

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2008 том 8 № 2 (28)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 2 (28) 2008

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Жамбыла, 25, к. 705
Телефон 8-(7272)-91-13-15, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2008г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 8, № 2 (28), 2008

Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения <i>Л. А. Алексеева</i>	5
О разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со спектральным параметром <i>Д. М. Ахманова, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов</i>	25
Метод решения обратной задачи Веригина о водонефтяном контакте в условиях упругого режима <i>Ж. Берикжызы, С. Н. Харин</i>	38
Критерий однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений <i>Д. С. Джумабаев</i>	44
Диссипативность программного многообразия нелинейных систем управления <i>С. С. Жуматов</i>	49
Модификация метода ломаных Эйлера к решению полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения <i>С. С. Кабдрахова</i>	55
О разрешимости нелинейной двухточечной краевой задачи с параметром <i>Р. А. Медетбекова, Б. Б. Минглибаева</i>	63
Коэрцитивные оценки решения сингулярного уравнения с частными производными третьего порядка <i>М. Н. Оспанов</i>	72
Быстрый метод независимых главных компонент в проблеме репрезентативности индексов геомагнитной активности <i>А. А. Пак</i>	79
Refined definitions for finitary and infinitary similarity relations of theories Part 1: Signature reduction procedures and constructions shortly, and fast definitions for Finitary and Infinitary lists <i>М. G. Peretyat'kin</i>	90
О свойствах показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений второго порядка как функций линейного параметра <i>М. И. Рахимбердиев, А. О. Султанбекова</i>	97

Выбор начального приближения решения нелинейной двухточечной краевой задачи <i>С. М. Темешева</i>	100
--	-----

Рефераты	104
----------------	-----

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА БЕГУЩИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Развивается метод обобщенных функций для решения краевых задач для одного класса стационарных бегущих решений волнового уравнения в N -мерных цилиндрических областях. Рассмотрены случаи дозвукового и сверхзвукового движения источника возмущений, что влияет на тип уравнения, который при дозвуковых скоростях в подвижной системе координат становится эллиптическим, а при сверхзвуковой скорости – гиперболическим. С использованием теории обобщенных функций получены динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных функций и даны их интегральные представления для разных N . На их основе построены разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения. Доказаны теоремы единственности поставленных краевых задач, в том числе и для ударных волн.

Явления с движущимися нагрузками широко распространены на практике. К ним относятся разнообразные процессы, связанные с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения. К данному классу задач можно отнести задачи дифракции сейсмических волн на протяженных подземных сооружениях.

При математическом моделировании таких процессов приходится строить решения краевых задач в классе "бегущих" функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи – скорость движения источника возмущений в среде – существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых *звуковых скоростей*. Их может быть

Keywords: *wave equation, running solutions, Mach number, generalized functions method, fundamental solution, singular boundary integral equations*

2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60, 83C50

© Л. А. Алексеева, 2008.

несколько в зависимости от вида волн. В идеальной акустической среде одна звуковая скорость (c), с которой распространяется волна давления, а в изотропной упругой среде их уже две (c_1, c_2): одна определяет скорость распространения волн объемной деформации, а вторая – сдвиговой. В многокомпонентных средах звуковых скоростей становится больше. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движение среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям (чисел Маха). При этом приходится решать краевые задачи эллиптического, гиперболического и смешанного типов.

Автором подобный класс краевых задач был рассмотрен для изотропных упругих сред [1]. Для их решения был разработан метод обобщенных функций (МОФ), который позволяет использовать универсальный подход к решению краевых задач во всем диапазоне скоростей бегущих решений.

Основные идеи метода обобщенных функций были изложены в [2] для решения начально-краевых задач для волнового уравнения в N -мерных пространствах, однако его можно использовать с успехом для решения уравнений любого типа.

Здесь этот метод используется для построения бегущих решений волнового уравнения при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений. Он включает в себя следующие этапы:

- постановка краевой задачи в пространстве обобщенных функций;
- построение функции Грина и других фундаментальных решений волнового уравнения в классе бегущих функций;
- построение динамических аналогов формулы Грина ([3], с.372) в пространстве ОФ и их регулярных интегральных представлений;
- построение динамических аналогов формулы Гаусса ([3], с.407) для фундаментальных решений;
- построение граничных интегральных уравнений (ГИУ), определяющих решение задачи.

1. Постановка краевых задач. В области $D^- \in R^{N+1}$, ограниченной цилиндрической поверхностью D , образующая которой параллельна оси X_{N+1} , а направляющая S – гладкая замкнутая поверхность Ляпунова в R^N [3, с.409], рассматривается класс *бегущих решений* волнового уравнения

$$\Delta_{N+1}u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g(x, x_{N+1} + vt) = 0, \quad (1)$$

который описывает волны, порождаемые источником, движущимся вдоль оси цилиндра с постоянной скоростью v , $v > 0$, направление движения противоположно направлению оси X_{N+1} . Здесь Δ_{N+1} – оператор Лапласа в R^{N+1} , $-\infty < t < \infty$, $\mathbf{x} = (x, x_{N+1})$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, $\|\mathbf{x}\| = \|(x, x_{N+1})\| = \sqrt{\|x\|^2 + x_{N+1}^2}$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$. Предполагается, что

$$u \rightarrow 0, \quad u_{,i} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|(x, x_{N+1})\| \rightarrow \infty, \quad \forall t, \quad i = \overline{1, N+1} \quad (2)$$

(здесь и далее символ после запятой указывает на дифференцирование по соответствующей координате: $u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$). Действие источника задается потенциалом $g(x, z)$, который описывается интегрируемой на D^- функцией $g(\mathbf{x})$:

$$g(x, z) \in L_1(D^-). \quad (3)$$

Если область D^- ограничена по x , задачу будем называть *внутренней*, в противном случае – *внешней*.

Обозначим $S^- = \{x : (x, x_{N+1}) \in D^-\}$ – сечение D^- , $\mathbf{n} = (n(x), n_{N+1})$ – единичный вектор внешней нормали к D ; $n_{N+1} = 0$, т.к. граница цилиндрическая.

Перейдем в подвижную систему координат $x' = (x_1, \dots, x_N, z)$, где $z = x_{N+1} + vt$. В новой системе функция $u(x, z)$ является решением уравнения:

$$\Delta_N u + (1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g(x, z) = 0, \quad (x, z) \in D^-, \quad (4)$$

где $M = v/c$ – число Маха. Обозначим $m = \sqrt{|1 - M^2|}$.

Рассмотрим две краевые задачи. Пусть на границе D заданы значения функции u или ее нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^N u_{,i} n_i \right).$$

Краевая задача I: для $x \in S$

$$u = u_D(x, z), \quad u_D \in C(D); \quad u_D \rightarrow 0, \quad u_{D,z} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty. \quad (5)$$

Краевая задача II: для $x \in S$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = p_D(x, z), \quad p_D \in L_1(D). \quad (6)$$

Требуется построить их решение.

Легко видеть, что решение задач – параметрическое по M . В зависимости от скорости движения источника возможны три случая: дозвуковой ($M < 1$) – эллиптический, звуковой ($M = 1$) – параболический и сверхзвуковой ($M > 1$) – гиперболический, что определяет особенности и различия в построении решения для каждого из них.

Рассмотрим вначале дозвуковой случай.

2. Обобщенное решение краевых задач при дозвуковых скоростях ($M < 1$).

При $M < 1$ уравнение (4) эллиптическое:

$$\Delta_N u + m^2 u_{,zz} + g(x, z) = 0, \quad (x, z) \in D^- \quad (7)$$

Рассматриваемые задачи относятся к классу задач Дирихле (7),(5) либо Неймана (7),(6).

2.1. Единственность решений.

Теорема 2.1. *Решение первой (второй) внутренней краевой задачи единственно, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $|u| \leq O(|z|^{-\varepsilon})$, $|u_{,i}| \leq O(|z|^{-1-\varepsilon})$ при $|z| \rightarrow \infty$ для $\forall x \in S + S^-$, $i = 1, N + 1$.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность нулевого решения однородной краевой задачи.

Пусть $u(x, z)$ – решение уравнения (7) при $g = 0$, удовлетворяющее (5) при $u_D = 0$ (или (6) при $p_D = 0$) и асимптотическим условиям теоремы. Умножая (7) на u, z и интегрируя по конечному цилиндру $C^- = D^- \cap \{(x, z) : a < z < b\}$, где a, b – произвольные упорядоченные числа, получим

$$\int_{S^-} dV(x) \int_a^b \{0, 5m^2((u_{,z})^2)_{,z} + u_{,z} \Delta_N u\} dz = 0. \quad (8)$$

Равенство удобно преобразовать, используя первую формулу Грина для второго слагаемого ([3], с.338) и интегрируя по z первое. Поскольку на торцах цилиндра нормаль имеет координаты $(0, \dots, 0, \mp 1)$, в результате получим:

$$\left(\frac{m^2}{2} + 1\right) \int_{S^-} (u_{,z}^2(x, b) - u_{,z}^2(x, a)) dV(x) - \sum_{i=1}^N \int_{C^-} u_{,iz} u_{,i} dV(x, z) + \int_C u_{,z} \frac{\partial u}{\partial n} dS(x, z) = 0,$$

где C – боковая поверхность цилиндра C^- . Здесь и далее $dS(\cdot)$ и $dV(\cdot)$ дифференциалы площади поверхности и объема соответственно указанному множеству интегрирования. Последний поверхностный интеграл здесь равен нулю в силу граничных условий первой (второй) краевой задачи. Далее преобразуем второй интеграл этого равенства к виду:

$$0, 5 \int_{C^-} \sum_{i=1}^N ((u_{,i})^2)_{,z} dV(x, z) = 0, 5 \int_{S^-} \sum_{i=1}^N (u_{,i}^2(x, b) - u_{,i}^2(x, a)) dV(x).$$

В результате выражение (8) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & \int_{S^-} \left[(0, 5m^2 + 1)u_{,z}^2(x, b) + 0, 5 \sum_{i=1}^N u_{,i}^2(x, b) \right] dV(x) = \\ & = \int_{S^-} \left[(0, 5m^2 + 1)u_{,z}^2(x, a) + 0, 5 \sum_{i=1}^N u_{,i}^2(x, a) \right] dV(x). \end{aligned}$$

Перейдем здесь к пределу по $b \rightarrow +\infty$. С учетом условий затухания на бесконечности, получим

$$\int_{S^-} \left[(m^2 + 0, 5)u_{,z}^2(x, a) + \sum_{i=1}^N u_{,i}^2(x, a) \right] dV(x) = 0 \quad (9)$$

Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, необходимо, чтобы $u = const$. В силу условий теоремы и произвольности a , $u \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Решение первой (второй) внешней краевой задачи единственно, если $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, что $|u| \leq O(|z|^{-\varepsilon_1})$, $|u_{,i}| \leq O(|z|^{-1-\varepsilon_1})$ при $|z| \rightarrow \infty$ для $\forall x \in S + S^-$, $u_{,i} = O(\|\mathbf{x}\|^{-(N+\varepsilon_2)})$ при $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, i = \overline{1, N+1}$.*

Доказательство. аналогично вышеизложенному. Условие теоремы необходимо для существования интегралов по неограниченной области S^- и их стремления к нулю в при $b \rightarrow \infty$.

Назовем решение краевой задачи, удовлетворяющее условиям теоремы 1.1 или 1.2 соответственно рассматриваемой задаче, *классическим*.

Далее предполагаем, что условия для единственности решений краевых задач выполняются.

2.2. Фундаментальные решения. Аналог формулы Гаусса. Для решения задач перейдем в пространство обобщенных функций. Здесь пространство обобщенных функций $D'(R^{N+1})$ – это пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве финитных бесконечных дифференцируемых функций $D(R^{N+1})$ ([3], с.91).

Обозначим функцию Хевисайда $\theta(z)$. Введем характеристическую функцию множества $H_D^-(x, z)$, доопределив ее на границе области D^- :

$$H_D^-(x, z) = H_S^-(x)1(z), \quad 1(z) \equiv 1, \quad H_S^-(x, z) = \begin{cases} 1, & x \in S^-, \\ 0,5, & x \in S, \\ 0, & x \in S^+, \end{cases} \quad (10)$$

где $S^+ = R^N - (S + S^-)$. Легко показать, используя правила дифференцирования регулярных обобщенных функций ([3], с.118), что

$$\frac{dH_D^-(x, z)}{dx_j} = -n_j \delta_D(x, z) = -n_j \delta_S(x)1(z), \quad (11)$$

где $\delta_D(x, z)$ – сингулярная обобщенная функция - *простой слой* на D :

$$(\alpha(x, z)\delta_D(x, z), \varphi(x, z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_S \alpha(x, z)\varphi(x, z)dS(x), \quad \forall \varphi \in D(R^{N+1}), \quad (12)$$

$\alpha(x, z)$ – плотность простого слоя – локально интегрируемая на D функция.

Обозначим через $U(x, z)$ функцию Грина – решение уравнения (7) в $D'(R^{N+1})$ при $g(x, z) = \delta(x, z) = \delta(x)\delta(z)$, удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности:

$$\square_m^+ U + \delta(x, z) = 0, \quad U(x, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|(x, z)\| \rightarrow \infty \quad (13)$$

(здесь и далее обозначаем $\square_m^\pm = \Delta_N \pm m^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ соответственно знаку). Ее легко получить из известного фундаментального решения уравнения Лапласа ([3], с.208) преобразованием координат $y = (x_1, \dots, x_N, \frac{z}{m})$:

$$U(x, z) = \frac{m^{N-2}}{\sigma_{N+1}(N-1)}(m^2 \|x\|^2 + z^2)^{0,5(1-N)}, \quad N \geq 2, \quad (14)$$

$$U(x, z) = -\frac{1}{2\pi m} \ln \left[\frac{\sqrt{m^2 x^2 + z^2}}{m} \right], \quad N = 1, \quad (15)$$

где $\sigma_{N+1} = 2\pi^{\frac{N+1}{2}}/\Gamma((N+1)/2)$ – площадь единичной сферы, Γ – гамма-функция.

Введем функцию

$$T(x, z, \nu) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i} \nu_i + \frac{\partial U}{\partial z} \nu_{N+1}, \quad (16)$$

которая также является фундаментальным решением (7), соответствующим $g = \frac{\partial \delta(x, z)}{\partial \nu}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{N+1})$. Вычисляя, найдем:
для $N \geq 2$

$$T(x, z, \nu) = -\frac{m^N}{\sigma_{N+1}} \left[\nu_{N+1}z + m^2 \sum_{k=1}^N (\nu_k x_k)(z^2 + m^2 \|x\|^2)^{-\frac{N+1}{2}} \right], \quad (17)$$

для $N = 1$

$$T(x, z, \nu) = -\frac{1}{2\pi m} \frac{z\nu_2 + m^2 x\nu_1}{z^2 + m^2 x^2}, \quad x = x_1. \quad (18)$$

Для $N \geq 2$ функции $U(x, z)$, $T(x, z, \nu)$ – однородные по (x, z) степени $(1-N)$ и $(-N)$:

$$U(x, z) = \frac{1}{\|(x, z)\|^{N-1}} U(x^o, z^o), \quad \|(x^o, z^o)\| = 1, \quad (19)$$

$$T(x, z, \nu) = \frac{1}{\|(x, z)\|^N} T(x^o, z^o, \nu), \quad \|(x, z)\| = (\|x\|^2 + z^2)^{1/2},$$

обладающие следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} U(-x, -z) &= U(x, z) = U(-x, z) = U(x, -z), \\ T(-x, -z, \nu) &= -T(x, z, \nu) = T(x, z, -\nu). \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть множество S^- ограничено. Для $N > 1$ справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. (аналог формулы Гаусса). Фундаментальное решение $T(x, z, n)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_S T(y-x, \zeta-z, n(y)) dS(y) + H_S^-(x) = 0;$$

Для $(x, z) \notin D$ – интеграл регулярный, для $(x, z) \in D$ – сингулярный, берется в смысле главного значения.

Доказательство. Фиксируем $\forall a, a > 0$. Свернем уравнение (13) с $H_S^-(x)\theta(a-|z|)$ – характеристической функцией ограниченного цилиндра $C^- = \{(x, z) : x \in S^-, |z| \leq a\}$. Пользуясь свойством дифференцирования свертки, получим

$$-(U * n_i(x)\delta_S(x)\theta(a-|z|))_{,i} - m^2(U * H_S^-(x) \operatorname{sgn} z \delta(a-|z|))_{,z} + H_S^-(x)\theta(a-|z|) = 0.$$

В силу финитности $H_S^-(x)\theta(a-|z|)$ все свертки существуют. Для $x \notin S$ равенство, с учетом (6), можно переписать в интегральном виде, т.к. U имеет слабую особенность в нуле:

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a dt \int_S T(y-x, t-z, n(y, t)) dS(y) + \\ & + m^2 \int_{S^-} \left[\frac{\partial U(x-y, z-a)}{\partial z} - \frac{\partial U(x-y, z+a)}{\partial z} \right] dV(y) + H_S^-(x)\theta(a-|z|) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При $a \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S^-} \frac{\partial U(x-y, z \pm a)}{\partial z} dV(y) \right| = \\ & = \frac{m^N}{\sigma_{N+1}} \left| \int_{S^-} \frac{(z \pm a) dV(y)}{[(z \pm a)^2 + m^2 r^2]^{(N+1)/2}} \right| \leq \frac{m^N}{\sigma_{N+1} |z \pm a|^N} \int_{S^-} dV(y) = \frac{\operatorname{const}}{|z \pm a|^N} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (21) следует формула леммы для $x \notin S$. Докажем ее для $x \in S$.

Введем следующие обозначения: $D^+ = R^{N+1} - (D + D^-)$, $O_\varepsilon(x, z) = \{(y, t) \in D : \|(x - y, t - z)\| < \varepsilon\}$, $D_\varepsilon = D - O_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon(x, z) = \{(y, t) : \|(x - y, t - z)\| = \varepsilon\}$, $\Pi_\varepsilon(x, z) = \{(y, t) : \|(x - y, t - z)\| < \varepsilon\}$, $\Pi_\varepsilon^\pm(x, z) = \Pi_\varepsilon(x, z) \cap D^\pm$, $\Gamma_\varepsilon^\pm = \Gamma_\varepsilon \cap D^\pm$ соответственно знаку.

Формулу, аналогичную (21), можно записать для областей $D^- + \Pi_\varepsilon^+(x, z)$ и $D^- - \Pi_\varepsilon^-(x, z)$, $(x, z) \in D$:

$$\begin{aligned} & \int_{D_\varepsilon(x, z)} T(y - x, t - z, n(y, t)) dS(y, t) + \int_{\Gamma_\varepsilon^+(x, z)} T(y - x, t - z, \nu(y, t)) dS(y, t) - \\ & - M^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^+(x, z)} \frac{\partial U(x - y, z - t)}{\partial z} \nu_{N+1}(y, t) dS(y, t) + 1 = 0, \\ & \int_{D_\varepsilon(x, z)} T(y - x, t - z, n(y, t)) dS(y, t) + \int_{\Gamma_\varepsilon^-(x, z)} T(y - x, t - z, \nu(y, t)) dS(y, t) - \\ & - M^2 \int_{\Gamma_\varepsilon^-(x, z)} \frac{\partial U(x - y, z - t)}{\partial z} \nu_{N+1}(y, t) dS(y, t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\nu(y, t)$ – единичная нормаль на Γ_ε^\pm , внешняя по отношению к рассматриваемому множеству. На Γ_ε^- и Γ_ε^+ в симметричных относительно (x, z) точках очевидно, что $\nu(y^-, t^-) = \nu(y^+, t^+)$. В силу свойств симметрии T и $U_{,z}$ (19), складывая эти два равенства, деля на 2 и переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ получим (с учетом определения $H_S^-(x)$) первую формулу леммы.

Из этих же соотношений, вычитая, получим еще одно полезное равенство, которое нам понадобится в дальнейшем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon(x, z)} T\left(y - x, t - z, \frac{(y - x, t - z)}{\|(y - x, t - z)\|}\right) dS(y, t) + 1 = 0. \tag{22}$$

2.3. Аналог формулы Грина. Введем функцию

$$\hat{u}(x, z) = u(x, z)H_D^-(x, z),$$

где $u(x, z)$ – рассматриваемое классическое решение краевой задачи в области $D + D^-$, определенную теперь на всем пространстве R^{N+1} , и будем ее рассматривать как регулярную обобщенную функцию из $D'(R^{N+1})$. Аналогично вводится $\hat{g}(x, z) = g(x, z)H_D^-(x, z)$.

Лемма 2.2. Если $u(x, z)$ – классическое решение краевой задачи, то $\hat{u}(x, z)$ удовлетворяет обобщенной формуле Грина в $D'(R^{N+1})$:

$$\hat{u} = \hat{g} * U + m^2 p_D \delta_D * U - \sum_{i=1}^N U_{,i} * n_i u_D \delta_D \tag{23}$$

Доказательство. Используя правило дифференцирования обобщенных функций и (11), получим в $D'(R^{N+1})$ уравнение для \hat{u} :

$$\square_m^+ \hat{u} + \hat{g} + m^2 p_D \delta_D - \sum_{i=1}^N (un_i \delta_D)_{,i} = 0. \quad (24)$$

Опираясь на свойства функции Грина ([3], с.200) и лемму 2.1, найдем:

$$\hat{u}(x, z) = \hat{g} * U + m^2 p_D \delta_D * U - \sum_{i=1}^N (un_i \delta_D)_{,i} * U. \quad (25)$$

Перебрасывая в последнем слагаемом дифференцирование на U (в силу свойства дифференцирования свертки ([3], с.140), получим (22). Все свертки существуют в силу ограниченности носителя u по x и асимптотических свойств U, u, g на бесконечности. Лемма доказана.

Следствием лемм 2.1 и 2.2 является следующая теорема.

Теорема 2.3. Если $u(x, z)$ удовлетворяет условию Липшица на D , т.е. $\exists \beta > 0$: $|u(x, z) - u(y, t)| < \text{const} \|(x - y, z - t)\|^\beta$, тогда

$$u(x, z) H_S^-(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S^-} U(y - x, t - z) g(y, t) dV(y) + \\ + m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S U(y - x, t - z) \frac{\partial u(y, t)}{\partial n(y)} dS(y) + V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S u(y, t) T(y - x, t - z, n(y)) dS(y).$$

Доказательство. Если в формуле (23) перейти к интегральной записи и воспользоваться свойствами симметрии (20), то получим формулу теоремы. Для $x \notin D$ все интегралы регулярны, поскольку подынтегральные функции не имеют особенностей в D^- , а также в силу асимптотических свойств фундаментальных решений на бесконечности (19).

Формула выражает функцию $u(x, z)$ внутри области через ее граничные значения и значения нормальной производной, т.е. аналогична формуле Грина, а при $m = 1$ (случай, который соответствует статической задаче, $v = 0$) просто совпадает с ней ([3], с.338).

Докажем эту формулу на границе с учетом определения (10) и используя лемму 2.1. Пусть $(x^*, z^*) \in D, (x, z) \in D^-, (x, z) \rightarrow (x^*, z^*)$. Тогда имеем

$$u(x^*, z^*) = \lim_{(x,z) \rightarrow (x^*, z^*)} u(x, z) = \lim_{(x,z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S^-} [U(y - x, t - z) g(y, t)] dV(y) + \\ + \lim_{(x,z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S m^2 U(y - x, t - z) \frac{\partial u}{\partial n(y)} dS(y) + \\ + \lim_{(x,z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S T(y - x, t - z, n(y)) u(y) dS(y).$$

Первые два интеграла непрерывны по (x, z) , в силу слабой особенности подынтегральных функций, а третий интеграл преобразуем, используя аналог формулы Гаусса (лемма 2.1):

$$\begin{aligned}
 u(x^*, z^*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S^-} [U(y - x^*, t - z^*)g(y, t)]dV(y) + m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S U(y - x^*, t - z^*) \frac{du}{dn(y)} dS(y) + \\
 &+ \lim_{(x,z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S (u(y, t) - u(x^*, z^*))T(y - x, t - z, n(y))dS(y) + \\
 &+ u(x^*, z^*) \lim_{(x,z) \rightarrow (x^*, z^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S T(y - x, t - z, n(y))dS(y) = \dots + \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S (u(y, t) - u(x^*, z^*))T(y - x^*, t - z^*, n(y))dS(y) + u(x^*, z^*) = \dots + \\
 &+ V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S u(y, t)T(y - x^*, t - z^*, n(y))dS(y) - \\
 &- u(x^*, z^*)V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S T(y - x^*, t - z^*, n(y))dS(y) + u(x^*, z^*) = \dots + \\
 &+ V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S u(y, t)T(y - x^*, t - z^*, n(y))dS(y) + (1 - 0,5)u(x^*, z^*).
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью третьего интеграла в первом равенстве, что позволяет записать его на границе в виде интеграла со слабой особенностью в силу условия Липшица для $u(y, t)$, а далее свойством интеграла в смысле главного значения, который для интегрируемых функций совпадает со значением лебеговского интеграла. Переноса $0,5u(x^*, z^*)$ в левую часть, получим формулу теоремы для граничных точек. Теорема доказана.

Легко видеть, что при $(x, z) \in D$ формула является сингулярным граничным интегральным уравнением для решения задачи Неймана. Для задачи Дирихле эта же формула является интегральным уравнением Фредгольма первого рода с полярным ядром. Интегральная запись формулы для конкретных N здесь не вызывает затруднений. Достаточно подставить в формулу фундаментальные решения (14) – (16). Вопросы разрешимости такого типа уравнений достаточно изучены.

3. Обобщенное решение краевых задач при сверхзвуковых скоростях. При $M > 1$ уравнение (4) – классическое волновое уравнение строго гиперболического типа:

$$\Delta_N u - m^2 u_{,zz} + g(x, z) = 0, \quad m^2 = M^2 - 1 > 0. \tag{26}$$

Следовательно, решение может иметь разрывы производных на характеристических поверхностях, на которых: $m^2 \nu_z^2 = \|\nu\|^2$. Поверхность разрыва F – волновой фронт; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_z)$ – единичный вектор нормали к F в R^{N+1} , $\nu_z = \nu_{N+1}$. На фронтах решений волнового уравнения должны выполняться условия Адамара на скачки:

$$[u]_F = 0, \quad [\nu_z u_{,j} - \nu_j u_{,z}]_F = 0, \quad j = \overline{1, N}, \tag{27}$$

$$\left[\sum_{j=1}^N \nu_j u_{,j} - M^2 \nu_z u_{,z} \right]_F = 0. \tag{28}$$

Здесь $[f(x')]_F = f^+(x') - f^-(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(x' + \varepsilon\nu) - (f(x' - \varepsilon\nu)))$, $x' \in F$.

Второе условие в (27) является следствием первого, т.к. из непрерывности решения следует непрерывность касательных производных на фронтах. Условие (28) – закон сохранения импульса на волновых фронтах.

Здесь будем называть волну *слабой ударной*, если $\sum_{i=1}^N [\nu_i u_{,i}]_F = 0$, *сильной ударной*, если $\sum_{i=1}^N [\nu_i u_{,i}]_F = \infty$. В противном случае имеем просто *ударную* волну.

Решение уравнений (6) с конечным числом волновых фронтов, достаточно гладких почти всюду и разделяющих область определения на конечное или счетное число открытых подобластей, где решение дважды дифференцируемо по всем переменным, будем называть *классическим*.

В физических задачах бегущие нагрузки, как правило, финитны. При сверхзвуковых скоростях возбуждение в среде распространяется медленнее их, поэтому возникают фронты, разделяющие невозмущенную зону, где $u \equiv 0$, и возмущенную.

Обозначим $C = \{(x, z) \in D : z \geq 0\}$, $C^- = \{(x, z) \in D^- : z \geq 0\}$. Пусть $\text{supp } g \subset C + C^-$ и $\text{supp } u_D \subset C$ для первой краевой задачи или $\text{supp } p_D \subset C$ для второй. Тогда

$$\text{supp } u(x, z) \subset C^- + C. \quad (29)$$

Если перед передним фронтом волны среда невозмущенная, то

$$u(x, 0) = u^0(x) = 0, \quad u_z^0(x) = u_z^0(x) = 0. \quad (30)$$

Заметим, что область нулевых значений функции u в этом случае будет находиться перед конусом переднего фронта волны, что связано с особенностью фундаментального решения волнового уравнения в этом случае.

3.1. Единственность решения краевых задач.

Теорема 3.1. *Если $u(x, z)$ – классическое решение первой (второй) внутренней краевой задачи, то оно единственно.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность нулевого решения однородной краевой задачи с той же асимптотикой решений на бесконечности.

Пусть $u(x, z)$ – решение уравнения (26) при $g \equiv 0$, удовлетворяющее (5) при $u_D \equiv 0$ (или (6) при $p_D = 0$) и (29), (30). Умножая (26) на $u_{,z}$ и суммируя по i , после простых выкладок получим

$$\sum_{i=1}^{N+1} (u_{,i} u_{,z})_{,i} - 0, 5 \left(\sum_{i=1}^{N+1} (u_{,i})^2 + M^2 (u_{,z})^2 \right)_{,z} = 0.$$

Проинтегрируем это соотношение по цилиндру $C_{ab}^- = D^- \cap \{(x, z) : 0 \leq a < z < b\}$, C_{ab} – его граница на D . С учетом условий леммы, также получим:

$$\int_{S^-} dV(x) \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{N+1} (u_{,i} u_{,z})_{,i} - 0, 5 \left(\sum_{i=1}^{N+1} u_{,i} u_{,i} + M^2 u_{,z} u_{,z} \right)_{,z} \right) dz = 0.$$

Интеграл сразу преобразовать с использованием формул Остроградского-Гаусса нельзя, т.к. подынтегральные функции разрывны на волновых фронтах. Пусть $F_k(x')$ – такие фронты, h^k соответственно нормали к ним. С учетом разделения области интегрирования волновыми фронтами, используя названную теорему для подобластей между ними, последнее равенство приводим к виду:

$$\int_{C_{ab}} u_{,z} \sum_{i=1}^{N+1} u_{,i} n_i dS(x, z) + \int_F \sum_{i=1}^{N+1} [u_{,z} u_{,i} h_i^k - 0,5(u_{,i} u_{,i} + M^2 u_{,z}^2) h_z^k]_{F_k} dS(x) + \int_{S^-} \left(u_{,z}^2 - 0,5 \left(\sum_{i=1}^{N+1} u_{,i} u_{,i} + M^2 u_{,z}^2 \right) \right) \Big|_{(x,a)}^{(x,b)} dV(x) = 0.$$

Первый интеграл равен нулю в силу нулевых граничных условий первой краевой задачи либо второй. Скачки на фронтах во втором интеграле можно преобразовать с учетом условий на фронтах (29) – (30), где выражения в квадратных скобках непрерывны:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N+1} [u_{,z} u_{,i} h_i^k - 0,5(u_{,i} u_{,i} + M^2 u_{,z}^2) h_z^k]_{F_k} = \\ & = 0,5 [(u_{,z} h_i^k - u_{,i} h_z^k) u_{,i} + (u_{,i} h_i^k - M^2 u_{,z} h_z^k) u_{,z}]_{F_k} = \\ & = 0,5 [(u_{,z}^- h_i^k - u_{,i}^- h_z^k) [u_{,i}]_{F_k} + (u_{,i}^- h_i^k - M^2 u_{,z}^- h_z^k) [u_{,z}]_{F_k}] = \\ & = 0,5 \left[[(u_{,z} h_i^k - u_{,i} h_z^k)]_{F_k} u_{,i}^- + [u_{,i} h_i^k - M^2 u_{,z} h_z^k]_{F_k} u_{,z}^- \right]_{F_k} = 0. \end{aligned}$$

Здесь знаком плюс и минус помечены значения соответствующего выражения перед и за фронтом волны. Последний интеграл преобразуется к виду:

$$\int_{S^-} \left(\sum_{i=1}^N u_{,i} u_{,i} + (M^2 - 1) u_{,z}^2 \right) \Big|_{(x,a)} dS(x) = \int_{S^-} \left(\sum_{i=1}^N u_{,i} u_{,i} + (M^2 - 1) u_{,z}^2 \right) \Big|_{(x,b)} dS(x).$$

Поскольку $M > 1$, выражение под знаком каждого интеграла положительно. Далее рассуждения аналогичны проведенным в лемме 2.1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы для внешней задачи аналогично, следует только ввести ограничивающий цилиндр достаточно большого радиуса и учесть асимптотику решений на бесконечности (2).

3.2. Обобщение формул Грина и Гаусса для сверхзвуковых скоростей .

Введем регулярные обобщенные функции, определенные на R^{N+1} с тем же носителем: $\hat{u}(x, z) = u(x, z) H_S^-(x) \theta(z)$, $\hat{g}(x, z) = g(x, z) H_S^-(x) \theta(z)$. Здесь $\theta(z)$ – функция Хевисайда, равная 0,5 при $z = 0$.

Обозначим $U_0(x, z)$ – функцию Грина уравнений (26), удовлетворяющую условиям:

$$\square_m^- U_0 + \delta(x, z) = 0, \tag{31}$$

и условиям излучения:

$$\text{supp } U_0(x, z) \subset K^+(x, z), \quad U_0(x, z) \rightarrow 0, \quad \|(x, z)\| \rightarrow \infty, \tag{32}$$

где $K^+(x, z) = \{(x, z) : z > m \|x\|\}$ - конус возмущений, порожденных источником в точке $(0,0)$, $K(x, z) = \{(x, z) : z = m \|x\|\}$ - его боковая поверхность, $\mathbf{K} = K^+ + K$.

Наряду с U_0 введем первообразные по z функции:

$$U_k(x, z) = U_{k-1}(x, z) * \theta(z)\delta(x) = U_{k-1}(x, z) *_z \theta(z), \quad (33)$$

$$T_k(x, z, n) = \sum_{i=1}^N U_{k,i}(x, z)n_i = T_{k-1} *_z \theta(z), \quad k = 1, 2. \quad (34)$$

Здесь и далее значок "x" или "z" под знаком свертки означает, что свертка берется только по x или z соответственно.

Легко видеть, что, в силу ограниченности носителей U и θ , все свертки существуют, имеют тот же носитель K и удовлетворяют уравнениям:

$$\square_m^- U_{k+1} + \frac{1}{k!} z_+^k \delta(x) = 0, \quad (35)$$

$$\square_m^- T_{k+1} + \frac{1}{k!} \frac{\partial}{\partial n} (z_+^k \delta(x)) = 0, \quad (36)$$

Теорема 3.2. *Обобщенная функция $\hat{u}(x, z)$, где $u(x, z)$ - классическое решение (26) в $C^+ + C$, представима в виде:*

$$\begin{aligned} \hat{u} = & p_D(x, z)\delta_S(x)\theta(z) * U_0(x, z) + \sum_{i=1}^N u_{D,z}(x, z)n_i(x)\delta_S(x)\theta(z) * U_{1,i}(x, z) + \\ & + \sum_{i=1}^N u^0(x, z)n_i(x)\delta_S(x) *_x U_{1,i}(x, z) + (H_S^-(x)u^0(x) *_x U_0(x, z))_{,z} + \\ & + m^2 u^0_{,z}(x)H_S^-(x) *_x U_0(x). \end{aligned}$$

Доказательство. Дифференцируя \hat{u} по правилам для обобщенных функций, с учетом соотношений на фронтах (27),(28), получим:

$$\begin{aligned} \square_m^- \hat{u}(x, z) + \hat{g}(x, z) + p_D(x, z)\delta_S(x)\theta(z) + \{n_i(x)\delta_S(x)\theta(z)u_D(x, z)\}_{,i} + \\ + m^2 u^0_{,z}(x)H_S^-(x)\delta_S(z) + m^2 \{H_S^-(x)\delta_S(z)u^0(x)\}_{,z} = 0. \end{aligned}$$

Используя свойство функции Грина, найдем

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, z) = U_0(x, z) * p_D(x, z)\delta_S(x)\theta(z) + \sum_{i=1}^N \{n_i(x)\delta_S(x)\theta(z)u_D(x, z)\}_{,i} * U_0 + \\ + m^2 u^0_{,z}(x)H_S^-(x) *_z U_0(x, z) + m^2 \left\{ H_S^-(x)u^0(x) *_z U_0(x, z) \right\}_{,z}, \quad (37) \end{aligned}$$

где $a(x)\delta_S(x)\theta(z)$ - простой слой на C , $\beta(x, z)H_S^-(x)\delta(z)$ - простой слой на его основании $\{S^- \times 0\}$. Поскольку, как следует из (33), $U_{0,z} = U_1$, легко видеть, что

$$\{u(x, z)n_i(x)\delta_S(x)\theta(z)\}_{,i} * U_0 = \{u(x, z)n_i(x)\delta_S(x)\theta(z) * U_{1,z}\}_{,i} =$$

$$= u_{,z}(x, z) n_i(x) \delta_S(x) \theta(z) * U_{1,i} + u^0(x) n_i(x) \delta_S(x) * U_{1,i}.$$

Подставляя это в (37), получим формулу теоремы. Причем, в силу свойства свертки, решение единственно.

В отличие от формулы Грина, полученная формула выражает решение внутри области через граничные значения нормальной и касательной производной U на D , а также значения $u(x, 0)$ и $u_{,z}(x, 0)$, что вполне естественно для гиперболической задачи, здесь эти последние условия аналогичны начальным условиям для решения волнового уравнения в $R^{N+1} \times t$.

Отметим, что формула теоремы предпочтительнее, чем (37), т.к. выражает функцию $u(x, z)$ через более регулярные производные первообразной $U_{1,i}$, а не $U_{0,i}$, которые имеют сильные особенности на волновых фронтах. Далее покажем для разных N ее удобство при построении интегральных представлений решений.

3.3. Динамический аналог формулы Гаусса. В отличие от дозвукового случая, где представление характеристической функции области определения решения уравнения (7) с использованием фундаментального решения уравнения имеет вид, аналогичный формуле Гаусса ([3], с.406), в сверхзвуковом случае формальная запись этой формулы в интегральном виде для пространств разной размерности приводит к расходящимся интегралам. Однако введение первообразной функции Грина позволяет получить аналог этой формулы, который здесь назван *динамическим*.

Лемма 3.1. Функции $U_k(x, z)$ удовлетворяют равенствам:

$$U_{k+2,i} * n_i(x) \delta_S(x) + m^2 U_{k,x} * H_S^-(x) - \frac{z_+^{k+1}}{(k+1)!} H_S^-(x) = 0, \quad (38)$$

$$U_{k+1,i}(x, z) * n_i(x) \delta_S(x) + m^2 U_{k,z} * H_S^-(x) + \frac{z_+^k}{k!} H_S^-(x) = 0. \quad (39)$$

Доказательство. Свернем уравнение (35) с $H_S^-(x) \theta(z)$ и воспользуемся свойством дифференцирования свертки:

$$\begin{aligned} \square_{m^-} U_{k+1} * H_S^-(x) \theta(z) &= \Delta_N U_{k+1} * H_S^-(x) \theta(z) - m^2 U_{k+1,zz} * H_S^-(x) \theta(z) = \\ &= \sum_{i=1}^N U_{k+2,i} * n_i(x) \delta_S(x) - m^2 U_{k+1,z} * H_S^-(x) = \\ &= -\frac{1}{k!} z^k \theta(z) \delta(x) * H_S^-(x) \theta(z) = -\frac{1}{(k+1)!} z^{k+1} \theta(z) * H_S^-(x). \end{aligned}$$

В силу ограниченности носителя функций по z слева, все свертки существуют. Отсюда следует формула (38) леммы. Свертка (35) с $\delta(z) H_S^-(x)$ либо дифференцирование (38) по z дает формулу (39). Лемма доказана.

3.4. Интегральные представления решений краевых задач для сверхзвуковых скоростей. Для перехода к интегральным представлениям формул лемм 3.2 и 3.3 следует использовать вид функции Грина, который, в отличие от дозвукового случая, существенно зависит от N . Далее построим их для $N = 1, 2$. Эти случаи соответствуют плоским и пространственным краевым задачам математической физики.

3.4.1. Граничные интегральные уравнения пространственной краевой задачи. В этом случае $N = 2$ и фундаментальное решение волнового уравнения (31) имеет вид ([3], с.206):

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(z - m \|x\|)}{\sqrt{z^2 - m^2 \|x\|^2}}, \quad x = (x_1, x_2), \quad (40)$$

которое представляет собой сильную ударную волну с фронтом $z = m \|x\|$. Его носителем является внутренность конуса: $m \|x\| < z$. Вычисляя по формулам (34), найдем необходимые первообразные и их производные по направлению с тем же носителем:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\theta(z - m \|x\|)}{2\pi} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - m^2 \|x\|^2}}{m \|x\|}, \\ T_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(z - m \|x\|)}{\sqrt{z^2 - m^2 \|x\|^2}} \left[n_z - \frac{z}{\|x\|} \frac{\partial \|x\|}{\partial n} \right], \\ T_2 &= \frac{\theta(z - m \|x\|)}{2\pi} \left[n_z \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - m^2 \|x\|^2}}{m \|x\|} - \frac{1}{\|x\|} \frac{\partial \|x\|}{\partial n} \sqrt{z^2 - m^2 \|x\|^2} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Запишем формулы лемм 3.2 и 3.3 с учетом этих представлений.

Лемма 3.2 (динамический аналог формулы Гаусса) .

$$\begin{aligned} V.P. \int_{S_x(z)} \frac{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) + m^2 \int_{S_x^-(z)} \frac{dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} + 2\pi z_+ H_S^-(x) &= 0, \\ V.P. \int_{S_x(z)} \frac{z}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} \frac{dS(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} + m^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_x^-(z)} \frac{dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} + 2\pi \theta(z) H_S^-(x) &= 0, \end{aligned}$$

где $S_x(z) = \{y \in S : mr < z\}$, $S_x^-(z) = \{y \in S^- : mr < z\}$, $r = \|x - y\|$.

Доказательство. Интегральное представление формул леммы 3.3. можно записать в виде

$$\int_S T_{k+2}(y, x, z, n(y)) dS(y) + m^2 \int_{S^-} U_k(x, y, z) dV(y) = \frac{1}{(k+1)!} z_+^{k+1} H_S^-(x), \quad (42)$$

$$\int_S T_{k+1}(y, x, z, n(y)) dS(y) + m^2 \int_{S^-} \frac{\partial U_k(x, y, z)}{\partial z} dV(y) = \frac{1}{k!} z_+^k H_S^-(x). \quad (43)$$

Для $k = 0$, с учетом (39) и свойства нормали на D : $n_z = 0$, получим формулы леммы 4.1.

Легко видеть, что при $x \notin S$, все интегралы существуют в силу слабых особенностей подынтегральных функций на фронте $z = mr$. Ясно, что если $z < 0$, $x \in S$, то $S_x^-(z)$ – пустое множество, поэтому левая и правая части равенства равны 0.

Заметим, что первая формула леммы может быть получена из второй простым интегрированием по z от 0 до z . По лемме дю Буа-Реймона ([3], с.97) в этой области левые и правые обобщенные функции, входящие в это равенство, равны как регулярные. Покажем, что равенства сохраняются и для $x \in S$, если учесть определение $H_S^-(x)$ на S .

Обозначим $O_\varepsilon(x) = \{y \in S : \|x - y\| < \varepsilon\}$, $S_\varepsilon(x) = S - O_\varepsilon$, $\Pi_\varepsilon(x) = \{y : \|x - y\| < \varepsilon\}$, $\Pi_\varepsilon^\pm(x) = \Pi_\varepsilon \cap S^\pm$, $S_\varepsilon^\pm = S^- \pm \Pi_\varepsilon^\pm$, Γ_ε^\pm – границы Π_ε^\pm в S^\pm соответственно знакам. Из (43) следует

$$\int_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} \frac{z\theta(z - mr)}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} \frac{dS(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} + m^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_\varepsilon^+} \frac{\theta(z - mr) dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} + 2\pi = 0,$$

$$\int_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} \frac{z\theta(z - mr)}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} \frac{dS(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} + m^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_\varepsilon^-} \frac{\theta(z - mr) dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} = 0.$$

В силу того, что на Γ_ε^\pm : $\frac{dr}{dn(y)} = \pm 1$ соответственно знаку, складывая эти два равенства и деля на 2, получим:

$$\int_{S_\varepsilon(x)} \frac{z}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} \frac{\theta(z - mr)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} dS(y) + m^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Pi_\varepsilon(x)} \frac{\theta(z - mr) dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} + \pi = 0. \tag{44}$$

Последний интеграл для малых ε ($\varepsilon < z/m$) легко вычисляется, если перейти к полярной системе координат:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\varepsilon \frac{r dr d\theta}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} = \frac{m\varepsilon^2}{z}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{m\varepsilon^2}{z^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad z \neq 0.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, получим вторую формулу леммы для $x \in S$. При этом первый интеграл, берется в смысле главного значения, которое существует в силу антисимметрии подинтегральной функции. Из нее, как было сказано, следует первая формула и для граничных точек. Лемма доказана.

Если $z > md$, где $d = \max_{y_i \in S} \|y_1 - y_2\|$ – диаметр цилиндра, то $S_x(z) = S$, $S_x^-(z) = S^-$. Т.е. область интегрирования становится постоянной (не зависит от z).

Теорема 3.3 (динамический аналог формулы Грина). При $M > 1$ решение краевой задачи представимо в виде

$$2\pi \hat{u}(x, z) = \int_0^z \left\{ V.P. \int_{S_x(z-\zeta)} \left[u_{,z}(y, \zeta) \frac{z-\zeta}{2} \frac{dr}{dn(y)} + p_D(y, \zeta) \right] \frac{dS(y)}{\sqrt{|z-\zeta|^2 - m^2r^2}} \right\} d\zeta +$$

$$+ \int_{S_x(z)} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} \frac{u^0(y) dS(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} + m^2 \int_{S_x^-(z)} \frac{u_z^0 dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_x^-(z)} \frac{u^0(y) dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2r^2}}$$

или, при перемене порядка интегрирования,

$$2\pi\hat{u}(x, z) = V.P. \int_{S_x(z)} \theta(z - mr) \left\{ \int_{mr}^z \frac{[u_{,z}(y, \zeta) \frac{z-\zeta}{2} \frac{\partial r}{\partial n(y)} + p_D(y, \zeta)] d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2 - m^2 r^2}} \right\} dS(y) + \\ + \int_{S_x(z)}^z \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} \frac{u^0(y) dS(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} + m^2 \int_{S_x^-(z)} \frac{u_z^0 dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_x^-(z)} \frac{u^0(y) dV(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}},$$

где для $x \in S^-$ – интегралы регулярные, а для $x \in S$ – сингулярные, берутся в смысле главного значения.

Доказательство. Для $x \notin S$ формула является прямым следствием леммы 3.2, если записать все свертки с учетом (40) – (41). Все интегралы существуют в силу слабой сходимости подынтегральных функций на фронтах. Для таких x можно поменять порядок интегрирования в первом интеграле.

$$\int_0^z \dots d\zeta \int_{S_x(z-\zeta)} \dots dS(y) = \int_{S_x(z)} \dots dS(y) \int_{mr}^z \dots dz. \quad (45)$$

Если $x \in S$, интегралы, содержащие $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)}$, являются сингулярными. Поэтому, чтобы доказать теорему для $x \in S$, здесь можно воспользоваться этой же формулой, но для области с выколотой окрестностью точки x .

Итак, пусть $x \in S$. Трансформируем S в окрестности точки x аналогично, как в лемме 4.1, обойдя ее по ε – полуокружности внутри области S^- , а затем перейдем к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, в результате получим:

$$0 = \int_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn(y)} dS(y) \int_{mr}^z \frac{u_{,z}(y, \zeta)(z - \zeta)}{\sqrt{|z - \zeta|^2 - m^2 r^2}} d\zeta + \int_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} \frac{z}{r} \frac{dr}{dn(y)} \frac{u^0(y) dS(y)}{\sqrt{z^2 - m^2 r^2}} + \dots \quad (46)$$

Здесь выписаны лишь сингулярные интегралы. Остальные непрерывны по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. На Γ_ε^- : $r = \varepsilon$, $\frac{\partial r}{\partial n(y)} = -\frac{\partial r}{\partial r} = -1$, $dS(y) = \varepsilon d\theta$, где θ – полярный угол с вершиной в точке (x^*, z) . Обозначим θ_1, θ_2 – полярные углы концов Γ_ε^- , пронумерованные в порядке положительного направления обхода контура $S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-$ в сечении $\{S^- \times z\}$. Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-} \dots = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \dots + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \dots$$

Рассмотрим интегралы по Γ_ε^- . С учетом значений подынтегральных функций, они преобразуются к виду:

$$I_\varepsilon(x, z) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{m\varepsilon}^z \frac{u_{,z}(x + \varepsilon e(\theta), \zeta)(z - \zeta) d\zeta}{\sqrt{|z - \zeta|^2 - m^2 r^2}},$$

$$J_\varepsilon(x, z) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{zu(x + \varepsilon e(\theta))}{\sqrt{z^2 - m^2 \varepsilon^2}} d\theta, \quad e(\theta) = \frac{y - x}{\|y - x\|}.$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\theta_2 - \theta_1) = -\pi$, поэтому:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x, z) = \pi \int_0^z u_{,z}(x, \zeta) d\zeta = \pi [u(x, z) - u^o(x)], \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(x, z) = \pi u^o(x). \quad (47)$$

Интеграл по S_ε , по определению, совпадает с интегралом в смысле главного значения, который существует в силу антисимметрии функции $\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{n_i(x_i - y_i)}{r}$ относительно точки x^* по y . Переходя в (46) к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом (47), получим формулу теоремы и для граничных точек. Теорема доказана.

В случае нулевых условий при $z = 0$, представление решения значительно упрощается. Для $x \in S$ формула дает граничное интегральное уравнение для решения первой или второй краевой задачи. Причем в случае первой краевой задачи, в отличие от дозвукового случая, на D нужна не сама функция u , а ее касательная производная $u_{,z}$. Для второй краевой задачи уравнения сингулярные.

3.4.2. Интегрально-функциональные уравнения при $N=1$. В этом случае точка пространства имеет координаты (x_1, z) и мы имеем плоскую задачу. Фундаментальное решение уравнения (31) U_0 – это функция Римана ([3], с.206):

$$U_0 = \frac{1}{2m} \theta(z - m|x|), \quad U_1 = \frac{1}{2m} (z - m|x|)_+, \quad (48)$$

$$T_1 = \frac{1}{2m} (n_2 - mn_1 \operatorname{sgn} x) \theta(z - m|x|).$$

Возможны два случая: область определения либо полоса $S = \{(x, z) : |x| < a\}$, либо полуплоскость $S = \{(x, z) \in R_2 : x_2 > 0\}$.

Полоса. Обозначим $a_1 = a, a_2 = -a, u_i(z) = u(a_i, z), u_{i,j}(z) = u_{,j}(j = x, z)$ при $y = a_i$. В этом случае на S нормаль $n = (\operatorname{sgn} x, 0), \delta_S(x)\theta(z) = \theta(z) (\delta(x + a) - \delta(x - a))$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \theta(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 1/2 & z = 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (49)$$

Теорема 3.4. При $M > 1$ решение краевой задачи в полосе: $|x| < a, \forall z$, при условиях: $u(x, 0) = 0, u_{,z}(x, 0) = 0$ и $u_{i,y}(z)$ интегрируемы на $(0, \infty)$, имеет вид

$$\begin{aligned} 2m\hat{u}(x, z) = & F_+(x, z) + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \theta(z - m|x - a_i|) \int_0^{z - m|x - a_i|} u_{i,x}(z) dz - \\ & - m \operatorname{sgn}(x - a) \theta(z - m|x - a|) u_1(z - m|x - a|) + \\ & + m \operatorname{sgn}(x + a) \theta(z - m|x + a|) u_2(z - m|x + a|), \end{aligned} \quad (50)$$

зде

$$F_+(x, z) = \theta(z)\theta(a - |x|) \int_0^z d\zeta \int_{\max\{-a, x-(z-\zeta)/m\}}^{\min\{a, x+(z-\zeta)/m\}} g(y, \zeta) dy.$$

А на границе ($|x| = a, \forall z$) решение удовлетворяет системе интегрально-функциональных уравнений с запаздыванием:

$$mu_1(z)\theta(z) = F_1(z) - \theta(z) \int_0^z u_{1,x}(\zeta) d\zeta + \theta(z-2ma) \int_0^{z-2ma} u_{2,x}(\zeta) d\zeta - mu_2(z-2ma)\theta(z-2ma), \quad (51)$$

$$mu_2(z)\theta(z) = F_2(z) - \theta(z-2ma) \int_0^{z-2ma} u_{1,x}(\zeta) d\zeta + \theta(z) \int_0^z u_{2,x}(\zeta) d\zeta + mu_1(z-2ma)\theta(z-2ma), \quad (52)$$

зде

$$F_1(z) = \theta(z) \int_0^z d\zeta \int_{\max\{-a, a-(z-\zeta)/m\}}^a g(y, \zeta) dy,$$

$$F_2(z) = \theta(z) \int_0^z d\zeta \int_{-a}^{\min\{a, -a+(z-\zeta)/m\}} g(y, \zeta) dy.$$

Доказательство. Соотношения (49) позволяют записать формулы (35) леммы 3.2 в следующем интегральном виде:

$$2m\hat{u} = F_+(x, z) + \sum_{i=1}^2 (-i)^i \theta(z - m|x - a_i|) \int_0^{z-m|x-a_i|} (u_{i,x}(\zeta) - m \operatorname{sgn}(x - a_i) u_{i,\zeta}(\zeta)) d\zeta$$

(здесь учтены нулевые условия при $z = 0$). Интегрируя второе слагаемое справа по ζ получим (50). В силу леммы дю Буа-Реймона формулы (50) справедливы для $x \neq a_i$. С учетом доопределения функции Хевисайда в нуле, они справедливы и при $x = a_i$ и приводятся к виду (51), (52). Покажем это.

Для этого запишем равенство (50) для точки $x = (a - \varepsilon, z), 0 < \varepsilon < mz$. Т.к. $x \in S^-$,

$$2mu(a - \varepsilon, z) = F_+(a - \varepsilon, z) - \theta(z - m\varepsilon) \int_0^{z-m\varepsilon} u_{1,x}(\zeta) d\zeta - mu_1(z - m\varepsilon)\theta(z - m\varepsilon)\operatorname{sgn}(-\varepsilon) +$$

$$+ m\operatorname{sgn}(2a - \varepsilon)u_2(z - |m(2a - \varepsilon)|)\theta(z - |m(2a - \varepsilon)|) + \theta(z - |m(2a - \varepsilon)|) \int_0^{z-|m(2a-\varepsilon)|} u_{2,x}(\zeta) d\zeta.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$2mu_1(z) = F_1(z) - \theta(z) \int_0^z u_{1,x}(\zeta) d\zeta + mu_1(z)\theta(z) +$$

$$+mu_2(z - 2ma)\theta(z - 2ma) + \theta(z - 2ma) \int_0^{z-2ma} u_{2,x}(\zeta)d\zeta.$$

Откуда следует (51). Аналогично доказывается второе уравнение (52). Ч.т.д.

Эти уравнения при заданных $\frac{\partial u}{\partial x}$ на прямых $x = \pm a$ являются функциональными с запаздыванием по z , т.к. связывают последующие по z граничные значения с предыдущими. Пошаговым интегрированием по z от 0 они позволяют определить u_1 на u_2 на каждом последующем шаге и, далее по формулам (50), внутри полосы.

Решения КЗ для полуплоскости. Из теоремы 3.2 следует, что

$$2mu = F_+(x, z) + \theta(x)\theta(z - mx) \left\{ m u(0, z - mx) + \int_0^{z-mx} u_{,x}(0, \zeta)d\zeta \right\}, \quad (53)$$

где $F_+(x, z) = \theta(x)\theta(z) \int_0^z d\zeta \int_{\max\{0, x-(z-\zeta)/m\}}^{x+(z-\zeta)/m} g(y, \varsigma)dy.$

Решение задачи для полуплоскости $x > 0$ дает одно интегральное уравнение

$$mu(0, z) = F_0(z) + \theta(z) \int_0^z u_{,x}(0, \zeta)d\zeta, \quad (54)$$

где $F_0(z) = \theta(z) \int_0^z d\zeta \int_0^{(z-\zeta)/m} g(y, \varsigma)dy.$

В результате решение первой КЗ для полуплоскости имеет вид:

$$2mu = F_+(x, z) + \theta(x)\theta(z - mx) \{2m u_D(z - mx) - F_0(z - mx)\}, \quad (55)$$

а решение второй КЗ –

$$2mu = F_+(x, z) + \theta(x)\theta(z - mx) \left\{ F_0(z - mx) + 2 \int_0^{z-mx} p_D(\zeta)d\zeta \right\}. \quad (56)$$

Заключение. На этом закончим построение решений для сверхзвуковых скоростей, хотя формула (34) позволяет получать интегральные представления для \hat{u} при разных N . Заметим, что, в отличие от дозвукового случая, уже при $N = 3$ функция Грина соответствующего уравнения является сингулярной обобщенной функцией (простой слой на конусе $z = m \|x\|$). Это требуется для каждого N отдельного построения ГИУ, при этом возникают довольно тонкие задачи определения сверток сингулярных функций, каковыми являются, например, слои на конусе и цилиндре. Подобные задачи возникают при решении начально-краевых задач для волнового уравнения (см. [2]).

При сверхзвуковых скоростях имеем сингулярные ГИУ неклассического типа, поскольку область интегрирования по x существенно зависит от z , ядра уравнений имеют особенности на фронтах фундаментальных решений и сильные особенности при $r = 0$, граничные функции, помимо производных по нормали, содержат и касательные производные по z . Изучение таких типов сингулярных ГИУ представляет самостоятельную

математическую задачу. Однако численная реализация решений этих ГИУ на основе метода граничных элементов вполне выполнима.

Отметим, что использование разностных методов при решении краевых задач для гиперболических уравнений сталкивается с большими трудностями на фронтах ударных волн, где нет дифференцируемости решений, что делает невозможной запись этих уравнений на фронтах, положение которых в пространстве-времени также подлежит определению. Здесь эта проблема снимается, т.к. искомая функция $u(x, z)$ определяется через ее производные на границе области, часть из которых известна, а другая вычисляется при решении полученных здесь граничных интегральных уравнений. Для решения ГИУ удобно использовать метод граничных элементов.

Рассмотренные здесь задачи типичны для изучения процессов с движущимися нагрузками. В средах с усложненными свойствами символы матричных дифференциальных операторов содержат в качестве сомножителей символы волновых операторов с разными звуковыми скоростями, поэтому фундаментальные решения, как правило, представляют собой суперпозицию фундаментальных решений разнородных волновых уравнений [4,5]. А на их основе строятся ядра интегральных операторов, дающих решение краевых задач. Изложенный в статье метод позволяет с успехом решать и такие задачи (см., например, [1]).

Цитированная литература

1. **Alekseyeva L.A.** // Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. 1998. № 11. P.37 – 44.
2. **Алексеева Л.А.** // Математический журнал. 2006. Т.6, №1(19). С.16 – 32.
3. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М., 1978.
4. **Алексеева Л.А.** // Прикладная математика и механика. 1991. Т.55, №5. С.854 – 862.
5. **Алексеева Л.А., Шершнева В.В.** // Доклады АН РК. 1994. №1. С.3 – 6

Поступила в редакцию 20.12.2007г.

УДК УДК 517.956, 517.968.2

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 2-ГО РОДА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Д. М. АХМАНОВА, М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М. И. РАМАЗАНОВ

КарГУ им.Е.А.Букедова МОН РК
100028 Караганды ул.Университетская, 28
Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz
КарГУ им.Е.А.Букедова МОН РК
100028 Караганды ул.Университетская, 28 ramamur@mail.ru

В данной работе исследуются вопросы разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со спектральным параметром λ , возникающих в теории граничных задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом совпадает с порядком дифференциальной части уравнения.

Введение. Хотя изучаемая в данной работе пара сопряженных интегральных уравнений является парой уравнений Вольтерра 2-го рода со спектральным параметром λ , однако метод последовательных приближений [1] для их решения не применим в силу того, что ядра интегральных операторов имеют особенности. Здесь показано, что индекс изучаемого оператора неположителен, и установлена его зависимость от значения спектрального параметра. Подобные интегральные уравнения (но, с другим ядром) были рассмотрены ранее в [2,3].

1. Постановки задач. Рассматриваются вопросы разрешимости следующей пары сопряженных интегральных уравнений ($\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$):

$$k_\lambda \varphi \equiv (I - \lambda k)\varphi \equiv \varphi(t) - \lambda \int_0^t k(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 < \tau < t < \infty, \quad (1)$$

$$k_\lambda^* \psi \equiv (I - \bar{\lambda} k^*)\psi \equiv \psi(t) - \bar{\lambda} \int_t^\infty k(\tau - t)\psi(\tau) d\tau = g(t), \quad 0 < t < \tau < \infty, \quad (1^*)$$

Keywords: *special integral equation, Volterra equation, spectrum*

2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

© Д. М. Ахманова, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, 2008.

где

$$k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right), \quad t > 0.$$

Отметим, что особенностями уравнений (1) и (1*) является то, что ядра интегральных операторов k и k^* обладают свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t k(t-\tau) d\tau = 0; \quad \int_t^\infty k(\tau-t) d\tau = 1, \quad \forall t > 0.$$

Отсюда следует, что норма оператора k^* равна 1, поэтому метод последовательных приближений для уравнения (1*) не применим.

Данные и решения уравнений (1) и (1*) удовлетворяют условиям:

$$\lambda \in \mathbb{C}; \quad f(t), \varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}_+); \quad g(t), \psi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \quad (2)$$

Преобразуем уравнения (1) и (1*). Для этого определим соответствующие односторонние функции для функций φ, f, ψ и g выражениями

$$l_+(\theta) = \begin{cases} l(\theta), & \text{если } \theta > 0, \\ 0, & \text{если } \theta \leq 0, \end{cases} \quad l_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \geq 0, \\ -l(\theta), & \text{если } \theta < 0, \end{cases}$$

$$l(\theta) = l_+(\theta) - l_-(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

и для функции k по формулам

$$k_+(\theta) = \begin{cases} k(\theta), & \text{если } \theta > 0, \\ 0, & \text{если } \theta \leq 0, \end{cases} \quad k_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \geq 0, \\ k(-\theta), & \text{если } \theta < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда из (1) и (1*) мы получаем

$$(I - \lambda \mathbf{k}_+) \varphi_+ \equiv \varphi_+(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k_+(t-\tau) \varphi_+(\tau) d\tau = f_{2+}(t) + \varphi_-(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$(I - \lambda \mathbf{k}_-) \psi_+ \equiv \psi_+(t) - \bar{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} k_-(t-\tau) \psi_+(\tau) d\tau = g_{2+}(t) + \psi_-(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4^*)$$

Уравнения (4) и (4*) совпадают с (1) и (1*) соответственно, если $t > 0$, и, как будет показано ниже, решения уравнений (1) и (1*) не зависят от их продолжений на отрицательную полуось, т.е. не зависят от функций $\varphi_-(t)$ и $\psi_-(t)$.

2. Решение интегрального уравнения (4*). Применяя преобразование Фурье для (4*), получаем

$$\Psi^+(s) - \bar{\lambda} \mathbf{K}^-(s) \Psi^+(s) = \mathbf{G}_2^+(s) + \Psi^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье; более того,

$$\mathbf{K}^-(s) = \exp[-(1 + i \operatorname{sign}(s))\sqrt{|s|/2}].$$

Эта функция допускает аналитическое продолжение $\mathbf{K}^-(z) = \exp\{-\sqrt{iz}\}$ на всю комплексную плоскость $z = s + i\sigma$ с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси. Более того, в этом

случае существует аналитическая функция $\Psi^+(z)$ в верхней полуплоскости переменной $z = s + i\sigma$, $\sigma \geq 0$, и аналитическая функция $\Psi^-(z)$ в нижней полуплоскости переменной $z = s + i\sigma$, $\sigma \leq 0$, чьи следы на действительной оси $\sigma = 0$ равны соответственно $\Psi^+(s)$ и $\Psi^-(s)$.

Если выполнено условие

$$\mathbf{A}_\lambda^*(s) \equiv 1 - \bar{\lambda} \mathbf{K}^-(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

тогда из (5) получаем задачу Римана (см. [4, 5, 6]):

$$\Psi^+(s) = [\mathbf{A}_\lambda^*(s)]^{-1} \Psi^-(s) + \bar{\lambda} \mathbf{R}_\lambda^-(s) \mathbf{G}_2^+(s) + \mathbf{G}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где $\mathbf{R}_\lambda^-(s) = \mathbf{K}^-(s) / \mathbf{A}_\lambda^*(s)$. Коэффициент $\mathbf{R}_\lambda^-(s)$ в задаче Римана (7) имеет аналитическое продолжение $\mathbf{R}_\lambda^-(z)$ на плоскость переменной $z = s + i\sigma$ с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси, и $\mathbf{R}_\lambda^-(z)$ имеет простые полюсы в точках

$$z_k = s_k + i\sigma_k = -2(\arg \lambda + 2k\pi) \ln |\lambda| - i[\ln^2 |\lambda| - (\arg \lambda + 2k\pi)^2], \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

которые являются нулями функции $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ и лежат на параболе

$$z = s + i \left(\frac{s^2}{4 \ln^2 |\lambda|} - \ln^2 |\lambda| \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Очевидно, вершина параболы (9) (см. Рис. 1) лежит на мнимой оси и в зависимости от значения $|\lambda|$ движется вверх или вниз вдоль мнимой оси плоскости переменной z , и ветви параболы направлены вверх.

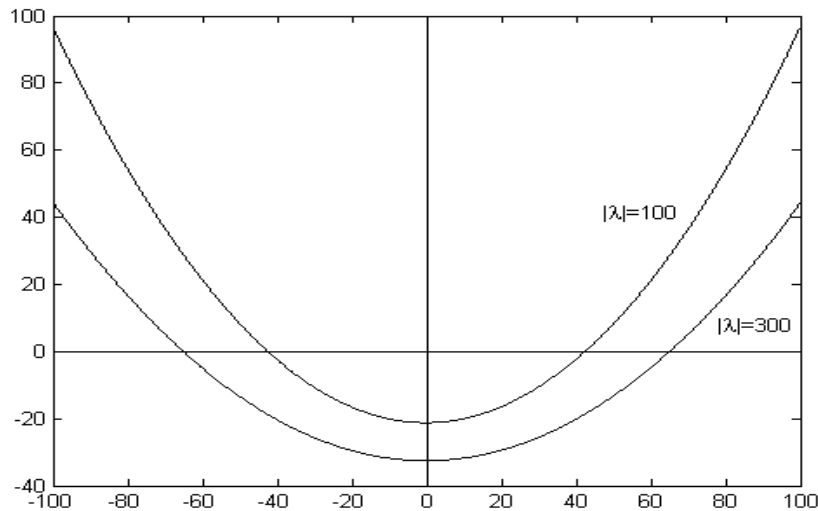


Рис. 1: Параболы, заданные (9) в комплексной плоскости переменной z .

Выясним некоторые свойства функции $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$. Функция $\exp\{-\sqrt{iz}\}$ является многозначной. Выбираем однозначно определенную ветвь этой функции, такую, что $\operatorname{Re} \sqrt{iz_k} > 0$. Для этой цели в плоскости комплексной переменной z мы делаем вырез вдоль положительной мнимой полуоси. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \lambda \exp(-\sqrt{iz}) &= |\lambda| \exp \left[i \arg \lambda - \sqrt{|z|} \exp i(\pi/2 + \arg z + 2n\pi) \right] = \\ &= |\lambda| \exp \left[i \arg \lambda - \sqrt{|z|} \exp i(\pi/4) + n\pi + (\arg z)/2 \right] = \end{aligned}$$

$$= |\lambda| \exp \left[-\sqrt{|z|} \cos(\pi/4 + n\pi + (\arg z)/2) + i \arg \lambda - \sqrt{|z|} \sin(\pi/4 + n\pi + (\arg z)/2) \right],$$

где $n = 0, 1$. Для того чтобы неравенство $\operatorname{Re}\{iz_k\} > 0$ было верно, необходимо предположить $n = 1$, так как в этом случае $\cos[(5\pi)/4 + (\arg z)/2] > 0$ при $\pi/2 < \arg z < (5\pi)/2$. Отсюда следует, что функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ является однозначно определенной в комплексной плоскости с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси и имеет нули только при $|\lambda| > 1$. Однако, если $|\lambda| < 1$, тогда функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ не имеет нулей.

Перепишем условие (6) в терминах комплексного параметра λ . Из формулы (8) для корней z_k мы находим, что критерий (6) выполнен, тогда и только тогда, когда мнимые части этих корней не исчезают, т.е., если $\ln^2 |\lambda| - (\arg \lambda + 2k\pi)^2 \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Последнее условие вместе с $|\lambda| > 1$ является эквивалентным требованию

$$|\lambda| \neq \exp(|\arg \lambda + 2k\pi|) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Если $|\lambda| < 1$, тогда, очевидно, $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ не равна нулю на всей комплексной плоскости $z = s + i\sigma$ с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси, так как $|\exp(\sqrt{iz})| > 1$. Действительно, для того чтобы функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ имела нули, необходимо чтобы $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$. Последнее равенство невозможно при нашем предположении.

Однако, если $|\lambda| = 1$, тогда уравнение $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$ для комплексной переменной λ имеет единственное решение $\lambda = 1$, которая соответствует значению $z = 0$. Линии (см.

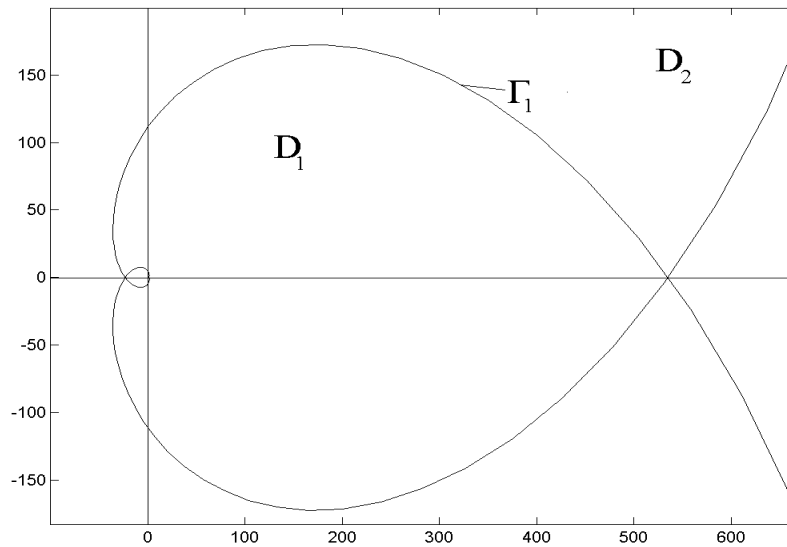


Рис. 2: Разбиение комплексной плоскости спектрального параметра λ (уменьшенный масштаб).

Рис. 2, 3), описываемые уравнением $|\lambda| = \exp(|\arg \lambda + 2k\pi|)$, разделяют комплексную плоскость параметра λ в непересекающиеся области D_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, как следующие:

$$\begin{cases} D_{2n} = \{D_n^{(1)} \cap D_n^{(2)}\} \setminus \bigcup_{k=-1}^{2n-1} D_k, & D_{-1} = \phi, \\ D_{2n+1} = \{D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}\} \setminus \bigcup_{k=0}^{2n} D_k, \end{cases} \quad (11)$$

где $D_n^{(1)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[(2n+1)\pi - \arg \lambda]\}$, $D_n^{(2)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[2n\pi + \arg \lambda]\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Внешние части границ ∂D_m областей D_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, обозначены через Γ_m , $m = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что кроме области D_0 , которая имеет только внешнюю границу $\Gamma_0 = \partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m , состоящую из внешней части

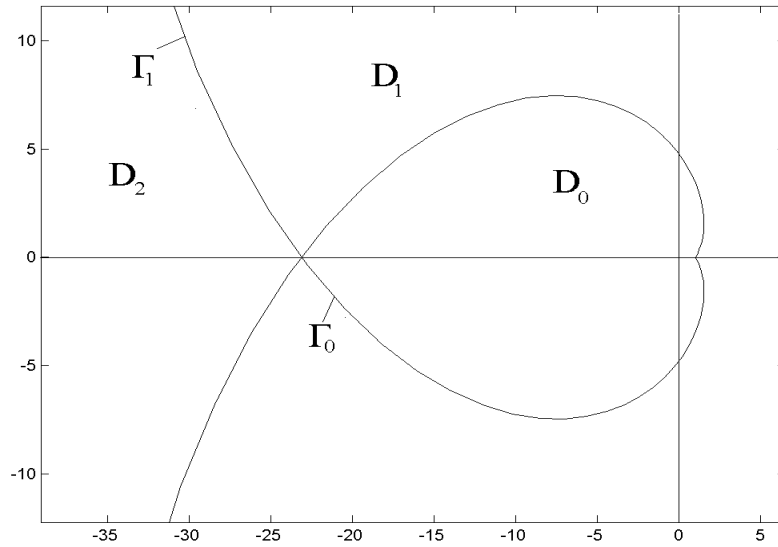


Рис. 3: Разбиение комплексной плоскости спектрального параметра λ (увеличенный масштаб).

Γ_m и внутренней части Γ_{m-1} : $\partial D_m = \Gamma_{m-1} \cup \Gamma_m$; более того, $\Gamma_{m-1} \cap \Gamma_m = (-1)^m \exp\{m\pi\}$; т.е. внешняя часть Γ_m и внутренняя часть Γ_{m-1} границы ∂D_m области D_m имеет одну общую точку, которая лежит на действительной оси комплексной плоскости параметра λ .

Кроме того, мы находим, что $\lambda \in \Gamma_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, если и только если существует, по крайней мере, одна точка \tilde{s} такая, что $\mathbf{A}_\lambda^*(\tilde{s}) = 0$.

Пусть $|\lambda| > 1$. Тогда согласно соотношению (9) функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ может иметь только конечное число нулей вида (8) в нижней полуплоскости, где

$$\begin{cases} -N_1 \leq k \leq N_2, & N_1 = [(\ln |\lambda| + \arg \lambda)/(2\pi)], \\ N_2 = [(\ln |\lambda| - \arg \lambda)/(2\pi)]; \end{cases} \quad (12)$$

здесь символ $[a]$ означает целую часть числа a ; более того, целая часть отрицательного числа приравнена нулю. Действительно, неравенство (12) следует из условия того, что мнимая часть корней (8) должна быть отрицательной, т.е. $\operatorname{Re}\{-iz_k\} \leq 0$ (по условию [см. (2)] для решения $\psi(t)$, принадлежащего классу существенно ограниченных функций). Поэтому неравенство $(2\pi k + \arg \lambda)^2 < \ln^2 |\lambda|$ влечет утверждение (12).

Задача Римана (7) имеет положительный индекс $\varkappa^*(\lambda)$, равный числу нулей функции $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ в нижней полуплоскости (нули считаются с учетом их кратности):

$$\varkappa^*(\lambda) = \operatorname{Ind}\{[\mathbf{A}_\lambda^*(z)]^{-1}\} = -\operatorname{Ind}\{\mathbf{A}_\lambda^*(z)\} = N_1 + N_2 + 1 > 0. \quad (13)$$

Заметим, что согласно (8) и (9) индекс задачи Римана есть $\varkappa^*(\lambda) = 0$ для $|\lambda| < 1$. Теперь пусть $\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k/(z - z_k)$ является главной частью разложения функции $[\mathbf{A}_\lambda^*(z)]^{-1}\Psi^-(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_k$, $k = -N_1, \dots, 0, \dots, N_2$; тогда

$$\chi(z) \equiv \frac{\Psi^-(z)}{\mathbf{A}_\lambda^*(z)} - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z - z_k}$$

есть функция, чей прообраз Фурье исчезает для $t \in \mathbb{R}_+$. Теперь соотношение (7) может быть

представлено в виде

$$\Psi^+(s) = \mathbf{G}_2^+(s) + \bar{\lambda} \mathbf{R}_\lambda^-(s) \mathbf{G}_2^+(s) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{s - z_k} + \chi(s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Проведя в (14) обратное преобразование Фурье для $t \in \mathbb{R}_+$, получаем общее решение интегрального уравнения (1*) в виде

$$\psi(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_t^\infty \mathbf{r}_{\lambda-}(t - \tau) g(\tau) d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (15)$$

где $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$ есть сужение прообраза Фурье от $\mathbf{R}_\lambda^-(s)$ для отрицательной полуоси и задана соотношением (по теории вычетов (см. [7]):

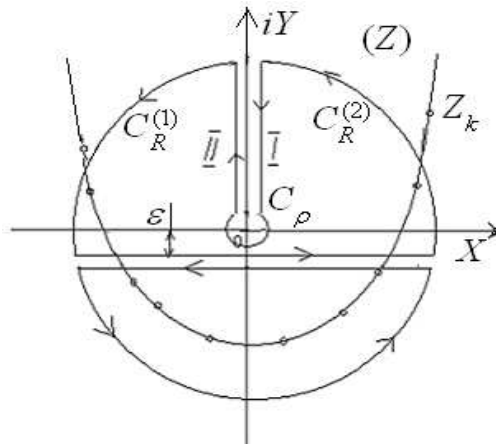


Рис. 4: Контуры интегрирования. Точки, обозначенные z_k , принадлежат параболе, заданной (9).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = & 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{i z_k} \exp(-iz_k \theta) + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{i z_k} \exp(-iz_k \theta) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\bar{\lambda}^m} \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \operatorname{Re}(iz_k) < 0, \quad |\lambda| > 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_-, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m \bar{\lambda}^m \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \leq 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_-, \quad (17)$$

где числа N_1 , N_2 , и z_k заданы согласно (12) и (8).

Покажем, что равенства (16) и (17) верны. Рассмотрим область, ограниченную контуром интегрирования, замкнутой сверху полуокружностью (см. Рис. 4). Используя теорему о вычетах и лемму Жордана (см. [7]), получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^{(l)}} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz = 0, \quad l = 1, 2,$$

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = \frac{\lambda \cdot 2\pi i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \operatorname{res} \left[z_k, \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} \right] + \frac{\lambda \cdot 2\pi i}{2\pi} \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \operatorname{res} \left[z_k, \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{i\infty}^{i\rho} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{i\rho}^{i\infty} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{C_\rho} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} e^{-iz_k\theta} + \frac{1}{2} \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k} e^{-iz_k\theta} + J_1 + J_2 + J_\rho, \quad (\operatorname{Re} iz_k < 0).
 \end{aligned}$$

Интеграл J_ρ вдоль малой окружности C_ρ удовлетворяет условию $J_\rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. В самом деле, это следует из соотношения

$$J_\rho = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{c_\rho} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz = \frac{i\lambda\rho}{2\pi} \int_{\frac{5}{2}\pi}^{\pi/2} \frac{\exp[-\sqrt{i\rho e^{i\varphi}} - i\rho e^{i\varphi}\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{i\rho e^{i\varphi}}]} e^{i\varphi} d\varphi$$

для $|\lambda| > 1$, и из соотношения

$$J_\rho \approx \frac{i\lambda\rho}{2\pi} \int_{\frac{5}{2}\pi}^{\pi/2} \frac{\exp[-\sqrt{i\rho e^{i\varphi}} - i\rho e^{i\varphi}\theta]}{\sqrt{i\rho e^{i\varphi}}} e^{i\varphi} d\varphi$$

для достаточно малого ρ и $|\lambda| = 1$. Для суммы интегралов J_1 и J_2 при $|\lambda| > 1$ получаем

$$\begin{aligned}
 J_1 + J_2 & = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{i\infty}^0 \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{i\infty} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-\sqrt{iz}]} dz = \\
 & = \frac{i\lambda}{2\pi} \int_{\infty}^0 \frac{\exp[i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[i\sqrt{u}]} du + \frac{i\lambda}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[-i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-i\sqrt{u}]} du = \\
 & = \frac{i\lambda}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\exp[-i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[-i\sqrt{u}]} - \frac{\exp[i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda} \exp[i\sqrt{u}]} \right) du.
 \end{aligned}$$

В последнем интеграле преобразованием подынтегральной функции

$$\begin{aligned}
 \frac{\exp\{-i\sqrt{u}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-i\sqrt{u}\}} - \frac{\exp\{i\sqrt{u}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{i\sqrt{u}\}} & = -\frac{1}{\bar{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}} \exp\{i\sqrt{u}\}\right)} + \frac{1}{\bar{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}} \exp\{-i\sqrt{u}\}\right)} = \\
 & = -\frac{1}{\bar{\lambda}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}^m} (\exp\{im\sqrt{u}\} - \exp\{-im\sqrt{u}\}) = -\frac{2i}{\bar{\lambda}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}^m} \sin(m\sqrt{u}),
 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
 J_1 + J_2 & = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}^m} \int_0^{\infty} \sin(m\sqrt{u}) \exp\{u\theta\} du = \\
 & = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}^m} \int_0^{\infty} x \sin(mx) \exp\{x^2\theta\} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\bar{\lambda}^m} \exp\{m^2/(4\theta)\}.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы решение $\psi(t)$, заданное (15), было существенно ограниченным, достаточно, чтобы интеграл $\int_t^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau) d\tau$ был существенно ограниченным для любых $0 < t \leq \tau < \infty$,

так как $g(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t)$ есть ограниченная функция переменной t . Этот интеграл ограничен, так как функция $r_{\lambda-}(\theta)$, заданная (16), удовлетворяет оценке:

$$|r_{\lambda-}(\theta)| \leq C_1 |\theta|^{-1/2} \exp(-\delta_0 |\theta|) + C_2 |\theta|^{-3/2} \exp(-\delta_0 |\theta|^{-1}), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_-, \quad (18)$$

где

$$\delta_0 = \min\{1/4; [2\pi(N_1 + 1) + \arg \lambda]^2 - \ln^2 |\lambda|; [2\pi(N_2 + 1) + \arg \lambda]^2 - \ln^2 |\lambda|\}. \quad (19)$$

Оценка (18) есть следствие следующих соотношений. Для второго слагаемого в (16) получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k} \exp(-iz_k \theta) \right| \leq |\ln \lambda| \sum_{k=N_2+1}^{\infty} |\exp(-iz_k \theta)| \leq \\ & \leq |\ln \lambda| \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \exp\{[(2k\pi + \arg \lambda)^2 - \ln^2 |\lambda|]\theta\} \leq \left| \begin{array}{l} y = 2k\pi + \arg \lambda \\ a = 2\pi(N_2 + 1) + \ln |\lambda| \end{array} \right| \\ & \leq |\ln \lambda| \int_a^{\infty} \exp\{(y^2 - \ln^2 |\lambda|)\theta\} dy = |\ln \lambda| \exp\{-\theta \ln^2 |\lambda|\} \int_a^{\infty} \exp\{\theta y^2\} dy = \\ & = |z = y - a| = |\ln \lambda| \exp\{-\theta \ln^2 |\lambda|\} \int_0^{\infty} \exp\{\theta(a^2 + z^2 + 2az)\} dz = \\ & = |\ln \lambda| \exp\{-\theta \ln^2 |\lambda| + \theta a^2\} \int_0^{\infty} \exp\{\theta z^2 + \theta \cdot 2az\} dz \leq \\ & \leq |\ln \lambda| (-\theta)^{-1/2} \exp\{\theta(a^2 - \ln^2 |\lambda|)\} \int_0^{\infty} \exp\{-(\sqrt{-\theta}z)^2\} d(\sqrt{-\theta}z) = |\ln \lambda| \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}} \exp\{\delta_2 \theta\}, \end{aligned}$$

где $\delta_2 = [2\pi(N_2 + 1) + \arg \lambda]^2 - \ln^2 |\lambda| > 0$.

Аналогично, для первого слагаемого имеем

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} \exp(-iz_k \theta) \right| \leq |\ln \lambda| \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}} \exp\{\delta_1 \theta\},$$

где $\delta_1 = [2\pi(N_1 + 1) + \arg \lambda]^2 - \ln^2 |\lambda| > 0$.

Третье слагаемое в (16) можно оценить как следующее:

$$\begin{aligned} & |\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) = \\ & = |\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(-\frac{m^2 - 1}{4|\theta|}\right) \leq C |\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right). \end{aligned}$$

Для представления (17) получаем оценку:

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{|\theta|}} \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) d\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) = \frac{2}{\sqrt{|\theta|}} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right),$$

если $|\lambda| = 1$, и имеет место оценка:

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m \bar{\lambda}^m \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \leq C|\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right),$$

если $|\lambda| < 1$.

Можно легко показать, что функция (15) является решением уравнения (1*) для произвольных коэффициентов c_k . Так как число линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения для (1*) равно индексу $\varkappa^*(\lambda)$, заданному (13), то отсюда следует, что решение (15) является действительно общим решением неоднородного уравнения (1*).

Вначале покажем, что функция

$$\psi_{hom}(t) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

есть решение соответствующего однородного уравнения для (1*) для каждого коэффициента $c_k, k = 1, 2, \dots, m$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t) &= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \frac{\bar{\lambda}}{2\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(\tau-t)} - iz_k \tau\right) d\tau = \\ &= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau_1^2}{4} - iz_k \left(t + \frac{1}{\tau_1^2}\right)\right) d\tau_1 = \\ &= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t) \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau_1^2}{4} - \frac{iz_k}{\tau_1^2}\right) d\tau_1 = \\ &= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t) \bar{\lambda} \cdot \exp(-\sqrt{iz_k}) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что функция, заданная следующей формулой

$$\psi_{part}(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

определяет частное решение неоднородного уравнения (1*). Действительно, подставляя эту функцию в уравнение (1*), получаем

$$\begin{aligned} g(t) + \int_t^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)g(\tau) d\tau - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(\tau-t)}\right\} g(\tau) d\tau - \\ - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(\tau-t)}\right\} \left[\int_{\tau}^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(\tau-s)g(s) ds \right] d\tau = g(t). \end{aligned}$$

Это влечет, что функция $\psi_{part}(t)$ есть частное решение уравнения (1*), если и только если, функция $\mathbf{r}_{\lambda-}(-t)$ удовлетворяет следующему равенству

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(-t) = \bar{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} \exp\{-1/(4t)\} + \bar{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \exp\{-1/(4\tau)\} \mathbf{r}_{\lambda-}(\tau-t) d\tau.$$

Вычислим интеграл в этом равенстве

$$J(t) = \bar{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \exp\{-1/(4\tau)\} \mathbf{r}_{\lambda_-}(\tau - t) d\tau,$$

где функцию $\mathbf{r}_{\lambda_-}(\tau - t)$ приведем к виду (см. Рис. 4)

$$\mathbf{r}_{\lambda_-}(\tau - t) = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int_{-i\varepsilon - \infty}^{-i\varepsilon + \infty} \frac{\exp\{-\sqrt{iz}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-\sqrt{iz}\}} \exp\{-iz(\tau - t)\} dz, \quad \tau < t.$$

Теперь получаем для интеграла $J(t)$

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{\bar{\lambda}^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \exp\{-1/(4\tau)\} \left[\int_{-i\varepsilon - \infty}^{-i\varepsilon + \infty} \frac{\exp\{-\sqrt{iz}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-\sqrt{iz}\}} \exp\{-iz(\tau - t)\} dz \right] d\tau = \\ &= \frac{\bar{\lambda}^2}{2\pi} \int_{-i\varepsilon - \infty}^{-i\varepsilon + \infty} \frac{\exp\{-\sqrt{iz} + izt\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-\sqrt{iz}\}} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\{-iz\tau - 1/(4\tau)\} d\tau \right] dz, \end{aligned}$$

так как $\text{Im } z = -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (см. Рис. 4). Так как внутренний интеграл равен

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\{-iz\tau - 1/(4\tau)\} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\{-x^2 - iz/(4x^2)\} dx = \exp\{-\sqrt{iz}\},$$

то получаем

$$J(t) = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\pi} \int_{-i\varepsilon - \infty}^{-i\varepsilon + \infty} \frac{\exp\{-2\sqrt{iz} + izt\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-\sqrt{iz}\}} dz.$$

Далее аналитически продолжаем подынтегральную функцию этого интеграла в область $\text{Im } z > -\varepsilon$ комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной мнимой полуоси (см. Рис. 4).

Используя теорему о вычетах и лемму Жордана (см. [7]), получим:

$$\begin{aligned} J(t) &= 2\bar{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} \exp\{-\sqrt{iz_k} + iz_k t\} + 2\bar{\lambda} \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k} \exp\{-\sqrt{iz_k} + iz_k t\} + \\ &+ \frac{\bar{\lambda}^2 i}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\exp\{-2i\sqrt{u} - ut\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-i\sqrt{u}\}} - \frac{\exp\{2i\sqrt{u} - ut\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{i\sqrt{u}\}} \right] du. \end{aligned}$$

В последнем интеграле преобразуя подынтегральную функцию к виду

$$\begin{aligned} \frac{\exp\{-2i\sqrt{u}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-i\sqrt{u}\}} - \frac{\exp\{2i\sqrt{u}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{i\sqrt{u}\}} &= -\frac{\exp\{-i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}} \exp\{i\sqrt{u}\}\right)} + \frac{\exp\{i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}} \exp\{-i\sqrt{u}\}\right)} = \\ &= -\frac{1}{\bar{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\exp\{-i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda}^m} \exp\{im\sqrt{u}\} - \frac{\exp\{i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda}^m} \exp\{-im\sqrt{u}\} \right] = \\ &= \frac{2i}{\bar{\lambda}} \sin \sqrt{u} - \frac{2i}{\bar{\lambda}^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}^m} \sin(m\sqrt{u}), \end{aligned}$$

получим

$$J(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} \exp\{iz_k t\} + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k} \exp\{iz_k t\} + \int_0^{\infty} \left[-\frac{\bar{\lambda}}{\pi} \exp\{-ut\} \sin \sqrt{u} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\sqrt{u})}{\bar{\lambda}^m} \exp\{-ut\} \right] du = r_{\lambda-}(-y) - \frac{\bar{\lambda}}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}} \exp\{-1/(4t)\}.$$

Здесь положено, что верно равенство

$$\exp(-\sqrt{iz_k}) = 1/\bar{\lambda}, \quad z_k = -i [\ln^2|\lambda| - (2k\pi - \arg \lambda)^2] - 2\ln^2|\lambda|(2k\pi - \arg \lambda),$$

и использовано разложение подынтегральной функции в ряд относительно $1/\bar{\lambda}$.

Таким образом, мы показали требуемое равенство и, кроме того, функция $\psi_{part}(t)$ определяет частное решение неоднородного уравнения (1*). Функция, заданная соотношением (15), является действительно общим решением неоднородного уравнения (1*) для любых коэффициентов $c_k, k = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, нами установлены следующие леммы.

Лемма 1. Значения $\lambda \in D_0$ в (11) являются регулярными числами оператора k_{λ}^* [см. уравнение (1*)].

Лемма 2. Множество $\mathbb{C} \setminus D_0$ состоит из характеристических чисел оператора k_{λ}^* [см. (1*)]. Более того, если

$$\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

тогда $\dim \text{Ker}(k_{\lambda}^*) = \varkappa^*(\lambda) = m$ и соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_{\lambda k}(t) = \exp(-iz_k t), \quad k = 1, \dots, m = \varkappa^*(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

3. Решение интегрального уравнения (1). Для этого рассмотрим интегральное уравнение (4). Применяя к нему преобразование Фурье, получаем

$$\Phi^+(s) - \lambda \mathbf{K}^+(s) \Phi^+(s) = \mathbf{F}_2^+(s) + \Phi^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье.

Если

$$\mathbf{A}_{\lambda}(s) \equiv 1 - \lambda \mathbf{K}^+(s) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

тогда из (20) мы получаем задачу Римана [4–6]:

$$\Phi^+(s) = [\mathbf{A}_{\lambda}(s)]^{-1} \Phi^-(s) + \lambda \mathbf{R}_{\lambda}^+(s) \mathbf{F}_2^+(s) + \mathbf{F}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

где $\mathbf{R}_{\lambda}^+(s) = \mathbf{K}^+(s)/\mathbf{A}_{\lambda}(s)$. Здесь коэффициент $\mathbf{R}_{\lambda}^+(s)$ задачи (22) есть функция, которая может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость, исключая конечное число возможных полюсов, которые являются нулями функции $\mathbf{A}_{\lambda}(s)$. Кроме того, индекс $\varkappa(\lambda)$ задачи (22) является неположительным, т.е. $\varkappa(\lambda) = -\varkappa^*(\lambda) \leq 0$. Переписывая задачу (20) в виде

$$[1 - \lambda \mathbf{K}^+(s)] \Phi^+(s) = \mathbf{F}_2^+(s) + \Phi^-(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

получаем $\Phi^-(s) \equiv 0$; таким образом, задача Римана (22) приобретает вид

$$\Phi^+(s) = \lambda \mathbf{R}_{\lambda}^+(s) \mathbf{F}_2^+(s) + \mathbf{F}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Отсюда следует, что однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет только тривиальное решение для любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Применяя обратное преобразование Фурье в (23) для $t \in \mathbb{R}_+$, получаем решение интегрального уравнения (1):

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (24)$$

где $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ есть сужение прообраза Фурье $\mathbf{R}_{\lambda}^+(s)$ на положительную полуось, и задано формулой (согласно теории вычетов (см. [23]):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = & 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{-iz_k} \exp(iz_k\theta) + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{-iz_k} \exp(iz_k\theta) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \operatorname{Re}(-iz_k) > 0, \quad |\lambda| > 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m \exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \leq 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_+, \quad (26)$$

здесь N_1 , N_2 и z_k являются числами, заданными (12) и (8).

Чтобы функция $\varphi(t)$, (24), была интегрируемой, достаточно, чтобы $\mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)$ была ограниченной функцией для произвольных $0 < \tau \leq t < \infty$, так как $f(t)$ есть интегрируемая функция переменной t . Функция $\mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)$ ограничена, так как функция $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ (25) допускает оценку

$$|\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)| \leq C_1|\theta|^{-1/2} \exp(-\delta_0|\theta|) + C_2|\theta|^{-3/2} \exp(-\delta_0|\theta|^{-1}), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad (27)$$

с δ_0 константой, заданной соотношением (19).

Далее, если $\lambda \in D_0$, тогда по лемме 1 неоднородное уравнение (1) безусловно однозначно разрешимо; если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D_0$, то по лемме 2 для однозначной разрешимости уравнения (1), необходимо и достаточно, выполнение условий ортогональности

$$\int_0^{\infty} \overline{f(t)} \exp(-iz_k t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (28)$$

Мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3. *В комплексной плоскости \mathbb{C} не существуют характеристические числа оператора k_{λ} (1).*

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1) является нётеровою и ее оператор k_{λ} имеет индекс:*

$$\operatorname{Ind}(k_{\lambda}) = \dim \operatorname{Ker}(k_{\lambda}) - \dim \operatorname{Ker}(k_{\lambda}^*) = -\varkappa^*(\lambda) = -N_1 - N_2 - 1.$$

Заключение. В работе изучены спектральные свойства интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со специальным ядром. Установлена явная зависимость индекса уравнения от значения модуля спектрального параметра. Результаты работы предполагается использовать при исследовании граничной задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии нагрузки к временной оси в нуле или на бесконечности.

Цитированная литература

1. **Краснов М. Л.** Интегральные уравнения. М., 1975.
2. **Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.** // Математический журнал. Алматы. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 33 – 46.
3. **Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.** // Математический журнал. Алматы. 2006. Т. 6, № 2(20). С. 37 – 44.
4. **Мухелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
5. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М., 1963.
6. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
7. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.

Поступила в редакцию 16.01.2008г.

УДК 517.958:[536.2+539.219.3]

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВЕРИГИНА О ВОДОНЕФТЯНОМ КОНТАКТЕ В УСЛОВИЯХ УПРУГОГО РЕЖИМА

Ж. БЕРИККЫЗЫ, С. Н. ХАРИН

Казахстанско-Британский технический университет
050000 Алматы ул. Толе-би, 59 staskharin@yahoo.com

В статье рассмотрена обратная задача Веригина для двух типов уравнения пьезопроводности, которые описывают динамику давлений в водонефтяном контакте нагнетательных галерей различной геометрии. Эта задача решена с помощью аппарата специальных функций Хартри и вырожденной гипергеометрической функции. Решение найдено в явной аналитической форме. Приведен пример расчета.

Проблема регулирования положения водонефтяного контакта в зависимости от давления, задаваемого на забое нагнетательной галереи, является весьма актуальной при эксплуатации нефтяных месторождений. Она может быть моделирована обратной задачей Веригина для системы уравнений пьезопроводности. Прямая задача Веригина состоит в определении давлений в пластах воды и нефти и динамики движения контакта между ними при заданном внешнем давлении на забое нагнетательной галереи. Она рассмотрена в известной монографии [1] для постоянного внешнего давления. В обратной задаче требуется найти такую динамику внешнего давления, которая бы обеспечила требуемый закон движения контактной границы. Эта задача является гораздо более трудной в математическом плане, так как она принадлежит классу некорректных задач математической физики, но ее решение весьма важно для практики.

Математическая модель

Рассматривается математическая модель фильтрации нефти в нефтенасыщенном грунте пористости m при нагнетании упругого гидротехнического раствора. Требуется определить связь между распределением давлений в областях, занятых водой и нефтью, а также динамику их контактной поверхности. Предполагается, что скорость фильтрации следует закону Дарси, а давление p_i в каждой из областей — уравнению пьезопроводности. Предполагается, что нагнетание воды осуществляется через галерею, так что процесс фильтрации можно считать одномерным, и что на забое нагнетательной галереи задается давление P_1 . Пусть ось x направлена перпендикулярно к оси галереи и $x = \alpha(t)$ — уравнение границы раздела областей внедренной воды и оттесненной нефти. Тогда распределение давлений в водонасыщенной области $0 < x < \alpha(t)$ и в нефтеносной области $\alpha(t) < x < \infty$ описывается уравнениями

$$\alpha_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad 0 < x < \alpha(t), \quad (1)$$

Keywords: *mathematical model, temperature, electromagnetic field, electrical contact*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

© Ж. Бериккызы, С. Н. Харин, 2008.

$$\alpha_1^2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad \alpha(t) < x < \infty, \quad (2)$$

$$p_1(0, t) = P_1(t). \quad (3)$$

Для каждой из жидкостей выполняется закон Дарси

$$u_i(t) = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2,$$

где u_1 и u_2 – скорости фильтрации воды и нефти соответственно, а k_1 и k_2 – коэффициенты фильтрации. На границе $x = \alpha(t)$ выполняется условие непрерывности давлений и потоков:

$$x = \alpha(t) : \quad p_1 = p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad (4)$$

и если при замещении нефти водой остаточная нефтенасыщенность равна нулю, то на этой границе должно выполняться условие материального баланса

$$x = \alpha(t) : \quad n \frac{d\alpha}{dt} = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial x}. \quad (5)$$

Наконец, в начальный момент времени

$$p_2(x, 0) = P_0(x), \quad \alpha(0) = 0. \quad (6)$$

Метод решения

Для решения обратной задачи Веригина используется аппарат специальных функций Хартри, определяемых рекуррентными соотношениями

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} v \, dv, \quad i^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) \, dv.$$

Искомые давления ищутся в виде линейных комбинаций функций Хартри

$$p_i(x, t) = \sum_{n=0}^k [A_{ni} u_n(x, t) + B_{ni} u_n(-x, t)], \quad (7)$$

где

$$u_n(\pm x, t) = t^{n/2} i^n \operatorname{erfc} \frac{\pm x}{2a\sqrt{t}}. \quad (8)$$

Функции (7) удовлетворяют уравнениям (1) – (2) при любых постоянных A_{ni} , B_{ni} . Рассмотрим автомодельный случай, когда граница $\alpha(t)$ задана в виде:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{t}.$$

Удовлетворим вначале условию (6). Аппроксимируя функцию $P_0(x)$ полиномом Маклорена

$$P_0(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k, \quad (9)$$

где

$$b_n = \frac{P_0^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

мы должны иметь:

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_2(x, t) = P_0(x).$$

Используя свойства функций Хартри [2]:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc} z}{z^n} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc}(-z)}{z^n} = \frac{2}{n!},$$

мы имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}}}{\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right)^n} \cdot \frac{x^n}{(2a_2)^n} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}}}{\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right)^n} \cdot \frac{x^n}{(2a_2)^n} = \frac{2}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2a_2}\right)^n, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_2(x, t) = \sum_{n=0}^k B_{n,2} \cdot \frac{2}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2a_2}\right)^n = \sum_{n=0}^k \frac{P_0^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

и

$$B_{n,2} = \frac{1}{2} \cdot (2a_2)^n \cdot P_0^{(n)}(0). \quad (10)$$

Условия (4) дают следующую систему уравнений для $A_{n,i}$ и $B_{n,i}$:

$$\begin{cases} A_{n,1} i^n \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_1} + B_{n,1} i^n \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_1} = A_{n,2} i^n \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2} + B_{n,2} i^n \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_2} \\ k_1 \left[-\frac{A_{n,1}}{2a_1} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_1} + \frac{B_{n,1}}{2a_1} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_1} \right] = \\ = k_2 \left[-\frac{A_{n,2}}{2a_2} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2} + \frac{B_{n,2}}{2a_2} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_2} \right], \end{cases} \quad (11)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, k$, $i^{-1} \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

Исключая из этой системы коэффициент $A_{n,2}$, получаем соотношение

$$B_{n,1} = \frac{A_{n,1} f_1(n) + B_{n,2} f_2(n)}{f_3(n)}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } f_1(n) &= -\frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_1}}{i^n \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2}} + \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1} \cdot \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_1}}{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2}}, \\ f_2(n) &= \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_2}}{i^n \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2}} + \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_2}}{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2}}, \\ f_3(n) &= \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_1}}{i^n \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2}} + \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1} \cdot \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_1}}{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_2}}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (12) в формулу (7) и используя условие (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{m\alpha_0}{2\sqrt{t}} &= -k_1 \sum_{n=0}^k \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{2a_1} \left\{ A_{n1} \left[-i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{a_0}{2a_1} + \frac{f_1(n)}{f_2(n)} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + B_{n2} \frac{f_2(n)}{f_3(n)} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-a_0}{2a_1} \right\}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $t^{n/2}$, будем иметь

$$A_{01} = \frac{f_3(0)}{f_3(0) - f_2(0)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha_0 a_1 e^{\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}} - \frac{f_2(0)}{f_3(0) - f_2(0)} B_{02}, \tag{13}$$

$$A_{n1} = \frac{f_2(n) i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \cdot B_{n2}}{f_3(n) i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + f_1(n) i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1}}. \tag{14}$$

Коэффициенты $B_{n,1}$ определяются формулой (12), а коэффициенты $A_{n,2}$ – из выражения (11):

$$A_{n2} = \frac{1}{i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}} \left(A_{n1} i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_{n1} i^n \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} - B_{n2} i^n \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_2} \right). \tag{15}$$

Таким образом, распределение давлений $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$ дается формулами (7), (8) с коэффициентами (10) – (15).

Искомое давление на забое галереи $P_1(t)$ определяется из условия (3):

$$P_1(t) = \sum_{n=0}^k t^{\frac{n}{2}} (A_{n1} + B_{n1}) i^n \operatorname{erfc} 0 = \sum_{n=0}^k t^{\frac{n}{2}} (A_{n1} + B_{n1}) \frac{1}{2^n \Gamma(1 + n/2)}. \tag{16}$$

Отметим, что функции Хартри могут быть использованы и для решения общей задачи при произвольной функции $\alpha(t)$. В этом случае искомые коэффициенты должны быть определены из граничных условий по методу коллокаций [3]. В соответствии с этим методом интервал времени $[0, T]$ разбивается на $k + 1$ подинтервал точками $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_5 < \dots < t_{k+1} = T$, в которых краевые условия удовлетворяются дискретно.

Пример расчета.

На Рис. 1 приведен модельный пример расчета распределения давлений с использованием программы Math CAD для следующих входных данных:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad m = 1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad \alpha_0 = 1, \quad P_0(x) = e^{-x}$$

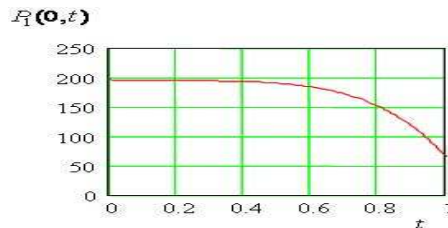


Рис.1: Динамика внешнего давления.

На Рис. 2 представлена динамика давления на контактной границе между нефтью и водой. Этот расчет показывает, что для рассмотренных значений параметров давление на контактной границе меняется незначительно, а изменение внешнего давления надо менять во второй половине периода для того, чтобы обеспечить заданный закон движения границы.

Задачи для тел с переменным сечением

Полученные выше результаты применимы на случай галерей с переменным сечением, для которых система уравнений пьезопроводности, описывающая поля давлений при нагнетании гидротехнического раствора, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial z} \right), \quad 0 < z < \alpha(t), \tag{17}$$

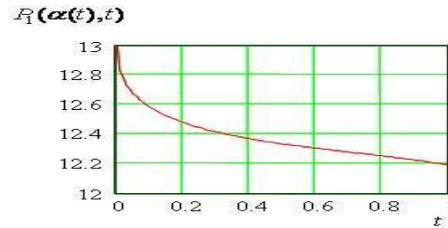


Рис.2: Динамика контактного давления на границе.

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \frac{\partial p_2}{\partial z} \right), \quad \alpha(t) < z < \infty. \quad (18)$$

Краевые условия (3) – (6) для этого случая идентичны.

Тогда вместо функций Хартри (8) используются вырожденные гипергеометрические функции

$$S_{\beta, \nu}^{(1)}(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta \Phi\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a^2t}\right),$$

$$S_{\beta, \nu}^{(2)}(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta \left(\frac{z^2}{4a^2t}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{1-\nu-\beta}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a^2t}\right),$$

которые удовлетворяют уравнениям (17), (18). При $\nu = 0$ они выражаются через функции Хартри, а при $\nu = 1$, $\beta = 2n$ – через полиномы Лагерра.

Решение задачи (17) – (18), (3) – (6) представляется в автомодельной форме

$$p_1(z, t) = P_1 + B_1 \left(\frac{z}{2a_1\sqrt{t}}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_1^2t}\right), \quad (19)$$

$$p_2(z, t) = P_0 + B_2 \left[\Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right) - \left(\frac{z}{2a_2\sqrt{t}}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_2^2t}\right) \right], \quad (20)$$

$$\alpha(t) = \alpha\sqrt{t}, \quad \alpha = const. \quad (21)$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют не только уравнениям (17) – (18), но и условиям (3) – (5) при постоянных P_0 и P_1 . Удовлетворяя условиям (4), определяем постоянные B_1 и B_2 :

$$B_1 = -(P_1 - P_0) \frac{\lambda}{\Delta(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right), \quad B_2 = \frac{P_1 - P_0}{\Delta(\alpha)} \frac{\lambda}{\Delta(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_1^2}\right),$$

где

$$\lambda = \frac{k_2 a_1^{1+\nu}}{k_1 a_2^{1+\nu}}, \quad \Delta(\alpha) = \lambda \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{\alpha^2}{a_1^2}\right) +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right) \Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right).$$

Подставляя (20) в (5), получаем трансцендентное уравнение для определения α :

$$\alpha^{1+\nu} = \frac{k_2(1-\nu)}{2a_2^{1-\nu}} (P_1 - P_0) \exp\left[-\left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\alpha^2}{a_2^2}\right)\right] \Delta(\alpha) \equiv f(\alpha). \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что

$$f(0) = \frac{k_2(1-\nu)}{2a_2^{1-\nu}} \frac{P_1 - P_0}{\Gamma((3-\nu)/2)} > 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) < 0.$$

Эти условия обеспечивают существование и единственность решения уравнения (22), следовательно, и решения исходной задачи. При $\nu = 0$ решение (19), (20) и уравнение (22).

Цитированная литература

1. **Л.И. Рубинштейн.** Проблема Стефана, Рига, 1967.
2. **С.Н. Харин.** // Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей, Киев, 1983. С. 113 – 116.
3. **Л.И. Коздоба.** Приближенные и численные методы решения задач теплопроводности, Киев, 1990.

Поступила в редакцию 21.04.2008 г.

УДК 517.968.72

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. С. ДЖУМАБАЕВ

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 dzhumabaev@list.ru

Предлагается метод исследования и решения линейной двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

На отрезке $[0, T]$ рассматривается двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где матрицы $A(t)$, $K(t, s)$ непрерывны на $[0, T]$, $[0, T] \times [0, T]$ соответственно, $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$, $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$.

Основными методами исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений являются метод Некрасова [1] и метод функций Грина [2]. Однако эти методы применимы к задаче (1), (2) при некоторых предположениях, которые, вообще говоря, не являются необходимыми условиями однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Целью работы является установление необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1), (2).

С этой целью задача (1), (2) исследуется методом параметризации (м.п.) [3].

По шагу $h > 0$: $Nh = T$ производится разбиение $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$ и сужение функции $x(t)$ на r -ый интервал - $[(r-1)h, rh)$ обозначается через $x_r(t)$. При этом задача (1), (2) сводится к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)x_j(s)ds + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N},$$

Keywords: *system of integro-ordinary differential equations, linear boundary value problem, unique solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 45J05

© Д. С. Джумабаев, 2008.

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \in T-0} x_N(t) = d,$$

$$\lim_{t \rightarrow ph-0} x_p(t) = x_{p+1}(ph), \quad p = \overline{1, N-1}, \quad (3)$$

где (3) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения $[0, T]$.

Через λ_r обозначив $x_r[(r-1)h]$ и на каждом r -ом интервале произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получаем эквивалентную краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)[u_j(s) + \lambda_j] ds + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad (4)$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1, N}, \quad (5)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t \in T-0} u_N(t) = d, \quad (6)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow ph-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \quad (7)$$

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, N}$, где $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, $u_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t) - \lambda_r^*$ на r -ый интервал, будет решением задачи (4) – (7). Наоборот, если система пар $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1, N}$ – решение задачи (4) – (7), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами: $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \in T-0} \tilde{u}_N(t)$ является решением задачи (1), (2).

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ на отрезке $[0, T]$. Тогда при фиксированных значениях параметров λ_r , $r = \overline{1, N}$, задача Коши (4), (5) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$u_r(t) = X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1) A(\tau_1) d\tau_1 \lambda_r + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s)[u_j(s) + \lambda_j] ds d\tau_1 +$$

$$+ X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1) f(\tau_1) d\tau_1, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Нетрудно установить справедливость оценки:

$$\left\| X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s) u_j(s) ds d\tau_1 \right\| \leq$$

$$\leq \beta T h e^{\alpha h} \cdot \max_{j=\overline{1, N}} \max_{s \in [(j-1)h, jh]} \|u_j(s)\|, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N},$$

где $\beta = \max_{(t, \tau) \in [0, T] \times [0, T]} \|K(t, \tau)\|$, $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$. Отсюда следует, что при выборе $h_0 > 0$, удовлетворяющим неравенству $q(h_0) \equiv \beta T h_0 e^{\alpha h_0} < 1$, для любого $h \in (0, h_0]$ система интегральных уравнений (8) имеет единственное решение.

В (8) предполагая $t = \tau$, умножая обе части на $K(t, \tau)$, интегрируя по τ на $[(r-1)h, rh]$ и складывая левые и правые части, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau) u_r(\tau) d\tau &= \sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(r-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s) u_j(s) ds d\tau_1 d\tau + \\ &+ \sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(r-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \left\{ A(\tau_1) \lambda_r + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s) ds \lambda_j + f(\tau_1) \right\} d\tau_1 d\tau, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_h(t) &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s) u_j(s) ds, \quad M_r(h, t) = \int_{(r-1)h}^{rh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(r-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) A(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{rh} K(\tau_1, s) ds d\tau_1 d\tau, \\ F(h, t) &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) f(\tau_1) d\tau_1 d\tau \end{aligned}$$

уравнение (9) запишем в виде

$$\Phi_h(t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \Phi_h(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \sum_{r=1}^N M_r(h, t) \lambda_r + F(h, t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Так как

$$\left\| \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \Phi_h(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right\| \leq \beta T e^{\alpha h} \cdot h \max_{t \in [0, T]} \|\Phi_h(t)\|$$

при всех $t \in [0, T]$, то для $h \in [0, h_0]$, уравнение (10) имеет единственное решение. Равенствами:

$$M_r^{(0)}(h, t) = M_r(h, t),$$

$$M_r^{(k)}(h, t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) M_r^{(k-1)}(h, \tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$F^{(0)}(h, t) = F(h, t),$$

$$F^{(k)}(h, t) = \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, \tau) X(\tau) \int_{(j-1)h}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) F^{(k-1)}(h, \tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

определяя последовательности матриц и векторов, зависящих от $t \in [0, T]$, и применяя метод последовательных приближений, решение уравнения (10) найдем в виде

$$\Phi_h(t) = \sum_{r=1}^N D_r(h, t) \lambda_r + F_h(t), \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

где $D_r(h, t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_r^{(k)}(h, t)$, $F_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(h, t)$.

Подставив (11) в правую часть (8), выразим $u_r(t)$ через параметры и функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} u_r(t) = & X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + \sum_{j=1}^N X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau) \left[D_j(h, \tau) + \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_j + \\ & + X(t) \int_{(r-1)h}^t X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_h(\tau)] d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя вместо $\lim_{t \in T-0} u_N(t)$, $\lim_{t \rightarrow ph-0} u_p(t)$ в краевые условия (6) и условия склеивания (7), им соответствующие выражения из (12), умножая обе части (6) на $h > 0$, получаем систему линейных уравнений относительно введенных параметров λ_r , $r = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned} & h \left\{ B + CX(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau) \left[D_1(h, \tau) + \int_0^h K(\tau, s) ds \right] d\tau \right\} \lambda_1 + \\ & + hC \sum_{j=2}^{N-1} X(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau) \left[D_j(h, \tau) + \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_j + \\ & + hC \left\{ I + X(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau) \left[A(\tau) + D_N(h, \tau) + \int_{T-h}^T K(\tau, s) ds \right] d\tau \right\} \lambda_N = \\ & = hd - hCX(T) \int_{T-h}^T X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_h(\tau)] d\tau, \quad (13) \\ & \sum_{j=1}^{r-1} X(rh) \int_{(r-1)h}^{rh} X^{-1}(\tau) \left[D_j(h, \tau) + \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_j + \\ & + \left\{ I + X(rh) \int_{(r-1)h}^{rh} X^{-1}(\tau) \left[A(\tau) + D_r(h, \tau) + \int_{(r-1)h}^{rh} K(\tau, s) ds \right] d\tau \right\} \lambda_r - \\ & - \left\{ I - X(rh) \int_{(r-1)h}^{rh} X^{-1}(\tau) \left[D_{r+1}(h, \tau) + \int_{rh}^{(r+1)h} K(\tau, s) ds \right] d\tau \right\} \lambda_{r+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=r+2}^N X(rh) \int_{(r-1)h}^{rh} X^{-1}(\tau) \left[D_j(h, \tau) + \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s) ds \right] d\tau \lambda_j = \\
& = -X(rh) \int_{(r-1)h}^{rh} X^{-1}(\tau) [f(\tau) + F_h(\tau)] d\tau, \quad r = \overline{2, \bar{N}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Матрицу, соответствующую левой части систем линейных уравнений (13), (14), обозначим через $Q_{*,*}(h)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо, чтобы матрица $Q_{*,*}(h)$ была обратимой для всех $h \in (0, h_0]$ и достаточно, чтобы она была обратимой при некотором $h \in (0, h_0]$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что при некотором $\hat{h} \in (0, h_0]$: $\widehat{N}\hat{h} = T$ матрица $Q_{*,*}(\hat{h})$ не имеет обратной. Тогда однородная система линейных уравнений $Q_{*,*}(\hat{h})\lambda = 0$ имеет ненулевое решение $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{\widehat{N}})' \in R^{n\widehat{N}}$.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (8) с $f(t) = 0$, $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, \widehat{N}}$. Так как $\hat{h} \in (0, h_0]$, то эта система имеет единственное решение $(\tilde{u}_r(t))$, $r = \overline{1, \widehat{N}}$. Тогда ввиду эквивалентности задач (1), (2) и (4) – (7) функция $(\tilde{x}(t))$, определяемая равенствами: $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)\hat{h}, r\hat{h}]$, $r = \overline{1, \widehat{N}}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{\widehat{N}} + \lim_{t \in T-0} \tilde{u}_{\widehat{N}}(t)$, будет ненулевым решением однородной краевой задачи (1), (2), что противоречит однозначной разрешимости задачи (1), (2).

(Очевидно, что однородная краевая задача, кроме найденного $\tilde{x}(t)$, имеет тривиальное решение $x(t) = 0$).

Достаточность. Пусть матрица $Q_{*,*}(h)$ обратима при $h = h^* \in (0, h_0]$: $N^*h^* = T$. Для любой пары $(f(t), d)$ составим систему nN^* линейных уравнений относительно параметров (13), (14). Используя обратимость матрицы $Q_{*,*}(h^*)$ и решая эту систему найдем $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{N^*}^*)' \in R^{nN^*}$. Решая систему интегральных уравнений (8) при этих значениях параметров находим систему функций $(u_r^*(t))$, $r = \overline{1, N^*}$. Тогда функция $x^*(t)$, определяемая равенствами: $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [(r-1)h^*, rh^*]$, $r = \overline{1, N^*}$, $x^*(T) = \lambda_{N^*}^* + \lim_{t \in T-0} u_{N^*}^*(t)$, будет решением задачи (1), (2).

Единственность этого решения доказывается методом от противного. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Некрасов А.И. // Труды ЦАГИ. 1934. Вып. 190. С. 1 – 25.
2. Виграненко Т.И. // Зап. Ленинградского горн. ин-та. 1956. Т. 33. С. 177 – 187.
3. Джумабаев Д. С. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 50 – 66.

Поступила в редакцию 12.05.2008г.

УДК 517.925:62.50

ДИССИПАТИВНОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

С. С. ЖУМАТОВ

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Рассматриваются дифференциальные системы обладающие заданным интегральным многообразием. Получены достаточные условия равномерной диссипативности программного многообразия нелинейных систем относительно заданной вектор-функции на основе второго метода Ляпунова. Установлены частотные условия диссипативности программного многообразия управляемых систем.

На практике часто встречаются системы, у которых из-за диссипации каждое движение по истечении достаточно большего времени попадают в некоторую ограниченную область и остаются в ней при дальнейшем возрастании времени. Такие системы были названы диссипативными [1]. Диссипативные системы в различных постановках были исследованы начиная со второй половины XX века в работах авторов дальнего и ближнего зарубежья [2 – 19]. В этих работах условия диссипативности хорошо изучены для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Второй метод Ляпунова и метод сравнения распространены на задачи анализа разнообразных динамических свойств решений дифференциальных уравнений. Доказан ряд теорем о различных типах ограниченности движения. Получены достаточные условия диссипативности периодических систем. Выделены общие классы диссипативных систем. В прикладном направлении исследованы некоторые задачи нелинейных колебаний, сосредоточенных систем, нелинейных систем автоматического управления и установлены различные условия диссипативности. В работах [7, 12, 18] приведены обзоры по исследованиям диссипативных систем. Особый интерес представляет случай, когда диссипативность является равномерной [8, 10] по отношению к начальным данным. В работе [19] установлены условия равномерной диссипативности для разностных систем. В данной работе исследуются условия диссипативности и равномерной диссипативности программного многообразия относительно заданной вектор-функции нелинейных систем управления.

Keywords: *program manifold, control's system, dissipatedness, nonlinearity, local quadratic conditions, asymptotic stability,*

2000 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C15, 34K29

© С. С. Жуматов, 2008.

1. Диссипативность программного многообразия нестационарных систем управления. Пусть дифференциальное уравнение [20]

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

описывает динамические процессы систем автоматического управления, где $x \in R^n$, $f(t, x)$ – вектор-функция состояния системы управления, обеспечивающая существование и единственность решения уравнения (1) на интервале $t \in I = [t_0, \infty[$, и обладает $(n - s)$ -иерным гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемое векторным уравнением

$$\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0, \quad (2)$$

где $\omega - s \leq n$ -мерный вектор.

Задача 1. Построим систему дифференциальных уравнений (1), интегральное многообразие которой, заданное по формуле (2), обладало бы свойством диссипативности.

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1) имеет место:

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} f(t, x) = F(t, \omega). \quad (3)$$

Здесь $F(t, 0) \equiv 0$ – функция Еругина [21].

Определение 1. Программное многообразие $\Omega(t)$ называется диссипативным относительно вектор-функции ω , если для каждого решения $\omega(t, t_0, \omega_0)$ существует момент $t_1 = t_0 + T(t_0, \omega_0) \geq 0$ после которого оно полностью погружается в фиксированную сферу $\|\omega\| < \eta$, т.е. $\|\omega(t, t_0, \omega_0)\| < \eta$ при $t_1 \leq t < \infty$.

Определение 2. Программное многообразие $\Omega(t)$ называется равномерно диссипативным относительно вектор-функции ω , если для каждого решения $\omega(t, t_0, \omega_0)$ существует момент $t_1 = t_0 + T(\omega_0) \geq 0$ после которого оно полностью погружается в фиксированную сферу $\|\omega\| < \eta$, т.е. $\|\omega(t, t_0, \omega_0)\| < \eta$ при $t_1 \leq t < \infty$.

Введем функцию a – непрерывную строго возрастающую и удовлетворяющую условию $a(0) = 0$. Такая функция называется функцией класса \mathcal{K} в смысле Хана: $a \in \mathcal{K}$.

Теорема 1. Пусть существуют положительное число η и дифференцируемая функция $V : (I \times R^s) \setminus B_\eta \rightarrow R$ такие, что для некоторых $a, b, c \in \mathcal{K}$ и любых (t, ω) выполняются условия:

$$a(\|\omega\|) \leq V(t, \omega) \leq b(\|\omega\|), \quad (4)$$

$$\dot{V}(t, \omega) \leq -c(\|\omega\|). \quad (5)$$

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ по отношению к вектор-функции ω равномерно диссипативно относительно начального момента t_0 .

Доказательство. Выберем $\alpha > 0$ такое, что $\bar{B}_\alpha \subset \Upsilon$ и положим для каждого $t \in I : \tilde{V} = \{\omega \in \Upsilon : V(t, \omega) \leq a(\alpha)\}$. Тогда из (4) получим, что $\forall t \in I$ имеет место

$$\tilde{V} \subset \bar{B}_\alpha \subset \Upsilon.$$

Для любых $t_0 \in I$ и $\omega_0 \in \tilde{V}$ из (5) следует, что $\omega(t) \in \tilde{V}$ для любого $t \in I^+$, и поэтому из этого неравенства вытекает, что $\omega(t)$ не может достигнуть границы Υ . Следовательно $I^+(t_0, \omega_0) = [t_0, \infty)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, что $b(\delta) < a(\varepsilon)$, и возьмем также T больше чем $b(\alpha)/c(\delta)$. Теперь $\|\omega(t)\|$ не может превзойти значение δ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ потому, что в этом случае мы имели бы для $t = t_0 + T$

$$V(t, \omega(t)) \leq V(t_0, \omega_0) - \int_{t_0}^t c(\|\omega(s)\|) ds \leq b(\alpha) - c(\delta)T < 0, \quad (6)$$

что противоречит условию (4). Поэтому существует $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ такое, что $b(\|\omega(t_1)\|) \leq b(\delta) < a(\varepsilon)$ и поскольку V убывает, то для $t \geq t_0 + T$ имеем:

$$a(\|\omega(t)\|) \leq V(t, \omega(t)) \leq V(t_1, \omega(t_1)) < b(\|\omega(t_1)\|) < a(\varepsilon).$$

Следовательно, для $t \geq t_0 + T$ выполняется $\|\omega(t)\| < \varepsilon$.

Так как $a(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, то существует $\eta \geq \varepsilon > 0$ такое, что

$$a(r) > b(\varepsilon) \text{ при } r \geq \eta.$$

Из неравенств (4) вытекает что

$$\|\omega(t)\| < \eta \text{ при } t_0 \leq t < t_0 + T.$$

Отсюда следует, что решение бесконечно продолжаемо вправо, причем для всех $t_0 \in I$ выполняется $\|\omega(t)\| \leq \varepsilon$ имеет место неравенство, где η зависит только от ε .

Оценим момент t_1 . Полагая

$$\varepsilon < \|\omega(t, t_0, \omega_0)\| < \eta_1$$

из последнего неравенства, на основании условия (5) имеем

$$V(t, \omega(t, t_0, \omega_0)) \leq V(t_0, \omega_0) - c(t - t_0),$$

откуда вытекает, что

$$t_1 \leq t_0 + \sup_{t \geq t_0} \frac{V(t_0, \omega_0) - V(t, \omega(t))}{c}.$$

В силу (4) имеем

$$V(t_0, \omega_0) \leq b(\omega_0) < b(\eta_1).$$

Кроме того, на основании (4) получаем

$$V(t, \omega(t)) \geq a(\|\omega(t)\|) \geq a(\varepsilon).$$

Поэтому

$$t_1 \leq t_0 + T(\omega_0), \quad T(\omega_0) < \frac{b(\eta_1) - a(\rho)}{c} \wedge \eta_1 = \eta_1(\|\omega_0\|).$$

Так как число $T(\omega_0)$ не зависит от начального момента t_0 , то диссипативность программного многообразия $\Omega(t)$ равномерно по t_0 .

2. Диссипативность программного многообразия систем управлений со стационарными нелинейностями. В работе [17] решалась задача определения свойства диссипативности систем автоматического управления. В этом подразделе исследуется задача определения условия диссипативности программного многообразия систем автоматического управления, относительно заданной вектор-функции.

Рассмотрим систему автоматического управления

$$\dot{x} = f(t, x) - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad (7)$$

обладающую $(n - s)$ -мерным интегральным многообразием $\Omega(t) = \omega(t, x) = 0$, где $B(n \times r)$, $P(s \times r)$ – матрицы, $x(n \times 1)$ – вектор состояния объекта, $f(n \times 1)$ – вектор-функция, $\omega(s \times 1)$ – вектор $s \leq n$, $\xi(r \times 1)$ – вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям локальной квадратичной связи

$$\varphi^T \theta (\sigma - K^{-1} \varphi) > 0, \quad \theta = \text{diag} \|\theta_1, \dots, \theta_r\|, \quad K = K^T > 0. \quad (8)$$

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (17) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + H \cdot f(t, x) = F(t, x, \omega), \quad H = \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Здесь $F(t, x, 0) \equiv 0$ – функция Еругина [21], удовлетворяющая условию $F(t, x, 0) \equiv 0$, при $F = F(t, \omega, \xi(\omega, t))$ система называется замкнутой, $\xi = \xi(\omega, t)$ – множество законов обратной связи.

Если положим, что $F = -A\omega$, $-A \in R^{s \times s}$ – гурвицева матрица, то, продифференцировав многообразие $\Omega(t)$ по времени t в силу системы (7), получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega. \quad (9)$$

Определение 3. Множество G содержащее $\omega = 0$, для которого программное многообразие $\Omega(t)$ сохраняет свойство асимптотической устойчивости относительно вектор-функции ω , называется областью притяжения данного многообразия, иначе если для любого $\omega(t)$ найдется момент t_0 такой, что $\omega(t_0, x_0) \in G$, множество G инвариантно, т.е. из $\omega(t_0, x_0) \in G$ следует $\omega(t, x) \in G$ при всех $t > t_0$.

Определение 4. Программное многообразие $\Omega(t)$ системы (7), (8) называется диссипативным относительно вектор-функции ω , если в R_ω существует ограниченная замкнутая область притяжения G .

Задача 2. Дано множество M законов обратной связи. Требуется определить его подмножество G , на котором сохраняется свойство асимптотической устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω .

Известно, что для программного многообразия систем управлений со скалярной нелинейностью, обладающего свойством диссипативности, существуют числа σ_1 и σ_2 для которых при любом $\omega(t, x)$ справедливо неравенство:

$$-\sigma_1 \leq \sigma(t) \leq \sigma_2 \quad \forall t \geq t_0. \quad (10)$$

Рассмотрим систему (9) в случае, когда нелинейность является скалярной

$$\dot{\omega} = -A\omega - Hb\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = p^T\omega, \quad (11)$$

где $b(r \times 1)$, $p(s \times 1)$ – векторы, передаточная функция которой имеет вид

$$W(i\varpi) = p^T(A + i\varpi E)^{-1}Hb.$$

Теорема 2. Пусть для некоторого q выполняется условие Попова

$$\mu_0^{-1} + \operatorname{Re}[(1 + i\varpi q)W(i\varpi)] > 0,$$

а функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \left[1 - \mu_0^{-1} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \right] \geq 0. \quad (12)$$

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ системы (7), (8) диссипативно относительно вектор-функции ω .

Доказательство. Неравенство (12) выполняется, если $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (8) при $\theta = 1$ и если $\varphi(\sigma)$ является ограниченной

$$|\varphi(\sigma)| \leq \varphi_{\text{гр}}. \quad (13)$$

Докажем диссипативность программного многообразия систем (7),(8), когда μ_0 сколь угодно малое положительное число. Из уравнения (11) имеем

$$\omega(t) = \exp\{-At\}\omega(0) + \int_0^t \exp\{-A(t-\tau)\}b_1\xi(\tau)d\tau, \quad (14)$$

$$\sigma(t) = p^T \exp\{-At\}\omega(0) + \int_0^t p^T \exp\{-A(t-\tau)\}b_1\xi(\tau)d\tau, \quad (15)$$

где $b_1 = Hb$, $\omega(0) = \omega(0, x(0))$.

В силу соотношений (13), (14) и гурвицевости матрицы $-A$ следует диссипативность программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω .

Используя соотношения (13), (14) можно получить явные формулы для определения чисел σ_1 и σ_2 . В силу этих соотношений получаем

$$|\sigma| \leq |p^T \exp\{-At\}\omega(0)| + \varphi_{\text{Гр}} \int_0^{\infty} |p^T \exp\{-A(t-\tau)\}b_1|d\tau. \quad (16)$$

Откуда вытекает, что первое слагаемое выражения (16) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тогда в неравенстве (10) получим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \varphi_{\text{Гр}} \int_0^{\infty} |p^T \exp\{-A(t-\tau)\}b_1|d\tau + \varepsilon. \quad (17)$$

Здесь ε -сколь угодно малое число.

Неравенство (10) позволяет расширить область абсолютной устойчивости программного многообразия управляемых систем полученной на основе частотного критерия.

Пусть $0 \leq \xi/\sigma \leq k_2$, т.е. квадратичной связью будет $\Pi = \xi(\sigma - k_2^{-1}\xi) \geq 0$. Откуда вытекает условие экспоненциальной устойчивости

$$k_2^{-1} + \text{Re}W(i\varpi) > 0 \quad (0 \leq \varpi < \infty). \quad (18)$$

Условие (18) в силу теоремы 2.1 [17, с.93] обеспечивает экспоненциальную устойчивость в целом. Принимая во внимание неравенство (10), уточненное соотношением (17), имеем

$$k_1 \leq \xi/\sigma \leq k_2, \quad k_1 = \inf_{-\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}, \quad \forall t > t_0. \quad (19)$$

Тогда квадратичная связь будет в виде неравенства

$$\Pi = (k_2\sigma - \xi)(\xi - k_1\sigma) > 0.$$

Отсюда следует частотное условие

$$\Pi(i\varpi) = \text{Re}\{[1 + k_1W(i\varpi)][1 + k_2W(i\varpi)]^T\} > 0. \quad (20)$$

Условие (20) вырезает в пространстве параметров системы большую область, чем условие (18). Условие (18) требует, чтобы характеристика $W(i\varpi)$ располагалась в полуплоскости $\text{Re}z > -k_2^{-1}$, а условие (20) требует, чтобы характеристика $W(i\varpi)$ располагалась вне окружности, проходящей через точки $(-k_1^{-1})$, $(-k_2^{-1})$ и имеющий центр на действительной оси. Эта

допустимая область расположения характеристики содержит допустимую область доставляемой условием (18).

Для стационарных нелинейностей соотношение (13) позволяет указанным способом усилить критерий Попова.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнено условие (13) и $0 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_0$ при $\sigma \neq 0$ ($\mu_0 \leq +\infty$). Число k_1 определяется по формулам (17) и (19). И пусть для некоторого q и всех $-\infty \leq \varpi \leq +\infty$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\{[1 + k_1 W(i\varpi)]^T [\mu_0^{-1} + W(i\varpi)]\} + q \operatorname{Re}[i\varpi W(i\varpi)] > 0.$$

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ системы (7), (8) асимптотически устойчиво в целом относительно вектор-функции ω и для любого решения системы (11) конечны нормы $\|\omega\|$, $\|\xi\|$.

Цитированная литература

1. Levinson N. // Ann. math. 1944. 45, № 4. P. 723 – 737.
2. De Kastro A. // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1953. 22. P. 294 – 304.
3. Manfredi B. // Boll. Un. Mat. Ital. 1956. Ser. III. P. 64 – 71.
4. Corduneanu C. // C. R. Acad. Sci. -Paris. 1957. Ser. A - B, 245. P. 21 – 24.
5. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., 1959.
6. Ziemba S. // Proc. Internat. Symp. Nonlinear Oscillations. II. Kiev, 1961. P. 161 – 171.
7. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М. - Л., 1964.
8. Немыцкий В. В. // УМН. 1965. 20, № 4. С. 3 – 36.
9. Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokyo, 1966.
10. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
11. Герштейн В. М. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 8. С. 1438 – 1444.
12. Матросов В. М. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 12. С. 2129 – 2143.
13. Skowronski J. M. Multipl nonlinear lumped systems. Warsaw, 1969.
14. Biliotti J. E., LaSalle J. P. // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. 77. P. 1082 – 1354.
15. Pavel N. // Boll. Un. Mat. Ital. 1971. 4. P. 701 – 707.
16. Hale J. K., LaSalle J. P., Slemrod M. // J. Math. Anal. Appl. 1972. 39. P. 177 – 191.
17. Якубович В. А. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Гл. 2, 3. М., 1975.
18. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.
19. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем. Санкт-Петербург, 2003.
20. Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы, 1999.
21. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др. Построение систем программного движения. М., 1971.

Поступила в редакцию 02.04.2008г.

УДК 517.956.3

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЛОМАННЫХ ЭЙЛЕРА К РЕШЕНИЮ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. С. КАБДРАХОВА

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина,125 anar@math.kz

Модификация метода ломаных Эйлера применяется для нахождения начального приближения решения полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения со смешанной производной. Устанавливаются достаточные условия существования изолированного решения рассматриваемой задачи и оценки разности между решением и начальным приближением.

В области $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача для нелинейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad \psi(0) = \psi(T), \quad (3)$$

где $f : \bar{\Omega} \times R^3 \rightarrow R$ – непрерывна, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция. Пусть $C([0, \omega], R^{N_1})$ – пространство непрерывных функций $\lambda : [0, \omega] \rightarrow R^{N_1}$ с нормой $\|\lambda\|_0 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda(x)\| = \max_{x \in [0, \omega]} \max_{r=1, N_1} |\lambda_r(x)|$, $C(\bar{\Omega})$ – множество непрерывных функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow R$.

Для функций $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ при фиксированном $x \in [0, \omega]$ введем норму $\|u(x, \cdot)\|_1 = \max_{t \in [0, T]} |u(x, t)|$. Поскольку соотношение (3) связывает значения неизвестных функций на отрезках $x = 0, x = \omega$ задача (1) – (3) является нелокальной задачей. Обзор и литературу по нелокальным краевым задачам для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений можно найти в [1-3].

Keywords: *semiperiodic boundary value problem, nonlinear hyperbolic equation, isolated solution*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70, 35B10

© С. С. Кабдрахова, 2008.

Функция $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u^2(x, t)}{\partial x \partial t} \in C(\bar{\Omega})$, называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$ и краевым условиям (2), (3).

Введем новые неизвестные функции $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ и задачу (1) – (3) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x, t, u(x, t), w(x, t), v), (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$u(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t) d\xi, w(x, t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t(\xi, t) d\xi. \quad (6)$$

В данной работе модификация метода ломаных Эйлера применяется к нахождению начального приближения решения задачи (4) – (6) и на основе алгоритма предложенного в [4] устанавливаются достаточные условия существования изолированного решения.

Возьмем шаг $h_1 > 0 : N_1 h_1 = T$, $N_1 = 1, 2, 3, \dots$, и по нему произведем разбиение $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{N_1} [(r-1)h_1, rh_1]$. Сужение функции $v(x, t)$ на $\Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h_1, rh_1)$ обозначим через $v_r(x, t) : v_r(x, t) = v(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, N_1}$, а через $\lambda_r(x)$ обозначим функцию $v_r(x, t)$ при $t = (r-1)h_1$, т. е. $\lambda_r(x) = v_r(x, (r-1)h_1)$, $r = \overline{1, N_1}$, и на Ω_r произведя замену $\tilde{v}_r(x, t) = v_r(x, t) - \lambda_r(x)$, задачу (4), (5) сведем к эквивалентной краевой задаче с параметром:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f(x, t, u(x, t), w(x, t), \tilde{v}_r + \lambda_r(x)), (x, t) \in \Omega_r, \quad (7)$$

$$\tilde{v}_r(x, (r-1)h_1) = 0, x \in [0, \omega], \quad (7')$$

$$\lambda_1(x) - \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_{N_1}(x, t) - \lambda_{N_1}(x) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \rightarrow sh_1-0} \tilde{v}_s(x, t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, s = \overline{1, N_1 - 1}. \quad (9)$$

При фиксированном функциональном параметре $\lambda_r(x)$ задача Коши (7), (7') эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$\tilde{v}_r(x, t) = \int_{(r-1)h_1}^t f(x, \tau, u(x, \tau), w(x, \tau), \tilde{v}_r(x, \tau) + \lambda_r(x)) d\tau, (x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N_1}. \quad (10)$$

Подставив вместо $\tilde{v}_r(x, \tau)$ соответствующую правую часть (10) и повторив этот процесс ν раз, $\nu = 1, 2, \dots$, для функции $\tilde{v}_r(x, t)$ получим следующее представление:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r(x, t) = & \int_{(r-1)h_1}^t f\left(x, \tau_1, u(x, \tau_1), w(x, \tau_1), \lambda_r(x) + \int_{(r-1)h_1}^{\tau_1} f\left(x, \tau_2, u(x, \tau_2), w(x, \tau_2), \lambda_r(x) + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{(r-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}} f(x, \tau_\nu, u(x, \tau_\nu), w(x, \tau_\nu), \lambda_r(x) + \tilde{v}_r(x, \tau_\nu)) d\tau_\nu \dots d\tau_2\right) d\tau_1, r = \overline{1, N_1}. \end{aligned}$$

Отсюда, определив $\lim_{t \rightarrow r h_1 - 0} \tilde{v}_r(x, t)$, $r = \overline{1, N_1}$, подставив их в (8), (9), получим относительно неизвестных функциональных параметров $\lambda_r(x)$ систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \lambda_1(x) - \lambda_{N_1}(x) - \int_{(N_1-1)h_1}^{N_1 h_1} f\left(x, \tau_1, u(x, \tau_1), w(x, \tau_1), \lambda_{N_1}(x) + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{(N_1-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}} f\left(x, \tau_\nu, u(x, \tau_\nu), w(x, \tau_\nu), \lambda_{N_1}(x) + \tilde{v}_{N_1}(x, \tau_\nu)\right) d\tau_\nu \dots \right) d\tau_1 = 0, \\ & \lambda_s(x) + \int_{(s-1)h_1}^{s h_1} f\left(x, \tau_1, u(x, \tau_1), w(x, \tau_1), \lambda_s(x) + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{(s-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}} f\left(x, \tau_\nu, u(x, \tau_\nu), w(x, \tau_\nu), \lambda_s(x) + \tilde{v}_s(x, \tau_\nu)\right) d\tau_\nu \dots \right) d\tau_1 - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad s = \overline{1, N_1 - 1}, \end{aligned}$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu, h_1}(x, u, w, \lambda, \tilde{v}) = 0. \tag{11}$$

Через $C(\overline{\Omega}, h_1, R^{N_1})$ обозначим множество систем функций $\tilde{v}(x, [t]) = (\tilde{v}_1(x, t), \dots, \tilde{v}_{N_1}(x, t))'$, где функции $\tilde{v}_r(x, t)$ непрерывны на Ω_r и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t \rightarrow r h_1 - 0} \tilde{v}_r(x, t)$, $r = \overline{1, N_1}$, для всех $x \in [0, \omega]$. При фиксированном x введем норму $\|\tilde{v}(x, [\cdot])\|_2 = \max_{r=\overline{1, N_1}} \sup_{t \in [(r-1)h_1, r h_1]} |\tilde{v}_r(x, t)|$. Через $\|\tilde{v}(\cdot, [\cdot])\|_{2,0}$ обозначим $\max_{x \in [0, \omega]} \|\tilde{v}(x, [\cdot])\|_2$.

К задаче (4) – (6) применяем модификацию метода ломанных Эйлера. Разобьем отрезок $[0, \omega]$ с шагом $h_0 > 0$ на N_0 частей, $N_0 h_0 = \omega$.

Функции $v^{(0)}(t)$, $\dot{v}^{(0)}(t)$, $u^{(0)}(t)$, $w^{(0)}(t)$ определим равенствами: $v^{(0)}(t) = 0$, $\dot{v}^{(0)}(t) = 0$, $u^{(0)}(t) = \psi(t)$, $w^{(0)}(t) = \psi(t)$, $t \in [0, T]$ и решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} = f(0, t, u^{(0)}(t), w^{(0)}(t), v^{(1)}), \quad t \in [0, T], \tag{12}$$

$$v^{(1)}(0) = v^{(1)}(T), \tag{13}$$

найдем функцию $v^{(1)}(t)$. По $v^{(1)}(t)$, $\dot{v}^{(1)}(t)$ определим функции:

$$u^{(1)}(t) = \psi(t) + h_0 v^{(1)}(t), \quad w^{(1)}(t) = \dot{\psi}(t) + h_0 \dot{v}^{(1)}(t), \quad t \in [0, T].$$

Считая известными $v^{(i-1)}(t)$, $u^{(i-1)}(t)$, $w^{(i-1)}(t)$, $i = \overline{2, N_0}$, функцию $v^{(i)}(t)$ находим решая периодическую краевую задачу:

$$\frac{dv^{(i)}}{dt} = f((i-1)h_0, t, u^{(i-1)}(t), w^{(i-1)}(t), v^{(i)}), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{2, N_0 + 1}, \tag{14}$$

$$v^{(i)}(0) = v^{(i)}(T), \quad i = \overline{2, N_0 + 1}. \tag{15}$$

По $v^{(i)}(t)$, $\dot{v}^{(i)}(t)$ функции $u^{(i)}(t)$, $w^{(i)}(t)$ определим равенствами

$$u^{(i)}(t) = \psi(t) + h_0 \sum_{j=0}^i v^{(j)}(t), \quad i = \overline{1, N_0} \tag{16}$$

$$w^{(i)}(t) = \dot{\psi}(t) + h_0 \sum_{j=0}^i \dot{v}^{(j)}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, N_0}. \quad (17)$$

Предполагая, что рассматриваемые периодические краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (12) – (15) имеют решения $v^{(i)}(t)$, при всех $i = \overline{1, N_0 + 1}$, построим следующие функции:

$$v_{h_0}^{(0)}(x, t) = v^{(i+1)}(t) \frac{x - (i-1)h_0}{h_0} + v^{(i)}(t) \frac{ih_0 - x}{h_0}, \quad x \in [(i-1)h_0, ih_0], \quad i = \overline{1, N_0}, \quad (18)$$

$$u_{h_0}^{(0)}(x, t) = \psi(t) + h_0 \sum_{j=1}^{i-1} v^{(j)}(t) + v^{(i)}(t)(x - (i-1)h_0), \quad x \in [(i-1)h_0, ih_0], \quad i = \overline{1, N_0}, \quad (19)$$

$$w_{h_0}^{(0)}(x, t) = \dot{\psi}(t) + h_0 \sum_{j=1}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(t) + \dot{v}^{(i)}(t)(x - (i-1)h_0), \quad x \in [(i-1)h_0, ih_0], \quad i = \overline{1, N_0}. \quad (20)$$

Периодические краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений исследуем методом параметризации [5].

Возьмем шаг $h_1 > 0 : N_1 h_1 = T$, $N_1 = 1, 2, 3, \dots$, и по нему произведем разбиение $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{N_1} [(r-1)h_1, rh_1]$. Сужение функции $v^{(i)}(t)$ на r -ый интервал обозначим через $v_r^{(i)}(t) : v_r^{(i)}(t) = v^{(i)}(t)$, $t \in [(r-1)h_1, rh_1]$, а через $\lambda_r^{(i)}$ обозначим значение функции $v^{(i)}(t)$ в точке $t = (r-1)h_1$, $r = \overline{1, N_1}$, $i = \overline{1, N_0}$ и на каждом интервале $[(r-1)h_1, rh_1)$ произведем замену: $\tilde{v}_r^{(i)}(t) = v_r^{(i)}(t) - \lambda_r^{(i)}$, $r = \overline{1, N_1}$, $i = \overline{1, N_0 + 1}$. Получим многоточечные краевые задачи с параметром:

$$\frac{d\tilde{v}_r^{(i)}}{dt} = f((i-1)h_0, t, u^{(i-1)}(t), w^{(i-1)}(t), \tilde{v}_r^{(i)} + \lambda_r^{(i)}), \quad t \in [(r-1)h_1, rh_1], \quad r = \overline{1, N_1}, \quad (21)$$

$$\tilde{v}_r^{(i)}[(r-1)h_1] = 0, \quad r = \overline{1, N_1}, \quad i = \overline{1, N_0 + 1}, \quad (20')$$

$$\lambda_1^{(i)} - \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_{N_1}^{(i)}(t) - \lambda_{N_1}^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, N_0 + 1}, \quad (21)$$

$$\lambda_s^{(i)} + \lim_{t \rightarrow sh_1-0} \tilde{v}_s^{(i)}(t) - \lambda_{s+1}^{(i)} = 0, \quad s = \overline{1, N_1 - 1}, \quad i = \overline{1, N_0 + 1}. \quad (22)$$

При фиксированных значениях параметров $\lambda_r^{(i)}$, $i = \overline{1, N_0 + 1}$, задачи Коши (20), (20') эквивалентны нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра:

$$\tilde{v}_r^{(i)}(t) = \int_{(r-1)h_1}^t f((i-1)h_0, \tau, u^{(i-1)}(\tau), w^{(i-1)}(\tau), \tilde{v}_r^{(i)}(\tau) + \lambda_r^{(i)}) d\tau, \quad t \in [(r-1)h_1, rh_1],$$

$$r = \overline{1, N_1}, \quad i = \overline{1, N_0 + 1}. \quad (23)$$

Система нелинейных уравнений относительно введенных параметров (11) для задачи (20), (20') – (22) имеет вид:

$$Q_{v, h_1}((i-1)h_0, \psi(\cdot) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} v^{(j)}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(\cdot), \lambda^{(i)}, \tilde{v}^{(i)}[\cdot]) = 0, \quad i = \overline{1, N_0 + 1}. \quad (24)$$

Очевидно, что если $v^{(i)}(t)$ решение задачи (14) – (15), то соответствующая ему пара $(\lambda_r^{(i)}, \tilde{v}_r^{(i)}(t))$ является решением задачи (20), (20') – (22).

Взяв непрерывные на $[0, \omega]$ функции $\rho_{h_0}(x) > 0, \tilde{\rho}_{h_0}(x) > 0, \rho_{2,h_0}(x) > 0$ построим множества

$$S(\lambda_{h_0}^{(0)}(x), \rho_{h_0}(x)) = \{\lambda(x) \in C([0, \omega], R^{N_1}) : \|\lambda(x) - \lambda_{h_0}^{(0)}(x)\|_0 < \rho_{h_0}(x)\},$$

$$S(\tilde{v}_{h_0}^{(0)}(x, [t]), \tilde{\rho}_{h_0}(x)) = \{\tilde{v}(x, [t]) \in C(\bar{\Omega}, h_1, R^{N_1}) : \|\tilde{v}(x, [\cdot]) - \tilde{v}_{h_0}^{(0)}(x, [\cdot])\|_2 < \tilde{\rho}_{h_0}(x)\},$$

$$S(u_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{2,h_0}(x)) = \{u(x, t) \in C(\bar{\Omega}) : \|u(x, \cdot) - u_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \rho_{2,h_0}(x)\},$$

$$S(v_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{1,h_0}(x)) = \{v(x, t) \in C(\bar{\Omega}) : \|v(x, \cdot) - v_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \rho_{1,h_0}(x) = \rho_{h_0}(x) + \tilde{\rho}_{h_0}(x)\},$$

$$S(w_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{2,h_0}(x)) = \{w_{h_0}(x, t) \in C(\bar{\Omega}) : \|w_{h_0}(x, \cdot) - w_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \rho_{2,h_0}(x)\},$$

$$G_2^0(h_0, \rho_{h_0}(x), \tilde{\rho}_{h_0}(x), \rho_{2,h_0}(x)) = \{(x, t, u, w, v) : (x, t) \in \bar{\Omega}, \|u - u_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \rho_{2,h_0}(x),$$

$$\|w - w_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \rho_{2,h_0}(x), \|v - v_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \rho_{1,h_0}(x)\}.$$

Условие В. Пусть при $h_0 > 0 : N_0 h_0 = \omega$ двухточечные краевые задачи (14)-(15) имеют решения $v^{(i)}(t), i = \overline{1, N_0 + 1}$, существуют непрерывные на $[0, \omega]$ функции $\rho_{h_0}(x) > 0, \tilde{\rho}_{h_0}(x) > 0, \rho_{2,h_0}(x) > 0$ такие, что в $G_2^0(\rho_{1,h_0}(x), \rho_{2,h_0}(x))$ функция $f(x, t, u, w, v)$ имеет равномерно непрерывные частные производные по u, v, w и $|f_u(x, t, u, w, v)| \leq L_1(x), |f_w(x, t, u, w, v)| \leq L_2(x), |f_v(x, t, u, w, v)| \leq L_3(x)$, где $L_i(x), i = 1, 2, 3$, непрерывные на $[0, \omega]$ функции.

Взяв в качестве начального приближения тройку $\{u_{h_0}^{(0)}(x, t), v_{h_0}^{(0)}(x, t), w_{h_0}^{(0)}(x, t)\}$, решения задачи (4) – (6) найдем как предел последовательности троек $\{u^{(k)}(x, t), v^{(k)}(x, t), w^{(k)}(x, t)\}, k = 1, 2, 3, \dots$, определяемых по следующему алгоритму.

1-Шаг. А) Функцию $v^{(1)}(x, t)$ находим решая краевую задачу (4), (5) при $u(x, t) = u_{h_0}^{(0)}(x, t), w(x, t) = w_{h_0}^{(0)}(x, t)$. Пусть $\lambda_r^{(1,0)}(x) = \lambda_{h_0,r}^{(0)}(x), \tilde{v}_r^{(1,0)}(x, t) = \tilde{v}_{h_0,r}^{(0)}(x, t), r = \overline{1, N_1}$. Следующие приближения определим по алгоритму.

1-Шаг. $a_1)$ Параметр $\lambda^{(1,1)}(x)$ определяем из уравнения (11), при $\tilde{v} = \tilde{v}^{(1,0)}$. $b_1)$ Функцию $\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t)$ находим решая задачу Коши (7), (7') при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1,1)}(x)$.

2-Шаг. $a_1)$ Найденную $\tilde{v}_r^{(1,1)}(x, t), r = \overline{1, N_1}$, подставляем в уравнение (11) и решая его находим $\lambda^{(1,2)}(x)$. $b_1)$ При $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1,2)}(x)$, решая задачу Коши (7), (7') найдем функцию $\tilde{v}_r^{(1,2)}(x, t)$.

Таким образом на m -ом шаге алгоритма получаем систему пар $(\lambda_r^{(1,m)}(x), \tilde{v}_r^{(1,m)}(x, t)), r = \overline{1, N_1}$. Предположим, что при $m \rightarrow \infty, \lambda^{(1,m)}(x)$ и $\tilde{v}^{(1,m)}(x, [t])$ сходятся по норме $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{2,0}$ к $\lambda^{(1)}(x) \in C([0, \omega], R^{N_1}), \tilde{v}^{(1)}(x, [t]) \in C(\bar{\Omega}, h_1, R^{N_1})$. Тогда функция $v^{(1)}(x, t)$ определяется равенствами $v^{(1)}(x, t) = \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x, t), (x, t) \in \Omega_r, r = \overline{1, N_1}, v^{(1)}(x, T) = \lambda_{N_1}^{(1)}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_{N_1}^{(1)}(x, t)$.

Б) Первые приближения $u(x, t), w(x, t)$ находятся через $v^{(1)}(x, t), v_t^{(1)}(x, t)$ равенствами: $u^{(1)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v^{(1)}(\xi, t) d\xi$ и $w^{(1)}(x, t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t^{(1)}(\xi, t) d\xi$.

2-Шаг. А) Решая краевую задачу (4),(5) при $u(x, t) = u^{(1)}(x, t), w(x, t) = w^{(1)}(x, t)$ находим функцию $v^{(2)}(x, t)$. Возьмем $\lambda_r^{(2,0)}(x) = \lambda_r^{(1)}(x), \tilde{v}_r^{(2,0)}(x, t) = \tilde{v}_r^{(1)}(x, t), r = \overline{1, N_1}$, и решение эквивалентной краевой задачи с параметром найдем по следующему алгоритму.

1-Шаг. $a_1)$ Параметр $\lambda^{(2,1)}(x)$ определяем из уравнения (11), при $\tilde{v} = \tilde{v}^{(2,0)}$. $b_1)$ Решая задачу Коши (7), (7') при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(2,1)}(x)$ найдем функцию $\tilde{v}_r^{(2,1)}(x, t), r = \overline{1, N_1}$.

2-Шаг. а₁) Найденную $\tilde{v}_r^{(2,1)}(x, t)$, $r = \overline{1, N_1}$, подставляем в уравнение (11) и решая его находим $\lambda^{(2,2)}(x)$. б₁) При $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(2,2)}(x)$, решая задачу Коши (7), (7'), найдем функцию $\tilde{v}_r^{(2,2)}(x, t)$.

Таким образом, на m -ом шаге алгоритма получаем систему пар $(\lambda_r^{(2,m)}(x), \tilde{v}_r^{(2,m)}(x, t))$, $r = \overline{1, N_1}$. Предположим, что при $m \rightarrow \infty$, $\lambda^{(2,m)}(x)$ и $\tilde{v}^{(2,m)}(x, [t])$ сходятся по норме $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{2,0}$ к $\lambda^{(2)}(x) \in C([0, \omega], R^{N_1})$, $\tilde{v}^{(2)}(x, [t]) \in C(\overline{\Omega}, h_1, R^{N_1})$. Тогда функция $v^{(2)}(x, t)$ определяется равенствами $v^{(2)}(x, t) = \lambda_r^{(2)}(x) + \tilde{v}_r^{(2)}(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, N_1}$, $v^{(2)}(x, T) = \lambda_{N_1}^{(2)}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{v}_{N_1}^{(2)}(x, t)$.

Б) Через $v^{(2)}(x, t)$ определим функции $u^{(2)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v^{(2)}(\xi, t) d\xi$ и $w^{(2)}(x, t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t^{(2)}(\xi, t) d\xi$.

Продолжая процесс, на **k-ом шаге** алгоритма получаем систему троек $\{u^{(k)}(x, t), w^{(k)}(x, t), v^{(k)}(x, t)\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 a_{h_0}^{1,i}(x, h_1) &= [L_1(x) + L_2(x)] h_1 \max(\|v^{(i)}\|_1, \|\dot{v}^{(i)}\|_1) |x - (i-1)h_0| e^{L_3(x)h_1}, \quad a_{h_0}^{2,i}(x, h_1) = e^{L_3(x)h_1} \times \\
 &\times \|f(x, t, \psi(t) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} v^{(j)}(t), \dot{\psi}(t) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(t), v^{(0)}((i-1)h_0, t)) - f((i-1)h_0, t, \psi(t) + \\
 &+ h_0 \sum_{j=0}^{i-1} v^{(j)}(t) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(t), v^{(0)}((i-1)h_0, t))\|_{h_1}, \quad a_{h_0}^{3,i}(x, h_1) = a_{h_0}^{1,i}(x, h_1) + a_{h_0}^{2,i}(x, h_1), \\
 a_{h_0}^{4,i}(x, h_1) &= \|Q_{\nu, h_1}(x, \psi(\cdot) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} v^{(j)}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(\cdot), \lambda_{h_0}^{(0)}((i-1)h_0), \tilde{v}_{h_0}^{(0)}((i-1)h_0, [\cdot])) - \\
 &- Q_{\nu, h_1}((i-1)h_0, \psi(\cdot) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} v^{(j)}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot) + h_0 \sum_{j=0}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(\cdot), \lambda_{h_0}^{(0)}((i-1)h_0), \tilde{v}_{h_0}^{(0)}((i-1)h_0, [\cdot]))\|, \\
 a_{h_0}^{6,i}(x, h_1) &= \max_{r=\overline{1, N_1}} |v^{(i+1)}[(r-1)h_1] - v^{(i)}[(r-1)h_1]| \left| \frac{x - (i-1)h_0}{h_0} \right|, \\
 a_{h_0}^{5,i}(x, h_1) &= \|v^{(i+1)}(\cdot) - v^{(i)}(\cdot)\|_1 \left| \frac{x - (i-1)h_0}{h_0} \right| + a_{h_0}^{6,i}(x, h_1), \\
 a_{h_0}^{7,i}(x, h_1) &= \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} (L_3(x)h_1)^j a_{h_0}^{1,i}(x, h_1) + a_{h_0}^{4,i}(x, h_1) + \frac{1}{\nu!} (L_3(x)h_1)^\nu a_{h_0}^{5,i}(x, h_1), \\
 a_{h_0}^{8,i}(x, h_1) &= a_{h_0}^{7,i}(x, h_1) + \frac{1}{\nu!} (L_3(x)h_1)^\nu a_{h_0}^{6,i}(x, h_1), \\
 a_{h_0}^{9,i}(x, h_1) &= [L_1(x) + L_2(x)] \max(\|v^{(i)}\|_1, \|\dot{v}^{(i)}\|_1) |x - (i-1)h_0| + \\
 &+ \|f(x, t, u^{(i-1)}(t), w^{(i-1)}(t), v^{(i)}(t)) - f((i-1)h_0, t, u^{(i-1)}(t), w^{(i-1)}(t), v^{(i)}(t))\| + L_3(x) a_{h_0}^{5,i}(x, h_1), \\
 a_{h_0}^{10,i}(x, h_1) &= \|v^{(i+1)}\|_1 |x - (i-1)h_0| + \max(\|v^{(i)}\|_1, \|v^{(i+1)}\|_1) |x - (i-1)h_0| + \max(\|v^{(1)}\|_1, \|v^{(i)}\|_1) h_0,
 \end{aligned}$$

$$a_{h_0}^{11,i}(x, h_1) = |\dot{v}^{(i+1)}|_1 \times |x - (i-1)h_0| \max \left(\|\dot{v}^{(i)}\|_1, \|\dot{v}^{(i+1)}\|_1 \right) |x - (i-1)h_0| + \max \left(\|\dot{v}^{(1)}\|_1, \|\dot{v}^{(i)}\|_1 \right) h_0,$$

$$x \in [(i-1)h_0, ih_0], i = \overline{1, N_0 + 1}.$$

Следующая теорема устанавливает достаточные условия существования решения задачи (4) – (6) – тройку $\{u^*(x, t), w^*(x, t), v^*(x, t)\}$ и оценку разности $\|u^* - u_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1, \|v^* - v_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1, \|w^* - w_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1$.

Теорема. Пусть имеет место условие B и существуют $h_1 > 0 : N_1 h_1 = T (N_1 = 1, 2, 3, \dots), \nu \in \mathbb{N}$, при которых матрица Якоби $\frac{\partial Q_{\nu, h_1}(x, u, w, \lambda, \tilde{v})}{\partial \lambda}$ обратима для любых $(x, u(x, t), w(x, t), \lambda(x), \tilde{v}(x, [t])) \in [0, \omega] \times S(u_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{2, h_0}(x)) \times S(w_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{2, h_0}(x)) \times S(\lambda_{h_0}^{(0)}(x), \rho_{h_0}(x)) \times S(\tilde{v}_{h_0}^{(0)}(x, [t]), \tilde{\rho}_{h_0}(x))$ и выполнены следующие неравенства:

- 1) $\left\| \left[\frac{\partial Q_{\nu, h_1}(x, u, w, \lambda, \tilde{v})}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_\nu(x, h_1),$
- 2) $q_\nu(x, h_1) = \gamma_\nu(x, h_1) \left\{ e^{L_3(x)h_1} - \sum_{i=1}^\nu \frac{1}{i!} (L_3(x)h_1)^i \right\} < 1,$
- 3) $a_{h_0}(x, h_1) + c_{h_0}^1(x, h_1) B_{h_0}(x, h_1) \exp \left(\int_0^x c_{h_0}(\xi, h_1) d\xi \right) < \rho_{h_0}(x),$
- 4) $b_{h_0}(x, h_1) + c_{h_0}^1(x, h_1) B_{h_0}(x, h_1) \exp \left(\int_0^x c_{h_0}(\xi, h_1) d\xi \right) (e^{L_3(x)h_1} - 1) < \tilde{\rho}_{h_0}(x),$
- 5) $B_{h_0}(x, h_1) \exp \left(\int_0^x c_{h_0}(\xi, h_1) d\xi \right) < \rho_{2, h_0}(x),$

здесь

$$b_{h_0}^1(x, h_1) = \gamma_\nu(x, h_1) a_{h_0}^7(x, h_1) + [1 + \gamma_\nu(x, h_1) \frac{1}{\nu!} (L_3(x)h_1)^\nu] a_{h_0}^6(x, h_1),$$

$$b_{h_0}^2(x, h_1) = 2a_{h_0}^3(x, h_1) + e^{L_3(x)h_1} - 1 [b_{h_0}^1(x, h_1) + a_{h_0}^6(x, h_1)],$$

$$a_{h_0}(x, h_1) = \frac{\gamma_\nu(x, h_1)}{1 - q_\nu(x, h_1)} \frac{1}{\nu!} (L_3(x)h_1)^\nu b_{h_0}^2(x, h_1) + \gamma_\nu(x, h_1) \times a_{h_0}^8(x, h_1),$$

$$b_{h_0}(x, h_1) = b_{h_0}^2(x, h_1) \left[1 + \frac{\gamma_\nu(x, h_1)}{1 - q_\nu(x, h_1)} \frac{1}{\nu!} (L_3(x)h_1)^\nu (e^{L_3(x)h_1} - 1) \right],$$

$$d_{h_0}^1(x, h_1) = a_{h_0}(x, h_1) + b_{h_0}(x, h_1),$$

$$d_{h_0}^2(x, h_1) = a_{h_0}^9(x, h_1) + L_3(x) d_{h_0}(x, h_1),$$

$$c_{h_0}^1(x, h_1) = [L_1(x) + L_2(x)] h_1 \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{j!} (L_3(x)h_1)^j \times$$

$$\times \gamma_\nu(x, h_1) \left[1 + \frac{\gamma_\nu(x, h_1)}{1 - q_\nu(x, h_1)} \frac{1}{\nu!} (L_3(x)h_1)^\nu (e^{L_3(x)h_1} - 1) \right] e^{L_3(x)h_1},$$

$$c_{h_0}^2(x, h_1) = L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) c_{h_0}^1(x, h_1),$$

$$c_{h_0}(x, h_1) = \max(c_{h_0}^1(x, h_1), c_{h_0}^2(x, h_1)),$$

$$B_{h_0}(x, h_1) = \max \left(\int_0^x d_{h_0}^1(\xi, h_1) d\xi + a_{h_0}^{10}(x, h_1), \int_0^x d_{h_0}^2(\xi, h_1) d\xi + a_{h_0}^{11}(x, h_1) \right).$$

Здесь $a_{h_0}^s(x, h_1) = a_{h_0}^{s,i}(x, h_1), s = \overline{1, 11},$ при $x \in [(i-1)h_0, ih_0], i = \overline{1, N_0 + 1}.$

Тогда задача (4) – (6) имеет изолированное решение $\{u^*(x, t), w^*(x, t), v^*(x, t)\}$ в $S(u_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{2, h_0}(x)) \times S(w_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{2, h_0}(x)) \times S(v_{h_0}^{(0)}(x, t), \rho_{1, h_0}(x))$ и справедливы оценки:

$$\|v^* - v_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1 \leq d_{h_0}^1(x, h_1) + c_{h_0}^1(x, h_1)e^{L(x)h_1} B_{h_0}(x, h_1) \exp\left(\int_0^x c_{h_0}(\xi, h_1)d\xi\right), \quad (25)$$

$$\max(\|w^* - w_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1, \|u^* - u_{h_0}^{(0)}(x, \cdot)\|_1) \leq B_{h_0}(x, h_1) \exp\left(\int_0^x c_{h_0}(\xi, h_1)d\xi\right). \quad (26)$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2 из [4] используя свойство построенных функции $\{u_{h_0}^{(0)}(x, t), v_{h_0}^{(0)}(x, t), w_{h_0}^{(0)}(x, t)\}$.

Цитированная литература

1. **Самойленко А.М., Ткач Б.П.** Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев, 1992.
2. **Vejvoda O. Herrmann L., Lovicar V. et al.** Partial differential equations: time - periodic solutions. Prague, Boston, London, 1982.
3. **Пташник Б.И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.
4. **Кабдрахова С.С.** // Математический журнал. 2007. Т.7, №2. С. 32 – 42.
5. **Джумабаев Д. С., Темешева С. М.** // ЖВМ и МФ, 2007. Т.47, №1. С. 45 – 63.

Поступила в редакцию 11.03.2008г.

УДК 519.624

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Р. А. МЕДЕТБЕКОВА, Б. Б. МИНГЛИБАЕВА

ЮКГУ им. М.Ауэзова
160000 г.Шымкент пр. Тауке хана, 5
Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 anar@math.kz

Предлагается алгоритм нахождения решения нелинейной краевой задачи с параметром, основанный на введении дополнительных параметров. Получены достаточные условия сходимости алгоритма и существования изолированного решения рассматриваемой задачи.

Рассмотрим нелинейную двухточечную краевую задачу с параметром

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \quad \|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|, \quad (1)$$

$$g(\mu, x(0), x(T)) = 0, \quad (2)$$

где функции $f(t) : [0, T] \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$, $g : R^m \times R^n \times R^n \rightarrow R^{n+m}$ — непрерывны.

Решением задачи (1), (2) является пара $(\mu^*, x^*(t))$, где непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция $x^*(t)$ при $\mu = \mu^*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и краевым условиям (2).

Вопросы разрешимости и построения приближенных методов нахождения решения краевых задач с параметром, являющихся частными случаями задачи (1), (2), различными методами рассмотрены в [1-9].

Линейная двухточечная краевая задача с параметром общего вида методом параметризации исследована в [10, 11]. Предложены алгоритмы нахождения решения рассматриваемой задачи и получены коэффициентные необходимые и достаточные условия её однозначной разрешимости.

В настоящей статье методом параметризации исследуется задача (1), (2).

Возьмем шаг $h > 0 : Nh = T$ и произведем разбиение отрезка:

$$[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh).$$

Keywords: *two-point boundary-value problem with parameter, nonlinear ordinary differential equation*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B08

© Р. А. Медетбекова, Б. Б. Минглибаева, 2008.

Сужение функции $x(t)$ на r -ый интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$. Обозначим через $C([0, T], h, R^{nN})$ – множество систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))'$, где $x_r : [(r-1)h, rh) \rightarrow R^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t \rightarrow rh-0} x_r(t)$ при всех $r = \overline{1, N}$. Тогда задача (1), (2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r, \mu), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$g(\mu, x_1(0), \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t)) = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow rh-0} x_r(t) = x_{r+1}(rh), \quad r = \overline{1, N-1}. \quad (5)$$

Здесь (5) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения.

Далее обозначим через λ_r значение функции $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h$ и произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ на интервалах $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$ в задаче (3) – (5), получим многоточечную краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r, \mu), \quad u_r[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$g(\mu, \lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_r + \lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t) = \lambda_{r+1}, \quad r = \overline{1, N-1}. \quad (8)$$

Решением задачи (6) – (8) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$, с $\lambda^* = (\mu^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)' \in R^{nN+m}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t))' \in C([0, T], h, R^{nN})$, такая, что при $\mu = \mu^*$, $\lambda_r = \lambda_r^*$, непрерывно дифференцируемые функции $u_r^*(t)$, $r = \overline{1, N}$, являются решениями задач Коши (6) и удовлетворяют условиям (7), (8).

Задачи (1), (2) и (6) – (8) эквивалентны: если пара $(\lambda, u[t])$ является решением задачи (6) – (8), то пара $(\mu, x(t))$ с функцией, определяемой равенствами $x(t) = \lambda_r + u_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $x(T) = \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)$ будет решением задачи (1), (2). И, наоборот, если пара $(\tilde{\mu}, \tilde{x}(t))$ – решение задачи (1), (2), то пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\mu}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(h), \dots, \tilde{x}((N-1)h))'$, $\tilde{u}_r(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (6) – (8).

Появление начального условия в точке $t = (r-1)h$ позволяет при фиксированных значениях параметров $\mu \in R^m$, $\lambda_r \in R^n$ определить функции $u_r(t)$ на интервалах $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau), \mu) d\tau. \quad (9)$$

Из (9) найдем $\lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau), \mu) d\tau$, подставим их в (7), (8). Умножая обе части (7) на $h > 0$, получаем систему уравнений относительно неизвестных параметров $\mu \in R^m$, $\lambda_r \in R^n$, $r = \overline{1, N}$:

$$hg(\mu, \lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau, \lambda_N + u_N(\tau), \mu) d\tau) = 0,$$

$$\lambda_r + \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau), \mu) d\tau - \lambda_{r+1} = 0, \quad r = \overline{1, N-1}.$$

Запишем ее в виде

$$\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{nN+m}. \tag{10}$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda, u[t])$ – решения задачи (6) – (8), имеем систему уравнений (9), (10), определяемую через функции f, g и величину h .

Выберем шаг $h > 0 : Nh = T$, вектор $\lambda^{(0)} = (\mu^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)})' \in R^{m+nN}$ и предположим, что задача Коши (6) при $\mu = \mu^{(0)}, \lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ имеет решение $u_r^{(0)}(t), r = \overline{1, N}$, а система функций $u^{(0)}[t] \in C([0, T], h, R^n)$. Множество таких $\lambda^{(0)}$ обозначим $G_0(f, h)$. Возьмем $\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t]$, непрерывные на $[(r-1)h, rh]$ функции $\varphi_r(t), r = \overline{1, N}$, число $\rho > 0$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \left\{ (\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_N)' \in R^{m+nN} : \|\mu - \mu^{(0)}\| < \rho, \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho, r = \overline{1, N} \right\},$$

$$S(\mu^{(0)}, \rho) = \left\{ \mu \in R^m : \|\mu - \mu^{(0)}\| < \rho \right\},$$

$$S(u^{(0)}[t], \varphi[t]\rho) = \left\{ (u_1(t), \dots, u_N(t))' : \|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\| \leq \varphi_r(t)\rho, t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N} \right\},$$

$$G_1^{(0)}(\varphi[t], \rho) = \left\{ (t, x, \mu) : t \in [0, T], \|x_r(t) - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| < (\varphi_r(t) + 1)\rho, t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}, \|x_N(t) - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(0)}(t)\| < (\varphi_N(t) + 1)\rho, \|\mu - \mu^{(0)}\| < \rho \right\},$$

$$G_2^{(0)}(\varphi[t], \rho) = \left\{ (\mu, v, w) : \|\mu - \mu^{(0)}\| < \rho, \|v - \lambda_1^{(0)}\| < \rho, \|w - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(0)}(t)\| < (\varphi_N(t) + 1)\rho \right\}.$$

Условие A : Функции $f(t, x, \mu), g(\mu, v, w)$ соответственно в $G_1^{(0)}(\varphi[t], \rho), G_2^{(0)}(\varphi[t], \rho)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t, x, \mu), f'_\mu(t, x, \mu), g'_v(\mu, v, w), g'_w(\mu, v, w)$ и выполняются неравенства $\|f'_x(t, x, \mu)\| \leq l_1(t), \|f'_\mu(t, x, \mu)\| \leq l_2(t), \|g'_v(\mu, v, w)\| \leq L_1, \|g'_w(\mu, v, w)\| \leq L_2$, где $l_1(t), l_2(t)$ – непрерывные на $[0, T]$ функции, L_1, L_2 – постоянные.

Предполагая существование $\lambda^{(0)} \in G_0(f, h)$, за начальное приближение задачи (6) – (8) возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$, а последующие приближения строим по алгоритму:

Шаг 1. а) Параметр $\lambda^{(1)}$ определим из уравнения (10) при $u[t] = u^{(0)}[t]$; б) Решая задачу Коши (6) при $\mu = \mu^{(1)}, \lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(1)}(t), t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}$.

Шаг 2. а) Параметр $\lambda^{(2)}$ определяем из уравнения (10) при $u[t] = u^{(1)}[t]$; б) Решая задачу Коши (6) при $\mu = \mu^{(2)}, \lambda_r = \lambda_r^{(2)}$, находим $u_r^{(2)}(t), t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}$.

Таким образом на k -ом шаге получим систему пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]), k = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть существуют $h > 0 : Nh = T (N = 1, 2, \dots), \lambda^{(0)} \in G_0(f, h)$, непрерывные на $[(r-1)h, rh)$ функции $\varphi_r(t) \geq 0, r = \overline{1, N}$, число $\rho > 0$, при которых выполняется условие

A , матрица $\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для любых $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], \varphi[t]\rho)$ и имеют место неравенства:

$$1) \left\| \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_1(h),$$

$$2) q_1(h) = \gamma_1(h) \max(1, hL_2) \max_{r=\overline{1, N}} \left\{ e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} - 1 - \int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{(r-1)h}^{rh} l_2(\tau) d\tau \cdot \left(e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} - 1 \right) \right\} < 1,$$

$$3) \frac{1}{1 - q_1(h)} \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho,$$

$$4) e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau)d\tau} - 1 + \int_{(r-1)h}^{rh} l_2(\tau)d\tau e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau)d\tau} \leq \varphi_r(t), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}.$$

Тогда последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, определяемая по алгоритму, для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, содержится в $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], \varphi[t]\rho)$, сходится к $(\lambda^*, u^*[t])$ – решению задачи (3) – (5), и справедливы оценки:

$$a) \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq \gamma_1(h) \frac{[q_1(h)]^k}{1 - q_1(h)} \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|,$$

$$b) \|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq \left(e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau)d\tau} - 1 \right) \|\lambda_r^* - \lambda_r^{(k)}\| + \int_{(r-1)h}^t l_2(\tau)d\tau e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau)d\tau} \|\mu^* - \mu^{(k)}\|,$$

$t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}$.

Причем любое решение задачи (6) – (8) в $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], \varphi[t]\rho)$ изолировано.

Доказательство. Возьмем $\lambda^{(0)} = (\mu^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)})' \in G_0(f, h)$, ему соответствующую систему $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))'$. В силу неравенства 3) существует число $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_0 \gamma_1(h) < 1, \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < [1 - \varepsilon_0 \gamma_1(h)]\rho$. Ввиду условия А матрица $\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(0)})}{\partial \lambda}$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)}, \rho)$ и для $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_0 \in (0, \rho/2]$ такое, что $\left\| \frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(0)})}{\partial \lambda} - \frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, u^{(0)})}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon_0$, если $\lambda, \tilde{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho), \|\lambda - \tilde{\lambda}\| < \delta_0$.

Возьмем число $\alpha_0 = \max(1, \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|/\delta_0)$ и построим итерационный процесс

$$\lambda^{(1,0)} = \lambda^{(0)},$$

$$\lambda^{(1,j+1)} = \lambda^{(1,j)} - \frac{1}{\alpha_0} \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1,j)}, u^{(0)})}{\partial \lambda} \right]^{-1} \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1,j)}, u^{(0)}), \quad j = 0, 1, \dots \quad (11)$$

В силу условий теоремы оператор $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(0)})$ в $S(\lambda^{(0)}, \rho)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 из [12]. Поэтому итерационный процесс (11) сходится к $\lambda^{(1)} \in S(\lambda^{(0)}, \rho)$ – изолированному решению уравнения $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ и

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| &\leq \left(e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau)d\tau} - 1 \right) \|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\| + \\ &+ \int_{(r-1)h}^t l_2(\tau)d\tau \cdot e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau)d\tau} \|\mu^{(1)} - \mu^{(0)}\|, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу неравенств (12), (13), 4) система решений задач Коши $u^{(1)}[t]$ принадлежит множеству $S(u^{(0)}[t], \varphi[t]\rho)$. Из структуры оператора $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(0)})$, равенства $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)}) = 0$ и оценки (13) следует

$$\begin{aligned} \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\| &= \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) - \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)})\| = \\ &= \gamma_1(h) \max \left\{ h \|g(\mu^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_N^{(1)}) + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau, \lambda_N^{(1)} + u_N^{(1)}(\tau), \mu^{(1)})d\tau - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -g(\mu^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_N^{(1)} + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau, \lambda_N^{(1)} + u_N^{(0)}(\tau), \mu^{(1)})d\tau) \parallel, \\
 & \max_{r=1, N-1} \parallel \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(\tau), \mu^{(1)})d\tau - \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(\tau), \mu^{(1)})d\tau \parallel \leq \\
 & \leq \gamma_1(h) \max(1, hL_2) \max_{r=1, N} \left\{ \int_{(r-1)h}^{rh} \parallel f(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(\tau), \mu^{(1)}) - f(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(0)}(\tau), \mu^{(1)}) \parallel d\tau \right\} \leq \\
 & \leq \gamma_1(h) \max(1, hL_2) \max_{r=1, N} \left\{ \int_{(r-1)h}^{rh} l_1(t) \parallel u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t) \parallel dt \right\} \leq \\
 & \leq \gamma_1(h) \max(1, hL_2) \max_{r=1, N} \left\{ \left(e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} - 1 - \int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau \right) \parallel \lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)} \parallel + \right. \\
 & \left. + \int_{(r-1)h}^{rh} l_2(\tau) d\tau \cdot \left(e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} - 1 \right) \parallel \mu^{(1)} - \mu^{(0)} \parallel \right\},
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\gamma_1(h) \parallel \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) \parallel \leq q_1(h) \parallel \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \parallel. \tag{14}$$

Если $\lambda \in S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \tilde{\varepsilon})$, где $\rho_1 = \gamma_1(h) \parallel \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) \parallel$, число $\tilde{\varepsilon}$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\varepsilon} + \gamma_1(h) \parallel \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) \parallel / [1 - q_1(h)] < \rho$, то в силу неравенств 2), 3), (12), (14) имеем

$$\begin{aligned}
 \parallel \lambda - \lambda^{(0)} \parallel & \leq \parallel \lambda - \lambda^{(1)} \parallel + \parallel \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \parallel \leq \gamma_1(h) \parallel \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) \parallel + \tilde{\varepsilon} + \parallel \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \parallel \leq \\
 & \leq [1 + q_1(h)] \parallel \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \parallel + \tilde{\varepsilon} < \frac{1}{1 - q_1(h)} \gamma_1(h) \parallel \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) \parallel + \tilde{\varepsilon} < \rho,
 \end{aligned}$$

т.е. $S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \tilde{\varepsilon}) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho)$.

Из условий теоремы следует, что оператор $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(1)})$ в $S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \tilde{\varepsilon})$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [12]. Поэтому итерационный процесс

$$\lambda^{(2,0)} = \lambda^{(1)},$$

$$\lambda^{(2,j+1)} = \lambda^{(2,j)} - \frac{1}{\alpha_0} \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(2,j)}, u^{(1)})}{\partial \lambda} \right]^{-1} \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(2,j)}, u^{(1)}), j = 0, 1, \dots$$

сходится к $\lambda^{(2)} \in S(\lambda^{(1)}, \rho_1 + \tilde{\varepsilon})$ — изолированному решению уравнения $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(1)}) = 0$ и

$$\parallel \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \parallel \leq \gamma_1(h) \parallel \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) \parallel.$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$\parallel \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)} \parallel \leq q_1(h) \parallel \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \parallel. \tag{15}$$

Предполагая, что пара $(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)}[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], \varphi(t)\rho)$ определена и установлены оценки

$$\parallel \lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)} \parallel \leq q_1(h) \parallel \lambda^{(k-2)} - \lambda^{(k-3)} \parallel \leq [q_1(h)]^{k-2} \parallel \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \parallel, \tag{16}$$

$$\gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\| \leq q_1(h) \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|, \quad (17)$$

k -ое приближение по параметру $\lambda^{(k)}$ находим из уравнения $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(k-1)}) = 0$. Используя (16), (17) и равенство $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-2)}) = 0$, аналогично (14) устанавливаем неравенство:

$$\gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\| \leq q_1(h) \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\| \leq [q_1(h)]^{k-2} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|, \quad (18)$$

Возьмем $\rho_{k-1} = \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\|$ и покажем, что $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho)$. Действительно, ввиду (16), (17), (18), 3)

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda^{(0)}\| &\leq \|\lambda - \lambda^{(k-1)}\| + \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\| + \dots + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| < \\ &< \rho_{k-1} + \varepsilon + [q_1(h)]^{k-2} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + \dots + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \\ &\leq (1 + q_1(h) + \dots + [q_1(h)]^{k-1}) \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + \varepsilon < \frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)} \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \varepsilon < \rho. \end{aligned}$$

Так как $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(k-1)})$ в $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [12], то существует $\lambda^{(k)} \in S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1} + \varepsilon)$ – решение уравнения $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u^{(k-1)}) = 0$ и справедлива оценка

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \leq \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\|. \quad (19)$$

Решая задачи Коши (6) при $\mu = \mu^{(k)}$, $\lambda_r = \lambda_r^{(k)}$, находим функции $u_r^{(k)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$.

Если $\rho_k = \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)})\| = 0$, то $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)}) = 0$. Отсюда учитывая, что $u_r^{(k)}(t)$ является решением задачи Коши (6) при $\mu = \mu^{(k)}$, $\lambda_r = \lambda_r^{(k)}$, на $[(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$, получаем

$$g(\mu^{(k)}, \lambda_1^{(k)}, \lambda_N^{(k)} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(k)}(t)) = 0,$$

$$\lambda_r^{(k)} + \lim_{t \rightarrow rh-0} u_r^{(k)}(t) = \lambda_{r+1}^{(k)}, \quad r = \overline{1, N-1},$$

т.е. пара $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ – решение задачи (6) – (8). Используя (18), (19) устанавливаем

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \leq q_1(h) \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|, \quad (20)$$

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \leq \left(e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) d\tau} - 1 \right) \|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\| + \int_{(r-1)h}^{rh} l_2(\tau) d\tau \cdot e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) d\tau},$$

$$\|\mu^{(k)} - \mu^{(k-1)}\|, t \in [(r-1)h, rh], r = \overline{1, N}. \quad (21)$$

Из неравенств (20), (21) и $q_1(h) < 1$ следует, что последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к $(\lambda^*, u^*[t])$ – решению задачи (6) – (8). В силу неравенств 3), 4) $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ для $k = 1, 2, \dots$ и $(\lambda^*, u^*[t])$ принадлежат $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], \varphi[t]\rho)$. В неравенствах

$$\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(p)}\| < \frac{[q_1(h)]^k}{1 - q_1(h)} \gamma_1(h) \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|,$$

$$\|u_r^{(k+p)}(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq \left(e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) d\tau} - 1 \right) \|\lambda_r^{(k+p)} - \lambda_r^{(k)}\| + \int_{(r-1)h}^t l_2(\tau) d\tau \cdot e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) d\tau} \|\mu^{(k+p)} - \mu^{(k)}\|$$

переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим оценки $a), b)$.

Покажем изолированность решения $(\lambda^*, u^*[t])$. Выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_1(h) < 1, \quad q_1(h) < 1 - \varepsilon\gamma_1(h). \quad (22)$$

Согласно условию A и структуре матрицы $\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ следует ее равномерная непрерывность в $S(\lambda^*, \rho) \times S(u^*[t], \varphi[t]\rho)$. Поэтому найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $(\lambda, u) \in S(\lambda^*, \delta) \times S(u^*[t], \varphi[t]\delta)$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right\| < \varepsilon.$$

Если $(\lambda^*, u^*[t])$ является решением задачи (6) – (8), то $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*) = 0$.

Пусть $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t]) \in S(\lambda^*, \delta) \times S(u^*[t], \varphi[t]\delta)$ – решение задачи (6) – (8), отличное от $(\lambda^*, u^*[t])$. Так как $\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*) = 0$ и по нашему предположению $\tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$, то из равенств

$$\lambda^* = \lambda^* - \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*), \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} - \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}),$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lambda^* - \tilde{\lambda} &= \lambda^* - \tilde{\lambda} - \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \left[\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*) - \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, u^*) + \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, u^*) - \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \right] = \\ &= - \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda} + t(\lambda^* - \tilde{\lambda}), u^*)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right) dt (\lambda^* - \tilde{\lambda}) - \\ &\quad - \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right]^{-1} [\tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, u^*) - \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\lambda^* - \tilde{\lambda}\| &\leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \|\tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, u^*) - \tilde{Q}_{1,h}(\tilde{\lambda}, \tilde{u})\| \leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \times \\ &\times \max \left\{ h \left\| g[\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau, \tilde{\lambda}_N + u_N^*(\tau, \mu) d\tau) - g[\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau, \tilde{\lambda}_N + \tilde{u}_N(\tau, \mu) d\tau)] \right\|, \right. \\ &\quad \left. \max_{r=1, N-1} \left\| \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau, \tilde{\lambda}_r + u_r^*(\tau, \tilde{\mu}) d\tau - \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau, \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(\tau, \tilde{\mu}) d\tau) \right\| \right\} \leq \\ &\leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \max(1, L_2 h) \max_{r=1, N} \left\{ \int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) \|u_r^*(\tau) - \tilde{u}_r(\tau)\| d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\| &= \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^* + u_r^*(\tau, \mu^*) d\tau - \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(\tau, \tilde{\mu}) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) (\|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\| + \|u_r^*(\tau) - \tilde{u}_r(\tau)\|) d\tau + \int_{(r-1)h}^t l_2(\tau) \|\mu^* - \tilde{\mu}\| d\tau, \end{aligned}$$

то получим

$$\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\| \leq \left(e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) d\tau} - 1 \right) \|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\| + \int_{(r-1)h}^t l_2(\tau) d\tau \cdot e^{\int_{(r-1)h}^t l_1(\tau) d\tau} \|\mu^* - \tilde{\mu}\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\lambda^* - \tilde{\lambda}\| \leq & \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \max(1, L_2h) \max_{r=1, \overline{N}} \left\{ e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} - 1 - \int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{(r-1)h}^{rh} l_2(\tau) d\tau \cdot \left(e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} - 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

или

$$\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\| \leq \frac{\gamma_1(h)}{1 - \varepsilon\gamma_1(h)} \|\lambda^* - \tilde{\lambda}\|.$$

Таким образом, в силу неравенств (22) $\mu^* = \tilde{\mu}$, $\lambda_r^* = \tilde{\lambda}_r$, $u_r^*(t) = \tilde{u}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}(t)$ $k = 0, 1, \dots$ определим равенствами $x^{(k)}(t) = u_r^{(k)}(t) + \lambda_r^{(k)}$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$, $x^{(k)}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^{(k)}(t) + \lambda_N^{(k)}$. Через $S(x^{(0)}(t), [\varphi[t] + 1]\rho)$ обозначим множество кусочно-непрерывных дифференцируемых функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$, удовлетворяющих неравенствам $\|x(t) - x^{(0)}(t)\| < [\varphi_r(t) + 1]\rho$, $t \in [(r-1)h, rh]$, $r = \overline{1, N}$, $\|x(T) - x^{(T)}(t)\| < [\varphi_r(T) + 1]\rho$. Из эквивалентности задач (1), (2) и (6) – (8) и теоремы 1 следует

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность пар $(\mu^{(k)}, x^{(k)}(t))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, содержится в $S(\mu^{(0)}, \rho) \times S(x^{(0)}(t), [\varphi[t] + 1]\rho)$, сходится к $(\mu^*, x^*(t)) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(x^{(0)}(t), [\varphi[t] + 1]\rho)$ – решению задачи (1), (2) и справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max(\|\mu^* - \mu^{(k)}\|, \max_{t \in [0, T]} \|x^*(t) - x^{(k)}(t)\|) \leq \\ & \leq \max_{r=1, \overline{N}} \left\{ e^{\int_{(r-1)h}^{rh} l_1(\tau) d\tau} \left(1 + \int_{(r-1)h}^{rh} l_2(\tau) d\tau \right) \right\} \gamma_1(h) \frac{[q_1(h)]^k}{1 - q_1(h)} \|\tilde{Q}_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|. \end{aligned}$$

Причем любое решение задачи (1), (2) в $S(\mu^{(0)}, \rho) \times S(x^{(0)}(t), [\varphi[t] + 1]\rho)$ изолировано.

Цитированная литература

1. Кибенко А.В., Перов А.И. // Ученые записки АзГУ им. С.М.Кирова. Сер. физ-мат. и хим. наук. 1961. №3. С. 21 – 30.
2. Кибенко А.В. // Ученые записки АзГУ им. С.М.Кирова. Сер. физ-мат. и хим. наук. 1961. №6. С. 13 – 21.
3. Поволоцкий А.И., Мосягин В.В. // Ученые записки ЛГТИ им. Герцена. 1967. Вып. 302. С. 247 – 251.
4. Сеидов З.Б. // Сиб.матем. журнал. 1968. Т.9, №1. С. 223 – 230.
5. Гома И.А. // Укр. матем. журнал. 1977. Т.29, №6. С. 800 – 807.
6. Эйдельман Ю. // Дифференциальные уравнения. 1978. Т.14, №7. С. 1335 – 1337.

7. Курпель Н.С., Марусяк А.Г. //Укр. матем. журнал. 1980. Т.32, №2. С. 223 – 236.
8. Самойленко А.М., Ронто Н.И., Ронто В.А. //Доклады АН УССР. Сер. А. 1985. №7. С. 23 – 26.
9. Лучка А.Ю //Доклады АН УССР. Сер. А. 1989. №10. С. 22 – 27.
10. Минглибаева Б.Б. //Математический журнал МОН РК. 2004. Т.4, №1(11). С. 41 – 51.
11. Джумабаев Д.С., Минглибаева Б.Б. //Математический журнал МОН РК. 2003.Т 3, №2(8). С. 55 – 62.
12. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. //Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2007. Т. 47, №1. С. 39 – 63.

Поступила в редакцию 17.03.2008г.

УДК 517.956.3

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. Н. ОСПАНОВ

Казахский агротехнический университет им.С.Сейфуллина
010000 Астана myrzan@mail.ru

Получены достаточные условия коэрцитивной разрешимости одной задачи для уравнения в частных производных третьего порядка с неограниченными коэффициентами.

На $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times (-\infty, \infty)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_0(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + a_3(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

где функции $a_i(x, t)$ ($i = \overline{0, 3}$), $f(x, t)$ предполагаются непрерывными на $\bar{\Omega}$.

Через $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство ограниченных функций $V : \bar{\Omega} \rightarrow R^n$, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0, \omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0, \omega]$. Пусть $\|V(x, \cdot)\|_1 = \sup_{t \in R} \|V(x, t)\|$, где $\|V(x, t)\| = \max_{i=1, n} |V_i(x, t)|$. Для уравнения (1) рассмотрим задачу

нахождения решения $u(x, t)$, имеющего непрерывные частные производные $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2}$ и удовлетворяющего условиям:

$$u(0, t) = \psi(t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \in C_*(\bar{\Omega}, R). \quad (2)$$

Здесь $\psi(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная на R вместе со своими производными $\dot{\psi}(t)$, $\ddot{\psi}(t)$.

В работе [1] установлен следующий результат.

Теорема 1. Пусть функции $a_i(x, t)$, $i = \overline{0, 3}$ и $f(x, t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и удовлетворяют следующим условиям:

a) $a_1(x, t) \geq \gamma > 0$;

Keywords: *solution, system*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70

© М. Н. Оспанов, 2008.

b) $\frac{a_1(x, t)}{a_1(x, \bar{t})} \leq c$, при $|t - \bar{t}| \leq d$, $t, \bar{t} \in R$,

c) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in R$ и $x, \bar{x} \in [0, \omega]$ удовлетворяющих условию: $|x - \bar{x}| < \delta$ выполнено неравенство $\left| \frac{a_1(x, t) - a_1(\bar{x}, t)}{a_1(x, t)} \right| < \varepsilon$;

d) $|a_0(x, t)| \leq K \sqrt{a_1(x, t)}$;

e) $\frac{a_2(x, t)}{\sqrt{a_1(x, t)}}, \frac{a_3(x, t)}{\sqrt{a_1(x, t)}}, \frac{f(x, t)}{\sqrt{a_1(x, t)}} \in C_*(\bar{\Omega}, R)$.

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) и справедливы следующие оценки:

$$\|u(x, \cdot)\|_1 \leq E_1(x) \|\Psi(\cdot)\|_1 + \int_0^x E_1(\xi) \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{2a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi,$$

$$\left\| \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x} \right\|_1 \leq E_1(x) M_1(x) \|\Psi(\cdot)\|_1 + E_1(x) \left\| \frac{f(x, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1,$$

$$\left\| \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial t} \right\|_1 \leq \tilde{K} E_2(x) \|\Psi(\cdot)\|_1 + \tilde{K} \int_0^x E_2(\xi) \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{2\sqrt{a_1(\xi, \cdot)}} \right\|_1 d\xi,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u(x, \cdot)}{\partial x \partial t} \right\|_1 \leq \tilde{K} E_2(x) M_2(x) \|\Psi(\cdot)\|_1 + \tilde{K} E_2(x) \left\| \frac{f(x, \cdot)}{2\sqrt{a_1(x, \cdot)}} \right\|_1. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{K} = K\sqrt{c} + \frac{K^2(c+1)}{2d\sqrt{\gamma}}$, $E_1(x) = \exp \left[\int_0^x M_1(\xi) d\xi \right]$, $E_2(x) = \exp \left[\tilde{K} \int_0^x M_2(\xi) d\xi \right]$,

$$M_1(x) = \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \quad M_2(x) = \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{\sqrt{a_1(x, \cdot)}} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{\sqrt{a_1(x, \cdot)}} \right\|_1.$$

Замечание. Оценки для $\|u(x, \cdot)\|_1$ и $\left\| \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x} \right\|_1$ в (3) являются точными и знак равенства в них достигается для решения задачи (1) – (2) в случае $a_0(x, t) = a_2(x, t) = a_3(x, t) = 0$, $f(x, t) = -ka_1(x, t)$ ($k = const$), $a_1(x, t) \geq \gamma > 0$, $\psi(t) = 0$. Тогда $E_1 = 1$ и единственным ограниченным решением указанной задачи является $u(x, t) = kx$.

Когда коэффициенты уравнения (1) не ограничены, эта теорема не может гарантировать ограниченность производной $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2}$. Целью настоящей работы является нахождение условий принадлежности $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2}$ пространству $C_*(\bar{\Omega}, R)$ и получение оценки для $\left\| \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right\|_1$.

Пусть $d > 0$. Положим $\theta(x, t) = \frac{1}{d} \int_t^{t+d} a_1(x, \tau) d\tau$.

Основной результат настоящей работы следующий.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, а функции $f(x, t)$, $\sqrt{\theta(x, t)}\psi(t)$, $\sqrt{\theta(x, t)}\dot{\psi}(t)$ принадлежат $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$. Тогда производная $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2}$ решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) принадлежит пространству $C_*(\bar{\Omega}, R)$ и имеет место коэффициентная оценка:

$$\left\| \frac{\partial^3 u(x, \cdot)}{\partial x \partial t^2} \right\|_1 + \left\| a_0(x, \cdot) \frac{\partial^2 u(x, \cdot)}{\partial x \partial t} \right\|_1 + \left\| a_1(x, \cdot) \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x} \right\|_1 + \left\| a_2(x, \cdot) \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial t} \right\|_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \|a_3(x, \cdot)u(x, \cdot)\|_1 \leq \left[\left(\frac{2K_1}{\sqrt{\gamma c}} + \frac{2}{Kc\sqrt{\gamma}} \right) \tilde{K}_1 E_3(x) M_2(x) + 2\tilde{K}_1 \sqrt{\frac{\gamma}{c}} E_4(x) [M_3(x) + M_4(x)] \right] \times \\
& \quad \times \max_{x \in [0; \omega]} \|\sqrt{\theta(x, \cdot)} \Psi(\cdot)\|_1 + \left[\left(\frac{K_1}{\sqrt{\gamma c}} + \frac{1}{Kc\sqrt{\gamma}} \right) \tilde{K}_1 E_3(x) + 1 \right] \|f(x, \cdot)\|_1 + \\
& \quad + \sqrt{\frac{\gamma}{c}} \left[\tilde{K}_1 M_3(x) + \tilde{K}_2 c \sqrt{\gamma} M_4(x) \right] \int_0^x \|f(\xi, \cdot)\|_1 E_4(\xi) d\xi, \tag{4}
\end{aligned}$$

где $\tilde{K}_1 = \frac{K}{\sqrt{\gamma}} + \frac{(c+1)K\tilde{K}}{d\sqrt{\gamma}}$, $\tilde{K}_2 = Kc + \frac{(c+1)K\tilde{K}}{d\sqrt{\gamma}}$, $M_3(x) = \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{\sqrt{a_1(x, \cdot)}} \right\|_1$,
 $M_4(x) = \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{\sqrt{a_1(x, \cdot)}} \right\|_1$, $E_3(x) = \exp \left\{ \tilde{K}_1 \int_0^x M_2(\xi) d\xi \right\}$, $E_4(x) = \exp \left\{ \tilde{K}_2 \int_0^x M_2(\xi) d\xi \right\}$.

Доказательство. Введем новые функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ соотношениями:

$$u_1(x, t) = u(x, t), \quad u_2(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \tag{5}$$

и положим $U(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $V(x, t) = \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$. Тогда задача (1), (2) сводится к следующей задаче

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x, t)V + C(x, t)U(x, t) + F(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad V(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2), \tag{6}$$

$$U(x, t) = \Psi(t) + \int_0^x V(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
A(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x, t) & a_0(x, t) \end{pmatrix}, \quad C(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3(x, t) & a_2(x, t) \end{pmatrix}, \\
F(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, t) \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Если известна вектор-функция $U(x, t)$, то, решая задачу (6), находим $V(x, t)$. Если же известна $V(x, t)$, то из (7) находим $U(x, t)$. Тогда $u(x, t) = u_1(x, t)$ является решением задачи (1), (2).

Для нахождения решения задачи (6), (7) применяем метод последовательных приближений. За нулевое приближение функции $U(x, t)$ возьмем $\Psi(t)$, а функцию $V^{(0)}(x, t) = (v_1^{(0)}(x, t), v_2^{(0)}(x, t))$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t} = A(x, t)V^{(0)} + C(x, t)\Psi(t) + F(x, t), \quad V^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2). \tag{8}$$

$U^{(0)}(x, t)$ найдем из соотношения

$$U^{(0)}(x, t) = \Psi(t) + \int_0^x V^{(0)}(\xi, t) d\xi. \tag{9}$$

Равенствами

$$v_1^{(0)}(x, t) = \tilde{v}_1^{(0)}(x, t) + \tilde{v}_2^{(0)}(x, t), \quad v_2^{(0)}(x, t) = K\sqrt{\theta(x, t)} \left(\tilde{v}_1^{(0)}(x, t) - \tilde{v}_2^{(0)}(x, t) \right), \tag{10}$$

введем новые неизвестные функции $\tilde{v}_1^{(0)}(x, t), \tilde{v}_2^{(0)}(x, t)$. Так как $\theta(x, t) \geq \gamma > 0$, преобразование (10) обратимо и

$$\tilde{v}_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_1^{(0)}(x, t) + \frac{v_2^{(0)}(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} \right], \tilde{v}_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_1^{(0)}(x, t) - \frac{v_2^{(0)}(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} \right].$$

В результате (8) сводится относительно $\tilde{V}^{(0)}(x, t) = (\tilde{v}_1^{(0)}(x, t), \tilde{v}_2^{(0)}(x, t))$ к задаче

$$\frac{\partial \tilde{V}^{(0)}}{\partial t} = \tilde{A}(x, t)\tilde{V}^{(0)} + \tilde{C}(x, t)\Psi(t) + \tilde{F}(x, t), \quad \tilde{V}^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2). \quad (11)$$

Здесь $\tilde{A}(x, t) = (\tilde{a}_{ij}(x, t))_{i,j=1}^2$, $\tilde{C}(x, t) = (\tilde{c}_{ij}(x, t))_{i,j=1}^2$,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[K\sqrt{\theta(x, t)} + \frac{a_1(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} + a_0(x, t) - \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{2\theta(x, t)} \right], \\ \tilde{a}_{12}(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[K\sqrt{\theta(x, t)} + \frac{a_1(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} - a_0(x, t) + \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{2\theta(x, t)} \right], \\ \tilde{a}_{21}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[K\sqrt{\theta(x, t)} - \frac{a_1(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} - a_0(x, t) + \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{2\theta(x, t)} \right], \\ \tilde{a}_{22}(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[K\sqrt{\theta(x, t)} - \frac{a_1(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} + a_0(x, t) - \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{2\theta(x, t)} \right], \\ \tilde{c}_{1j}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_2(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} + \frac{a_3(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} \right] \quad (j = 1, 2), \\ \tilde{c}_{2j}(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{a_2(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} - \frac{a_3(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}} \right] \quad (j = 1, 2), \\ \tilde{F}(x, t) &= \begin{pmatrix} \frac{f(x, t)}{2K\sqrt{\theta(x, t)}} \\ \frac{f(x, t)}{2K\sqrt{\theta(x, t)}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что все условия теоремы 1 выполнены. Из условий *b*) и *c*) после несложных преобразований следует

$$\frac{a_1(x, t)}{\theta(x, t)} \in C_*(\bar{\Omega}, R), \quad (12)$$

что влечет принадлежность функции $\tilde{C}(x, t)\Psi(t) + \tilde{F}(x, t)$ пространству $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$. Тогда из (11) по теореме 4 [2] следует, что функция $\eta(x, t) = K\sqrt{\theta(x, t)}\tilde{V}^{(0)}(x, t)$ также будет принадлежать $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$. Функция $\eta(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \tilde{A}(x, t)\eta + K\sqrt{\theta(x, t)}\tilde{C}(x, t)\Psi(t) + K\sqrt{\theta(x, t)}\tilde{F}(x, t) + \\ &+ \frac{K}{2d} \frac{a_1(x, t+d) - a_1(x, t)}{\sqrt{\theta(x, t)}} \tilde{V}^{(0)}(x, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и условий теоремы получим, что функция

$$\tilde{C}(x, t)K\sqrt{\theta(x, t)}\Psi(t) + K\sqrt{\theta(x, t)}\tilde{F}(x, t) + \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \frac{K}{2\sqrt{\theta(x, t)}}\tilde{V}^{(0)}(x, t)$$

принадлежит пространству $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$. Тогда из (13) по теореме 4 из [2] следует $W^{(0)}(x, t) = \sqrt{\theta(x, t)}\eta(x, t) = K\theta(x, t)\tilde{V}^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2)$. Функция $W^{(0)}(x, t)$ с учетом (13) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \tilde{A}(x, t)W + K\tilde{C}(x, t)\theta(x, t)\Psi(t) + K\theta(x, t)\tilde{F}(x, t) + K\frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t}\tilde{V}^{(0)}(x, t). \quad (14)$$

В условиях теоремы в матрице $\tilde{A}(x, t) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ имеет место диагональное преобладание по строкам с функцией $\tilde{\theta}(x, t) = \frac{a_1(x, t)}{K\sqrt{\theta(x, t)}}$, т.е.

$$|a_{ii}(x, t)| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}(x, t)| + \theta(x, t), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\tilde{\theta}(x, t) \geq \theta_0 > 0$ – непрерывная на $\bar{\Omega}$ функция, θ_0 – const. Кроме того,

$$\left\| \frac{\tilde{C}(x, t)\theta(x, t)\Psi(t)}{\tilde{\theta}(x, t)} \right\| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}M_2(x),$$

$$\left\| \frac{\tilde{F}(x, t)\theta(x, t)}{\tilde{\theta}(x, t)} \right\| = \left\| \frac{f(x, t)\theta(x, t)K\sqrt{\theta(x, t)}}{2K\sqrt{\theta(x, t)}a_1(x, t)} \right\| \leq \frac{c}{2}\|f(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{c}{\sqrt{\gamma}}N_3(x),$$

$$\left\| \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t} \frac{\tilde{V}^{(0)}(x, t)}{\tilde{\theta}(x, t)} \right\| \leq \frac{c+1}{d} \|\eta^{(0)}(x, \cdot)\|_1 < \infty,$$

где $\alpha = \max_{x \in [0; \omega]} \|\sqrt{\theta(x, \cdot)}\Psi(\cdot)\|_1$, $N_3(x) = \frac{1}{2}\|f(x, \cdot)\|_1$. Далее аналогично (12) устанавливается принадлежность функций $\frac{1}{\sqrt{a_1(x, t)}}$, $\frac{\theta(x, t)}{a_1(x, t)}$, $\frac{a_1(x, t+d)}{a_1(x, t)}$ (d – постоянная из условия б) теоремы

1) пространству $C_*(\bar{\Omega}, R)$. С их учетом легко получить, что отношение суммы последних трех слагаемых в правой части (14) к величине диагонального преобладания $\tilde{\theta}(x, t)$ в матрице $\tilde{A}(x, t)$ принадлежит $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$. Тогда из результатов [2] следует существование единственного решения $W^{(0)}(x, t) = (w_1^{(0)}(x, t), w_2^{(0)}(x, t)) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2)$ уравнения (14) и справедливость оценки

$$\|W^{(0)}(x, \cdot)\|_1 \leq \tilde{K}_1 M_2(x)\alpha + \tilde{K}_2 N_3(x). \quad (15)$$

В силу (10) координаты $v_i^{(0)}(x, t)$, $i = 1, 2$ вектора $V^{(0)}(x, t)$ представляются формулами

$$v_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{K\theta}[w_1^{(0)}(x, t) + w_2^{(0)}(x, t)], \quad v_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}[w_1^{(0)}(x, t) - w_2^{(0)}(x, t)]. \quad (16)$$

Поскольку $W^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^2)$, учитывая (12), имеем $a_1(x, t)v_1^{(0)}(x, t)$, $a_0(x, t)v_2^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$. Используя условия б), d) теоремы 1 и неравенство (15), получим оценки

$$\|a_1(x, \cdot)v_1^{(0)}(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{2}{Kc}[\tilde{K}_1 M_2(x)\alpha + \tilde{K}_2 N_3(x)],$$

$$\|a_0(x, \cdot)v_2^{(0)}(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{2K_1}{\sqrt{c}} [\tilde{K}_1 M_2(x)\alpha + \tilde{K}_2 N_3(x)]. \tag{17}$$

Подставляя (16) в соотношение (9), находим функцию $U^{(0)}(x, t) = (u_1^{(0)}(x, t), u_2^{(0)}(x, t))$, ее принадлежность пространству $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$ обеспечивается теоремой 1.

Для функций $a_3(x, t)u_1^{(0)}(x, t)$, $a_2(x, t)u_2^{(0)}(x, t)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_3(x, t)u_1^{(0)}(x, t) &= a_3(x, t)\psi(t) + \int_0^x a_3(x, t) \frac{w_1^{(0)}(\xi, t) + w_2^{(0)}(\xi, t)}{K\theta(\xi, t)} d\xi, \\ a_2(x, t)u_2^{(0)}(x, t) &= a_2(x, t)\dot{\psi}(t) + \int_0^x a_2(x, t) \frac{w_1^{(0)}(\xi, t) - w_2^{(0)}(\xi, t)}{\sqrt{\theta(\xi, t)}} d\xi. \end{aligned} \tag{18}$$

Разделяя отрезок $[0, w]$ на части одинаковой длины, меньшей $\frac{\delta}{2}$, с учетом условия $c)$ теоремы 1 имеем

$$\sup_{x_1, x_2 \in [0, w]} \frac{a_1(x_1, t)}{a_1(x_2, t)} \leq (1 + \varepsilon) \frac{4w}{\delta} = \gamma_0.$$

Отсюда и из обозначения $\theta(x, t)$ следует конечность выражения $\sup_{x_1, x_2 \in [0, w]} \frac{\theta(x_1, t)}{\theta(x_2, t)}$. Поэтому со-

гласно условиям теоремы функции $a_3(x, t)\psi(t) \equiv \frac{a_3(x, t)}{\sqrt{a_1(x, t)}} \cdot \frac{\sqrt{a_1(x, t)}}{\sqrt{\theta(x, t)}} \cdot \sqrt{\theta(x, t)}\psi(t)$ и

$$\frac{a_3(x, t)}{K\theta(\xi, t)} \equiv \frac{a_3(x, t)}{K\sqrt{a_1(x, t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1(x, t)}} \cdot \frac{a_1(x, t)}{\theta(x, t)} \cdot \frac{\theta(x, t)}{\theta(\xi, t)}, \quad \xi \in [0, \omega],$$

принадлежат пространству $C_*(\bar{\Omega}, R)$. Тогда из (18) имеем $a_3(x, t)u_1^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$.

Включение $a_2(x, t)u_2^{(0)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$ показывается аналогично. Используя их и (15), из (18) получим справедливость неравенств:

$$\begin{aligned} \|a_3(x, \cdot)u_1^{(0)}(x, \cdot)\|_1 &\leq \left[1 + 2\sqrt{\gamma_0}\tilde{K}_1 \int_0^x M_2(\xi)d\xi \right] \frac{M_4(x)}{K\sqrt{\gamma c}}\alpha + \frac{2\tilde{K}_2}{K} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma c}} M_4(x) \int_0^x N_3(\xi)d\xi, \\ \|a_2(x, \cdot)u_2^{(0)}(x, \cdot)\|_1 &\leq \left[1 + 2\tilde{K}_1 \int_0^x M_2(\xi)d\xi \right] \sqrt{\frac{\gamma_0}{c}} M_3(x)\alpha + 2\sqrt{\frac{\gamma_0}{c}} M_3(x)\tilde{K}_2 \int_0^x N_3(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Положим $W^{(k)} = K\theta(x, t)\tilde{V}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$), где $\tilde{V}^{(k)}$ – k -ое приближение задачи (6), (7). Принадлежность функций $W^{(k)}(x, t)$ ($k = 1, 2, \dots$) пространству $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$ доказывается аналогично случаю $k = 0$, исходя из результатов [2]. Функция $W^{(k)}(x, t)$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяет системе

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \tilde{A}(x, t)W + K\tilde{C}(x, t)\theta(x, t)U^{(k-1)}(x, t) + K\theta(x, t)\tilde{F}(x, t) + K\frac{\partial\theta(x, t)}{\partial t}\tilde{V}^{(k)}(x, t).$$

Используя тот же подход, что применен при $k = 0$, получаем $a_1(x, t)v_1^{(k)}(x, t)$, $a_0(x, t)v_2^{(k)}(x, t)$, $a_3(x, t)u_1^{(k)}(x, t)$, $a_2(x, t)u_2^{(k)}(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$. Последовательность $\{W^{(k)}(x, t)\}_{k=1}^\infty$ сходится в норме пространства $C_*(\bar{\Omega}, R^2)$ к функции $W^{(*)}(x, t)$, что доказывается также, как и в теореме 1.

Поэтому из представлений аналогичных (18) для последовательностей $\{a_1(x, t)v_1^{(k)}(x, t)\}_{k=1}^\infty$, $\{a_0(x, t)v_2^{(k)}(x, t)\}_{k=1}^\infty$, $\{a_3(x, t)u_1^{(k)}(x, t)\}_{k=1}^\infty$, $\{a_2(x, t)u_2^{(k)}(x, t)\}_{k=1}^\infty$ вытекает сходимость последних к функциям $a_1(x, t)v_1^{(*)}(x, t)$, $a_0(x, t)v_2^{(*)}(x, t)$, $a_3(x, t)u_1^{(*)}(x, t)$, $a_2(x, t)u_2^{(*)}(x, t)$, соответственно, и для $W^{(*)}(x, t)$ выполняется оценка:

$$\|W^{(*)}(x, \cdot)\|_1 \leq [\tilde{K}_1 M_2(x)\alpha + \tilde{K}_2 N_3(x)]E_3(x). \quad (19)$$

Здесь $(v_1^{(*)}(x, t), v_2^{(*)}(x, t))$ – решение задачи (6), а $(u_1^{(*)}(x, t), u_2^{(*)}(x, t))$ через них определяется по (7). Отсюда, с учетом произведенных нами замен, имеем $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2} \in C_*(\bar{\Omega}, R)$.

Используя (19), получим оценки $\|a_1(x, \cdot)v_1^{(*)}(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{2}{Kc\sqrt{\gamma}}[\tilde{K}_1 M_2(x)\alpha + \tilde{K}_2 N_3(x)]E_3(x)$,
 $\|a_0(x, \cdot)v_2^{(*)}(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{2\tilde{K}_1}{\sqrt{c\gamma}}[\tilde{K}_1 M_2(x)\alpha + \tilde{K}_2 N_3(x)]E_3(x)$,
 $\|a_3(x, \cdot)u_1^{(*)}(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{2\tilde{K}_1}{K\sqrt{\gamma c}}M_4(x)\alpha E_4(x) + \frac{2\gamma_0\tilde{K}_2}{K\sqrt{\gamma c}}M_4(x) \int_0^x N_3(\xi)E_3(\xi)d\xi$,
 $\|a_2(x, \cdot)u_2^{(*)}(x, \cdot)\|_1 \leq 2\tilde{K}_1\sqrt{\frac{\gamma}{c}}M_3(x)\alpha E_4(x) + 2\sqrt{\frac{\gamma}{c}}M_3(x)\tilde{K}_2 \int_0^x N_3(\xi)E_3(\xi)d\xi$. Отсюда и из уравнения (1) вытекает коэрцитивная оценка (4). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим на полосе $\bar{\Omega}$ задачу (1), (2), где $a_0(x, t) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + t^2 + 1}$,
 $a_1(x, t) = x^2 + t^2 + 1$, $a_2(x, t) = \sin^3 x + \cos^2 t + 7$, $a_3(x, t) = 2x + 3t + 5$, $\psi(t) = 0$,
 $\frac{f(x, t)}{x^2 + t^2 + 1} \in C_*(\bar{\Omega}, R)$. Тогда непосредственной проверкой устанавливается, что условия теоремы 1 выполняются с $K = 2$, $c = 3 + 2d^2$, $\gamma = 1$, $\delta = \frac{\varepsilon}{2\omega[(\omega + d)^2 + 2]}$. Следовательно, данная задача имеет единственное решение. Если при этом правая часть $f(x, t)$ удовлетворяет более жесткому условию $f(x, t) \in C_*(\bar{\Omega}, R)$, то по теореме 2 для решения $u(x, t)$ этой задачи имеет место коэрцитивная оценка (4).

Цитированная литература

1. Оспанов М.Н. // Вестник КарГУ. Серия Математика. 2005, №4. С. 12 – 17.
2. Джумабаев Д.С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, №3. С. 388 – 404.

Поступила в редакцию 25.04.2008г.

УДК 523.98, 530.182

БЫСТРЫЙ МЕТОД НЕЗАВИСИМЫХ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ В ПРОБЛЕМЕ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТИ ИНДЕКСОВ ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ

А. А. ПАК

Институт Математики МОиН РК
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 chaos@math.kz

В данной работе рассматривается проблема выделения общих свойств временной зависимости индексов космической погоды и создания репрезентативной базы данных. Для решения поставленной задачи используется метод анализа независимых компонент. Основное отличие данного метода от традиционных подходов заключается в статистическом поиске скрытых закономерностей.

К настоящему времени создана большая статистическая база, которая содержит различные характеристики космической погоды. В нее входят индексы, описывающие в целом одни и те же процессы солнечно-земных связей, хотя и с разных сторон. Например, трехчасовой девятибальный индекс К измеряется на одной обсерватории наложением палетки на запись по максимальному значению вариации магнитного поля за трехчасовой интервал. Первые измерения этого индекса начались еще в 1932 г.

Из индекса К путем усреднения по низкоширотным обсерваториям получается планетарный индекс К_р, который является более универсальной характеристикой космической погоды. Его величина использовалась во многих работах для сопоставления солнечной активности с различными процессами [6]. Следует подчеркнуть, что, поскольку шкала К_р неравномерна, эту величину нельзя усреднять по времени. Из индекса К_р можно получить индекс геомагнитной активности А_р, который является среднесуточной планетарной характеристикой возмущения магнитного поля Земли с линейной шкалой. А_р — некоторая эквивалентная усредненная амплитуда колебаний напряженности магнитного поля Земли на средних широтах. Единицами измерения индекса А_р являются нанотеслы (нТ).

Индекс геомагнитной активности Dst характеризует интенсивность кольцевого тока, возникающего в экваториальной зоне во время магнитосферной бури. Это среднесуточная (среднегодовая) величина возмущения горизонтальной составляющей напряженности земного магнитного поля, определенная по данным нескольких низкоширотных обсерваторий, разнесенных по долготе. История измерений Dst индекса идет с 1957 г. [8].

Keywords: *Fast Independent Component Analysis, DST-index, AP-index, KP-index, kurtosis, negentropy*

2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

© А. А. Пак, 2008.

Помимо этих трех индексов существуют и другие. Их число постоянно увеличивается в связи с возможностями космического мониторинга. У новых индексов более высокое временное разрешение, однако меньше интервал наблюдений. Следует отметить, что здесь возникает проблема связанная с долговременными трендами: если характерные времена процессов гораздо больше длины ряда, то такие индексы не пригодны для решения ряда задач. Другим недостатком множества индексов является отсутствие единой калибровки: одни индексы измеряются в баллах, а другие в физических величинах, например, в нТ. Поэтому сравнение индексов в разных единицах не всегда можно выполнить корректным образом.

Из упомянутого выше описания серии индексов К, Кр, Ар видно, что многие индексы являются заведомо коррелированными. Для создания базы данных описывающих параметры космической погоды основной проблемой является выделение из множества коррелированных неоднородных индексов ключевых или репрезентативных индексов. Преимущества репрезентативной системы заключается прежде всего в унификации исследований солнечно-земных связей. Кроме того, общее количество используемых индексов является чрезмерным для создания системы мониторинга экстремальных событий космической погоды. Желаемая база данных должна отвечать принципу минимальной энтропии, т.е. она должна нести максимум информации о нашем космическом окружении и содержать как можно меньше информационного мусора. Проблеме редукции множества индексов было посвящено много работ (см., например, [1] – [3]). Традиционным подходом в этих работах является вычисление корреляционной матрицы между различными индексами, либо использование Метода Группового Учета Аргументов (МГУА) [4][5] между собой и построение некоторой общей схемы этих связей. В этой работе для выделения репрезентативных признаков используется так называемый метод независимых компонент (Independent Component Analysis, ICA) [11][10]. Этот метод реализован в виде пакета программ FastICA в среде MatLab [12]. Работа имеет следующую структуру: в разделе 1 описаны идеи лежащие в основе ICA и основные компоненты алгоритмов, в разделе 2 описано применение метода ICA к анализу трехвременных рядов геомагнитных индексов, в разделе 3 описана теория оценки нелинейной корреляция между двумя динамическими системами, в разделе 4 приведены результаты такой оценки для независимых компонент, полученных из геомагнитных индексов.

1. Метод независимых главных компонент

Быстрый метод независимых главных компонент позволяет нам выделить из смеси сигналов независимые составляющие. Главный принцип метода состоит в том, что получаемые составляющие сигналов должны быть статистически независимыми в широком смысле. Идею можно пояснить на следующем примере. Пусть у нас есть комната в разных углах которой расположены два микрофона. В комнате присутствуют два человека, которые вслух ведут монологи. Сигналы снимаемые с микрофонов обозначим $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Понятно, что они являются смесью голосов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, где величины s_1 и s_2 – это амплитуды голосов, зависящие от времени t . Формально, мы можем записать:

$$x_1(t) = a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t), \quad x_2(t) = a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t), \quad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – некоторые параметры, зависящие от расстояния между говорящими и микрофонами. Уравнения (1) можно записать в общем виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i, \quad (2)$$

где \mathbf{x} – вектор состоящий из наблюдаемых переменных x_1, \dots, x_n , \mathbf{A} – матрица смешивания с элементами a_{ij} , \mathbf{s} – вектор, состоящий из независимых компонент s_1, \dots, s_n . Проблема выделе-

ния скрытых сигналов из смеси, при отсутствии параметров смешивания a_{ij} , относится к так называемой задаче «Cocktail party problem».

Статистическая модель (2) является генеративной моделью анализа независимых компонент (Independent Component Analysis, ICA). Мы не знаем матрицу \mathbf{A} , искомые компоненты вектора \mathbf{s} являются латентными. Все, что мы можем измерить – это вектор \mathbf{x} . Следовательно, задача сводится к поиску параметров смешивания a_{ij} и вектора \mathbf{s} . Отправными точками в методе являются два предположения: (1) исходные сигналы являются статистически независимыми и (2) они имеют негауссовское (несимметричное) распределение.

После нахождения матрицы \mathbf{A} , исходный сигнал вычисляется из преобразования:

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}, \quad (3)$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$.

Заметим что метод можно реализовать с помощью нейронных сетей. В этом случае \mathbf{x} – это входной вектор сети, на выходе получим вектор \mathbf{s} , который представлен в виде (3), где \mathbf{W} – веса нейронов. Функционал сети – гауссовость (эксцесс) случайной величины \mathbf{x} .

Ограничения ICA:

1. Мы не можем определить дисперсию независимых компонент. Причина заключается в том, что любой скалярный множитель в одном из исходных сигналов s_i может быть всегда устранен делением соответствующей колонки матрицы \mathbf{A} на этот скаляр. Для решения этой проблемы мы можем зафиксировать амплитуду независимых компонент, полагая, что каждая из них имеет единичную дисперсию: $E\{s_i^2\} = 1$. После этой процедуры нужно пересчитать матрицу \mathbf{A} , учитывая это ограничение. Следует отметить, что такой подход все же оставляет неопределенность знака, мы можем умножить независимую компоненту на -1 , не влияя на модель в целом. Следует заметить, что такая неопределенность не важна в большинстве приложений.
2. Мы не можем определить порядок независимых компонент. Причиной этой двусмысленности является то, что \mathbf{s} и \mathbf{A} не определены, и мы можем с легкостью менять порядок слагаемых в уравнении (3), называя первым слагаемым любую из независимых компонент.

Принцип ICA. Пусть s_i – случайные величины с распределениями отличными от гауссовского. Их линейная комбинация x тоже будет случайной величиной, причем, ее распределение будет более близким к гауссовскому, чем любое из s_i , как это следует из центральной предельной теоремы. Главная идея ICA метода состоит в том, что из наблюдаемых переменных \mathbf{x} , которые являются линейными комбинациями вектора \mathbf{s} , можно выделить искомые латентные переменные \mathbf{s} путем нахождения такого линейного преобразования \mathbf{A} , что распределение \mathbf{x} будет максимально отличным от гауссовского. В этом случае распределение переменной \mathbf{x} будет максимально близким к распределению одной из независимых компонент. Для оценки распределения \mathbf{x} мы должны определить количественную меру гауссовости случайной величины. Рассмотрим различные способы таких оценок.

Эксцесс. Для простоты положим, что y – это случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией.

Классически мерой гауссовости служит момент четвертого порядка – эксцесс:

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2. \quad (4)$$

Напомним, что по предположению наша случайная величина имеет единичную дисперсию, поэтому правая сторона нашего уравнения упрощается до $E\{y^4\} - 3$. Т.е. в нашем случае

эксцесс это просто нормализованный момент четвертого порядка $E\{y^4\}$. Достоинством эксцесса является простота в вычислении. Однако, он очень чувствителен к выбросам. Его значение может сильно зависеть только от нескольких точек в хвосте распределения, которые могут быть ложными или ошибочными наблюдениями. Иначе говоря, эксцесс не является устойчивой мерой гауссовости.

Негэнтропия. Альтернативной оценкой гауссовости является негэнтропия. При её вычислении используется информационная (дифференциальная) энтропия. Формально, для непрерывного векторного пространства энтропия может быть записана как [13]:

$$H(\mathbf{y}) = - \int f(\mathbf{y}) \log_2 f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5)$$

Фундаментальный вывод теории информации заключается в том, что гауссовская случайная величина имеет наибольшую энтропию среди всех случайных величин с одинаковой дисперсией. Другими словами, чтобы получить меру гауссовости, которая равна нулю для гауссовских переменных и имеет всегда неотрицательное значение, мы можем ввести уравнение:

$$J(\mathbf{y}) = H(\mathbf{y}_{gauss}) - H(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где \mathbf{y}_{gauss} – гауссовская случайная величина. Преимущество использования негэнтропии заключается в том, что она имеет хорошее обоснование в статистической теории. Фактически, негэнтропия является в некотором смысле оптимальной оценкой гауссовости. Ее недостаток заключается в сложности численных оценок. Поэтому проще пользоваться не самой негэнтропией, а ее приближением. Такое приближение было предложено [14]:

$$J(\mathbf{y}) \approx \frac{1}{12} E\{y^3\}^2 + \frac{1}{48} kurt(y)^2. \quad (7)$$

Однако, это выражение содержит неустойчивый эксцесс. Поэтому в [11] был предложен более гибкий вариант:

$$J(\mathbf{y}) \approx \sum_{i=1}^p k_i [E\{G_i(y)\} - E\{G_i(\nu)\}], \quad (8)$$

где k_i – некоторые положительные константы и ν гауссовская переменная с нулевым средним и единичной дисперсией. Переменная y также полагается стандартизированной, а функция G_i является некоторой неквадратичной функцией. Идея состоит в том, чтобы правильно выбрать функции G_i . Они должны достаточно хорошо аппроксимировать негэнтропию, легко вычисляться и давать устойчивую оценку. Установлено, что всеми вышеперечисленными свойствами обладают следующие функции:

$$G_1(u) = \frac{1}{a_1} \log_2(\cosh(a_1 u)), \quad G_2(u) = -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right). \quad (9)$$

Рассмотрим два алгоритма анализа независимых компонент.

Алгоритм ICA для одного вычислительного узла или нейрона имеет вектор весовых коэффициентов \mathbf{w} , который изменяется в соответствии с правилом обучения. Правило обучения определяет направление в многомерном пространстве, куда нужно двигаться, чтобы найти искомый экстремум многомерной поверхности. Т.е. проекция $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ должна максимизировать негауссовость. Негауссовость будем измерять с помощью аппроксимации негэнтропии $J(\mathbf{w}^T \mathbf{x})$, заданной выражением (7). Напомним, что дисперсия $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ ограничена к единице. Для выбранных данных это эквивалентно тому, что норма \mathbf{w} равна единице.

FastICA – это алгоритм, основанный на вычислении негауссовости $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ с фиксированной запятой. Обозначим через g производные неквадратических функции G_i . Например, для функций (9) мы получаем

$$g_1(u) = \tanh(a_1 u), g_2(u) = u \exp(-u^2/2), \quad (10)$$

где $1 \leq a_1 \leq 2$ любая константа, которую часто берут равной единице. Основная часть алгоритма FastICA заключается в следующем:

1. Выбирается начальный вектор весовых коэффициентов \mathbf{w}_i ;
2. Вычисляется $\mathbf{w}_i^+ = E\{\mathbf{x}g(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x})\} - E\{g'(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x})\}\mathbf{w}_i$;
3. Вычисляется $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i^+ / \|\mathbf{w}_i^+\|$;
4. Если $|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i| > \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, то переходим к шагу 2.

Сходимость алгоритма означает, что старые и новые значения \mathbf{w} указывают на одно и то же направление, т.е. скалярное произведение почти равно единице. Но необязательно, чтобы вектор сходил к одной точке, так как $-\mathbf{w}$ и \mathbf{w} указывают на одно и то же направление. Так получилось потому, что независимые компоненты могут быть рассчитаны точностью до знака.

Приведем вывод FastICA ниже. Во-первых, заметим, что максимум негэнтропии от $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ находится в определенном оптимуме для $E\{G(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}$. В соответствии с условием Куна-Такера, оптимум $E\{G(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}$ при условии $E\{G(\mathbf{w}^T \mathbf{x})^2\} = \|\mathbf{w}\|^2 = 1$ находится в точке, где

$$E\{\mathbf{x}g(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - \beta \mathbf{x} = 0. \quad (11)$$

Решим это уравнение методом Ньютона. Обозначим функцию с левой стороны через F и вычислим матрицу Якоби $JF(\mathbf{w})$ для (11):

$$JF(\mathbf{w}) = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - \beta \mathbf{I}. \quad (12)$$

Чтобы упростить нахождение обратной матрицы, можно аппроксимировать первый член в (11) следующим образом $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} \approx E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} = E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}\mathbf{I}$. Теперь матрица Якоби является диагональной и может быть легко инвертирована. Таким образом, мы получили аппроксимированную итерацию Ньютона:

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{w} - [E\{\mathbf{x}g(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - \beta \mathbf{w}] / [E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - \beta]. \quad (13)$$

Для дальнейшего упрощения мы можем домножить обе части уравнения (13) на $\beta - E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}$:

$$\mathbf{w}^+ = \frac{E\{\mathbf{x}g(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\} - \mathbf{w}E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}}{\beta - E\{g'(\mathbf{w}^T \mathbf{x})\}}. \quad (14)$$

На практике математическое ожидание заменяется средним значением. В идеале для расчета среднего должны использоваться все данные, хотя бывают случаи, когда расчеты становятся слишком зависимыми. Тогда среднее может быть вычислено на более маленьком отрезке данных, размер имеет большое влияние на точность конечной оценки. Выборка должна быть разной на каждом шаге итерации. Если сходимость слишком плохая, то можно увеличить объем выборки.

Алгоритм ICA для нескольких узлов. Рассмотренный алгоритм ICA может оценить только одну независимую компоненту. Для того чтобы найти несколько независимых компонент, необходимо запустить этот алгоритм для нескольких вычислительных узлов (нейронов) с весовыми векторами $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$. Чтобы помешать различным векторам сойтись в одном и том же максимуме, мы должны декоррелировать выходы $\mathbf{w}_1^T \mathbf{x}, \dots, \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}$.

Простым способом декорреляции является понижающая схема, основанная на декорреляции Грама-Шмидта. Это значит, что мы находим независимые компоненты по одной. И когда мы нашли уже p компонент, или p векторов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$, мы запускаем алгоритм с одним вычислительным узлом для \mathbf{w}_{p+1} , и после каждого итерационного шага вычитаем из \mathbf{w}_{p+1} проекции $\mathbf{w}_{p+1}^T \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j, j = 1, \dots, p$ предыдущих p найденных векторов, и затем нормализуем \mathbf{w}_{p+1} :

1. $\mathbf{w}_{p+1} = \mathbf{w}_{p+1} - \sum_{j=1}^p \mathbf{w}_{p+1}^T \mathbf{w}_j \mathbf{w}_j$;
2. $\mathbf{w}_{p+1} = \mathbf{w}_{p+1} / \sqrt{\mathbf{w}_{p+1}^T \mathbf{w}_{p+1}}$.

Однако, такой подход может вызвать массу проблем, так как выделяет какое-то одно направление заданное направление. В определенных приложениях желательно использовать симметрическую декорреляцию, в которой не было бы "привилегированных" векторов. Это может быть сделано с помощью классического метода:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1/2}\mathbf{W}, \quad (15)$$

где \mathbf{W} матрица состоящая из $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)^T$ векторов, и обратный квадратный корень получен из собственных значений декомпозиции $\mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{F}^T$ как $(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1/2} = \mathbf{F}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{F}^T$. Или более простым способом:

1. $\mathbf{W} = \mathbf{W} / \sqrt{\|\mathbf{W}\mathbf{W}^T\|}$;
2. $\mathbf{W} = \frac{3}{2}\mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{W}$,

причем необходимо повторять второй шаг пока алгоритм не сойдется.

Предобработка для ICA. Первым шагом в предобработке данных для ICA является центрирование \mathbf{x} . После нахождения матрицы смешивания \mathbf{A} центрированных данных, мы можем добавить средний вектор $E\{\mathbf{s}\} = \mathbf{A}^{-1}E\{\mathbf{x}\}$ к полученному центрированному \mathbf{s} для восстановления исходных сигналов.

Вторым шагом является выбеливание наблюдаемых переменных. Т.е. после центрирования данных мы должны выполнить линейное преобразование \mathbf{x} таким образом, чтобы получить новый вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, такой что его матрица ковариации будет равна единичной матрице, а дисперсии его компонент будут равны единице:

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = \mathbf{I}. \quad (16)$$

Преобразование выбеливания всегда возможно. Одним из популярных методов выбеливания является декомпозиция характеристических значений (Eigen Value Decomposition, EVD) матрицы ковариации $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T$, где \mathbf{E} – ортогональная матрица собственных векторов $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ и \mathbf{D} – диагональная матрица собственных значений, $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Заметим, что $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ может быть найдена обычным способом из доступных нам примеров $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)$. Выбеливание может быть сделано

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{x}. \quad (17)$$

Легко проверить, что $E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = \mathbf{I}$.

Преобразование выбеливания преобразует матрицу смешивания в новую матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$. Из (2) и (17) имеем:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\mathbf{A}\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s}. \quad (18)$$

Преимущество выбеливания заключается в том, что новая матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ является ортогональной, т.е.

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = \tilde{\mathbf{A}}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\}\tilde{\mathbf{A}}^T = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^T = \mathbf{I}. \quad (19)$$

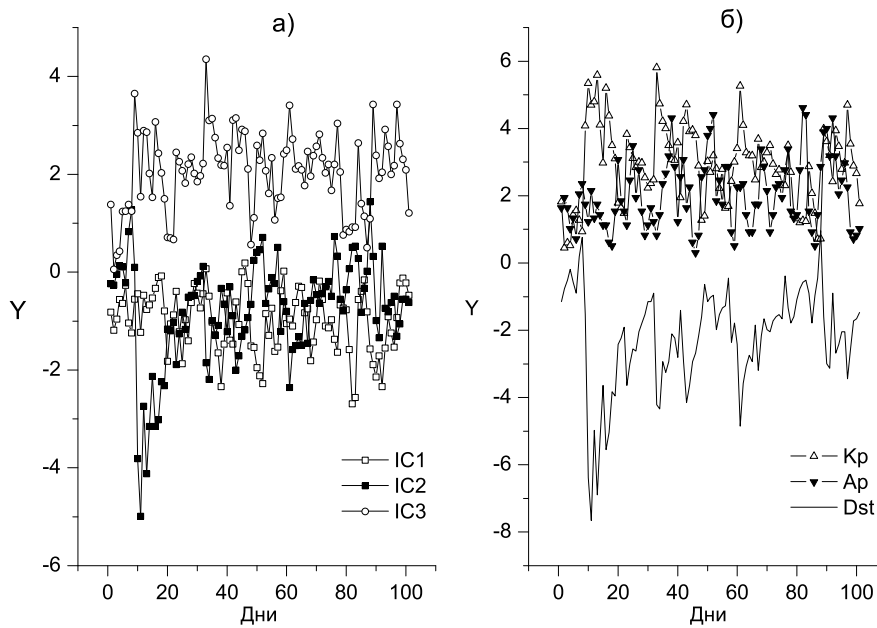


Рис. 1: Независимые компоненты и обезразмеренные индексы за промежуток времени в 100 дней.

Из чего видно, что выбеливание понижает количество параметров, которое необходимо вычислить. Вместо вычисления n^2 параметров, которые являются элементами матрицы смешивания \mathbf{A} , нам нужно найти $n(n-1)/2$ элементов новой ортогональной матрицы смешивания $\tilde{\mathbf{A}}$.

Свойства алгоритма FastICA:

1. Сходимость FastICA является кубической (или по крайней мере квадратичной). В сравнение, обычный ICA алгоритм, который основывается на методе стохастического градиентного спуска, имеет всего лишь линейную сходимость;
2. Простота использования алгоритма FastICA в отличие от градиентных алгоритмов заключается в отсутствии параметра размера шага;
3. Алгоритм напрямую ищет независимые компоненты с любыми негауссовскими распределениями, используя любую нелинейную функцию g . Это очень удобно по сравнению с другими алгоритмами, для которых необходимо сначала найти функцию распределения вероятности, а потом уже выбрать соответствующую нелинейную функцию;
4. Качество результата и скорость схождения алгоритма могут быть оптимизированы выбором нелинейной функции g ;
5. Независимые компоненты могут быть найдены одна за другой. Это может быть полезно, когда нужно снизить время вычислений и нет необходимости находить все независимые компоненты;
6. Алгоритм имеет все преимущества нейронных сетей, он параллельный, распределенный, легко вычисляемый и требует мало памяти.

2. Исследование независимости геомагнитных индексов

В данной работе рассматриваются три индекса геомагнитной активности: Кр, Ар, Dst [6] – [7]. Для численных экспериментов был использован интервал времени с 1957 года по 2003 год и среднесуточные значения для всех трех индексов. Каждый ряд содержал 16807 отсчетов. К данным были применены операции центрирования и выбеливания. Коэффициенты линейной корреляции между оригинальным рядами имели следующие значения: между Кр и Ар 27%, Кр и Dst 70%, Ар и Dst 25%.

На Рис. (б) в качестве примера представлен график в безразмерных единицах индексов за временной интервал в 100 дней. Индексы стандартизованы на собственную дисперсию. Эксперимент проводился в пакете MatLab7.01. Алгоритм FastICA для генерирования использовал следующие параметры: в качестве нелинейной оценочной функции был использован эксцесс, для поиска дополнительных независимых компонент был использован метод декорреляции Грамма-Шмидта, стабилизация и ограничение количества компонент не использовались. В результате было получено три компонента, которые представлены на Рис. (а) в безразмерных единицах. Для оценки взаимной зависимости полученных компонент был использован метод корреляционных сумм [15] – [16].

3. Оценка нелинейной корреляции

Пусть $X = \{x\}_{i=1}^N, Y = \{y\}_{i=1}^N$ – две наблюдаемые последовательности, для которых существуют гладкие динамические модели, обладающие аттракторами $\mathbf{A}(x), \mathbf{A}(y)$ с размерностью \mathbf{d}_x и \mathbf{d}_y соответственно [17]-[18]. Предположим, что Y является образом X под действием преобразования $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ из некоторой группы $G: \mathbf{Y} = \mathbf{g}\mathbf{X} \equiv \{\mathbf{g}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$, оставляющей инвариантной векторную норму $|\bullet|$ в пространстве вложений $\mathbf{R}^m, m \geq \max(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y)$. Пусть μ и ν инвариантные меры аттракторов $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{A}(y)$ соответственно. Определим кросс-корреляционный интеграл [16]

$$C_{xy}(\varepsilon) = \int d\mu(x) \int d\nu(y) \Theta(\varepsilon - |x - y|), \quad (20)$$

где Θ – функция Хевисайда: $\Theta(x) = 1, x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ в противном случае. Его несмещенной оценкой является кросс-корреляционная сумма:

$$C_{XY} = N^{-2} \sum_{x \in X, y \in Y} \Theta(\varepsilon - |x - y|), \quad (21)$$

при $N \rightarrow \infty, C_{XY} \rightarrow C_{\mu\nu}$. Для достаточно малых ε и непрерывных μ и ν справедливо неравенство

$$C_{\mu\nu}^2(\varepsilon) \leq C_{\mu\mu}(\varepsilon)C_{\nu\nu}(\varepsilon), \quad (22)$$

которое почти всегда имеет дискретный аналог с точностью до статистических флуктуаций, если $\mu \approx \nu$. Поэтому близость двух мер можно измерить кросс-корреляционным отношением:

$$\frac{C_{XY}(\varepsilon)}{\sqrt{C_{XX}(\varepsilon)}\sqrt{C_{YY}(\varepsilon)}} = \frac{C_{X,gX}(\varepsilon)}{C_{XX}(\varepsilon)}. \quad (23)$$

В [19] вариант этого подхода использован для тестирования причинно-следственной связи двух аттракторов. С помощью канонического алгоритма Такенса [18] построим реконструкцию аттракторов в R^m . Затем для реконструкции X подсчитываем число пар точек, расстояние между которыми не превышает некоторое заданное число ε . Это можно сделать, используя функцию Хевисайда и выражение $\sum_{i \neq j} \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|)$. Подсчитаем теперь сумму квадратов расстояний между такими точками системы Y , синхронные аналоги которых в системе X также близки

$$\sum_{i \neq j} \|y_i - y_j\|^2 \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (24)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{y} – запаздывающие векторы систем X и Y . Если существует статистическая зависимость между наблюдаемыми временными рядами, то между соответствующими реконструкциями X и Y также будет индуцируемая связь. Иными словами, условие $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$ влечет $\|y_i - y_j\| \approx \varepsilon$. Сама связь оценивается кросс-корреляционным отношением:

$$K_{xy}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\sum_{i \neq j} \|y_i - y_j\|^2 \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|)}{\sum_{i \neq j} \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|)}}. \quad (25)$$

Очевидно, что в случае существования связи статистика K_{xy} будет уменьшаться с уменьшением ε . Напротив, если же связь между системами отсутствует, график $K_{xy} = K_{xy}(\varepsilon)$ будет приблизительно горизонтален и расстояние между векторами \mathbf{y}_i и \mathbf{y}_j будет равно среднему расстоянию. Как правило, строится зависимость K_{xy} от ε , а грубая оценка связи находится как наклон линейного участка. Данный метод позволяет установить также направление связи, поскольку $K_{xy} \neq K_{yx}$.

4. Результаты оценки нелинейной корреляции геомагнитных индексов

В Таб.1 приведена линейная корреляция между индексами и полученными из них компонентами. Видно, что каждая компонента хорошо коррелирует с одним из индексов. Т.е. IC1 генерируется из Ap, IC2 генерируется из Dst, IC3 генерируется из Kp. При этом взаимная корреляция между компонентами (IC1, IC2, IC3) отсутствует, т.е. равна 0 с точностью до 4 знака. На Рис. представлено несколько графиков оценки нелинейной корреляции геомагнитных индексов согласно (25). Графики упорядочены следующим образом: в первой колонке приводятся кривые K_{xy} для «Kp Ap» – жирная линия и тонкая – для K_{yx} . Строки соответствуют размерностям вложения 9 (а), 7 (б), 5(в). Остальные колонки сформированы аналогичным образом. Из графиков видно, что нелинейная корреляция между оригинальными индексами присутствует во всех случаях; наиболее значима она для пары «Kp Dst».

На Рис. представлены аналогичные графики для независимых компонент. Из графиков видно, что между IC2 и IC3 нелинейной корреляции практически нет. Поскольку IC2 идентифицирует Dst индекс, а IC3 – Kp индекс, такой результат согласуется с интуицией. Заметим, однако, что линейная корреляция между этими индексами как отмечалось выше, составляет 70%. Сопоставляя результаты нулевой линейной корреляции между независимыми компонентами с кривыми на Рис.4, мы приходим к выводу, что в рамках ICA концепции из трех анализируемых индексов репрезентативными являются два: Kp и Dst.

Таб.1 Линейные корреляции между независимыми компонентами и индексами.

	Kp	Ap	Dst
IC1	-0,16	-0,99	0,23
IC2	-0,44	0,03	0,93
IC3	0,88	0,14	-0,29

5. Заключение

Работа была посвящена задаче уменьшения размерности базы данных коррелированных признаков, в качестве примера рассматривались три геомагнитных индекса, описывающих параметры космической погоды: Kp, Ap, Dst. Эта задача является частью общей проблемы составления репрезентативной базы данных для обеспечения безопасности функционирования космических аппаратов. Для диагностики использовался быстрый метод независимых компонент (FastICA). В его основе лежит представление каждого признака в виде линейной комбинации независимых компонент. Такие компоненты могут быть найдены линейным преобразованием при условии, что они подчиняются негауссовским распределениям. Компьютерные

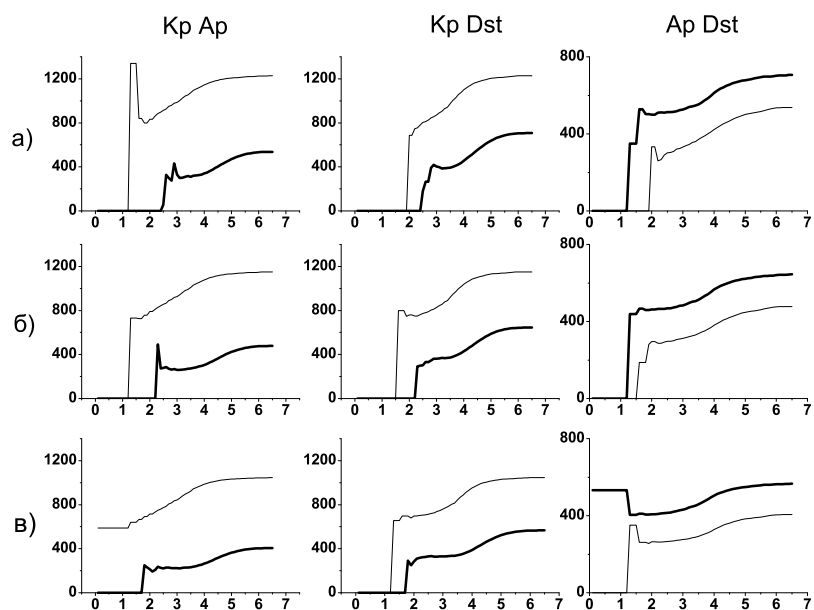


Рис.2: Нелинейная корреляция Ap, Kp, Dst индексов.

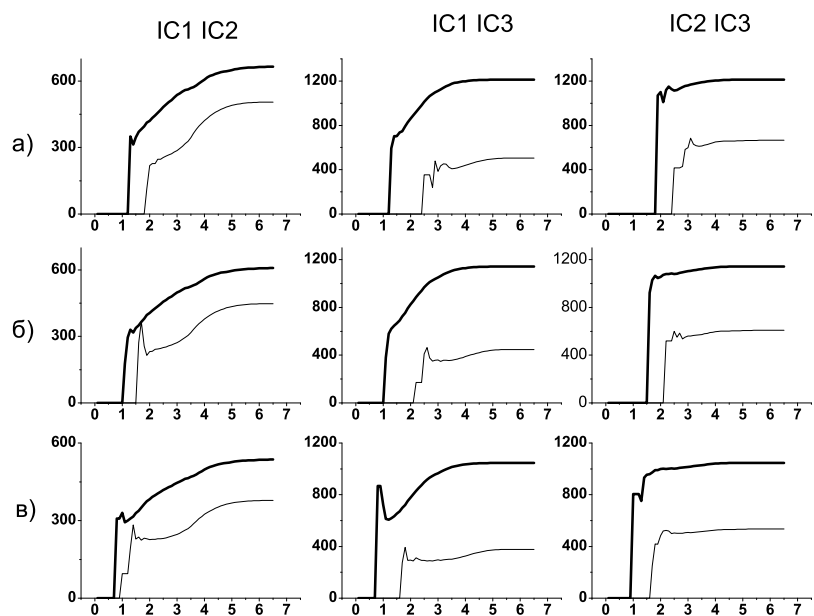


Рис.3: Нелинейная корреляция независимых компонент.

эксперименты на примере трех реальных рядов дали результаты не противоречащие физической интуиции. Таким образом, метод FastICA может быть рекомендован для выделения репрезентативной системы индексов из полной базы данных по космической погоде.

Благодарности

Автор благодарен Н.Г. Макаренко за постоянный интерес к результатам исследования, полезные обсуждения и замечания.

Цитированная литература

1. **Ихсанов Р.Н., Милецкий Е.В.** // Труды конфер. "Крупномасштабная структура солнечной активности". СПб. 1999.
2. **Ихсанов Р.Н., Милецкий Е.В.** // Известия ГАО. 2000. Т.215. С. 69.
3. **Милецкий Е.В., Иванов В.Г.** // Труды конфер. "О выборе системы солнечных характеристик определяющих состояние космической погоды", СПб. 2001.
4. **Ивахненко А.Г. и др.** Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. Киев. 1981.
5. **Ивахненко А.Г., Мюллер И.А.** Самоорганизация прогнозирующих моделей. Киев. 1984.
6. **Яновский Б.М.** Земной магнетизм. Ленинград. 1978.
7. **Дубов Э.Е.** Индексы солнечной геомагнитной активности. М., 1982.
8. **Заболотная Н.А.** Индексы геомагнитной активности. М., 1977.
9. **Амиатов А.С., Зайцев А.Н., Одинцов В.И., Петров В.Г.** Вариации магнитного поля Земли. М., 2001.
10. <http://www.cis.hut.fi/projects/ica/fastica/>
11. <http://www.cis.hut.fi/harri/ica2000a/>
12. <http://www.mathworks.com/products/matlab/?BB=1>
13. **Дмитриев В.И.** Прикладная теория информации. М., 1989.
14. **Jones M. C., Sibson R.** // Journal of the Royal Statistical Society. Series A. 1987. Vol. 150(1). P.1 – 36.
15. **Quiroga Q. R., Arnhold J., Grassberger P.** // Phys Rev. E. 2000. Vol. 61. P.5142 – 5148.
16. **Grassberger P., Schneider P.** // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 749 – 762.
17. **Кроновер Р.М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М., 2000.
18. **Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.** Современные проблемы нелинейной динамики. М., 2002.
19. **Čenis A., Lasiene G., Pyragas K.** // Physica D. 1991. Vol. 52. P.332 – 337.

Поступила в редакцию 27.02.2008г.

УДК 510.6

REFINED DEFINITIONS FOR FINITARY AND INFINITARY SIMILARITY RELATIONS OF THEORIES

Part 1: Signature reduction procedures and constructions shortly, and fast definitions for Finitary and Infinitary lists

M. G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics

050010 Almaty Pushkin Street, 125 mikhail_peretyatkin@predicate-logic.org

In this series of papers, Finitary list *ACL* also called *algebraic Cartesian* list and Infinitary list *MQL* also called *quasi-exact* list are considered. They play an important role in investigations of expressive power of first-order Predicate Logic. The series is attended to give definitions for these base concepts and study their main properties in maximum laconic form.

In this work, signature reduction procedures and constructions of finitely axiomatizable theories are characterized in general, and fast definitions for both Finitary and Infinitary lists are given.

Preliminaries. Base concepts used in the work can be found in [1]–[3]. The set of all formulas of signature σ is denoted by $FL(\sigma)$, while $SL(\sigma)$ is the set of all sentences (closed formulas) of signature σ . Tarski-Lindenbaum algebra of sentences of theory T is denoted by $\mathcal{L}(T)$. A finite signature is called *rich*, if it contains at least one n -ary predicate or functional symbol for $n \geq 2$, or two unary functional symbols. A signature σ is called *enumerable*, if the set $FL(\sigma)$ admits a Godel enumeration. Only enumerable signatures are considered. *Model* versions of lists represent model-theoretical properties definable by means of arbitrary first-order formulas, while *algebraic* versions use $\exists \cap \forall$ -formulas, i.e., formulas that are equivalent to \exists -formulas, and simultaneously, to \forall -formulas. Abbreviations: f.a. means finitely axiomatizable, r.a. means recursively axiomatizable.

1. Superstructure and kernel-model. Elementary transformations of theories (including constructions) are interpretations of some special form. They are required for definition of Finitary and Infinitary lists. Concepts of *kernel* and *superstructure* or *envelope* are naturally defined for such interpretations, that is schematically shown in Fig. 1.

Purpose of a single stage is to transform a theory T in given class of theories to some theory S in another class of theories so that theory S would inherit as much model-theoretic properties of source theory T as possible. Relation between theories T and S are presented by an interpretation

Keywords: *First-order logic, theory, model, interpretation, algorithm*

2000 Mathematics Subject Classification: 03B10

© M. G. Peretyat'kin, 2008.

$I : T \rightarrow S$ whose features are common for all such stages. Any model \mathfrak{M} of theory S contains kernel $\mathfrak{N} = \mathbb{K}(\mathfrak{M})$, which is a model of theory T first-order definable in model of theory S according to the interpretation. On the other hand, the model \mathfrak{M} itself can be considered as superstructure or envelope over the kernel \mathfrak{N} , using for this denotation $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$. The purpose to transmit both

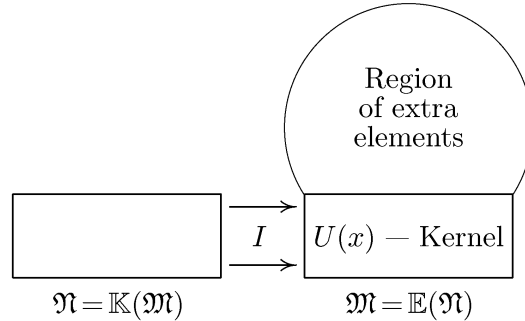


Fig 1: Superstructure and kernel-model.

structure of Tarski-Lindenbaum algebra and model-theoretic properties from theory T to theory S creates definite requirements on the construction. In main, theory $\text{Th}(E(\mathfrak{N}))$ must be complete for any model \mathfrak{N} of T , while model-theoretic properties of theory $\text{Th}(E(\mathfrak{N}))$ should in general be determined by kernel part \mathfrak{N} of this model. For this, some thin mechanism should be realized in superstructure, whose aim is to control theory of kernel; moreover, its negative influence on properties of theory S must be minimum possible.

2. Signature reduction method schematically. Give a sketch of signature reduction method.

As a matter of fact, various versions of this method were used by different authors in plenty of papers. Ordinarily, reduction of a theory of any signature to graphs is described as main procedure, while reduction to any other finite rich signature is stated as some simple modification of this main method. We include to here signature reduction procedure in very short description. Later, it is used in fast definitions of lists *ACL* and *MQL*. On the other hand, this short description represents a prototype of idea for particular procedures of such kind.

By *GR*, we denote well known graph theory defined by axioms

$$(\forall x)\neg\Gamma(x, x), \quad (\forall x)(\forall y)\Gamma(x, y) \leftrightarrow \Gamma(y, x),$$

while *GRE* means an extension of Graph theory with axioms $(\exists x, y)\Gamma(x, y)$ and $(\exists u, v)(u \neq v \wedge \neg\Gamma(u, v))$.

Let T be a theory of a finite or enumerable signature σ , which is supposed to be pure predicate for the sake of simplicity. Starting from T , we construct some new theory S extending graph theory *GR* together with an interpretation $I : T \rightarrow S$. Let \mathfrak{N} be a model of signature σ . Using this model, we construct a model $\mathfrak{M} = \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ of graph theory *GR* (called *envelope* for \mathfrak{N}) by the following procedure schematically presented in Fig. 2. We define $|\mathfrak{M}|$ to be equal $U \cup C \cup D$ where D is a finite set, U is a set of the same cardinality as $|\mathfrak{N}|$ (it is the domain of interpretation I), while the set C is determined later.

Truth values of predicates of signature σ whose I -images are defined in the domain U are encoded in theory S by means of special *configurations* in domain C . Variants of form of configurations represent different predicates of signature σ on tuples in U of corresponding arity. For n th m -ary predicate P_n^m of signature σ , configurations with m supports (legs) are used, in which all simple chains have lengths $n + 2$. Configuration of form (t) is built over any tuple where corresponding predicate is true, while configuration (f) represents false case.

Configurations for different predicates, or for the same predicate but for different tuples, should be disjointed in C , but they can have common elements in U . To each predicate $P \in \sigma$ and each

tuple of elements from U of corresponding length there should be exactly one configuration, either of the form (t), or form (f), which represents truth value of this predicate in given tuple. Now, define C as the set of elements of all coding configurations, excluding from them U -elements. Role of unique finite structure in D is to provide first-order definability of each element of this set in $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$ by means of an \exists -formula, and simultaneously by a \forall -formula; moreover, with the help of these definable elements we can distinguish sets U and C by first-order formulas in signature of graph theory.

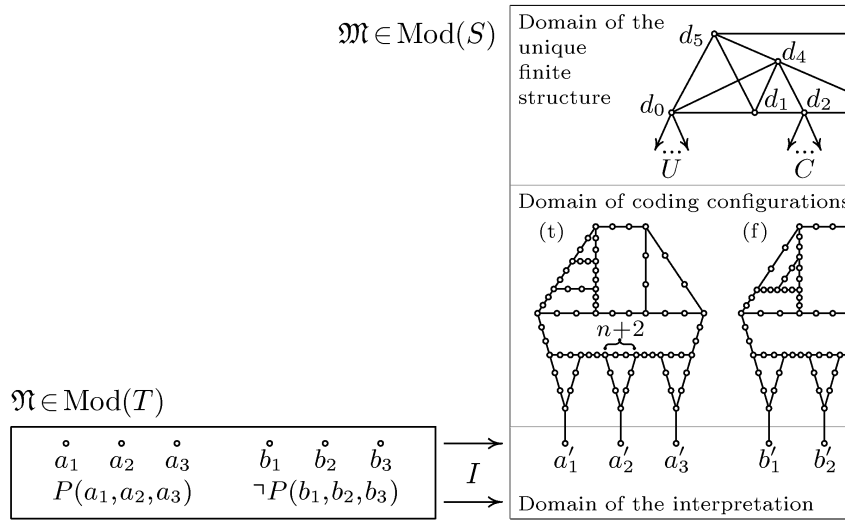


Fig 2: Reduction of a finite or infinite enumerable signature to graphs.

Now, we define S as theory of the class of all models of the form $\mathbb{E}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$. Via this construction an interpretation $I : T \rightarrow S$ is also naturally defined. If A is a set of axioms of T , then $\text{Frame} \cup I(A)$ is a system of axioms for S , where Frame represents common details of the construction, while $I(A)$ represents I -images of the axioms.

Two alternative versions of the method are possible.

Alternative 1 – signature σ is finite. In this case, we include in part Frame of axioms of S special statement that each element of domain C belongs to a coding configuration for some predicate $P \in \sigma$ over some tuple in U . In this case, interpretation I is *model bijective*, i.e., correspondence $\mathfrak{N} \mapsto \mathbb{E}(\mathfrak{N})$ is 1 – 1-mapping between classes of models of these theories T and S . Particularly, I defines recursive isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$ between the Tarski-Lindenbaum algebras. Moreover, very large list of model-theoretic properties is preserved by I . Notice that, we have in this case: T is f.a. theory $\Leftrightarrow S$ is f.a. theory, and T is r.a. theory $\Leftrightarrow S$ is r.a. theory.

Alternative 2 – signature σ is infinite. In this case, by compactness theorem, non-standard components of configurations can appear in models of theory S . Thus, interpretation I cannot be model bijective. It is required to provide in the construction that only simple forms for non-standard components of configurations were possible. For instance, if we use sequence of configurations of the form shown in Figure 2 where length $k = n+2$ is increased for different predicates, we obtain non-standard fragments of configurations only of three following types: (a) a support from an element a in U which has two infinite chains in region C , (b) a simple chain in C infinite in both directions, (c) an element generating 3 infinite chains in C , see Fig. 3. In a model, any number of fragments (a) may exist starting from any element a in U , and any number of fragments of types (b) and (c) may occur in region C . Given construction provides that interpretation I defines a recursive isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$ between the Tarski-Lindenbaum algebras. Moreover, some large list of model-theoretic properties is preserved by I . Notice that, we have in this case: T is r.a. theory $\Leftrightarrow S$ is r.a. theory.

One can note that, some obvious modification of described construction can perform reduction to a couple of unary functions or to a binary function. After that, reduction to any finite rich signature can easily be organized.

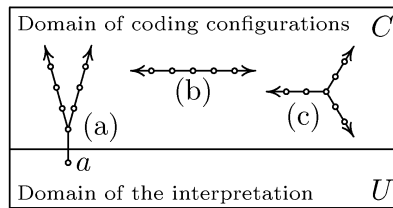


Fig 3: Types of nonstandard fragments.

Now we formulate two main signature reduction statements.

Claim 2.1. [FINITE SIGNATURE TRANSFORMATION] *Let T be an arbitrary r.a. theory of a finite signature, and σ be a finite rich signature. Effectively in T and σ , a pair of objects*

$$(S, \mu) = \text{Reduct_ff}(T, \sigma)$$

can be constructed of the following form:

*S is a r.a. theory in signature σ ,
 μ is a recursive isomorphism between $\mathcal{L}(T)$ and $\mathcal{L}(S)$.*

Moreover, the isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$ preserves all model-theoretic properties of list ACL. Particularly, theory S is f.a. \Leftrightarrow theory T is f.a.

Claim 2.2. [INFINITE-TO-FINITE SIGNATURE REDUCTION] *Let T be an arbitrary r.a. theory in an infinite signature, and σ be a finite rich signature. Effectively in T and σ , a pair of objects*

$$(S, \mu) = \text{Reduct_if}(T, \sigma)$$

can be constructed of the following form:

*S is a r.a. theory in signature σ ,
 μ is a recursive isomorphism between $\mathcal{L}(T)$ and $\mathcal{L}(S)$.*

Moreover, the isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$ preserves all model-theoretic properties of list MQL.

More simple entry `Reduct` is used as unified instead of introduced complete forms `Reduct_ff` called finite-to-finite, and `Reduct_if` called infinite-to-finite, when type of the transformation is clear from context. Term 'signature reduction procedure' is applied in any of the cases. But, sometimes finite-to-finite case is named as 'signature transformation' because this term better represents essence of the procedure.

3. A construction schematically. Now, idea of construction of finitely axiomatizable theories is considered in very common description. For the sake of definiteness, a construction is denoted by `CO`, while `CO.MS` means its main stage. Most common type of construction is considered, when an arbitrary recursively axiomatizable theory represents an input parameter of the construction.

From given r.a. theory T' , construction yields a finitely axiomatizable theory $F' = \text{CO}(T', \sigma)$ in given finite rich signature σ . Actually, transformation from T' to S' is performed in three stages as it is shown in Fig. 4. First, an auxiliary stage is performed that reduces given theory T' to a r.a. theory T in some special class. For this, suitable signature reduction procedure is applicable. Ordinarily, this stage yields a theory T in signature $\{\Gamma^2\}$ which is some r.a. extension of Graph theory either *GR* or *GRE*. Next stage `CO.MS` is main stage of the construction. Taking r.a. theory

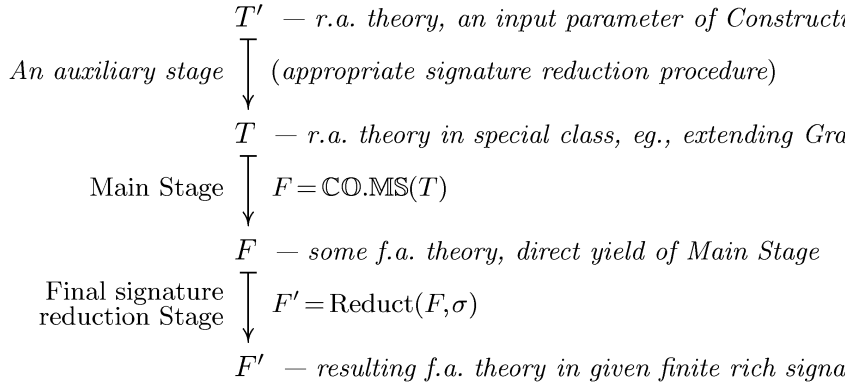


Fig 4: Stages of a construction of finitely axiomatizable theory.

T from pointed special class as an input parameter, it yields a finitely axiomatizable theory F in some finite signature. The last stage just performs transformation from theory F into a theory F' having required finite rich signature σ . For this, standard finite-to-finite signature transformation $\text{Reduct}(F, \sigma)$ is applied.

Now, specify *Main Stage* presenting principal part of construction.

A fixed Godel enumeration $\Phi_k, k \in \mathbb{N}$, for the set of sentences $SL(\{\Gamma^2\})$ is used in the construction. For given r.a. theory T extending Graph theory, consider theory $F = \text{CO.MS}(T)$ obtained as output of main stage of construction. This theory has domain of interpretation distinguished by unary predicate $U(x)$ in which a binary predicate Γ^2 is defined. Thus, kernel $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{M} \upharpoonright U; \Gamma^2 \rangle$ of model \mathfrak{M} represents a model in signature $\{\Gamma^2\}$.

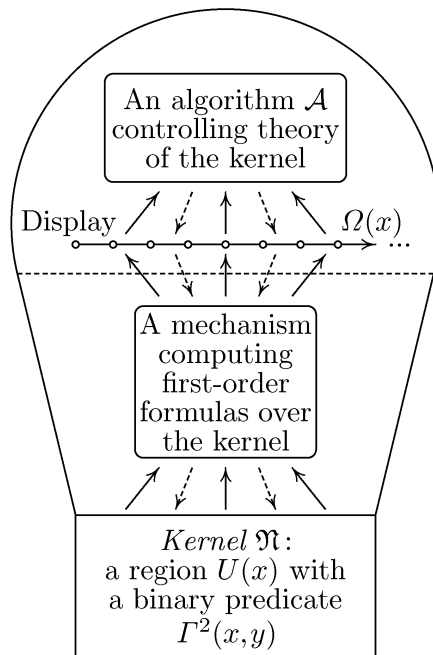


Fig 5: Integrated complex of computations in a theory.

A mechanism evaluating truth-values of formulas $\Phi \in SL(\{\Gamma^2\})$ in kernel of theory F is presented as an important part of the construction. As a result of its working, truth-values of formulas $\Phi \in SL(\{\Gamma^2\})$ are mapped on elements of a fragment in the model in form of a successor relation called *display*, where truth-values of formulas over kernel are presented by some unary predicate $\Omega(x)$ according to given Godel enumeration of formulas. For instance, $\Omega(x)$ is true on

the initial element of display, if and only if sentence Φ_0 is true in the kernel, next element of display represents truth value of Φ_1 in kernel, etc.

Finally, an algorithm \mathcal{A} is presenting in the construction, whose aim is to control theory of kernel model. Ordinarily, it is a Turing machine \mathcal{M} working over binary information available as an oracle in the region of display. Moreover, r.e. index of theory T (presenting r.e. system of axioms of the theory) is also available for \mathcal{M} . Program of this machine should ensure entering halt state in the case when information in the oracle field coding theory $\text{Th}(\langle \mathfrak{M} \upharpoonright U; \Gamma^2 \rangle)$ fails to represent an extension of theory T . In the construction, halt state is prohibited by special axiom of theory F . Thus, exactly models of theory T can be presented as kernel-model $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$ in a model \mathfrak{M} of theory F .

Notice that, normal arrows in Fig. 5 represent the way in which information concerning theory of kernel model is transformed through computing mechanisms in theory F . As for dashed arrows in back direction, they especially indicate that the working algorithm \mathcal{A} has an immediate influence on the class of models possible as kernel model in theory F .

4. Fast definitions for Finitary and Infinitary lists. We give some fast (preliminary) definitions for both list MQL and list ACL , as well as for their model/algebraic versions. Their relation to exact definitions is discussed later. Notice that, these fast definitions refer just to general idea of signature reduction procedures given above, while direct references to Claim 2.1 and Claim 2.2 are incorrect: these claims themselves can be proved just after complete definitions for the lists ACL and MQL were issued.

The definitions:

FAST DEFINITION 4.1(alg). *Finitary algebraic list ACL includes exactly those algebraic properties p which are preserved by interpretations $I : T \rightarrow S$ for all pairs of recursively axiomatizable theories T, S , where I is an interpretation defined in signature reduction procedure corresponding to Alternative 1 in Section 2.*

FAST DEFINITION 4.1(mod). *The same with 'model' properties instead of 'algebraic', gives valid definition for model version MCL of Finitary list.*

FAST DEFINITION 4.2(mod). *Infinitary model list MQL includes exactly those model properties p which are preserved by interpretations $I : T \rightarrow S$ for all pairs of recursively axiomatizable theories, where I is an interpretation defined in signature reduction procedure corresponding to Alternative 2 in Section 2.*

FAST DEFINITION 4.2(alg). *The same with 'algebraic' properties instead of 'model', gives valid definition for algebraic version AQL of Infinitary list.*

The following method is available to proceed with the definitions.

Having some model-theoretic property p , one can try to prove if this property is preserved by any interpretation I of the form described in Section 2 above, either for Alternative 1 or for Alternative 2, depending of tested list and of the version considered, model or algebraic. For this, some extra details may be added to available sketch of the signature reduction procedure. If such personal investigation of reader passes, this definitely points out that property p belongs to corresponding list, otherwise, does not.

Finalizing notes. Emphasize a fine moment of the paper.

Both infinite-to-finite signature reduction procedures and constructions admit nonstandard fragments of configurations in their models, while finite-to-finite signature transformation procedures does not. Actually, this property is characteristic: signature reduction procedures for Alternative 1 preserve large Finitary list ACL of model-theoretic properties, while both signature reduction procedures for Alternative 2 and constructions preserve smaller Infinitary list.

Цитированная литература

1. **Hodges W.** A shorter model theory. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
2. **Rogers H.J.** Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.
3. **Peretyat'kin M. G.** Finitely axiomatizable theories. Plenum, New York, 1997.

Поступила в редакцию 10.06.2008г.

УДК 517.938

О СВОЙСТВАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРА

М. И. РАХИМБЕРДИЕВ, А. О. СУЛТАНБЕКОВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 marat.ir@math.kz, sultanbekova@math.kz

Устанавливаются условия непрерывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений второго порядка как функций параметра, входящего линейно в коэффициент при первой производной искомой функции.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega a(t)\dot{x} + b(t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \omega \in [0, 1], \quad (1)$$

где $a, b \in C^+$, C^+ – пространство непрерывных и ограниченных на неотрицательной полуоси \mathbb{R}^+ функций с метрикой $d(a_1, a_2) = \sup_{\mathbb{R}^+} |a_1(t) - a_2(t)|$.

Целью данного исследования является изучение показателей Ляпунова как функций параметра ω . Используемые здесь общие сведения по теории показателей Ляпунова содержатся в книге [1]. Для любого нетривиального решения $x(t)$ уравнения (1) показатель $\lambda(x)$ определяется формулой

$$\lambda(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{x(t)^2 + \dot{x}(t)^2},$$

то есть показателями уравнения (1) являются показатели $\lambda_1(\omega) \geq \lambda_2(\omega)$ нормального базиса эквивалентной этому уравнению системы

$$\dot{y} = A(t) \cdot y, \quad \text{где } y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y_1 = x, \quad y_2 = \dot{x}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -\omega a(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Известно, что показатели линейной дифференциальной системы являются разрывными функциями, причем строго второго класса Бэра в пространстве всех линейных систем с равномерной метрикой (см. [2,3,4]). В [5,6] показано, что существуют уравнения вида (1) и вида

$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + \omega b(t)y = 0$, для которых функции $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)$ также принадлежат строго второму классу Бэра на $[0,1]$. Здесь мы установим случаи их непрерывности. Обозначим

$$\alpha = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (-a(\tau)) d\tau, \quad \beta(t, \omega) = \exp\left[\omega \int_0^t (-a(\tau)) d\tau\right].$$

Теорема. Если $b(t) \equiv 0$, то функции $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)$ непрерывны на $[0,1]$.

Доказательство. Пусть $b(t) \equiv 0$ и $\alpha \geq 0$. Непосредственно проверяется, что система (2) имеет решения

$$\varphi_1 = (1, 0), \quad \varphi_2 = (\varphi_2^1, \varphi_2^2), \quad \varphi_2^1 = \int_0^t \beta(\tau, \omega) d\tau, \quad \varphi_2^2 = \beta(t, \omega).$$

Так как определитель Вронского матрицы $Y[\varphi_1, \varphi_2]$ при $t = 0$ равен 1, то φ_1, φ_2 – линейно независимые решения системы (2). Ясно, что $\lambda(\varphi_1) = 0$. Покажем, что $\lambda(\varphi_2) = \omega a$. Согласно лемме Ляпунова (см. [1], с. 547) $\lambda(\varphi_2^1) \leq \lambda(\varphi_2^2)$, поэтому с учетом неравенства $\lambda(\varphi_2) \leq \max(\lambda(\varphi_2^1), \lambda(\varphi_2^2))$ (см. [1] с.20) имеем $\lambda(\varphi_2) \leq \omega a$. С другой стороны из неравенства $\|\varphi_2\| \geq |\varphi_2^2|$ следует, что $\lambda(\varphi_2) \geq \lambda(\varphi_2^1) = \omega a$. Итак, установлено требуемое равенство. Решения φ_1, φ_2 образуют нормальный базис системы (2). Действительно, для фундаментальной системы решений системы (2) φ_1, φ_2 выполнено равенство Ляпунова (см. [7], с. 152)

$$\lambda(\varphi_1) + \lambda(\varphi_2) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t SpA(u) du = \omega a,$$

что означает нормальность базиса φ_1, φ_2 . Поэтому $\lambda_1(\omega) = \omega a, \lambda_2(\omega) = 0$. Отсюда следует непрерывность показателей на $[0,1]$.

Рассмотрим случай $\alpha < 0$. Система (2) имеет фундаментальную систему решений

$$\varphi_1 = (1, 0), \quad \varphi_2 = (\varphi_2^1, \varphi_2^2), \quad \varphi_2^1 = - \int_t^{+\infty} \beta(\tau, \omega) d\tau, \quad \varphi_2^2 = \beta(t, \omega),$$

что легко проверяется. Аналогично предыдущему случаю, применяя неравенство Ляпунова, затем равенство Ляпунова, получаем $\lambda_1(\omega) = 0, \lambda_2(\omega) = \omega a$, следовательно, непрерывность показателей на $[0,1]$ и в этом случае. Теорема доказана.

Рассмотрим далее уравнение (1) без предположения $b(t) \equiv 0$. Введем дополнительное условие дифференцируемости на функции $a(t)$ и ограниченности на R^+ ее производной. Тогда известным способом, а именно, заменой $x = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \int_0^t a(s) ds\right) z$ уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$\ddot{z} = p(t) \cdot z, \tag{3}$$

где $p(t) = b(t) - \frac{1}{4}\omega^2 a^2(t) - \frac{1}{2}\dot{a}(t)$.

Заметим, что при сделанных предположениях $p(t)$ – непрерывная и ограниченная на R^+ функция.

Запишем соответствующее этому уравнению эквивалентную систему

$$\dot{u} = A(t) \cdot u, \quad \text{где } u = (u_1, u_2) \in R^2, \quad u_1 = z, \quad u_2 = \dot{z}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из равенства $y_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \int_0^t a(s)ds\right)u_1$ следует, что $y_2 = -\frac{1}{2}\omega a(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \int_0^t a(s)ds\right)u_1 + \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \int_0^t a(s)ds\right)u_2$.

Поэтому $y = L(t) \cdot u$, где $L(t) = \beta^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega a(t) & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\left| \int_0^t a(s)ds \right|$ – ограниченная на R^+ функция. Тогда очевидно, что матрицы $|L(t)|$, $|L^{-1}(t)|$, $|\dot{L}(t)|$ ограничены на R^+ . Отсюда следует, что преобразование $y = L(t) \cdot u$ – ляпуновское (см. [1], с. 74). В этом случае показатели систем (2) и (4) совпадают.

Теорема. Пусть дано уравнение (1) и выполнены следующие условия:

1. $a(t), \dot{a}(t), b(t) \in C^+$,
2. $\sup_t \left| \int_0^t a(s)ds \right| \leq +\infty$.

Тогда для всех $\omega \in [0, 1]$, для которых $\sup_t b(t) - \frac{1}{4}\omega^2 a^2(t) - \frac{1}{2}\dot{a}(t) < C$ с некоторой постоянной $C < 0$, функции $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)$ непрерывны в этой точке.

Доказательство. Из условий 1, 2 вытекает, что приведенное уравнение (3), соответствующее уравнению (1), принадлежит тому же классу, что и (1). Из условия 3 следует экспоненциальная разделенность системы (4) (см. [8]), что согласно теореме 15.2.1 (см. [1], с. 208) означает непрерывность показателей системы (4). Поэтому, в силу совпадения показателей системы (2) и (4) данный вывод справедлив и для показателей системы (2).

Цитированная литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. Бэр Р. Теория разрывных функций. М., 1932.
3. Миллионщиков В. М. // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408 – 1416.
4. Рахимбердиев М. И. // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925 – 931.
5. Султанбекова А. О. // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 91 – 95.
6. Султанбекова А. О. // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 4(22). С. 102 – 106.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
8. Рахимбердиев М. И. // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1279 – 1281.

Поступила в редакцию 07.12.2007г.

УДК 517.624.3

ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С. М. ТЕМЕШЕВА

Алматинский институт энергетики и связи
050010 Алматы ул. Байтурсынова, 126 nur15@mail.ru

На основе метода параметризации предложен способ выбора начального приближения для нелинейной двухточечной краевой задачи.

Рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|, \quad (1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \quad (2)$$

где $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $g : R^n \times R^n \rightarrow R^n$ непрерывны.

Одной из основных проблем в нелинейных краевых задачах является выбор начального приближения. В методе стрельбы и его модификациях эта проблема требует нахождения начального значения задачи Коши или начальных значений задач Коши на интервалах разбиения отрезка $[0, T]$, при которых соответствующие им решения рассматриваемого дифференциального уравнения будут мало отличаться от решения исходной краевой задачи.

В данной работе предлагается один из способов выбора начального приближения решения задачи (1), (2), основанный на решении системы нелинейных уравнений, составленной по исходным данным.

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия существования изолированного решения задачи (1), (2), предложено двухпараметрическое семейство алгоритмов нахождения ее решения. Числовыми параметрами семейства алгоритмов являются шаг разбиения отрезка $[0, T]$ – $h > 0 : Nh = T$ и число используемых в алгоритме повторных интегралов ν .

По функциям f , g , шагу разбиения h и числу ν составим систему нелинейных уравнений

$$h \cdot g \left[\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau_1, \lambda_N + \dots + \int_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N) d\tau_\nu \dots) d\tau_1 \right] = 0, \quad (3)$$

Keywords: *parameterization's method, nonlinear two-point boundary-value problem, initial approach*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

© С. М. Темешева, 2008.

$$\lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} f\left(\tau_1, \lambda_s + \dots + \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (4)$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \quad (5)$$

В работе [1, с. 51] при определенных условиях установлена оценка (2.25), которая показывает, что решение системы уравнений (5) – вектор $\lambda^{(0)}$ будет тем ближе к значениям решения задачи (1), (2) в точках $t = (r-1)h$, $r = \overline{1, N}$, чем меньше шаг $h > 0 : Nh = T$ и чем больше число $\nu \in \mathbb{N}$.

Структура уравнений системы (3), (4) тем проще, чем меньше число ν и количество уравнений системы тем меньше, чем больше шаг разбиения отрезка $[0, T]$. Ранее в [2] был предложен способ постепенного продвижения по ν от меньшего к большему: в предположении, что решение уравнения $Q_{\nu-1,h}(\lambda, 0) = 0$ – вектор $\tilde{\lambda}_{(\nu-1)} \in R^{nN}$ известен, на основе итерационных процессов с демпфирующими множителями [1], ищется решение уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0$; в качестве начального приближения решения последнего уравнения берется известное решение $\tilde{\lambda}_{(\nu-1)} \in R^{nN}$. Установлена оценка разности решений $\tilde{\lambda}_{(\nu-1)} \in R^{nN}$ и $\tilde{\lambda}_{(\nu)} \in R^{nN}$.

В данной работе предлагается алгоритм нахождения решения уравнения (5), основанный на постепенном уменьшении шага $h > 0 : Nh = T$.

Предположим, что при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ и $h > 0 : Nh = T$, $N = 1, 2, \dots$, уравнение (5) имеет решение $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$. Уменьшим шаг разбиения в два раза и рассмотрим уравнение

$$Q_{\nu,\hat{h}}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{2nN}, \quad (6)$$

где $\hat{h} = h/2$.

Чтобы решить уравнение (6), воспользуемся теоремой 1 из [1, с. 51]. За начальное приближение решения уравнения (6) возьмем вектор $\hat{\lambda}^{(0)} = (\hat{\lambda}_1^{(0)}, \hat{\lambda}_2^{(0)}, \dots, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)})' \in R^{2nN}$, где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1^{(0)} &= \tilde{\lambda}_1, & \hat{\lambda}_2^{(0)} &= \tilde{\lambda}_1 + \int_0^{\hat{h}} f\left(\tau_1, \tilde{\lambda}_1 + \dots + \int_0^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_1) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1, \\ \hat{\lambda}_3^{(0)} &= \tilde{\lambda}_2, & \hat{\lambda}_4^{(0)} &= \tilde{\lambda}_2 + \int_{\frac{3\hat{h}}{2}}^{\hat{h}} f\left(\tau_1, \tilde{\lambda}_2 + \dots + \int_{\frac{2\hat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_2) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1, \\ &\dots, & & \\ \hat{\lambda}_{2N-1}^{(0)} &= \tilde{\lambda}_N, & \hat{\lambda}_{2N}^{(0)} &= \tilde{\lambda}_N + \int_{\frac{2(N-1)\hat{h}}{2}}^{\frac{(2N-1)\hat{h}}{2}} f\left(\tau_1, \tilde{\lambda}_N + \dots + \int_{\frac{2(N-1)\hat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_N) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть существуют $h > 0 : Nh = T (N = 1, 2, \dots)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ и выполнены следующие предположения:

1) функции $f(t, x)$, $g(v, w)$ соответственно в $G_1(\hat{\lambda}^{(0)}, \rho) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - \hat{\lambda}_s^{(0)}\| < \rho, t \in [(s-1)\hat{h}, s\hat{h}], s = \overline{1, 2N-1}, \|x - \hat{\lambda}_{2N}^{(0)}\| < \rho, t \in [(2N-1)\hat{h}, 2N\hat{h}]\}$, $G_2(\hat{\lambda}^{(0)}, \rho) = \{(v, w) : \|v - \hat{\lambda}_1^{(0)}\| < \rho, \|w - \hat{\lambda}_{2N}^{(0)}\| < \rho\}$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t, x)$, $g'_v(v, w)$, $g'_w(v, w)$ и выполняются неравенства

$$\|f'_x(t, x)\| \leq L(t), \quad \|g'_v(v, w)\| \leq L_1, \quad \|g'_w(v, w)\| \leq L_2,$$

где $L(t) \in C([0, T], R^1)$, L_1, L_2 – постоянные;

2) матрица Якоби $\frac{\partial Q_{\nu, \hat{h}}(\lambda, 0)}{\partial \lambda}$ обратима и $\left\| \left[\frac{\partial Q_{\nu, \hat{h}}(\lambda, 0)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_\nu(\hat{h})$ для всех $\lambda \in S(\hat{\lambda}^{(0)}, \rho_1) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N})' \in R^{2nN} : \|\lambda_r - \hat{\lambda}_r^{(0)}\| < \rho_1, r = \overline{1, 2N}\}$;

3) $\gamma_\nu(\hat{h}) \|Q_{\nu, \hat{h}}(\hat{\lambda}^{(0)}, 0)\| < \rho$.

Тогда уравнение (6) имеет изолированное решение $\hat{\lambda}^* \in S(\hat{\lambda}^{(0)}, \rho_1)$, для которого справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^* - \hat{\lambda}^{(0)}\| &\leq \gamma_\nu(\hat{h}) \max(\hat{h}L_2, 1) \cdot \max_{r=\overline{1, N}} \left\{ \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{j!} \left(\int_{(2r-1)\hat{h}}^{2r\hat{h}} L(t) dt \right)^j \times \right. \\ &\times \left. \left\| \int_{(2r-2)\hat{h}}^{(2r-1)\hat{h}} f\left(\tau_1, \tilde{\lambda}_r + \dots + \int_{(2r-2)\hat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_r) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. При выполнении предположений 1), 2), 3) по теореме 1 [1, с. 41] существует число $\alpha \geq 1$ такое, что последовательность $\{\hat{\lambda}^{(m)}\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определенная по итерационному процессу

$$\hat{\lambda}^{(m+1)} = \hat{\lambda}^{(m)} - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial Q_{\nu, \hat{h}}(\hat{\lambda}^{(m)}, 0)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \cdot Q_{\nu, \hat{h}}(\hat{\lambda}^{(m)}, 0), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $\hat{\lambda}^{(0)}$ определяется по формулам (7), сходится к изолированному решению $\hat{\lambda}^* \in S(\hat{\lambda}^{(0)}, \rho_1)$ системы уравнений (6) и выполняется неравенство:

$$\|\hat{\lambda}^* - \hat{\lambda}^{(0)}\| \leq \gamma_\nu(\hat{h}) \|Q_{\nu, \hat{h}}(\hat{\lambda}^{(0)}, 0)\|. \quad (10)$$

Учитывая, что $Q_{\nu, h}(\tilde{\lambda}, 0) = 0$, где $h = 2\hat{h}$, и компоненты вектора $\hat{\lambda}^{(0)} \in R^{2nN}$ определены через $\tilde{\lambda} \in R^{nN}$ по формулам (7), оценим $\|Q_{\nu, \hat{h}}(\hat{\lambda}^{(0)}, 0)\|$:

$$\begin{aligned} \|Q_{\nu, \hat{h}}(\hat{\lambda}^{(0)}, 0)\| &\leq \max \left\{ \hat{h} \cdot \left\| g \left[\hat{\lambda}_1^{(0)}, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)} + \int_{(2N-1)\hat{h}}^{2N\hat{h}} f\left(\tau_1, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)} + \dots + \int_{(2N-1)\hat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right] \right\|, \right. \\ &\max_{s=\overline{1, 2N-1}} \left\| \hat{\lambda}_s^{(0)} + \int_{(s-1)\hat{h}}^{s\hat{h}} f\left(\tau_1, \hat{\lambda}_s^{(0)} + \dots + \int_{(s-1)\hat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \hat{\lambda}_s^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \hat{\lambda}_{s+1}^{(0)} \right\| = \\ &= \max \left\{ \hat{h} \cdot \left\| g \left[\hat{\lambda}_1^{(0)}, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)} + \int_{(2N-1)\hat{h}}^{2N\hat{h}} f\left(\tau_1, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)} + \dots + \int_{(2N-1)\hat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \hat{\lambda}_{2N}^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right] - \right. \\ &\left. - g \left[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_N + \int_{2(N-1)\hat{h}}^{2N\hat{h}} f\left(\tau_1, \tilde{\lambda}_N + \dots + \int_{2(N-1)\hat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_N) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right] \right\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \max_{s=1, N} \left\| \widehat{\lambda}_{2s-1}^{(0)} + \int_{2(s-1)\widehat{h}}^{(2s-1)\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widehat{\lambda}_{2s-1}^{(0)} + \dots + \int_{2(s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widehat{\lambda}_{2s-1}^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \widehat{\lambda}_{2s}^{(0)} - \right. \\
 & \quad \left. - \widetilde{\lambda}_s - \int_{2(s-1)\widehat{h}}^{2s\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widetilde{\lambda}_s + \dots + \int_{2(s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_s) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 + \widetilde{\lambda}_{s+1} \right\|, \\
 & \max_{s=1, N-1} \left\| \widehat{\lambda}_{2s}^{(0)} - \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{2s\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widehat{\lambda}_{2s}^{(0)} + \dots + \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widehat{\lambda}_{2s}^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \widehat{\lambda}_{2s+1}^{(0)} - \right. \\
 & \quad \left. - \widetilde{\lambda}_s - \int_{2(s-1)\widehat{h}}^{2s\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widetilde{\lambda}_s + \dots + \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_s) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 + \widetilde{\lambda}_{s+1} \right\| \leq \\
 & \leq \max \left\{ \widehat{h} L_2 \cdot \left\| \widehat{\lambda}_{2N}^{(0)} + \int_{(2N-1)\widehat{h}}^{2N\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widehat{\lambda}_{2N}^{(0)} + \dots + \int_{(2N-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widehat{\lambda}_{2N}^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \right. \right. \\
 & \quad \left. - \widetilde{\lambda}_N - \int_{2(N-1)\widehat{h}}^{2N\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widetilde{\lambda}_N + \dots + \int_{2(N-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_N) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right\|, \\
 & \max_{s=1, N-1} \left\| \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{2s\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widehat{\lambda}_{2s}^{(0)} + \dots + \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widehat{\lambda}_{2s}^{(0)}) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 - \right. \\
 & \quad \left. - \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{2s\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widetilde{\lambda}_s + \dots + \int_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_s) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right\| \leq \\
 & \leq \max(\widehat{h} L_2, 1) \cdot \max_{r=1, N} \left\{ \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{j!} \left(\int_{(2r-1)\widehat{h}}^{2r\widehat{h}} L(t) dt \right)^j \left\| \int_{2(r-1)\widehat{h}}^{(2r-1)\widehat{h}} f\left(\tau_1, \widetilde{\lambda}_r + \dots + \int_{2(r-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_r) d\tau_\nu \dots\right) d\tau_1 \right\| \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, из (10) следует (8). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т.47, №1. С. 39 – 63.
2. Джумабаев Д.С., Темешева С.М. //Матем. журнал. Алматы. 2004. Т.4, №2. С. 47 – 51.

Поступила в редакцию 25.02.2008г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.9

2000 MSC: 35Q60, 83C50

Alekseyeva L. A. **Generalized solutions of boundary value problems for one class of running solutions of wave equation**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.5 – 24.

The generalized function method is developed for solving the boundary value problem for one class of stationary running solutions of wave equation in cylindrical domains of N-dimension. The cases of subsonic and supersonic motion of disturbances south are considered. In first case the equation in moving coordinates system is elliptical, in second case it is hyperbolic. By using generalized functions theory the dynamic analogues of Green's and Gauss's formulae are obtained in the distributions space. Their integral representation for different N are constructed. On their base the resolved singular integral equations are received. The theorems about unity of BVP solutions are proved, also for shock waves.

References – 5.

УДК: 517.9

2000 MSC: 35Q60, 83C50

Алексеева Л. А. **Толқын теңдеуінің жүгірмелі шешімдерінің бір классы үшін шекаралық есептердің жалпылама шешімдері** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.5 – 24.

N-өлшемді цилиндрлік облыстардағы толқын теңдеуінің стационар жүгірмелі шешімдерінің бір классы үшін шекаралық есептердің жалпылама шешімдерінің әдісі дамытылған. Жылжымалы координат жүйесінде дыбыстан жоғары жылдамдық кезінде -гипер болалық, ал дыбыстан төмен жылдамдық кезінде - эллиптикалық болатын теңдеу түріне әсер ететін дыбыстан төмен және дыбыстан жоғары жағдайдағы әсер етуші күштің көзі қарастырылған. Әртүрлі N үшін жалпыланған функциялар кеістігіндегі жалпыланған функциялар теориясын қолданып Грин және Гаусс формулаларының динамикалық аналогтары алынып, олардың интегралдық түрі берілді. Оларды негізінде сингулярлық шекаралық интегралдық шешуші тедеулер қарастырылды. Қойылған шекаралық есептер үшін және соқпа толқындар үшін жалғыздық теоремалары дәлелденді.

Библ. – 5.

УДК: 517.956, 517.968.2

2000 MSC: 45D05

Akhmanova D. M., Dzhenaliyev M. T., Ramazanov M. I. **About Solvability of special Volterra integral equation of second kind with spectral parameter** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.25 – 37.

In this work investigate a questions of the solvability of special Volterra integral equation of the second kind with spectral parameter λ arising in the theory of boundary value problems for spectrally loaded parabolic equations in unbounded region. The order of the derivative in the loaded summand is equal to the order of the differential part of the operator.

References – 7.

УДК: 517.956, 517.968.2

2000 MSC: 45D05

А х м а н о в а Д. М., Ж и е н ә л и е в М. Т., Р а м а з а н о в М. Ы. **Спектралды параметрлі 2-ші текті Вольтерра ерекше интеграл теңдеуінің шешілетінділігі туралы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.25 – 37.

Бұл жұмыста λ -спектралды параметрлі 2-ші текті Вольтерра ерекше интеграл теңдеуінің шешілетінділігі зерттеледі. Ол теңдеулер шектелмеген облыстардағы спектралды жүктелген параболалық теңдеулердің шекаралық есептерінде кездеседі. Жүктелген мүше туындысының реті теңдеудің дифференциалдық бөлігінің ретімен бірдей.

Библ. – 7.

УДК: 517.958:[536.2+539.219.3]

2000 MSC: 42A16

Berikkyzy J., Kharin S. N. **The method of solution of the Verigin's problem on oil-water contact in elastic conditions** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.38 – 43.

The inverse Verigin's problem for two types of the piezoconductivity equation is considered. It describes dynamics of pressure in an oil-water contact of injection galleries with various geometry. This problem is solved using the method of Hartree's functions and degenerate hypergeometric functions. The solution is found in the explicit analytic form. A worked example is given.

References – 3.

УДК: 517.958:[536.2+539.219.3]

2000 MSC: 42A16

Б е р и к қ ы з ы Ж., Х а р и н С. Н. **Серпімді режим шартында сумұнай түйісі туралы кері Веригин есебін шешу әдісі** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.38 – 43.

Әртүрлі геометриядағы айдаушы галереяның сумұнай түйісуіндегі қысымының динамикасын суреттейтін екі түрлі пьезоөткізгіштік теңдеу үшін Веригин кері есебі қарастырылды. Бұл есеп Хартри арнайы функция және азынған гипергеометрия функциясы аппараты арқылы шешілді. Шешім айқын аналитикалық пішінде шешілді. Есептеу мысалы келтірілді.

Библ. – 3.

УДК: 517.968.72

2000 MSC: 45J05

Dzhumabaev D. S. **The unique solvability criterion of linear boundary value problem's for integral differential equations' systems**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.44 – 48.

The method of investigation and solving for linear two-point boundary value problem for the system of integral differential equations is proposed. The necessary and sufficient conditions for the problem's unique solvability are obtained.

References – 3.

УДК: 517.968.72

2000 MSC: 45J05

Жұмабаев Д. С. **Интегралдық – дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықты шеттік есептің бірімәнді шешілімдігінің критеріі**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.44 – 48.

Интегралдық - дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есепті зерттеу мен шешу әдісі ұсынылады. Қарастырылып отырған есептің бірімәнді шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Библ. – 3.

УДК: 517.925:62.50

2000 MSC: 34K20, 93C15, 34K29

Zhumatov S. S. **Dissipativity of non-linear control systems' program manifold**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.49 – 54.

Differential systems with given integral manifold are considered. Sufficient condition of uniform dissipativity of non-linear system's program manifold with respect to given vector-function is received on the base of the second Lyapunov's method. The frequency conditions of dissipativity of control system's program manifold are established.

References – 21.

УДК: 517.925:62.50

2000 MSC: 34K20, 93C15, 34K29

Жұматов С. С. **Бейсызық басқару жүйелерінің бағдарламалық көпбейнесінің диссипативтігі**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.49 – 54.

Берілген интегралдық көпбейнесі бар дифференциалдық жүйелер қарастырылады. Ляпуновтың екінші әдісінің көмегімен берілген функцияға қатысты бейсызық жүйелердің бағдарламалық көпбейнесінің бірқалыпты диссипативтігінің жеткілікті шарты алынды. Басқарылымды жүйелердің бағдарламалық көпбейнесінің диссипативтігінің жиілікті шарты тағайындалды.

Библ. – 21.

УДК: 517.956.3

2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

Kabdrahova S. S. **Modification Eulers broken lime method to solving for semi-periodical boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.55 – 62.

Modification Eulers broken lime method is used for finding of initial approaching solution of semi-periodical boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation with mixed derivative. Sufficient conditions of the existence of a isolated solution of considering problem and estimate of difference between solution and initial approaching are established.

References – 2.

УДК: 517.956.3

2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

Қабдрахова С. С. **Сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылайпериодты шеттік есепті шешуде сынық сызықты Эйлер әдісін модификациялау**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.55 – 62.

Аралас туындылы сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есептің бастапқы жуықтауын табуға Эйлер әдісі модификациясы қолданылған. Қарастырылып отырған есептің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары және бастапқы жуықтау мен шешімнің айырмалары арасындағы бағалаулар алынған.

Библ. – 2.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B08

Medetbekova R. A., Minglibayeva B. B. **On solvability of nonlinear two-point boundary-value problem with parameter** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P. 63 – 71.

The algorithm of solution's finding of of non-linear boundary value problem with parameter based on introduction of additional parameters is proposed. The sufficient conditions of algorithm's convergence and existence of considering problem's isolated solution are obtained.

References – 12.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B08

Медетбекова Р. А., Минглибаева Б. Б. **Параметрі бар сызықты емес қос нүктелі шеттік есептің шешімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.63 – 71.

Сызықты емес параметрі бар шеттік есептің шешімін табудың қосымша параметр енгізуге негізделген алгоритмі ұсынылады. Алгоритмнің жинақталуының және қарастырылып отырған есептің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынды.

Библ. – 12.

УДК: 517.956.3

2000 MSC: 35L20, 35L70

Оспанов М. Н. **The coercive estimates for the solution of third order singular partial differential equation** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P. 72 – 78.

The coercive solvability for third order singular partial differential equation with unbounded coefficients are received.

References – 2.

УДК: 517.956.3

2000 MSC: 35L20, 35L70

Оспанов М. Н. **Үшінші ретті дербес туындылардағы сингулярлы теңдеудің шешімдерінің қасиеттері** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.72 – 78.

Үшінші ретті дербес туындылардағы сингулярлы теңдеудің коэрцитивті шешілетіні дәлелденген.

Библ. – 2.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Рак А. А. **Fast independent component analysis in the representation task of geomagnetical indices** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P. 79 – 89.

In this article we consider the problem of revealing the common properties of the time dependence of cosmic weather indices and the creation of a representational data base. In order to solve this task we use independent component analysis. The main distinction of this method from traditional approaches is the statistical search of hidden regularities.

References – 19.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

П а к А . А . **Көрсеткіштіктердің геомагниттік активтілігінің мәселесіндегі тәуелсіз негізгі құрамдардың тезделген әдісі**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б. 79 – 89.

Күн мен жердің байланыстарын суреттейтін әр-түрлі көрсеткіштер бар. Олар бойынша үлкен санақтық қор жиналған. Бұл көрсеткіштердің барлығы бір-бірімен байланысады. Қазіргі уақытта зерттеулер әлемдік ауа райының көрсеткіштерінің уақытта тәуелділігінің жалпы қасиеттерін анықтауға және көрсеткіштік деректер қорын құруға бағытталған. Берілген жұмыста қойылған есепті шешуге тәуелсіз құрамдарды талдау әдісі қолданылады. Бұл әдіс байланыстарды табу барысында санақтық әдістемені қолданатыны үшін сызықсыз әдіс болып табылады.

Библ. – 19.

УДК: 510.6

2000 MSC: 03B10

П е р е т я т ь к и н М . Г . **Прямые определения финитарного и инфинитарного отношений подобия теорий. Часть 1: Процедуры редукции сигнатур и конструкции кратко и быстрые определения для финитарного и инфинитарного списков** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.90 – 96.

В серии из нескольких работ рассматривается финитарный список теоретико-модельных свойств, называемый *алгебраическим Декартовым* списком, а также инфинитарный список называемый *квази-точным* списком. Они играют важную роль в исследовании выразительных возможностей логики предикатов первого порядка. Основная цель серии состоит в том чтобы дать определения этих базовых понятий и изучить их важнейшие свойства, используя отдельный максимально сжатый текст.

В данной работе представлена общая идея процедур сведения сигнатур и конструкций конечно аксиоматизируемых теорий, а также даны быстрые определения для финитарного и инфинитарного списков.

References – 3.

УДК: 510.6

2000 MSC: 03B10

П е р е т я т ь к и н М . Г . **Тазартылған финитарлы және инфинитарлы қатнастардың уқсас теориялардың анықтамалары. Тарау 1: Құрулар және келтіру сигнатуралардың құрылымдары қысқаша, және финитарлы және инфинитарлы тізімдердің жылдам анықтамалары**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.90 – 96.

Алгебралық Декарт тізімі деп аталатын теориялық-сұлбелік қасиеттерінің финитарлы тізімі мен бірге *квази-дәл* тізімі деп аталатын инфинитарлы тізімі біршама жұмыстар тізбегінде қарастылырады. Олар бірінші ретті предикаттар логикасында айқын мүмкіндіктерді дерттеуде маңызды роль атқарады. Бұл тізбектің негізгі ролі және максималды сығылған мәтінді қолдана отырып осы негіздің түсініктерге анықтама беруде.

Жұмыста ақырлы аксиоматтау теориясының сигнатурасы мен құрылымдарын келтіру үрдістерінің жалпы идеясы келтіріледі сонымен бірге финитарлы және инфинитарлы тізімдер үшін жылдам анықтамалары беріледі.

Библ. – 3.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Rahimberdiyev M. I., Sultanbekova A. O. **About properties of Lyapunov's exponents of the linear differential equations of the second order as functions of linear parameter** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.97 – 99.

Conditions of a continuity of Lyapunov's exponents of the linear differential equations of the second order as functions of the parameter entering linearly in coefficient at the first derivative of desired function are established.

References – 8.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Рахимбердиев М. И., Сұлтанбекова А. О. **Ляпуновтың 2-ші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеуінің кәсіеті сызықты параметр функциясы тәрізді** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.97 – 99.

Ляпуновтың 2-ші дәрежелі сызықты дифференциалдық теңдеуінің сызықты параметр функциясы негізінде үздіксіздік көрсеткішінің шарты ретінде құру, сызықты коэффициент жанында біріншілік алғашқы функция туындысы кірінді.

Библ. – 8.

УДК: 517.624.3

2000 MSC: 34B15

Temeshева S. M. **Choice of initial approximation of non-linear two points boundary value problem's** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 2 (28). P.100 – 103.

The way of choice of initial approximation for non-linear two points boundary value problem offered on the base of parameterization's method.

References – 2.

УДК: 517.624.3

2000 MSC: 34B15

Темешева С. М. **Сызықты емес екі нүктелі шеттік есеп үшін шешімінің бастапқы жуықтауын таңдау** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 2 (28). Б.100 – 103.

Параметр енгізу әдісі негізінде сызықты емес екі нүктелі шеттік есеп үшін шешімінің бастапқы жуықтауын таңдаудың тәсілі ұсынылған.

Библ. – 2.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 2 (28) 2008

Главный редактор:

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г. Бияшев, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий,
С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Жамбыла, 25, к.705

тел.: 8(7272)-91-13-15, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 27.06.2008г.

Тираж 300 экз. Объем 111 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: print_express@bk.ru