ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2003 том 3 № 2 (8)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 3 № 2 (8) 2003

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 3, № 2 (8), 2003

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 5 – 14*

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ И ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Б. К. Алиева, А. Ж. Найманова

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

С помощью метода фиктивных областей численно моделируется процесс образования вихрей при обтекании стратифицированным потоком цилиндра и треугольника. Приведены результаты исследования влияния формы препятствия на вихревой след за телом. Выявлены отличительные особенности обтекания тел.

При решении многих задач аэрогидродинамики необходимо знание закономерностей обтекания системы различных тел. Вопросы обтекания системы тел влажным потоком воздуха теоретически не рассматривались. Основными трудностями исследования таких типов течений являются отсутствие достаточно надежных моделей турбулентности, эффективных методов интегрирования уравнений Навье-Стокса при расчете течений с малыми числами Маха, а также и многосвязность рассматриваемой области.

В работе численно моделируется процесс образования вихревого следа на примере обтекания стратифицированным потоком цилиндра и треугольника с применением метода фиктивных областей.

Постановка задачи. Нестационарное двумерное течение сжимаемого турбулентного газа в поле силы тяжести (без учета сил Кориолиса) в ограниченной области $\Omega_1 \in R^2$ с границей S сводится к решению системы нелинейных уравнений в частных производных

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{Fr}\rho - \frac{1}{\gamma M^2}\nabla P + K_M \Delta_b \vec{V}, \tag{1}$$

$$\rho\frac{dT}{dt} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dP}{dt} + K_H \Delta_b T - \rho L_c \Delta \ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\rho\vec{V} = 0 \ , \tag{3}$$

Keywords: *vorticity, vortical wake, stratified flow, low Mach number flow*
2000 Mathematics Subject Classification: 76B47

$$\frac{dq}{dt} = K_q \Delta_b q, \quad q = q_v + q_c, \tag{4}$$

$$\rho = \frac{P}{T\,(1 + 0,61\,q_v)\,(1 - q_c)}\ , \tag{5}$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}$, $\Delta_b = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $L_c = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{при}\ \ q \le q_{vs} \\ L_c, & \text{при}\ \ q > q_{vs} \end{array}\right.$, $\quad \Delta = \left\{\begin{array}{ll} 0\,, & q \le q_{vs} \\ \frac{dq_{vs}}{dt}\,, & q > q_{vs} \end{array}\right.$.

Удельная влажность при состоянии насыщения имеет вид

$$q_{vs} = 0,622\,E_0 \exp\,(17,27\,(T-1)\,/T)\,/P. \tag{6}$$

Уравнения (1)—(5) записаны в безразмерной форме. В качестве параметров обезразмеривания приняты характерные величины для рассматриваемого течения: H — высота области, V_0 — максимальная скорость невозмущенного потока, T_0 и ρ_0 — температура и плотность на входе, масштаб времени $t_0 - H/V_0$, для давления P и упругости насыщения $E_0 - \rho_0 R T_0$. Здесь K_M, K_H, K_q — безразмерные коэффициенты турбулентной вязкости, связанные между собой следующим образом: $K_M = \frac{1}{Re}$, $Re = \frac{V_0 H}{\nu}$, $K_H = K_M/\Pr$, $K_q = K_M/Sc$, L_c- удельная теплота конденсации, $\Delta-$ скорость конденсации водяного пара, q_v- удельная влажность, q_c- удельная водность облака, $q_{vs}-$ удельная влажность насыщения, $q-$ удельное влагосодержание. Остальные обозначения — общепринятые. Турбулентность описывается простейшей K-моделью.

Основные трудности, возникающие при численном интегрировании системы уравнений (1)—(5) при малых числах Маха, указаны и исследованы в работах [1—3]. Для их устранения осуществляется преобразование, которое основывается на представлении искомых величин, изменяющихся в некоторых неопределенных пределах, к другим переменным, изменение которых заведомо происходит в интервале порядка единицы. Вместе со слабо изменяющимся в воздушном потоке безразмерным статическим давлением P^* $\left(\frac{\partial P^*}{\partial z} = -\frac{\gamma M^2}{Fr}\rho^*\right)$ вводится безразмерное динамическое давление $\bar{P}$ (отнесенное к удвоенному напору — $\rho_0 V_0^2$), изменяющееся в пределах от нуля до значения порядка единицы: $\bar{P} = \frac{P - P^*}{\gamma M^2}$. Тогда полное давление имеет вид: $P = \gamma M^2 \bar{P} + P^*$.

Во избежание традиционного преобразования уравнений в систему координат, связанную с профилем обтекаемого препятствия, для решения системы (1)—(5) применяется метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам в расширенной области. При этом рассматриваемая область Ω_1 дополняется до прямоугольника $\Omega = \{0 \le x \le L,\ 0 \le z \le H\}$, где $L-$ длина области.

После этих модификаций система (1)—(5), описывающая существенно дозвуковые течения, преобразуется к виду

$$\frac{d\,(u\rho)^\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial \bar{P}^\varepsilon}{\partial x} + K_M \Delta_b u^\varepsilon - \xi \rho^\varepsilon\,(u^\varepsilon - u^\varepsilon_{nx})\,,$$

$$\frac{d\,(w\rho)^\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial \bar{P}^\varepsilon}{\partial z} + K_M \Delta_b w^\varepsilon + \frac{(\rho^* - \rho^\varepsilon)}{Fr} - \xi \rho^\varepsilon\,(w^\varepsilon - w^\varepsilon_{nz})\,,$$

$$\rho^\varepsilon \frac{dT^\varepsilon}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{d\left(\gamma M^2 \bar{P}^\varepsilon + P^*\right)}{dt} + K_H \Delta_b T^\varepsilon - \rho^\varepsilon L_c \Delta - \xi \rho^\varepsilon\,(T^\varepsilon - T^\varepsilon_0)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^\varepsilon}\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} - \frac{V^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} grad\,\rho^\varepsilon,$$

$$\frac{dq^\varepsilon}{dt} = K_q \Delta_b q^\varepsilon - \xi \left(q^\varepsilon - q_0^\varepsilon\right),$$

$$\rho^\varepsilon = \frac{\gamma M^2 \bar{P}^\varepsilon + P^*}{T^\varepsilon \left(1 + 0,61 q_v^\varepsilon\right)\left(1 - q_c^\varepsilon\right),}$$

где $\xi = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad (x,z) \in \Omega_1, \\ \varepsilon^{-2}\,, & \text{при} \quad (x,z) \in \Omega/\Omega_1, \end{cases}$ $\varepsilon > 0$ — малый параметр, u_{nx}^ε, w_{nz}^ε, T_0^ε, q_0^ε — составляющие скорости, температура и удельное влагосодержание на препятствии, соответственно.

Постановка начальных и граничных условий. В начальный момент времени газ находится в состоянии покоя, начальное распределение температуры почти не изменяется с высотой (сухоустойчивая изотермическая атмосфера): $T = 1 - mz$, $m = 0.01$, где $m-$ вертикальный градиент температуры. При этом начальные распределения плотности и гидростатического давления изменяются по экспоненциальному закону вида

$$P^* = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right), \quad \rho = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right). \tag{8}$$

Тогда удельное влагосодержание с высотой возрастает по закону $q = RH\, q_{vs}$, где $RH-$ заданная относительная влажность, q_{vs} определяется по соответствующим значениям температуры и гидростатического давления по формуле $q_{vs} = 0,622\, E_0 \exp\left(17,27\,(T-1)\,/T\right)/P$.

На входе задан линейный рост поля скорости по времени $u = 2t$, $w = 0$ до момента $t = 0,5$. Далее скорость принимается постоянной $u = 1$, $w = 0$. Остальные условия следующие

$$T = 1 - mz, \quad q = RH\, q_{vs}, \quad \rho = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right). \tag{9}$$

На нижней и верхней границе условия для поля скорости совпадают с условиями на входе, для температуры и влажности они имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f = [T, q]. \tag{10}$$

На поверхности обтекаемого тела

$$u = 0, \quad w = 0, \quad T = 1 - mz, \quad q = RH q_{vs}. \tag{11}$$

На выходе приняты мягкие граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = [u, T, q]. \tag{12}$$

Задача (7) с начальными и граничными условиями (8)-(12) решается численно, описание метода приведено в работе [4].

Анализ полученных результатов. Расчеты проводились в следующем диапазоне параметров: $0,0022 \le M \le 0,0387$; $0,0045 \le Fr \le 0,0095$; $K_M = 0,0012$; $\Pr = Sc = 0,71$; $0,16 \le E_0 \le 1,5$; $0,5 \le L_c \le 1.5$; $0 \le RH \le 0,9$. Расчетная сетка состоит из (215x61) ячеек с шагами $h_x = 0,035$, $h_z = 0,025$ и шагом по времени $\tau = 0,0025$.

В качестве препятствий были приняты:

1) $z = c \pm \left(b^2 - x^2/a^2\right)^{1/2}$ - цилиндрическое тело круглой формы, где $c = 0,75$, $a^2 = 0,04$, $b^2 = 0,04$.

2)$z = c \pm k\,(x-a)$ - цилиндрическое тело треугольной формы, где $c = 0,75$, $k = 0,5$, $a = 2,05$.

Здесь для простоты цилиндрическое тело круглой формы будем называть цилиндром, а цилиндрическое тело треугольной формы – треугольником.

Ниже изложены результаты численного эксперимента по исследованию влияния формы тела на процесс вихреобразования при обтекании одиночного тела потоком турбулентного влажного воздуха.

На рисунках 1 (цилиндр) и 2 (треугольник) приведены эволюции вихреобразования (изолинии завихренности) при $Re = 800$, $M = 0,026$, $Fr = 0,007$, $L_c = 0,5$, $RH = 0,9$, $E_0 = 0.16$, $m = 0.01$, $H = 1,5$.

Как видно из рисунков, в обоих случаях наблюдается нестационарная картина течения. Так, при обтекании цилиндра в начальный момент времени под действием процесса диффузии образуются два симметрично расположенных вдоль оси тела вихря противоположных знаков (верхний - с отрицательным знаком, нижний - с положительным), диаметр которых почти в два раза меньше поперечных размеров обтекаемого тела (рис.1,а). С течением времени верхний вихрь приобретает удлиненную форму, существенно увеличиваясь в размерах, вытесняет нижний, вследствие чего и происходит его сход (рис.1,б). После этого взамен оторвавшегося вихря образуется новый уже в нижней полуплоскости, который, также увеличиваясь, способствует отрыву верхнего вихря (рис.1,в). Затем вновь начинается формирование верхнего вихря, вытесняющего с течением времени нижний (рис.1,г). Таким образом, происходит периодический отрыв вихрей (рис.1,в-д), приводящий со временем к вихревой дорожке, состоящей из верхней и нижней серии вихрей (рис.1,г).

При обтекании треугольника (рис.2) как и в предыдущем случае в начальный момент времени за телом образуются вихри противоположных знаков (рис.2,а), размеры которых соизмеримы с размерами обтекаемого тела. Картина схода вихрей аналогична отрыву вихрей за цилиндром (т.е. верхний вихрь, увеличиваясь со временем, вытесняет нижний и, наоборот). Как следует из сравнения рисунков 1-2, отличительной особенностью обтекания треугольника является то, что размеры вихревого следа больше, соответственно, завихренность в один и тот же момент времени для треугольника распространяется на большее расстояние вниз по потоку, что свидетельствует о том, что треугольник является плохо обтекаемым телом.

На рис.3-4 приведены распределения полей вектора скорости. Видно, что и возмущения скоростей для треугольника (рис.4) распространяются также на большее расстояние вниз по потоку.

Изменение интенсивности завихренности вихревого следа во времени можно проследить из рисунка 5, где представлены положительная G^{+}(тонкая линия) и отрицательная G^{-}(жирная линия) составляющие суммарного потока завихренности. Эти составляющие вычислены путем интегрирования завихренности по участку вихревого следа S_1, где $G^{+} = \int \omega^{+} dS$, $G^{-} = \int |\omega^{-}| dS$. Участок S_1 выбирается как прямоугольник высотой H и длиной, равной расстоянию от точки, отстоящей от тела на $4h_x$, до точки, отстоящей от тела на $x = L$. Из рисунка следует, что помимо большей длины вихревого следа за треугольником, завихренности превышают завихренности за цилиндром.

Ниже приводятся результаты численного исследования влияния на вихревой след расстояния между телами при обтекании двух тел треугольной формы, расположенных тандемом. Как следует из рисунка и как было ранее указано, при обтекании одного треугольника (рис.6,а, $H = 2$) возникает течение типа вихревой дорожки Кармана. При обтекании двух треугольников, расположенных на расстоянии $\ell_x = 3d;\ 3,5d$ ($d = 0,4$ – высота треугольника, ℓ_x – продольное расстояние между центрами тел) с нулевым углом выноса (вынос определяется углом между линией, проходящей через оси тела, и направлением потока), поток, оторвавшийся от переднего треугольника, присоединяется к заднему препятствию, в результате чего затрудняется сход вихрей с переднего тела (рис.6,б,в). При удалении тел на расстояние $\ell_x = 5,5d$ (рис.6,г) возмущения за обоими телами увеличиваются и, как видно из рисунка, вихревой след за первым препятствием, распространяясь вниз по потоку, взаимодействует с течением вблизи второго препятствия, вызывая увеличение амплитуды за ним. Очевидно, в этом случае происходит интерференция завихренности. В результате этой интерференции вихревой след увеличивается, приводя к эффекту резонанса. Этот результат означает, что характеристики потока зависят от фазы подветренных возмущений, вызванных первым препятствием и местоположением второго препятствия.

В заключение отметим, что численный анализ позволил выявить основные закономерности образования вихрей, в частности, вихревую дорожку Кармана при обтекании потоком сжимаемого газа одиночного тела, и влияние формы препятствия на вихревой след за телом. Выявленный эффект "резонанса"способствует пониманию закономерностей взаимодействия вихрей, возникающих при обтекании потоком сжимаемого газа дискретно расположенных тел с различными углами выноса.

Цитированная литература

1. **Majda A., Sethian J.A.** // Combust. Sci. And Tech. 1985 V.42. P. 185-205.

2. **Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.** Внутренние течения газовых смесей. М., 1989.

3. **Калтаев А.** Газодинамика внутренних течений реагирующих смесей // Диссерт. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат.наук. Алматы, 1999.

4. **Ибраева Д.С., Найманова А.Ж.** // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т.37, №1. С.93-102.

Поступила в редакцию 17.10.2003г.

Рис. 1: Распределение завихренности

Рис. 2: Распределение завихренности

Рис. 3: Поле вектора скорости

Рис. 4: Поле вектора скорости

Рис. 5: Распределение интенсивности завихренности положительных (тонкая линия) и отрицательных (жирная линия) составляющих потока за одиночным телом (сплошной линией - при обтекании цилиндра, пунктирной линией - при обтекании треугольника)

Рис. 6: Поле вектора скорости

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 15 — 18*

УДК 517.956

О ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С. Т. Ахметова

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауэзова
г. Шымкент, пр. Тауке-хана, 5

Исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов с отклоняющимися аргументами. Результаты применены в задаче Бицадзе-Самарского для волнового уравнения.

В работе [1] А.В.Бицадзе и А.А.Самарский доказали существование и единственность классического решения эллиптического уравнения второго порядка с краевыми условиями, связывающими значение искомой функции на куске S границы ∂Q со значениями на этом же куске, но сдвинутом внутрь области, причем на $\partial Q,S$ задавались условия Дирихле. В работах [2], [3] была установлена единственность классического решения для эллиптических уравнений второго порядка с краевыми условиями указанного вида, включающими также косую производную. В работах [4], [5] рассматривались обобщенные решения эллиптических уравнений порядка $2p$, удовлетворяющие общим граничным условиям, связывающим следы искомой функции и ее производных на всей границе ∂Q с их следами на гладком многообразии без края $\Gamma \subset Q$. Доказана нетеровость указанных краевых задач. Естественным обобщением краевой задачи А.В.Бицадзе - А.А.Самарского является тот случай, когда след искомой функции на некоторых кусках границы равен линейной комбинации следов на тех же кусках, но сдвинутых внутрь области. В работе [6] доказаны дискретность и полуограниченность спектра эллиптического оператора с указанными краевыми условиями. В отличие от уравнений эллиптического типа спектральные вопросы краевых задач для гиперболического уравнения являются мало изученными. Здесь следует отметить результаты Кальменова Т.Ш., которые отражены в [7,8].

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная отрезками AB: $0 \le x \le 1$ оси $y = 0$ и характеристиками AC: $x + y = 0$, BC: $x - y = 1$ уравнения

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \tag{0.1}$$

Задача S_a. Найти решение уравнения (0.1), удовлетворяющего условию

$$u\Big|_{AB} = 0, \tag{0.2}$$

Keywords: *problem of Bisadze-Samarsky, wave equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

$$u\Big|_{AC:x+y=0,x-y=t} = a \cdot u\Big|_{BC:x-y=1,x+y=t}, \qquad t \in [0,1], \tag{0.3}$$

где a — произвольное комплексное число.

Имеет место

Теорема 1. *Задача S_a является регулярной только при $a \neq -1$ и самосопряженной тогда и только тогда, когда при $|a| = 1$, $a \neq -1$. При $a \neq -1$ для любой $f \in L_2(\Omega)$ решении этой задачи принадлежит $W_2^1(\Omega)$.*

Задача T_α. Найти решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условию

$$u\Big|_{AB} = 0, \tag{0.4}$$

$$\varphi(y) = \alpha\psi(y), \qquad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0, \tag{0.5}$$

где $\varphi(y) = u\Big|_{AC} = u(-y, y)$, $\psi(y) = u\Big|_{BC} = u(1+y, y)$, α — произвольное комплексное число.

Теорема 2. *Задача T_α однозначно сильно разрешима, если и только если $\alpha^2 \neq 1$. Если $\alpha^2 \neq 1$, то для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи T_α, $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет неравенству*

$$||u||_1 \leq C \cdot ||f||_0. \tag{0.6}$$

Кроме того, если $\alpha^2 \neq 1$, то оператор $L_{T_\alpha}^{-1}$ вольтерров и любой элемент $u \in D(L_{T_\alpha})$ удовлетворяет неравенству

$$||u||_0 \geq C \cdot ||u||_1, \qquad u \in D(L_{T_\alpha}).$$

Здесь L_{T_α} - замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора (0.1) на подмножестве функций $u \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условию (0.4), (0.5).

Задача K_α. Найти решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условиям

$$u_x \,|_{AB} = u_y \,|_{AB} = 0, \tag{0.7}$$

$$u(D_\alpha) = 0, \tag{0.8}$$

где точка $D_\alpha\Big(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\Big)$ имеет координаты $(\alpha, -\alpha)$, если лежит на AC и - $(1-\alpha, -\alpha)$, если лежит на BC.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда задачи K_α и T_α (сопряженная) не являются вольтерровыми. Собственные значения задач положительны и выражаются формулой*

$$\lambda_k = \Big(\frac{2k+1}{2\alpha}\Big)^2, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Собственные функции задач K_α и T_α не полны в $L_2(\Omega)$ и имеют вид

$$u_k(x,y) = \cos\Big(\frac{2k+1}{2\alpha}\pi y\Big), \qquad k = 0, 1, 2, ..., \tag{0.9}$$

$$v_k(x,y) = \Theta(2\alpha - x + y) J_0(\sqrt{\lambda_k (x+y)(2\alpha - x + y)}), \tag{0.10}$$

соответственно. Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя, $\Theta(t)$ — функция Хевисайда.

В настоящей работе рассмотрена краевая задача типа А.В.Бицадзе-А.А.Самарского для волнового уравнения. При этом обнаружена ее связь со спектральной теорией дифференциальных операторов с отклоняющимися аргументами.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = \lambda y(\alpha - x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$ — некоторое фиксированное число, λ — комплексный спектральный параметр.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = K[\sin \lambda x + \cos \lambda(\alpha - x)].$$

Поэтому из условия (2) получим $K \cos \lambda\alpha = 0$. Так как $K \neq 0$, то $\cos \lambda\alpha = 0$, $\lambda\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Следовательно, собственными значениями задачи (1), (2) являются числа

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \tag{3}$$

а соответствующие им собственные функции -

$$y_n(x) = K_n\Big[\sin \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x + \cos \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}(\alpha - x)\Big]. \tag{4}$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\cos \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}(\alpha - x) = \cos\Big[\frac{\pi(2n+1)}{2} - \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x\Big] =$$

$$= \cos \frac{\pi(2n+1)}{2} \cos \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x + \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} \sin \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x = (-1)^n \sin \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x.$$

Тогда

$$y_n(x) = K_n[1 + (-1)^n] \sin \frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x.$$

Следовательно, за собственные функции задачи (1), (2) можно принять функции

$$y_m(x) = K_m[1 + (-1)^n] \sin \frac{\pi(4m+1)}{2\alpha}x, \tag{5}$$

где K_m - некоторые постоянные. Функции (5) не полны в пространстве $L_2(0,1)$. В самом деле, при $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 4\alpha, \\ 0, & 4\alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

ортогональна ко всем функциям (5).

Формально продифференцировав уравнение (1) по "параметру" α, получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial x} = \lambda y'_\alpha(\alpha - x) = -\lambda^2 y, \qquad y(0) = 0, \quad y'(\alpha) = \lambda y(0) = 0. \tag{6}$$

Последнее равенство "подсказывает", что функции $u_n(x,y) = y_n(x+y)$ являются собственными функциями некоторой краевой задачи для гиперболического уравнения. В самом деле,

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = -\Big(\frac{4n+1}{2\alpha}\Big)^2 u_\alpha(x,y),$$

$$u_n(x,y)\Big|_{x+y=0}=0, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x}\Big|_{x+y=\alpha}=\frac{\partial u_n}{\partial y}\Big|_{x+y=\alpha}=\cos\Big(2n\pi+\frac{\pi}{2}\Big)=0,$$

где $u_n(x,y)=\sin\frac{(4n+1)\pi}{2\alpha}(x+y)$
Итак, в треугольнике ABC, ограниченном отрезками AC: $x+y=0$, BC: $y-x=1$ и AB: $y=0, 0\le x\le 1$, DE :$x+y=\alpha$, решена краевая задача для гиперболического уранения

$$u_{xy}=-\lambda^2 u, \tag{7}$$

$$u\Big|_{AC}=0, \tag{8}$$

$$u_x\Big|_{DE}=u_y\Big|_{DE}=0. \tag{9}$$

Заметим, что отрезок DE находится внутри области характеристического треугольника ABC. Сформулируем полученный результат.

Т е о р е м а 4. *Если $0<\alpha<1$, то краевая задача*

$$y'=\lambda y(\alpha-x), \qquad y(0)=0, \qquad x\in[0,1] \tag{10}$$

имеет бесконечное множество собственных значений и соответствующих им собственных функций:

$$\lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...,$$

$$y_n=K_n[1+(-1)^n]\sin\frac{\pi(2n+1)}{2\alpha}x.$$

При $0<\alpha\le\frac{1}{4}$ собственные функции не полны в пространстве $L_2(0,1)$. Функции $u_n(x,y)=y_n(x+y)$ являются решением краевой задачи

$$u_{xy}=-\lambda^2 u, \qquad u\Big|_{AC}=0, \qquad u_x\Big|_{DE}=u_y\Big|_{DE}=0.$$

Цитированная литература

1. **Бицадзе А.В., Самарский А.А.** // ДАН СССР. 1969. Т. 185, №4. С.739–740.
2. **Камынин Л.И.** // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, №1. С. 39–49.
3. **Камынин Л.И., Химченко Б.Н.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19, №1. С. 129–142.
4. **Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.** // ДАН СССР. 1970. Т. 192, №3. С. 511–513.
5. **Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.** //ДАН СССР. 1971. Т. 201, №5. С. 1059–1062.
6. **Скубачевский А.А.** // Матем. сборник. 1982. Т. 117(154), №4. С. 549–559.
7. **Ерошенков Е.П., Кальменов Т.Ш.** // ДАН СССР. 1987. Т. 296, №2. С.528–531.
8. **Кальменов Т.Ш.** Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент, 1993.

Поступила в редакцию 25.07.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 19 — 26*

УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ.II

Д. Б. Базарханов

Институт математики МО и Н РК
Алматы, ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

Установлена теорема представления для пространств Лизоркина-Трибеля смешанной гладкости. Получены некоторые эквивалентные нормировки и теоремы вложения для этих пространств. Даны дополнительные характеризации пространств Никольского-Бесова, рассмотренных в первой части работы.

6. Определение пространства $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Предлагаемая заметка является продолжением работы [1] (мы будем использовать определения и обозначения, введенные там, без дополнительных пояснений и ссылаться на работу [1] как на часть I; кроме того, мы продолжим нумерацию определений, теорем и т.д.). Настоящая (вторая) часть работы посвящена, в основном, изучению пространств Лизоркина-Трибеля $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$: предложен один из возможных вариантов определения этих пространств, получены некоторые теоремы вложения, а также ряд эквивалентных нормировок для них. Кроме того, в нескольких случаях параллельно приводятся эквивалентные нормировки для изучавшихся в части I пространств $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$.

Определим "смешанные" усредненные локальные конечные разности для функции $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ $(\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n), \mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j}\ (j \in \mathbf{e}_n),\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n,\ \varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n)$:

$$\delta_{\mathbf{k(e)}}(f;\, \mathbf{t}(\mathbf{e});\, \mathbf{x}) = \sup\{ \prod_{j\in\mathbf{e}} \tau_j^{-d_j} \int\limits_{\mathbf{h}(\mathbf{e})\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}:|\mathbf{h}_j|_\infty\le\tau_j,\ j\in\mathbf{e}} |\, \Delta^{\mathbf{k(e)}}(\mathbf{h}(\mathbf{e}))f \,|\, d\mathbf{h}(\mathbf{e})\ :\ 0<\tau_j<t_j\ j\in\mathbf{e}\,\},$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}) \in \mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}_{+},\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathbf{d}}.$$

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in [0,\ \infty)^n,\ \mathbf{e}^\star := \mathbf{e}[\mathbf{s}] \neq \varnothing,\ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),$ $\mathbf{p}_j \in [1,\ \infty)^{d_j}\ (j \in \mathbf{e}_n),\ \mathbf{q}(\mathbf{e}^\star) = (q_j, j \in \mathbf{e}^\star) \in [1,\ \infty]^{|\mathbf{e}^\star|}.$ *Фиксируем* $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}^{|\mathbf{e}^\star|}$ *такое,*

Keywords: *Function space, mixed smoothness, representation by entire function of exponential type, equivalent norms, embedding*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

что $k_j > s_j$ $(j \in \mathbf{e}^\star)$. *Пространство* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)} = \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *состоит из всех функций* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, *для которых выполняется условие*

$$\| \delta_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(f;\ \mathbf{t}(\mathbf{e});\ \mathbf{x}) \cdot \prod_{j \in \mathbf{e}} t_j^{-s_j} \mid L^*_{\mathbf{q}(\mathbf{e})} \| \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \quad \forall\ \varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star;$$

норма функции $f \in \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$ *определяется равенством*

$$\| f \mid \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)} \| = \| f \mid L_{\mathbf{p}} \| + \sum_{\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star} \| \| \delta_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(f;\ \mathbf{t}(\mathbf{e});\ \mathbf{x}) \cdot \prod_{j \in \mathbf{e}} t_j^{-s_j} \mid L^*_{\mathbf{q}(\mathbf{e})} \| \mid L_{\mathbf{p}} \|; \tag{5}$$

если $\mathbf{e}^\star = \mathbf{e}_n$, *то* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)} =: \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$.

Замечание 5. *Отметим, что стандартные рассуждения позволяют легко установить, что функционалы (1) (см. часть I, определение 1) и (5) действительно являются нормами и что пространства* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$ *и* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$, *снабженные, соответственно, нормами (1) и (5), являются банаховыми пространствами.*

Замечание 6. *В [2, гл.2] дается систематическое изложение различных аспектов теории пространств* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}B(\mathbb{R}^2)$ *и* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}F(\mathbb{R}^2)$. *Здесь* $\overline{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ *(допускаются и неположительные значения координат),* $\overline{p} = (p_1, p_2) \in (0, \infty]^2$ *в первом случае и* $\overline{p} = (p_1, p_2) \in (0, \infty)^2$ *во втором,* $\overline{q} = (q_1, q_2) \in (0, \infty]^2$, *которые определяются на основе декомпозиционной точки зрения (в случае классических изотропных пространств* $B^r_{pq}(\mathbb{R}^n)$ *и* $F^r_{pq}(\mathbb{R}^n)$ *см. [3]) и близки к пространствам* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$ *и* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$, *соответственно, при* $n = 2$, $\mathbf{d} = (1, 1)$, $\overline{r} = \mathbf{s}$, $\overline{p} = \mathbf{p}, \overline{q} = \mathbf{q}$, *а при дополнительных ограничениях на вектор* $\mathbf{s}$ *и совпадают с ними (см. далее замечания 8 и 11; см. еще [4], [5]).*

7. Теорема представления для пространств $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$. В этом разделе мы сформулируем теорему представления для $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$, которая является одним из основных инструментов при исследовании этих пространств.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{s} \in [0, \infty)^n$, $\mathbf{e}^\star \neq \varnothing$, $\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star) \in [1, \infty]^{|\mathbf{e}^\star|}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in [1, \infty)^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда функция* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$ *тогда и только тогда, когда она допускает сходящееся в* $L_{\mathbf{p}}$ *представление*

$$f = \sum_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}} Q_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)}, \qquad Q_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)} \in \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{e}^\star, 2^{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)}) \ \ (\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}),$$

для которого выполняется условие $\{ 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{m}(\mathbf{e}^\star))} Q_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)}(\cdot) \}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}} \in L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star)})$. *При этом величина*

$$\inf \| \{ 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{m}(\mathbf{e}^\star))} Q_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)}(\cdot) \}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}} \mid L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star)}) \|, \tag{6}$$

где нижняя грань берется по всевозможным таким представлениям, эквивалентна норме $\| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)} \|$. *Более того, найдется последовательность* $\{ \mathcal{U}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)} \}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}}$ *линейных операторов* $\mathcal{U}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)} : L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \to \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{e}^\star, 2^{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)})$, *непрерывных из* $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *в* $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, $(\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|})$ *такая, что*

$$f = \sum_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}} \mathcal{U}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)} f,$$

причем

$$\| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)} \| \asymp \| \{ 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{m}(\mathbf{e}^\star))} \mathcal{U}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)} f \}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}} \mid l_{\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star)}(L_{\mathbf{p}}) \|. \tag{7}$$

Замечание 7. *Отметим, что операторы* $\mathcal{U}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)}$, *фигурирующие в теореме 7, те же, что и в теореме 1 части I.*

Замечание 8. *Для упоминавшихся в замечании 6 пространств* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}B(\mathbb{R}^2)$ *и* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}F(\mathbb{R}^2)$ *аналогичная теорема представления при дополнительном ограничении на вектор* $\overline{r}$ *получена в [2].*

8. Эквивалентные нормировки для $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Прежде всего (как и в части I) отметим, что (как следует из теоремы 7) нормы (5), отвечающие разным $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star) > \mathbf{s}(\mathbf{e}^\star)$ (см. определение 3), эквивалентны (и фактически пространство $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ не зависит от такого $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star)$), а также что величина (6) и выражение справа в (7) являются нормами для $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, эквивалентными исходной. В следующих теоремах приводятся другие эквивалентные нормировки для этих пространств.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{s} \in [0,\ \infty)^n$, $\mathbf{e}^\star \neq \varnothing$, $\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star) \in [1,\ \infty]^{|\mathbf{e}^\star|}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in [1,\ \infty)^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$. *Пусть, далее,* $\mathbf{r}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}$ *и* $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}^{|\mathbf{e}^\star|}$ *такие, что* $r_j < s_j < r_j + k_j$, $j \in \mathbf{e}^\star$. *Тогда функция* $f \in L_{\mathbf{p}}$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *тогда и только тогда, когда для всех* $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}$ *таких, что* $|\boldsymbol{\alpha}_j| = r_j, j \in \mathbf{e}^\star$ *и* $\mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star$ *существуют ее обобщенные производные* $\partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})} f \in L_{\mathbf{p}}$ *и выполнено следующее условие*

$$\|\ \|\ \delta_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\ \partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})} f;\ \mathbf{t}(\mathbf{e});\ \mathbf{x}) \cdot \prod_{j\in\mathbf{e}} t_j^{r_j - s_j}\ |\ L^*_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}\ \|\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \| < \infty,$$

при этом функционал

$$\|\ f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\ + \sum_{\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star}\ \sum_{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}) : |\boldsymbol{\alpha}_j| = r_j, j\in\mathbf{e}^\star} \|\ \|\ \delta_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\ \partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})} f;\ \mathbf{t}(\mathbf{e});\ \mathbf{x}) \cdot \prod_{j\in\mathbf{e}} t_j^{r_j - s_j}\ |\ L^*_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}\ \|\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|$$

является нормой для $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$, *эквивалентной исходной.*

Следующая теорема — аналог теоремы 3 части I для пространств $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$.

Теорема 9. *Пусть* $\mathbf{s} \in (0,\ \infty)^n$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$.

`i)` *При* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in (1,\infty)^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$ *и* $\mathbf{q} \in (1,\infty)^n$ *функция* $f \in L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\{\ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})}\ \mathcal{F}_{\mathbf{m}} * f\ \}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n} \in L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})$, *причем*

$$\|\ f\ |\ \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}\ \|\ \approx\ \|\ \{\ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})}\ \mathcal{F}_{\mathbf{m}} * f\ \}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})\ \|.$$

`ii)` *При* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in [1,\infty)^{d_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *и* $\mathbf{q} \in [1,\infty]^n$ *функция* $f \in L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\{\ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})}\ \mathcal{G}_{\mathbf{m}} * f\ \}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n} \in l_{\mathbf{q}}(\ L_{\mathbf{p}})$, *причем*

$$\|\ f\ |\ \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}\ \|\ \approx\ \|\ \{\ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})}\ \mathcal{G}_{\mathbf{m}} * f\ \}_{\mathbf{m}(\in\mathbb{N}_0^n}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})\ \|.$$

Замечание 9. *Сравнивая утверждение части* `i)` *приведенной теоремы и теоремы 2.3 работы [9], мы получаем описание пространств* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *с* $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{q} = 2\mathbf{d}$ *и* $\mathbf{p} = (p, \ldots, p) \in (1,\infty)^n$ *в терминах (смешанных) обобщенных производных в смысле Лиувилля. Это же верно и для случая произвольного* $\mathbf{p}$, *удовлетворяющего условиям теоремы 9.*

Выберем произвольные функции $\phi_j \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{d_j})$, $j \in \mathbf{e}_n$ с компактными носителями такие, что
$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d_j}} \phi_j(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j \neq 0.$$
Теперь определим для $f \in L_{\mathbf{p}}$, $\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$, $\mathbf{m(e)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}$ и $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{|\mathbf{e}|}$ следующие функции
$$\Phi^{\mathbf{k(e)}}_{\mathbf{m(e)}} f(\mathbf{x}) = 2^{(\mathbf{m(e)},\mathbf{k(e)})} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbf{d(e)}}} \Delta^{\mathbf{k(e)}}(\mathbf{h(e)}) f(\mathbf{x}) \prod_{j\in\mathbf{e}} \phi_j(2^{(\mathbf{m(e)},\mathbf{k(e)})} \cdot \mathbf{h}_j)\, d\mathbf{h(e)}.$$

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{s} \in (0, \infty)^n$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$.

i) *При* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in (1,\infty)^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$ *и* $\mathbf{q} \in (1,\infty)^n$ *для функции* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *следующие условия равносильны:*

a) f *принадлежит пространству* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$;

b) *для всех* $\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$ *выполняется условие* $\{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \Phi^{\mathbf{k(e)}}_{\mathbf{m(e)}} f(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \in L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q(e)}})$, *причем*
$$\| f \mid \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \| \approx \| f \mid L_{\mathbf{p}} \| + \sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}_n} \| \{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \Phi^{\mathbf{k(e)}}_{\mathbf{m(e)}} f(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \mid L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q(e)}}) \|;$$

c) *для всех* $\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$ *выполняется условие* $\{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \delta_{\mathbf{k(e)}}(f; 2^{-\mathbf{m(e)}}; \mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \in L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q(e)}})$, *причем*
$$\| f \mid \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \| \approx \| f \mid L_{\mathbf{p}} \| + \sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}_n} \| \{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \delta_{\mathbf{k(e)}}(f; 2^{-\mathbf{m(e)}}; \mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \mid L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q(e)}}) \|;$$

ii) *При* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in (1,\infty)^{d_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *и* $\mathbf{q} \in [1,\infty]^n$ *для функции* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *следующие условия равносильны:*

a) f *принадлежит пространству* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$;

b) *для всех* $\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$ *выполняется условие* $\{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \Phi^{\mathbf{k(e)}}_{\mathbf{m(e)}} f(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \in l_{\mathbf{q(e)}}(L_{\mathbf{p}})$, *причем*
$$\| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \| \approx \| f \mid L_{\mathbf{p}} \| + \sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}_n} \| \{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \Phi^{\mathbf{k(e)}}_{\mathbf{m(e)}} f(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \mid l_{\mathbf{q(e)}}(L_{\mathbf{p}}) \|;$$

c) *для всех* $\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$ *выполняется условие* $\{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \delta_{\mathbf{k(e)}}(f; 2^{-\mathbf{m(e)}}; \mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \in l_{\mathbf{q(e)}}(L_{\mathbf{p}})$, *причем*
$$\| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \| \approx \| f \mid L_{\mathbf{p}} \| + \sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}_n} \| \{ 2^{(\mathbf{s(e)},\mathbf{m(e)})} \delta_{\mathbf{k(e)}}(f; 2^{-\mathbf{m(e)}}; \mathbf{x}) \}_{\mathbf{m(e)}\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \mid l_{\mathbf{q(e)}}(L_{\mathbf{p}}) \|.$$

Замечание 10. *Теоремы 3, 9 и 10 являются аналогами для пространств* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *и* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *характеризаций, полученных для анизотропных пространств обобщенной гладкости Г.А.Калябиным (см. [6, теорема 1]); относительно пространств смешанной гладкости* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}B(\mathbb{R}^2)$ *и* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}F(\mathbb{R}^2)$ *см. также [2, теоремы 2.3.3 и 2.3.4].*

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на $\mathbb{R}^d$, соответственно. Для $t \in (0,1)$, $j \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ обозначим $g_t(\mathbf{x}) = t^{-d} g(\mathbf{x}/t)$, $g_j(\mathbf{x}) = g_{2^{-j}}(\mathbf{x})$, $\hat{f}$ — преобразование Фурье распределения f, а $f * g$ — свертка f и g.

Выберем функции $\sigma_i^\circ, \ \sigma_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d_i})$ ($i \in \mathbf{e}_n$), удовлетворяющие при некоторых $\varepsilon_i > 0, \ K_i \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$) тауберовым условиям

$$|\hat{\sigma_i^\circ}(\boldsymbol{\xi}_i)| > 0 \ \text{ при } |\boldsymbol{\xi}_i| \leqq 2\varepsilon_i, \quad |\hat{\sigma}_i(\boldsymbol{\xi}_i)| > 0 \ \text{ при } \frac{\varepsilon_i}{2} \leqq |\boldsymbol{\xi}_i| \leqq 2\varepsilon_i$$

и моментным условиям

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}_i}\sigma_i(\mathbf{0}) = 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}_i| \leqq K_i.$$

Положим $\sigma_{i0}(\mathbf{x}_i) = \sigma_i^\circ(\mathbf{x}_i), \ \ \sigma_{ij}(\mathbf{x}_i) = 2^{jd_i}\sigma_i(2^j\mathbf{x}_i) \ (j \in \mathbb{N})$,

$$\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_{ik_i}(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Теорема 11. *Пусть вектора* $\mathbf{s} \in (0,\infty)^n, \ \mathbf{q} \in [1,\infty]^n$ *и* $\mathbf{K} \in \mathbb{N}_0^n$ *таковы, что* $s_i < K_i + 1, \ i \in \mathbf{e}_n$.

i) *Пусть* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \mathbf{p}_j \in [1,\infty]^{d_j} \ (j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда распределение* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *тогда и только тогда, когда* $\{ \ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{k})}\sigma_{\mathbf{k}} * f \ \} \in l_{\mathbf{q}}(\ L_{\mathbf{p}})$, *при этом*

$$\| \ f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \ \| \approx \| \ \{ \ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{k})}\sigma_{\mathbf{k}} * f \ \} \mid l_{\mathbf{q}}(\ L_{\mathbf{p}}) \ \|.$$

ii) *Пусть* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \ \mathbf{p}_j \in [1,\infty)^{d_j} \ (j \in \mathbf{e}_n)$ *и, если* $q_j = \infty$ *для некоторого* $j \in \mathbf{e}_n$, *то* $q_i = \infty, \ i = 1, \dots, j$. *Тогда распределение* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *тогда и только тогда, когда* $\{ \ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{k})}\sigma_{\mathbf{k}} * f \ \} \in L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})$, *при этом*

$$\| \ f \mid \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}\| \approx \| \ \{ \ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{k})}\sigma_{\mathbf{k}} * f \ \} \mid L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}}) \ \|.$$

Замечание 11. *В работах [7], [8] изучались пространства* $\mathbf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, $\mathbf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *и* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s},\mathbf{e}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathsf{MF}^{\mathbf{s},\mathbf{e}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^d)$, *соответственно (в несколько иных обозначениях), которые определялись с декомпозиционной точки зрения (там допускаются значения, меньшие 1, для компонент векторов* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *). Теорема 11 утверждает, в частности, что в ее условиях пространства из определений 1 части I и 3 совпадают с соответствующими пространствами из указанных работ.*

9. Теоремы вложения. Здесь сформулируем следующие теоремы вложения.

Теорема 12. i) *Пусть* $\mathbf{s} \in (0,\infty)^n, \ \mathbf{q} \in [1,\infty]^n, \ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \ \mathbf{p}_j \in [1,\infty]^{d_j} \ (j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда справедливы (непрерывные) вложения*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \ \subset \ \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \ \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}).$$

Если, кроме того, $\mathbf{q} \in [1,\infty)^n, \ \mathbf{p}_i \in [1,\infty)^{d_i}, i \in \mathbf{e}_n$, *то* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *плотно в* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$.

ii) *Пусть* $\mathbf{s} \in (0,\infty)^n, \ \mathbf{q} \in [1,\infty]^n, \ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \ \mathbf{p}_j \in [1,\infty)^{d_j} \ (j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда справедливы (непрерывные) вложения*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \ \subset \ \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \ \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}).$$

Если, кроме того, $\mathbf{q} \in [1,\infty)^n$, *то* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *плотно в* $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$.

Теорема 13. *Пусть* $\mathbf{s}, \ \mathbf{s}^* \in (0,\infty)^n, \ \mathbf{s} \leq \mathbf{s}^*, \ \mathbf{q}, \ \mathbf{q}^* \in [1,\infty]^n$, *причем для* $j \in \mathbf{e}_n$ *таких, что* $s_j = s_j^*$, *считаем, что* $q_j \leq q_j^*$; $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n, \ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \ \mathbf{p}_j \in [1,\infty)^{d_j} \ (j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда справедливо (непрерывное) вложение*

$$\mathsf{MF}^{\mathbf{s}^*}_{\mathbf{pq}^*} \ \subset \ \mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}.$$

Т е о р е м а 14. *Пусть* $\mathbf{s} \in (0,\infty)^n$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_* \in [1,\infty]^n$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_* = (\mathbf{p}_{*1},\ldots,\mathbf{p}_{*n})$, $\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{*j} \in [1,\infty)^{d_j}$, $\mathbf{p}_j \le \mathbf{p}_{*j} (j \in \mathbf{e}_n)$, *причем* $\mathbf{s}_* = (s_{*1},\ldots,s_{*n}) \ : \ s_{*j} = s_j - \sum_{k=1}^{d_j} (\frac{1}{p_{jk}} - \frac{1}{p_{*jk}}) > 0$, $j \in \mathbf{e}_n$. *Тогда справедливо вложение*

$$\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \subset \mathsf{MF}^{\mathbf{s}_*}_{\mathbf{p}_*\mathbf{q}_*}.$$

З а м е ч а н и е 12. *Для пространств* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}B(\mathbb{R}^2)$ *и* $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q}}F(\mathbb{R}^2)$, *обсуждавшихся в замечании 2 выше, ряд теорем вложения, в том числе и аналоги сформулированных в этом разделе, получен в [2, гл.2]*

10. Вспомогательные утверждения. В доказательствах основных результатов работы ключевую роль играют приводимые в этом разделе предложения (наряду с предложениями из части I).

Рассмотрим d-мерное преобразование Гильберта функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ (здесь $d = |\mathbf{d}| = d_1 + \cdots + d_n$)

$$\mathcal{H}f(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{H}_\epsilon f(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \mathcal{H}_\epsilon f(\mathbf{x}) = \int\limits_{|x_i-y_i|>\epsilon_i, i\in\mathbf{e}_d} \frac{f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}}{\prod\limits_{i\in\mathbf{e}_d}(x_i-y_i)} \quad (\epsilon = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_d),\ \epsilon_i > 0).$$

П.И.Лизоркиным (см. [10, теорема 1]) доказано, что оператор $\mathcal{H}_\epsilon$ определяет ограниченное преобразование пространства $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ ($\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_d) \in (1,\infty)^d$) в себя, т.е.

$$\| \mathcal{H}_\epsilon f \mid L_{\mathbf{p}} \| \le \mathrm{C} \| f \mid L_{\mathbf{p}} \|, \quad f \in L_{\mathbf{p}},$$

при этом постоянная C не зависит от f и ϵ, и что $\mathcal{H}_\epsilon f$ сходится по норме $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ при $\epsilon \to 0$ и определенный таким образом оператор $\mathcal{H}$ ограничен в $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Для последовательности $\mathbf{f} = \{ f_{\mathbf{m}} \}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n}$ определим преобразование Гильберта покоординатно, т.е.

$$\mathcal{H}\mathbf{f} = \{ \mathcal{H}f_{\mathbf{m}} \}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n}.$$

П р е д л о ж е н и е 5. `i)` *Пусть* $\mathbf{p} \in (1,\infty)^d$, $\mathbf{q} \in (0,\infty]^n$. *Тогда оператор преобразования Гильберта* $\mathcal{H}$ *ограничен из* $l_q(L_{\mathbf{p}})$ *в себя, т.е.*

$$\| \mathcal{H}\mathbf{f} \mid l_q(L_{\mathbf{p}}) \| \le C_{\mathbf{pq}} \| \mathbf{f} \mid l_q(L_{\mathbf{p}}) \|, \quad \mathbf{f} \in l_q(L_{\mathbf{p}}).$$

`ii)` *Пусть* $\mathbf{p} \in (1,\infty)^d$, $\mathbf{q} \in (1,\infty)^n$. *Тогда оператор преобразования Гильберта* $\mathcal{H}$ *ограничен из* $L_{\mathbf{p}}(l_q)$ *в себя, т.е.*

$$\| \mathcal{H}\mathbf{f} \mid L_{\mathbf{p}}(l_q) \| \le C^\star_{\mathbf{pq}} \| \mathbf{f} \mid L_{\mathbf{p}}(l_q) \|, \quad \mathbf{f} \in L_{\mathbf{p}}(l_q).$$

Доказательство части `i)` этого предложения немедленно следует из упомянутой выше теоремы П.И.Лизоркина. Принципиальный частный случай части `ii)` (с $\mathbf{p} = (p,\ldots,p)$, $p \in (1,\infty)$, $\mathbf{q} = (q,\ldots,q)$, $q \in (1,\infty)$) также установлен П.И.Лизоркиным [11].

Для того, чтобы сформулировать следующие два утверждения, нам понадобится понятие максимальной функции. Для локально интегрируемой функции $f : \mathbb{R}^{\mathbf{d}} \to \mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{M}_i f$ ее максимальную функцию Харди-Литтлвуда относительно "переменной" $\mathbf{x}_i$, $i \in \mathbf{e}_n$

$$\mathcal{M}_i f(\mathbf{x}) = \sup_{t>0} \ t^{-d_i} \int\limits_{|\mathbf{y}_i|<t} | f(\ldots,\mathbf{x}_i+\mathbf{y}_i,\ldots)|\ d\mathbf{y}_i,$$

а через $\mathcal{M}^{[s]}f$ — ее сильную максимальную функцию

$$\mathcal{M}^{[s]}f(\mathbf{x}) = \sup_{t_i>0, i\in \mathbf{e}_d} \prod_{i\in\mathbf{e}_d} t_i^{-1} \int\limits_{|\mathbf{y}_i|<t_i, i\in\mathbf{e}_d} |\ f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|\ d\mathbf{y},$$

Положим $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{\tau})}f = \mathcal{M}_{\tau_1}\ \cdots\ \mathcal{M}_{\tau_d}f$, где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_d)$ — произвольная перестановка множества e_d.

Следующее утверждение о максимальном неравенстве для целых функций экспоненциального типа доказано Г.А.Калябиным (см. [6, лемма 6]).

Предложение 6. *Для любого мультииндекса* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$ *существует постоянная* $\mathrm{C}_{\boldsymbol{\alpha},d} > 0$ *такая, что для любой целой функции* $g(\mathbf{x})$ *экспоненциального типа* N_i *по переменной* x_i, $i \in \mathbf{e}_d$ *справедливо неравенство*

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} g(\mathbf{x})| \le \mathrm{C}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{d}} \prod_{i\in\mathbf{e}_d} N_i^{\alpha_i}\ (1+N_i|x_i-y_i|)\ \mathcal{M}^{[s]}g(\mathbf{y}) \qquad \forall\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^d.$$

Предложение 7. i) *Пусть* $\mathbf{p} \in (1,\infty]^d$; $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_d)$ — *произвольная перестановка* e_d. *Тогда для любой функции* $f \in L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^d)$

$$\|\ \mathcal{M}^{(\boldsymbol{\tau})}f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\ \le\ A_{\mathbf{p}}\ \|\ f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|.$$

ii) *Пусть* $\mathbf{p} \in (1,\infty)^d$; $\mathbf{q} \in (1,\infty]^n$, *причем, если* $q_i = \infty$ *для некоторого* $i \in e_n$, *то* $q_j = \infty$, $j = 1,\ldots,i$; $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_d)$ — *произвольная перестановка множества* e_d. *Тогда для любой функциональной последовательности* $\{\ g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\ \} \in L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})$

$$\|\ \{\ \mathcal{M}^{(\boldsymbol{\tau})}g_{\mathbf{k}}\}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})\ \|\ \le\ A_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\ \|\ \{g_{\mathbf{k}}\}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})\ \|.$$

Часть i) этого предложения легко доказать, используя рассуждения из доказательства леммы 4 работы [12]; часть ii) с $\mathbf{q} \in (0,\infty)^n$ содержится в лемме 4 из [7]. Наконец, часть ii) с $\mathbf{q} \in (0,\infty]^n$ таким, что $\exists i:\ q_j \in (1,\infty)$, $j = i+1,\ldots,n$, $q_j = \infty$, $j = 1,\ldots,i$, легко следует из предыдущей, если дополнительно использовать соображения из замечания в разделе 1.2.3 из [3].

Предложение 8. *Пусть* $\mathbf{p} \in (0,\infty]^d$, $\mathbf{q} \in (0,\infty]^n$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in (0,\infty)^n$. *Для произвольной последовательности* $\{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n}$ *неотрицательных и измеримых на* $\mathbb{R}^d$ *функций положим*

$$G_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = G_{\mathbf{m}}^{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n} \prod_{i=1}^n 2^{-|k_i-m_i|\eta_i} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n.$$

Тогда найдутся постоянные $C_1 = C_1(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \boldsymbol{\eta}) > 0$, $C_2 = C_2(\mathbf{q},\ \boldsymbol{\eta}) > 0$ *такие, что справедливы неравенства*

$$\|\ \{G_{\mathbf{k}}\}\ |\ l_{\mathbf{q}}(\ L_{\mathbf{p}})\ \| \le\ C_1 \|\ \{g_{\mathbf{k}}\}\ |\ l_{\mathbf{q}}(\ L_{\mathbf{p}})\ \|,$$

$$\|\ \{G_{\mathbf{k}}\}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})\ \| \le\ C_2 \|\ \{g_{\mathbf{k}}\}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})\ \|.$$

Предложение 9. *Пусть* $r \in (0,1]$; $\{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n}$, $\{v_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n}$ — *две кратные последовательности со значениями в* $(0,\infty]$ *и* $(0,\infty)$ *соответственно. Предположим, что для некоторого вектора* $\mathbf{L}^* = (L_1^*,\ldots,L_n^*)$, $L_i > 0$, $i \in e_n$

$$v_{\mathbf{k}} = O(2^{(\mathbf{k},\mathbf{L}^*)}),\quad |\mathbf{k}| \to \infty$$

и для любого $\mathbf{L}=(L_1,\ldots,L_n),\ L_i>0,\ i\in e_n$ *существует* $\widetilde{C}_{\mathbf{L}}>0$ *такое, что*

$$v_{\mathbf{m}} \le \widetilde{C}_{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n} 2^{-(\mathbf{k},\mathbf{L})} b_{\mathbf{m}+\mathbf{k}} v_{\mathbf{m}+\mathbf{k}}^{1-r}, \quad \mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{L},\ L_i>0,\ i\in e_n$

$$v_{\mathbf{m}}^r \le \widetilde{C}_{\mathbf{L}} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n} 2^{-r(\mathbf{k},\mathbf{L})} b_{\mathbf{m}+\mathbf{k}}, \quad \mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^n$$

с той же самой постоянной $\widetilde{C}_{\mathbf{L}}$.

Предложения 8 и 9 доказаны в [7] (см. там леммы 2 и 3, соответственно).

Цитированная литература

1. *Базарханов Д.Б.* // Матем. ж. Алматы. 2003. Т.3, №1 (7). С.33-41
2. *Schmeisser H.-J., Triebel H.* Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987.
3. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М., 1986.
4. *Schmeisser H.-J.* // Math. Nachr. 1980. V.98. P.233-250, ibid. 1982. V.106. P.187-200.
5. *Marschall J.* // Forum Math. 1991. V.3. P.479-511.
6. *Калябин Г.А.* // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С.82-109.
7. *Базарханов Д.Б.* // Тр. МИАН. 2003. (в печати).
8. *Bazarkhanov D.B.* // East J. Approx. (in appear).
9. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* // Тр. МИАН. 1990. Т. 187. С.143-161.
10. *Лизоркин П.И.* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1970. Т.34. С.218-247.
11. *Лизоркин П.И.* // Тр. МИАН. 1967. Т. 89. С.231-246.
12. *Аджиев С.С.* // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С.7-42.

Поступила в редакцию 15.07.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 27 — 35*

УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов

Институт математики МО и Н РК
Алматы, ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

Для гиперболо-эллиптического уравнения с нелокальными граничными условиями показано существование единственного L_2-сильного решения, удовлетворяющего на линии изменения типа уравнения условиям непрерывности решения и его производной по времени с логарифмическим весом.

1. Постановка задачи. В области Q, где $Q = Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 = \{x, t | \, 0 < x < 2\pi, \ 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{x, t | \, 0 < x < 2\pi, \ -T < t < 0\}$, требуется найти решение уравнения смешанного (гиперболо-эллиптического) типа

$$Lu \equiv -tD_t^2 u(x,t) - D_x^2 u(x,t) + \theta(t) \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(x, t_k) + \theta(-t) \sum_{k=m+1}^{M} \alpha_k u(x, t_k) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$D_x^p u(0,t) = D_x^p u(2\pi, t), \quad D_t^p u(x,T) = \mu_p D_t^p u(x, -T) \tag{2}$$

и условиям "склеивания" на отрезке $[0, 2\pi]$ оси $t = 0$

$$u(0+, x) = u(0-, x), \quad \lim_{t \to 0+} \frac{D_t^1 u(t,x)}{\ln t} = \lim_{t \to 0-} \frac{D_t^1 u(t,x)}{\ln(-t)}, \tag{3}$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $p = 0, 1$.
Предположим, что

$$T < +\infty, \ f \in L_2(Q), \ \mu_p \in \mathbb{C}, \ p = 0,1, \ \alpha_k \in \mathbb{C}, \ t_k \in (-T, T), \ k = \overline{1, M}, \ \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Целью данной работы является исследование вопросов существования и единственности L_2-сильного решения для граничной задачи (1) — (3) при условиях (4).

2. Основной результат. Введем необходимые в дальнейшем определение и обозначения.

Keywords: *mixed type equation, loaded equation, strongly solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 35M10

Определение 1. *Функцию $u(x,t) \in L_2(Q)$ называем L_2-сильным решением задачи (1)—(3), если существует последовательность $\{u^{(n)}(x,t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C^{2,2}_{x,t}(Q \ \setminus \{t=0\}) \cap C(Q)$, удовлетворяющая условиям (2) — (3), такая, что $u^{(n)} \to u(x,t)$, $Lu^{(n)} \to f(x,t)$ при $n \to \infty$ в $L_2(Q)$.*

Пусть $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$– цилиндрические функции (соответственно функции Бесселя и Неймана и модифицированные функции Бесселя). Далее, пусть $\mathscr{S} = \{s|\ s = 0, \pm 1, \pm \pm 2, ...\}$ и

$$\eta_s^1(t,\tau) = 2\sqrt{t\tau}\left[I_1(2s\sqrt{t})K_1(2s\sqrt{\tau}) - I_1(2s\sqrt{\tau})K_1(2s\sqrt{t})\right],\ 0 < t \le \tau \le T, \tag{5}$$

$$\eta_s^2(t,\tau) = \pi\sqrt{t\tau}\left[J_1(-2s\sqrt{-t})N_1(-2s\sqrt{-\tau}) - J_1(-2s\sqrt{-\tau})N_1(-2s\sqrt{-t})\right], \quad -T \le \tau \le t < 0; \tag{6}$$

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} J_0 - \mu_0 \cdot I_0 & s^{-1}\sqrt{T}[-J_1 + \mu_1 I_1] & -s^{-2}[I_0 - 1] & s^{-2}[1 - J_0] \\ s^2[J_0 - \mu_0 I_0] & s\sqrt{T}[-J_1 + \mu_1 I_1] & -I_0 & -J_0 \\ \mu_0 \sum\limits_1^m \alpha_k D_\tau^1 \eta_s^1(t_k,\tau)_{|\tau=T} & -\mu_1 \sum\limits_1^m \alpha_k \eta_s^1(t_k, T) & s^{-2}\delta_s^1 & 0 \\ \sum\limits_{m+1}^M \alpha_k D_\tau^1 \eta_s^2(t_k.\tau)_{|\tau=-T} & -\sum\limits_{m+1}^M \alpha_k \eta_s^2(t_k,-T) & 0 & s^{-2}\delta_s^2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$J_0 = J_0(-2s\sqrt{T}),\ I_0 = I_0(2s\sqrt{T}),\ J_1 = J_1(-2s\sqrt{T}),\ I_1 = I_1(2s\sqrt{T});$$

а величины δ_s^1, δ_s^2 определяются по следующим формулам

$$\delta_s^1 = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \left\{D_\tau^1 \eta_s^1(t_k,\tau)_{|\tau=T} + 1\right\} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_k - 2s\sum_{k=1}^m \alpha_k\sqrt{t_k}\left[I_1(2s\sqrt{t_k}) \cdot K_0(2s\sqrt{T}) + I_0(2s\sqrt{T}) \cdot K_1(2s\sqrt{t_k})\right],$$

$$\delta_s^2 = 1 - \sum_{k=m+1}^M \alpha_k \left\{D_\tau^1 \eta_s^2(t_k,\tau)_{|\tau=-T} + 1\right\} =$$

$$= 1 - \sum_{k=m+1}^M \alpha_k - \pi s\sum_{k=m+1}^M \alpha_k\sqrt{-t_k}\left[J_1(-2s\sqrt{-t_k}) \cdot N_0(-2s\sqrt{T}) - \right.$$

$$\left. -J_0(-2s\sqrt{T}) \cdot N_1(-2s\sqrt{-t_k})\right].$$

Здесь $\eta_s^1(t,\tau)$, $\eta_s^2(t,\tau)$ являются функциями Коши [1], соответственно, для задач (12) и (13).

Теорема 1. *Граничная задача (1)—(4) имеет единственное L_2-сильное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

$$|\Delta_s| \ne 0 \quad \forall s \in \mathscr{S}. \tag{8}$$

Здесь и далее в работе $|B|$ означает детерминант матрицы B. Условие (8) в терминах данных (4) дает полное описание корректных граничных задач вида (1)—(3).

Замечание 1. В случае отсутствия нагрузки, т.е. когда $\alpha_k \equiv 0$, $|\Delta_s| \equiv 0$, граничная задача (1)—(3), вообще говоря, разрешима неоднозначно. Возникает необходимость использования так называемого разрывного "склеивания" Франкля [2–4].

3. Доказательство теоремы 1. Решаем задачу методом разделения переменных [5]. Пусть

$$u(x,t)=\sum_{s\in\mathscr{S}}u_s(t)\exp\{isx\}. \tag{9}$$

Используя представление $f(x,t)=\sum\limits_{s\in\mathscr{S}}f_s(t)\exp\{isx\}$, сведем задачу (1)—(3) к следующей задаче для отыскания функций $\{u_s(t),\ s\in\mathscr{S}\}$

$$-tu_s''(t)+s^2u_s(t)+\theta(t)\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_s(t_k)+\theta(-t)\sum_{k=m+1}^{m}\alpha_k u_s(t_k)=f_s(t), \tag{10}$$

$$D_t^p u_s(T)=\mu_p D_t^p u_s(-T),\quad p=0,1,\ s\in\mathscr{S}. \tag{11}$$

Если ввести вспомогательные неизвестные числа φ_s и ν_s, то задачу (10)—(11) можно свести к изучению следующих двух подзадач

$$\begin{cases}-tu_s''(t)+s^2u_s(t)+M^1[u_s]=f_s(t), & t\in(0,T),\\ u_s(T)=\mu_0\varphi_s,\ D_t^1u_s(T)=\mu_1\nu_s, & s\in\mathscr{S};\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}-tu_s''(t)+s^2u_s(t)+M^2[u_s]=f_s(t), & t\in(-T,0),\\ u_s(-T)=\varphi_s,\ D_t^1u_s(-T)=\nu_s, & s\in\mathscr{S},\end{cases} \tag{13}$$

где

$$M^1[u_s]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_s(t_k),\quad M^2[u_s]=\sum_{k=m+1}^{M}\alpha_k u_s(t_k). \tag{14}$$

Используя функции Коши $\eta_s^j(t,\tau),\ j=1,2,$ (5) и (6), решения задач (12), (13) можно представить соответственно в виде

$$\begin{aligned}u_s^1(t) &= \varphi_s\cdot\mu_0\left[-D_\tau^1\eta_s^1(t,\tau)\right]_{|\tau=T}+\nu_s\cdot\mu_1\cdot\eta_s^1(t,T)-\\ &- M^1[u_s]\cdot\int\limits_t^T\frac{1}{\tau}\cdot\eta_s^1(t,\tau)d\tau+\int\limits_t^T\eta_s^1(t,\tau)\cdot\frac{f_s^1(\tau)}{\tau}d\tau, \end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}u_s^2(t) &= \varphi_s\cdot\left[-D_\tau^1\eta_s^2(t,\tau)\right]_{|\tau=-T}+\nu_s\cdot\eta_s^2(t,-T)+\\ &+ M^2[u_s]\cdot\int\limits_{-T}^t\frac{1}{\tau}\cdot\eta_s^2(t,\tau)d\tau-\int\limits_{-T}^t\eta_s^2(t,\tau)\cdot\frac{f_s^2(\tau)}{\tau}d\tau. \end{aligned}\tag{16}$$

Вычислим коэффициенты при $M^1[u_s]$ и $M^2[u_s]$. Имеем

1^0. $$\int\limits_t^T\frac{1}{\tau}\eta_s^1(t,\tau)d\tau=2\sqrt{t}\int\limits_t^T\left[I_1(2s\sqrt{t})\cdot K_1(2s\sqrt{\tau})-I_1(2s\sqrt{\tau})\cdot K_1(2s\sqrt{t})\right]\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\tau}}{s}\int\limits_{2s\sqrt{t}}^{2s\sqrt{\tau}}\left[I_1(2s\sqrt{t})\cdot K_1(y)-I_1(y)\cdot K_1(2s\sqrt{t})\right]dy=$$

$$=-\frac{2\sqrt{t}}{s}\left\{I_1(2s\sqrt{t})\left[K_0(2s\sqrt{T})-K_0(2s\sqrt{t})\right]+K_1(2s\sqrt{t})\cdot\left[I_0(2s\sqrt{\tau})-I_0(2s\sqrt{t})\right]\right\}=$$

$$= -\frac{2\sqrt{t}}{s}\left\{\left[I_1(2s\sqrt{t})\cdot K_0(2s\sqrt{T})+K_1(2s\sqrt{t})\cdot I_0(2s\sqrt{T})\right]-\left[I_1(2s\sqrt{t})\cdot K_0(2s\sqrt{t})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ K_1(2s\sqrt{t})\cdot I_0(2s\sqrt{t})\right]\right\} = \frac{1}{s^2}D^1_\tau\eta^1_s(t,\tau)_{|\tau=T}+\frac{1}{s^2};$$

2^0. $$\int\limits_{-T}^{t}\frac{1}{\tau}\eta^2_s(t,\tau)d\tau = \pi\sqrt{-t}\int\limits_{-T}^{t}\left[J_1(-2s\sqrt{-t})N_1(-2s\sqrt{-\tau})-\right.$$

$$\left.-J_1(-2s\sqrt{-\tau})N_1(-2s\sqrt{-t})\right]\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} =$$

$$= \frac{\pi\cdot\sqrt{-t}}{s}\int\limits_{-2s\sqrt{T}}^{-2s\sqrt{-t}}\left[J_1(-2s\sqrt{-t})\cdot N_1(y)-J_1(y)\cdot N_1(-2s\sqrt{-t})\right]dy =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{-t}}{s}\left\{J_1(-2s\sqrt{-t})\left[N_0(-2s\sqrt{-t})-N_0(-2s\sqrt{T})\right]-\right.$$

$$\left.-\ N_1(-2s\sqrt{-t})\left[J_0(-2s\sqrt{-t})-J_0(-2s\sqrt{T})\right]\right\} =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{-t}}{s}\left\{\left[J_1(-2s\sqrt{-t})N_0(-2s\sqrt{-t})-J_0(-2s\sqrt{-t})N_1(-2s\sqrt{-t})\right]-\right.$$

$$\left.-\left[J_1(-2s\sqrt{-t})N_0(-2s\sqrt{T})-J_0(-2s\sqrt{T})N_1(-2s\sqrt{-t})\right]\right\} = -\frac{\pi\sqrt{-t}}{s}\frac{2}{-2s\sqrt{-t}\pi}+$$

$$+\frac{s\pi\sqrt{-t}}{s^2}\left[J_1(-2s\sqrt{-t})\cdot N_0(-2s\sqrt{T})-J_0(-2s\sqrt{T})N_1(-2s\sqrt{-t})\right] = \frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}D_\tau\eta^2_s(t,\tau)_{|\tau=-T}.$$

Здесь соответственно для 1^0 и 2^0 использованы следующие замены и преобразования:
$2s\sqrt{\tau}=y,\ \dfrac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=\dfrac{dy}{s},\ I_0'(z)=I_1(z),\ K_0'(z)=-K_1(z),\ I_\nu(z)K_{\nu+1}(z)+I_{\nu+1}(z)K_\nu(z)=\dfrac{1}{z};$
$-2s\sqrt{-\tau}=y,\ \dfrac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}=\dfrac{dy}{s},\ N_0'(z)=-N_1(z),\ J_0'(z)=-J_1(z),$
$J_\nu(z)N_{\nu+1}(z)-J_{\nu+1}(z)N_\nu(z)=-\dfrac{2}{\pi z}.$

С учетом соотношений $1^0,\ 2^0$ представления решений (15), (16) задач (12), (13) принимают вид

$$\begin{aligned} u^1_s(t) &= -\varphi_s\mu_0 D^1_s\eta^1_s(t,\tau)_{|\tau=T}+\nu_s\mu_1\eta^1_s(t,T)-\\ &- M^1[u^1_s]\left[D^1_\tau\eta^1_s(t,\tau)_{|\tau=T}+1\right]\frac{1}{s^2}+\int\limits_{\tau}^{T}\eta^1_s(t,\tau)\frac{f^1_s(\tau)}{\tau}d\tau, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} u^2_s(t) &= -\varphi_s D^1_s\eta^2_s(t,\tau)_{|\tau=-T}+\nu_s\eta^2_s(t,-T)+\\ &+ M^2[u^2_s]\left[D^1_\tau\eta^2_s(t,\tau)_{|\tau=-T}+1\right]\frac{1}{s^2}-\int\limits_{-T}^{t}\eta^2_s(t,\tau)\frac{f_s(\tau)}{\tau}d\tau. \end{aligned} \tag{18}$$

Для нахождения неизвестных величин $\varphi_s,\ \nu_s,\ M^1[u^1_s],\ M^2[u^2_s]$ используем условия сопряжения (3)

$$u^1_s(0+)=u^2_s(0-),\quad \lim_{t\to0+}\frac{D^1_t u^1_s(t)}{\ln t}=\lim_{t\to0-}\frac{D^1_t u^2_s(t)}{\ln(-t)}.$$

Найдем выражение для $u_s^1(0+)$:

$$u_s^1(0+) = -\varphi_s \cdot \mu_0 \cdot D_\tau \eta_s^1(0,\tau)_{|\tau=T} + \nu_s \cdot \mu_1 \eta_s^1(0,T) -$$

$$-\frac{1}{s^2} \cdot M^1[u_s^1] \cdot \left[D_\tau^1 \eta_s^1(0,\tau)_{|\tau=T} + 1\right] + \int\limits_0^T \eta_s^1(0,\tau) \frac{f_s^1(\tau)}{\tau} d\tau.$$

В этом выражении вычислим значения коэффициентов в каждом слагаемом через данные исходной задачи. Так как $I_1(x) \cong x$ и $K_1(x) \cong \frac{1}{x}$ при $x \to 0$ (это справедливо в силу свойств цилиндрических функций), то

$$D_\tau^1 \eta_s^1(t,\tau)_{|\tau=T,t=0} = \left\{-s \cdot 2\sqrt{t}[I_1(2s\sqrt{t}) \cdot K_0(2s\sqrt{T}) + I_0(2s\sqrt{T}) K_1(2s\sqrt{t})\right\}_{|t=0} = -I_0(2s\sqrt{T}),$$

$$\eta_s^1(0,T) = 2\sqrt{T} \cdot \sqrt{t} \cdot \left[I_1(2s\sqrt{t}) \cdot K_1(2s\sqrt{T}) - I_1(2s\sqrt{T}) \cdot K_1(2s\sqrt{t})\right]_{|t=0} = -\frac{\sqrt{T}}{s} I_1(2s\sqrt{T}),$$

$$\left[D_\tau^1 \eta_s^1(t,\tau)\right]_{|\tau=T,t=0} + 1 = -I_0(2s\sqrt{T}) + 1,$$

$$\int\limits_0^T \eta_s^1(0,\tau) \frac{f_s^1(\tau)}{\tau} d\tau = \int\limits_0^T 2\sqrt{\tau t}\left[I_1(2s\sqrt{t}) K_1(2s\sqrt{\tau}) - I_1(2s\sqrt{\tau}) \cdot K_1(2s\sqrt{t})\right]_{|t=0} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{s} \int\limits_0^T I_1(2s\sqrt{\tau}) \cdot \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau.$$

Таким образом, для случая $t \to 0+$ получаем

$$\begin{aligned} u_s^1(0+) \;&=\; \varphi_s \cdot \mu_0 \cdot I_0(2s\sqrt{T}) - \nu_s \mu_1 \frac{\sqrt{T}}{s} I_1(2s\sqrt{T}) + \frac{1}{s^2}\left[I_0(2s\,\sqrt{T}) - 1\right] M_s^1[u_s^1] - \\ &-\; \frac{1}{s} \int\limits_0^T I_1(2s\sqrt{\tau}) \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Далее поступим аналогично предыдущему случаю. Для соответствующих коэффициентов с учетом свойств цилиндрических функций $N_1(z) \cong -\frac{2}{\pi x},\ x \to 0$ имеем

$$D_\tau^1 \eta_s^2(0-,\tau)_{|\tau=-T} = s\pi\sqrt{-t}\left[J_1(-2s\sqrt{-t}) N_0(-2s\sqrt{T}) - J_0(-2s\sqrt{T}) N_1(-2s\sqrt{-t})\right] =$$

$$= -J_0(-2s\sqrt{T}),$$

$$\eta_s^2(0-,\tau)_{|\tau=-T} = \pi\sqrt{T}\sqrt{-t}\left[J_1(-2s\sqrt{-t}) N_1(-2s\sqrt{T}) - J_1(-2s\sqrt{T}) N_1(-2s\sqrt{-t})\right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{T}}{s} J_1(-2s\sqrt{T}),$$

$$D_\tau^1 \eta_s^2(0-,\tau)_{|\tau=-T} + 1 = -J_0(-2s\sqrt{T}) + 1,$$

$$\int\limits_{-T}^0 \eta_s^2(0-,\tau) \frac{f_s(\tau)}{\tau} d\tau = -\frac{1}{s} \int\limits_{-T}^0 J_1(-2s\sqrt{-\tau}) \frac{f_s(\tau)}{\sqrt{-\tau}} d\tau.$$

Таким образом, для случая $t \to 0-$ получаем:

$$\begin{aligned} u_s^2(0-) &= \varphi_s J_0(-2s\sqrt{T}) - \nu_s \frac{\sqrt{T}}{s} J_1(-2s\sqrt{T}) + \frac{1}{s^2}\left[1 - J_0(-2s\sqrt{T})\right] M^2[u_s^2] + \\ &+ \frac{1}{s}\int\limits_{-T}^{0} J_1(-2s\sqrt{-\tau})\frac{f_s(\tau)}{\sqrt{-\tau}}d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

Запишем первое условие сопряжения (условие непрерывности решения на линии параболического вырождения) из (3) $u_s^1(0+) = u_s^2(0-)$. Имеем

$$\begin{aligned} &\left[J_0(-2s\sqrt{T}) - \mu_0 \cdot I_0(2s\sqrt{T})\right]\varphi_s - \frac{\sqrt{T}\left[J_1(-2s\sqrt{T}) - \mu_1 I_1(2s\sqrt{T})\right]}{s}\nu_s + \\ &+ \frac{1 - I_0(2s\sqrt{T})}{s^2}M^1[u_s^1] + \frac{1 - J_0(2s\sqrt{T})}{s^2}M^2[u_s^2] = \\ &= \Psi_s^1 \equiv \int\limits_{-T}^{0} J_1(-2s\sqrt{-\tau})\cdot\frac{f_s(\tau)}{s\sqrt{-\tau}}d\tau + \int\limits_{0}^{T} I_1(2s\sqrt{\tau})\frac{f_s(\tau)}{s\sqrt{\tau}}d\tau. \end{aligned} \tag{21}$$

Для второго условия сопряжения из (3) продифференцируем равенства (17), (18) по t, разделим каждое слагаемое на $\ln t$ и $\ln(-t)$, соответственно, и вычислим $\lim\limits_{t\to\pm 0}$ каждого слагаемого в отдельности.

Так как $\{\sqrt{t}\cdot K_1(2s\sqrt{t})\}' = -s\cdot K_0(2s\sqrt{t}),\ (\sqrt{t}\cdot I_1(2s\sqrt{t}))' = s\cdot I_0(2s\sqrt{t})$, то для соответствующих слагаемых $u_s^1(t)$ формулы (17) будем иметь

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln t}\frac{d}{dt}\left[D_\tau^1\eta_s^1(t,\tau)_{|\tau=T}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln t}\frac{d}{dt}\left\{-s\cdot 2\sqrt{t}\left[I_1(2s\sqrt{t})\cdot K_0(2s\sqrt{T}) + I_0(2s\sqrt{T})K_1(2s\sqrt{t})\right]\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln t}(-s^2\cdot 2)\left[I_0(2s\sqrt{t})\cdot K_0(2s\sqrt{T}) - I_0(2s\sqrt{T})\cdot K_0(2s\sqrt{t})\right] =$$

$$= 2s^2\cdot I_0(2s\sqrt{T})\lim_{t\to 0}\frac{K_0(2s\sqrt{t})}{\ln t} = 2s^2\cdot I_0(2s\sqrt{T})\lim_{t\to 0}\frac{-s/\sqrt{t}\cdot K_1(2s\sqrt{t})}{\frac{1}{t}} = -s^2\cdot I_0(2s\sqrt{T});$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln t}\frac{d}{dt}\left[\eta_s^1(t,T)\right] = \frac{1}{\ln t}\frac{d}{dt}\left\{2\sqrt{T}\cdot\sqrt{t}[I_1(2s\sqrt{t})\cdot K_1(2s\sqrt{T}) - I_1(2s\sqrt{T})\cdot K_1(2s\sqrt{t})]\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0} s\cdot 2\sqrt{T}\cdot\frac{1}{\ln t}\left[I_0(2s\sqrt{t})K_1(2s\sqrt{T}) + I_1(2s\sqrt{T})K_0(2s\sqrt{t})\right] = s\cdot 2\sqrt{T}\cdot I_1(2s\sqrt{T})\cdot(-\frac{1}{2}) =$$

$$= -s\sqrt{T}\cdot I_1(2s\sqrt{T});$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln t}\frac{d}{dt}\left[D_\tau^1\eta_s^1(t,\tau)_{|\tau=T} + 1\right] = -s^2\cdot I_0(2s\sqrt{T});$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \eta_s^1(t,\tau)\frac{f_s^1(\tau)}{\tau}d\tau = \lim_{t\to 0}\int\limits_t^T s\cdot 2\sqrt{\tau}\frac{1}{\ln t}[I_0(t)\cdot K_1(\tau) + I_1(\tau)\cdot K_0(t)]\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau =$$

$$= -s\int\limits_0^T \frac{f_s^1(\tau)}{\sqrt{\tau}}I_1(2s\sqrt{\tau})d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{t\to 0+}\frac{D_t^1 u_s^1(t)}{\ln t}=\varphi_s\mu_0 s^2 I_0(2s\sqrt{T})-\nu_s\mu_1 s\sqrt{T}I_1(2s\sqrt{T})+M^1[u_s^1]I_0(2s\sqrt{T})-s\int\limits_0^T I_1(2s\sqrt{\tau})\frac{f_s^1(\tau)}{\sqrt{\tau}}d\tau. \tag{22}$$

Аналогично для $u_s^2(t)$ имеем

$$\lim_{t\to 0-}\frac{1}{\ln t}\frac{d}{dt}[D_\tau^1\eta_s^2(t,\tau)_{|\tau=-T}]=\lim_{t\to 0-}\frac{1}{\ln t}\left\{s\cdot\pi\sqrt{-t}\left[J_1(-2s\sqrt{-t})N_0(T)-J_0(T)N_1(-2s\sqrt{-t})\right]\right\}'=$$

$$=\lim_{t\to 0-}s^2\pi\frac{1}{\ln(-t)}\left[J_0(-2s\sqrt{-t})N_0(T)-J_0(T)N_0(-2s\sqrt{-t})\right]=-s^2\pi\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{s}{\sqrt{-t}}N_1(-2s\sqrt{-t})}{\dfrac{1}{t}}J_0=$$

$$=-s^2J_0(T)\lim_{t\to 0-}\pi\frac{\dfrac{s}{\sqrt{-t}}\cdot\dfrac{-2}{2s\sqrt{-t}\pi}}{\dfrac{1}{t}}=-s^2J_0(-2s\sqrt{T});$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{1}{\ln(-t)}\frac{d}{dt}[\eta_s^2(t,-T)]=\lim_{t\to 0-}\frac{s\pi\sqrt{T}\left[J_0(t)N_1(T)-J_1(T)N_0(-2s\sqrt{-t})\right]}{\ln(-t)}=-s\sqrt{T}J_1(-2s\sqrt{T});$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{1}{\ln(-t)}\frac{d}{dt}\left[D_\tau^1\eta_s^2(t,\tau)_{|\tau=-T}+1\right]=-s^2J_0(-2s\sqrt{T});$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{1}{\ln(-t)}\frac{d}{dt}\int\limits_{-T}^{t}\eta_s^2(t,\tau)\frac{f_s^2(\tau)}{\tau}d\tau=-s\int\limits_{-T}^{0}J_1(-2s\sqrt{-\tau})\frac{f_s^2(\tau)}{\sqrt{-\tau}}d\tau.$$

Таким образом, мы получаем

$$\lim_{t\to 0-}\frac{D_t^1u_s^2(t)}{\ln(-t)}=\varphi_s\cdot s^2J_0(-2s\sqrt{T})-\nu_s\cdot s\cdot\sqrt{T}J_1(-2s\sqrt{T})-$$
$$-M^2[u_s^2]\cdot J_0(-2s\sqrt{T})+s\int\limits_{-T}^{0}J_1(-2s\sqrt{-\tau})\frac{f_s^2(\tau)}{\sqrt{-\tau}}d\tau. \tag{23}$$

Из второго условия сопряжения из (3) с учетом (22) и (23) непосредственно следует, что

$$s^2\left[J_0(-2s\sqrt{T})-\mu_0I_0(2s\sqrt{T})\right]\varphi_s-s\sqrt{T}\left[J_1(-2s\sqrt{T})-\mu_1I_1(2s\sqrt{T})\right]\nu_s-$$
$$-I_0(2s\sqrt{T})M^1[u_s^1]-J_0(-2s\sqrt{T})M^2[u_s^2]=\Psi_s^2\equiv-s\int\limits_{-T}^{0}J_1(-\tau)\frac{f_s(\tau)}{\sqrt{-\tau}}d\tau-s\int\limits_0^T I_1(\tau)\frac{f_s(\tau)}{\sqrt{\tau}}d\tau. \tag{24}$$

Далее, в представлениях решений $u_s^1(t)$ (17) и $u_s^2(t)$ (18) примем $t=t_k$, умножим затем обе части (все слагаемые) на соответствующие множители α_k и просуммируем по k, соответственно, от 1 до m и от $m+1$ до M. В результате получим

$$\mu_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot D_\tau^1 \eta_s^1(t_k,\tau)_{|\tau=T}\varphi_s - \mu_1 \cdot \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \eta_s^1(t_k,T)\nu_s \quad + \quad \delta_s^1 \cdot \frac{1}{s^2} M^1[u_s^1] =$$

$$= \Psi_s^3 \equiv \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int\limits_{t_k}^{T} \eta_s^1(t_k,\tau) \cdot \frac{f_s^1(\tau)}{\tau} d\tau, \tag{25}$$

$$\sum_{k=m+1}^{M} \alpha_k \cdot D_\tau^1 \eta_s^2(t_k,\tau)_{|\tau=-T}\varphi_s - \sum_{k=m+1}^{M} \alpha_k \cdot \eta_s^2(t_k,-T)\nu_s \quad + \quad \delta_s^2 \cdot \frac{1}{s^2} M^2[u_s^2] =$$

$$= \Psi_s^4 \equiv - \sum_{k=m+1}^{M} \alpha_k \int\limits_{-T}^{t_k} \eta_s^2(t_k,\tau) \cdot \frac{f_s^2(\tau)}{\tau} d\tau. \tag{26}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных φ_s, ν_s, M^1, M^2 получаем систему алгебраических уравнений (21), (24), (25), (26). Составим матрицу (7) коэффициентов этой системы

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} J_0 - \mu_0 \cdot I_0 & \frac{\sqrt{T}}{s}[-J_1 + \mu_1 I_1] & -s^{-2}[I_0 - 1] & s^{-2}[1 - J_0] \\ s^2[J_0 - \mu_0 I_0] & s\sqrt{T}[-J_1 + \mu_1 I_1] & -I_0 & -J_0 \\ \mu_0 \sum\limits_1^m \alpha_k D_\tau^1 \eta_s^1(t_k,\tau)_{|\tau=T} & -\mu_1 \sum\limits_1^m \alpha_k \eta_s^1(t_k,T) & s^{-2}\delta_s^1 & 0 \\ \sum\limits_{m+1}^M \alpha_k D_\tau^1 \eta_s^2(t_k.\tau)_{|\tau=-T} & -\sum\limits_{m+1}^M \alpha_k \eta_s^2(t_k,-T) & 0 & s^{-2}\delta_s^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & s^{-2} & s^{-2} \\ s^2(J_0 - \mu_0 I_0) & s\sqrt{T}(-J_1 + \mu_1 I_1) & -I_0 & -J_0 \\ \mu_0 \sum\limits_1^m \alpha_k D_\tau^1 \eta_s^1(t_k,\tau)_{|\tau=T} & -\mu_1 \sum\limits_1^m \alpha_k \eta_s^1(t_k,T) & s^{-2}\delta_s^1 & 0 \\ \sum\limits_{m+1}^M \alpha_k D_\tau^1 \eta_s^2(t_k,\tau)_{|\tau=-T} & -\sum\limits_{m+1}^M \alpha_k \eta_s^2(t_k,-T) & 0 & s^{-2}\delta_s^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$J_0 = J_0(-2s\sqrt{T}),\ I_0 = I_0(2s\sqrt{T}),\ J_1 = J_1(-2s\sqrt{T}),\ I_1 = I_1(2s\sqrt{T}).$$

Отсюда непосредственно мы получаем критерий однозначной разрешимости системы (21), (24), (25) и (26): $|\Delta_s| \neq 0\ \forall s \in \mathscr{S}$, совпадающий с условием теоремы (8).

Теперь из системы уравнений (21), (24), (25), (26) определим неизвестные величины φ_s, ν_s, M^1, M^2 по формулам

$$\varphi_s = \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|},\ \nu_s = \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|},\ M^1[u_s^1] = \frac{|\Delta_{M^1[u_s^1]}|}{|\Delta_s|},\ M^2[u_s] = \frac{|\Delta_{M^2[u_s^2]}|}{|\Delta_s|} \quad \forall s \in \mathscr{S}, \tag{27}$$

где, как обычно, матрицы Δ_{φ_s}, Δ_{ν_s}, $\Delta_{M^1[u_s^1]}$, $\Delta_{M^2[u_s^2]}$ получаются из матрицы Δ_s заменой соответствующих столбцов элементами Ψ_s^1, Ψ_s^2, Ψ_s^3, Ψ_s^4.

Далее, подставляя (27) в (17) и (18), получаем

$$\begin{aligned} u_s^1(t) &= -\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}\mu_0 D_s^1\eta_s^1(t,\tau)_{|\tau=T} + \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}\mu_1\eta_s^1(t,T) - \\ &- \frac{|\Delta_{M^1[u_s^1]}|}{|\Delta_s|}\left[D_\tau^1\eta_s^1(t,\tau)_{|\tau=T}+1\right]\frac{1}{s^2} + \int\limits_\tau^T \eta_s^1(t,\tau)\frac{f_s^1(\tau)}{\tau}d\tau,\ t\in(0,T), \qquad (28) \\ u_s^2(t) &= -\frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|} D_s^1\eta_s^2(t,\tau)_{|\tau=-T} + \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}\eta_s^2(t,-T) + \\ &+ \frac{|\Delta_{M^2[u_s^2]}|}{|\Delta_s|}[D_\tau^1\eta_s^2(t,\tau)_{|\tau=-T}+1]\frac{1}{s^2} - \int\limits_{-T}^t \eta_s^2(t,\tau)\frac{f_s(\tau)}{\tau}d\tau,\ t\in(-T,0). \qquad (29) \end{aligned}$$

Таким образом, нами установлена следующая

Лемма 1. *Каждая из граничных задач (12) и (13), а значит, и граничных задач (10)—(11) при условиях теоремы 1 (8) и при любых непрерывных функциях $f_s^1(t)$, $f_s^2(t)$, $s\in\mathscr{S}$, имеет единственное классическое решение $u_s^1(t)$, $u_s^2(t)$, $s\in\mathscr{S}$. Эти решения выражаются формулами (28) и (29).*

Далее, аналогично как в работе [5] устанавливаются равномерные по $s\in\mathscr{S}$ априорные оценки для решений (28) и (29) задач (12) и (13), т.е. оценки вида

$$\|u_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} \le C_1\|f_s^1(t)\|_{L_2(0,T)} \quad \forall s\in\mathscr{S},$$

$$\|u_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)} \le C_2\|f_s^2(t)\|_{L_2(-T,0)} \quad \forall s\in\mathscr{S},$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от s. Значит, и для решений задач (10)—(11) справедлива оценка

$$\|u_s(t)\|_{L_2(-T,T)} \le C\|f_s(t)\|_{L_2(-T,T)} \quad \forall s\in\mathscr{S},$$

где постоянная C не зависят от s. Теперь доказательство теоремы 1 завершается применением аналога леммы 1 из [6, с.118], сформулированной для нашего случая в работе [7].

Цитированная литература

1. **Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л.Э.** Математические основы теории управляемых систем. М., 1969.
2. **Лаврентьв М. А., Бицадзе А. В.** // ДАН СССР. 1950. Т. 70, № 3. С. 373 — 376.
3. **Кароль И. Л.** // Вестн.ЛГУ. Сер.Матем.,мех.,астр. 1956. Т. 1, № 1. С. 177 — 181.
4. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.
5. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Докл.АМАН. 2003. Т. 6, № 2. С. 35 — 39.
6. **Дезин А. А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
7. **Рамазанов М. И.** // Математический журнал. 2002. Т. 2, № 4(6). С. 75 — 81.

Поступила в редакцию 19.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 36 — 38*

УДК 510.6

ОПРЕДЕЛИМАЯ СЛОЖНОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

П. Т. Досанбай

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
480012 Алматы, Масанчи 49/37 dosant@kazsu.kz

В работе приводится новое доказательство результата И. Кореца о том, что арифметическая структура с отношениями соседства и делимости является определимо сложнейшей. Кроме того, здесь доказывается более сильный результат о том, что арифметическая структура с отношениями соседства и относительной делимости также является определимо сложнейшей.

Джулия Робинсон показала, что на натуральных числах операции сложения и умножения можно элементарно выразить через функцию следования и отношение делимости [1]. Это означает, что вместе с функцией следования отношение делимости может рассматриваться как первичное, базисное понятие арифметики. В работе Ивана Кореца было доказано, что арифметическая структура с отношениями соседства и делимости является определимо сложнейшей [2]. Мы передокажем этот результат И.Кореца и обобщим его на случай арифметической структуры с отношениями соседства и относительной делимости.

Сначала напомним необходимые определения и обозначения. Пусть $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел. Структура $\langle N,\ \sigma\rangle$ называется *арифметической структурой,* если отношения, функции и константы сигнатуры σ определимы (на языке логики первого порядка) через сложение и умножение. Арифметическая структура называется *определимо сложнейшей,* если в ней элементарно выразимы операции сложения и умножения. Отношение соседства определяется через функцию следования следующим образом: $S(a, b) \leftrightharpoons a = s(b) \vee b = s(a)$. Отношение делимости $|$ определяет на натуральных числах частичный линейный порядок (мы пишем $m|n$, если m делит n). Мы говорим, что числа m и n *сравнимы по делимости* и пишем mEn, если m делит n или n делит m , т.е.

$$xEy \leftrightharpoons x|y \vee y|x.$$

Для удобства мы будем иногда E называть отношением относительной делимости, а когда это ясно из контекста, о данном отношении мы будем говорить просто "сравнимость".

Сначала для арифметической структуры $\mathfrak{M} = \langle N;\ S,\ |\rangle$, где $|$ – обычное отношение деления на множестве натуральных чисел, докажем следующую лемму.

Keywords: *arithmetical structure, definable relation and function, definable strongest structure*
2000 Mathematics Subject Classification: 82B80

Лемма 1. *Пусть p – простое число. Тогда для натуральных чисел α и β следующие условия эквивалентны:*
i) (α делит β) или ($p = 2$ и $\alpha = 2$ и $p^\beta \neq 1$);
ii) сосед p^α делит соседа p^β, т. е. выполняется следующее предложение: $\exists x \exists y (S(p^\alpha, x) \wedge S(p^\beta, y) \wedge x|y)$.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидно.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть сосед p^α делит соседа p^β. Можно считать $\beta \neq 0$ и $\alpha < \beta$, так как $\alpha > \beta$ влечет $(p^\alpha - 1) = (p^\beta + 1)$, откуда $p = 2$, $\alpha = 2$ и $\beta = 1$.

Необходимо рассмотреть следующие возможности:
1. $(p^\alpha - 1)|(p^\beta - 1)$;
2. $(p^\alpha - 1)|(p^\beta + 1)$;
3. $(p^\alpha + 1)|(p^\beta - 1)$;
4. $(p^\alpha + 1)|(p^\beta + 1)$.

Случай 1 является следствием известного факта: $(p^m - 1, p^n - 1) = p^{(m,n)} - 1$.

Случай 2. Так как $\beta > \alpha$, то существуют такие $q, r \in N$, что

$$\beta = \alpha q + r,\ 0 \leq r < \alpha. \qquad (*)$$

Тогда из $(p^\alpha - 1)|(p^\beta + 1)$ и равенства $(p^\beta + 1) = p^r(p^{\alpha q} - 1) + p^r + 1$ следует, что $(p^\alpha - 1)|(p^r + 1)$, а это возможно только при $p = 2, \alpha = 2$ и $r = 1$.

Случай 3. Пусть в представлении (*) число q – четное и $q = 2k$ для некоторого $k \in N$. Тогда $p^\beta - 1 = p^{\alpha q + r} - 1 = ((p^{2k\alpha + r} + p^{(2k-1)\alpha + r}) - (p^{(2k-1)\alpha + r} + p^{(2k-2)\alpha + r}) + \ldots - (p^{\alpha + r} + p^r) + p^r - 1$, то есть $(p^\alpha + 1)|(p^r - 1)$, что невозможно.

При $q = 2k + 1$ имеем $p^\beta - 1 = p^{\alpha q + r} - 1 = ((p^{(2k+1)\alpha + r} + p^{2k\alpha + r}) - (p^{2k\alpha + r} + p^{(2k-1)\alpha + r}) + + \ldots + (p^{\alpha + r} + p^r) - (p^r + 1)$ т. е. $(p^\alpha + 1)|(p^r - 1)$. Тогда $r = 0$ и $\alpha|\beta$.

Случай 4. $(p^\alpha + 1)|(p^\beta + 1)$. Если в (*) q – четное, то рассуждение, приведенное для случая 3, проходит и для этого случая. При нечетном q имеем $p^\beta + 1 = p^{\alpha q + r} + p^r - p^r + 1 = p^r(p^{\alpha q} + + 1) - (p^r - 1)$, откуда $(p^\alpha + 1)|(p^r - 1)$. Тогда $r = 0$, т. е. $\alpha|\beta$.

Определимость отношений в арифметических структурах.

Прежде всего отметим экстенциональность отношения $|$

$$x = y \leftrightharpoons (x|y \wedge y|z).$$

Поэтому в записях формул мы можем использовать символ равенства, так как равенство элементов выражается через $|$. Мы можем также применять константы в формулах, так как в языке логики первого порядка каждое натуральное число выделяется с помощью отношения соседства S.

Зафиксируем простое число p. Рассмотрим $N_p = \{p^n : n \in N\}$. В дальнейшем для удобства будем обозначать p^n через $\bar{n}$. Очевидно, множество N_p определимо в $\mathfrak{M}$. На этом множестве естественным образом определяется отношение порядка $\bar{m} < \bar{n}$, если $\bar{m}|\bar{n}$, а значит, определяется и функция следования. Используя лемму 1, на N_p можно определить и отношение $\bar{m}\bar{|}\bar{n}$ делимости степеней (т. е. делимость n на m) следующим образом:

а) формулой $\exists x \exists y (S(\bar{m}, x) \wedge S(\bar{n}, y) \wedge (x|y))$ для $p > 2$;

б) формулой $\bar{n} = 1 \vee (\bar{n} \neq 1 \wedge \bar{m} = 4 \wedge \exists x (S(\bar{n}, x) \wedge 5|x)) \vee (\bar{n} \neq 1 \wedge \bar{m} \neq 4 \wedge (\exists x \exists y (S(\bar{m}, x) \wedge S(\bar{n}, y) \wedge x|y))$ для $p = 2$.

Таким образом, согласно [1] на N_p можно униформно определить сумму (и произведение) степеней простого числа p. Более точно, существует формула $\varphi(x, y, z, t)$ такая, что a, b, c, p удовлетворяют этой формуле тогда и только тогда, когда p – простое число и элементы $a, b, c \in \in N_p$ удовлетворяют соотношению $a = \bar{m}, b = \bar{n}, c = \overline{m + n}$ для некоторых m, n.

Как следствие на структуре $\mathfrak{M}$ определяется умножение $x \cdot y = z$ тогда и только тогда, когда для любого простого p верно "если a – наибольшая степень, делящая x, b – наибольшая степень, делящая y, и c – наибольшая степень, делящая z, то $\varphi(a, b, c, p)$".

Теперь, с помощью формулы Дж. Робинсон (она определяет сложение, когда S – функция следования)

$$S(a \cdot b) \cdot S(b \cdot c) = S[(c \cdot c) \cdot S(a \cdot b)]$$

определяем отношение $I(a, b, c) \leftrightharpoons (a + b = c \vee |a - b| = c))$.

Далее мы определяем сумму квадратов

$$z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \forall t(I(x, y, t) \leftrightarrow I(z, 2xy, t^2)$$

и сумму четырех квадратов

$$t = x^2 + y^2 + u^2 + z^2 \Leftrightarrow (x = y \wedge u = z \wedge t = 2(x^2 + u^2)) \vee ((x \neq y \vee u \neq z) \wedge \exists a \exists b \exists c \exists d (I(x, y, a) \wedge$$

$I(x, y, c) \wedge I(u, z, b) \wedge I(u, z, d) \wedge I(a^2 + b^2, c^2 + d^2, 2t) \wedge \neg I(2xy, 2uz, t)))$.

По известной теореме Лагранжа каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Квадрат нечетного числа всегда равен 1 по модулю 4, что позволяет формульно выделить все классы вычетов по модулю 4. Это, в свою очередь, позволяет определить функцию следования через отношение соседства. Тогда по теореме Дж. Робинсон структура $\mathfrak{M}$ является определимо сложнейшей.

В качестве следствия приведем еще одну определимо сложнейшую структуру $\mathfrak{N} = \langle N;\, S,\, E \rangle$. Как показано в [4], следующие отношения выразимы в $\mathfrak{N}$:

"x – положительная степень простого числа" $\Leftrightarrow \Pi(x) \leftrightharpoons x \neq 1 \wedge \exists y(y \neq x \wedge \forall z(yEz \to xEz))$;

"x – составное число, свободное от квадратов" $\Leftrightarrow \Sigma(x) \leftrightharpoons \neg\Pi(x) \wedge \forall y \forall z(xEy \wedge xEz \wedge yEz \wedge \Pi(y) \wedge \Pi(z) \to y = z)$;

"x – простое число" $\Leftrightarrow \pi(x) \leftrightharpoons \Pi(x) \wedge \exists y(\Sigma(y) \wedge xEy)$.

Кратное m числа n назовем *существенным*, если m делится на некоторое простое число, на которое не делится n. Очевидно, y является существенным кратным x тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{N}$ истинна формула

$$\Delta(x, y) \leftrightharpoons xEy \wedge \exists z(\pi(z) \wedge yEz \wedge \neg zEx).$$

И, наконец, определимо отношение делимости

"x делит y" $\Leftrightarrow xEy \wedge \forall z(\Delta(y, z) \to xEz)$.

Цитированная литература

1. **Robinson J.** // Journ. Symb. Logic. 1961. V.14 P. 98—114.

2. **Korec I.** A list of arithmetical structures strongest with respect to the first order definability. Preprint 33/1996 of Math. Inst. Slovak Acad. Sci. Bratislava.

3. **Poizat B.** Cours de Théorie des Modèles. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah. 1985.

4. **Досанбай П.Т.** //Вестник КазНУ. Серия математика. 2002. № 2. С.18—23.

Поступила в редакцию 18.07.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 39 – 42*

УДК 531.01+539.3

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

А. К. Егоров, У. Д. Ершибаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
г. Алматы

Рассмотрена модель Земли в виде однородного упругого шара из несжимаемого материала постоянной плотности. Для класса C_1 свободных колебаний, называемых крутильными,получены общие решения системы дифференциальных уравнений в перемещениях. С учетом нулевых граничных условий в напряжениях в рассматриваемом случае, получено характеристическое уравнение для определения частот свободных крутильных колебаний упругой однородной модели Земли.

Рассмотрим модель Земли в виде однородного упругого шара радиуса r_0 из несжимаемого материала с модулем сдвига G и плотностью $\rho_{1.}$ Обратимся к классу свободных колебаний Земли, называемых крутильными [1].

Уравнения динамических крутильных колебаний, записанные для возмущений перемещений в сферической системе координат r, θ, λ, имеют вид

$$r^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u_2}{\partial r} + \rho_1 f^2 u_2 \frac{r^2}{G} = \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial \chi}{\partial \lambda},$$

$$r^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u_3}{\partial r} + \rho_1 f^2 u_3 \frac{r^2}{G} = -2\frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \tag{1}$$

где χ отвечает радиальной компоненте ротора вектора перемещения.

Из уравнений (1) получаем уравнение относительно χ

$$(\nabla^2 + \Delta)\chi = 0, \tag{2}$$

где

Keywords: *elastic model of Earth, incompressible material, fluctuation*
2000 Mathematics Subject Classification: 74J05, 74B05

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial\theta^2} + ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \tag{3}$$

— оператор Бельтрами [2],

$$\Delta = r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial}{\partial r} + \rho_1 f^2\frac{r^2}{G}. \tag{4}$$

Полагаем

$$\chi = \chi(r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda, \tag{5}$$

$P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода n-ной степени m-го порядка.

Имеем

$$\nabla^2\chi = -\chi(r)n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda. \tag{6}$$

С учетом (3)-(4) уравнение (2) приобретает вид

$$r^2\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + 2r\frac{d\chi(r)}{dr} + \rho_1 f^2\chi(r)\frac{r^2}{G} - n(n+1)\chi(r) = 0. \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (2) с регулярной особой точкой $r = 0$ с помощью обобщенного степенного ряда [3], получим

$$\chi(r) = C_2 r^n\left[1 - \frac{\rho_1 f^2 r^2}{2G(2n+3)} + ...\right], \tag{8}$$

где C_2 — произвольная постоянная интегрирования.

Перемещения примем в виде

$$u_2 = u_2(r)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\lambda, \tag{9}$$

$$u_3 = u_3(r)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\cos m\lambda. \tag{10}$$

Запишем уравнения (1) с учетом (5), (9), (10) следующим образом

$$r^2\frac{d^2u_2}{dr^2} + 2r\frac{du_2}{dr} + \rho_1 f^2\frac{r^2}{G}u_2 = -2m\chi(r), \tag{11}$$

$$r^2\frac{d^2u_3}{dr^2} + 2r\frac{du_3}{dr} + \rho_1 f^2\frac{r^2}{G}u_3 = -2\chi(r). \tag{12}$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$$r^2\frac{d^2u_i^*}{dr^2} + 2r\frac{du_i^*}{dr} + \rho_1 f^2\frac{r^2}{G}u_i^* = 0, \quad (i = 2, 3), \tag{13}$$

отвечающее уравнениям (11) и (12), в виде

$$u_i^*(r) = C_1(1 - \frac{1}{6}\rho_1 f^2\frac{1}{G}r^2 + ...), \tag{14}$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования.

Частные решения неоднородных уравнений (11) и (12) найдены в следующем виде

$$u_2(r) = mC_2r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)} + \frac{\rho_1 r^2 f^2}{Gn(n+1)(2n+3)} - ...\right], \tag{15}$$

$$u_3(r) = C_2r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)} + \frac{\rho_1 r^2 f^2}{Gn(n+1)(2n+3)} - ...\right]. \tag{16}$$

Общее решение уравнений (11) и (12) для амплитуд перемещений имеет вид

$$u_2(r) = C_1(1 - \frac{1}{6}\rho_1 f^2 \frac{1}{G} r^2 + ...) +$$

$$+mC_2r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)} + \frac{\rho_1 f^2}{G}\frac{r^2}{n(n+1)(2n+3)} - ...\right], \tag{17}$$

$$u_3(r) = C_1(1 - \frac{1}{6}\rho_1 f^2 \frac{1}{G} r^2 + ...) +$$

$$+C_2r^n\left[-\frac{2}{n(n+1)} + \frac{\rho_1 f^2}{G}\frac{r^2}{n(n+1)(2n+3)} - ...\right]. \tag{18}$$

Граничные условия свободных колебаний – условия отсутствия напряжений на дневной поверхности

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \text{при} \quad r = r_0. \tag{19}$$

Учитывая физический закон в нашем случае

$$\sigma_{12} = G\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r}\right), \qquad 2\sigma_{13} = G\left(\frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{u_3}{r}\right), \tag{20}$$

перепишем (19) в виде

$$\frac{du_2}{dr} - \frac{u_2}{r_0} = 0, \qquad \frac{du_3}{dr} - \frac{u_3}{r_0} = 0, \quad \text{при} \quad r = r_0. \tag{21}$$

Учитывая (17) и (18), из (21) получим характеристическое уравнение для определения частот свободных крутильных колебаний Земли

$$f^4\left(a''_{11}a''_{22} - a''_{21}a''_{12}\right) + f^2\left[\left(a''_{11}a'_{22} + a''_{22}a'_{11}\right) -\right.$$

$$\left.-\left(a''_{21}a'_{12} + a''_{12}a'_{21}\right)\right] + \left(a'_{11}a'_{22} - a'_{21}a'_{12}\right) = 0, \tag{22}$$

где

$$a'_{11} = -\frac{1}{r_0}, \quad a''_{11} = -\frac{1}{6}\rho_1\frac{r_0}{G}, \quad a'_{12} = \frac{2m(1-n)r_0^{(n-1)}}{n(n+1)},$$

$$a''_{12} = \frac{\rho_1 m r_0^{(n+1)}}{Gn(2n+3)}, \quad a'_{21} = -\frac{1}{r_0}, \quad a''_{21} = -\frac{1}{6}\rho_1\frac{r_0}{G}, \tag{23}$$

$$a'_{22} = \frac{2(1-n)r_0^{(n-1)}}{n(n+1)}, \qquad a''_{22} = \frac{\rho_1 r_0^{(n+1)}}{Gn(2n+3)}.$$

Решая биквадратное алгебраическое уравнение (22), находим комплексные частоты f свободных крутильных колебаний Земли.

Согласно соотношению Эйлера

$$\exp(ift) = e^{ift} = e^{i(a+bi)t} = e^{-bt}(\cos at + i \sin at),$$

где $f = a+bi$, $a = \ \mathrm{Re}\ f$, $b = \ \mathrm{Im}\ f$, i — мнимая единица, величина a — действительная частота колебаний, величина b характеризует либо рост колебаний ($b < 0$), либо их затухание ($b > 0$).

Цитированная литература

1. **Буллен К.Е.** Введение в теоретическую сейсмологию. М., 1966.
2. **Власов В.З.** Избранные труды. М., 1962.
3. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т.2, М.; Л., 1952.

Поступила в редакцию 04.09.03г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 43 — 48*

УДК 517.925:62.50

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КУРСОМ КОРАБЛЯ И САМОЛЕТА

С. С. Жуматов

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125 marat207@math.kz

Построены системы автоматического управления курсом корабля и самолета по заданному многообразию. Получены достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия относительно заданной функции.

Построения всего множества систем уравнений по заданной кривой в виде обратных задач обыкновенных дифференциальных уравнений сформулированы в [1]. Решение этих задач получили дальнейшее развитие в работах [2, 3], и как общая задача по построению систем обыкновенных дифференциальных уравнений восстановления и замыкания по заданному многообразию сформулированы в [2]. В [3] приведен обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения. Построению систем автоматического управления по заданному многообразию посвящены работы [4 - 6]. В них системы управления строились для случая, когда нелинейная функция $\varphi(\sigma)$, является скалярной. Установлены достаточные условия абсолютной устойчивости. В [6] эта задача решалась для функции Еругина $F(t, x, \omega)$ являющейся линейной относительно многообразия и имеющей некоторую ограниченную нелинейность. В [7 — 8] изучена задача построения систем автоматического управления, когда нелинейная функция является векторной и удовлетворяет условиям локальной квадратичной связи.

Целью нашей работы является построение систем автоматического управления курсом корабля и самолета.

Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = f(t, \varphi), \tag{1}$$

где f, φ — 3-мерные векторы, обладает гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемым уравнением

$$\omega(t, \varphi) = 0. \tag{2}$$

Keywords: *system control, programm manyfold, stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29

Уравнение (1) можно записать в виде системы

$$\begin{cases} \dot\varphi_1 = \varphi_2, \\ \dot\varphi_2 = \varphi_3, \\ \dot\varphi_3 = f_3(t,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3). \end{cases}$$

В пространстве R^3 выделим область $G(R)$

$$G(r) = \{(t,\varphi) : t \geq 0 \wedge \|\omega(t.\varphi)\| \leq r < \infty\}.$$

Относительно $\varphi \in R^3$ предполагается, что при всех $t \geq t_0$

1) правые части системы (1) непрерывны по всем переменным и удовлетворяют условиям существования и единственности решения $\varphi = \varphi(t)$;

2) вектор-функция $\omega(t,\varphi)$ непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial\omega}{\partial\varphi}, \dfrac{\partial\omega}{\partial t}$ в некоторой замкнутой ограниченной области $G \subset R^3$, содержащей многообразие $\Omega(t)$.

Заданная программа (2) точно выполняется лишь при условии, если начальные значения вектора состояния системы удовлетворяют условиям $\omega(t_0,\varphi_0)$. Но эти условия не всегда могут быть точно выполнены. Поэтому при построении систем программного движения следует иметь в виду еще и требование устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$.

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным, для системы (3) имеет место

$$\dot\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\dot\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial t} = F(t,\varphi,\omega), \tag{4}$$

где $F(t,\varphi,0) \equiv 0$ - некоторая вектор-функция Еругина.

Уравнение (4) также записывается в виде системы

$$\begin{cases} \dot\omega_1 = \omega_2, \\ \dot\omega_2 = \omega_3, \\ \dot\omega_3 = F_3(t,\varphi,\omega). \end{cases}$$

Пусть

$$F(t,\varphi,\omega) = -\gamma^T\omega, \quad \gamma = (0,\gamma_2,\gamma_3). \tag{5}$$

Вместе с уравнением (1) рассмотрим уравнения системы автоматического управления курсом корабля [9]:
корабля как объекта управления курсом без учета внешнего воздействия ($f_\varphi = 0$)

$$\dot\varphi = f(t,\varphi) + \kappa^T\delta, \quad \kappa = (\kappa_1,\kappa_2,0,0)^T,\ \delta = (\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4) \tag{6}$$

измерительного органа, первого и второго дифференцирующих звеньев

$$x_i = \varphi_i \quad (i = 1,2,3) \tag{7}$$

усилителей и преобразующего элемента

$$x_y = k_4x_5;\ T_n\dot\sigma + \sigma = k_5x_y;\ e = F(\sigma) \in C_{(0,5)},\ F(0) = 0; \tag{8}$$

исполнительного органа

$$a^T\delta = k_\delta = F(\sigma), \quad a = (1,a_1,a_2,a_3)^T \tag{9}$$

закона управления

$$T_\sigma\dot\sigma + \sigma = c^T\omega + s^T\delta, \quad c = (c_1,c_2,c_3)^T,\ s = (c_4,c_5,c_6,0)^T. \tag{10}$$

Известно, что функция $F(\sigma)$ является функцией управления по отклонению от программы, так как на программном многообразии она обращается в нуль и система (6 - 10) принимает вид (1), при выполнении условий

$$\begin{cases} \kappa_1\delta_1 + \kappa_2\delta_2 = 0, \\ \delta_1 + a_1\delta_2 + a_2\delta_3 + a_3\delta_4 = 0, \\ c_4\delta_1 + c_5\delta_2 + c_6\delta_3 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Следовательно, многообразие (2) и для (6 — 10) является интегральным.

Дифференцируя (2) по времени t в силу системы уравнений (6 — 10), с учетом (4) и (5) получаем

$$\begin{cases} \dot\omega = -a^T\omega - \tau^T\delta, \\ x_i = \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ x_y = k_4x_5;\ T_n\dot\sigma + \sigma = k_5x_y;\ e = F(\sigma) \in C_{(0,5)},\ F(0) = 0, \\ a^T\delta = k_\delta = F(\sigma), \quad a = (1, a_1, a_2, a_3)^T, \\ T_\sigma\dot\sigma + \sigma = c^T\omega + s^T\delta, \quad c = (c_1, c_2, c_3)^T,\ s = (c_4, c_5, c_6, 0)^T. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\tau = \dfrac{\partial\omega}{\partial\varphi}\kappa$,

Программное многообразие $\Omega(t)$ называется абсолютно устойчивым, если оно устойчиво в целом на решениях системы уравнений (6 - 10) при любой $\omega(t_0, \varphi_0)$ и функции $F(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (8).

Ставится задача: Найти условия абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $\omega(t, \varphi)$. После исключения промежуточных переменных из (12), вводя обозначения

$$\begin{cases} \eta_i = \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3), \eta_4 = \delta_1,\ \eta_5 = \delta_2,\ \eta_6 = \delta_3, \\ a_{32} = a_2,\ a_{33} = a_1,\ a_{34} = \tau_1,\ a_{35} = \tau_2,\ a_{64} = r_1, \\ a_{65} = r_2,\ a_{66} = r_3,\ k_\delta/a_3F(\sigma) = f(\sigma),\ c_k/T_\sigma = \beta_k,\ \rho = T_\sigma^{-1}, \end{cases} \tag{13}$$

получим систему вида

$$\begin{cases} \dot\eta = -A\eta - bf(\sigma), \\ \dot\sigma = \beta^T\eta - r_0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\eta^T = \|\eta_1, \ldots, \eta_6\|,\ b^T = \|0, \ldots, 0, b_6\|,\ \beta^T = \|\beta_1, \ldots, \beta_6\|,$$

$$A = \|a_{ij}\|_1^6,\ a_{12} = a_{23} = a_{45} = a_{56} = -1,$$

а остальные элементы равны нулю. Приведем некоторые числовые данные и обозначения из [9]:

$a_1 = 0,682c^{-1};\ a_2 = 0,0302c^{-2};\ \tau_1 = 0,0463c^{-3};\ \tau_2 = 0,0222c^{-1};\ k_1 = 0,15B/\textit{град};$
$\alpha_1 = 0,78\cdot 10^{-3}c^{-3};\ \alpha_2 = 0,2888c^2;\ \alpha_3 = 12,5c;\ k_\delta = 2,1\textit{град}/\textit{мм};\ k = 5;\ k_4 = 2\cdot 10^3;$
$k_5 = 0,1\textit{мм}/B;\ k_{oc2} = 3\cdot 10^{-3};\ k_{oc3} = 1\cdot 10{-}3;\ T_n = 0.01c,$

$$T_\sigma = \frac{T_n(1 + k_4k_{oc3})}{\alpha_0};\ \alpha_0 = 1 + k_4(k_5k_{oc2}k_{oc3});\ k_0 = \alpha_0^{-1}T_\sigma^{-1};$$

$$\beta_1 = k_0^{-1}k_1k_4k_5;\ \beta_2 = k_0^{-1}k_2k_4k_5;\ \beta_3 = k_0^{-1}k_3k_4k_5;$$

$$\beta_4 = -k_0^{-1}k_4k_5k_{oc1};\ \beta_5 = -k_0^{-1}k_4k_5k_{oc5};\ \beta_6 = -k_0^{-1}k_4k_5k_{oc6}.$$

Непосредственное исследование системы (14) на устойчивость вторым методом Ляпунова невозможно, так как матрица A имеет одно собственное нулевое решение. Поэтому сначала систему (14) приводим к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = -Px - df(\sigma), \\ \dot{\sigma} = \nu^T x - r_0 - r\xi, \\ \dot{\xi} = f(\sigma), \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\xi = x_6/d_6;\ P = diag\|\rho_1, \dots, \rho_5\|;\ d^T = \|d_1, \dots, d_5\|;$$
$$d_i = T_{i6}b_6\ (i = 1, \dots, 5);\ \beta^T T^{-1} = \|\nu^T, -\gamma\|;\ \gamma = T_{66}b_6\nu_6,$$

с помощью преобразования $x = T\eta$ [7].
Здесь матрица преобразования T определяется следующим образом

$$T = \begin{Vmatrix} -a_2r_1 & -a_1r_1 & -r_1 & -\tau_2r_1 + \tau_1r_2 & a_2\tau_1r_3 & \tau_1 \\ 0 & (a_1-\rho_2)\Delta_2(\rho_2) & \Delta_2(\rho_2) & A_{14}(\rho_2) & 0 & \tau_1 - \tau_2\rho_2 \\ 0 & (a_1-\rho_3)\Delta_2(\rho_3) & \Delta_2(\rho_3) & A_{14}(\rho_3) & 0 & \tau_1 - \tau_2\rho_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_{14}(\rho_4) & A_{15}(\rho_4) & \tau_1 - \tau_2\rho_4 \\ 0 & 0 & 0 & A_{14}(\rho_5) & A_{15}(\rho_5) & \tau_1 - \tau_2\rho_5 \\ 0 & 0 & 0 & A_{14}(\rho_6) & A_{15}(\rho_6) & \tau_1 - \tau_2\rho_6 \end{Vmatrix}$$

с элементами

$$A_{11}(\rho) = \Delta_1(\rho)\Delta_2(\rho);\ A_{12}(\rho) = -(\rho - a_1)\Delta_2(\rho);$$

$$A_{13}(\rho) = \Delta_2(\rho);\ A_{14}(\rho) = \tau_1\rho^2 - \tau_1r_3\rho - \tau_2r_1 + \tau_1r_2;$$

$$A_{15}(\rho) = \Delta_1(\rho)[\tau_2\rho^2 - (\tau_1 + \tau_3)\rho + \tau_1r_3];\ A_{15}(\rho) = \tau_1 - \tau_2\rho;$$

$$\Delta_1(\rho) = \rho^2 - a_1\rho + a_2;\ \Delta_2(\rho) = \rho^3 - r_3\rho^2 + r_2\rho - r_1,$$

а A_{ij} являются алгебраическими дополнениями характеристического уравнения $|A - \rho E| = 0$.

Если положим $T_n = 0$, то из (15) получим систему непрямого управления вида

$$\begin{cases} \dot{x} = -Px - df(\sigma), \\ \dot{\xi} = f(\sigma);\ \sigma = \nu^T x - \gamma\xi. \end{cases} \tag{16}$$

Для абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ в угле $(0, 5)$ достаточно существования некоторого вещественного числа q и выполнения частотного неравенства Попова [8]

$$\Pi(i\varpi) = 1/5 + Re(1 + i\varpi q)W(i\varpi) > 0 \quad \forall\ \varpi \in]-\infty, \infty[\tag{17}$$

и условия предельной устойчивости

$$\gamma > 0, \tag{18}$$

где $W(i\varpi) = \gamma/i\varpi + \nu^T(P + i\varpi E)^{-1}d$, а матрицы P, d, ν, γ определяются из соотношения (15).

Условие (17) приводится к виду [8]

$$\Pi(\mu) = 1/5 + \nu^T(P^2 + \mu E)^{-1}Rd + q[\gamma + \mu\nu^T P^2 + \mu E)^{-1}d] > 0 \tag{19}$$

Теорема 1. *Для абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $\omega(t, \varphi)$ в угле $(0, 5)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства (19) при выполнении условий*

$$\nu_i d_i \geq 0 \vee \nu_i d_i \leq 0 \quad \forall\ i_1^5. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь уравнения движения системы управления курсом самолета в режиме автопилота [10]

$$\begin{cases} T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + k\psi = 0;\ \dot{\mu} = f^T(\sigma), \\ \sigma = a\omega + E\dot{\omega} + G^2\ddot{\omega} - l^{-1}\mu, \end{cases} \tag{21}$$

которые обладают гладким многообразием $\Omega(t)$, заданным уравнением

$$\omega(\tau, \psi) = 0. \tag{22}$$

Здесь постоянная T^2 характеризует инерционность объекта регулирования, U – естественное демпфирование, k характеризует действие восстанавливающей силы, a, E, G^2, l – постоянные регулятора.

Ставится задача: Определить условия устойчивости программного многообразия (22).

Дифференцируя программное многообразие (22) дважды по τ, в силу системы (21) получим

$$\ddot{\omega} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial\tau\partial\psi}\dot{\psi} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\psi^2}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\Big[-\frac{U}{T^2}\dot{\psi} - \frac{k}{T^2}\psi - \frac{\mu}{T^2}\Big]. \tag{23}$$

Предположим, что [8]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2} + 2\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\tau\partial\psi}\dot{\psi} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial\psi^2}\dot{\psi}^2 + \dfrac{\partial\omega}{\partial\psi}\Big(-\dfrac{U}{T^2}\dot{\psi} - \dfrac{k}{T^2}\psi\Big) = F(\tau,\,\psi,\,\omega,\,\dot{\omega}), \\ F(\tau,\,\psi,\,\omega,\,\dot{\omega}) = -\alpha_1\dot{\omega} - \alpha_2\omega. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} \ddot{\omega} + \alpha_1\dot{\omega} + \alpha_2\omega + \dfrac{\partial\omega}{\partial\psi}\dfrac{\mu}{T^2} = 0, \\ \dot{\mu} = f^T(\sigma), \\ \sigma = a\omega + E\dot{\omega} + G^2\ddot{\omega} - l^{-1}\mu. \end{cases} \tag{25}$$

Пусть $\dfrac{\partial\omega}{\partial\psi} = h - const$. Введем обозначения

$$\begin{cases} \omega = \eta_1;\ \dot{\omega} = \sqrt{r}\eta_2;\ \mu = i\xi,\ t = \dfrac{\tau}{\sqrt{r}},\ r = i, \\ i = \frac{lT^2}{T^2 + lG^2h};\ \varphi(\sigma) = \frac{1}{i\sqrt{r}}f^T(\sigma);\ a_1 = -\frac{\alpha_2}{r};\ a_2 = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{r}}, \\ p_1 = a - \alpha_2G^2;\ p_2 = (E - \alpha_1G^2)\sqrt{r}. \end{cases} \tag{26}$$

Систему (25) приводим к нормальной форме в безразмерных переменных

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -A\eta - b\xi, \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \\ \sigma = p^T\eta - \xi, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\eta = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|;\ A = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ a_2 & a_1 \end{matrix} \right\|;\ b = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|;\ p = \left\| \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\|;\ \varphi(\sigma) \in C_{(0,k]}.$$

Систему (27) с помощью замены $z_1 = \eta_2$, $z_2 = -a_2\eta_1 - \eta_2 - \xi$ преобразуем к виду

$$\begin{cases} \dot{z} = -Az - \delta\varphi(\sigma), \\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \\ \sigma = m^Tz - \gamma\xi. \end{cases} \tag{28}$$

Здесь
$$m^T = \left\| -\frac{P_1 a_1}{a_2} + p_2,\ \frac{p_1}{a_2} \right\|;\ \gamma = 1 + \frac{p_1}{a_2}.$$

Матрица L определяется следующим образом [11]:

$$l_1 = c_2 + \frac{c_1 a_1}{2a_2} + \frac{c_3 a_1 + c_1}{2a_1};\ l_2 = \frac{c_1}{2a_2};\ l_3 = \frac{c_3}{2a_1} + \frac{c_1}{2a_1 a_2}$$

Теорема 2. *Пусть матрица $(-A)$ гурвицева.*
Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия (22) системы (21) достаточно выполнения условий
$$\gamma > 0 \wedge c > 0,$$
$$\frac{c_3}{a_1} + \frac{c_1}{a_1 a_2} + \frac{p_1}{a_2} = 0 \wedge \frac{c_1}{a_2} - \frac{p_1 a_1}{a_2} + p_2 = 0.$$

Теорема 3. *Для абсолютной устойчивости программного многообразия (22) системы (21) в угле $(0, k]$ достаточно существования некоторого вещественного числа q и выполнения неравенства*
$$\pi(\mu, q) = k^{-1} + \gamma q + m^T (A^2 + \mu E)^{-1} (A + q\mu E) b > 0 \quad \forall \mu \geq 0.$$

Цитированная литература

1. **Еругин Н.П.** //Прикл. мат. и мех., 1952. Т.16, вып. 6. С.653–670.

2. **Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. и др.** Построение систем программного движения. М., 1971.

3. **Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.** //Вестник Российского ун-та Дружбы народов. 1994. № 1. С.5–21.

4. **Мухаметзянов И.А.** //Дифференц. уравнения. 1973. № 5. С.846–856.

5. **Мухаметзянов И.А.** //Дифференц. уравнения. 1973. № 6. С.1037–1048.

6. **Мухаметзянов И.А., Саакян А.О.** //Проблемы механики управляемого движения. Пермь, 1979. С.137–144.

7. **Майгарин Б. Ж.** Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата., 1980.

8. **Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.** Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы., 1999

9. **Нелепин Р. А., Тимофеев Ф. П.** // Сборник трудов ЛВВМИУ. Л., 1970. Вып. 34. С. 83—94.

10. **Летов А.М.** Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., 1962.

11. **Майгарин Б. Ж., Жуматов С. С.** // Изв. АН КазССР. Сер.физ.-мат. 1981. № 5. С. 21 — 24.

Поступила в редакцию 03.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 49 — 54*

УДК 517.95

О СВОЙСТВАХ КОРНЕВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

Т. Ш. Кальменов,М. А. Джаманкараев,Д. Т. Кальменов

Южно-Казахстанский государственный университет им.Ауэзова
486001 Шымкент, пр.Тауке-хана, 5

Доказана бесконечномерность корневых векторов задачи Трикоми

Пусть $\Omega\subset R^2$ – конечная область, ограниченная при $y>0$ бесконечно гладкой кривой σ, а при $y<0-$характеристиками $AC:\ x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1$, $BC:\ x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1$ уравнения

$$Lu\equiv -yu_{xx}-u_{yy}=\lambda u, \tag{1}$$

где λ – комплексный параметр.

Спектральная задача Трикоми. Найти собственные и присоединенные функции уравнения (1), удовлетворяющие краевому условию

$$u|_{\sigma\cup AC}=0. \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что кривая σ оканчивается малыми дугами нормальной кривой $\sigma_0:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^2=\frac{1}{4}$.

Основным результатом настоящей работы явлется

Теорема 1. *Собственные и присоединенные функции (корневые функции) задачи Трикоми образуют бесконечномерное корневое подпространство.*

Отметим, что спектральной задаче Трикоми посвящены работы [1]–[3], причем в работе [1] методом экстремума доказана непустота спектра задачи Трикоми.

Через L_T и L_{T^*} обозначим замыкание оператора (1) в $L_2(\Omega)$, соответственно, на подмножестве функций $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u|_{\sigma\cup AC}=0$ и $v\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v|_{\sigma\cup BC}=0$. Обратимость операторов L_T и L_{T^*} на всем $L_2(\Omega)$, и полная непрерывность их обратных операторов L_T^{-1} и $L_{T^*}^{-1}$ доказана в [4]. Под корневыми функциями задачи (1)–(2) будем понимать корневые векторы оператора L_T.

Пусть число корневых векторов оператора L_T $\{u_i\}$, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_i\}$, конечно, т.е. $i=1,2,...,N$. В дальнейшем будем использовать разложение пространства $L_2(\Omega)$ в виде [5]

$$L_2=L_{\lambda,T^*}\oplus L_{\lambda,T^*}^{\perp},\quad L_2=L_{\lambda,T}\oplus L_{\lambda,T}^{\perp}, \tag{3}$$

Keywords: *Tricomi problem, mixed equation, completeness of root-vectors*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

где L_{λ,T^*}, $L_{\lambda,T}$ — корневые пространства L_{T^*} и L_T, соответственно, т.е. линейные векторные пространства, натянутые на корневые векторы $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, а $L^{\perp}_{\lambda,T^*}$, $L^{\perp}_{\lambda,T}$ — их ортогональные дополнения в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1. *Корневые векторы u_i оператора L_T принадлежат пространству $C^{\infty}(\Omega)\cap C^{\beta}(\overline{\Omega})$, $0<\beta<\frac{1}{6}$ и $\forall u$, $u=\sum\limits_{i=1}^{N}c_iu_i\in L_{\lambda,T}$ справедливо неравенство*

$$\|L_T^k u\|_{L_2(\Omega)}\le C|\overline{\lambda}|\|u\|_{L_2(\Omega)},\quad k=1,2,..., \tag{4}$$

где $\overline{\lambda}=max_{i=1,...,N}|\lambda_i|$, λ_i – собственные значения оператора L_T.

Доказательство . Решение задачи Трикоми $u=L_T^{-1}f$ представимо в виде [5]

$$u(x,y)=L_T^{-1}f=\begin{cases}\int\limits_0^{\xi}d\xi_1\int\limits_{\xi}^{\eta}H(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)f_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1+\\ +k\int\limits_0^{\xi}\nu(\xi)(\eta-\xi)^{-\frac{3}{2}}(\eta-t)^{-\frac{3}{2}},\ y<0,\\ \int\int\limits_{\Omega_1}G(x,y,x_1,y_1)f(x_1,y_1)dy-\\ -\int\limits_0^1 G(x,y,t,0)\nu(t)dt,\ \ y>0\end{cases} \tag{5}$$

где

$\nu(x)=u_y(x,0)$,

$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$,

$f_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2}\right)(\eta-\xi)^{-\frac{2}{3}}$,

$k=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\pi\Gamma(\frac{1}{6})}$, $G(x,y,x_1,y_1)$ - функция Грина задачи Хольмгрена для уравнения (1), т.е.

$$-yG_{xx}-G_{yy}=\delta(x-x_1,y-y_1),\quad G|_{\sigma}=0,\ \ G_y|_{y=0}=0. \tag{6}$$

В случае нормального контура σ_0: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^3=\frac{1}{4}$ функция $G(x,y,x_1,y_1)$ представима в виде

$$G(x,y,x_1,y_1)=q(x,y,x_1,y_1)-(2\pi r_0)^{\frac{1}{3}}q(\overline{x},\overline{y},x_1,y_1), \tag{7}$$

$q(x,y,x_1,y_1)=kr_1^{-1/3}F(1/6,1/6,1/3,1-\sigma_0)$,

$r^2=(x_1-x_0)^2+\frac{4}{3}(y_1^{3/2}-y^{3/2})^2$,

$r_1^2=(x_1-x_0)^2+\frac{4}{3}(y_1^{3/2}+y^{3/2})^2$,

$\sigma=\frac{r^2}{r_1^2}$, $r_0=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^3$,

$\overline{x}=\frac{x-\frac{1}{2}}{4r_0^2}$, $\overline{y}=\frac{y^{3/2}}{4r_0^2}$.

Здесь $H(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)$ – функция Римана – Адамара, построенная С.Геллерстедтом [5], представима в виде

$$H(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)=\begin{cases}R(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1), & \eta_1\ge\xi,\\ \overline{R}(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1), & \eta_1\le\xi,\end{cases} \tag{8}$$

где

$$R(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)=(\eta_1-\xi_1)^{1/3}(\eta-\xi_1)^{-1/6}(\eta_1-\xi)^{-1/6}F\left(1/6,1/6,1,\frac{(\xi-\xi_1)(\eta_1-\eta)}{(\eta_1-\xi)(\eta-\xi_1)}\right) \tag{9}$$

– функция Римана уравнения (1),

$$\overline{R}(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1)=\gamma_1(\eta_1-\xi_1)^{1/6}(\xi-\xi_1)^{1/6}(\eta-\eta_1)^{-1/6}F\left(1/6,1/6,1/3,\frac{(\eta_1-\xi_1)(\eta-\xi_1)}{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}\right),$$

$$\gamma = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(1/3)\Gamma(5/6)}, \tag{10}$$

$\nu(x) = u_y(x,0)$ – решение сингулярного интегрального уравнения

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2+\lambda}\right) \nu(t)dt = F(x), \tag{11}$$

$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$,

$$f_1(x) = \int\int\limits_{\Omega_1} G(x,0,x_1,y_1) f(x_1,y_1) dx_1 dy_1, \tag{12}$$

$F_2(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f_2(t)dt}{(x-t)^{2/3}}$,

$$\begin{gathered} f_2(x) = \gamma \int\limits_0^x (x-\xi_1)^{-1/6} d\xi_1 \int\limits_\xi^x (x-\eta_1)^{-1/6} (\eta_1 - \xi_1)^{1/3} f_1(\xi_1,\eta_1) d\eta_1, \\ f_1(\xi_1,\eta_1) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^{2/3} (\eta-\xi)^{-2/3}. \end{gathered} \tag{13}$$

Обращение интегрального уравнения (11) имеет вид [6]

$$\nu(x) = \frac{3}{4} \left(F(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\frac{1-t}{1-x}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2+\lambda}\right) F(t)dt \right). \tag{14}$$

Пользуясь свойствами сингулярного интеграла (14) и гипергеометрической функцией F [5], можно показать, что если $f \in C^\infty(\Omega) \cap C^\gamma(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < \frac{1}{6}$, то $u = L_T^{-1} f \in C^\infty(\Omega) \cap C^{\gamma+\varepsilon}(\overline{\Omega})$ $0 < \gamma + \varepsilon < \frac{1}{6}$, т.е. решение задачи Трикоми обладает внутренней гладкостью, причем

$$\|L_T^{-1} f\|_{C^{\gamma+\varepsilon}(\overline{\Omega})} \le C \|f\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})}, \quad 0 < \gamma + \varepsilon < \frac{1}{6}. \tag{15}$$

Если $u \in L_{\lambda,T}$, то

$$u = \sum_{i=1}^N c_i u_i, \tag{16}$$

где u_i - корневой вектор (собственный или присоединенный), т.е.
$L_T u_i^0 = \lambda_i u_i^0, \;\; L_T u_i^j - \lambda_i u_i^j = u_i^{j-1}, j = 1, ...$

Здесь u_i^0 – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i, u_i^j – присоединенный вектор к собственному вектору u_i^0. Принадлежность $u_i \in C^\infty(\Omega)$ следует из соотношения (17) и из внутреннего повышения гладкости задачи Трикоми (см. [5]).

Сначала докажем неравенство (4) в случае, когда λ_i – простые собственные значения, т.е. когда отсутствуют присоединенные векторы. В этом случае имеем

$$L_T^k u = \sum_{i=1}^n c_i L^k u_i = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^k u_i.$$

Отсюда

$$\|L_T^k u\|_{L_2(\Omega)} = \|\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^k u_i\|_{L_2(\Omega)} \le \sum_{i=1}^n \|c_i \lambda_i^k u_i\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\leq |\overline{\lambda}|^k \sum_{i=1}^{n} \|c_i u_i\|_{L_2(\Omega)}, \quad |\overline{\lambda}|^k = max_{i=1,...,N}\{|\lambda_i|\}. \tag{17}$$

Так как $u \not\equiv 0$, то существует $C > 0$ такое, что $\|c_i u_i\| \leq \frac{C}{N}\|u\|$.

С учетом этого, из неравенства (17) имеем

$$\|L_T^k u\|_{L_2(\Omega)} \leq |\overline{\lambda}|^k C \|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{18}$$

В случае, когда λ_i — кратные собственные значения, неравенство (4) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого целого числа* $m > 0$ *существует функция* $\tilde{u} \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{\gamma}(\overline{\Omega}) \cap D(L_T^k) \cap L_{\lambda,T^*}^{\perp}$, $k = 0, 1, ..., m-1$, $0 < \gamma < \frac{1}{6}$.

Доказательство. Определим функцию $\tilde{u}(x)$ следующим образом

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) = u(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_1, \tag{19}$$

$$\tilde{u}(x) = u^+(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{20}$$

где $\Omega_1 \subset \Omega$ — произвольная внутренняя подобласть Ω с $\partial\Omega_1 \in C^{\infty}$, u_i — корневые векторы оператора L_T и постоянные c_i, $i = \overline{1, n}$ подлежат определению.

Из леммы 1 следует, что при любом целом $m > 0$: $u_i \in C^{2m}(\Omega) \cap D(L_T^k)$, $i = 1, 2, ..., N$, $k = 0, 1, ..., m-1$.

Пусть $\Omega_2 \subset \Omega$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $\partial\Omega_2 \in C^{\infty}$. Тогда $u_i \in C^{2m}(\overline{\Omega}_2) \cap D(L_T^k)$ и $u \in C^{2m}(\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1}) \cap D(L_T^k)$. Функцию $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i u_i$ продолжим из области $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ в область Ω_1 с сохранением гладкости. Возможность такого продолжения установлена в [7].

Отметим также, что гладкое продолжение из $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ в Ω_1 можно осуществить как решение следующей эллиптической задачи

$$(-\Delta)^m u^+ = f^+(x),$$

$$\left.\frac{\partial^j}{\partial \xi^j} u^+\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^j}{\partial \eta^j} u\right|_{\partial\Omega_1}, \quad j = 0, ..., m-1, \tag{21}$$

где $\frac{\partial}{\partial\eta}$– конормальная производная, порожденная оператором Лапласа Δ.

Неизвестные постоянные c_i выберем из условия

$$(\tilde{u}, v_j)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad j = 1, ..., N, \tag{22}$$

где v_j – корневые векторы сопряженного оператора L_{T^*}. В силу произвольности $\Omega_2 \subset \Omega$ имеем, что $\tilde{u} \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{\gamma}(\overline{\Omega}) \cap D(L_T)$, т.е. $\tilde{u}|_{\sigma \cup AC} = 0$. Легко проверить, что $L^k \tilde{u} \in C^{2(m-k)}(\Omega) \cap C^{\gamma}(\overline{\Omega}) \cap D(L_T)$, $k = 1, 2, ..., m-1$ и $(L_T^k \tilde{u}, v_j)_{L_2(\Omega)} = (\tilde{u}, L_{T^*}^k v_j)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad k = 0, ..., m-1$, т.е. $L_T^k \tilde{u} \in L_{\lambda,T^*}^{\perp}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f(x) \in L_{\lambda,T^*}^{\perp}$, *т.е.* $f(x)$ *ортогональна всем корневым векторам оператора* L_{T^*}. *Тогда для любого натурального числа* k *справедливо неравенство*

$$\|L_T^{-K} f\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c}{d^k} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{23}$$

где постоянные c *и* d *не зависят от* f, *причем* d *– произвольное положительное число.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме [4] резольвента оператора L_T $R_\lambda f = (L_T - \lambda I)^{-1} f$ при $f \in L^{\perp}_{\lambda,T^*}$ является целой аналитической функцией по λ и разлагается в ряд Неймана

$$R_\lambda f = (L_T - \lambda I)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L_T^{-k-1} f(x). \tag{24}$$

Так как ряд Неймана (24) сходится при любом комплексном λ, то, умножив ряд (24) на произвольную функцию $v(x) \in L_2(\Omega)$ и учитывая формулу

$$\|L_T^{-k-1} f\|_0 = \sup_{\|v\|_0=1} |(L_T^{-k-1} f, v)_0|,$$

как и в работе [9] можно показать, что существует такая постоянная C, что

$$\|L_T^{-k-1} f\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C\|f\|_{L_2(\Omega)}}{d^k} \tag{25}$$

для произвольного $d >> 1$. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 1. Пусть $\tilde{u}(x)$ функция из леммы 2. Положим

$$L_T^k \tilde{u}(x) = f(x), \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{26}$$

Поскольку $\tilde{u} = u = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i u_i$ в $\Omega \setminus \Omega_1$, то в силу леммы 1 имеем

$$\|L_T^k \tilde{u}\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} = \|L_T^k u\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} \le |\overline{\lambda}|^k c \|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)}. \tag{27}$$

Так как $\tilde{u} = L_T^{-k} f$, неравенство (27) перепишется в виде

$$\|f\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} \le \tilde{c} |\overline{\lambda}|^k c \|L_T^{-k} f\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)}. \tag{28}$$

Поскольку $f \in L^{\perp}_{\lambda,T^*}$, то на основании неравенства (25) имеем

$$\|L_T^{-k} f\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} \le \|L_T^{-k} f\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C\|f\|_{L_2(\Omega)}}{d^k}. \tag{29}$$

Из неравенств (28)–(29) следует

$$\|f\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_1)} \le \frac{\tilde{c}|\overline{\lambda}|^k}{d^k} c \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{30}$$

При фиксированных постоянных $\tilde{c}$ и c и произвольных $d >> 1$ и k, m из (30) следует, что $f = L_T^k \tilde{u} = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \lambda_i^k u_i \equiv 0$ в $\Omega \setminus \Omega_1$. Отсюда, как и в [8], получим, что $u_i(x) \equiv 0$ в $\Omega \setminus \Omega_1$, т.е. $u_i(x) \equiv 0$ в Ω, $i = 1, 2, ..., N$. Это противоречит непустоте спектра задачи Трикоми (см. [5]). Теорема доказана.

Замечание. *В доказательстве теоремы 1 в основном использовалась внутренняя гладкость оператора $L_T^{-k} f$, $k = 0, 1, ...$, в Ω и конечномерность корневого подпространства L_T. Поэтому теорема 1 остается справедливой для общего класса дифференциальных уравнений.*

Пусть оператор L_Q порождается дифференциальным уравнением

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{31}$$

и граничным условием

$$Qu|_{\partial\Omega} = 0, \tag{32}$$

$$u = L^{-1}f$$

где Q – линейный граничный оператор такой, что выполняется неравенство

$$\|L_Q^{-k}f\|_{W_2^{k+\beta}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W_2^k(\Omega)}, 0 < \beta \leq m. \tag{33}$$

Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения (31) и граничное условие Q таковы, что выполняется условие (33). Тогда спектр оператора L_Q либо пуст, либо бесконечен.*

Отметим, что условию (33) удовлетворяют все классические задачи: задачи Дирихле и Неймана (при единственности решения) для общих эллиптических уравнений, задача Коши, смешанная задача Коши, задача Гурса для гиперболических уравнений, в случае гладких коэффициентов любая корректная краевая задача для произвольных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Авторы благодарят член-корреспондента АН РК М.О.Отелбаева за ценное обсуждение работы.

Цитированная литература

1. **Кальменов Т.Ш.** //Дифф. уравнения. 1977. Т.15., № 8

2. **Моисеев Е.И.** Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М. 1988.

3. **Пономарев С.М.** Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе.// Автореферат докторской диссертации. М., МГУ, 1981.

4. **Келдыш М.В.** // Успехи матем. наук. 1971. Т.26, N4 С.1—41.

5. **Кальменов Т.Ш.** // О регулярности краевых задач и спектре для уравнения гиперболического и смешанного типов.// Автореферат докторской диссертации. М., МГУ. 1982.

6. **Gellerstedt S.** Quelques problems pou' l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$.// Arkiv Math Astr. Fysic 26 A.t.s. 1938. P. 1—32.

7. **Никольский С.М.** Теоремы вложения функций многих переменных. М., 1968.

8. **Кальменов Т.Ш., Джаманкараева М.А., Бименов М.А.** // Математический журнал. ИМ МОиН РК., 2001.,Т.1, N2. С.32–41.

9. **Данфорд Н., Шварц Л.** Линейные операторы. Спектральная теория. М., 1968.

Поступила в редакцию 26.09.03

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 55 —62*

УДК 519.624

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ПРИЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Б. Б. Минглибаева

Институт Математики МОиН РК
480100 Алматы, ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

На основе метода параметризации установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи с параметром в терминах исходных данных.

Краевые задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений часто возникают в приложениях и исследованы многими авторами [1 — 7].

В данной работе рассматривается линейная краевая задача с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \tag{1}$$

$$C_0\mu + C_1x(0) + C_2x(T) = d, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $A(t), B(t)$ — матрицы размерности $(n\times n)$ и $(n\times m)$, $C_0 - ((n+m)\times m)-$ матрица, C_1, C_2- матрицы размерности $((n+m)\times n)$, $d \in R^{n+m}$, $||x|| = \max\limits_i |x_i|$, $||A(t)|| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}(t)| \le \alpha$, $||B(t)|| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^m |b_{ij}(t)| \le \beta$, $\alpha, \beta-$const, $i = 1, 2, \ldots, n$. Через $C([0,T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$.

Задача заключается в определении пары $(\mu^*, x^*(t))$, где функция $x^*(t)$ при $\mu = \mu^*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и краевым условиям (2).

Если известна фундаментальная матрица $X(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

Keywords: *parametrization method, two-point boundary-value problem, ordinary differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B08

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = X(t) \cdot c + \int\limits_0^t X(t) \cdot X^{-1}(\tau)[B(\tau)\mu + f(\tau)]d\tau, \tag{3}$$

где $c-n$-мерный вектор. Подставляя (3) в краевые условия (2), для неизвестных $c \in R^n$, $\mu \in R^m$ получим уравнение

$$[C_0 + C_2 \int\limits_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau]\mu +$$

$$+[C_1X(0) + C_2X(T)]c = d - C_2 \int\limits_0^T X(T)X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

где $[C_0+C_2 \int\limits_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau]-((n+m)\times m)-$ матрица, $[C_1X(0)+C_2X(T)]-((n+m)\times n)-$ матрица. Тогда однозначная разрешимость задачи (1)—(2) эквивалентна обратимости $((n+m)\times (n+m))$ матрицы

$$D = [C_0 + C_2 \int\limits_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau, \quad C_1X(0) + C_2X(T)].$$

Известно, что построение фундаментальной матрицы возможно для узкого класса переменных матриц $A(t)$. Целью работы является нахождение необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1) - (2) в терминах исходных данных $A(t), B(t), C_0, C_1, C_2, T$.

Для решения поставленной задачи используем метод параметризации [8,9].

Возьмем шаг $h > 0 : Nh = T$ и произведем разбиение отрезка

$$[0, T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh).$$

Сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1), rh), r = 1, ..., N$ обозначим через $x_r(t)$. Тогда задача (1)—(2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + B(t)\mu + f(t), \qquad t \in [(r-1), rh), r = 1, ..., N, \tag{4}$$

$$C_0\mu + C_1x_1(0) + C_2 \lim_{t\to T-0} x_N(t) = d, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \qquad s = 1, ..., N-1. \tag{6}$$

Здесь (6)— условия сшивания решения во внутренних точках разбиения. Если $(\mu, x(t))$ - решение краевой задачи (1)—(2), то очевидно, что $(\mu, x_r(t))$, где $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1, ..., N$ является решением многоточечной краевой задачи (4)—(6). И, наоборот, если $(\mu, x_r(t))$, $r = 1, ..., N-$ решение задачи (4)—(6), то пара $(\mu, x(t))$, где $x(t) = x_r(t)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1, ..., N$, $x(T) = \lim\limits_{t\to T-0} x_N(t)$ будет решением исходной краевой задачи.

Обозначим через λ_r значение функции $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h$. На каждом интервале $[(r-1)h, rh)$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = 1, ..., N$, $\lambda_0 = \mu$. В результате получим краевую задачу

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r + B(t)\lambda_0 + f(t), \quad u_r[(r-1)h] = 0,$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1, ..., N, \tag{7}$$

$$C_0\lambda_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_N + C_2 \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \tag{8}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = 1, ..., N-1. \tag{9}$$

Задачи (4)—(6) и (7)—(9) эквивалентны: если $(\mu, x_r(t)), \quad r = 1, ..., N$ является решением задачи (4)—(6), то $(\lambda_0, \lambda_r, u_r(t))$, где $\lambda_0 = \mu$, $\lambda_r = x_r[(r-1)h]$, $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = 1, ..., N$ будет решением задачи (7)—(9) и, наоборот, если $(\lambda_0, \lambda_r, u_r(t))$—решение задачи (7)—(9), то пара $(\mu, x_r(t)), \quad r = 1, ..., N$, где $\mu = \lambda_0, x_r(t) = \lambda_r + u_r(t))$ при $t \in [(r-1)h, rh), r = 1, ..., N-$ решение задачи (4)—(6). Однако, задача (7)—(9) отличается от задачи (4)—(6) тем, что здесь имеются начальные условия $u_r[(r-1)h] = 0$, которые позволяют определить $u_r(t)$ из интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} B(\tau)\lambda_0 d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau \tag{10}$$

при фиксированных значениях параметров $\lambda_0, \lambda_r, r = 1, ..., N$.

Вместо $u_r(\tau)$ подставим соответствующую правую часть (10) и, повторив процесс $\nu\,(\nu = 1, 2, \ldots)$ раз, получим

$$u_r(t) = \Big\{ \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2) \ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1 \Big\}\lambda_r +$$

$$+ \Big\{ \int_{(r-1)h}^{t} B(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} B(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2) \ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} B(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1 \Big\}\lambda_0 +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2) \ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1 +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2) \ldots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$D_{\nu r}(h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)rh}^{\tau_1}A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}A(\tau_2)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$H_{\nu r}(h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}B(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}B(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}A(\tau_2)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}B(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}f(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}A(\tau_2)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u,h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}A(\tau_2)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1.$$

Переходя в правой части (11) к пределу при $t\to rh-0$, имеем

$$\lim_{t\to rh-0}u_r(t)=G_{\nu r}(u,h)+D_{\nu r}(h)\lambda_r+H_{\nu r}(h)\lambda_0+F_{\nu r}(h),\qquad r=1,...,N. \tag{12}$$

Подставляя в граничные условия (8) и условия склеивания (9) вместо $u_r(t)$ его выражение (12), получим систему $Nn+m$ уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_N$:

$$[C_0+C_2H_{\nu N}(h)]\lambda_0+C_1\lambda_1+[C_2+C_2D_{\nu N}(h)]\lambda_N=d-F_{\nu N}(h)-G_{\nu N}(u,h),$$

$$H_{\nu r}(h)\lambda_0+(I+D_{\nu r}(h))\lambda_r-\lambda_{r+1}=-F_{\nu r}(h)-G_{\nu r}(u,h),\quad r=1,...,N-1. \tag{12a}$$

Умножим обе части (12a) на $h>0$ и перепишем полученную систему уравнений для определения неизвестных параметров $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_N)\in R^{nN+m}$ в матричном виде

$$Q_\nu(h)\lambda=-F_\nu(h)-G_\nu(u,h), \tag{13}$$

где

$$Q_\nu(h)=\begin{bmatrix}[C_0+C_2H_{\nu N}(h)]h & C_1h & 0 & \ldots & 0 & C_2[I+D_{\nu,N}(h)]h\\ H_{\nu 1}(h) & I+D_{\nu 1}(h) & -I & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ H_{\nu,N-1}(h) & 0 & 0 & \ldots & I+D_{\nu,N-1} & -I\end{bmatrix},$$

$$F_\nu(h) = (-hd + hC_2F_{\nu,N}(h), F_{\nu 1}(h), \ldots, F_{\nu,N-1}(h))' \in R^{nN+m},$$

$$G_\nu(u,h) = (hC_2G_{\nu,N}(u,h), G_{\nu 1}(u,h), \ldots, G_{\nu,N-1}(u,h))' \in R^{nN+m}.$$

Таким образом, для нахождения неизвестных $(\lambda_0, \lambda_r, u_r(t)), r = 1, ..., N$ имеем замкнутую систему уравнений (10), (13).

Решение многоточечной краевой задачи с параметром (7)—(9) находим по следующему алгоритму.

Шаг 0. Начальное приближение по параметру

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ldots \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN+m}$$

определяем из уравнения $Q_\nu(h)\lambda = -F_\nu(h)$. На отрезке $[(r-1)h, rh)$, решая задачу Коши (7) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(0)}, \lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим $u_r^{(0)}(t)$, $r = 1, ..., N$.

Шаг 1. Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r = 1, .., N$ в правую часть (13), из уравнения $Q_\nu(h)\lambda = -F_\nu(h) - G_\nu(u^{(0)}, h)$ определяем $\lambda^{(1)} = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)})$. На отрезке $[(r-1)h, rh)$, решая задачу Коши (7) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(1)}$, $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(1)}(t), r = 1, ..., N$. И т.д.

Продолжая процесс, на k-ом шаге получаем последовательность

$$(\lambda_0^{(k)}, \lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t)), \quad r = 1, ..., N, \quad k = 1, 2, ...$$

.

Т е о р е м а 1. *Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T$ и $\nu(\nu = 1, 2, \ldots)$ матрица $Q_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ обратима и выполняются неравенства*

$$||[Q_\nu(h)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(h), \tag{15a}$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \cdot \max(1, h\|C_2\|)(1 + \frac{\beta}{\alpha}) \cdot [e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}] < 1. \tag{15b}$$

Тогда краевая задача (1)—(2) имеет единственное решение $(\mu^*, x^*(t))$ и справедлива оценка

$$\|\mu^* - \mu^{(k)}\| \le \gamma_\nu(h) \max(1, h||C_2||) \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{[q_\nu(h)]^k}{1 - q_\nu(h)} \cdot M(h), \tag{16a}$$

$$||x^*(t) - x^{(k)}(t)|| \le \gamma_\nu(h) \max(1, h||C_2||) \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} e^{\alpha h} \cdot \frac{[q_\nu(h)]^k}{1 - q_\nu(h)} \cdot M(h), t \in [0, T], \tag{16b}$$

где $M(h) = \gamma_\nu(h) \cdot [e^{\alpha h} - 1](1 + \frac{\beta}{\alpha}) \max\left\{1 + h||C_2|| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}\right\} \times$
$\times \max(||d||, ||f(t)||_1)h + e^{\alpha h}||f(t)||_1 h,$
$x^{(k)}(t)$ *— кусочно-непрерывно дифференцируемая функция на $[0, T]$, для которой функция $\lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t)$ является сужением на $[(r-1)h, rh), r = 1, 2, \ldots, N$.*

Доказательство. Из обратимости $Q_\nu(h)$ следует существование $\lambda^{(0)}$ и

$$||\lambda^{(0)}|| = \max_{r=0,1,\ldots,N} ||\lambda_r^{(0)}|| \le ||[Q_\nu(h)]^{-1}|| \cdot ||F_\nu(h)|| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h) \cdot \max\left\{h||d|| + +h||C_2|| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} ||f(t)||_1 h, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} ||f(t)||_1 h\right\} \le$$

$$\leq \gamma_\nu(h)\max\left\{1+h||C_2||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right\}\max(||d||,||f(t)||_1)\cdot h. \qquad (17)$$

При наших предположениях задача Коши (7) при $\lambda_0=\lambda_0^{(0)}$, $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ имеет единственное решение $u_r^{(0)}(t)$. По неравенству Гроноулла-Беллмана

$$||u_r^{(0)}(t)||\leq[e^{\alpha[t-(r-1)h]}-1](||\lambda_r^{(0)}||+\frac{\beta}{\alpha}\|\lambda_0^{(0)}\|)+$$

$$+e^{\alpha[t-(r-1)h]}\cdot\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}||f(t)||h, \qquad r=1,2,\ldots,N,$$

откуда с учетом (17) получаем

$$||u^{(0)}(t)||_2=\max_r\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}||u_r^{(0)}(t)||\leq M(h). \qquad (18)$$

По первому шагу алгоритма определяем $\lambda^{(1)}$ и оцениваем $||\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}||$

$$||\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}||\leq\gamma_\nu(h)||G_\nu(u^{(0)},h)||\leq\gamma_\nu(h)\max(1,h||C_2||)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}||u^{(0)}(t)||_2\leq$$

$$\leq\gamma_\nu(h)\max(1,h||C_2||)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}M(h). \qquad (19)$$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательность $(\lambda_0^{(k)},\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=1,2,\ldots,N,\quad k=1,2,\ldots$ Вновь используя неравенства Гроноулла-Беллмана, оцениваем разность решений задач Коши через разность параметров

$$||u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)||\leq[e^{\alpha[t-(r-1)h]}-1](||\lambda_r^{(k)}-\lambda_r^{(k-1)}||+\frac{\beta}{\alpha}||\lambda_0^{(k)}-\lambda_0^{(k-1)}||). \qquad (20)$$

Из уравнения (13) следует, что

$$||\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}||=||[Q_\nu(h)]^{-1}[G_\nu(u^{(k)},h)-G_\nu(u^{(k-1)},h)]||\leq\gamma_\nu(h)max(1,h||C_2||)\times$$

$$\times\max_r\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\alpha\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\alpha||u_r^{(k)}(\tau_\nu)-u_r^{(k-1)}(\tau_\nu)||d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1\right\}. \qquad (21)$$

Подставляя сюда правую часть неравенства (20) и вычисляя повторные интегралы, имеем

$$||\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}||\leq q_\nu(h)||\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}||, \qquad k=1,2,\ldots$$

В силу (15b), (19)-(21) последовательность $(\lambda_0^{(k)},\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$ сходится к $(\lambda_0^*,\lambda_r^*,u_r^*(t))$ при $k\to\infty$ и имеют место оценки

$$||\lambda^*-\lambda^{(k)}||\leq\frac{[q_\nu(h)]^k}{1-q_\nu(h)}\cdot\gamma_\nu(h)\max(1,||C_2||)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!})M(h),$$

$$||u_r^*(t)-u_r^{(k)}(t)||\leq[e^{\alpha h}-1]\frac{[q_\nu(h)]^k}{1-q_\nu(h)}\cdot\gamma_\nu(h)\max(1,h||C_2||)\cdot\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}M(h).$$

Так как $(\lambda_0^*,\lambda_r^*,u_r^*(t)), r=1,...,N$ является решением задачи (7)—(9), то $(\mu^*,x^*(t))$, где $\mu^*=\lambda_0^*$, $x^*(t)=\lambda_r^*+u_r^*(t)$, $t\in[(r-1)h,rh), r=1,...,N$ будет решением исходной задачи (1)—(2) и справедливы оценки (16).

Докажем единственность решения. Предположим обратное. Пусть $(\mu^*, x^*(t)), (\tilde{\mu}, \tilde{x}(t))$ — два решения задачи (1)—(2). Тогда соответствующие им $(\lambda_0^*, \lambda_r^*, u_r^*(t))$, $\lambda_0^* = \mu^*$ и $(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{\mu}$, $r = 1, \ldots, N$ будут решениями краевой задачи (7)—(9) и, аналогично, (19)—(20)

$$||u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)|| \leq (e^{\alpha h} - 1)||\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r||,$$

$$||\lambda^* - \tilde{\lambda}|| \leq q_\nu(h)||\lambda^* - \tilde{\lambda}||,$$

где $q_\nu(h) < 1$. Отсюда $\lambda_r^* = \tilde{\lambda}_r$ и $u_r^*(t) = \tilde{u}_r(t)$, т.е. $x^*(t) = \tilde{x}(t)$, $\mu^* = \tilde{\mu}$, $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Краевая задача (1)—(2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого* $h > 0 : Nh = T, N = 1, 2, \ldots$ *существует* $\nu = \nu(h)$, *при котором матрица* $Q_\nu(h) : R^{nN+m} \to R^{nN+m}$ *обратима и выполняются неравенства (15).*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1.

Докажем необходимость условий теоремы. При наших предположениях относительно $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ для любых $\lambda_0 \in R^m$, $\lambda_r \in R^n$ решение задачи Коши (7) представимо в виде суммы равномерно сходящихся на $[(r-1)h, rh)$ рядов

$$u_r(t) = \left[\int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots\right]\lambda_r +$$

$$+\left[\int\limits_{(r-1)h}^{t} B(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} B(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots\right]\lambda_0 +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

Отсюда находим

$$\lim_{t \to rh-0} u_r(t) = D_r^*(h)\lambda_r + H_r^*(h)\lambda_0 + F_r^*(h), \tag{22a}$$

где $D_r^*(h) = \lim\limits_{\nu \to \infty} D_{\nu r}(h)$, $H_r^*(h) = \lim\limits_{\nu \to \infty} H_{\nu r}(h)$, $F_r^*(h) = \lim\limits_{\nu \to \infty} F_{\nu r}(h)$. Подставляя правую часть (22a) в (8), (9) умножая обе части (8) на h^{-1}, получим

$$h^{-1}Q^*(h)\lambda = -F^*(A, f, d, h), \tag{22b}$$

где $Q^*(h) = \lim\limits_{\nu \to \infty} Q_\nu(h)$, $F^*(A, f, d, h) = h^{-1} \lim\limits_{\nu \to \infty} F_\nu(h)$.

Если $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN+m}$– решение уравнения (22a), то, решая задачу Коши (7) при $\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0, \lambda_r = \tilde{\lambda}_r$ на $[(r-1)h, rh)$, находим $\tilde{u}_r(t)$, $r = 1, ..., N$. Составим функцию $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $t \in [(r-1)h, rh), r = 1, ..., N$, $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{u}_N(t) + \tilde{\lambda}_N$ и положим $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}_0$. Тогда пара $(\tilde{\mu}, \tilde{x}(t))$ является решением задачи (1)—(2).

С другой стороны, если $(\mu, x(t))$– решение задачи (1)—(2), то в силу эквивалентности задач (1)—(2) и (7)—(9) вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN+m}$, где $\lambda_0 = \mu$, $\lambda_r = x[(r-1)h]$, является решением уравнения (22a).

Покажем обратимость матрицы $Q^*(h)$. Для этого достаточно установить, что уравнение $Q^*(h)\lambda = 0$ имеет только нулевое решение. Допустим $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN+m}, \tilde{\lambda} \neq 0$ и $Q^*(h)\tilde{\lambda} = 0$. Тогда $(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, где $\tilde{u}_r(t)$– решение задачи Коши (7) на $[(r-1)h, rh)$ при

$\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = 1, ..., N$, будет ненулевым решением однородной многоточечной краевой задачи с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r + B(t)\lambda_0, \quad u_r[(r-1)h] = 0,$$
$$t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1, ..., N,$$
$$C_0\lambda_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_N + C_2 \lim_{t \to T-0} u_N(t) = 0,$$
$$\lambda_s + \lim_{t \to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = 1, ..., N-1.$$

Отсюда следует существование ненулевого решения двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu, \quad t \in (0, T),$$
$$C_0\mu + C_1 x(0) + C_2 x(T) = 0,$$

что противоречит однозначной разрешимости задачи (1)—(2). Поэтому $Q^*(h)$ обратима и $||[Q^*(h)]^{-1}|| \le \gamma(h)$. Так как

$$||Q^*(h) - Q_\nu(h)|| \le \max(1, h||C_2||)(1 + \frac{\beta}{\alpha})[e^{\alpha h} - 1 - \ldots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}]$$

и правая часть неравенства стремится к нулю при $\nu \to \infty$, то найдется $\bar{\nu}$, при котором

$$\gamma(h) \max(1, h||C_2||)(1 + \frac{\beta}{\alpha})[e^{\alpha h} - 1 - \ldots - \frac{(\alpha h)^{\bar{\nu}}}{\bar{\nu}!}] < \frac{1}{2}$$

и $||Q^*(h) - Q_\nu(h)|| < \frac{1}{2}$. По теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [10,с.142] матрица $Q_{\bar{\nu}}(h)$ будет обратимой и

$$||[Q_{\bar{\nu}}(h)]^{-1}|| \le \frac{\gamma(h)}{1 - \gamma(h)||Q_*(h) - Q_{\bar{\nu}}||} < \frac{\gamma(h)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\gamma(h) = \gamma_{\bar{\nu}}$$

и

$$q_{\bar{\nu}}(h) = \gamma_{\bar{\nu}}(h) \cdot \max(1, h||C_2||)(1 + \frac{\beta}{\alpha})[e^{\alpha h} - 1 - \ldots - \frac{(\alpha h)^{\bar{\nu}}}{\bar{\nu}!}] < 1.$$

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Hikosaka-Noboru.** // Proc. Phys. Math. Soc., Japan. 1929. V.3. P.73 - 83.
2. **Takahaschi S.** , //Tohoku Math. Journal. 1931. V.34. P.249 - 256.
3. **Zawischa K.** // Mon. fur Math. und Phys. 1930. V.37. C.104 - 124.
4. **Zwirner G.** //Rend. Sem. Mat. die Roma. 1939. V.4,I. P.235 - 252.
5. **Кибенко А. В, Перов А. И.** //Ученые записки АзГУ им.С.М.Кирова. Сер. физ.- мат. и хим. наук.1961. №3. С.21 - 30.
6. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев. 1986.
7. **Эйдельман Ю.** //Дифференц. уравнения. 1978. Т.14, №7. С.1335 - 1337.
8. **Джумабаев Д. С.** //Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1989. №1. С.50 - 66.
9. **Джумабаев Д. С.** //Изв. МН и ВО РК, Сер. физ.-мат. 1999. №1. С.31 - 37.
10. **Треногин В. В.** // Функциональный анализ. М.,1980.

Поступила в редакцию 17.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 63 — 68*

УДК 517.946

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ТИПА ЛАГЕРРА

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский гос.университет им. К.Жубанова
463000 Актобе, ул. А.Молдагуловой, 34 tasmam@rambler.ru

Определен класс систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, решениями которых являются ортогональные многочлены Лагерра по двум переменным.

Исследования состояния электрона, находящегося в кулоновском поле, а также другие задачи современной физики и математики приводят к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, решениями которых являются обобщенные полиномы Лагерра. Эти полиномы достаточно изучены в работах К.Якоби, Э.Лагерра, Г.Сеге, Ш.Эрмита, Т.Стильтьеса и др. известных математиков [1]. До сих пор малоизученными остаются полиномы Лагерра двух переменных и их связь с системами двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, хотя в работах Г.Кролля, И.Шефера, Г.К. Энгелиса, П.К. Суетина такая связь установлена с одним дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Эти дифференциальные уравнения называются допустимыми и ортогональные многочлены двух переменных определяются как собственные функции таких уравнений [2].

В данной работе определен класс систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, решениями которых являются ортогональные многочлены Лагерра по двум переменным.

Постановка задачи. Пусть задана система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} x\cdot Z_{xx}+(1+\alpha-a\cdot x)\cdot Z_x+(b-1)\cdot y\cdot Z_y+n\cdot Z=0,\\ y\cdot Z_{yy}+(1+\beta-b\cdot y)\cdot Z_y+(a-1)\cdot x\cdot Z_x+m\cdot Z=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a, b — некоторые постоянные и $a \neq 1, b \neq 1; \alpha > -1, \beta > -1; Z = Z(x, y)$ — общая неизвестная.

Используя метод Фробениуса-Латышевой, требуется найти решения системы (1) и ее различных частных случаев в виде специальных функций и ортогональных многочленов двух переменных, в частности, в виде многочленов Лагерра по двум переменным.

Keywords: *Laguerre type system, orthogonal polynomial*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20, 35A25, 35C05

Для системы (1) как системы типа Вильчинского [3], всегда выполняется условие интегрируемости. Допустим, что система (1) совместна. Система (1) имеет особенности $(0,0)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$ и (∞,∞). Регулярность и иррегулярность особенностей можно определить по рангу p и антирангу m этой системы [4]. Для системы (1) ранг $p=1$ и $m=0$, поэтому особенность $(0,0)$ является регулярной, а (∞,∞) — иррегулярной. Имеет место преобразование

$$Z = \exp\left(\alpha_{10}\cdot x + \alpha_{01}\cdot y\right)\cdot U\left(x,y\right) \tag{2}$$

с неизвестными коэффициентами α_{10} и α_{01}. Новая неизвестная $U\left(x,y\right)$ определяется из вспомогательных систем в виде обобщенных степенных рядов двух переменных по возрастающим

$$U\left(x,y\right) = x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu} \quad \left(A_{00}\neq 0\right), \tag{3}$$

или — убывающим

$$U\left(x,y\right) = x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu} \quad \left(B_{00}\neq 0\right) \tag{4}$$

степеням независимых переменных x и y.

Определение решений общей системы. Решение системы ищем в виде обобщенного степенного ряда (3). Система характеристических функций

$$\begin{aligned} L_1[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}] &= x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\{\rho\cdot(\rho+\alpha)+[a\cdot\rho+(b-1)\cdot\sigma-n]\cdot x\}, \\ L_2[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}] &= x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\{\sigma\cdot(\sigma+\beta)-[b\cdot\sigma+(-1)\cdot\rho-m]\cdot y\} \end{aligned}$$

имеет системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$

$$\left.\begin{aligned} f_{00}^{(1)}\left(\rho,\sigma\right) &\equiv \rho\cdot(\rho+\alpha)=0, \\ f_{00}^{(2)}\left(\rho,\sigma\right) &\equiv \sigma\cdot(\sigma+\beta)=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и относительно особенности (∞,∞)

$$\left.\begin{aligned} f_{10}^{(1)}\left(\rho,\sigma\right) &\equiv \varphi_{00}^{(1)}\left(\rho,\sigma\right) = -[a\cdot\rho+(b-1)\cdot\sigma-n]=0, \\ f_{01}^{(2)}\left(\rho,\sigma\right) &\equiv \varphi_{00}^{(2)}\left(\rho,\sigma\right) = -[b\cdot\sigma-(a-1)\cdot\rho-m]=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Система определяющих уравнений (5) имеет четыре пары корней: $(\rho_1=0,\ \sigma_1=0)$; $(\ \rho_2=-\alpha,\ \sigma_1=0)$; $(\rho_1=0,\ \sigma_2=-\beta)$; $(\ \rho_2=-\alpha, \sigma_2=-\beta)$. Исследования показывают, что совместность системы (1) обеспечивается только при выполнении условий $a=b$, $n=m$. При этих условиях удается найти только одно решение, соответствующее паре $(\rho_1=0,\ \sigma_1=0)$

$$\begin{aligned} Z_1\left(x,y\right) = 1 &- \frac{n}{1!\cdot(\alpha+1)}\cdot x - \frac{n}{1!\cdot(\beta+1)}\cdot y + \frac{(a-1+n)\cdot n}{1!\cdot(\alpha+1)\cdot(\beta+1)}\cdot xy - \\ &- \frac{(a-n)\cdot n}{2!\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)}\cdot x^2 - \frac{(a-n)\cdot n}{2!\cdot(\beta+1)\cdot(\beta+2)}\cdot y^2 - \dots . \end{aligned} \tag{7}$$

Если система определяющих уравнений (6) имеет хотя бы одну пару корней, то система (1) при выполнении условий совместности имеет хотя бы одно решение в виде обобщенных степенных рядов по убывающим степеням (4).

Система (1) имеет ряд интересных частных случаев, изученных в работах Г.К.Энгелиса, П.К.Суетина и др [2]. Переходим к рассмотрению этих случаев.

I. Наиболее интересный случай получается при $\alpha > -1, \beta > -1$; $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; $a = b = 1$ и $n \neq m$. Тогда имеем систему

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot Z_{xx} + (1+\alpha - x) \cdot Z_x + n \cdot Z = 0, \\ y \cdot Z_{yy} + (1+\beta - y) \cdot Z_y + m \cdot Z = 0, \end{array}\right\} \tag{8}$$

решениями которой являются обобщенные полиномы $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $L_m^{(\beta)}(y)$.

Действительно, первое уравнение, как обыкновенное уравнение Лагерра [5], в интервале $(0, \infty)$ имеет решение в виде обобщенного полинома Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = C_n \cdot F(-n, \alpha+1; x) = C_n \cdot \left[1 - \frac{n}{1! \cdot (\alpha+1)} \cdot x + \frac{n(n-1)}{2! \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2)} \cdot x^2 - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)\ldots 1}{n! \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+n)} \cdot x^n \right], \tag{9}$$

поскольку при $\alpha > -1$ необходимым и достаточным условием того, что уравнение

$$x \cdot Z_{xx} + (\alpha + 1 - x) \cdot Z_x + \lambda_1 \cdot Z = 0 \tag{10}$$

имеет решение в виде многочлена, является равенство $\lambda_1 = n$. Единственным решением в виде многочлена является $L_n^{(\alpha)}(x)$ [1].

Аналогично, найдем решение второго уравнения системы (8)

$$L_m^{(\beta)}(y) = C_m \cdot F(-m, \beta+1; y) = C_m \cdot \left[1 - \frac{m}{1! \cdot (\beta+1)} \cdot y + \frac{m(m-1)}{2! \cdot (\beta+1) \cdot (\beta+2)} \cdot y^2 - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^m \cdot \frac{m(m-1)\ldots 1}{m! \cdot (\beta+1) \cdot (\beta+m)} \cdot y^m \right]. \tag{11}$$

Как и в предыдущем случае при $\beta > -1$ необходимым и достаточным условием того, что уравнение

$$y \cdot Z_{yy} + (\beta + 1 - y) \cdot Z_y + \lambda_2 \cdot Z = 0 \tag{12}$$

имеет решение в виде многочлена является равенство $\lambda_2 = m$. Единственное решение — это многочлен $L_m^{(\beta)}(y)$.

Решение системы (8) представимо в виде произведения обобщенных полиномов, т.е.

$$Z(x,y) = Z_{10}(x) \cdot Z_{01}(y) = L_n^{(\alpha)}(x) \cdot L_m^{(\beta)}(y) =$$
$$= C_{nm} \cdot \left[1 - \frac{n}{1!(\alpha+1)} \cdot x - \frac{m}{1!(\beta+1)} \cdot y + \frac{n \cdot m}{1!(\alpha+1)(\beta+1)} \cdot xy - \right. \tag{13}$$
$$\left. - \ldots + (-1)^{n+m} \frac{n \cdot (n-1)\ldots 1}{n!(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} \cdot \frac{m \cdot (m-1)\ldots 1}{m!(\beta+1)\ldots(\beta+m)} \cdot x^n \cdot y^m \right],$$

где $Z_{10}(x)$ — частное решение первого уравнения системы (8), $Z_{01}(y)$ — частное решение второго уравнения; $C_{nm} = C_n \cdot C_m$, где

$$C_n = (\alpha+1) \cdot (\alpha+2) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$C_m = (\beta+1) \cdot (\beta+2) \cdot \ldots \cdot (\beta+m) = \frac{\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(\beta+1)},$$

$$C_{nm} = C_n \cdot C_m = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Приведенные выше рассуждения показывают справедливость следующего утверждения

Теорема 1. *Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*

$$\left.\begin{aligned} x\cdot Z_{xx}+(1+\alpha-x)\cdot Z_x+\lambda_1\cdot Z=0,\\ y\cdot Z_{yy}+(1+\beta-y)\cdot Z_y+\lambda_2\cdot Z=0,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где λ_1 и λ_2 — параметры, имеет решением многочлен, не равный нулю тождественно, тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 имеют вид $\lambda_1 = n, \quad \lambda_2 = m$.

Это решение определяется в виде (13) и представимо в виде произведения обобщенных полиномов Лагерра по независимым переменным x и y

$$L_{nm}^{(\alpha\beta)}(x,y)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(\beta+1)}\cdot\left[1-\frac{n}{1!(\alpha+1)}\cdot x-\frac{m}{1!(\beta+1)}\cdot y+\right.$$
$$+\frac{n\cdot m}{1!(\alpha+1)(\beta+1)}\cdot xy-... \tag{15}$$
$$\left.+(-1)^{n+m}\frac{n\cdot(n-1)...1}{n!(\alpha+1)...(\alpha+n)}\cdot\frac{m\cdot(m-1)...1}{m!(\beta+1)...(\beta+m)}\cdot x^n\cdot y^m\right].$$

Теорему можно доказать и другим путем, непосредственно подставляя ряд

$$Z(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\quad(C_{00}\neq 0) \tag{16}$$

в систему (14).

II. Пусть в системе (1) $\alpha = 0, \beta = 0; a = 1, b = 1$ и $n \neq m$. Решением полученной системы

$$\left.\begin{aligned} x\cdot Z_{xx}+(1-x)\cdot Z_x+n\cdot Z=0,\\ y\cdot Z_{yy}+(1-y)\cdot Z_y+m\cdot Z=0\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

является произведение простых полиномов Лагерра

$$L_{nm}(x,y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)}\cdot\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(1)}\cdot\left[1-\frac{n}{1!}\cdot x-\frac{m}{1!}\cdot y+\right.$$
$$\left.+\frac{n\cdot m}{1!}\cdot xy-...+(-1)^{n+m}\frac{n\cdot(n-1)...1}{n!\cdot 1\cdot 2\cdot...\cdot n}\cdot\frac{m\cdot(m-1)...1}{m!\cdot 1\cdot 2\cdot...\cdot m}\cdot x^n\cdot y^m\right]. \tag{18}$$

III. Третий частный случай, получающийся из системы (1) при $\alpha = -1$, $\beta = -1$; $a = b = 1$, $n \neq m$, помогает раскрыть связь полиномов Лагерра и Эрмита. Действительно, в этом случае полученная система

$$\left.\begin{aligned} x\cdot Z_{xx}+x\cdot Z_x+n\cdot Z=0,\\ y\cdot Z_{yy}+y\cdot Z_y+m\cdot Z=0\end{aligned}\right\}$$

с помощью замены приводится к системе вида

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx}-x\cdot Z_x+\lambda_1\cdot Z=0,\\ Z_{yy}-y\cdot Z_y+\lambda_2\cdot Z=0.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Для этой системы справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\alpha = -1$, $\beta = -1$; $a = b = 1$, $n \neq m$. Система дифференциальных уравнений (19), полученная из системы (8) с помощью замены переменных $x_1 = x^2$ и $y_1 = y^2$, где λ_1 и λ_2 – параметры, имеет решением многочлен, не равный нулю тождественно, тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 имеют вид $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = m$.*

Это решение определяется в виде произведения многочленов Эрмита $H_n(x)$ и $H_m(y)$

$$H_{nm}(x,y) = H_n(x) \cdot H_m(y) = (-1)^{n+m} \cdot e^{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \cdot \frac{d^m}{dy^m}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right). \qquad (20)$$

Известно [2], что произведения многочленов Лагерра вида (15) удовлетворяют одному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$x \cdot Z_{xx} + y \cdot Z_{yy} + (1+\alpha-x) \cdot Z_x + (1+\beta-y) \cdot Z_y + (n+m) \cdot Z = 0, \qquad (21)$$

полученному путем сложения двух уравнений системы (1) и (8). Это уравнение относится к десятой нормальной форме допустимых уравнений и называется уравнением Лагерра. Отсюда при $\alpha = 0, \beta = 0$ получаем уравнение

$$x \cdot Z_{xx} + y \cdot Z_{yy} + (1-x) \cdot Z_x + (1-y) \cdot Z_y + (n+m) \cdot Z = 0, \qquad (22)$$

относящееся к этому типу уравнений, с решениями в виде (18).

Уравнение

$$Z_{xx} + Z_{yy} + x \cdot Z_x + y \cdot Z_y + (n+m) \cdot Z = 0, \qquad (23)$$

полученное путем сложения двух уравнений системы (19), относится к тринадцатой нормальной форме основного допустимого уравнения, решениями которого является произведение многочленов Эрмита (20). Это уравнение называется уравнением Эрмита-Эрмита.

Таким образом, установлена связь изучаемых систем (8), (17) и (19) с уравнениями в частных производных второго порядка (21), (22), (23). По аналогии с одним уравнением в частных производных второго порядка систему (1) и ее частные случаи (8), (17) и (19) также назовем системами типа Лагерра. Решения этих систем назовем полиномами Лагерра. При различных значениях α, β, a, b эти решения одновременно удовлетворяют и системе типа Лагерра и одному из уравнений вида (21), (22) и (23).

Применение понятия ранга и антиранга позволяет получить и другие решения систем типа Лагерра, а также уравнений типа Лагерра. Действительно, при p=1 и $m \leq 0$ из системы (8) с помощью преобразования (2) получим четыре вспомогательные системы:

1. При $(\alpha_{10} = 0,\ \alpha_{01} = 0)$ многочлен $Q(x,y) = \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{01} \cdot y \equiv 0$ и получится исходная система (8). Возможности нахождения решений в виде многочленов нами исследованы ранее.

2. Пара $(\alpha_{10} = 1,\ \alpha_{01} = 0)$ определяет многочлен $Q(x,y) = x$ и систему

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot U_{xx} + (\alpha+1+x) \cdot U_x + (\alpha+n+1) \cdot U = 0, \\ y \cdot U_{yy} + (\beta+1-y) \cdot U_y + m \cdot U = 0. \end{array}\right\}$$

3. Пара $(\alpha_{10} = 0,\ \alpha_{01} = 1)$ определяет многочлен $Q(x,y) = y$ и систему

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot U_{xx} + (\alpha+1-x) \cdot U_x + n \cdot U = 0, \\ y \cdot U_{yy} + (\beta+1+y) \cdot U_y + (\beta+1+m) \cdot U = 0. \end{array}\right\}$$

4. Наконец, пара $(\alpha_{10} = 1,\ \alpha_{01} = 1)$ определяет многочлен $Q(x,y) = x+y$ и соответствующую систему

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot U_{xx} + (\alpha+1+x) \cdot U_x + (\alpha+n+1) \cdot U = 0, \\ y \cdot U_{yy} + (\beta+1+y) \cdot U_y + (\beta+m+1) \cdot U = 0, \end{array}\right\}$$

одним из решений которой является

$$Z(x,y) = e^{x+y} \cdot \left[1 - \frac{\alpha+n+1}{1!\,(\alpha+1)} \cdot x - \frac{\beta+m+1}{1!\,(\beta+1)} \cdot y + \frac{(\alpha+n+1)\cdot(\beta+m+1)}{1!\,(\alpha+1)\,(\beta+1)} \cdot xy + \right.$$

$$+\frac{(\alpha+n+1)\cdot(\alpha+n+2)}{2!\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)}\cdot x^2+\frac{(\beta+m+1)\cdot(\beta+m+2)}{2!\,(\beta+1)\,(\beta+2)}\cdot y^2+...\Bigg].$$

Аналогично можно построить и другие решения всех вспомогательных систем, а также найти условия, когда они обращаются в конечные решения. Все эти решения относятся к нормально-регулярным решениям [6] вида

$$Z\,(x,y)=expQ\,(x,y)\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\quad(C_{0,0}\neq0)\,,$$

где ρ,σ, $C_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,...)$ — неизвестные постоянные, $Q\,(x,y)$ — многочлен двух переменных с неизвестными коэффициентами, подлежащие определению [7].

Цитированная литература

1. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М., 1962.

2. **Суетин П.К.** Ортогональные многочлены по двум переменным. М., 1969.

3. **Wilczynski E.J.** Projective differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig, 1906.

4. **Тасмамбетов Ж.Н.** // Труды международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"Алматы, 2002. С. 86-90.

5. **Кузнецов Д.С.** Специальные функции. М., 1965.

6. **Тасмамбетов Ж.Н.** // Известия МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1998. № 5. С. 51 – 57.

7. **Тасмамбетов Ж.Н.** // Вестник Актюбинского университета. Актобе, 1998. ч.2. С. 11 — 15.

Поступила в редакцию 03.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 69 — 74*

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

А. Н. Тюреходжаев, Г. У. Маматова

Казахский национальный технический университет им.К.И.Сатпаева
г. Алматы, ул.Сатпаева, 22

Рассматривается круглая гибкая пластина с начальным прогибом, закрепленная по контуру и подвергающаяся действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q.

Основная система дифференциальных уравнений теории гибкой круглой пластины с начальным прогибом имеет следующий вид [1]

$$\left.\begin{aligned} &D\frac{d}{dr}\left(\nabla^2\omega\right) = \psi + \frac{h}{r}\frac{d\Phi}{dr}\left(\frac{d\omega}{dr} + \frac{d\omega_{нч}}{dr}\right),\\ &\frac{d}{dr}\left(\nabla^2\Phi\right) = -\frac{E}{r}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 + \frac{d\omega_{нч}}{dr}\frac{d\omega}{dr}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где ψ — функция нагрузки, равная

$$\psi = \frac{1}{r}\int\limits_0^r qr dr,$$

Φ — функция напряжения, введенная по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{d}r^2,$$

E — модуль упругости, ω — прогиб, $\omega_{\text{НЧ}}$ — начальный прогиб, σ_r, σ_φ — радиальное и тангенциальное напряжения.

А.С. Вольмир для получения решения такого рода задач задается формой прогиба и в дальнейшем использует метод Бубнова-Галеркина [1]. Система уравнений (1) нередко исследуется

Keywords: *Corner of a deflection, nonlinear equation,flexible plate,initial curvature,bend, stretching*
2000 Mathematics Subject Classification: 74B05, 74B20

методом малого параметра, когда множитель перед нелинейными членами является малым. В случае, когда такое ограничение на множитель не ставится, получение решения является проблемой. Поэтому можно воспользоваться методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений, точность получаемого решения для которого многократно проверялась при решении задач, связанных с получением изгибов пластин [2].

Пользуясь методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений [2], [3],запишем второе уравнение системы (1) в виде

$$\frac{d^3\Phi}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2\Phi}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi}{dr}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(r_k+r_{k+1}\right)\left(\frac{E}{r_k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\delta\left(r-r_k\right)-\frac{E}{r_{k+1}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\delta\left(r-r_{k+1}\right)\right), \tag{2}$$

где $\delta(r-r_k)$ — обобщенная дельта-функция Дирака.

Общее решение уравнения (2) имеет следующее выражение.

$$\frac{d\Phi}{dr}=C_1r+C_2\frac{1}{r}-\frac{E}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(r_k+r_{k+1}\right)\left(\frac{1}{r_k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\times\right.$$
$$\times\left(r-\frac{r_k^2}{r}\right)H\left(r-r_k\right)-\frac{1}{r_{k+1}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\times$$
$$\left.\times\left(r-\frac{r_{k+1}^2}{r}\right)H\left(r-r_{k+1}\right)\right),$$

где $H(r-r_k)$ — функция Хевисайда.

Рассмотрим пластину с отверстием внутреннего радиуса r_a. Внешний радиус обозначим через c. Отметим, что система уравнений (1) записана для пластины постоянной толщины h. Вследствие того, что на r_a не накладывается ограничение о малости, произвольную постоянную C_2 примем равной нулю. Граничные условия зададим в виде.

$$\left.\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=r_a}=\sigma_o=const, \tag{3}$$

$$\theta|_{r=c}=\left(-\frac{d\omega}{dr}\right)_{r=c}=0, \tag{4}$$

$$\omega|_{r=c}=0. \tag{5}$$

Тогда в силу условий (3) решение задачи (2) — (3) запишется следующим образом

$$\frac{d\Phi}{dr}=\frac{\sigma_o}{r_a}-\frac{E}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(r_k+r_{k+1}\right)\left(\frac{1}{r_k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\times\right.$$
$$\times\left(r-\frac{r_k^2}{r}\right)H\left(r-r_k\right)-\frac{1}{r_{k+1}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\times \tag{6}$$
$$\left.\times\left(r-\frac{r_{k+1}^2}{r}\right)H\left(r-r_{k+1}\right)\right).$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы (1) и выполним далее дискретизацию множителя $\dfrac{d\omega}{dr}$ в правой части этого уравнения. В результате первое уравнение системы (1) примет вид

$$\frac{d^3\omega}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2\omega}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d\omega}{dr}=\frac{\psi}{D}+\frac{h\sigma_o}{Dr_a}\cdot\frac{d\omega_{нч}}{dr}\cdot\frac{1}{r}-\frac{Eh}{4D\,r}\cdot\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r_k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\left(r-\frac{r_k^2}{r}\right)H\left(r-r_k\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{r_{k+1}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\left(r-\frac{r_{k+1}^2}{r}\right)H\left(r-r_{k+1}\right)\right)\frac{d\omega_{нч}}{dr}\right)+$$
$$+\frac{h\sigma_o}{2Dr_a}\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\left(\frac{1}{r_k}\frac{d\omega_k}{dr}\delta\left(r-r_k\right)-\frac{1}{r_{k+1}}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\delta\left(r-r_{k+1}\right)\right)- \qquad (7)$$
$$-\frac{Eh}{8D}\cdot\sum_{k=2}^{n}(r_{k+1}-r_{k-1})\left\{\sum_{i=1}^{k-1}(r_i+r_{i+1})\left(\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_i}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_i}}{dr}\frac{d\omega_i}{dr}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(r-\frac{r_i^2}{r}\right)-\frac{1}{r_{i+1}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{i+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{i+1}}}{dr}\frac{d\omega_{i+1}}{dr}\right)\left(r-\frac{r_{i+1}^2}{r}\right)\right)\right\}\frac{d\omega_k}{dr}\delta(r-r_k).$$

После соответствующих преобразований с учетом свойств обобщенных функций и условий (4) получим

$$\frac{d\omega}{dr}=F(r)+\frac{Eh}{8D}\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}B(r,r_k)-\right.\right.$$
$$\left.-rA(r,r_k)-\frac{r}{c^2}B(c,r_k)+rA(c,r_k)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{r}B(r,r_{k+1})-rA(r,r_{k+1})-\left(\frac{r}{c^2}B(c,r_{k+1})+rA(c,r_{k+1})\right)\right)\right)+$$
$$+\frac{h\sigma_o}{4Dr_a}\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\left[\left(\left(\frac{r}{r_k}-\frac{r_k}{r}\right)H(r-r_k)-\frac{r}{r_k}+\frac{r_kr}{c^2}\right)\frac{d\omega_k}{dr}-\right.$$
$$\left.-\left(\left(\frac{r}{r_{k+1}}-\frac{r_{k+1}}{r}\right)H(r-r_{k+1})-\frac{r}{r_{k+1}}+\frac{r_{k+1}r}{c^2}\right)\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right]+$$
$$+\frac{Eh}{16D}\sum_{k=2}^{n}(r_{k+1}-r_{k-1})\left\{\sum_{i=1}^{k-1}(r_i+r_{i+1})\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_i}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_i}}{dr}\frac{d\omega_i}{dr}\right)\times\right.\right.$$
$$\times\left[\left(\frac{r_k^2}{r_ir}-\frac{r_i}{r}-\frac{r}{r_i}+\frac{r_ir}{r_k^2}\right)H(r-r_k)-\left(\frac{r_k^2}{r_ic^2}-\frac{r_i}{c^2}-\frac{1}{r_i}+\frac{r_i}{r_k^2}\right)r\right]-$$
$$-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{i+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{i+1}}}{dr}\frac{d\omega_{i+1}}{dr}\right)\left[\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}r}-\frac{r_{i+1}}{r}-\frac{r}{r_{i+1}}+\frac{r_{i+1}r}{r_k^2}\right)H(r-r_k)-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}c^2}-\frac{r_{i+1}}{c^2}-\frac{1}{r_{i+1}}+\frac{r_{i+1}}{r_k^2}\right)r\right]\right)\right\}\frac{d\omega_k}{dr}, \qquad (8)$$

где

$$F(r) = \frac{r}{2D}\int \psi dr - \frac{1}{2Dr}\int r^2\psi dr + \frac{h\sigma_o r}{2Dr_a}\int \frac{1}{r}\frac{d\omega_{нч}}{dr}dr - \frac{h\sigma_o}{2Dr_a r}\int \frac{d\omega_{нч}}{dr}r\,dr -$$

$$-r\left[\frac{1}{2D}\int \psi dr + \frac{1}{2Dc^2}\int r^2\psi dr - \frac{h\sigma_o}{2Dr_a}\int \frac{1}{r}\frac{d\omega_{нч}}{dr}dr + \frac{h\sigma_o}{2Dr_a c^2}\int \frac{d\omega_{нч}}{dr}r\,dr\right]_{r=c},$$

$$B(r, r_k) = \int \left(\frac{r^2}{r_k} - r_k\right)\frac{d\omega_{нч}}{dr}H(r - r_k)dr,$$

$$A(r, r_k) = \int \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2}\right)\frac{d\omega_{нч}}{dr}H(r - r_k)dr.$$

При этом углы поворота в точках r_k, $k = \overline{1, n}$ определяются из системы следующих алгебраических уравнений второго порядка

$k = 1$

$$\frac{Eh}{16D}(r_1 + r_2)\left(\frac{1}{r_1}B(r_1, r_1) - r_1 A(r_1, r_1) - \frac{r_1}{c^2}B(c, r_1) + r_1 A(c, r_1)\right)\left(\frac{d\omega_1}{dr}\right)^2 +$$

$$+\left\{\frac{Eh}{8D}(r_1 + r_2)\frac{d\omega_1}{dr}\left(\frac{1}{r_1}B(r_1, r_1) - r_1 A(r_1, r_1) - \frac{r_1}{c^2}B(c, r_1) + r_1 A(c, r_1)\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a}(r_1 + r_2)\left(\frac{r_1^2}{c^2} - 1\right) - 1\right\}\frac{d\omega_1}{dr} + F(r_1) = 0,$$

$k = \overline{2, n}$

$$\frac{Eh}{16D}(r_{k+1} - r_{k-1})\left(\frac{1}{r_k}B(r_k, r_k) - r_k A(r_k, r_k) - \frac{r_k}{c^2}B(c, r_k) + r_k A(c, r_k)\right)\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2 +$$

$$+\left\{\frac{Eh}{8D}(r_{k+1} - r_{k-1})\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\left(\frac{1}{r_k}B(r_k, r_k) - r_k A(r_k, r_k) - \frac{r_k}{c^2}B(c, r_k) + r_k A(c, r_k)\right) +\right.$$

$$+\frac{h\sigma_o}{4Dr_a}(r_{k+1} - r_{k-1})\left(\frac{r_k^3}{c^2} - 1\right) + \frac{Eh}{16D}(r_{k+1} - r_{k-1})\left\{(r_1 + r_2)\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_1}{dr}\right)^2 +\right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{d\omega_{нч_1}}{dr}\frac{d\omega_1}{dr}\right)\left[\left(\frac{r_k^2}{r_1 c^2} - \frac{r_1}{c^2} - \frac{1}{r_1} + \frac{r_1}{r_k^2}\right)r_k + \sum_{i=2}^{k-1}(r_{i+1} - r_{i-1})\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_i}{dr}\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{d\omega_{нч_i}}{dr}\frac{d\omega_i}{dr}\right)\left(\frac{r_k^2}{r_i c^2} - \frac{r_i}{c^2} - \frac{1}{r_i} + \frac{r_i}{r_k^2}\right)r_k\right\} - 1\right\}\frac{d\omega_k}{dr} + \frac{Eh}{8D}\{(r_1 + r_2)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_1}{dr}\right)^2 + \frac{d\omega_{нч_1}}{dr}\frac{d\omega_1}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_k}B(r_k, r_1) - r_k A(r_k, r_1) - \frac{r_k}{c^2}B(c, r_1) +\right.\right.$$

$$\left. + r_k A(c, r_1)\right) + \sum_{i=2}^{k}(r_{i+1} - r_{i-1})\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_i}{dr}\right)^2 + \frac{d\omega_{нч_i}}{dr}\frac{d\omega_i}{dr}\right)\left(\frac{1}{r_k}B(r_k, r_i) -\right.$$

$$\left.\left. - r_k A(r_k, r_i) - \frac{r_k}{c^2}B(c, r_i) + r_k A(c, r_i)\right)\right\} + \frac{h\sigma_o}{4Dr_a}(r_1 + r_2)\left(\frac{r_k r_1}{c^2} - \frac{r_1}{r_k}\right)\frac{d\omega_1}{dr} +$$

$$+\frac{h\sigma_o}{4D\,r_a}\sum_{i=2}^{k-1}(r_{i+1}-r_{i-1})\left(\frac{r_kr_i}{c^2}-\frac{r_i}{r_k}\right)\frac{d\omega_i}{dr}+\frac{Eh}{16D}\sum_{j=2}^{k-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\left\{(r_1+r_2)\times\right.$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_1}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_1}}{dr}\frac{d\omega_1}{dr}\right)\left\{\frac{r_j^2}{r_1r_k}-\frac{r_1}{r_k}-\frac{r_k}{r_1}+\frac{r_kr_1}{r_j^2}-\left(\frac{r_j^2}{r_ic^2}-\frac{r_1}{c^2}-\frac{1}{r_1}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r_1}{r_j^2}\right)r_k\right\}+\sum_{i=2}^{j-1}(r_{j+1}-r_{j-1})\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_i}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_i}}{dr}\frac{d\omega_i}{dr}\right)\left\{\frac{r_j^2}{r_ir_k}-\frac{r_i}{r_k}-\frac{r_k}{r_i}+\frac{r_kr_i}{r_j^2}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(\frac{r_j^2}{r_ic^2}-\frac{r_i}{c^2}-\frac{1}{r_i}+\frac{r_i}{r_j^2}\right)r_k\right\}\right\}+F(r_k)=0.$$

Интегрируя (8) и учитывая условие (5), решение первого дифференциального уравнения системы (1) получим в виде

$$\omega=\int\left(F(r)+\frac{Eh}{8D}\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}B(r,r_k)-\right.\right.\right.$$

$$\left.-rA(r,r_k)-\frac{r}{c^2}B(c,r_k)+rA(c,r_k)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\frac{1}{r}B(r,r_{k+1})-rA(r,r_{k+1})-\frac{r}{c^2}B(c,r_{k+1})+rA(c,r_{k+1})\right)\right)\right)dr-$$

$$-\left[\int\left(F(r)+\frac{Eh}{8D}\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_k}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_k}}{dr}\frac{d\omega_k}{dr}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{r}B(r,r_k)-rA(r,r_k)-\frac{r}{c^2}B(c,r_k)+rA(c,r_k)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{k+1}}}{dr}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}B(r,r_{k+1})-rA(r,r_{k+1})-\frac{r}{c^2}B(c,r_{k+1})+rA(c,r_{k+1})\right)\right)\right)dr\right]_{r=c}+$$

$$+\frac{h\sigma_o}{4Dr_a}\sum_{k=1}^{n}(r_k+r_{k+1})\left[\left(\left(\frac{r^2}{2r_k}-r_k\ln\frac{r}{r_k}-\frac{r_k}{2}\right)H(r-r_k)-\frac{r^2}{2r_k}+\frac{r_kr^2}{2c^2}+\right.\right.$$

$$\left.+r_k\ln\frac{c}{r_k}\right)\frac{d\omega_k}{dr}-\left(\left(\frac{r^2}{2r_{k+1}}-r_{k+1}\ln\frac{r}{r_{k+1}}-\frac{r_{k+1}}{2}\right)H(r-r_{k+1})-\frac{r^2}{2r_{k+1}}+\frac{r_{k+1}r^2}{2c^2}+\right.$$

$$\left.\left.+r_{k+1}\ln\frac{c}{r_{k+1}}\right)\frac{d\omega_{k+1}}{dr}\right]+\frac{Eh}{16D}\sum_{k=2}^{n}(r_{k+1}-r_{k-1})\left\{\sum_{i=1}^{k-1}(r_i+r_{i+1})\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_i}{dr}\right)^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{d\omega_{нч_i}}{dr}\frac{d\omega_i}{dr}\right)\left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_i}-r_i\right)\ln\frac{r}{r_k}-\frac{r^2}{2r_i}+\frac{r_ir^2}{2r_k^2}+\frac{r_k^2}{2r_i}-\frac{r_i}{2}\right)H(r-r_k)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{r_k^2}{r_ic^2}-\frac{r_i}{c^2}-\frac{1}{r_i}+\frac{r_i}{r_k^2}\right)\frac{r^2}{2}-\left(\frac{r_k^2}{r_i}-r_i\right)\ln\frac{c}{r_k}\right]-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega_{i+1}}{dr}\right)^2+\frac{d\omega_{нч_{i+1}}}{dr}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\omega_{i+1}}{dr}\right)\left[\left(\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}}-r_{i+1}\right)\ln\frac{r}{r_k}-\frac{r^2}{2r_{i+1}}+\frac{r_{i+1}r^2}{2r_k^2}+\frac{r_k^2}{2r_{i+1}}-\frac{r_{i+1}}{2}\right)H(r-r_k)-\right.$$

$$-\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}c^2}-\frac{r_{i+1}}{c^2}-\frac{1}{r_{i+1}}+\frac{r_{i+1}}{r_k^2}\right)\frac{r^2}{2}-\left(\frac{r_k^2}{r_{i+1}}-r_{i+1}\right)\ln\frac{c}{r_k}\Big]\Big)\Big\}\frac{d\omega_k}{dr}.$$

Существующий метод нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений Бубнова-Галеркина [4] хотя и является весьма полезным, однако при общей постановке задачи и стремлении числа линейной комбинации заданной линейной независимой системы к бесконечности не может гарантировать даже слабую сходимость приближенного решения к точному. В этой связи применение метода частичной дискретизации к рассматриваемой системе нелинейных уравнений оказывается весьма целесообразным.

Кривые изменения прогиба для $f_{нч}=0,2h$; $f_{нч}=0,5h$; $f_{нч}=0,8h$;
$h=0,02m$, $q=10^4H/m^2$; $E=2\cdot10^{11}H/m^2$; $\mu=0,3$; $\delta_0=0$

На приведенном рисунке показан график изгиба гибкой пластины при отдельных начальных значениях стрелы прогиба $f_{нч}$.

Поскольку кривые решения квазистатических задач являются плавными, то получение значений функций $d\Phi/dr$, ω в нескольких точках дает хорошее совпадение с точным.

Цитированная литература

1. **Вольмир А.С.** Гибкие пластинки и оболочки. М.,1956.

2. **Тюреходжаев А.Н., Касабеков С.И., Култасов К.А.** // Межд. научно-техн. конф. "Прогрессивная техника и технология машиностроения". Киев, 1998., С.212—215.

3. **Тюреходжаев А.Н.,Касабеков С.И. ,Култасов К.А.** // Межд. научно-техн. конф. "Прогрессивная техника и технология машиностроения". Киев, 1998., С.216—221.

4. **Тимошенко С.П.** Пластинки и оболочки. М., 1948.

Поступила в редакцию 03.09.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 75 — 83*

УДК 519.624

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р. Е. Утешова

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 Актобе, пр. А.Молдагуловой, 34 ruteshova@yandex.ru

Методом параметризации с неравномерным шагом разбиения исследуется задача нахождения ограниченного на всей оси решения обыкновенного дифференциального уравнения. В терминах блочно-ленточной двусторонне-бесконечной матрицы $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$, построенной по выбранному разбиению и интегралам от матрицы дифференциального уравнения на интервалах разбиения, получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

Задача 1. Найти ограниченное на $R = (-\infty, \infty)$ решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t), f(t)$ непрерывны и ограничены на R, $\|x\| = \max\limits_j |x_j|$, $\|A(t)\| = \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}(t)| \leq \alpha(t)$, $\alpha(t)$ - непрерывная и ограниченная на R функция.

Вопросы существования и единственности решения задачи 1 различными методами исследованы многими авторами [1]—[8].

В [9] задача нахождения ограниченного на всей оси решения исследована методом параметризации. Разбивая R с шагом $h > 0$ и сводя задачу 1 к эквивалентной сингулярной краевой задаче с параметром, получены необходимые и достаточные условия ее корректной разрешимости. В настоящей статье применением метода параметризации с неравномерным шагом разбиения устанавливаются новые признаки корректной разрешимости задачи 1.

По выбранным числам $\theta > 0, \quad \delta_0 > 0$ точки $t_s \in R, \quad s \in Z$ определяем равенствами $t_0 = 0$, $\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \widetilde{\alpha}(t)dt = \theta$, где $\widetilde{\alpha}(t) = max(\alpha(t), \delta_0)$. Произведем разбиение $R = \bigcup\limits_{s=-\infty}^{\infty} [t_{s-1}, t_s)$.

Двусторонне-бесконечную последовательность положительных чисел $h_s = t_s - t_{s-1}, \quad s \in Z$, обозначим через $\widetilde{h}(\theta)$, т.е. $\widetilde{h}(\theta) = (\ldots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \ldots)$. Очевидно, что $\dfrac{\theta}{\delta} \leq h_s(\theta) \leq \dfrac{\theta}{\delta_0}$, где

Keywords: *differential equation, parameterization's method, non-uniform partition, correct solvability.*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

$\delta = \sup\limits_{t\in R} \widetilde{\alpha}(t)$. Через H обозначим двусторонне-бесконечную матрицу $H = diag(\ldots, h_s, h_{s+1}, \ldots)$, $s \in Z$.

Введем следующие пространства:

$\widetilde{C}(R, R^n)$ — пространство непрерывных и ограниченных на R функций с нормой

$$\|x\|_1 = \sup_{t\in R} \|x(t)\|$$

m_n - пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda_s \in R^n$ с нормой

$$\|\lambda\|_2 = \|(\ldots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \ldots)\|_2 = \sup_s \|\lambda_s\|, \quad s \in Z$$

$L(m_n)$– пространство всех линейных ограниченных операторов, отображающих m_n в себя, с индуцированной нормой,

$m_n(\widetilde{h})$ — пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных и ограниченных на $[t_{s-1}, t_s)$ функций $x_s(t)$ с нормой

$$\|x[t]\|_3 = \|(\ldots, x_s(t), x_{s+1}(t), \ldots\|_3 = \sup_s \sup_{t\in[t_{s-1},t_s)} \|x_s(t)\|, \quad s \in Z.$$

При выбранном разбиении R к задаче 1 применяем метод параметризации.

Сужение функции $x(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$ на $s-$й интервал $[t_{s-1}, t_s)$, $\quad s \in Z$ обозначим через $x_s(t)$, т.е. $x_s(t)$ - вектор-функция размерности n, совпадающая с $x(t)$ на $[t_{s-1}, t_s)$.

Разрешимость задачи 1 эквивалентна существованию решения

$$x[t] = (\ldots, x_s(t), x_{s+1}(t), \ldots) \in m_n(\widetilde{h})$$

многоточечной краевой задачи для уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = A(t)x_s + f(t), \qquad t \in [t_{s-1}, t_s)$$

с условиями сшивания решения в точках разбиения

$$\lim_{t\to t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \qquad s \in Z.$$

Обозначим через λ_s значение функции $x_s(t)$ в точке $t = t_{s-1}$ и на каждом интервале $[t_{s-1}, t_s)$ произведем замену $u_s(t) = x_s(t) - \lambda_s$. Получим краевую задачу с параметром

$$\frac{du_s}{dt} = A(t)[u_s + \lambda_s] + f(t), \qquad t \in [t_{s-1}, t_s), \tag{2}$$

$$u_s(t_{s-1}) = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to t_s-0} u_s(t) + \lambda_s = \lambda_{s+1}, \qquad s \in Z, \tag{4}$$

$$(\lambda, u(t)) \in m_n \times m_n(\widetilde{h}), \tag{5}$$

Если пара $(\lambda^*, u^*[t]) \in m_n \times m_n(\widetilde{h})$– решение задачи (2)-(5), то функция $x^*(t)$, полученная склеиванием систем функций $(\lambda^*_s + u^*_s(t), \quad s \in Z$принадлежит пространству $\widetilde{C}(R, R^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in R$. И наоборот, если $x(t)$– решение задачи 1, то пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\ldots, x_s(t_{s-1}), x_{s+1}(t_s), \ldots)$, $u[t] = (\ldots, x_s(t) - x_s(t_{s-1}), x_{s+1}(t) - x_{s+1}(t_s), \ldots)$ принадлежит $m_n \times m_n(\widetilde{h})$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) с начальным условием (3) и условиями сшивания решения в точках разбиения (4). При фиксированных значениях параметра λ_s задача Коши (2)—(3) имеет единственное решение $u_s(t)$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$u_s(t) = \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau)[u_s(\tau) + \lambda_s]d\tau + \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{s-1}, t_s), \quad s \in Z. \tag{6}$$

Подставляя вместо $u_s(\tau)$ соответствующую правую часть равенства (6) и повторяя этот процесс $\nu(\nu = 1, 2, \ldots)$ раз, получим

$$u_s(t) = \Big[\int_{t_{s-1}}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^{t} A(\tau_1)\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int_{t_{s-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\Big]\lambda_s +$$

$$+\int_{t_{s-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^{t} A(\tau_1)\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int_{t_{s-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots$$

$$\ldots d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_s(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1. \tag{7}$$

Введем следующие обозначения

$$D_{\nu,s}(h_s) = \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1, \quad F_{\nu,s}(h_s) = \int_{t_{s-1}}^{t_s} f(\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+\int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1)\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,s}(u, h_s) = \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1)\ldots\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_s(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1.$$

Из (7) найдем $\lim\limits_{t\to t_s-0} u_s(t), \quad s \in Z$. Подставляя в (4) выражение (7) для $u_s(t)$, получим двусторонне-бесконечную систему уравнений относительно параметров λ_s

$$[I + D_{\nu,s}(h_s)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{\nu,s}(h,s) - G_{\nu,s}(u, h_s), \qquad s \in Z, \tag{8}$$

где I — единичная матрица порядка n.

Блочно-ленточную двусторонне-бесконечную матрицу, соответствующую левой части системы (8), обозначим через $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$. В каждой блочной строке матрицы $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$ ненулевыми являются лишь $I + D_{\nu,s}(h_s)$ и $-I$. Поэтому для любой последовательности $\widetilde{h}(\theta)$ матрица $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$ переводит элементы пространства m_n снова в m_n, причем

$$\|Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \leq 2 + \sum_{j=1}^{\nu}\frac{\theta^j}{j!}.$$

Систему уравнений (8) запишем в виде

$$Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}\lambda = -F_\nu(\widetilde{h}) - G_\nu(u,\widetilde{h}), \qquad \lambda \in m_n, \tag{9}$$

где

$$F_\nu(\widetilde{h}) = (\ldots, F_{\nu,s}(h_s), F_{\nu,s+1}(h_{s+1}), \ldots) \in m_n,$$

$$G_\nu(u,\widetilde{h}) = (\ldots, G_{\nu,s}(u,h_s), G_{\nu,s+1}(u,h_{s+1}), \ldots) \in m_n$$

для любых $u[t] \in m_n(\widetilde{h})$ и $\widetilde{h}(\theta)$.

Решение многоточечной краевой задачи (2)—(5) найдем как предел последовательности пар $(\lambda_s^{(k)}, u_s^{(k)})$, $s \in Z$, определяемой по следующему алгоритму.

Ш а г 0. Предполагая, что $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)} : m_n \to m_n$ ограниченно обратима, из уравнения $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}\lambda = -F_\nu(\widetilde{h})$ определим начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in m_n$. На отрезках $[t_{s-1}, t_s)$, решая задачу Коши (2),(3) при $\lambda_s = \lambda_s^{(0)}$, находим $u_s^{(0)}(t), s \in Z$.

Ш а г 1. Подставляя найденные $u_s^{(0)}(t), s \in Z$ в правую часть (9), из уравнения $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}\lambda = -F_\nu(\widetilde{h}) - G_\nu(u^{(0)},\widetilde{h})$ определим $\lambda^{(1)} \in m_n$. На отрезках $[t_{s-1}, t_s)$, решая задачу Коши (2)-(3) при $\lambda_s = \lambda_s^{(1)}$, находим $u_s^{(1)}(t), s \in Z$.

И т.д.

Достаточные условия ыполнения и сходимости предложенного алгоритма, а также оценку решения задачи 1 устанавливает

Т е о р е м а 1. *Пусть для некоторой последовательности $\widetilde{h}(\theta) = (\ldots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \ldots)$ и некоторого $\nu(\nu = 1, 2, \ldots)$ матрица $H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)} : m_n \to m_n$ обратима и выполняются следующие неравенства*

$$\|[H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}]^{-1}\|_{L(m_n)} \le \beta_\nu(\widetilde{h}), \tag{10}$$

$$q_\nu(\widetilde{h}) = \frac{\delta}{\theta}\beta_\nu(\widetilde{h})[e^\theta - 1 - \theta - \ldots - \frac{\theta^\nu}{\nu!}] < 1. \tag{11}$$

Тогда задача 1 имеет единственное решение $x^*(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$ и справедлива оценка

$$\|x\|_1 \le \frac{\delta}{\theta}\beta_\nu(\widetilde{h})[e^\theta M(\widetilde{h})\frac{1}{1 - q_\nu(\widetilde{h})}\frac{\theta^\nu}{\nu!} + \|f\|_1\frac{\theta}{\delta_0}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{\theta^j}{j!}] + M(\widetilde{h}), \tag{12}$$

где $M(\widetilde{h}) = \|f\|_1\dfrac{\theta}{\delta_0}[e^\theta + (e^\theta - 1)\beta_\nu(\widetilde{h})\dfrac{\delta}{\theta}\sum_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{\theta^j}{j!}]$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теорем 1 и 2 статьи [10] с учетом оценок: $\|H\| \le \dfrac{\theta}{\delta_0}, \quad \|H^{-1}\| \le \dfrac{\delta}{\theta}$.

Переходя в уравнении (9) к пределу при $\nu \to \infty$ и учитывая неравенство

$$\|G_\nu(u^*,\widetilde{h})\|_2 \le \frac{\theta^\nu}{\nu!}\|u^*[t]\|_3,$$

получим, что $\lambda^* \in m_n$ удовлетворяет соотношению

$$H^{-1}Q_{*,\widetilde{h}(\theta)}\lambda = -F_*(A, f, \widetilde{h}(\theta)), \qquad \lambda \in m_n. \tag{13}$$

Здесь $H^{-1}Q_{*,\widetilde{h}(\theta)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}, \quad F_*(A, f, \widetilde{h}(\theta)) = \lim\limits_{\nu\to\infty} H^{-1}F_\nu(\widetilde{h})$.

Уравнение (13) для задачи 1 является точной разностной схемой при неравномерном шаге разбиения [11]. В роли краевых условий выступает требование принадлежности решения пространству m_n. Если $\widehat{\lambda} = (\ldots, \widehat{\lambda}_s, \widehat{\lambda}_{s+1}, \ldots) \in m_n$ — решение уравнения (13) при $f(t) = \widehat{f}(t)$, то, решая задачи Коши на интервалах $[t_{s-1}, t_s)$ при соответствующих λ_s, найдем функции $\widehat{u}_s(t)$, $\quad s \in Z$. Тогда, склеивая системы функций $(\widehat{\lambda}_s + \widehat{u}_s(t))$, $\quad s \in Z$, находим, что $\widehat{x}(t)$ — решение задачи 1 при $f(t) = \widehat{f}(t)$. Обратно, если $\widetilde{x}(t)$ — решение задачи 1 при $f(t) = \widetilde{f}(t)$, то $\widetilde{\lambda} = (\ldots, \widetilde{\lambda}_s, \widetilde{\lambda}_{s+1}, \ldots)$, где $\widetilde{\lambda}_s = \widetilde{x}(t_{s-1})$, принадлежит m_n и удовлетворяет уравнению (13) при $f(t) = \widetilde{f}(t)$.

Определение 1. *Задача 1 называется корректно разрешимой с константой K, если для любой функции $f(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$ она имеет единственное решение $x(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$ и справедливо неравенство*

$$\|x\|_1 \leq K\|f\|_1,$$

где K — константа, не зависящая от $f(t)$.

Покажем, что при фиксированном ν условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для корректной разрешимости. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть на $[t_{s-1}, t_s]$ задана непрерывная $(n \times n)-$матрица $A(t)$ и $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$, $\quad \alpha(t)$ непрерывна на $[t_{s-1}, t_s]$, $\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \widetilde{\alpha}(t)dt = \theta$, где $\widetilde{\alpha}(t) = max(\alpha(t), \delta_0)$.*

Тогда при любых $\varepsilon > 0$, $\quad \theta > 0$, удовлетворяющих соотношению

$$e^\theta - 1 \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \frac{\varepsilon}{2})(1 + \varepsilon)}, \tag{14}$$

для всякого $b \in R^n$ существует функция $f_b(t) \in C([t_{s-1}, t_s], R^n)$, обладающая следующими свойствами:

$$f_b(t_{s-1}) = 0, \quad f_b(t_s) = 0, \tag{15}$$

$$\max_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \|f_b(t)\| \leq (1 + \varepsilon)\|b\|, \tag{16}$$

$$F(A, f_b) \equiv \frac{1}{h_s} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} f_b(t)dt + \frac{1}{h_s} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int\limits_{t_{s-1}}^{t} f_b(\tau)d\tau dt +$$

$$+\frac{1}{h_s} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int\limits_{t_{s-1}}^{t} A(\tau) \int\limits_{t_{s-1}}^{\tau} d\tau_1 d\tau dt + \ldots = b. \tag{17}$$

Доказательство. По заданным $\varepsilon > 0, \theta > 0$, $\quad t_s$, $\quad t_{s-1}$ построим функцию

$$\omega(\varepsilon, h_s, t) = \begin{cases} \dfrac{2 + \varepsilon}{\varepsilon h_s}(t - t_{s-1}), & t_{s-1} \leq t < \dfrac{\varepsilon h_s}{2 + \varepsilon} + t_{s-1}, \\ 1, & \dfrac{\varepsilon h_s}{2 + \varepsilon} + t_{s-1} \leq t \leq t_s - \dfrac{\varepsilon h_s}{2 + \varepsilon}, \\ -\dfrac{2 + \varepsilon}{\varepsilon h_s}(t - t_s), & t_s - \dfrac{\varepsilon h_s}{2 + \varepsilon} \leq t \leq t_s. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\omega(\varepsilon, h_s, t_{s-1}) = \omega(\varepsilon, h_s, t_s) = 0, \quad \frac{1}{h_s} \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \omega(\varepsilon, h_s, t)dt = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

В качестве $f^{(0)}(t)$ возьмем $c^{(0)}(t)=\omega(\varepsilon,h_s,t)(1+\dfrac{\varepsilon}{2})b$. Функция $c^{(0)}(t)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$c^{(0)}(t_{s-1})=c^{(0)}(t_s)=0,\quad \|c^{(0)}(t)\|\le(1+\frac{\varepsilon}{2})b,\quad \frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}c^{(0)}(t)dt=b.$$

Обозначим через $M(A,c)$ ряд, составленный из повторных интегралов

$$M(A,c)\equiv\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}A(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}c(\tau)d\tau dt+\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}A(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}A(\tau)\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau}c(\tau_1)d\tau_1 d\tau dt+\ldots.$$

Для любой непрерывной на $[t_{s-1},t_s]$ функции $c(t)$ ряд $M(A,c)$ сходится, причем

$$\|M(A,c)\|\le\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\|c(\tau)\|d\tau dt+\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\alpha(\tau)\int\limits_{t_{s-1}}^{\tau}\|c(\tau_1)\|d\tau_1 d\tau dt+\ldots\le$$

$$\le\frac{1}{h_s}h_s(\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(t)dt+\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}\alpha(t)\int\limits_{t_{s-1}}^{t}\alpha(\tau)d\tau dt+\ldots)\max_{t\in[t_{s-1},t_s]}\|c(t)\|\le$$

$$\le(\theta+\frac{\theta^2}{2!}+\ldots)\max_{t\in[t_{s-1},t_s]}\|c(t)\|=(e^\theta-1)\max_{t\in[t_{s-1},t_s]}\|c(t)\|.$$

Обозначим через $b^{(1)}$ сумму ряда при $c(t)=c^{(0)}(t)$. Тогда

$$\|b^{(1)}\|=\|M(A,c^{(0)})\|\le(e^\theta-1)(1+\frac{\varepsilon}{2})\|b\|$$

и функции $c^{(j)}(t)=-\omega(\varepsilon,h_s,t)(1+\frac{\varepsilon}{2})b^{(j)}$, где $b^{(j)}=M(A,c^{(j-1)}),j=1,2,\ldots$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}c^{(j)}(t)dt=-b^{(j)},$$

$$\max_{t\in[t_{s-1},t_s]}\|c^{(j)}(t)\|\le(1+\frac{\varepsilon}{2})\|b^{(j)}\|\le(1+\frac{\varepsilon}{2})(e^\theta-1)(1+\frac{\varepsilon}{2})\|b^{(j-1)}\|\le\ldots\le(1+\frac{\varepsilon}{2})\{(e^\theta-1)(1+\frac{\varepsilon}{2})\}^j\|b\|.$$

Составляя сумму первых $k+1$ членов функциональной последовательности $\{c^{(j)}(t)\},j=0,1,2,\ldots$, получим функцию $f^{(k)}(t)=\sum\limits_{j=0}^{k}c^{(j)}(t)$, которая принадлежит $C([t_{s-1},t_s],R^n)$ и принимает нулевые значения на концах интервала. Функция $f^{(k)}(t)$ удовлетворяет следующим соотношениям

$$\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}f^{(k)}(t)dt+M(A,f^{(k)})=\frac{1}{h_s}\sum_{j=0}k\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}c^{(j)}(t)dt+M(A,\sum_{j=0}^{k}c^{(j)})=$$

$$=\frac{1}{h_s}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}c^{(0)}(t)dt+\frac{1}{h_s}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{t_{s-1}}^{t_s}c^{(j)}(t)dt+\sum_{j=0}^{k}M(A,c^{(j)})=$$

$$= b - \sum_{j=1}^{k} b^{(j)} + \sum_{j=1}^{k} M(A, c^{(j-1)}) + M(A, c^{(k)}) = b - \sum_{j=1}^{k} b^{(j)} + \sum_{j=1}^{k} b^{(j)} + M(A, c^{(k)}) = b + M(A, c^{(k)}),$$

$$\|f^{(k)}(t)\| \leq \sum_{j=0}^{k} \{(e^{\theta} - 1)(1 + \frac{\varepsilon}{2})\}^{j} (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \|b\|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

По предположению

$$(e^{\theta} - 1)(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому функциональная последовательность $\{f^{(k)}(t)\}$, $k = 0, 1, \ldots$ на $[t_{s-1}, t_s]$ равномерно сходится к некоторой функции $f^{*}(t) \in C([t_{s-1}, t_s], R^n)$. Функция $f^{*}(t)$ принимает нулевые значения в точках $t = t_{s-1}, t = t_s$ и

$$\max_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \|f^{(*)}(t)\| \leq \frac{(1 + \frac{\varepsilon}{2})\|b\|}{1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} = (1 + \varepsilon)\|b\|.$$

Учитывая оценку

$$\|M(A, c^{(k)})\| \leq \{(e^{\theta} - 1)(1 + \frac{\varepsilon}{2})\}^{k+1} \|b\|,$$

равенство

$$F(A, f) = \frac{1}{h_s} \int_{t_{s-1}}^{t_s} f(t) dt + M(A, f)$$

и переходя к пределу при $k \to \infty$ в уравнении

$$\frac{1}{h_s} \int_{t_{s-1}}^{t_s} f^{(k)}(t) dt + M(A, f^{(k)}) = b + M(A, c^{(k)}),$$

получим, что функция $f^{(*)}(t)$ удовлетворяет также условию (17).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Задача 1 корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого* $\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ *найдется* $\theta(\nu) > 0$ *такое, что при всех* $\widetilde{h}(\theta) = (\ldots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \ldots)$ *матрица* $H^{-1} Q_{\nu, \widetilde{h}(\theta)} : m_n \to m_n$ *обратима и выполняются неравенства (10), (11).*

Доказательство. Достаточность выполнения условий теоремы для корректной разрешимости задачи 1 следует из теоремы 1.

Необходимость. Покажем обратимость матрицы $H^{-1} Q_{\nu, \widetilde{h}(\theta)} : m_n \to m_n$ при всех $\theta \in (0, \theta_0]$. Рассмотрим уравнение

$$H^{-1} Q_{\nu, \widetilde{h}(\theta)} = b, \qquad \lambda, \quad b \in m_n.$$

Очевидно, что $Ker H^{-1} Q_{\nu, \widetilde{h}(\theta)}$ состоит только из нулевого элемента пространства m_n. Действительно, предположим, что существует $\widetilde{\lambda} \in m_n$, для которого $H^{-1} Q_{\nu, \widetilde{h}(\theta)} \widetilde{\lambda} = 0$ и $\|\widetilde{\lambda}\| \neq 0$. На интервалах $[t_{s-1}, t_s)$, $s \in Z$, решая задачи Коши (2), (3) и полагая $\lambda_s = \widetilde{\lambda}_s$, получим последовательность $\widetilde{u}[t] = (\ldots, \widetilde{u}_s(t), \widetilde{u}_{s+1}(t), \ldots) \in m_n(\widetilde{h}), s \in Z$.

Функция $\widetilde{x}(t)$, полученная путем склеивания систем функций $(\widetilde{\lambda}_s + \widetilde{u}_s(t)), s \in Z$, принадлежит пространству $\widetilde{C}(R, R^n)$ и удовлетворяет уравнению (1) с нулевой правой частью. Тогда, учитывая, что $\sup\limits_{t \in R} \|\widetilde{x}(t)\| \neq 0$, приходим к противоречию с корректной разрешимостью задачи 1, т.к. другим решением задачи 1 является $x(t)=0$. Следовательно, матрица $H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}: m_n \to m_n$ обратима.

Для $\varepsilon>0$ выберем $\theta_0=\theta_0(\varepsilon)>0$, удовлетворяющее неравенству (14). Согласно лемме для любых $b_s \in R_n, \quad s\in Z$ можно построить функции $f_{b_s}(t)\in C([t_{s-1,}t_s],R_n), \quad s\in Z$, обладающие свойствами: $F_*(A,f_{b_s})=b_s$ и $\|f_{b_s}(t)\|\le(1+\varepsilon)\|b_s\|, s\in Z$. Тогда функция $f_b(t)$, определяемая равенствами $f_b(t)=f_{b_s}(t), t\in[t_{s-1},t_s]$, принадлежит $\widetilde{C}(R,R^n)$ и удовлетворяет соотношениям $F_*(A,f_b,\widetilde{h}(\theta_0))=b$ и $\|f_b(t)\|\le(1+\varepsilon)\|b\|$.

Так как уравнение (13) — точная разностная схема задачи 1, которая по предположению корректно разрешима, то — $f_b(t)\in\widetilde{C}(R,R^n)$ (13) имеет единственное решение $\lambda_b=(\ldots,\lambda_s^b,\lambda_{s+1}^b,\ldots)\in m_n$, где $\lambda_s^b=x_b(t_{s-1})$, $x_b(t)$ — решение задачи 1 при $f(t)=f_b(t)$. Учитывая корректную разрешимость задачи 1, имеем

$$\|\lambda_b\|=\sup_{s\in Z}\|x_b(t_{s-1})\|\le\sup_{t\in R}\|x(t)\|\le K\sup_{t\in R}\|f_b(t)\|\le K(1+\varepsilon)\|b\|. \tag{18}$$

В силу того, что уравнение (13) для любого $b\in m_n$ имеет единственное решение $\lambda_b\in m_n$, принимая во внимание оценку (18), что следующее:

а) $[H^{-1}Q_{*,\widetilde{h}(\theta)}]^{-1}$ определена во всем пространстве m_n,

б) $\|[H^{-1}Q_{*,\widetilde{h}(\theta)}]^{-1}\|_{L(m_n)}\le(1+\varepsilon)K$.

Учитывая неравенство

$$\|H^{-1}Q_{*,\widetilde{h}(\theta)}-H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}\|_{L(m_n)}\le\frac{\delta}{\theta}\Big[e^\theta-1-\theta-\ldots-\frac{\theta^\nu}{\nu!}\Big]$$

и выбирая $\theta\in(0,\theta_0]$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{(1+\varepsilon)K\delta}{\theta}\Big[e^\theta-1-\theta-\ldots-\frac{\theta^\nu}{\nu!}\Big]<\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \tag{19}$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим ограниченную обратимость $H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$ и оценку

$$\|[H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}]^{-1}\|_{L(m_n)}\le(1+2\varepsilon). \tag{20}$$

Тогда в силу неравенства (19)

$$q_\nu(\widetilde{h}(\theta))=(1+2\varepsilon)K\frac{\delta}{\theta}\Big[e^\theta-1-\theta-\ldots-\frac{\theta^\nu}{\nu!}\Big]<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<1.$$

Теорема доказана.

Следующее утверждение устанавливает взаимосвязь между числом, ограничивающим сверху $\|[H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}]^{-1}\|_{L(m_n)}$, и константой корректной разрешимости K.

Теорема 3. *Задача 1 корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого ν найдется $\theta_0=\theta_0(\varepsilon)>0$ такое, что для любой последовательности $\widetilde{h}(\theta)$, $\theta\in(0,\theta_0]$, матрица $H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}: m_n\to m_n$ обратима, причем ей обратная удовлетворяет оценке*

$$\|[H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}]^{-1}\|_{L(m_n)}\le\beta, \tag{21}$$

где $\beta-const$, не зависящая от $\widetilde{h}(\theta)$.

Если при этом известна константа K, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\overline{\theta}(\varepsilon,\nu)>0$ и оценка (21) выполняется с константой $\beta=(1+\varepsilon)K$ при $\theta\in(0,\overline{\theta}(\varepsilon,\nu)]$. Обратно, если имеет место (21), то $K=\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть задача 1 корректно разрешима с константой K. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\overline{\theta}(\varepsilon,\nu) \in (0, \theta_0(\varepsilon)]$, удовлетворяющее неравенству (19). Тогда, как было показано в теореме 2, матрица $H^{-1}Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$ будет обратимой при всех $\theta \in (0, \overline{\theta}(\varepsilon,\nu)]$ и обратная ей матрица удовлетворяет оценке (20), т.е. $\beta = (1+\varepsilon)K$.

Достаточность. Пусть выполняется оценка (21). Выберем θ, удовлетворяющее неравенству (11). Тогда согласно теореме 1 задача 1 имеет единственное решение $x^*(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$, для которого справедлива оценка (12). Переходя в (12) к пределу при $\theta \to 0$, получим

$$\|x^*(t)\|_1 \le \beta \|f\|_1,$$

т.е. задача 1 корректно разрешима с константой β.

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев. ,1986.

2. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.

3. **Плисс В. А.** Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.Киев. 1977. С.168-173.

4. **Мухамадиев Э.** // Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 3. С.443 - 460.

5. **Красносельский М. А.** Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.

6. **Митропольский Ю. А.,Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. Киев., 1990.

7. **Массера Х., Шеффер Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1970.

8. **Аносов Д. В.** // Тр. Матем. ин-та АН СССР. М. 1967. Т. 90. С.1 - 210.

9. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388 – 404.

10. **Утешова Р. Е.** // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 1. С. 101 – 108.

11. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 1. С. 5 - 63.

Поступила в редакцию 17.10.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (7). С. 84 — 88*

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ — SHORT COMMUNICATIONS

УДК 537.87; 621.371

HAMILTON FORM OF MAXWELL EQUATIONS AND ITS QUATERNIONS

L. A. Alexeyeva

Institute of Mathematics
480100 Almaty ,Pushkin str., 125, alexeeva@math.kz

The Hamilton form of Maxwell equations is investigated for A-field. This is equivalent to Maxwell equations for electromagnetic field [1]. The generalized solutions of these equations are determined including shock electromagnetic waves. Quaternions of A — field tension, pulse — energy, charge — current and conservation laws are constructed.

Identifications: ε, μ are the electric and magnetic permeability of vacuum; $c = (\varepsilon\,\mu)^{-1/2}$ is the speed of electromagnetic waves. E, H are the tensions of electric and magnetic fields ; j^E, j^H are the densities of electric and magnetic currents; the density of energy is $W = 0,5\left(\varepsilon\,\|E\|^2 + \mu\,\|H\|^2\right)$, the Pointing's vector is $P = c^{-1} E \times H,\ \tau = ct$.

Theorem 1. *The system of Maxwell's equations for electromagnetic fields is equivalent to the system*

$$\partial_\tau A + i\ \text{rot}\ A + J = 0, \quad \rho = \text{div}\, A, \tag{1}$$

$$W = 0,5(A, A^*), \quad P = 0,5\, i\, A \times A^*,$$

where $A = \sqrt{\varepsilon}\, E + i\,\sqrt{\mu}\, H,\ A^* = \sqrt{\varepsilon}\, E - i\sqrt{\mu}\, H,\ J = \sqrt{\mu}\, j^E - i\,\sqrt{\varepsilon}\, j^H$.

Theorem 2. *The solution of Eq.(1) continued and differentiable everywhere except for the front* F_t *is generalized solution of (1) if* $[A]_{F_t} + i\,[A]_{F_t} \times m = 0$ *where* $c = -\partial_t F_t / \|\nabla F_t\|$.*For* E *and* H *this condition is equivalent to the next ones*

$$\sqrt{\varepsilon}\ [E]_{F_t} = \sqrt{\mu}\ [H]_{F_t} \times m, \quad \sqrt{\mu}\ [H]_{F_t} = \sqrt{\varepsilon}\, m \times [E]_{F_t}\,.$$

Here $m = \nabla F_t / \|\nabla F_t\|$ is a wave vector, $[A]_{F_t}$ is a jump A at F_t, $\nabla = \text{grad}$, the sign " $\times$ " means vector product.

Further scalar and vector products of a and b are denoted as: (a, b), $[a, b]$.

Theorem 3. *The generalized solutions of Eq. (1) satisfy to conservation laws of a charge and energy:* $\partial_t \rho + \text{div}\, J = 0,\ [\rho]_{F_t} = 0;\ \partial_\tau W + \text{div}\, P = -Re(J, A^*),\ [W]_{F_t} = (m, [P]_{F_t})$.

Theorem 4. *If the current* $J(x,t) \in D'_+(R^4)$ *and* $\underset{x}{supp}\ J$ *is limited then the solution of Eq.(1) satisfied to conditions of radiation at infinity is represented in a form of convolution*

$$A = \partial_\tau \psi * J + c\nabla\psi * \rho - i\,[\nabla, \psi * J],$$

Здесь помещены тезисы **Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения",** посвященной 100-летию К.П.Персидского, которые не вошли в сборник тезисов.

where $\psi = -(4\pi R)^{-1}\delta(t - R/c)$ *is a fundamental solution of a wave equation in* $D'(R^4)$ *(simple stratum on a light cone* $\{(x,t) : R = \|x\| = ct\}$*).*

If we consider vector of tension of A - field as a quaternion : $\mathbf{A} = 0 + iA$, $\mathbf{A}^* = 0 - iA^*$ then

$$0,5\,\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^* = -(W + iP), \qquad \mathbf{DA} = -(i\,\rho + J),$$

$$\mathbf{D}^*\mathbf{DA} = i\,\Box A = (\partial_\tau \rho + div\,J) - \nabla\rho - \partial_\tau J + i\,rot\,J,$$

where complex gradients of A - field as $\mathbf{D} = \partial_\tau + i\nabla$, $\mathbf{D}^* = \partial_\tau - i\nabla$ we put. The theorems 1, 3 and 4 follow, from this results.

Since $\alpha^2 =< (A, A^*) =< W >$, we may call A-field as *energetic field.*

REFERENCE

1. *Alexeyeva L. A.* // Mathematical journal. 2001. V.1, №2. P.1-10.

УДК 517.946

О многопериодическом по части переменных решении одной квазилинейной системы

Бержанов А.Б., Курмангалиев Е.К.
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

Рассматривается система

$$Dx \equiv \frac{\partial x}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \varphi} + b(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\frac{\partial x}{\partial \psi} =$$

$$= P(t,\varphi,\psi)x + \mu F(t,\varphi,\psi,x,\mu), \tag{1}$$

где a,b, φ, ψ — счетномерные векторы, P — n x n-матрица, x, F — n-векторы, $\varepsilon>0$, $\mu>0$ — параметры.

Пусть $f(t,\varphi,\psi)$ — функция, определенная в области $R \times R_\varphi \times R_\psi$, где R=(-∞, +∞); $R_\varphi =$ $= \varphi : ||\varphi|| < \infty$; $||\varphi|| < \infty\}$; R_ψ=$\{\psi : ||\psi|| < \infty\}$; φ, ψ — счетномерные векторы с нормами $||\varphi|| = \sup\limits_k|\varphi_k|$, $||\psi|| = \sup\limits_k|\psi_k|$.

Функцию $f(t,\varphi,\psi)$ назовем многопериодической по части переменных, если она $(\theta,\ \omega)$-периодична по t, φ и равномерно относительно ψ, т.е.

$\exists\theta$, $\omega_k > 0$, k= 1,2, ...такие, что при любых $(t,\varphi,\psi)\in R \times R_\varphi \times R_\psi$ имеет место равенство

$$f(t,\varphi,\psi) = f(t+\theta,\varphi + q\overset{\wedge}{}\omega,\psi),$$

где $q\overset{\wedge}{}\omega$=$(q_1\overset{\wedge}{}\omega_1,\ q_2\overset{\wedge}{}\omega_2,\ \ldots)$, $q = (q_1,\ q_2,\ \ldots)$ — целочисленный вектор.

Доказывается, что при условиях, аналогичных [1], и при достаточно малых значениях параметров ε и μ система (1) допускает единственное многопериодическое решение по t, φ .

Это решение является интегральным многообразием в смысле Боголюбова-Митропольского [2] соответствующей характеристической счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = b(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon), \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi,\psi)x + \mu F(t,\varphi,\psi,x,\mu).$$

Литература

1. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата: Наука, 1979. - 210 с.
2.Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: “Наука”, 1973.

УДК 517.9

Об устойчивости D – систем по первому приближению

Сартабанов Ж.А., Мухамбетова А.А.

Рассматривается система уравнений

$$Dx = f(t, \varphi, \psi, x) \tag{2}$$

с дифференциальным оператором $D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$, где $t \in (-\infty, +\infty) = R$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in \in R \times ... \times R = R^m$, $\psi = \varphi - et \in R^m$, $e = (1, ..., 1)$ — m-вектор, $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, f — заданная n-вектор-функция обладающая свойствами периодичности, гладкости и ограниченности вида

$$f(t, \varphi + k\omega, \psi + k\omega, x) = f(t, \varphi, \psi, x) \in C^{(0,1,1,1)}(R \times R^m \times R^m \times R^n), \tag{3}$$

$$|f(t, \varphi, \psi, x)| \leq M \tag{4}$$

для всех целочисленных векторов $k = (k_1, ..., k_m) \in Z^m$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ — вектор-период с положительными рационально несоизмеримыми компонентами, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$-кратный вектор-период, $M = \text{const} > 0$, $|\cdot|$ — обозначает евклидовую векторную норму.

Доказывается, что при условиях (3) и (4) решения $x = x(t, \varphi; t_0, \psi + et_0, u(\psi + et_0))$ системы (2) с начальными функциями $u(\varphi)$ из функционального пространства U непрерывно дифференцируемых и ω — периодических функций с нормой $\|u\| = \sup_{\varphi} |u(\varphi)|$ существуют и определены во всем пространстве независимых переменных (t, φ), причем $x \in U$ для каждого $t \in R$.

Далее, для решений x указанного класса, обычным образом введено понятие устойчивости относительно возмущения начальных функций и доказана теорема об устойчивости тривиального решения системы (2), когда f имеет вид $f(t, \varphi, \psi, x) = P(t, \varphi)x + g(t, \varphi, \psi, x)$ с матрицей $P(t, \varphi)$ системы вариации, гарантирующие выполнение условия Персидского об асимптотической устойчивости

$$|X(t, \varphi; t_0, \psi + et_0)| \leq \Gamma e^{-\gamma(t - t_0)},$$

где $X(t, \varphi; t_0, \psi + et_0)$ — матрицант, $\Gamma > 0$ и $\gamma > 0$ — постоянные, а вектор-функция g является бесконечно малой выше первого порядка в окрестности решения $x = 0$.

УДК 517.9

Необходимые условия существования нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

М.Ж. Талипова
Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 Актобе, проспект Алии Молдагуловой 34, Казахстан, talip1977@rambler.ru

Рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{cases} Z_{xx} + x^k \cdot p_1 \cdot Z_x + y^k \cdot p_2 \cdot Z_y + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = p_4(x,y), \\ Z_{yy} + x^k \cdot q_1 \cdot Z_x + y^k \cdot q_2 \cdot Z_y + y^{2k} \cdot q_3 \cdot Z = q_4(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты $p_i(x,y)$ и $q_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$ представимы сходящимися рядами двух переменных

$$p_i(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} p^{(i)}_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, q_i(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} q^{(i)}_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \tag{2}$$

подранг $k-$ постоянное число, которые определяется по наибольшим степеням независимых переменных x и y коэффициентов системы (1), $Z = Z(x,y)$ — общая неизвестная функция, а правые части системы (1) представимы степенными рядами двух переменных вида

$$p_4(x,y) = expG(x,y) \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} y^{-\nu} (a_{0,0} \neq 0),$$

$$q_4(x,y) = expG(x,y) \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} y^{-\nu} (b_{0,0} \neq 0). \tag{3}$$

Целью данной работы является построение нормальных решений системы (1)—(3), устанавливая в ходе этого необходимые условия существования таких решений.

Нормальные решение ищем в виде

$$Z = expQ(x,y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \tag{4}$$

$$Q(x,y) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot y^{k+1} + \ldots + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y \tag{5}$$

где ρ, σ, $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,\ldots)$ — некоторые постоянные, $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \ldots, \alpha_{1,1}, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,0}$ — неопределенные коэффициенты, которые следует определить.

Первое необходимое условие существования нормального решения (4) связано с определением неизвестных параметров многочлена $Q(x,y)$, а второе — с определением неизвестных постоянных ρ и σ корни системы определяющих уравнений.

Оба условия существования нормальных решений устанавливаются как и для однородных систем, отличие состоит в определении неизвестных постоянных $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,\ldots)$ в искомом решении (4). Результаты исследований сформулированы в виде теорем.

УДК 517.9

Решение допустимых систем, связанных с тринадцатой нормальной формой

Ж.Н.Тасмамбетов
Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 Актобе, пр.А.Молдагуловой,34

Изучаются частные случаи системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} &\left(a^{(0)}_{00} + a^{(0)}_{10} \cdot x\right) \cdot Z_{xx} + \left(a^{(1)}_{00} + a^{(1)}_{10} \cdot x\right) \cdot Z_x + b^{(3)}_{01} \cdot y \cdot Z_y + a^{(2)}_{00} \cdot Z = 0, \\ &\left(b^{(0)}_{00} + b^{(0)}_{01} \cdot y\right) \cdot Z_{yy} + a^{(3)}_{10} \cdot x \cdot Z_x + \left(b^{(3)}_{00} + b^{(2)}_{01} \cdot y\right) \cdot Z_y + b^{(2)}_{00} \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{j0}^{(i)}, b_{0j}^{(i)} (i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1)$ – некоторые постоянные, связанные с тринадцатой нормальной формой, решениями которой являются ортогональные многочлены двух переменных. Тринадцатой нормальной формой называется уравнение в частных производных второго порядка вида

$$Z_{xx} + \ Z_{xy} + (B \cdot x + d_{00}) \cdot Z_x + (B \cdot y + g_{00}) \cdot Z_y = n \cdot B \cdot Z, \tag{2}$$

B, d_{00}, g_{00} и n – некоторые постоянные.

Г.Кролл, И.Шеффер, Г.Энгелис, Т.Корвиндер, П.К.Суетин большое внимание уделяли связям ортогональных многочленов двух переменных с дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка вида (2), где ортогональные многочлены определяются как собственные функции этих уравнений. Несмотря на данные исследования, до сих пор малоизученными остаются многие свойства ортогональных многочленов по двум переменным, особенно их связь с системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида (1).

В данной работе методом Фробениуса-Латышевой изучается несколько конкретных частных случаев системы (1), где устанавливаются возможности построения решения в виде специальных функций или ортогональных многочленов двух переменных.

Наиболее общим и важным частным случаем системы (1) является система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{array}{l} Z_{xx} + a \cdot x \cdot Z_x + (B - b) \cdot y \cdot Z_y + n \cdot Z = 0, \\ Z_{yy} + (B - a) \cdot x \cdot Z_x + b \cdot y \cdot Z_y + m \cdot Z = 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где $a, \ b, \ B, \ n$ и m – некоторые постоянные, $Z = Z(x, y)$ – неизвестная. Требуется найти $Z(x, y)$ в виде специальных функций или ортогональных многочленов двух переменных.

Коэффициенты при старших производных Z_{xx} и Z_{yy} равны единице, поэтому $Z(x, y)$ можно искать в виде простого степенного ряда двух переменных

$$Z(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \left(C_{0,0} \neq 0\right).$$

Общее решение представляется в виде

$$Z(x, y) = C_{0,0} \cdot \left(1 - \frac{n}{2!} \cdot x^2 - - \frac{m}{2!} \cdot y^2 - ...\right) + C_{1,0} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{B - a + m}{2!} \cdot y^2 - \frac{a + n}{3!} \cdot x^2 - ...\right) +$$

$$+ C_{0,1} \cdot y \left(1 - \frac{B - b + n}{2!} \cdot x^2 - \frac{b + m}{3!} \cdot y^2 - ...\right) + C_{1,1} \cdot xy \cdot \left(1 - \frac{a + B - b + n}{3!} \cdot x^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{B - a + b + m}{3!} \cdot y^2 - ...\right).$$

Складывая два уравнения системы (3), получим одно уравнение, относящееся также к тринадцатой нормальной форме вида (2).

Аналогично рассматриваются два случая, когда в системе (3) постоянные B, a, b, n и m удовлетворяют условиям: $B = a, B = b, B = a = b = -2, \ n = 2k, m = 2l$ и $n_1 > 0, m_1 > 0$ – целые числа и $B = a, \ B = b, \ B = a = b = -1$.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 2 (8) . С. 90 — 90*

ХРОНИКА

СЕМИНАР ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ МОН РК

Ниже публикуется аннотация доклада, заслушанного на семинаре 1 октября 2003 г.

Ж. Н. Тасмамбетов (Актобе) "Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами".

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} + P^{(1)} \cdot Z_{xy} + P^{(2)} \cdot Z_x + P^{(3)} \cdot Z_y + P^{(4)} \cdot Z = 0, \\ Z_{yy} + Q^{(1)} \cdot Z_{xy} + Q^{(2)} \cdot Z_x + Q^{(3)} \cdot Z_y + Q^{(4)} \cdot Z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $P^{(i)} = P^{(i)}(x, y)$, $Q^{(i)} = Q^{(i)}(x, y)$ – аналитические функции или многочлены двух переменных, $Z = Z(x, y)$ - общая неизвестная, которую следует определить.

Исследуются вопросы, связанные с разработкой эффективных алгоритмов построения решений систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) в виде степенных, нормальных, поднормальных рядов двух переменных, а также нормально - регулярных и замкнутых решений.

Для системы (1) при предположении $1 - P^{(1)} \cdot Q^{(1)} \neq 0$ выведены и систематизированы условия совместности. Приведена классификация особых кривых. Установлен простой признак определения регулярных и иррегулярных особенностей, применяемой при изучении систем, решениями которых являются специальные функции и ортогональные многочлены двух переменных.

Разработаны эффективные алгоритмы построения нормальных рядов вида

$$Z = expG(x, y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad (C_{0,0} \neq 0)$$

и нормально-регулярных решений

$$Z = expG(x, y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (C_{0,0} \neq 0),$$

$G(x, y) = \dfrac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^k + \dfrac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot y^k + ... + \alpha_{11} \cdot xy + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{01} \cdot y,\ \rho,\ \sigma,\ C_{\mu,\nu}\ (\mu,\ \nu = 0, 1, 2, ...)$ - неизвестные постоянные, $\alpha_{k+1,0},\ \alpha_{0,k+1},\ ...\ ,\ \alpha_{11},\ \alpha_{10},\ \alpha_{01}$ - неизвестные коэффициенты многочлена $G(x, y)$.

Доказана основная теорема об асимптотическом представлении нормальных рядов вблизи бесконечно удаленной точки. Показана методика определения неизвестных коэффициентов определяющего множителя, являющегося общим для нормальных и нормально- регулярных решений. Введены понятия ранга и антиранга. Получены необходимые условия существования нормальных, нормально - регулярных и конечных решений.

РЕФЕРАТТАР — РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 532.517.4 2000 MSC: 76B47

Alieva B.K., Naimanova A.G. **Numerical modelling of flow in wake behind cylinder and triangle** // Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.5–14.

The process of vortices formation during streamlining of cylinder and triangle by stratified flow is numerically simulated using fictitious domains method. The influence of obstacles form on vortical wake behind body has been analyzed. Special features of streamlining have been got.
References — 4.

УДК: 532.517.4 2000 MSC: 76B47

Алиева Б.К., Найманова А.Ж. **Цилиндр және ұшбұрыш арқылы пайда болған ізде ағынды сандық моделдеу**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.5–14.

Цилиндр және ұшбұрыш стратификациялық ағынмен айналып өту кезінде құйынның пайда болу процесі жалған облыстар әдісінің көмегімен сандық түрде моделденеді. Дене арқылы пайда болған құйындық ізде кедергі түрлерінің әсерін зерттеу нәтижелері көрсетілген. Денені айналып өту ерекшеліктері анықталған.
Библ. — 4.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

Akhmetova S.T. **On Bitsadze-Samarsky problem for wave equation.**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.15–18.

Spectral properties of differential operator with departured arguments have been studied. The results are applied to Bitsadze-Samarsky problem for wave equation.
References — 8.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

Ахметова С.Т. **Толқындық теңдеуге қойылған Бицадзе-Самарский есебі туралы**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.15–18.

Бұл мақалада аргументі ауытқыйтын дифференциалдық оператордың спектралды қасиеттері зерттелген және оның нәтижелері толқындық теңдеуге қойылған Бицадзе-Самарский есебіне қолданылған.
Библ. — 8.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41a45, 26B40

Bazarkhanov D.B. **Equivalent normalizations for some function spaces with mixed smoothness.II.** // Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.19 — 26.

Representation theorem is established for the Lizorkin-Triebel function spaces with mixed smoothness. For those spaces some equivalent normalizations and embedding theorems are obtained. Additional characterizations are given for the Nikol'skii-Besov function spaces from part I.

References — 12.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41a45, 26B40

Базарханов Д.Т. **Аралас тегістікті кейбір функциялардың эквивалентті нормалаулары.II**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.19 — 26.

Аралас тегістікті Лизоркин-Трибель кеңістіктері үшін көрсетілім теоремасы тағайындалды. Осы кеңістіктер үшін кейбір эквивалентті нормалар мен енгізу теоремалары алынды. Жұмыстың бірінші бөлігінде қарастырылған Никольский-Бесов кеңістіктерінің қосымша сипаттаулары берілді.

Библ. — 12.

УДК: 517.956 2000 MSC: 34K06, 34K10, 35M10

Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. **On boundary value problem for loaded equation of mixed type**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.27–35.

The criterion of the unique strongly solvability of the nonlocal boundary value problem for the loaded Lavrentiev-Bitsadze equation in restangular region is obtained.

References — 7.

УДК: 517.956 2000 MSC: 34K06, 34K10, 35M10

Жиенәлиев М.Т., Рамазанов М.Ы. **Жүктелген аралас типті теңдеудің шекаралық есебі туралы**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.27–35.

Төрт бұрышты облыста жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуіне қойылған локалды емес шекаралық есебінің жалғыз әлді шешілетінділігінің критериі табылған.

Библ. — 7.

УДК: 510.6 2000 MSC: 82B80

Dosanbay P.T. **Definable strongest of arithmetical structures.**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.36–38.

In this paper a new proof of Korec's result on definable completeness of arithmetical structure with neighborhood relation and divisibility relation is given. Moreover, it is proved the stronger result that arithmetical structure with neighborhood relation and relative divisibility relation is also definably strongest.

References — 4.

Досанбай П.Т. **Арифметикалык құрылымдардың анықталатын күрделілігі**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.36–38.

Көршілестик және бөлінгіштік қатынастарды арифметикалық құрылымдар өте күрделі анықталымды болады деген И.Корец нәтитесінің жаңа дәлелдеуі келтіріледі. Сонымен бірге көршілестік және салыстырмалы болінгіштік қатынастардағы арифметикалық құрылымдарда өте күрделі анықталымды болады деген біршама күшті нәтиже дәлелденеді.
Библ. — 4.

УДК: 531.01+539.3 2000 MSC: 74J05, 74B05

Egorov A.K., Yershibayev U.D. **Characteristic equation for definition of frequencies of torsional fluctuations of elastic homogeneous model of the Earth.**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.39–42.

A model of the Earth in a from of homogeneous elastic sphere from incompressible material of constant density is considered. For a class C_1 of free fluctuation called torsional, the general (common) decisions of a system of differential equations in movings are obtained. In view of zero boundary conditions in pressure (voltage) in a considered (examined) case the characteristic equation for definition of frequencies of free torsional fluctuations of elastic homogeneous model of the Earth has been got.
References — 3.

УДК: 531.01+539.3 2000 MSC: 74J05, 74B05

Егоров А.К., Ершібаев У.Д. **Серпімді біртекті жер сүлбесінің еркін айналдырушы тербелістерінің жиілігін анықтаушы сыпаттама теңдеу**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.39–42.

Тұрақты тығыздықты сығылмайтын материалды біртекті серпімді шар түріндегі Жер сүлбесі қарастырылады. Айналдырушы деп аталатын еркін тербелістердің C_1 класы үшін жылжулы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімдері алынды. Қарастырылып отырған жағдайда кернеулі нөлдік шекаралық шарттарды ескере отырып, серпімді біртекті жер сүлбесінің еркін айналдырушы тербелістерінің жиілігін анықтаушы сыпаттама теңдеу алынды.
Библ. — 3.

УДК: 517.925:62.50 2000 MSC: 34K29

Zhumatov S.S. **The construction of system of automatic control of a course of a ship and a plane**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.43–48.

Systems of automatic control of a course of a ship and a plane under the given many fold have been constructed. The sufficient conditions of programm manyfold absolute stability are obtained with respect to the given function.
References — 11.

УДК: 517.925:62.50 2000 MSC: 34K29

Жұматов С.С. **Кеме мен ұшақтың бағытын автоматтық басқару жүйелерін құру**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.43–48.

Берілген көпбейне бойынша кеме мен ұшактың бағытын автоматтық басқару жүйелері құрылды. Берілген функцияға қарасты бағдарламалық көпбейненің абсолютті орнықтылығының қажетті шарттары алынды.

Библ. — 11.

УДК: 517.95 2000 MSC: 42A16

Kalmenov T.Sh., Jamankaraev D.T., Kalmenov D.T. **On properties of root-subspaces of Tricomi problem**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.49–54.

Infinity of root-vectors of Tricomi problem is proved.
References — 9.

Кәлменов Т.Ш., Жаманқараев Д.Т., Кәлменов Д.Т. **Трикоми есебінің түбірлік ішкеңістіктерінің қасиеттері туралы**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.49–54.

Трикоми есебінің түбірлік векторларының шексіз көп екендігі көрсетілген.
Библ. — 9.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

Minglibaeva B.B. **Coefficient criteria of unique solvability of linear two-point boundary-value problems with parameter**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.55–62.

The two-point boundary-value problems for the ordinary differential equations is considered. The necessary and sufficient conditions of unique solvability in the terms of initial data have been got by using parametrization method.
References — 10.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

Меңлібаева Б.Б. **Параметрлі сызықты қос нүктелі шеттік есептің бір мәнді шешімділігінің коэффициенттік белгілері**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.55–62.

Алғашқы берілгендер терминінде параметрлі сызықты қос нүктелі шеттік есептің бір мәнді шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары параметрлеу әдісінің негізінде тағайындалған.
Библ. — 10.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Tasmambetov Zh.N. **On Laguerre type systems' solving**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.63–68.

The class of partial differential equations of second order having Laguerre orthogonal polynomials with two independent variables as their solutions has been obtained.
References — 7.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Тасмамбетов Ж.Н. **Лагерра тектес жүйелер шешімі туралы**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.63–68.

Екі айнымалылы Лагерра ортогонал көпмүшеліктері шешімдері болатын екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің бірқатары тағайындалған.
Библ. — 7.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74B05, 74B20

Tyurekhodzhaev A.N., Mamatova G.U. **A problem of axis symmetric bend of a round flexible plate with initial curvature**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.69–74.

A round flexible plate with initial deflection fixed on a contour and exposed to the action of uniformly distributed cross load of intensity q is under consideration.
References — 4.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74B05, 74B20

Төреқожаев А.Н., Маматова Г.У. **Бастапқы қисықтығы ескерілген дөңгелек икемді пластинаның өске қатысты симметриялы иілуі туралы есептің аналитикалық шешімі**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.69–74.

Бастапқы қисықтығы ескеріле отырып, контуры топсамен бекітілген және көлденең бірқалыпты таралған, қарқындылығы q жүктеме әсер ететін дөңгелек икемді пластинаның майысымы қарастырылады.
Библ. — 4.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Uteshova R.E. **On existense and uniqueness of boundary solution of linear ordinary differential equation**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 2 (8). P.75–83. A problem of finding of a solution of ordinary differential equation founded on R-axes is solving using parametrization method with non-uniform step of partition. The necessary and sufficient conditions of correct solvability of this problem are obtained in terms of block-tape bilateral infinite matrix $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$.
References — 11.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B40

Өтешова Р.Е. **Сызықты жәй дифференциалдық теңдеудің шектелген шешімінің болуы және жалқылығы туралы**// Математикалық журнал. 2003. Т. 3. № 2 (8). Б.75–83.

Жәй дифференциалдық теңдеудің бүкіл осте шектелген шешімін табу есебі бөлшектеу қадамы бірқалыпты емес параметрлеу әдісімен зерттелген. Сайланып алынған бөлшектеу және бөлшектеу интервалындағы дифференциалдық теңдеу матрицасының интегралы бойынша тұрғызылған блокты-таспалы, екі жақты шексіз $Q_{\nu,\widetilde{h}(\theta)}$ матрицасы терминінде қарастырылып отырған есептің корректі шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.
Библ. — 11.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.