Функциональный анализ. М.,1980.

Поступила в редакцию 17.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 52 — 61*

УДК 532.526

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ

А. П. Макашева

Институт математики Министерства образования и науки
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 ked@math.kz

Численно решена задача истечения системы сверхзвуковых турбулентных струй, распространяющихся в спутном потоке с частично ограниченной областью. Решения получены методом расщепления с использованием матричной прогонки для параболизованных уравнений Навье-Стокса. Выявлены особенности пространственного течения в зависимости от степени нерасчетности, чисел Маха струи и потока.

Истечение системы сверхзвуковых турбулентных струй в спутный сверхзвуковой (дозвуковой) поток вызывает образование сложной структуры течения с распространяющимися скачками уплотнения, которые взаимодействуют с пограничным слоем. Исследованию этого явления посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ [1–3]. Большинство теоретических работ производились в двумерной постановке [2,3]. С точки зрения практики вызывают значительный интерес сопла, истечение из которых имеет трехмерную структуру.

Цель данной работы — численное исследование пространственных течений струй, истекающих из компоновок сопел при наличии стенки вдоль одной из координатных осей. Рассматривается турбулентный режим течения с умеренной степенью нерасчетности.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Рассматривается истечение системы сверхзвуковых турбулентных струй из круглых сопел одинакового размера в спутный поток с частично ограниченной областью.

Исходными являются система параболизованных уравнений Навье-Стокса в декартовой системе координат в консервативной форме

$$\frac{\partial E_3}{\partial x}+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial G_3}{\partial z}=0, \tag{1}$$

$$E_3 = E, \quad F_3 = F - F_v, \quad G_3 = G - G_v,$$

$$E=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+p)\,u\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E_t+p)\,v\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E_t+p)\,w\end{pmatrix},$$

Keywords: *pressure, jet, Mach number, boundary layer, supersonic (subsonic) flow*
2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

$$F_v=\frac{1}{Re}\left(0,\ \mu_t\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{4}{3}\mu_t\frac{\partial v}{\partial y},\ \mu_t\frac{\partial w}{\partial y},\ u\mu_t\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{4}{3}v\mu_t\frac{\partial v}{\partial y}+w\mu_t\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{k}{(\gamma-1)\,M_a^2\,\Pr}\frac{\partial T}{\partial y}\right)^T,$$

$$G_v=\frac{1}{Re}\left(0,\ \mu_t\frac{\partial u}{\partial z},\ \mu_t\frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{4}{3}\mu_t\frac{\partial w}{\partial z},\ u\mu_t\frac{\partial u}{\partial z}+v\mu_t\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{4}{3}w\mu_t\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{k}{(\gamma-1)\,M_a^2\,\Pr}\frac{\partial T}{\partial z}\right)^T,$$

$$p=(\gamma-1)\left[E_t-\frac{1}{2}\left(\rho u^2+\rho v^2+\rho w^2\right)\right],\quad c_v=\frac{1}{\gamma\,(\gamma-1)\,M_a^2},$$

$$T=\left(\frac{1}{\rho\,c_v}\right)\left[E_t-\frac{1}{2}\left(\rho u^2+\rho v^2+\rho w^2\right)\right].$$

Система (1) записана в безразмерной форме в общепринятых обозначениях. В качестве определяющих параметров приняты параметры на срезе сопла (u_0 , ρ_0 , T_0), а характерным размером — радиус среза сопла r. Давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_0\,u_0^2$.

Здесь $\gamma=c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей, c_p , c_v — теплоемкости при постоянных давлении и объеме, соответственно, μ_t — коэффициент турбулентной вязкости, M_a — число Маха струи, $\Pr$ — число Прандтля.

Предполагается, что газ – совершенный с показателем адиабаты $\gamma=1.4$.

Для замыкания системы уравнений (1) коэффициент турбулентной вязкости определяется с помощью алгебраической модели В.Н. Ватса, М.Дж. Вертле [4], поскольку эту модель можно применять для всей области течения, включая потенциальное ядро и участок полностью турбулентного течения

$$\mu_t=C\,\rho\,\delta^*\,\left(u_{\max}-u_{\min}\right),\tag{2}$$

где C — эмпирический коэффициент, δ^* — параметр характерного линейного масштаба.

Граничные условия. Для того, чтобы избежать расчета всей тонкой пристенной области, расчет производится с внешней границы вязкого подслоя $y=\delta_B$, в котором

$$\tau=\tau_w,\quad q=q_w,\quad v=w=0,\quad \frac{\partial\,p}{\partial\,y}=0,\quad 0\le z\le L_1,\quad x>0,\tag{3}$$

где τ и q — турбулентные напряжение трения и поток тепла; τ_w и q_w — турбулентные напряжение трения и поток тепла на стенке; $\delta_B=y^+/(u_\tau\mathrm{Re})$ — расстояние от стенки до турбулентного ядра потока, y^+ — универсальная переменная, $u_\tau=\left(\frac{1}{2}C_f\right)^{1/2}u_\infty$ — динамическая скорость, C_f — коэффициент трения потока на стенке, $u_\infty=\frac{M_\infty}{M_a}\sqrt{T_\infty}$, ∞ относится к значениям параметров спутного потока.

Турбулентное напряжение трения в (3) определяется формулой Прандтля [8]

$$\tau=\rho l^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

где $l=\chi\,y$ — путь смешения, $\chi=0.41$ — постоянная Кармана, напряжение трения на стенке $\tau_w=\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 C_f$. Тогда первое уравнение (3) запишется в виде

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=\delta_B}=\frac{Re}{\chi y^+}u_\tau^2,\quad 0\le z\le L_1,\quad x>0,$$

которое есть граничное условие для продольной составляющей скорости.

Выражение для турбулентного потока тепла иммет вид

$$q=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Связь трения с теплопереносом имеет вид [8]

$$q_w = \rho c_p u_\infty \left(T_w - T_\infty\right) \frac{C_f}{2}.$$

Здесь коэффициент сопротивления трубы $\lambda = \rho \nu_{tw} c_p$ ($\nu_{tw} = \chi y\, u_\tau$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости на стенке). Граничное условие для температуры запишется в виде

$$\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{y=\delta_B} = \frac{Re}{\chi y^+} \frac{u_\tau^2}{u_\infty} \left(T_w - T_\infty\right), \quad 0 \le z \le L_1, \quad x > 0.$$

Граничные условия на оси симметрии имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad z = 0\,, \quad z = L_1, \quad 0 \le y \le L, \quad x > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad v = 0, \quad y = L, \quad 0 \le z \le L_1\,, \quad x > 0,$$

где L , L_1 — поперечные размеры рассматриваемой области по осям y и z.

Граничные условия во входном сечении (начальные условия) задавались следующим образом. В струе

$$u = 1, \quad v = w = 0, \quad T = 1, \quad \rho = 1;$$

в спутном потоке

$$T = 1, \quad u = u_\infty, \quad v = w = 0, \quad p = \frac{1}{\gamma M_a^2\, n}.$$

В спутном потоке вблизи стенки скорость описывается степенным законом [3]

$$u = u_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}, \quad v = w = 0, \quad \delta_B \le y \le \delta, \quad 0 \le z \le L_1.$$

Здесь $\delta = 0.0586\,(u_\infty \mathrm{Re})^{-1/5}$ — толщина турбулентного пограничного слоя.

Поле температуры задано зависимостью температуры от скорости для случая $T = T_w$[5], давление определяется в виде $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Метод решения. Для обеспечения устойчивости решения в дозвуковых частях поля течения давление регулируется методом, предложенным Виньероном [7].

Согласно этому методу вектор потока E представляется в виде суммы двух векторов

$$E = E + E^p,$$

$$E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho\, u^2 + \omega\, p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (E_t + p)\, u \end{pmatrix}, \quad E^p = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\omega)\, p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Параметр ω вычисляется с некоторым коэффициентом запаса

$$\omega = \frac{\sigma \gamma M_x^2}{1 + (\gamma - 1)\; M_x^2},$$

где $M_x = u/a$ — местное число Маха, a — скорость звука.

С учетом (4) система уравнений (1) записывается в виде

$$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x}+\frac{\partial \overrightarrow{E^{p}}}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overrightarrow{F}-\overrightarrow{F_v}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overrightarrow{G}-\overrightarrow{G_v}\right)}{\partial z}=0, \tag{5}$$

где индекс 3 для простоты опущен.

Для численного решения системы уравнений (3) используется неявная конечно-разностная схема Бима-Уорминга [6].

Для этого вязкие члены представляются в виде суммы

$$F_v{}^{n+1}=F_{v1}{}^{n+1}+F_{v2}{}^{n},\quad G_v{}^{n+1}=G_{v1}{}^{n+1}+G_{v2}{}^{n}, \tag{6}$$

$$F_{v1}=\frac{\mu_t}{Re}\left(0,\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\gamma}{\Pr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_t}{\rho}\right)\right)^T,\ G_{v1}=\frac{\mu_t}{Re}\left(0,\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{4}{3}\frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\gamma}{\Pr}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_t}{\rho}\right)\right)^T,$$

а векторы F_{v2} и G_{v2} содержат диссипативные члены вида

$$F_{v2}=\frac{1}{Re}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\ \left(\mu_t-\frac{\gamma\,k}{\Pr}\right)\left(u\,\frac{\partial u}{\partial y}+w\,\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\\ +\left(\frac{4}{3}\mu_t-\frac{\gamma\,k}{\Pr}\right)v\,\frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix},\quad G_{v2}=\frac{1}{Re}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\ \left(\mu_t-\frac{\gamma\,k}{\Pr}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+v\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\\ +\left(\frac{4}{3}\mu_t-\frac{\gamma\,k}{\Pr}\right)w\frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

На каждом шаге по x в системе уравнений (1) конвективные члены линеаризуются с помощью замены их значений с $(n+1)$-го слоя разложениями в ряды Тейлора с известных значений на предыдущем слое с номером n

$$E^{n+1}=A^nU^{n+1},\quad F^{n+1}=R^nU^{n+1},\quad G^{n+1}=S^nU^{n+1}, \tag{7}$$

$$A^n=\left(\frac{\partial E}{\partial U}\right)^n,\quad R^n=\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^n,\quad S^n=\left(\frac{\partial G}{\partial U}\right)^n.$$

Выражения для элементов матриц A^n, R^n, S^n приведены в [7].

С учетом (6), (7) система (1) записывается следующим образом

$$\left[A^n+\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial y}R^n-\frac{\partial}{\partial y}\mu_t^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U_1{}^n}\right)\right)+\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial z}S^n-\frac{\partial}{\partial z}\mu_t^n\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{U_1{}^n}\right)\right)\right]U^{n+1}=$$

$$=A^{n-1}U^n+F_{v2}{}^n+G_{v2}{}^n, \tag{8}$$

$$U=[\rho,\rho u,\rho v,\rho w,E_t]^T=[U_1,U_2,U_3,U_4,U_5]^T.$$

После применения факторизации система (8) представляется в виде

$$\left[A^n+\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial y}R^n-\frac{\partial}{\partial y}\mu_t^n\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U_1{}^n}\right)\right)\right](A^n)^{-1}\left[A^n+\Delta x\left(\frac{\partial}{\partial z}S^n-\frac{\partial}{\partial z}\mu_t^n\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{U_1{}^n}\right)\right)\right]\times$$

$$\times U^{n+1}=A^{n-1}U^n+F_{v2}{}^n+G_{v2}{}^n.$$

В результате, согласно принципу расщепления решение находится с помощью матричной прогонки в три этапа.

Шаг 1.

$$\left[A^n + \Delta x\left(\frac{\partial}{\partial z}S^n - \frac{\partial}{\partial z}\,\mu_t^n\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{{U_1}^n}\right)\right) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]U_1 = A^{n-1}U^n + {F_{v2}}^n + {G_{v2}}^n + \varepsilon_1\frac{\partial^4}{\partial z^4}U^n.$$

Шаг 2.

$$U_2 = A^n U_1. \tag{9}$$

Шаг 3.

$$\left[A^n + \Delta x\left(\frac{\partial}{\partial y}\,R^n + \frac{\partial}{\partial y}\mu_t^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{{U_1}^n}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]U^{n+1} = U_2 + \varepsilon_1\frac{\partial^4}{\partial y^4}U^n.$$

Для подавления высокочастотных возмущений в решение (9) вводятся сглаживающие члены второго и четвертого порядков с коэффициентами ε и ε_1.

При аппроксимации производных в конвективных и диффузионных членах использованы следующие конечно-разностные выражения

$$\frac{\partial}{\partial y}RU = \frac{R_{i+1}U_{i+1} - R_{i-1}U_{i-1}}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}SU = \frac{S_{j+1}U_{j+1} - S_{j-1}U_{j-1}}{2\Delta z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu_t\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\left(\mu_{t_i} + \mu_{t_{i+1}}\right)\ (U_{i+1} - U_i) - \left(\mu_{t_i} + \mu_{t_{i-1}}\right)\ (U_i - U_{i-1})}{2\,\Delta\, y^2}.$$

А н а л и з р е з у л ь т а т о в. Численные исследования проведены со следующими параметрами: $\gamma = 1.4$, $\Pr = 0.71$, $1 \le M_a \le 3$, $2 \le M_\infty \le 5$, $1 \le n \le 10$. Использована сетка, содержащая в поперечных направлениях 51x51 узлов, с шагами $\Delta\, y = \Delta\, z = 0.15$, , шаг по маршевой координате варьируется в пределах $\Delta\ x = 0.0035 \div 0.015$.

Начальные данные задавались при $x = 0.1$ для условий $C_f = 1.5\cdot 10^{-3}$, $T_w = 0.3$, $y^+ = 50$, $\sigma = 0.71$, $Re = 2500$.

Эмпирический коэффициент $C = 0.005$ в (2) подобран из тестовых расчетов при $\delta^* = [u_{\max} - u_{\min}]/(\partial u/\partial y)_{\max}$.

На рис. 1 представлены профили продольной составляющей скорости и изменение числа Маха в слое $y = \delta_B$ для $M_a = 1.5$, $M_\infty = 2$, $n = 1$. По мере распространения вниз по течению струя расширяется, скорость в ней повышается и приближается к своему максимальному значению, т.е. к скорости потока (рис.1, а-г). В слое $y = \delta_B$ продольная составляющая скорости уменьшается и соответствует профилю пограничного слоя. Соответственно, уменьшение скорости вдоль $y = \delta_B$ приводит к тому, что число Маха M также падает и в сечении $x \approx 35$ сверхзвуковой поток ($M \approx 1$) переходит в дозвуковой (рис.1, д).

Течение недорасширенных струй имеет ряд особенностей, отличающих его от изобарических. С целью их выявления исследовано влияние параметров нерасчетности на картину течения. Из распределения давления (рис.2, а $M_a = 1.5$, $M_\infty = 2$, $n = 4$) на границе вязкого подслоя $y = \delta_B$ (кривые 1) и по оси струи (кривые 2) достаточно четко прослеживаются волны сжатия (минимум) и разрежения (максимум), пересекающие ось струи и достигающие пограничного слоя. На рис.2, б-д показаны пространственные картины поля давления в сечениях струи $x = 4.54$, 13.7, 22.8 и 100. Видно, что по мере распространения струи вниз по потоку от начального участка в спутный поток с более низким давлением начинает распространяться волна сжатия (рис.2, б). Эта волна, достигая с одной стороны пограничного слоя, с другой — границы компоновки, отражается (рис.2, в) и распространяется в обратном направлении. При этом отражение от пограничного слоя опережает отражение от оси симметрии струи (рис.2, г). Из рис.2, а также следует, что увеличивается давление на внешней границе пограничного слоя. Таким образом, первоначально осесимметричная ударная волна после отражения от исходных границ приобретает существенно трехмерный характер. Далее, вследствие интенсивных диссипативных процессов, обусловленных вязкими и ударно-волновыми процессами, возмущение давления вниз по потоку ослабевает (рис.2, д).

Из графиков распределений температуры в $y = \delta_B$ ((рис.3, а кривая 1, $M_a = 1.5$, $M_\infty = 2$, $n = 4$), а также в сечениях струй $x = 4.54$, 41, 114 и 146 (рис.3, б-д) следует, что поле температуры начинает неравномерным образом повышаться от начального участка и вплоть до $x \approx 135$. Затем по мере приближения давления к изобарическому состоянию температура становится постоянной. Из распределения продольной составляющей скорости (рис.3, а, 2) и числа Маха (рис.3, а, 3) в слое $y = \delta_B$ видно, что в этом случае динамический и температурный пограничные слои меньше, чем при изобарическом течении (рис.1, д).

Результаты численных экспериментов для различных M_∞ показывают, что с увеличением числа Маха спутного потока дальнобойность струи растет и уменьшаются динамический и температурный пограничные слои. Соответственно, переход в слое $y = \delta_B$ от сверхзвукового течения в дозвуковой затягивается. К примеру, для $M_\infty = 5$ поток становится дозвуковым только при $x \approx 120$ (Рис.4, а $M_a = 1.5, \quad n = 4, \quad T_0 = T_\infty$), а для $M_\infty = 2$ при $x \approx 25$ (рис.4, а, 3). Влияние M_∞ проявляется существенно в распределении поля температуры. Из рис.4, б следует, что на начальном участке температура вблизи слоя $y = \delta_B$ больше значения, чем на $y = \delta_B$. Далее, по мере удаления от среза сопла температура в потоке повышается и ее максимум перемещается к слою $y = \delta_B$ (рис.4, в-е).

Численные эксперименты показывают, что при больших M_a и M_∞ скорость струи выравнивается со скоростью потока только к сечению $x \approx 100$. В то время, как для меньших чисел Маха ($M_a = 1.5, \quad M_\infty = 2, \quad n = 4$) скорость струи и потока уже равны в сечении $x \approx 10$.

З а к л ю ч е н и е. Истечение недорасширенной струи из системы сопел в спутный поток с частично ограниченной областью имеет существенно пространственный характер вследствии того, что волна сжатия, отражаясь от пограничного слоя, достигает центра струи быстрее, чем волна, идущая от оси симметрии. Анализ влияния стенки на симметрию слоя смешения показывает, что струя теряет симметрию, когда поток переходит полностью в дозвуковой.

Цитированная литература

1. **Авдуевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г.** Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй. М., 1989.

2. **Синха Н. Д., Дэш С.М.** //Аэрокосмич. техника. 1988. № 7. С.48–60.

3. **Мещеряков Е.А., Сабельников В.А.** // Физика горения и взрыва. 1988. № 5. С.23–32.

4. **Ватса В.Н., Вертле М.Дж., Андерсон О.Л., Хэнкинс Г.Б.** // Аэрокосмич. техника. 1983. Т.1., № 4. С.50–58.

5. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., 1974.

6. **Бим Р.М., Уорминг Р.Ф.** // Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т.16, № 4. С.145–156.

7. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М., 1990. Т.1.; Т.2.

8. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М., 1987.

Поступила в редакцию 30.12.2003г.

Рис. 1: Профили продольной составляющей скорости в сечениях: а)-г) $x = 4.54$, 13.7, 77.5, 145; д) изменение числа Маха в слое $y = \delta_B$.

Рис. 2: а) Распределение давления в слое $y = \delta_B$ (кривая 1) и по оси струи (кривая 2); профили давления в сечениях: а)-д) $x = 4.54$, 13.7,22.8,100.

Рис. 3: Распределение в слое $y = \delta_B$: 1 - температуры, 2 - скорости, 3 - числа Маха; поля температуры в сечениях струи: б)-д) $x = 4.54$, 41, 114, 146.

Рис. 4: Изменение числа Маха в слое $y = \delta_B$ (а); профиль температуры в сечении $x = 4.54$ (б); поля температуры в сечениях: в)-е) $x = 4.54$, 100, 114, 146.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 62 — 65*

УДК 517.9

ОДНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО АНАЛОГА НЕЛИНЕЙНОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

И. Н. Панкратова

Институт математики МО и Н РК
480100 Алматы ул.Пушкина, 125 irina@math.kz

Даны одномерные представления отображения, заданного многомерным аналогом нелинейного логистического разностного уравнения с произвольной матрицей параметров.

Пусть задана полудинамическая система $\{f^m, K, Z^+\}$, где $f : R^n \to R^n$, $fx = (1-\sum_1^n x_i)Ax$, $K = \{x \in R^n | x \geq 0,\ \sum\limits_1^n x_i \leq 1\}$, A — матрица параметров, $Z^+ = N\bigcup\{0\}$ [1]. Инвариантность множества K (в положительном направлении), т.е. выполнение условия $fK \subseteq K$ обеспечивается выбором матрицы A: A — неотрицательная матрица ($a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j = \overline{1, n}$) [2, с.332] и $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n a_{ij} \leq 4$.

По теореме Перрона-Фробениуса матрица A имеет максимальное собственное значение $\lambda \geq 0$, которому соответствует собственный вектор $e \geq 0$ [2, с.344].

При $n = 1$ $x \in R$, $A \equiv \lambda \neq 0 - const$, $K \equiv I = [0, 1]$ и мы приходим к известному и хорошо изученному квадратичному унимодальному отображению $f \equiv \chi_\lambda$, $\chi_\lambda = \lambda(1 - x)x$ [3–4]. При $\lambda \in (0, 4]$ мы получаем на I семейство одномерных однопараметрических отображений χ_λ.

Случаи, когда отображение f с произвольной неотрицательной матрицей A имеет одномерные однопараметрические представления во всем фазовом пространстве K являются скорее исключением, чем правилом. Тем не менее, в данной статье мы покажем, что существуют семейства одномерных отображений, зависящих не более, чем от n параметров, задающие одномерные p-параметрические, $1 \leq p \leq n$ представления отображения f и определяющие, таким образом, одномерную p-параметрическую динамику системы f^m на K.

1. Рассмотрим вначале одномерное однопараметрическое представление отображения f, чтобы понять механизм возникновения одномерных многопараметрических представлений.

Пусть $A \geq 0$ — матрица, приводимая к скалярному виду, т.е. $A = \lambda E$. Тогда $\forall x \in R^n$ направление, образованное вектором x, является собственным для матрицы A. Поэтому $\forall x \in K$ максимальный в K отрезок луча, направленного вдоль вектора x, является инвариантным множеством относительно отображения f. Отметим, что каждый такой отрезок, обозначим его

Keywords: *dynamical system, nonlinear dynamics, one-dimensional many parameters representation of a map*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C05, 39A05, 65P30

через J, определяется выбором направления вектора x, а не его длиной, т.е. можно считать, что он задается единичным собственным вектором матрицы A. На J отображение f линейно изоморфно отображению χ_λ, т.е. $f = \chi_\lambda$, где $\lambda > 0$ — собственное значение матрицы A.

Для дальнейшего изложения нам понадобится ввести некоторые определения. Очевидно, что множество $K^p = R^p \bigcap K$ является *циклическим инвариантным множеством*, если R^p – p-мерное циклическое подпространство относительно линейного оператора, заданного матрицей A [2, с.166].

Определение 1. *Скажем, что отображение f имеет одномерное p-параметрическое представление (или, что динамика системы f^m является одномерной p-параметрической) на циклическом инвариантном множестве $K^p \subseteq K$, $1 \le p \le n$, если $\forall x \in K^p$ максимальный в K^p отрезок луча J, направленного вдоль x, является инвариантным множеством относительно отображения f^p. На J отображение f^p имеет одномерное представление в виде суперпозиции отображений χ_λ, т.е.*

$$f^p = \chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}, \qquad (*)$$

где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$ — некоторые числа.

Таким образом, отображение f с матрицей, приводимой к скалярному виду, имеет одномерное однопараметрическое представление с одним и тем же параметром λ во всем фазовом пространстве K и, значит, динамика системы f^m является одномерной однопараметрической.

2. Рассмотрим далее случай, когда матрица $A \ge 0$ является неразложимой индекса импримитивности n. Тогда A приводима к "циклическому"виду [2, с.335] с элементами $a_{i,i+1} > 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $a_{1,n} > 0$ и $a_{ij} = 0$ для всех остальных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. При этом $\sqrt[n]{\prod\limits_{i,j} a_{ij}} = \lambda > 0$ — максимальное собственное значение матрицы A. Здесь суммирование ведется по всем i, j, для которых $a_{ij} \ne 0$. В этом случае пространство R^n является циклическим относительно линейного оператора, заданного матрицей A, т.е. $\forall x \in R^n$ $A^n x = \lambda^n x$. Обозначим $\overline{f} = f^n$. $\forall x \in K$ вектор $f^n x$ запишем, n раз проитерировав отображение f. В результате получим $\overline{f}x = f^n x = \prod\limits_{j=0}^{n-1}(1 - \sum\limits_{i=1}^{n}(f^j x)_i) A^n x = \lambda^n \prod\limits_{j=0}^{n-1}(1 - \sum\limits_{i=1}^{n}(f^j x)_i) x$, т.е. любой максимальный в K отрезок луча J, направленного вдоль x, является инвариантным множеством относительно отображения $\overline{f} = f^n$. Согласно [5] на множестве J отображение $\overline{f} = f^n$ имеет одномерное представление в виде (*) с p числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (в данном случае $p = n$), $0 < \lambda_i \le 4$, $\prod\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = \lambda^p$, $i = \overline{1, p}$. Поэтому на всем K динамика системы f^m является одномерной n-параметрической.

Дальнейшие результаты получены для одномерных представлений отображения f на инвариантных множествах, не обязательно являющихся циклическими. Поскольку асимптотическое поведение системы f^m определяется характером ее динамики на притягивающих инвариантных множествах, то имеет место

Определение 2. *Скажем, что отображение f имеет одномерное p-параметрическое представление (или, что динамика системы f^m является одномерной p-параметрической) на инвариантном множестве $U \subseteq K$, если $\forall x \in U$ $\omega(x) \in K^p$, где K^p — циклическое инвариантное множество с одномерной p-параметрической динамикой.*

3. Пусть $A \ge 0$ — неразложимая матрица индекса импримитивности $p < n$. Тогда в R^n существует циклическое подпространство R^p, образованное вектором $e > 0$, который отвечает максимальному собственному значению $\lambda > 0$ и, значит, $\forall x \in R^p$ $A^p x = \lambda^p x$. Такое циклическое подпространство единственно, т.к. других неотрицательных собственных векторов, линейно независимых с e, матрица A не имеет [2, с.342]. Обозначая $\overline{f} = f^p$ и повторяя рассуждения п.3 относительно отображения $\overline{f} = f^p$ на множестве $K^p = R^p \bigcap K$, получим, что $\forall x \in K^p$ максимальный в K отрезок луча J, направленного вдоль x, является инвариантным множеством относительно отображения f^p; на множестве K^p отображение f^p имеет

одномерный вид (*) с p числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, т.е. динамика системы f^m на K^p является одномерной p-параметрической. Множество K^p является притягивающим в K, т.к. содержит все ω-предельные множества системы f^m. Поэтому согласно определению 2 динамика системы f^m на всем K является одномерной p-параметрической.

Теперь сформулируем основной результат об одномерном представлении во всем фазовом пространстве K отображения f с произвольной неотрицательной матрицей A. Справедлива следующая

Т е о р е м а. *Пусть $A \geq 0$ и $\lambda > 0$. Тогда $\forall x \in K$ существуют вектор $y \in K$ и число $p \in N$, $1 \leq p \leq n$ такие, что реализуется одна из следующих возможностей:*
1) максимальный в K отрезок луча, направленного вдоль y, является инвариантным множеством относительно f^p, на котором отображение f^p имеет одномерное представление (*) с p числами $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$, где $y \equiv x$, либо $y \in \omega(x)$;
2) за p шагов траектория $f^m x$ попадает в точку $y = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай неразложимой матрицы A индекса импримитивности $p \leq n$ был рассмотрен в пп.2,3. Здесь p – индекс импримитивности матрицы A и $\forall x \in K$ существует $y \in K^p$ такой, что $y \equiv x$ при $p = n$ и $y \in \omega(x) \subset K^p$ при $p < n$.

Мы исключаем случай $\lambda = 0$, т.к. при $\lambda = 0$ матрица A является нильпотентной [2, с.195] и $\forall x \in K \ \ \omega_f = \{0\}$, где ω_f — множество всех ω-предельных множеств отображения f на K.

Пусть далее A — разложимая матрица и $\lambda > 0$. Тогда пространство R^n расщепляется на циклические инвариантные подпространства относительно линейного оператора, заданного матрицей A [2, с.166]. Среди собственных чисел матрицы A выберем положительные собственные числа, которым соответствуют неотрицательные собственные векторы матрицы A. Обозначим все различные такие числа через $\xi_1 > \ldots > \xi_s > 0$, упорядочив их по убыванию. Здесь $\xi_1 \equiv \lambda$ — максимальное собственное значение матрицы A. Пусть P — множество всех различных показателей p элементарных делителей вида $(\xi - \xi_i)^p$, $i = \overline{1, s}$, $1 \leq p \leq n$. Тогда $K_i^p = R_i^p \bigcap K$ — циклическое инвариантное подмножество, где R_i^p — циклическое подпространство, отвечающее элементарному делителю вида $(\xi - \xi_i)^p$, $1 \leq p \leq n$. $\forall x \in K_i^p$ максимальный в K_i^p отрезок луча, направленного вдоль x, является инвариантным множеством относительно отображения f^p, имеющего одномерное представление (*) с p числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ и, значит, $\forall x \in K_i^p$ существуют $y \in K_i^p$, $y \equiv x$ и p — размерность множества K_i^p.

Далее при доказательстве теоремы мы используем следующий результат, опубликованный в [6].

Пусть ξ_t, $1 \leq t \leq s$ — наибольшее из собственных значений $\xi_1, \ldots, \xi_s$, соответствующих неотрицательным собственным векторам, принадлежащим наименьшему инвариантному подпространству, содержащему вектор $x \in K$. Тогда $\omega(x) \subset K_t^q$, где K_t^q — циклическое инвариантное множество, отвечающее элементарному делителю вида $(\xi - \xi_t)^q$, с максимальной размерностью q, т.е. $q = \max\limits_{p \in P} p$ для собственного значения ξ_t.

Согласно этому утверждению множество K_t^q является притягивающим для траектории выбранной точки x и, значит, существуют $y \in \omega(x) \subset K_t^q$ и $p \equiv q$.

Очевидно, что вторая возможность для траекторий системы f^m реализуется только на циклических инвариантных множествах, отвечающих элементарным делителям с нулевыми собственными значениями (или их объединениям). ω-предельные множества траекторий этих множеств за конечное число шагов p, $1 \leq p \leq n$ попадают в точку нуль и, значит, $y = 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть p_1 и p^* — наибольшие из всех показателей $p \in P$ элементарных делителей вида $(\xi - \xi_1)^p$ и $(\xi - \xi_i)^p$, $i = \overline{1, s}$, соответственно. Тогда почти во всем (с точностью до множеств меры нуль) фазовом пространстве K отображение f^{p_1} имеет одномерное p_1-параметрическое представление (*) и, значит, динамика системы f^m является* *одномерной p_1-параметрической почти всюду на K, поскольку определяется характером поведения системы на притягивающем множестве $K_1^{p_1}$ (или на каждом из таких множеств, если их больше одного). Тем не менее, на всем K динамика системы f^m является одномерной p^*-параметрической.*

З а м е ч а н и е 1. *При $p^* = 1$ динамика системы $\{f^m, K, Z^+\}$ является одномерной однопараметрической.*

З а м е ч а н и е 2. *Во множестве K_i^p подмножество, состоящее из максимальных в K отрезков лучей, направленных вдоль векторов $x, Ax, \ldots, A^{p-1}x$ $\forall x \in K_i^p$ является циклическим инвариантным. Как следует из [5] и доказанной теоремы, на этом подмножестве набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ однозначно определяется выбором единичного вектора, направленного вдоль x, и отображение f^p имеет одномерный вид (*). Более того, набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ сохраняется для всех точек выбранного подмножества, в то время как одномерный вид отображения f^p для начальных векторов этого подмножества, неколлинеарных вектору x, получается из (*) с помощью циклической перестановки его сомножителей.*

З а м е ч а н и е 3. *В общем случае наборы параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ для разных множеств K_i^p отличаются как по количеству входящих в них параметров, так и по "качеству", поскольку числовые значения параметров даже одного и того же множества K_i^p меняются в зависимости от направления вектора x (см. замечание 2); для несовпадающих множеств K_i^p, $i = \overline{1, s}$, $0 \le p \le n$ области определения параметров также не совпадают.*

Цитированная литература

1. **Панкратова И. Н.** // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995–997.

2. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., 1988.

3. **Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.** Динамика одномерных отображений. Киев, 1989.

4. **Фейгенбаум М.** // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374.

5. **Панкратова И. Н., Рахимбердиев М. И.** // Математический журнал. 2003. № 1. С. 75–79.

6. **Панкратова И. Н.** // Известия МОН РК. сер. физ.-матем. 1998. № 3. С. 51–58.

Поступила в редакцию 03.03.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 66 — 72*

УДК 519.2

A REMARK ON SOME MODIFIED CHI-SQUARED GOODNESS-OF-FIT TESTS

N. Pya

Institute of Mathematics, Ministry of Education and Science Kazakhstan
480100 Almaty Pushkin str.,125
Institute of Management, Economics and Strategic Research
4800100 Almaty Abay ave.,2

1. Introduction. Let $X_1, ...X_n$ be independent identically distributed (i.i.d.) random variables(r.v.). Consider the problem of testing of a compound parametric hypothesis H_0, according to which a distribution of the X_i is a member of a parametric family

$$\mathbf{P}\{X_i \le x \mid H_0\} = F(x;\boldsymbol{\theta}), \qquad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_s)^T \in \Theta \subset \mathbf{R}^s, \qquad x \in \mathbf{R}^1,$$

where Θ is an open set. Denote by $f(x;\boldsymbol{\theta})$ the density of the probability distribution function $F(x;\boldsymbol{\theta})$ with respect to a certain $\sigma-$ finite measure μ. Let

$$N_j^{(n)} = \neq \{i : X_i \in \Delta_j, \quad i = 1, ..., n\},$$
$$p_j(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Delta_j} dF(x;\boldsymbol{\theta}), \quad j = 1, ..., r, \tag{1}$$

where Δ_j are non-intersecting grouping intervals such that

$$\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r = \mathbf{R}^1, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Denote $\mathbf{V}^{(n)}$ a column r — vector of a standardized grouped frequency with components

$$v_i^{(n)} = [np_i(\boldsymbol{\theta})]^{-1/2}(N_i^{(n)} - np_i(\boldsymbol{\theta})), \quad i = 1, ..., r. \tag{2}$$

Using (2) the standard Pearson's chi-squared statistic $\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta})$ under a simple null hypothesis H_0 (the parameter $\boldsymbol{\theta}$ is considered to be known)

$$\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{V}^{(n)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{[N_i^{(n)} - np_i(\boldsymbol{\theta})]^2}{np_i(\boldsymbol{\theta})}$$

Keywords: *Exponential family of distributions, method of moments, modified chi-squared tests, EDF tests, power of chi-squared tests.*
2000 Mathematics Subject Classification: 62F03, 65C05

possesses in the limit the chi-squared probability distribution χ^2_{r-1} with r-1 degrees of freedom.

But if $\boldsymbol{\theta}$ is unknown and one has to estimate it, the limit distribution of the Pearson's statistic $\mathbf{X}_n^2(\boldsymbol{\theta}_n^*)$ changes in accordance with the asymptotical properties of an estimator $\boldsymbol{\theta}_n^*$. In this paper the Nikulin-Rao-Robson and Mirvaliev's statistics for the exponential family of distributions are considered. For improvement of inefficient method of moments estimators (MME) an iterative procedure suggested by Fisher [1] is applied for the Nikulin-Rao-Robson statistic. A power comparison of some the empirical distribution function (EDF) tests with the above-mentioned statistics is investigated.

2. Modified chi-squared tests. Let

$$\mathbf{q} = (p_1^{1/2}(\boldsymbol{\theta}), ..., p_r^{1/2}(\boldsymbol{\theta}))^T,$$

and $\mathbf{B}$ be $r \times s$ matrix with elements

$$\frac{1}{\sqrt{p_i(\boldsymbol{\theta})}} \frac{\partial p_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}, \quad i = 1, ..., r, \quad j = 1, ..., s. \tag{3}$$

The Fisher's information contained in $\mathbf{V}^{(n)}$ is defined by the matrix $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

For the effective maximum likelihood estimator (MLE) Nikulin [2–4] was the first who proposed a modification of the Pearson's statistic for continuous distributions with shift and scale parameters. Rao and Robson [5] had obtained the same result related to the exponential family (see also Moore and Spruill [6]). The Nikulin-Rao-Robson statistic can be written down as

$$\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{X}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) + \mathbf{P}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n), \tag{4}$$

where $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ is MLE of $\boldsymbol{\theta}$,

$$\mathbf{P}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{B}_n(\mathbf{J}_n - \mathbf{B}_n^T\mathbf{B}_n)^{-1}\mathbf{B}_n^T\mathbf{V}^{(n)}, \tag{5}$$

$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$, $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ and

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = E_{\boldsymbol{\theta}}\left[\left(\frac{\partial log f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\left(\frac{\partial log f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^T\right].$$

The Nikulin-Rao-Robson statistic $\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ in the limit possesses the chi-squared probability distribution χ^2_{r-1}.

Let a function $\mathbf{g}(x) = (g_1(x), ..., g_s(x))^T$ be such that the equation

$$m(\boldsymbol{\theta}) = \bar{\mathbf{g}},$$

where

$$\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_1, ..., \bar{g}_s)^T, \quad m(\boldsymbol{\theta}) = (m_1(\boldsymbol{\theta}), ..., m_s(\boldsymbol{\theta}))^T,$$

$$\bar{g}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_j(X_i), \quad m_j(\boldsymbol{\theta}) = \int g_j(x) dF(x; \boldsymbol{\theta})$$

is uniquely and continuously resolved with respect to $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n = m^{-1}(\bar{\mathbf{g}})$. The estimator $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n$ is called the method of moment estimator (MME). Functions $g_i(x) = x^i, \ i = 1, ..., s$ are the most often used in $\mathbf{R}^1$.

Let $\mathbf{K}$ be s×s matrix with elements

$$\int g_i(x) \frac{\partial f(x; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} dx. \quad i, j = 1, ..., s. \tag{6}$$

Under the regularity conditions of Hsuan and Robson [7] the MME $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n$ satisfies under $\mathbf{H}_0$ the following condition

$$n^{1/2}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} K^{-1}(g(X_j) - m) + o_p(1) \tag{7}$$

Let

$$\mathbf{V} = (\vartheta_{ij}), \;\; \vartheta_{ij} = m_{ij} - m_i m_j, \tag{8}$$

where

$$m_{ij} = E\big[g_i(X)g_j(X)\big], \quad\; i,j = 1,...,s$$

and $\mathbf{C}$ is a r×s matrix with elements

$$p_i^{-1/2}(\boldsymbol{\theta})\bigg(\int_{\Delta_i} g_j(x)f(x;\boldsymbol{\theta})dx - p_i(\boldsymbol{\theta})m_j(\boldsymbol{\theta})\bigg), \;\; i = 1,...,r, \;\; j = 1,...,s. \tag{9}$$

Let

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T + \mathbf{C}(\mathbf{V} - \mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T, \tag{10}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{V} + (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{V})^T\mathbf{A}(\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{V}), \tag{11}$$

where elements of matrices $\mathbf{K}$ and $\mathbf{C}$ are defined by formulas (6), (9) and the elements of s×s matrix $\mathbf{V}$ by (8) respectively, $\mathbf{I}$ being r-dimensional identity matrix.

M. Mirvaliev [8] showed that under proper regularity conditions the statistic

$$\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{X}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) + \mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) - \mathbf{Q}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n), \tag{12}$$

where

$$\mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{C}_n\big(\mathbf{V}_n - \mathbf{C}_n^T\mathbf{C}_n\big)^{-1}\mathbf{C}_n^T\mathbf{V}^{(n)}, \tag{13}$$

$$\mathbf{Q}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n) = \mathbf{V}^{(n)T}\mathbf{A}_n\big(\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n\big)\mathbf{L}_n^{-1}\big(\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n\big)^T A_n\mathbf{V}^{(n)}, \tag{14}$$

$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$, $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$,

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{I} - \mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathbf{T}} + \mathbf{C_n}(\mathbf{V_n} - \mathbf{C_n^T}\mathbf{C_n})^{\mathbf{-1}}\mathbf{C_n^T}$$

and

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{V}_n + (\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n)^T\mathbf{A}_n(\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n),$$

will possess in the limit the chi-squared probability distribution χ^2_{r-1}.

Consider the exponential family of distributions with the density

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = h(x)exp\{\sum_{m=1}^{s}\theta_m x^m + v(\boldsymbol{\theta})\}, \qquad x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbf{R}^1,$$

$\mathcal{X}$ is open in $\mathbf{R}^1$, $\mathcal{X} = \{x : f(x;\boldsymbol{\theta}) > 0\}$, $\qquad \boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

This family contains such distributions as Poisson, normal distribution, etc. Evidently that

$$\mathbf{U}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2, ..., \sum_{i=1}^{n} X_i^s\right)^T$$

is the complete minimal sufficient statistic for $\boldsymbol{\theta}$.

Suppose that

1) the support $\mathcal{X}$ does not depend on $\boldsymbol{\theta}$,

2) Hessian

$$\mathbf{H}_v(\boldsymbol{\theta}) = -\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}v(\boldsymbol{\theta})\right]_{s\times s}$$

of the function $v(\boldsymbol{\theta})$ is positive definite,

3) the moments $m_s(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} X_1^s$ exist.

In this case, using the results of Zacks [9], it is not difficult to show (see, for example, Dzhaparidze and Nikulin [10], Greenwood and Nikulin [11]) that the maximum likelihood estimator $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \hat{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{U}_n)$ and the method of moments estimator $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n = \bar{\boldsymbol{\theta}}_n(\mathbf{U}_n)$ of $\boldsymbol{\theta}$ coincide, i.e. $\bar{\boldsymbol{\theta}}_n \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}_n$. Let

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}) = (m_1(\boldsymbol{\theta}), ..., m_s(\boldsymbol{\theta}))^T.$$

One can verify that

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}v(\boldsymbol{\theta}).$$

T h e o r e m. *Assume conditions 1)-3) are fulfilled. Then for the exponential family of distributions the Nikulin-Rao-Robson* $\mathbf{Y1^2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ *and Mirvaliev* $\mathbf{Y2^2}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ *statistics are identically equal.*

P r o o f. First, show that $\mathbf{Q}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0$. For this family

$$p_i = \int_{\Delta_i} h(x)exp\{\sum_{k=1}^{s}\theta_k x^k + v(\boldsymbol{\theta})\}dx,$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial\theta_j} = \int_{\Delta_i} f(x,\boldsymbol{\theta})\cdot(x^j + \frac{\partial}{\partial\theta_j}v(\boldsymbol{\theta}))dx.$$

Then, an element of matrix $\mathbf{B}_n$ is

$$b_{ij} = p_i^{-1/2}\frac{\partial p_i}{\partial\theta_j} = p_i^{-1/2}\int_{\Delta_i} f(x,\boldsymbol{\theta})(x^j + \frac{\partial}{\partial\theta_j}v(\boldsymbol{\theta}))dx = p_i^{-1/2}\left(\int_{\Delta_i} x^j\cdot f(x,\boldsymbol{\theta})dx - p_i\cdot m_j\right).$$

An element of matrix $\mathbf{C}_n$ is

$$c_{ij} = p_i^{-1/2}\left(\int_{\Delta_i} x^j\cdot f(x,\boldsymbol{\theta})dx - p_i\cdot m_j\right).$$

From this it follows that $\mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n$.

Consider the matrices $\mathbf{K}_n$ and $\mathbf{V}_n$

$$k_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_i(x)\frac{\partial f}{\partial\theta_j}dx, \qquad g_i(x) = x^i.$$

Since

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_j} = f(x,\boldsymbol{\theta})\cdot(x^j + \frac{\partial}{\partial\theta_j}v(\boldsymbol{\theta})),$$

then

$$k_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{i+j}f(x,\boldsymbol{\theta})dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^i f(x,\boldsymbol{\theta})\frac{\partial}{\partial\theta_j}v(\boldsymbol{\theta})dx = m_{ij} - m_i m_j.$$

And as $v_{ij} = m_{ij} - m_i m_j$, then

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{V}_n.$$

Therefore

$$\mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{V}_n = \mathbf{C}_n - \mathbf{B}_n = \mathbf{0}$$

and $\mathbf{Q}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

Now show that $\mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{P}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}})$.

Since

$$\frac{\partial lnf}{\partial\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left[ln(h(x)) + \sum_{i=1}^{s}\theta_i x^i + v(\boldsymbol{\theta})\right] = x^i + \frac{\partial}{\partial\theta_i}v(\boldsymbol{\theta}) = x^i - m_i,$$

it is not difficult to show that for the considered case $\mathbf{J} = \mathbf{V}_n$.

Then

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{V}_n - \mathbf{C}_n^T\mathbf{C}_n)^{-1}\mathbf{C}_n^T = \mathbf{B}_n(J - \mathbf{B}_n^T\mathbf{B}_n)^{-1}\mathbf{B}_n^T$$

and

$$\mathbf{R}_n^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{P}_n^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Hence

$$\mathbf{Y1^2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \equiv \mathbf{Y2^2}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n).$$

3. On iterative procedure and power comparison. It is well known that exact MLEs can not be given in an explicit form for the logistic probability distribution. That is why Nikulin-Rao-Robson statistic $\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ (4) can not be considered when comparing powers of different chi-squared type test statistics for the logistic probability distribution. In this case iterative procedure suggested by Fisher for improvement of inefficient MMEs for $\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ may be applied.

Consider the following iterative procedure

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{i+1} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{i} - \left(\frac{\partial^2 L_n}{\partial\boldsymbol{\theta}^2}\right)^{-1}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^i}\left(\frac{\partial L_n}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^i}, \quad i = 0, 1, ...,$$

where $L_n = L_n(X_1, ..., X_n; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n logf_{\boldsymbol{\theta}}(X_i)$. Alternatively, observing that

$$-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_n}{\partial\boldsymbol{\theta}^2} \to \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}$$

in probability (under $\boldsymbol{\theta}$), where $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}$ is the Fisher's information matrix per single observation, Fisher suggested also the asymptotically equivalent procedure of scoring

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{i+1} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^{i} + \frac{1}{n}\left(\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^i}\left(\frac{\partial L_n}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^i}, \quad i = 0, 1, ... \tag{15}$$

"He pointed out that if the starting value $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^0$ is any $\sqrt{n}$- consistent estimator for $\boldsymbol{\theta}$ (for instance, constructed, when it is possible, by using MMEs), then the result of the very first iteration $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1$, is an estimator for $\boldsymbol{\theta}$ as efficient asymptotically as the maximum likelihood estimator $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$" (K.O. Dzaparidze [12]).

To illustrate the practical application of this procedure consider the following Monte Carlo experiment.

Using Microsoft Excel N=5000 samples of n=1000 of logistic pseudorandom numbers X_i were generated. Two Neyman-Pearson classes (Greenwood and Nikulin [11]) for normal (N) alternative distribution were considered. For every sample $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ and first iterations (15) were defined. Then statistics $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ were evaluated for each sample.

As it was expected, the Nikulin-Rao-Robson statistic $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ follows the chi-squared distribution with one degree of freedom.

Consider tests for the goodness-of-fit based on EDF statistics. It is well known that the limit distribution of these EDF statistics are those of some weighted sums of independent non-central chi-squared random variables (Shorack and Wellner [13]). It should be noted that these statistics are not distribution free and depend on the method of parameters estimation. Only MME's are used in this study for two unknown parameters of the logistic distribution.

Let $\hat{F}$ denote the estimate of the distribution function with p.d.f.(probability distribution function)

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}\theta_2} \frac{exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)}{\left[1+exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)\right]^2}, \qquad x \in \mathbf{R}^1 \tag{16}$$

and θ_1 and θ_2 being replaced by their estimates. Let F_n denote the empirical distribution function based on a sample $x_1, x_2, ..., x_n$. The well-known Kolmogorov-Smirnov statistic $\mathbf{D}$, the Anderson-Darling $\mathbf{A^2}$ and Cramer-Von Mises $\mathbf{W^2}$ statistics are considered

$$\mathbf{D} = sup_x|F_n(x) - \hat{F}(x)|,$$

$$\mathbf{W^2} = n\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x) - \hat{F}(x))^2 d\hat{F}(x),$$

$$\mathbf{A^2} = n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(F_n(x) - \hat{F}(x))^2}{\hat{F}(x)(1-\hat{F}(x))} d\hat{F}(x).$$

Let $z_i = \hat{F}(x_i)$, then

$$\mathbf{D}^+ = max_i\left(\frac{i}{n} - z_i\right), \qquad \mathbf{D}^- = max_i\left(z_i - \frac{i-1}{n}\right), \qquad \mathbf{D} = max(\mathbf{D}^+, \mathbf{D}^-),$$

$$\mathbf{W^2} = \sum_i\left\{z_i - \frac{(2i-1)}{2n}\right\}^2 + \frac{1}{12n},$$

$$\mathbf{A^2} = -n - \frac{1}{n}\sum_i\left[(2i-1)ln(z_i) + (2n+1-2i)ln(1-z_i)\right].$$

To compare these EDF tests with the Nikulin-Rao-Robson statistics the same number of N=5000 samples of n=1000 of logistic pseudorandom numbers X_i were generated. And for the normal alternative distribution the simulated results of power comparison of the EDF statistics and $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ are shown in Table 1.

Table 1

	α	Power of $\mathbf{D}$	Power of $\mathbf{W_n^2}$	Power of $\mathbf{A^2}$	Power of $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$
	0.10	0.851	0.963	0.982	0.945
$\mathbf{H_a}$: Normal	0.05	0.723	0.910	0.949	0.896
	0.01	0.388	0.705	0.820	0.726

From this table one can see that the Anderson-Darling statistics gives the most powerful test for the considered sample size and the normal alternative.

4. Conclusion. When testing the compound hypothesis about a probability distribution from the exponential family, Nikulin-Rao-Robson $\mathbf{Y1}^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ and Mirvaliev's $\mathbf{Y2}^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}_n)$ statistics coincide. If there is no any asymptotic equivalent to MLE $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ estimator of $\boldsymbol{\theta}$, then for testing of the compound hypothesis about the logistic probability distribution one may use the Nikulin-Rao-Robson statistic $\mathbf{Y1}^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1)$ based on two Neyman-Pearson classes, where $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n^1$ is the first iteration of the Fisher's procedure for improvement of inefficient method of moments estimators.

REFERENCES

1. **Fisher R.A.** // Proc. Cambridge Philos.Soc. 1925. V.2. P.700–725.

2. **Nikulin M.S.** // Int. Vilnius Conf. on Probability Theory and Mathematical Statistics. 1973. V. 2. P.119–122.

3. **Nikulin M.S.** // Theory of Probability and its Applications. 1973. V.18. №3. P.559–568.

4. **Nikulin M.S.**// Theory of Probability and its Applications. 1973. V.18. №3. P.638–639.

5. **Rao K.C., Robson D.S.**//Commun. in Statistics. 1974. V.3. P.1139–1153.

6. **Moore D.S., Spruill M.C.** // Ann. of Statist. 1975. V.3. P.599–616.

7. **Hsuan T.A. and Robson D.S.** Commun. Statist., Theory and Methods. 1976. A5, V.16. P.1509–1519.

8. **Mirvaliev M.** An investigation of generalized chi-squared type statistics. Doctoral thesis. Academy of Science. Republic of Uzbekistan, 2001.

9. **Zacks S.** The Theory of Statistical Inference. Wiley, New York, 1971.

10. **Dzhaparidze K.O., Nikulin M.S.** //Problems of the Theory of Probability Distributions. 1992. V.12. P.59–90.

11. **Greenwood P.S., Nikulin M.S.** A Guide to Chi-Squared Testing. John Wiley and Sons, Inc. New York. 1996.

12. **Dzhaparidze K.O.** Statistica Neerlandica. 1983. V.37. №4. P.181–189.

13. **Shorack G.R., Wellner J.A.** Empirical Process with Applications to Statistics. Wiley, New York, 1986.

Поступила в редакцию 13.01.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 73 — 83*

УДК 517.624.3

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С.М. Темешева

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе пр. А.Молдагуловой, 34 nur15@mail.ru

Методом параметризации исследуется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с нелинейным двухточечным краевым условием. В терминах функций правой части дифференциального уравнения и граничного условия установлены необходимые и достаточные условия существования "изолированного" решения рассматриваемой задачи.

Исследованию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы многих авторов [1–10]. В соответствии с применяемым методом условия существования решения, сходимости предлагаемых алгоритмов получены в различных терминах. При этом особый интерес представляют те методы, которые позволяют условия разрешимости задачи установить в терминах исходных данных. В [11] для линейной двухточечной краевой задачи предложен метод параметризации (м.п.).

В настоящей статье м.п. применяется к нелинейной двухточечной краевой задаче

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

$$g[x(0), \quad x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0,T] \times R^n \to R^n$, $g : R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывны.

В отличие от линейной задачи здесь возникают трудности, связанные с нахождением начального приближения и области, где ищется решение. Поэтому по шагу $h > 0$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$ и задачу (1), (2) исследуем м.п. с выбором непрерывных на $[(r-1)h, rh]$ функций $R_r(t) \geq 0$, $r = \overline{1,N}$, числа $\rho > 0$, учитывающих свойства дифференциального уравнения и граничных условий. Такой подход позволяет "уточнить" оценки области существования решения задачи (1), (2), установить необходимые и достаточные условия существования изолированного решения в терминах функций f, g.

Keywords: *parameterization's method, nonlinear two-point boundary-value problem, isolated solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

Обозначим через $x_r(t)$ вектор-функцию размерности n, совпадающую с $x(t)$ на промежутке $[(r-1)h, rh)$, $r=\overline{1,N}$ и задачу (1), (2) сведем к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt}=f(t,x_r), \qquad t\in[(r-1)h,rh), \qquad r=\overline{1,N}, \tag{3}$$

$$g[x_1(0), \lim_{t\to Nh-0} x_N(t)]=0, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t)=x_{s+1}(sh), \qquad s=\overline{1,N-1} \tag{5}$$

где (5) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения $t=sh$, $s=\overline{1,N-1}$.

Эквивалентность задач (1), (2) и (3)–(5) заключается в следующем. Если $x(t)$ — решение задачи (1), (2), то $\{x_r(t)\}$, $r=\overline{1,N}$, — система его сужений на $[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (3)-(5). И, наоборот, если система функций $(\widetilde{x}_r(t))$, $r=\overline{1,N}$, – решение задачи (3) – (5), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}_r(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T)=\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{x}_N(t)$, является решением задачи (1), (2).

Через λ_r обозначим значение функции $x_r(t)$ в точке $t=(r-1)h$, и произведя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,N}$, получим многоточечную краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,u_r+\lambda_r), \quad u_r[(r-1)h]=0, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}, \tag{6}$$

$$g[\lambda_1, \lambda_N+\lim_{t\to Nh-0} u_N(t)]=0, \tag{7}$$

$$\lambda_s+\lim_{t\to sh-0} u_s(t)-\lambda_{s+1}=0, \qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{8}$$

Если система пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, — решение многоточечной краевой задачи с параметром (6)–(8), то система функций $(\lambda_r+u_r(t))$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (3)–(5); и, обратно, если система функций $(\widetilde{x}_r(t))$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, — решение многоточечной краевой задачи без параметра (3)–(5), то система пар $(\widetilde{\lambda}_r=\widetilde{x}_r[(r-1)h]$, $\widetilde{u}_r(t)=\widetilde{x}_r(t)-\widetilde{x}_r[(r-1)h])$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$ является решением задачи (6)–(8).

Сведение задачи (3)–(5) к задаче с параметром (6)–(8) привело к появлению начального условия $u_r[(r-1)h]=0$, $r=\overline{1,N}$. Поэтому при фиксированных значениях параметра $\lambda_r\in R^n$ функция $u_r(t)$, $[(r-1)h,rh)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r+u_r(\tau))d\tau, \qquad t\in[(r-1)h,rh), \qquad r=\overline{1,N}. \tag{9}$$

Определим $\lim\limits_{t\to rh-0} u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh} f(t,\lambda_r+u_r(t))dt$, $r=\overline{1,N}$, и подставим их в (7), (8). Умножив (7) на $h>0$, получим систему уравнений относительно параметров $\lambda_r\in R^n$, $r=\overline{1,N}$:

$$hg\Big[\lambda_1, \lambda_N+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t,\lambda_N+u_N(t))dt\Big]=0,$$

$$\lambda_s+\int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(t,\lambda_s+u_s(t))dt-\lambda_{s+1}=0, \qquad s=\overline{1,N-1},$$

которую запишем в виде: $$Q_{1,h}(\lambda,u)=0, \qquad \lambda\in R^{nN}. \tag{10}$$

Итак, для нахождения пар $(\lambda_r,u_r(t))$, $r=\overline{1,N}$, имеем систему уравнений (9), (10), определяемую через функции f, g и h.

Через $\widetilde{C}([(r-1)h,rh),R^n)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $[(r-1)h,rh)$ функций $u_r:[(r-1)h,rh)\to R^n$. Выберем шаг $h>0: Nh=T$, вектор $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)})'\in R^{nN}$ и предположим, что задача Коши (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ имеет решение $u_r^{(0)}(t)\in\widetilde{C}([(r-1)h,rh),R^n)$, $r=\overline{1,N}$. Множество таких $\lambda^{(0)}\in R^{nN}$, обозначим $G_0(f,h)$, а соответствующую им систему решений задач Коши через $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),\ldots,u_N^{(0)}(t))'$. Возьмем $\lambda^{(0)}\in G_0(f,h)$, ему соответствующую $u^{(0)}[t]$, непрерывные на $[(r-1)h,rh]$ функции $R_r(t)\geq 0$, $r=\overline{1,N}$, число $\rho>0$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)},\rho)=\Big\{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)'\in R^{nN}:\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\|<\rho, r=\overline{1,N}\Big\},$$

$$S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)=\Big\{(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_N(t))',\quad u_r(t)\in\widetilde{C}([(r-1)h,rh),R^n):$$
$$\|u_r(t)-u_r^{(0)}(t)\|\leq R_r(t)\rho, t\in[(r-1)h,rh), r=\overline{1,N}\Big\},$$

$$G_1^0(R[t],\rho)=\Big\{(t,x):t\in[0,T],\ \|x-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)\|<(R_r(t)+1)\rho,\ t\in[(r-1)h,rh),$$
$$r=\overline{1,N}, \|x-\lambda_N^{(0)}-\lim_{t\to T-0}u_N^{(0)}(t)\|<(R_N(T)+1)\rho\Big\},$$

$$G_2^0(R[t],\rho)=\Big\{(v,w):\|v-\lambda_1^{(0)}\|<\rho, \|w-\lambda_N^{(0)}-\lim_{t\to T-0}u_N^{(0)}(t)\|<(R_N(T)+1)\rho\Big\}.$$

Условие A_1**.** Функции $f(t,x)$, $g(v,w)$ соответственно в $G_1^0(R[t],\rho)$, $G_2^0(R[t],\rho)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ и выполняются неравенства $\|f'_x(t,x)\|\leq L(t)$, $\|g'_v(v,w)\|\leq L_1$, $\|g'_w(v,w)\|\leq L_2$, где $L(t)$ –непрерывная на $[0,T]$ функция, L_1, L_2 –постоянные.

Предполагая существование $\lambda^{(0)}\in G_0(f,h)$, за начальное приближение задачи (6) – (8) возьмем систему пар $(\lambda_r^{(0)},u_r^{(0)}(t))$, $r=\overline{1,N}$, и последующие приближения строим по следующему алгоритму:

Шаг 1. а) Параметр $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\ldots,\lambda_N^{(1)})'\in R^{nN}$ определим из уравнения (10) при $u=u^{(0)}$. б) Решая задачу Коши (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, найдем $u_r^{(1)}(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$.

Шаг 2. а) Параметр $\lambda^{(2)}=(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\ldots,\lambda_N^{(2)})'\in R^{nN}$ определим из уравнения (10) при $u=u^{(1)}$. б) Решая задачу Коши (6) на $[(r-1)h,rh)$ $\lambda_r=\lambda_r^{(2)}$, найдем $u_r^{(2)}(t)$, $r=\overline{1,N}$.

Продолжая таким образом, на k-ом шаге получим систему пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$.

По $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,N}$, составим пару $(\lambda^{(k)},u(k)[t])$, где $\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\ldots,\lambda_N^{(k)})'$, $u^{(k)}[t]=(u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)}(t),\ldots,u_N^{(k)}(t))'$.

Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма и существования изолированного решения многоточечной краевой задачи с параметром (6)–(8) устанавливает

Теорема 1. *Пусть существуют* $h>0:\ Nh=T\ \ (N=1,2,\ldots)$, $\lambda^{(0)}\in G_0(f,h)$, *непрерывные на* $[(r-1)h,rh]$ *функции* $R_r(t)\geq 0$, $r=\overline{1,N}$, *число* $\rho>0$, *при которых выполнено условие* A_1, *матрица Якоби* $\partial Q_{1,h}(\lambda,u)/\partial\lambda$ *обратима для любых* $(\lambda,u[t])\in S(\lambda^{(0)},\rho)\times$ $\times\, S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$ *и имеют место неравенства: 1)* $\Big\|\Big[\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\Big]^{-1}\Big\|\leq\gamma_1(h)$,

2) $q_1(h)=\gamma_1(h)\max(L_2h,1)\max\limits_{r=\overline{1,N}}\Big(e^{\int_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt}-1-\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\Big)<1$,

3) $\dfrac{1}{1-q_1(h)}\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\|<\rho$, *4)* $e^{\int_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau}-1\leq R_r(t)$, $t\in[(r-1)h,rh]$,

$r=\overline{1,N}$. *Тогда последовательность пар* $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$ $\Big(\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\dots,\lambda_N^{(k)})'$, $u^{(k)}[t]=(u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)},\dots,u_N^{(k)}(t))'\Big)$, *определяемая по алгоритму, для всех* $k=0,1,2,\dots$ *содержится в* $S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$, *сходится к* $(\lambda^*,u^*[t])$ – *решению задачи (6)–(8) и справедливы оценки*

а) $\|\lambda^*-\lambda^{(k)}\|\le[q_1(h)]^k\dfrac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)}\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\|$,

б) $\|u_r^*(t)-u_r^{(k)}(t)\|\le\Bigg(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau}-1\Bigg)\|\lambda_r^*-\lambda_r^{(k)}\|$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$.

Причем любое решение задачи (6)–(8) в $S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$ *изолировано.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\dots,\lambda_N^{(0)})'\in G_0(f,h)$, ему соответствующую $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),\dots,u_N^{(0)}(t))'$. В силу неравенства 3) существует число $\varepsilon_0>0$, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_0\gamma_1(h)<1$, $\gamma_1(h)||Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})||<[1-\varepsilon_0\gamma_1(h)]\rho$. Ввиду условия A_1 матрица Якоби $\partial Q_{1,h}(\lambda,u^{(0)})/\partial\lambda$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)},\rho)$ и для $\varepsilon_0>0$ существует $\delta_0\in(0,\rho/2]$ такое, что $||\partial Q_{1,h}(\lambda,u^{(0)})/\partial\lambda-\partial Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},u^{(0)})/\partial\lambda||<\varepsilon_0$, если $\lambda,\widetilde{\lambda}\in S(\lambda^{(0)},\rho)$, $||\lambda-\widetilde{\lambda}||<\delta_0$. Возьмем число $\alpha_0=\max(1,\gamma_1(h)||Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})||/\delta_0)$ и построим итерационный процесс: $\lambda^{(1,0)}=\lambda^{(0)}$,

$$\lambda^{(1,m+1)}=\lambda^{(1,m)}-\frac{1}{\alpha_0}\left[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^{(1,m)},u^{(0)})}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{1,h}(\lambda^{(1,m)},u^{(0)}),\quad m=0,1,\dots. \tag{11}$$

В силу условий теоремы, оператор $Q_{1,h}(\lambda,u^{(0)})$ в $S(\lambda^{(0)},\rho)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 из [12]. Поэтому итерационный процесс (11) сходится к $\lambda^{(1)}\in S(\lambda^{(0)},\rho)$ – изолированному решению уравнения $Q_{1,h}(\lambda,u^{(0)})=0$ и

$$\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|\le\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\|<\rho. \tag{12}$$

Для решения задачи Коши (6) на $[(r-1)h,rh)$ при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$ используем метод последовательных приближений: $u_r^{(1,0)}(t)=u_r^{(0)}(t)$,

$$u_r^{(1,m+1)}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau,\lambda_r^{(1)}+u_r^{(1,m)}(\tau))d\tau,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N},\quad m=0,1,2,\dots.$$

При предположениях теоремы справедливы оценки

$$\|u_r^{(1,m)}(t)-u_r^{(1,m-1)}(t)\|\le\frac{1}{m!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau\Big)^m\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\|,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}, \tag{13}$$

$$\|u_r^{(1,m)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|\le\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau\Big)^i\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\|,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}. \tag{14}$$

Из (13) следует равномерная на $[(r-1)h,rh)$ сходимость последовательности $u_r^{(1,m)}(t)$ к $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,N}$. Переходя в (14) к пределу при $m\to\infty$, получим оценки:

$$\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\|\le\Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau}-1\Big)\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\|,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}. \tag{15}$$

В силу неравенств (12), 4) система решений задач Коши $u^{(1)}[t]$ принадлежит множеству $S(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$. Из структуры оператора $Q_{1,h}(\lambda, u^{(0)})$, равенства $Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)}) = 0$ и оценки (15) следует, что

$$\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\| = \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) - Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)})\| =$$

$$= \gamma_1(h) \max\Big\{h\Big\|g\Big[\lambda_1^{(1)}, \lambda_N^{(1)} + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t, \lambda_N^{(1)} + u_N^{(1)}(t))dt\Big] -$$

$$-g\Big[\lambda_1^{(1)}, \lambda_N^{(1)} + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(t, \lambda_N^{(1)} + u_N^{(0)}(t))dt\Big]\Big\|,$$

$$\max_{s=\overline{1,N-1}}\Big\|\int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(t, \lambda_s^{(1)} + u_s^{(1)}(t))dt - \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(t, \lambda_s^{(1)} + u_s^{(0)}(t))dt\Big\|\Big\} \le$$

$$\le \gamma_1(h)\max(L_2 h, 1)\max_{r=\overline{1,N}}\Big\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh} \|f(t, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(t)) - f(t, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(t))\|dt\Big\} \le$$

$$\le \gamma_1(h)\max(L_2 h, 1)\max_{r=\overline{1,N}}\Big\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\|dt\Big\} \le$$

$$\le \gamma_1(h)\max(L_2 h, 1)\max_{r=\overline{1,N}}\Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt} - 1 - \int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt\Big)\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|,$$

т.е.

$$\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\| \le q_1(h)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|. \tag{16}$$

Возьмем $\rho_1 = \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|$ и покажем, что $S(\lambda^{(1)}, \rho_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho)$. Действительно, если $\|\lambda - \lambda^{(1)}\| < \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|$, то, учитывая неравенства 2), 3) теоремы и (12), (16) имеем

$$\|\lambda - \lambda^{(0)}\| \le \|\lambda - \lambda^{(1)}\| + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\| + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le$$

$$\le [q_1(h) + 1]\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| < \frac{1}{1 - q_1(h)}\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho.$$

Из условий теоремы следует, что оператор $Q_{1,h}(\lambda, u^{(1)})$ в $S(\lambda^{(1)}, \rho_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [12]. Поэтому итерационный процесс $\lambda^{(2,0)} = \lambda^{(1)}$,

$$\lambda^{(2,m+1)} = \lambda^{(2,m)} - \frac{1}{\alpha_0}\Big[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^{(2,m)}, u^{(1)})}{\partial \lambda}\Big]^{-1} Q_{1,h}(\lambda^{(2,m)}, u^{(1)}), \quad m = 0, 1, ...$$

сходится к $\lambda^{(2)} \in S(\lambda^{(1)}, \rho_1)$ — изолированному решению уравнения $Q_{1,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$ и $\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| \le \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|$. Отсюда и из (16) следует, что

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| \le q_1(h)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|. \tag{17}$$

Решение задачи Коши (6) на $[(r-1)h, rh)$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(2)}$ — функцию $u_r^{(2)}(t)$ найдем методом последовательных приближений: $u_r^{(2,0)}(t) = u_r^{(1)}(t)$,

$$u_r^{(2,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r^{(2)} + u_r^{(2,m)}(\tau))d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

и установим неравенства

$$\|u_r^{(2,m)}(t) - u_r^{(2,m-1)}(t)\| \le \frac{1}{m!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau\Big)^m \|\lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{20}$$

$$\|u_r^{(2,m)}(t) - u_r^{(2,0)}(t)\| \le \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau d\tau)\Big)^i \|\lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(1)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{21}$$

$$\|u_r^{(2,m)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \le \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau\Big)^i \|\lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(0)}\| +$$

$$+\Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(\tau)d\tau} - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau\Big)^i\Big)\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{22}$$

Из (20) следует равномерная сходимость последовательности $u_r^{(2,m)}(t)$ к $u_r^{(2)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$. Переходя в (21) и (22) к пределу при $m \to \infty$, получим оценки:

$$\|u_r^{(2)}(t) - u_r^{(1)}(t)\| \le \Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1\Big)\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{23}$$

$$\|u_r^{(2)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \le \Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1\Big)\|\lambda_r^{(2)} - \lambda_r^{(0)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{24}$$

В силу неравенств 4), (24) система решений задач Коши $u^{(2)}[t]$ принадлежит $S(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$.

Продолжая процесс, на $k-$ом шаге найдем $\lambda^{(k)}$, $u^{(k)}[t]$, для которых аналогично (17), (23), (24) установим неравенства

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| \le q_1(h)\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \tag{25}$$

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \le \Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1\Big)\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{26}$$

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \le \Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1\Big)\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(0)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{27}$$

Так как

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| \le q_1(h)\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \le [q_1(h)]^2\|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\| \le \ldots \le [q_1(h)]^k\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|,$$

то $$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(0)}\| \le \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| + \ldots + \|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le$$

$$\leq \Big(1+q_1(h)+\ldots+[q_1(h)]^{k-1}\Big)\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\| < \frac{1}{1-q_1(h)}\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\| < \rho. \qquad (28)$$

Из неравенств 2), (25)-(28) следует, что последовательность пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$ для всех $k=1,2,\ldots$ принадлежит $S(\lambda^{(0)},\rho)\times S(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$ и сходится к $(\lambda^*,u^*[t])$ – решению задачи с параметром (6)–(8). В неравенствах

$$\|\lambda^{(k+p)}-\lambda^{(k)}\| \leq \|\lambda^{(k+p)}-\lambda^{(k+p-1)}\|+\ldots+\|\lambda^{(k+2)}-\lambda^{(k+1)}\|+\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\| \leq$$

$$\leq [q_1(h)]^k\Big(1+q_1(h)+\ldots+[q_1(h)]^{p-1}\Big)\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\| < \frac{1}{1-q_1(h)}[q_1(h)]^k\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)}\|,$$

$$\|u_r^{(k+p)}(t)-u_r^{(k)}(t)\| \leq \Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau}-1\Big)\|\lambda_r^{(k+p)}-\lambda_r^{(k)}\|, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N},$$

переходя к пределу при $p\to\infty$, получим оценки а), б). Покажем изолированность решения $(\lambda^*,u^*[t])$. Выберем число $\varepsilon>0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_1(h)<1, \qquad q_1(h)<1-\varepsilon\gamma_1(h). \qquad (29)$$

Согласно условию A_1 и структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S(\lambda^*,\rho)\times S(u^*[t],R[t]\rho)$. Поэтому найдется число $\delta>0$, при котором

$$\left\|\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right\|<\varepsilon$$

для всех $(\lambda,u)\in S(\lambda^*,\delta)\times S(u^*[t],R[t]\delta)$. Заметим, что если $(\lambda^*,u^*[t])$ является решением задачи (6)–(8), то $Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)=0$.

Пусть $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])\in S(\lambda^*,\delta)\times S(u^*[t],R[t]\delta)$ — решение задачи (6)–(8), отличное от $(\lambda^*,u^*[t])$. . Так как $Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)=0$ и, по нашему предположению, $Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},\widetilde{u})=0$, то из равенств

$$\lambda^*=\lambda^*-\left[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{1,h}(\lambda^*,u^*), \qquad \widetilde{\lambda}=\widetilde{\lambda}-\left[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},\widetilde{u})$$

следует, что

$$\lambda^*-\widetilde{\lambda}=\lambda^*-\widetilde{\lambda}-\left[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\Big[Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)-Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},u^*)+Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},u^*)-Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},\widetilde{u})\Big]=$$

$$=-\left[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial Q_{1,h}(\widetilde{\lambda}+t(\lambda^*-\widetilde{\lambda}),u^*)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\Big)dt(\lambda^*-\widetilde{\lambda})-$$

$$-\left[\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right]^{-1}[Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},u^*)-Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},\widetilde{u})],$$

откуда $$\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|\leq\frac{\gamma_1(h)}{1-\varepsilon\gamma_1(h)}\|Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},u^*)-Q_{1,h}(\widetilde{\lambda},\widetilde{u})\|\leq\frac{\gamma_1(h)}{1-\varepsilon\gamma_1(h)}\times$$

$$\times\max\Big\{h\Big\|g\Big[\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_N+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}f(\tau,\widetilde{\lambda}_N+u_N^*(\tau))d\tau\Big]-g\Big[\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_N+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}f(\tau,\widetilde{\lambda}_N+\widetilde{u}_N(\tau))d\tau\Big]\Big\|,$$

$$\max_{s=\overline{1,N-1}}\Big\| \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(\tau,\widetilde{\lambda}_s+u_s^*(\tau))d\tau - \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(\tau,\widetilde{\lambda}_s+\widetilde{u}_s(\tau))d\tau\Big\|\Big\}\leq$$

$$\leq \frac{\gamma_1(h)}{1-\varepsilon\gamma_1(h)}\max(L_2h,1)\max_{r=\overline{1,N}}\Big\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(\tau)\|u_r^*(\tau)-\widetilde{u}_r(\tau)\|d\tau\Big\}.$$

Так как $$\|u_r^*(t)-\widetilde{u}_r(t)\| = \Big\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r^*+u_r^*(\tau))d\tau - \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(\tau))d\tau\Big\|\leq$$

$$\leq \int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)(\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\|+\|u_r^*(\tau)-\widetilde{u}_r(\tau)\|)d\tau,$$

то используя лемму Гронуолла-Беллмана, получим

$$\|u_r^*(t)-\widetilde{u}_r(t)\|\leq\Big(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau}-1\Big)\|\lambda_r^*-\widetilde{\lambda}_r\|.$$

Тогда $$\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|\leq\frac{\gamma_1(h)}{1-\varepsilon\gamma_1(h)}\max(L_2h,1)\max_{r=\overline{1,N}}\Big\{e^{\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt}-1-\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\Big\}\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|,$$

или $$\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|\leq\frac{q_1(h)}{1-\varepsilon\gamma_1(h)}\|\lambda^*-\widetilde{\lambda}\|.$$

Тем самым, в силу неравенств (29) получим, что $\widetilde{\lambda}_r=\lambda_r^*$, $\widetilde{u}_r(t)=u_r^*(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, т.е. решение многоточечной краевой задачи с параметром изолировано. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}(t)$, $k=0,1,\ldots$, определим равенствами $x^{(k)}(t)=\lambda_r^{(k)}+u_r^{(k)}(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $x^{(k)}(T)=\lambda_r^{(k)}+\lim\limits_{t\to T-0}u_N^{(k)}(t)$ и через $S(x^{(0)}(t),[R[t]+1]\rho)$ обозначим множество кусочно - непрерывных дифференцируемых функций $x:[0,T]\to R^n$, удовлетворяющих неравенствам $||x(t)-x^{(0)}(t)||<[R_r(t)+1]\rho$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $||x(T)-x^{(0)}(T)||<[R_r(T)+1]\rho$. Так как задача (1), (2) эквивалентна задаче (6)–(8), то из теоремы 1 следует

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций* $(x^{(k)}(t))$, $k=0,1,\ldots$, *содержится в* $S(x^{(0)}(t),(R[t]+1)\rho)$, *сходится к* $x^*(t)\in S(x^{(0)}(t),[R[t]+1]\rho)$ *– решению задачи (1), (2) и справедливы неравенства*

$$\|x^*(t)-x^{(k)}(t)\|\leq[q_1(h)]^k\frac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)}e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau}\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\|,\quad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}.$$

Причем любое решение задачи (1), (2) в $S(x^{(0)}(t),(R[t]+1)\rho)$ *изолировано.*

Введем определение "изолированного" решения краевых задач с непрерывно дифференцируемыми данными, которое является модификацией определения изолированного решения из [7, с. 733].

Определение 1. *Решение задачи (1), (2) – функция $x^*(t)$ называется "изолированным", если существует число $\rho_0 > 0$, при котором функции f, g соответственно в $G^*_{3,\rho_0} = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$, $G^*_{4,\rho_0} = \{(v,w) : \|v - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < < \rho_0\}$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ и линейная однородная двухточечная краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y, \qquad t \in [0,T], \qquad y \in R^n, \tag{30}$$

$$g'_v[x^*(0), x^*(T)]y(0) + g'_w[x^*(0), x^*(T)]y(T) = 0 \tag{31}$$

имеет только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$.

Замечание. В условии A_1 и определении "изолированного" решения достаточно требовать существования непрерывных, а не равномерно непрерывных, частных производных $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$. Так как $\rho > 0$, $\rho_0 > 0$, то можно выбрать $\theta > 0$ такое, что $\rho_\theta = \rho - \theta > 0$, $\rho_{0,\theta} = \rho_0 - \theta > 0$ и в замкнутых множествах $\overline{G}^0_1(R[t], \rho_\theta) = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| \le (R_r(t)+1)\rho_\theta, \ t \in [(r-1)h, rh), \ r = \overline{1,N}, \|x - \lambda_N^{(0)} + \lim\limits_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t)\| \le (R_N(T)+1)\rho_\theta\}$, $\overline{G}^0_2(R[t], \rho_\theta) = \{(v,w) : \|v - \lambda_1^{(0)}\| \le \rho_\theta, \|w - \lambda_N^{(0)} - \lim\limits_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t)\| \le (R_N(T)+1)\rho_\theta\}$, $\overline{G}^0_{3,\rho_\theta} = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - x^*(t)\| \le \rho_{0,\theta}\}$, $\overline{G}^0_{4,\rho_\theta} = \{(v,w) : \|v - x^*(0)\| \le \rho_{0,\theta}, \ \|w - x^*(T)\| \le \rho_{0,\theta}\}$, в силу конечномерности исходной системы, частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ будут равномерно непрерывными. Теперь нам достаточно рассмотреть эти производные в $G^0_1(R[t], \rho_\theta)$, $G^0_2(R[t], \rho_\theta)$, G^0_{3,ρ_θ}, G^0_{4,ρ_θ}.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 задача (1), (2) в $S(x^{(0)}(t), [R(t)+1]\rho)$ имеет "изолированное" решение.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует существование изолированного решения $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t), [R(t)+1]\rho)$. Покажем, что это решение является изолированным в смысле определения. Рассмотрим линейную однородную краевую задачу (30), (31). По матрицам $A^*(t) = f'_x(t, x^*(t))$, $B^* = g'_v[x^*(0), x^*(T)]$, $C^* = g'_w[x^*(0), x^*(T)]$ составим $(nN \times nN)$ - матрицу специальной структуры

$$Q_1(*,h) = \left| \begin{array}{cccccc} B^*h & 0 & 0 & \dots & 0 & C^*\Big[I + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} A^*(t)dt\Big]h \\ I + \int\limits_0^h A^*(t)dt & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + \int\limits_{(N-2)h}^{(N-1)h} A^*(t)dt & -I \end{array} \right|, \tag{32}$$

где I — единичная матрица размерности n.

Введя обозначения: $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, $u_r^*(t) = x^*(t) - \lambda_r^*$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, нетрудно заметить, что матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$ совпадает с $Q_1(*,h)$. Тогда в силу условий теоремы 1 матрица $Q_1(*,h)$ обратима и выполняются неравенства:

$$||f'_x(t, x^*(t))|| \le L(t), \qquad ||g'_w[x^*(0), x^*(T)]|| \le L_2, \qquad ||[Q_1(*,h)]^{-1}|| \le \gamma_1(h),$$

$$q_1(h) = \gamma_1(h) \max(1, h\|C^*\|) \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ e^{\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt} - 1 - \int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt \right\} < 1.$$

При этих условиях по схеме доказательства теоремы 1 из [11, с. 54], легко установить существование единственного тривиального решения однородной задачи (30), (31). Теорема 3 доказана.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования "изолированного" решения задачи (1), (2).

Теорема 4. *Краевая задача (1), (2) имеет "изолированное" решение тогда и только тогда, когда существуют* $h > 0 : Nh = T$ $(N = 1, 2, \dots)$, $\lambda^{(0)} \in G_0(f, h)$, *непрерывные на* $[(r-1)h, rh]$ *функции* $R_r(t) \geq 0$, $r = \overline{1, N}$, *число* $\rho > 0$, *при которых выполнено условие* A_1, *матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ *обратима для любых* $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *и имеют место неравенства 1)–4) теоремы 1.*

Доказательство необходимости. Пусть $x^*(t)$ — "изолированное" решение задачи (1), (2) и функции f, g соответственно в G^*_{3,ρ_0}, G^*_{4,ρ_0} имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$. Тогда существуют числа α, L_1, L_2, ограничивающие

эти функции $\quad ||f'_x(t,x)|| \leq \alpha,\ (t,x) \in G^*_{3,\rho_0}, \qquad ||g'_v(v,w)|| \leq L_1,\ ||g'_w(v,w)|| \leq L_2,\ (v,w) \in G^*_{4,\rho_0}$

и однородная двухточечная краевая задача (34), (35) имеет только тривиальное решение. Применяя теорему 3 из [3, с.59] получим, что существует $h : Nh = T$, при котором матрица (32) обратима и выполняются неравенства:

$$\text{а)}||[Q_1(*,h)]^{-1}|| \leq \gamma_1^*(h), \qquad \text{б)}q_1^*(h) = \gamma_1^*(h)\max(1, hL_2)\Big\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h\Big\} < 1.$$

При найденном шаге $h > 0$ за $\lambda^{(0)}$, $u^{(0)}[t]$ возьмем $\lambda^* = (x^*(0), x^*(h), ..., x^*((N-1)h))' \in \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_N^*(t))'$, где $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(r-1)h]$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, функции $R_r(t)$ определим равенствами: $R_r(t) = e^{\alpha[t-(r-1)h]} - 1$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$. Числа $\rho_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ выбираем удовлетворяющими неравенствам

$$e^{\alpha h}\rho_1 < \rho_0, \qquad \varepsilon_1\gamma_1^*(h) < 1, \qquad q_1^*(h) < 1 - \varepsilon_1\gamma_1^*(h), \tag{33}$$

обеспечивающие включение $G_1^*(R[t], \rho_1) \subset G^*_{3,\rho_0}$, $G_2^*(R[t], \rho_1) \subset G^*_{4,\rho_0}$. Тогда из равномерной непрерывности частных производных $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ в G^*_{3,ρ_0}, G^*_{4,ρ_0} следует, что условие A_1 выполняется в $G_1^*(R[t], \rho_1)$, $G_2^*(R[t], \rho_1)$ и матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^*, \rho_1) \times S(u^*[t], e^{\alpha h}\rho_1)$. Поэтому для $\varepsilon_1 > 0$ существует $\rho^* = \rho^*(\varepsilon_1) \in (0, \rho_1]$,

такое что
$$\Big|\Big|\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}\Big|\Big| \leq \varepsilon_1$$

при всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho^*) \times S(u^*[t], e^{\alpha h}\rho^*)$. Так как $\varepsilon_1\gamma_1^*(h) < 1$, то отсюда и из теоремы о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [13, с.142] следует, что матрица Якоби обратима при всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho^*) \times S(u^*[t], e^{\alpha h}\rho^*)$ и $\Big|\Big|\Big[\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}\Big]^{-1}\Big|\Big| \leq \dfrac{\gamma_1^*(h)}{1 - \varepsilon_1\gamma_1^*(h)}$,

т.е. неравенство 1) теоремы 1 выполняется с $\gamma_1(h) = \dfrac{\gamma_1^*(h)}{1 - \varepsilon_1\gamma_1^*(h)}$. Число $q_1(h) = \dfrac{q_1^*(h)}{1 - \varepsilon_1\gamma_1^*(h)}$ в силу (37) меньше единицы и, учитывая, что $Q_{1,h}(\lambda^*, u^*) = 0$, установим справедливость неравенств 2), 3) теоремы 2. Теорема 4 доказана.

Если $x^*(t)$ является "изолированным" решением, то по теореме 4 существуют $h > 0 : Nh = T$, $\rho_1 > 0$, $R[t] \geq 0$, при которых условия теоремы 1 выполняются в

$S(\lambda^*, \rho_1) \times S(u^*[t], \rho_1 R[t])$, где $\lambda^* = (x^*(0), x^*(h), \ldots, x^*((N-1)h))' \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_N^*(t))'$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*[(r-1)h]$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$. Тогда, согласно теоремам 1, 2 это решение будет изолированным в обычном смысле.

Цитированная литература

1. **Абрамов А.А., Андреев В.Б.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т.3. №2. С. 377-381.

2. **Шаманский В.Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наук. думка, 1963. Ч.1.

3. **Keller H.B.** Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell: Walthan, 1968.

4. **Roberts S.M., Shipman J.S.** Two-point boundary-value problems: Shooting methods. N.Y.: Elsevier, 1972.

5. **Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений** // Под ред. Холла Дж., Уатта Дж. М.: Мир, 1979.

6. **Монастырный П.И.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. №6. С. 1139-1145.

7. **Монастырный П.И.** // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. №4. С. 732-740.

8. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

9. **Кигурадзе И.Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. "Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)"М.: 1987.

10. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наук. думка, 1986.

11. **Джумабаев Д.С.** // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. №1. С.50-66.

12. **Джумабаев Д.С.** // Матем. журнал МОН РК. 2001. Т. 1. № 1. С. 30-40.

13. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 25.02.2004г.

УДК 517.956

ON SINGULAR PROBLEMS FOR SELF-SIMILAR SOLUTIONS TO THE SYSTEMS OF NONLINEAR WAVE EQUATIONS ARISING IN THE INFLATIONARY COSMOLOGY

N. B. Konyukhova, A. L. Dyshko

Dorodnicyn Computing Centre of RAS, N. A. Voronov Institute of Theoretical and Experimental Physics
119991 Moscow Russia Vavilov str., 40 nadja@ccas.ru

A brief representation on a correct statement and analytical-numerical approach to some singular problems arising from the inflationary cosmology models with scalar Higgs fields is given. The formulated problems are more common than studied in [1]–[7].

Introduction. The inflationary cosmology is the morden theory of the very early stages of the evolution of the Universe where a space-time is postulated as the de Sitter space (see, e.g., [8]–[10] and references there). For the corresponding cosmological paradigm, the scalar Higgs fields (or the fields with spontaneous break of symmetry) play an important role as well as in the theory of the elementary particles (with reference to the particle physics, see, e.g., [11], [12]); in particular, the objects generated by such fields could be treated as the prototypes (pre-images) of a matter.

For the topic of this paper, the previous results have been obtained in [1]–[7]: in the four-dimensional de Sitter space, the scalar neutral Higgs fields (until three ones) were considered; for self-similar soliton-type solutions of the corresponding NWEqs, the singular ODEs were obtained and studied by analytical-numerical methods.

In this paper we consider a general case of N interacting scalar Higgs fields in the $(D+1)$-dimensional de Sitter space ($D \geq 1$, $1 \leq N \leq D$). For a corresponding system of NWEqs, we construct self-similar soliton-type solutions defined and bounded in all the P-dimensional subspace on spatial variables ($1 \leq P \leq D$) and including into themselves the investigated solutions (for $D = 3$ and $N = 1, 2, 3$) as the particular cases.

In what follows, we use the system of units with $c = \hbar = 1$, where c is the speed of light in vacuum and $\hbar$ is the Plank constant. In this system, which is commonly used in cosmology, the only

---

Keywords: $(D+1)$*-dimensional space-time with the de Sitter metric* $(D \geq 1)$*,* N *interacting scalar Higgs fields* $(1 \leq N \leq D)$*, system of* N *nonlinear wave equations (NWEqs), singular problem in all the space, the domain walls with the different space symmetries, a thin-wall approximation, self-similar soliton-type solutions, second-order nonlinear ordinary differential equation (ODE) with the singularities and large parameter, singular boundary value problem (BVP) and its solvability, a multiplicity of solutions, associated singular spectral problem (SP) for a bifurcation parameter (singular self-adjoint Sturm-Liouville problem), continuability of solutions on an infinite interval and their asymptotic behavior*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35Q51

nontrivial dimension is that of mass ($[m] = M$), and both length ($[l] = L$) and time ($[t] = T$) have the dimension $1/M$: $[c] = L/T$, $[\hbar] = ML^2/T$ (dimension of $\hbar$ follows from the relation $E = \hbar\omega$), so that $c = \hbar = 1$ implies $L = T = 1/M$ (in detail see, e.g., [9]–[11]).

1. Statement of singular problem for system of nonlinear wave equations. The $(D+1)$-dimensional space-time with the coordinates $x_0 = t, x_1, \ldots, x_D$ is called *the de Sitter space* when it is provided with the metric

$$ds^2 = dt^2 - \exp(2Ht)\sum_{i=1}^{D} dx_i^2, \tag{1}$$

where ds is an element of length, $D \geq 1$ and $0 < H$ is the Hubble constant, $[H] = M$ ($1/H$ is called *the de Sitter horizon*). The metric tensor corresponding to (1) satisfies the Einstein equation with the cosmological constant

$$\Lambda = D(D-1)H^2/2. \tag{2}$$

In this space-time, we consider a system of N nonlinear scalar neutral fields $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ with the Higgs self-action potential

$$U(\varphi_1, \ldots, \varphi_N) = \lambda^2\Big(\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^2 - \nu^2\Big)^2, \tag{3}$$

where λ and ν are positive parameters, $[\lambda] = M$ whereas both φ_j and ν are the dimensionless quantities. The column $\vec{\varphi}$ with components $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ can be treated as a unified field with values in the N-dimensional space of columns $\mathbb{R}^N_{field}$.

The values $\varphi_j \equiv \varphi_{vj}$ such that $\sum_{j=1}^N \varphi_{vj}^2 = \nu^2$ are called *the true degenerate vacua of the same depth d* ($d = \lambda^2\nu^4$) because they correspond to the lowest-energy stable states of the field whereas the point $\varphi_1 = \ldots = \varphi_N = 0$ is referred to as *a trivial* (or *false*) *vacuum* because it corresponds to unstable equilibrium of the field.

It is convenient to introduce the dimensionless variables

$$\varphi_{j,new} = \varphi_{j,old}/\nu, \quad \vec{r}_{new} = (a_0H/\nu)\vec{r}_{old}, \quad \tau = -\exp(-Ht)/\nu, \tag{4}$$

where a new time variable τ (*conformal time*) is especially important:

$$\{0 \leq t < \infty\} \Longleftrightarrow \{-\nu^{-1} \leq \tau < 0\} \quad \text{and} \quad \{-\infty < t < \infty\} \Longleftrightarrow \{-\infty < \tau < 0\} \tag{5}$$

whereas for a geodesicly complete space we must put formally $-\infty < \tau < \infty$ (in detail see, e.g., [13, p.139]). To study the object evolution for $t > 0$, it is enough to consider the main interval $-\nu^{-1} \leq \tau < 0$ extending under the necessity obtained solution onto geodesicly complete space.

In what follows,

$$0 < C = \lambda\nu/H = \sqrt{d}/(\nu H) \tag{6}$$

is a dimensionless parameter relating the values and depth of the Higgs-field vacua to the de Sitter horizon.

If we use the dimensionless variables (4), then the true vacua satisfy relation

$$\sum_{j=1}^{N}\varphi_{vj}^2 = 1, \tag{7}$$

i.e., for $N \geq 2$ they form the unit (hyper)sphere in the field space $\mathbb{R}^N_{field}$; for $N = 1$, there are two vacuum values $\varphi_{1\pm} = \pm 1$.

At last, extending the approach and hypothesises of [1], [14] on the general case under consideration in this paper, we obtain the equations describing a system of scalar Higgs fields in the de Sitter space in the form

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\tau^2} - [(D-1)/\tau]\frac{\partial\varphi_j}{\partial\tau} - \Delta_D\varphi_j + (4C^2/\tau^2)\varphi_j\Big(\sum_{s=1}^{N}\varphi_s^2 - 1\Big) = 0, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^D, \quad \tau \in [-\nu^{-1}, 0),$$

where Δ_D is the D-dimensional Laplace operator.

We look for a solution $\{\varphi_j(\vec{r},\tau)\}_{j=1}^N$ to Eqs.(8) defined and bounded in all the subspace $\mathbb{R}^P \subseteq \mathbb{R}^D\, \forall\tau \in [-\nu^{-1}, 0]$, different from true vacua and satisfying condition

$$\lim_{|\overrightarrow{r}|\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^2(\overrightarrow{r},\tau) = 1 \quad \forall\overrightarrow{r},\tau:\ \overrightarrow{r}\in\mathbb{R}^P,\ \tau\in[-\nu^{-1},0). \tag{9}$$

R e m a r k 1. *According to (2), $\Lambda = 0$ when $D = 1$, i.e., a gravitating matter is absent but Eqs. (8) are formally valid !*

R e m a r k 2. *If $N = 1$ then the problem (8), (9) is invariant under change from φ_1 to $-\varphi_1$ and when one of the vacuum states (e.g., $\varphi_{v1+} = 1$) is observed, discrete symmetry is said to be spontaneously broken. The symmetry is called global if it is independent of both time and spatial coordinates. If $N \geq 2$ then the problem (8), (9) has a global $SO(N)$ symmetry in the space of the fields, i.e., remains invariant under the transformation*

$$\overrightarrow{\varphi} \Rightarrow A\overrightarrow{\varphi}, \quad \overrightarrow{\varphi}\in\mathbb{R}^N, \quad A\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N, \quad A^TA = E_N, \quad \det A = 1, \tag{10}$$

where E_N is an identity $N\times N$–matrix and A is the matrix of orthogonal rotations in $\mathbb{R}^N_{field}$. The global $SO(N)$ symmetry is said to be spontaneously broken as a specific point is singled out from the continuous set of vacua on the unit (hyper)sphere (7), moreover for $N \geq 3$ the $SO(N)$ symmetry is broken incompletely: the $SO(N-1)$ symmetry holds, where $SO(N-1)$ is the group of orthogonal rotations in the field space $\mathbb{R}^{N-1}_{field}$ about the axis containing the point in question (it is in just the same way as in [11] for the Higgs fields in the Minkowski space).

2. C l a s s i f i c a t i o n o f s o m e s o l u t i o n s w i t h t h e v a r i o u s s p a c e s y m m e t r i e s.

For the problem (8), (9), the solutions with the different space symmetries are defined below.

D e f i n i t i o n 1. *For $D \geq 1$ and $N = P = 1$, let $\varphi_1 = \varphi(x_1,\tau)$ be a one-dimensional solution to the problem (8), (9). We say that $\varphi(x_1,\tau)$ is a domain wall (or a heteroclinic solution) if it satisfies condition*

$$[\lim_{x_1\to-\infty}\varphi(x_1,\tau)][\lim_{x_1\to\infty}\varphi(x_1,\tau)] = -1 \quad \forall\tau\in[-\nu^{-1},0), \tag{11}$$

i.e., it is a transition layer between two different vacua, whereas $\varphi(x_1,\tau)$ is a wave swell (either a solitary wave or a homoclinic solution) if it satisfies condition

$$[\lim_{x_1\to-\infty}\varphi(x_1,\tau)][\lim_{x_1\to\infty}\varphi(x_1,\tau)] = 1 \quad \forall\tau\in[-\nu^{-1},0), \tag{12}$$

i.e., it is a splash over the same vacuum.

In what follows we rename $r = x_1$ for $P = 1$ where $r \in (-\infty,\infty)$.

When $P \geq 2$, we introduce in $\mathbb{R}^P$ the polar ((hyper)spherical) coordinates $r, \theta_1, \ldots, \theta_{P-1}$:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = r\sin\theta_{P-1}\sin\theta_{P-2}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1,\\
&x_2 = r\sin\theta_{P-1}\sin\theta_{P-2}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1,\\
&x_3 = r\sin\theta_{P-1}\sin\theta_{P-2}\cdots\cos\theta_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{P-1} = r\sin\theta_{P-1}\cos\theta_{P-2},\\
&x_P = r\cos\theta_{P-1},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$r \ge 0, \quad 0 \le \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \le \theta_k \le \pi, \quad k = 2, ..., P-1.$$

In these coordinates, as it is well known, the P-dimensional Laplace operator has the form

$$\Delta_P \equiv \partial^2/\partial r^2 + [(P-1)/r]\partial/\partial r + (1/r^2)L_{P-1}, \tag{14}$$

where $L_{P-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{P-1})$ is the Laplace-Beltrami operator:

$$L_{P-1} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{P-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big(\frac{h}{h_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big), \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&h_{P-1} = 1, \quad h_{P-2} = \sin^2\theta_{P-1}, \quad \ldots, \quad h_1 = \sin^2\theta_{P-1}\sin^2\theta_{P-2}\cdots\sin^2\theta_2,\\
&h = \sin^{P-2}\theta_{P-1}\sin^{P-3}\theta_{P-2}\cdots\sin\theta_2.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Further we use the following fact. Let $U_1(x_1, \ldots, x_{P-1})$ be a homogeneous harmonic polinomial of the first degree on the variables $x_1, \ldots, x_{P-1}$. Going over to the (hyper)polar coordinates (13), we obtain

$$U_1(x_1, \ldots, x_{P-1}) = rY_1(\theta_1, \ldots, \theta_{P-1}), \tag{17}$$

where Y_1 is a (hyper)spherical function of the first order. Then Y_1 satisfies equation

$$L_{P-1}Y_1 = -(P-1)Y_1, \tag{18}$$

where the Laplace-Beltrami operator L_{P-1} is given by (15), (16) (see, e.g., [15], p.117).

In the polar coordinates (13), we define the following solutions to the problem (8), (9).

D e f i n i t i o n 2. *For $D \ge 2$, $N = 1$ and $2 \le P \le D$, a P-dimensional (hyper)bubble is a centrally symmetric solution $\varphi_1 = \varphi(r, \tau)$ to the problem (8), (9) where r is a radial variable in the polar coordinates (13) in $\mathbb{R}^P$, and the bubble radius $R(\tau)$ is defined by the relation*

$$\varphi(R(\tau), \tau) = 0, \quad \tau \in [-\nu^{-1}, 0); \tag{19}$$

if there are more than one radius, then we say about enclosed bubbles.

R e m a r k 3. *For $D = 3$, $N = 1$ and $P = 2, 3$, there exist the equations for a basic bubble radius $R(\tau)$ in the thin-wall approximation, namely when a thikness of a bubble wall (i.e., the value $l \sim 1/C$) is negligible as compared with its radius (see [16]–[19]). Using the analogous approach and taking into account Eq. (14), we get a common equation for $D \ge 2$ and $2 \le P \le D$:*

$$R'' = -[(P-1)/R - DR'/\tau][1 - (R')^2], \quad -\nu^{-1} \le \tau < 0. \tag{20}$$

The dynamical problems for Eq. (20) are of separate interest. Here we only indicate that this equation has the exact critical solutions as the radii of the bubbles collapsing in $\tau = 0$, i.e., in an infinite time t:

$$R_{b1}(\tau) = -\tau\sqrt{(P-1)/D}, \quad \tau \in [-\nu^{-1}, 0); \tag{21}$$

$$R_{b2}(\tau) = -\tau, \quad \tau \in [-\nu^{-1}, 0). \tag{22}$$

The formulae (20)-(22) are formally valid also for $D = P = 1$.

R e m a r k 4. *For $D \geq 1$ and $N = 1$, if and only if $P = D$ the problem (8), (9) has the exact generalized solutions independent of C: for $D \geq 2$, in the geodesicly complete space we obtain the bubble-like solutions as the shock waves,*

$$\varphi_{bg\pm}(r, \tau) = \pm \mathrm{sign}(r - |\tau|), \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty < \tau < \infty; \tag{23}$$

for $D = 1$, we have the generalized domain walls in the form (23) with $r \in (-\infty, \infty)$ and $\pm\tau$ instead of $|\tau|$.

For the main interval $-\nu^{-1} \leq \tau \leq 0$, the radii of the generalized bubbles (23) evolve as (22).

D e f i n i t i o n 3. *For $D \geq 2$ and $N = P = 2$, a (hyper)string (or, for $D = 2$, a ring) is a solution to the problem (8), (9) having the form*

$$\varphi_1 = \varphi(r, \tau)\sin(n\theta_1), \quad \varphi_2 = \varphi(r, \tau)\cos(n\theta_1), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

where r and θ_1 are the polar coordinates in $\mathbb{R}^2$, and the string radius $R(\tau)$ is defined by the relation (19) (if there are more than one radius, then we say about enclosed strings).

D e f i n i t i o n 4. *For $D \geq 3$, $3 \leq P \leq D$ and $N = P$, a P-dimensional (hyper)monopole is a solution to the problem (8), (9) having the form*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi(r, \tau)\sin\theta_{P-1}\sin\theta_{P-2}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1,\\
&\varphi_2 = \varphi(r, \tau)\sin\theta_{P-1}\sin\theta_{P-2}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1,\\
&\varphi_3 = \varphi(r, \tau)\sin\theta_{P-1}\sin\theta_{P-2}\cdots\cos\theta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{P-1} = \varphi(r, \tau)\sin\theta_{P-1}\cos\theta_{P-2},\\
&\varphi_P = \varphi(r, \tau)\cos\theta_{P-1},
\end{aligned} \tag{25}$$

where $r, \theta_1, \ldots, \theta_{P-1}$ are the polar coordinates (13) in $\mathbb{R}^P$, and the monopole radius $R(\tau)$ is defined by the relation (19); if there are more than one radius, then we say about enclosed monopoles.

R e m a r k 5. *In the thin-wall approximation, the formulae for a basic string (monopole) radius are the same as (20), (21), (22).*

For all constructions described above, the condition (9) implies

$$\lim_{r\to\infty} \varphi^2(r, \tau) = 1 \quad \forall \tau \in [-\nu^{-1}, 0) \tag{26}$$

where $\varphi(r, \tau)$ is the same as in Definitions 1, 2, 3 or 4 respectively.

3. S e l f-s i m i l a r s o l i t o n s a n d a s s o c i a t e d s i n g u l a r p r o b - l e m s f o r O D E s. At last we look for the self-similar solutions of the indicated above types setting $\psi(\xi) = \varphi(r/\tau)$. For $\psi(\xi)$, taking into account (14), (18), (24), (25) and (26), we get the common problem

$$[(1 - \xi^2)\psi']' - [(D - 1)\xi - (P - 1)/\xi]\psi' = Q\psi/\xi^2 + 4C^2\psi(\psi^2 - 1), \tag{27}$$

$$-\infty < \xi < -1, \quad -1 < \xi < 0,$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} \psi^2(\xi) = 1, \tag{28}$$

where a value of Q is connected with N, D and P and the following restrictions are valid: 1) if $N = 1$ then $Q = 0$, for $(D \geq 1) \wedge (1 \leq P \leq D)$; 2) if $N = 2$ then $Q = Q_n = n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, for $(D \geq 2) \wedge (P = 2)$; 3) if $N \geq 3$ then $Q = P - 1$, for $(D \geq N) \wedge (P = N)$. As particular cases, Eq. (27) includes ODEs of [1]–[7].

R e m a r k 6. *For $D \geq 2$ and $2 \leq P \leq D$, if the problem (27), (28) has a solution $\psi_{ob}(\xi, C)$ with one zero ξ_z on the interval $(-1, 0)$ (i.e., $\psi_{ob}(\xi_z, C) = 0$, $\xi_z \in (-1, 0)$) then the relation*

$$R_{ob}(\tau, C) = \xi_z(C)\tau, \quad \tau \in [-\nu^{-1}, 0), \tag{29}$$

is valid where R_{ob} is the radius of the corresponding self-similar object. Thus the self-similar object collapses in an infinite time t. Moreover, it should be expected that the relation

$$\xi_z(C) \approx -\sqrt{(P-1)/D}, \quad C \gg 1, \tag{30}$$

holds, i.e., (29) becomes the same as (21) when $C \to \infty$. At least it has been confirmed numerically for bubbles, strings and monopoles in the four-dimensional space-time (see [2]–[7]).

R e m a r k 7. *For $Q = 0$, if and only if $P = D$ the problem (27), (28) has the exact generalized solutions independent of C: in the geodesicly complete space we obtain the shock waves*

$$\psi_{bg\pm}(\xi) = \pm\mathrm{sign}(1 \pm \xi), \quad -\infty < \xi < \infty. \tag{31}$$

For the main interval $-\infty < \xi < 0$, we obtain $\xi_z = -1$ $\forall C$ and (29) becomes the same as (22). The solutions (31) are the same as (23). Moreover for geodesicly complete space we obtain also the generalized solutions to the problem (27), (28) in the forms $\tilde{\psi}_{bg\pm}(\xi) = \pm\mathrm{sign}(\xi)$, $\hat{\psi}_{bg\pm}(\xi) = \pm\mathrm{sign}(1 - |\xi|)\mathrm{sign}(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$, etc. It follows from the representation of Eq. (27) in the form $[\xi^{D-1}(1-\xi^2)\psi']' = 4C^2\xi^{D-1}\psi(\psi^2 - 1)$.

3.1. S i n g u l a r B V P o n a f i n i t e i n t e r v a l a n d i t s s o l v a b i l i t y. Let us consider Eq. (27) on the interval $(-1, 0)$. First of all we need to define the limiting boundary conditions (BCs) at the singular points $\xi = -1$ and $\xi = 0$. On a classification of [20], these points are regular singular ones but there is no theory of nonlinear ODEs with such points both in [20] and in the other well-known monographs, e.g., in [21] (according to [20], the behavior of solutions near such points are enough nontrivial to study).

For singular points $\xi = -1$ and $\xi = 0$, we set the limiting conditions

$$|\lim_{\xi \to -1+0} \psi(\xi)| < \infty, \quad \lim_{\xi \to -1+0} [(1+\xi)\psi'(\xi)] = 0; \tag{32}$$

$$|\lim_{\xi \to -0} \psi(\xi)| < \infty, \quad \lim_{\xi \to -0} [\xi\psi'(\xi)] = 0. \tag{33}$$

For $P = 1$ (it implies $Q = 0$), we replace (33) by BCs

$$\psi(0) = 0 \quad \text{or} \quad \psi'(0) = 0. \tag{34}$$

Let us consider the problem (27), (32) (the problem (27), (33)) locally in a vicinity of singular point as a singular Cauchy problem (CP).

For a principal linear ODE near the point $\xi = -1$, i.e., for the equation $(1+\xi)^2\psi'' - [(P - D-2)/2](1+\xi)\psi' = 0$, $\xi \sim -1$, the characteristic exponents at the point $\xi = -1$ are $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = (P - D)/2$. Similarly, for the linear ODE $\xi^2\psi'' + \xi(P-1)\psi' - Q\psi = 0$, $\xi \sim 0$, the characteristic exponents at the point $\xi = 0$ are the following: 1) if $Q = 0$ then $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = 2 - P$; 2) if $(Q = n^2, n = 1, 2, \ldots) \wedge (P = 2)$ then $\lambda_{1,2} = \pm n$; 3) if $Q = P - 1$ then $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 1 - P$.

Then the next two propositions are the corollaries of the theorem 5 in [22] (this not complicated theorem has been obtained as the corollary and generalization of some Lyapunov results [23]).

P r o p o s i t i o n 1. For any fixed C^2, Q and $P, D : P - D \leq 0$, singular CP (27), (32) has a one-parameter family of solutions. Each solution of this set is a holomorphic function at the point $\xi = -1$:

$$\psi(\xi, c_0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(c_0)(1+\xi)^k, \quad |1+\xi| \leq \Delta_1(c_0), \quad \Delta_1 > 0, \tag{35}$$

where c_0 is a parameter,

$$\begin{aligned}
&c_1 = c_0[Q - 4C^2(1 - c_0^2)]/(D - P + 2),\\
&c_2 = \{c_1[3D + Q - P - 4C^2(1 - 3c_0^2) + 4] + 8C^2 c_0(1 - c_0^2)\}/[2(D - P + 4)],\\
&c_3 = [3(D - P + 6)]^{-1}\{2c_2[3D - P + Q/2 + 9 - 2C^2(1 - 3c_0^2)]+\\
&+c_1[4C^2(2 - 6c_0^2 + 3c_0c_1) - 3(D + 1)] - 4C^2 c_0(1 - c_0^2)\},\\
&c_4 = [4(D - P + 8)]^{-1}\{c_3[9D - 3P + Q + 42 - 4C^2(1 - 3c_0^2)]-\\
&-c_2[6D + 14 - 8C^2(1 - 3c_0^2 + 3c_0c_1)] + c_1[D + 1 - 4C^2(1 - 3c_0^2 + 6c_0c_1 - c_1^2)]\},\\
&c_{k+1} = [(k + 1)(D - P + 2k + 2)]^{-1}\Big\{c_k[Q - 4C^2 + k(5k + 3D - P - 1)]+\\
&+c_{k-1}[8C^2 - (k - 1)(4k + 3D - 5)] + c_{k-2}[(k - 2)(k + D - 2) - 4C^2]+\\
&+4C^2\Big[\textstyle\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{m=0}^{k-l-2} c_lc_mc_{k-l-m-2} - 2\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l-1} c_lc_mc_{k-l-m-1}+\\
&\textstyle\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l} c_lc_mc_{k-l-m}\Big]\Big\}, \quad k = 4, 5, \dots
\end{aligned} \tag{36}$$

C o r o l l a r y 1. *The family (35), (36) includes a trivial solution $\psi_0 \equiv 0$ corresponding to $c_0 = 0$ and, for $Q = 0$, also the vacuum solutions $\psi_\pm = \pm 1$ corresponding to $c_0 = \pm 1$ respectively.*

R e m a r k 8. *Let us rewrite the conditions (37) in the form*

$$\lim_{\xi\to -1+0}[\psi(\xi) - c_0] = \lim_{\xi\to -1+0}[(1 + \xi)\psi'(\xi)] = 0, \tag{37}$$

where c_0 is a parameter. Then, in other words, Proposition 1 denotes that for any fixed C^2, Q, c_0 and $P, D:\ P - D \le 0$, singular CP (27), (37) has a unique solution (i.e., it is a correctly solvable problem). This solution is a holomorphic function at the point $\xi = -1$ represented by the series (35), (36).

P r o p o s i t i o n 2. For any fixed C^2, D and P, Q: $(P \ge 2) \wedge (Q = 0)$ (the case I) either $(P = 2) \wedge (Q = n^2,\ n = 1, 2, \dots)$ (the case II) or $(P \ge 3) \wedge (Q = P - 1)$ (the case III), singular CP (27), (33) has a one-parameter family of solutions. Each solution of this set is a holomorphic function at the point $\xi = 0$:

$$\psi(\xi, b_0) = \xi^q[b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}(b_0)\xi^{2k}], \quad |\xi| \le \Delta_0(b_0), \quad \Delta_0 > 0, \tag{38}$$

where b_0 is a parameter; for the case I, $q = 0$ and

$$\begin{aligned}
&b_{2k+2} = [(k + 1)(2k + P)]^{-1}\big\{b_{2k}[k(2k + D) - 2C^2] + 2C^2 \textstyle\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l} b_{2l}b_{2m}b_{2k-2l-2m}\big\},\\
&k = 0, 1, \dots;
\end{aligned} \tag{39}$$

for the case II, $q = n$ and

$$\begin{aligned}
&b_{2k} = b_{2k-2}[(2k + n - 2)(2k + n + D - 2) - 4C^2]/[4k(k + n)], \quad k = 1, \dots, n,\\
&b_{2k} = [4k(k + n)]^{-1}\big\{b_{2k-2}[(2k + n - 2)(2k + n + D - 2) - 4C^2]+\\
&+4C^2 \textstyle\sum_{l=0}^{k-n-1}\sum_{m=0}^{k-n-l-1} b_{2l}b_{2m}b_{2(k-n-l-m-1)}\big\}, \quad k = n + 1, n + 2, \dots;
\end{aligned} \tag{40}$$

for the case III, $q = 1$ and

$$\begin{aligned}
&b_2 = (D + 1 - 4C^2)b_0/[2(2 + P)], \quad b_{2k} = \big\{b_{2k-2}[(2k - 1)(2k + D - 1) - 4C^2]+\\
&4C^2 \textstyle\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{m=0}^{k-l-2} b_{2l}b_{2m}b_{2k-2l-2m-4}\big\}/[2k(2k + P)], \quad k = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{41}$$

C o r o l l a r y 2. *The family (38), (39) includes a trivial solution $\psi_0 \equiv 0$ corresponding to $b_0 = 0$ and the vacuum solutions $\psi_\pm = \pm 1$ corresponding to $b_0 = \pm 1$ respectively; both the set (38), (40) and (38), (41) include a trivial solution $\psi_0 \equiv 0$ corresponding to $b_0 = 0$.*

R e m a r k 9. *Let us rewrite the conditions (33) in the form*

$$\lim_{\xi\to-0}[\xi^{-q}\psi(\xi)-b_0]=\lim_{\xi\to-0}[\xi\psi'(\xi)]=0, \tag{42}$$

where b_0 is a parameter and q is the same as in Proposition 2. Then, in other words, Proposition 2 denotes that for any fixed C^2, D, b_0 and P, Q : $(P\geq 2)\wedge(Q=0)$ either $(P=2)\wedge(Q=n^2, n=1,2,\ldots)$, or $(P\geq 2)\wedge(Q=P-1)$, singular CP (27), (42) has a unique solution (i.e., it is a correctly solvable CP). This solution is a holomorphic function at the point $\xi=0$ represented by the series (38), (39) either (38), (40) or (38), (41) respectively.

Taking into account Propositions 1, 2 and the input restrictions on the parameters D, P and Q, we obtain that singular BVP (27), (32), (33) is a correctly formulated problem with respect to a number of the BCs near the both ends of the singular interval (-1, 0). For $P=1$, analogous statement concerns to the problem (27), (32), (34) on the interval (-1, 0].

P r o p o s i t i o n 3. For any fixed $C^2\neq 0$, when $(D\geq 2)\wedge(P\geq 2)\wedge(Q=0)$ either $(D\geq 2)\wedge(P=2)\wedge(Q=n^2,\, n=1,2,\ldots)$ or $(D\geq 3)\wedge(P\geq 3)\wedge(Q=P-1)$ any solution of singular BVP (27), (32), (33) satisfies restriction

$$|\psi(\xi)|\leq 1,\quad -1\leq\xi\leq 0. \tag{43}$$

This problem is solvable and in general there occurs a multiplicity of solutions (in particular $\psi_0(\xi)\equiv 0$ is a solution to the problem and, when $Q=0$, the values $\psi_\pm(\xi)\equiv\pm 1$ are the solutions as well; for $Q\neq 0$ these vacuum values are the super- and subsolution respectively). For $(D\geq 1)\wedge(P=1)\wedge(Q=0)$, the restriction (43) concerns to the solutions of singular BVP (27), (32), (34) witn $\psi_0(\xi)\equiv 0$ and $\psi_\pm(\xi)\equiv\pm 1$ as the particular solutions to the problem.

3.2. M u l t i p l i c i t y o f s o l u t i o n s a n d a s s o c i a t e d s i n g u l a r S P. We used Propositions 1, 2, 3 to solve BVP (27), (32), (33) (BVP (27), (32), (34)) numerically by shooting methods. As it was expected, the number of solutions depends on the value of C. With the growth of C, a new solution appears as a small perturbation of the false vacuum, moreover critical points of the global bifurcation are the eigenvalues (EVs) of the associated singular SP. This problem is formulated for the linear ODE obtained by the linearization of Eq. (270 on a trivial solution:

$$[(1-\xi^2)\psi']'-[(D-1)\xi-(P-1)/\xi]\psi'-Q\psi/\xi^2+4C^2\psi=0,\quad -1<\xi<0, \tag{44}$$

$$|\lim_{\xi\to-1+0}\psi(\xi)|<\infty,\quad \lim_{\xi\to-1+0}[(1+\xi)\psi'(\xi)]=0; \tag{45}$$

$$|\lim_{\xi\to-0}\psi(\xi)|<\infty,\quad \lim_{\xi\to-0}[\xi\psi'(\xi)]=0. \tag{46}$$

For $P=1$, we replace (46) by (34). If $C=C_m$ is the EV of singular linear SP (44), (45), (46) (SP (44), (45), (34)) then for each

$$C: C_m<C<C_{m+1},$$

the input nonlinear BVP (27), (32), (33) (BVP (27), (32), (34)) has exactly m nontrivial solutions

$$\psi_1(\xi,C),\ldots,\psi_m(\xi,C)$$

(to within sign) different from $\psi_\pm(\xi)=\pm 1$ where $\psi_k(\xi,C)$ has equally k zeros on the interval $(-1,0)$ (for $P=1$, on the interval $(-1,1)$).

As far as we know, no theory of singular self-adjoint Sturm-Liouville problems for ODEs with two singular points has been developed to the present day. To solve singular SP (44), (45), (46) (SP (44), (45), (34)) we use a phase method (see, e.g., [24], [25], [26]). Moreover there are some cases with the exact solutions:

1) when $(D = P = 1) \wedge (Q = 0)$, we obtain the Legendre equation

$$[(\xi^2 - 1)\psi']' = 4C^2\psi, \quad -1 < \xi < 1, \tag{47}$$

so that there are the exact EVs,

$$C = C_m = \sqrt{m(m+1)}/2, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{48}$$

and the eigenfunctions proportional to the Legendre polynomials $P_m(\xi)$;

2) when $(D = 3) \wedge (P = 1) \wedge (Q = 0)$, in the variable $v(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}\psi(\xi)$ we obtain the associated Legendre equation

$$\Big[(1-\xi^2)v'\Big]' + \Big[2(2C^2+1) - 1/(1-\xi^2)\Big]v = 0, \quad -1 < \xi < 1, \tag{49}$$

and for each

$$C = C_m = [(m+1)(m+2)/4 - 1/2]^{1/2}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{50}$$

singular SP has a nontrivial solution $v_m(\xi)$ proportional to the function $\sqrt{1-\xi^2}P'_{m+1}(\xi)$;

3) when $(D = 3) \wedge (P = 3) \wedge (Q = 0)$, in the variable $v(\xi) = \xi\psi(\xi)$ we obtain the Legendre equation

$$\Big[(\xi^2 - 1)v'\Big]' = 2(2C^2+1)v, \quad -1 < \xi < 0, \tag{51}$$

and for each $C \sim C_m$, where

$$C_m = \Big[(2m+1)(m+1)/2 - 1/2\Big]^{1/2}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{52}$$

we obtain a small solution $\psi_m(\xi)$ to the input nonlinear BVP (44), (45), (46) approximately proportional to the function $P_{2m+1}(\xi)/\xi$, where $P_{2m+1}(\xi)$ is the Legendre polynomial.

3.3. Continuable solutions and their asymptotic behavior. Finally we establish that the solutions of nonlinear singular BVP (27), (32), (33) (BVP (27), (32), (34)) determine multiple self-similar solutions to the input singular problem (8), (9) of the types defined in Section 2.

Proposition 4. For any fixed C^2 and D, P, Q satisfying restrictions of Proposition 1, each solution of Eq. (27) from the set (35), (36) is continuable to the left with no limit and for $C^2 > D^2/32$ has the asymptotics

$$\psi(\xi, c_0) = \operatorname{sign}(c_0) + A(c_0)|\xi|^{-D/2}\big\{\cos\big(\big(\sqrt{32C^2 - D^2}/2\big)\ln|\xi| + \delta(c_0)\big) + o(1)\big\}, \quad \xi \to -\infty,$$

where $A(c_0)$ and $\delta(c_0)$ are the constants uniquely defined by a specification of a value of c_0 in the expansion (35), (36), so that $\psi(\xi, c_0)$ with $c_0 \neq 0$ satisfies condition (28) (it is a natural condition for the solutions of the family (35), (36)).

Corollary 3. *For singular BVP (27), (32), (33) with fixed $C^2 > D^2/32$ and D, P, Q satisfying the input restrictions, each nontrivial and different from $\psi_\pm = \pm 1$ solution $\psi(\xi)$, continued to the left with no limit and used for the input problem (8), (9) as a function $\varphi(r/\tau)$, $\varphi(r/\tau) = \psi(\xi)$, defines a self-similar (hyper)bubble ($N = 1$) either a self-similar (hyper)string ($N = 2$) or a self-similar (hyper)monopole ($N \geq 3$); for singular BVP (27), (32), (34) when $N = 1$, the analogous statement is valid for self-similar domain walls and wave swells (see Definitions 1–4).*

For large values of C, the behavior of solutions is qualitatively consistent both with the thin-wall approximations and the results of singular perturbation theory.

In detail, see in [2]–[7] the analytical-numerical results relating to the case $D = 3$.

This work was supported by RFBR, project N 02-01-00050.

REFERENCES

1. **Basu R., Vilenkin, A.** // Phys. Rev. D. 1994. V.50. №.12. P. 7150–7153.

2. **Dyshko A.L., Konyukhova N.B.** // Comput. Maths Math. Phys. 1999. V.39. №.1. P. 118–134. MR 2000c : 58051.

3. **Dyshko A.L., Konyukhova N.B., Voronov N.A.** // Comput. Phys. Commun. 2000. V.126. №. 1-2. P. 57–62.

4. **Dyshko A.L., Konyukhova N.B.** // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Tenth Crimean Autumn Math. School-Symposium (KROMSH-X). Simferopol, 2000. Vol. 10. P. 121–126.

5. **Dyshko A.L., Konyukhova, N.B.** // Comput. Maths Math. Phys. 2001. V.41. №. 3. P. 435-456. MR 2001m : 81197.

6. **Dyshko A.L., Konyukhova, N.B** // Comput. Maths Math. Phys. 2002. №.4. V.42. P. 450–469. MR 2003e : 83076.

7. **Dyshko,A.L., Konyukhova N.B.** // J. Comput. Methods in Sciences and Engineering (JCMSE). 2002. V.2. №. 1-2. P.155–162.

8. **Dolgov A.P., Zel'dovich Ya.B., Sazhin M.V.** Kosmologiya rannei Vselennoi (Cosmology of the Early Universe). Moscow, 1988.

9. **Linde A.P.** Particle Physics and Inflationary Cosmology. Harwood Academic, Chur, Switzerland, 1990.

10. **Vilenkin A., Shellard E.P.S.** Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge,– 1993.

11. **Rubakov V.A.** Klassicheskie kalibrovochnye polya (Classical Gauge Fields). Moscow,– 1999.

12. **Belova T.I., Kudryavtsev A.E.** // Physics Uspekhi. 1997. Vol. 40. P. 359–386.

13. **Birrel N.D., Davies P.C.W.** Quantum Fields in Curved Space. Cambridge, 1982.

14. **Belova T.I., Voronov N.A.** // JETF Lett. 1995. V.61. №. 5. P. 341–345.

15. **Vecoua E.** // Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo Instituta (The works of the Tbilissi Mathematical Institute). 1943. Vol. XII. P. 105–174.

16. **Voronov N.A., Dyshko A.L., Kobzarev I.Yu., Konyukhova N.B.** // Phys. Atom. Nucl. 1997. V.60. №. 1. P. 130–139.

17. **Voronov N.A., Dyshko A.L., Konyukhova N.B., Staroverova I.B.** // Proceedings of the 9-th Int. Conf. "Computational Modelling and Computing in Physics". D5, 11-97-112. Dubna: JINR, 1997. P. 304–310.

18. **Voronov N.A., Dyshko A.L., Konyukhova N.B., Staroverova I.B.** // Comput. Maths Math. Phys. 1997. V.37. №. 11. P. 1302–1318. MR 98k : 83096.

19. **Voronov N.A., Dyshko A.L., Konyukhova N.B., Staroverova I.B.** // Comput. Maths Math. Phys. 1997. V.37. №.12. P. 1460-1473. MR 98k : 83097.

20. **Wasov W.** Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. New York, 1965.

21. **Coddington E.A., Levinson N.** Theory of Ordinary Differential Equations. New York, 1955.

22. **Konyukhova N.B.** // Comput. Maths. Math. Phys. 1983. V.23, №. 3. P. 72-82. MR 85h: 34005; ZM 529.34003; ZM 553.34002.

23. **Lyapunov A.M.** Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya (The General Problem of Motion Stability). Moscow, 1950.

24. **Kitoroage D.I., Konyukhova N.B., Pariiskii B.S.** // Soobshcheniya po prikladnoi matematike (Communications in Applied Mathematics). Moscow: Vychisl. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1987. MR 92d: 81027.

25. **Konyukhova N.B., Staroverova I.B.** // Comput. Maths. Math. Phys. 1997. V.37. №.10. P. 1143–1160. MR 98h: 34049.

26. **Konyukhova N.B., Linh V.H., Staroverova I.B.** // Comput. Maths. Math. Phys. 1999. V.39. №. 3. P. 468–498. MR 2000b: 81025.

Received 01.03.2004

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 95 — 101*

УДК 681.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОДХОДА КВАЗИРАСЩЕПЛЕНИЯ

Г. А. Самигулина

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480053 г.Алматы ул.Пушкина, 125 galinasamigulina@mail.ru

Исследуется асимптотическая устойчивость интервальных квазирасщепленных систем управления на основе перспективного биологического подхода Искусственных Иммунных Систем (AIS).

1. В в е д е н и е. Используемый в докладе подход квазирасщепления на основе алгебраических проекторов [1–2] является одним из методов декомпозиции, который позволяет заметно упростить структуру и облегчить исследование систем управления. Однако данный подход не распространен на перспективный класс интервально-заданных объектов управления.

Основы интервальных вычислений, изложенные в работах родоначальников интервального анализа, которыми являются R. Moore [3], G. Alefeld [4], Шокин Ю.И. [5] и др., позволяют на основе расширенной арифметики Каухера решать задачи анализа и синтеза интервально–заданных систем управления. Необходимо отметить, что почти все задачи интервального анализа являются NP-полными.

Данная статья является продолжением работы [6], в которой для исходной математической модели, представленной в пространстве состояний стационарной системой интервальных дифференциальных уравнений, получен на основе алгебраических проекторов интервальный аналог метода квазирасщепления. Для нахождения проекторов используется стандартная процедура погружения интервального пространства в евклидово пространство, при котором сохраняются алгебраические и топологические структуры интервального пространства.

В результате квазирасщепления интервально–заданная система декомпозируется на взаимосвязанные подсистемы, которые эквивалентны по динамическим свойствам исходной системе. В соответствующих подпространствах имеем $(n-1)$ линейных дифференциальных уравнений и одно нелинейное дифференциальное уравнение. При определенных условиях взаимосвязями между подсистемами можно пренебречь. Тогда исследование динамических свойств исходной системы может быть сведено к анализу более простых по структуре подсистем.

Keywords: *intellectual systems, interval systems, quasi- splitting approach, biological approach of Artificial Immune Systems, molecular recognition, asymptotic stability.*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

Последние достижения в кибернетике, информатике, искусственном интеллекте привели к формированию и бурному развитию новой области исследования — искусственному или интеллектуальному управлению, которая является смежной с областью классической теории управления и искусственного интеллекта.

Под интеллектуальной системой [7] понимается система, объединенная информационным процессом совокупность технических средств и программного обеспечения, работающая во взаимодействии с человеком или автономно, способная на основании сведений об окружающей среде и собственном состоянии при наличии знаний и мотивации синтезировать цель, принимать решение о действии и находить рациональные способы достижения цели. То есть это такая система, которая должна иметь способность воспринимать информацию о процессах, возмущениях и условиях функционирования, выводить заключения и обучаться [8–9].

При разработке интеллектуальных систем управления необходимо выполнение основных принципов организации данных систем [10], предложенных Захаровым В.Н.

1) Принцип информационного обмена, который подразумевает наличие тесного информационного обмена системы интеллектуального управления с реальным миром. Это тесное взаимодействие позволяет постоянно получать дополнительную информацию для пополнения знаний и принятия решений.

2) Принцип открытости и развиваемости, который обеспечивает открытость систем интеллектуального управления для самообучения и самоорганизации.

3) Принцип прогнозирования, позволяющий предсказывать изменения в системе при различных управлениях, для каждого из которых система осуществляет прогноз изменений на определенный отрезок времени вперед для оценки наиболее предпочтительных управлений и соответствующей корректировки реализуемого управления.

4) Принцип возрастания точности с уменьшением интеллектуальности. Более верхний уровень решает более творческую и сложную задачу, которая зачастую не может быть решена алгоритмически. Неточность знаний о модели объекта управления и среде компенсируется введением более высоких уровней интеллектуальности.

5) Принцип частичной деградации, который подразумевает лишь частичную утрату работоспособности при нарушениях в работе высших уровней управления, при отказах и сбоях подсистем благодаря децентрализации управления, частичному дублированию функций и перекрестным связям.

В настоящее время довольно продвинутым в области интеллектуального управления является применение Искусственных Иммунных Систем (*Artificial Immune Systems*), построенные на принципах обработки информации молекулами белков. Математическая основа данного подхода заключается во введении понятия формального пептида [11], как математической абстракции свободной энергии белковой молекулы от ее пространственной формы, описанной в алгебре кватернионов. Искусственные иммунные системы обладают способностью к обучению, узнаванию и принятию решений в незнакомой ситуации.

Применение подхода Искусственных Иммунных Систем для создания интеллектуальных квазирасщепленных систем управления [12–13] интервально–заданными объектами обеспечивает выполнение основных принципов организации интеллектуальных систем управления [14] и позволяет осуществить достоверный прогноз поведения интеллектуальной системы, выбор предпочтительных управлений и корректировку текущего управления.

2. Постановка задачи. Пусть математическая модель интервально - заданного объекта управления представлена в пространстве состояний стационарной системой интервальных дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\dot{X}(t) = [A]X(t) + [B]U(t), \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где множество$I(t_0) \subset [0, \infty)$, t — текущее время, t_0 — начальное время;

$X(t) \in R^n$ — вектор состояний данной системы;
$[A] = [a_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$ — интервальная матрица объекта управления размерности $(n \times n)$ с элементами $[a_{ij}] = [\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}]$, $i, j = \overline{1, n}$, $[A] \in M_{n,n}(I(R))$, где $M_{n,n}(I(R))$ — множество матриц, элементами которых являются интервалы: $[\underline{a}, \overline{a}] = \{a \in R \bigwedge \underline{a} \leq a \leq \overline{a}\}$, $\underline{a}, \overline{a}$ — нижние и верхние границы значений элементов матрицы $[A]$, $I(R)$ — множество всех интервалов;
$[B] = [b_j]$, $j = \overline{1, n}$ — интервальный вектор объекта управления размерности $(n \times 1)$, $b_j = [\underline{b_j}, \overline{b_j}]$, $j = \overline{1, n}$, $[B] \in M_{n,1}(I(R))$, где $M_{n,1}(I(R))$ — множества векторов, элементами которых являются интервалы $[\underline{b}, \overline{b}] = \{b \in R \bigwedge \underline{b} \leq b \leq \overline{b}\}$, $\underline{b}, \overline{b}$ — нижние и верхние границы значений элементов вектора $[B]$.

Управление $U(t)$ выбирается так, чтобы обеспечить желаемую динамику в замкнутой системе:

$$U(t) = U(X(t), t), \tag{2}$$

где $U(t) \in R^1$ — скалярное управление.

Желаемая динамика замкнутой системы управления задается в виде

$$\sigma(t) = [C^T]X, \tag{3}$$

где $[C] \in R^n$ – $const$, $[C^T] = [c_1, c_2, ..., c_{n-1}, 1] = (c^{'}, 1)$, $c^{'} \in R^{1x(n-1)}$.

Соотношения (1),(2),(3) определяют математическую модель, далее называемую IS–системой.

Задача исследования формулируется следующим образом: разработать процедуру исследования асимптотической устойчивости интервально–заданной системы управления на основе метода квазирасщепления и биологического подхода Искусственных Иммунных Систем.

После применения процедуры стандартного погружения интервального пространства в евклидово и нахождения операторов проектирования P_1 и P_2 [15] для интервально–заданной системы управления квазирасщепленная IS–система может быть представлена в виде подсистем IS_1, IS_2 следующим образом

$$IS_1 : \dot{x}^{'}(t) = A_x x^{'}(t) + h_x \sigma(t), \tag{4}$$

$$IS_2 : \dot{\sigma}(t) = a_\sigma \sigma(t) + h_\sigma x^{'}(t) + b_\sigma u(t),\ t \in [t_0, \infty), \tag{5}$$

где $A_x \in R^{(2n-2)\times(2n-2)}$, $h_x, h_\sigma \in R^{2n-2}$, a_σ, $b_\sigma \in R^2$.

Обозначим через $(\cdot^{'})$ сокращение $(\cdot)$ на последний элемент, если это вектор, и на последнюю строку и последний столбец, если это матрица. Тогда имеем следующие выражения для параметров квазирасщепленных подсистем

$$A_x = (P_1 A)^{'} - a_{2n}^{'} c^{T^{'}},\ h_x = (\frac{P_1 Ab}{c^T b})^{'}, \tag{6}$$

$$a_\sigma = \frac{c^T Ab}{c^T b},\ h_\sigma = (c^T A)^{'} - c^T a^{2n} c^{T^{'}},\ b_\sigma = c^T b. \tag{7}$$

Матрица M определяет связь между решением $x(t)$ исходной системы и решениями квазирасщепленных подсистем $x^{'}(t), \sigma(t)$:

$$M = \begin{pmatrix} E_{2n-2} & \frac{b^{'}}{c^T b} \\ -c^{T^{'}} & \frac{b_{2n}}{c^T b} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Таким образом, метод квазирасщепления позволяет перейти от исходного интервального уравнения (1) к совокупности уравнений (4), (5), записанных относительно функций $x^{'}(t)$ и $\sigma(t)$, сохраняя при этом кинематическое подобие.

3. Исследование асимптотической устойчивости квазирасщепленных систем управления на основе подхода Искусственных Иммунных Систем.

Пусть управление $U(t)$ будет таким [1], что для момента времени $t_1 \geq t_0$ решения $x^{'}(t)$, $\sigma(t)$ подсистем IS_1 и IS_2 удовлетворяют неравенству

$$\|\sigma(t)\| \leq \delta \|x^{'}(t)\| + \eta, \tag{9}$$

где $\delta, \eta - const$, $\delta \geq 0, \eta \geq 0$.

В данном случае асимптотика решений IS–системы (1) определяется асимптотикой решений IS_1–подсистемы.

В случае, когда выполняется обратное неравенство

$$\|\sigma(t)\| > \delta \|x^{'}(t)\| + \eta, \tag{10}$$

где $t \in I(t_1)$, асимптотика решений определяется подсистемой IS_2.

В пространстве состояний выделим множества конусного типа следующего вида:

$$G_{\delta,\eta} = \{x \in R^{2n} : \|\sigma(x)\| \leq \delta \|x^{'(x)}\| + \eta\}, \tag{11}$$

пусть $\eta = 0$,

$$\overline{G_{\sigma,\eta}} = \{x \in R^{2n} : \|\sigma(x)\| > \delta \|x^{'}(x)\| + \eta\}, \tag{12}$$

пусть $\eta = 0$. Таким образом, заданные множества порождают в пространстве R^{2n} два класса решений: $\{x(t)\}_1$, $\{x(t)\}_2$ для $t \in I(t_0)$. Первый класс решений относится к области $G_{\delta,\eta}$ (подсистема IS_1). Второй класс решений относится к области $\overline{G_{\delta,\sigma}}$ (подсистема IS_2). Исследование динамических свойств исходной IS–системы сводится к исследованию либо подсистемы IS_1, либо подсистемы IS_2.

Так как при квазирасщеплении считается [1], что пространство R^{2n} представляется прямой суммой подпространств L_1 и L_2: $L_1 \subseteq R^{2n}$, $L_2 \subseteq R^{2n}$, то область $G^1_{\delta,\eta}$ будет дополнением множества $G_{\delta,\eta}$ до подпространства L_1, а область $\overline{G^2_{\delta,\eta}}$ будет дополнением множества $\overline{G_{\delta,\eta}}$ до подпространства L_2.

Область $G^1_{\delta,\eta}$ относится к третьему классу решений, а область $\overline{G^2_{\delta,\eta}}$ — к четвертому классу. Данная классификация решений необходима для исследования асимптотической устойчивости квазирасщепленных подсистем на основе перспективного нетрадиционного подхода Искусственных Иммунных Систем [16].

В основе подхода Искусственных Иммунных Систем лежит идея взаимодействия между белками (пептидами) иммунной системы человека и чужеродными антигенами, то есть в возможности произвольного связывания (молекулярного узнавания) посредством определения энергии связи между формальными пептидами. Процессы, происходящие при обработке информации естественными системами, и принципы их функционирования поражают своей эффективностью, экономичностью и быстродействием.

Согласно идеологии AIS формируются эталонные матрицы управления $U_1, U_2, \overline{U}_1, \overline{U}_2$ для каждого из 4 классов, которые выбираются в зависимости от областей функционирования и определяются технологическими процессами, параметрами квазирасщепленных подсистем. Затем для улучшения специфичности узнавания каждая эталонная матрица сворачивается в квадратную матрицу, после сингулярного разложения которых получаем правые и левые сингулярные вектора $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$,... эталонных матриц. Формируются также матрицы управления, рассматриваемые как образы: $u_1, u_2, ...u_n$. Согласно подходу Искусственных Иммунных Систем энергия связи между формальными пептидами может быть представлена в виде

$$W_1 = -x_1^T u y_1,\ W_2 = -x_2^T u y_2,\ W_3 = -x_3^T u y_3,\ W_4 = -x_4^T u y_4, \tag{13}$$

где T — символ транспонирования.

Известно, что нативная (функциональная) укладка белковой цепи соответствует минимуму энергии связи. Поэтому минимальное значение энергии связи определяет класс, к которому принадлежит данный образ:

$$k : W_k = min\{W_1, W_2, W_3, W_4\}. \tag{14}$$

С использованием алгебры кватернионов, сингулярного разложения матриц разработаны процедуры обучения с учителем, самообучения, классификации исходной информации и распознавания образов для исследования асимптотической устойчивости интервально-заданных квазирасщепленных подсистем с целью выбора предпочтительных управлений и корректировки текущего управления. Ниже приведен алгоритм, который состоит из 10 шагов. Необходимо отметить, что обработка многомерной совокупности данных неизбежно ведет к увеличению энергетических погрешностей, которые зависят от ряда факторов и существенно влияют на достоверность прогноза. Несомненным достоинством данного алгоритма является шаг 9. Энергетическая оценка погрешностей нужна для повышения качества (достоверности) прогноза поведения интеллектуальной системы.

А л г о р и т м.

Шаг 1. Применение стандартной процедуры погружения [15] интервального пространства в евклидово пространство, при котором сохраняются алгебраические и топологические структуры интервального пространства.

Шаг 2. Получение выражения для операторов проектирования $P1$ и $P2$ интервально-заданной системы управления [6].

Шаг 3. Получение квазирасщепленных подсистем IS_1 и IS_2 на основе операторов проектирования P_1 и P_2 [6].

Шаг 4. Классификация областей решений квазирасщепленных подсистем IS_1, IS_2.

Шаг 5. Создание матриц управления (эталонов) для каждого класса, сворачивание их в квадратные матрицы для улучшения специфичности узнавания, сингулярное разложение данных матриц и определение правых и левых сингулярных векторов. Матрицы эталонов рассматриваются как антигены.

Шаг 6. Обучение Искусственной Иммунной Системы (с учителем, без учителя).

Шаг 7. Создание матриц управления (образов), сворачивание их в квадратную матрицу для улучшения специфичности узнавания. Матрицы образов рассматриваются как антитела.

Шаг 8. Определение минимальной энергии связи между формальными пептидами (антителами и антигенами) и решение задачи распознавания образов.

Шаг 9. Оценка энергетической ошибки Искусственной Иммунной Системы на основе свойств гомологичных белков [17].

Шаг 10. Определение асимптотической устойчивости интервально-заданной системы управления по квазирасщепленным подсистемам.

4. Устранение погрешностей энергетических оценок AIS**.** Погрешности энергетических оценок Искусственной Иммунной Системы затрудняют определение нативной укладки белковой цепи, которая соответствует самому нижнему уровню в спектре энергий белковой цепи и является наиболее стабильной структурой. Устранение погрешностей энергетических оценок осуществляется согласно разработанному алгоритму [17], основанному на свойствах гомологичных белков.

Гомологичные белки [18] (белки, имеющие одинаковое происхождение) имеют примерно одинаковые структуры, несмотря на многочисленные мутации в аминокислотной последовательности. Необходимо отметить, что гомология возможна при наличии всего только 25 процентов одинаковых аминокислотных остатков в одинаковых позициях цепи [19], которые обеспечивают одинаковые пространственные структуры.

Нативная укладка цепи может быть найдена в процессе сворачивания цепи, где потенциал каждого взаимодействия усреднен по гомологам [20]. Для предсказания структуры белка мы должны определить укладку белковой цепи N с минимальной свободной энергией.

Будем считать, что пептиды, относящиеся к одному классу, являются гомологичными и имеют сходную пространственную структуру. Тогда вычисленная энергия нативной структуры представляется в виде

$$E_N' = E_N + \Delta E_N, \tag{15}$$

где E_N — истинное значение энергии нативной структуры, ΔE_N — погрешность энергетической оценки.

Усредняя потенциалы по гомологам, получим следующее выражение

$$< E_i^* >_G = \frac{\sum E_i^*}{G}, \tag{16}$$

где символ $< ... >$ означает усреднение по гомологам, G — число гомологичных пептидов.

Вычисленная энергия нативной структуры, усредненная по гомологам, близка к своей истиной величине

$$< E_i^* >_G \approx E_N. \tag{17}$$

Качество распознавания нативной структуры характеризуется Z–фактором [21], который определяется средним числом стандартных отклонений между энергией нативной структуры и энергией случайно выбранной укладки цепи:

$$Z = \frac{E_N - < E >}{(E - < E >^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{18}$$

где $E_N \approx < E_i^* >_G$, $< E >$ — среднее число стандартных отклонений по гомологам, E — энергия случайно выбранной укладки цепи.

В зависимости от величины Z определяется степень достоверности прогноза на основе AIS.

Цитированная литература

1. **Емельянов С.В., Коровин С.К.** // Итоги науки и техники. Техн. кибернетика. 1984. №17. С.70–160.

2. **Самигулина Г.А.** Автоматизированное построение бинарных стохастических систем управления на основе метода квазирасщепления. //Учебное пособие для студентов по дисциплине "Специальные системы управления". Алматы. Институт проблем информатики и управления МОН РК. ISBN 9965-13-135-X. 2001.

3. **Moore R.E.** Methods and applications of interval analysis. N.Y. SIAM, 1979.

4. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М., 1987.

5. **Шокин Ю.И.** Интервальный анализ. Новосибирск, 1981.

6. **Самигулина Г.А.** // Труды Межд. конф. "Вычислительные технологии и математические модели в науке, технике и образовании" ВТММ-2002. Новосибирск, Институт вычислительных технологий СОРАН; Алматы, КазНУ им. Аль-Фараби. 2002. Т.5. С.155–160.

7. **Пупков К.А.** // Труды 2-го Межд. симпоз. "ИНТЕЛС'96", "Интеллектуальные системы". Т.1. М., 1996.

8. **Васильев С.Н**. // Известия академии наук. Теория и системы управления. 2001. №1. С.5–22.

9. **Васильев С.Н.** // Известия академии наук. Теория и системы управления. 2001. №2. С.5–21.

10. **Захаров В.Н.** // Изв.РАН. ТиСУ. 1997. №3. С.138–145.

11. **Tarakanov A.O.** // Proc. of the 1 st. Int. Workshop of Central and Eastern Europe on Multi-Agent Systems. 1999.

12. **Самигулина Г.А.** //Тезисы юбилейной VIII Санкт-Петербурской Межд. конф. "Региональная информатика. РИ-2002". Санкт-Петербург, 2002. Часть I. С. 49–50.

13. **Самигулина Г.А.** //Тезисы на Межд. конгрессе "Математика в XXI веке". Новосибирск, 2003. http//www.sbras/ws/MMF-21/.

14. **Самигулина Г.А.** // Труды III межд. научно-практич. конф. "Энергетика, телекоммуникации и высшее образование в современных условиях." Алматы. АИЭиС. 2002. С.369–372.

15. **Шарый С.П.** // Вычислительные технологии. 1995. Т.4. С.65–80.

16. **Tarakanov A.O.** Математические модели обработки информации на основе результатов самосборки. Дисс. доктора физ.-мат. наук. Санкт-Петербург. 1999.

17. **Samigulina G.A., Chebeiko S.V.** // Proc. of the sixth Int. Conf. on Computational Intelligence and Natural Computation (CINC 2003). Cary, North Carolina, USA. 2003.

18. **Кантор Ч., Шиммел.П.** Биофизическая химия. Т.3. Поведение биологических макромолекул. М., 1985.

19. **Schulz G E., Schirmer R.H.** Principles of Protein structure. N.Y. Springer-Verlag. 1979.

20. **Finkelstein A.V., Gutin A.M., Badretdinov A.Y.** // Proteins. 1995. V.23. P.151–162.

21. **Sippl M.J., Jaritz M.** // Protein structure by Distance Analysis / By eds. H.Bonr, S.Brunar. Amsterdam, Oxford, Washington DC: 10S Press. 1994. P.113–114.

Поступила в редакцию 24.09.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 102–102*

ХРОНИКА

ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА ШАЛТАЯ СМАГУЛОВИЧА СМАГУЛОВА

22 февраля исполнился год, как не стало Шалтая Смагуловича Смагулова, а 16 марта 2004 г. ему бы было 55 лет.

Шалтай Смагулович поступил на механико-математический факультет КазГУ им. С.М.Кирова в 1967 г. В то время декан факультета профессор Х.И.Ибрашев наладил крепкие научные связи с Сибирским отделением АН СССР. К нам приезжали видные математики из Новосибирска, читали лекции; наши студенты, выпускники мех–мата направлялись в Новосибирский университет для учебы, в аспирантуру. В 1970 г. в Новосибирский университет для продолжения учебы в числе одаренных студентов едет Шалтай Смагулов. В 1972 г. по окончании университета он остается стажером–исследователем на кафедре, возглавляемой академиком АН СССР Яненко Н.Н. Потом была учеба в аспирантуре, работа младшим, старшим научным сотрудником Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР. В Академгородке Шалтай Смагулович провел 14 лет, и в 1984 г. в возрасте 35 лет, получив прекрасную математическую подготовку, он переезжает в Алма–Ату и до последних своих дней работает в КазГУ им. аль–Фараби, в разное время занимая должности заведующего кафедрой, директора НИИ математики и механики при КазГУ, декана мех–мата. И все эти годы он напряженно занимается научной работой. В то время в Казахстане уже существовала сильная школа по теоретической вычислительной математике, основанная академиком НАН РК У.М.Султангазиным. Однако Шалтай Смагулович нашел свои задачи: задачи гидродинамики, теории фильтрации, свои методы решения и тем самым продолжил развитие теории численных методов в республике.

Как–то я ездила в Академгородок, выступала на семинаре в Институте гидродинамики СО РАН, после семинара известные ученые расспрашивали меня про Шалтая Смагуловича, очень тепло о нем отзывались, хотя прошло много времени после того, как он покинул Академгородок.

Вокруг профессора Смагулова всегда находилось много молодежи: студентов, стажеров, аспирантов, докторантов. Он замечательно проводил семинары, на которых всегда присутствовало много слушателей, очень эмоционально реагировал на выступления, комментировал непонятные места, сердился, когда видел неверные выкладки, и от души радовался хорошим результатам. Он подготовил много кандидатов и докторов наук, которые продолжают заниматься задачами, поставленными Шалтаем Смагуловичем. Его научный, организаторский авторитет был общепризнан. Он очень тонко улавливал новые задачи, научные направления, новые веяния времени. Одним из первых в республике он стал изучать физические процессы добычи нефти, заниматься математическим моделированием этих процессов и последующей численной реализацией полученных модельных задач.

Шалтая Смагуловича мы, его друзья, очень ценили, уважали, любили, понимали, какого таланта и души человеком, какого масштаба личностью, каким выдающимся математиком он был. И очень горько осознавать, что его нет. Пройдет время, я думаю, его ученики, коллеги осмыслят значение его научной, организационной деятельности, напишут об этом. Жизнь профессора Шалтая Смагуловича Смагулова была яркой, интересной, насыщенной напряженным трудом, и такой он ее сделал сам.

Г.И.Бижанова

Математический журнал. *Алматы. 2004. Том 4. № 1 (11) . С. 103–104*

ХРОНИКА

ПАМЯТИ ИМАНА БАЗАРБЕКОВИЧА БАЙСАКАЛОВА

26 января 2004 года после тяжелой болезни ушел из жизни известный ученый в области теории управления, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории дифференциальных уравнений Института математики МОН РК Иман Базарбекович Байсакалов.

И.Б.Байсакалов родился 11 февраля 1938 года в селе Шаян Алгабасского района Южно-Казахстанской области. В 1955 году он поступил в Казахский государственный университет имени С.М.Кирова и успешно закончил его в 1960 году по специальности "математика". Свой трудовой путь он начал в Секторе математики и механики Академии наук КазССР с должности старшего лаборанта. С 1962 года по 1965 он учился в аспирантуре под руководством известного ученого В.В.Широкорада. В 1967 году на объединенном ученом совете Отделения физико-математических наук АН КазССР защитил кандидатскую диссертацию на тему "О вероятности попадания на данное множество апекса траектории релейной системы с помехой."

С 1967 года до конца своей жизни Иман Базарбекович работал в лаборатории дифференциальных уравнений Института математики НАН РК на должностях младшего, старшего, ведущего научного сотрудника.

И.Байсакалов по праву считается одним из основателей направления теории стохастического оптимального управления в Казахстане. Труды ученого в области теории управления и дифференциальных игр были высоко оценены в Советском Союзе. Он работал вместе с такими видными учеными как академики Красовский Н.Н., Осипов Ю.С., Куржанский А.Б. в Уральском отделении академии наук СССР. Им решена задача нахождения вероятности попадания на данное множество апекса траектории релейной системы автоматического регулирования подверженной действию внешних возмущающих сил – помех, которые имеют случайный характер. Исследован процесс слежения за целью оптической оси радара при известном угле захвата направленности антенны и известным стохастическом законе появления помехи – фединга, имеющего различные происхождения. Определена вероятность удержания цели в угле захвата.

Им проведены глубокие исследования, основанные на правиле экстремального прицеливания, как регулярный случай задачи поведения, по нахождению условий поглощаемости уклоняющего игрока преследуемым игроком, модификации игровых задач с неполной информацией. Найдены оптимальные управления ансамблем траекторий стохастической системы в условиях неопределенности. Доказаны теоремы существования решений стохастических включений специальных видов. Установлен принцип разделения стохастической задачи оптимального управления и наблюдения в условиях неопределенности, минимаксная задача управления для статистически неопределенных систем. В классе функционалов, измеримых по времени и зависящих от наблюдаемого сигнала, получены необходимые условия оптимального управления в виде принципа максимума. Получены достаточные условия управляемости и оценки координат в статистически неопределенных ситуациях с непрерывным временем.

И.Б.Байсакалов активно участвовал в подготовке высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством защищены три кандидатские диссертации. Он читал лекции в Казахском Национальном университете имени Аль-Фараби, Казахском Национальном университете имени К.И.Сатпаева, Казахской академии управления имени Т.Рыскулова.

Иман Базарбекович выступал с научными докладами на Международных конференциях (Чехословакия, Болгария), на Всесоюзных конференциях (Москва, Свердловск,Саранск, Иркутск, Самарканд, Новосибирск), на Республиканских конференциях. Свыше семидесяти его научных трудов опубликованы в различных периодических изданиях международного, всесоюзного и республиканского значения.

За заслуги в области математики и за вклад в ее развитие он был награжден Почетными грамотами и медалями Республики Казахстан.

Светлый образ известного ученого, замечательного педагога, бескорыстного друга, кандидата физико-математических наук Имана Базарбековича Байсакалова навсегда останется в памяти и сердцах его коллег, друзей и близких.

Коллектив института Математики.

ХРОНИКА

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РОССИЙСКО-КАЗАХСТАНСКИЙ СИМПОЗИУМ

"Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики"

Первое информационное сообщение

посвященный Году России в Казахстане
и 50-летию со дня вступления РФ в ЮНЕСКО 22—26 мая 2004г.,
п.Эльбрус, Кабардино-Балкарская республика, Россия

ОРГКОМИТЕТ СИМПОЗИУМА

Председатель: Нахушев А.М., академик АМ АН (Нальчик, Россия);
сопредседатель: Кальменов Т.Ш., академик НАН РК (Шымкент, Казахстан);
зам.председателя: Елеев В.А., академик АМ АН (Нальчик, Россия);
ученый секретарь: Кумыкова С.К., к.ф.-м.н., доцент;

члены оргкомитета: Алдашев С.А., профессор (Алматы, Казахстан); Вагабов А.И., профессор (Махачкала, Россия); Волкодавов В.Ф., профессор (Самара, Россия); Данаев Н.Т., профессор (Алматы, Казахстан); Дженалиев М.Т., профессор (Алматы, Казахстан); Жегалов В.И., профессор (Казань, Россия); Женсыкбаев А.А., академик НАН РК (Алматы, Казахстан); Зарубин А.Н., профессор (Орел, Россия); Иванов П.М., академик АМАН (Нальчик, Россия); Ильин В.А., академик РАН (Москва, Россия); Карамурзов Б.С., профессор (Нальчик, Россия); Керефов А.А., член-корр. АМ АН (Нальчик, Россия); Кожанов А.И., профессор (Новосибирск, Россия); Кочкаров А.М., профессор (Черкесск, Россия); Кусраев А.Г., профессор (Владикавказ, Россия); Моисеев Е.И., академик РАН (Москва, Россия); Отелбаев М.О., академик НАН РК (Астана, Казахстан), Ошхунов М.М., академик АМ АН (Нальчик, Россия); Прилепко А.И., профессор (Москва, Россия); Репин О.А., профессор (Самара, Россия); Сабитов К.Б., профессор (Стерлитамак, Россия); Сазонов В.Г., профессор (Владикавказ, Россия); Солдатов А.П., профессор (Великий Новгород, Россия); Султангазин У.М., академик НАН РК (Алматы, Казахстан), Сухинов А.И., профессор (Таганрог, Россия); Хачев М.М., член-корр. АМ АН (Нальчик, Россия); Шхануков-Лафишев М.Х., академик АМ АН (Нальчик, Россия).

ТЕМАТИКА СИМПОЗИУМА

Секция 1. Уравнения смешанного типа и родственные проблемы дробного исчисления и фрактального анализа

Секция 2. Математическое и информационное моделирование нелокальных процессов и систем с памятью.

Для участия в работе симпозиума необходимо представить заявку на участие, материалы доклада и экспертное заключение.

ЗАЯВКА НА УЧАСТИЕ

1. Фамилия, имя, отчество
2. Название организации
3. Должность, ученая степень
4. Год рождения
5. Адрес для переписки
6. Телефон, E-mail
7. Вид доклада (пленарный — 30 мин., секционный — 15 мин.) и номер секции

Все позиции заполняются полностью.
Заявки предоставляются **в электронном и печатном вариантах.**

МАТЕРИАЛЫ ДОКЛАДА

Объем доклада — **не более 3 страниц формата А4,** набранных с использованием пакета **LaTeX 12 pt.** Материалы докладов вместе с экспертным заключением организации (актом экспертизы) принимаются **до 15 марта 2004 г.** и будут изданы к началу Симпозиума. По результатам выступлений на симпозиуме будут отобраны доклады для опубликования в научных журналах **"Доклады АМ АН" и "Известия КБНЦ РАН"** в **2004 году.**

Электронный вариант заявки следует направлять по адресу электронной почты mte2004@inbox.ru. Печатный вариант заявки следует направлять по адресу: 360000 г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А, НИИ ПМА, Оргкомитет симпозиума.

АДРЕСА ДЛЯ КОНТАКТОВ

Ученый секретарь симпозиума: Кумыкова Светлана Каншубиевна, к.ф.-м.н., доцент
Ученый секретарь НИИ ПМА: Энеева Лиана Магометовна, к.ф.-м.н., (8662)422387
E-mail: mte2004@inbox.ru, niipma@mail333.com.

МЕСТО И ВРЕМЯ ПРОВЕДЕНИЯ

Турбаза КБГУ, Приэльбрусье, Кабардино-Балкарская республика
22—26 мая 2004г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70

Asanova A.T. **On boundary value problem for system of quasi-linear hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.5–11.

The nonlocal boundary value problem for system of quasi-linear hyperbolic equations of second order is considered. The coefficient condition of existence of a unique classical solution of the problem are established and the solution algorithm is proposed.

References — 15.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70

Асанова А.Т. **Квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.5–11.

Екінші ретті квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал шеттік есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының коэффициенттік шарттары тағайындалған және оны табу алгоритмі ұсынылған.

Библ. — 15.

УДК: 517.9 2000 MSC: 49J20, 49K20

Akhmetova A. U. **On stabilization of periodical control systems** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.12–16.

For nonlinear periodical system formed by the principle of linear inverse connection the stabilizer control of uninterrupted type is obtained as well as effectively tested sufficient condition of stabilization.

References — 7.

УДК: 517.9 2000 MSC: 49J20, 49K20

Ахметова А. Ө. **Басқарудың периодты жүйелерін қалыпқа келтіру туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.12–16.

Сызықты кері байланыс қағидасы бойынша құрылған, сызықты емес периодты жүйеде үзіліссіз типті қалыпқа келтіретін басқарулар табылған. Қалыптылық үшін оңай және тиімді тексерілетін жеткілікті шарттар алынған.

Библ. — 7.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

Bazarkhanov D.B. **On best N-term wavelet approximation in mixed norm** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.17–20.

Here we obtain that a multiple wavelet system is unconditional basis for Lebesgue spaces with mixed norm as well as existence of element of best N-term approximation with respect to that system for any function in those spaces.
References — 6.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

Базарханов Д.Б. **Аралас нормада толқыншалармен ең тиімді N-мүшелі жуықтаулар туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.17–20.

Бұл мақалада толқыншалар еселі жүйесі аралас нормалы Лебег кеңістіктерінде шартсыз базис болатындығы анықталған. Сонымен қатар осы кеңістіктердің кез келген функциясы үшін осы жүйеге сәйкес ең тиімді N-мүшелі жуықтау элементінің бар екендігі көрсетілген.
Библ. — 6.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J25, 35C05, 35B40

Bizhanova G.I. **On the asymptotic solutions of the boundary value problems for the elliptic equations in a half-space, I**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.21–32.

The solutions in the explicit form of the Dirichlet and with directional derivative problems for the second order elliptic equations in a half-space $x_n > 0$ are obtained. There are derived the formulas establishing the asymptotic behavior of the Dirichlet problem as $|x| \to \infty$.
References — 9.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J25, 35C05, 35B40

Бижанова Г.И. **Жартылай кеңістіктегі эллипстік теңдеулердің шеттік есептерінің асимптотикалық шешімдері туралы, I**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.21–32.

Екінші ретті эллипстік теңдеу ушін $x_n > 0$ жартылай кеңістігінде көлбеу туындылы және Дирихле есептеренің айқын турде шешімі түрғызылды. Дирихле есебінің шешімінің $|x| \to \infty$ асимптотикалық тәртібің тағайындайтын формула аланды.
Библ. — 9.

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A10

Bopayev K.B. **The normal form of nonlinear difference-dynamic system. II**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.33–40.

The methods of continuous normalization by parameter of nonlinear DDS are considered in this paper. The problem of normalization is solved in the class of invertible transformations represented by formal kinds with continuous and bounded coefficients. Continuous normal form consisting of irregular classes is constructed for non-autonomous systems with parameter and Jordan matrix of linear approximation.
References — 4.

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A10

Бопаев К.Б. **Сызықтықемес айырымды-динамикалық жүйенің қалыпты түрі**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.33–40.

Бұл жұмыстыңмақсаты сызықтық емес айырымды-динамикалық жүйенің параметр бойынша үзіліесіз нормализацияланған жүйесінің әдісін талдаудан тұрады.

Бұл есеп параметр бойынша және дiскреттi айнымалы коэффициенттер бойынша үзiлiссiз және шектелген формалдi қатарлар түрiнде, қйтымды түрлендiру классында (нолдiң аймағында) шешiледi.

Сыздықтық жуықтаудың параметрлi жордан матрицасы бар автономды емес жүйесi үшiн тек регулярлық емес мүшелерден тұратын үзiлiссiз нормал түрi құрылған. Үзiлiссiз параметрден тәуелдi дузлiк периодты және автономды жүйе үшiн нормализациялау процессi жазылған.

Библ. — 4.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

Dzhumabaev D.S., Minglibaeva B.B. **Correct solvability of linear two-point boundary-value problem with parameter**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.41–51.

The criteria of correct solvability of boundary-value problem with parameter are established in the terms of matrix $\widetilde{Q}_\nu(h)$ constructed by right part of differential equation and boundary condition. The recurrent formulas to find the elements of the matrix $\widetilde{Q}_\nu(h)$ are obtained.

References — 25.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

Жұмабаев Д.С., Минглибаева Б.Б. **Параметрi бар сызықты қос нүктелi шеттiк есептiң корректiлi шешiлiмдiгi**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.41–51.

Дифференциалдық теңдеудiң оң жағы және шекаралық шарт бойынша құрастырылатын $\widetilde{Q}_\nu(h)$ матрицасы терминiнде параметрлi шеттiк есептiң корректi шешiлiмдiгiнiң белгiлерi тағайындалған. $[\widetilde{Q}_\nu(h)]^{-1}$ матрицасы элементтерiн табудың рекуррентті формулалары алынған.

Библ. — 25.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

Makasheva A.P. **Numerical calculations of turbulent jet flows in the channels**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.52–61.

Numerical investigation of current system of the supersonic turdulent jets, spreading in the stream with partly limited region has been done. The solutions are obtained by the splitting method using the matrix sweep method for parabolized Navier-Stokes equation. The three-dimensional flow features depending on Macy numbers of jet and fl ow are revealed.

References — 8.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

Мақашева А.П. **Каналдағы турбуленттiк ағыншалардағы сандық есептеулер**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.52–61.

Жартылай қоршалған ортада таралатын дыбыс жылдамдығынан жоғары турбуленттiк ағыншалардың ерекшелiктерi сандық зерттелдi. Параболалық Навье-Стокс теңдеулер жүйесiнiң шешiмi матрицалық прогонканы пайдаланып табылды. Ағынша мен ағындағы Мах сандарының кеңiстiктегi ағысқа әсер ету ерекшелiктерi айқындалды.

Библ. — 8.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Pankratova I.N. **One-Dimensional Representations of Many-Dimensional Analogy of Nonli- near Logistic Difference Equation**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.62–65.

One-dimensional representations of a map given by many-dimensional analogy of nonlinear logistic difference equation with arbitrary matrix of parameters are obtained.
References — 6.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Панкратова И.Н. **Бейсызық логистикалық айырымдық теңдеудің көпөлшемді тәріздестігінің бір өлшемді кейіптелуі**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.62–65.

Параметрлердің еркін матрицасы бар бейсызық логистикалық айырымдық теңдеудің берілген көпөлшемді тәріздестігінің бір өлшемді кейіптелуінің бейнесі берілген.
Библ. — 6.

УДК: 519.2 2000 MSC: 62F03, 65C05

Пя Н. **Замечание о некоторых модифицированных критериях согласия хи-квадрат**//Математический журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11).С.66–72.

В данной статье рассматриваются две модифицированные хи-квадрат статистики (Никулина-Рао-Робсона и Мирвалиева) для экспоненциального семейства распределения. Показано, которые равны. Известно, что получение оценок максимального правдоподобия для логистического распределения в явном виде вызывает большие трудности. В этом случае можно использовать итерационный метод (предложенный Фишером) улучшения неэффективных оценок, полученных по методу моментов. Этот метод был применен для статистики Никулина-Рао-Робсона, основанной на классах Неймана-Пирсона при проверке сложной гипотезы о логистическом распределении. Проведено сравнение мощностей критериев согласия, основанных на эмпирической функции распределения, таких как, статистики Колмогорова-Смирнова, Андерсона-Дарлинга и Крамера-Фон Мизеса, с вышеупомянутой статистикой типа хи-квадрат.
Источники — 13.

УДК: 519.2 2000 MSC: 62F03, 65C05

Пя Н. **Кейбір түрлендірілген хи–квадрат критериялардын келісімі туралы ескерту.** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.66–72.

Бұл мақалады үлестірудің экспоненциалды түрі елі млдификацияланған хи-квадрат статистикасы (Никулин-Рао-Робсон мен Мирвалиев) қарастырылады. Статистиканың мәліметтері сәттер әдісі бойынша бағалау сәйкестендірілгенде өзара тепе-тең екендігі көрсетілген. Ақиқат түріндегі логистикалық үлестеру үшін максималды шынайылық бағалауға жету үлкен қиындықтар тудыратыны белгілі. Мұндай жағдайда сәттер әдісі бойынша алынған тиімсіз бағалауларды жақсарту әдісін (Фишермен ұсынылған) логистикалық үлестіру туралы күрделі гипотезаны тексеруде Нейман-Пирсан классына негізделген Никулин - Рао - Робсон статистикасы үшін қолдануға болады. Колмагоров - Смирнов, Андерсон - Дарлинг және Крамер - Вон - Мисс статистикасы сияқты үлестірудің эмпирикалық функциясына негізделген статистикаларды хи-квадрат статистикасымен, келісімнің критерийлерінің күштілігін салыстыру жүризілген.

Библ. — 13.

УДК: 517.624.3 2000 MSC: 34B15

Temesheva S.M. **On necessary and sufficient conditions of existence of nonlinear two-points boundary value problems isolated solution**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 1 (11). P.73–83.

Nonlinear ordinary differential equation with nonlinear two-point boundary-value problem is investigated by parameterization's method. The necessary and sufficient conditions of existence of considering problem isolated solution are established in the term of righthand side of the differential equation and the boundary condition.

References — 13.

УДК: 517.624.3 2000 MSC: 34B15

Темешева С.М. **Интервалы бірқалыпты емес бөлгенде екі нүктелі шеттік есебінииң бірмәнді шешілуінің белгісі** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 1 (11). Б.73–83.

Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шектік есебі қарастырылады. Бөлшектеу қадамы бір қалыпты емес параметрлеу әдісімен бір мәнді шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Библ. — 13.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.